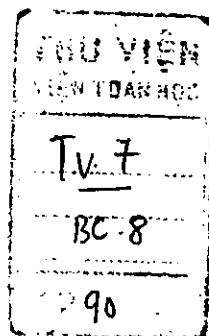


VIỆN KHOA HỌC VIỆT NAM

VIỆN TOÁN HỌC

# 20 NĂM HOẠT ĐỘNG CỦA VIỆN TOÁN HỌC

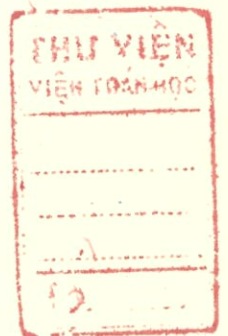




*Viện Toán học*



*GS: Lê Văn Thiên*



7  
Tôi thân ái gửi đến các đồng chí  
những sợi cần sợi đẹp nhất & sợi  
lụa chỉ may nông nhất nhất của tôi;  
Chức các đồng chí khôn đi phải đi  
nhằm tay sợi phân Xảy đây nhất  
của mình vào sự nghiệp các máy vi đại  
của dân tộc (đây là bài trước của bài sau)  
Mười rày, phải hân hoan hân hoan như  
và làm máy việc sau đây:

- 1) Xảy dây sợi nylon nhà toàn học có  
sức to đẹp nhất và yêu cầu trên đây;
- 2) Có sợi dây mọi các có sợi dây sợi  
phải vào công việc xảy dây và bài sẽ có  
thật là sợi đẹp về kịp để học, chỉ việc  
khi việc này;
- 3) Tuy giá sợi làm sợi việc trên, khi Xom có  
thể hiểu rằng, một cái gì sợi là học thuyết và  
nhất thật học học Việt Nam.

10-7-1986

Thân ái

Viện Toán học được thành lập và hoạt động từ tháng 9 năm 1970 theo quyết định số 25CP ngày 5/2/1969 của Hội Đồng Chính Phủ, trên cơ sở tổ chức tiên thân của Viện là Phòng Toán học thuộc Ban Toán-Lý Ủy Ban Khoa học và Kỹ thuật Nhà nước<sup>1</sup>.

Nhiệm vụ cụ thể của Viện là :

1. Tiến hành nghiên cứu cơ bản định hướng về toán học.
2. Giúp đỡ các ngành các cấp ứng dụng toán học vào vấn đề quản lý kinh tế và phát triển sản xuất.
3. Đào tạo cán bộ, chủ yếu là cán bộ trình độ cao.

Như vậy có thể nói Viện có hai mục tiêu cân song song thực hiện : một mặt phải phát triển toán học như một ngành khoa học cần thiết, mặt khác phục vụ trực tiếp sự nghiệp xây dựng đất nước. Hai mục tiêu này có liên quan chặt chẽ với nhau. Thực hiện tốt mục tiêu thứ nhất sẽ tạo điều kiện cho những nghiên cứu ứng dụng trình độ cao trước mắt và lâu dài, cho việc nâng cao chất lượng đào tạo nghiên cứu sinh để qua đó có ảnh hưởng gián tiếp đến chất lượng giáo dục đại học. Thực tiễn những năm qua còn chứng tỏ rằng trong quá trình thực hiện mục tiêu thứ nhất, qua con đường hợp tác quốc tế với các nước phương Tây, Viện đã đóng góp được một số ngoại tệ cho Nhà nước, góp phần xây dựng cơ sở vật chất cho Viện mà trong vòng hai mươi năm qua hầu như không được sự đầu tư nào đáng kể của Viện Khoa học Việt Nam. Ngược lại, thực hiện được mục tiêu thứ hai (đào tạo và ứng dụng toán học) lại có tác dụng kích thích việc phát triển toán học, hình thành các êkip nghiên cứu...

Hai mươi năm qua là thời gian phấn đấu gian khổ của Viện để thực hiện các mục tiêu nói trên. Hoàn cảnh chiến tranh và sự đầu tư còn hạn chế của Nhà nước là những khó khăn chủ yếu cho hoạt động của Viện. Trước những thử thách gay go đó, từ một cơ sở nhỏ bé ban đầu với số lượng cán bộ nghiên cứu là 22 người trong đó đại đa số (16 người) là cán bộ đại học có trình độ khoa học còn hạn chế và một cơ sở vật chất hầu như không có gì ngoài mấy giá sách với vài trăm cuốn sách, Viện đã vươn lên trở thành một cơ quan nghiên cứu toán học trưởng thành. Dưới đây chúng ta sẽ nêu lên những kết quả chủ yếu mà Viện đã đạt được trong thời gian qua.

<sup>1</sup> Phòng Toán học này ra đời từ năm 1962 theo sáng kiến của các giáo sư Lê Văn Thiêm và Hoàng Tụy.

## I. Các thành tích phát triển Viện

### A. Các kết quả nghiên cứu toán học và một số vấn đề ứng dụng toán học

Trong nghiên cứu cơ bản, việc chọn lựa phương hướng chiến lược cho các đề tài nghiên cứu là một vấn đề cực kỳ quan trọng. Nó quyết định xu hướng phát triển Viện trước mắt và có ảnh hưởng lâu dài tới vai trò của Viện trong tương lai. Về cơ bản, ngay từ khi thành lập, Viện đã quán triệt các phương châm đúng đắn sau đây để chọn lựa các đề tài nghiên cứu :

- Do quan niệm các kết quả nghiên cứu khoa học phải được xem là những sản phẩm hữu dụng, Viện đã giới hạn ở những đề tài mà kết quả thực hiện phải có ý nghĩa là cơ sở cho các nghiên cứu ứng dụng trước mắt hoặc lâu dài của đất nước hoặc/và là những vấn đề thời sự của toán học hiện đại.

- Để đảm bảo đề tài thực hiện tốt, Viện đã tập trung vào những hướng mà Viện có cán bộ chủ chốt vững và có lực lượng tham gia tương đối khá.

Trong quá trình tiến hành nghiên cứu, Viện đã hình thành một số ekip nghiên cứu mạnh, có những công trình nghiên cứu độc đáo và đạt trình độ quốc tế cao. Ở đây nổi nhất là ekip về lý thuyết tối ưu đặc biệt là tối ưu toàn cục, do giáo sư Hoàng Tụy lãnh đạo, đã được giới chuyên môn của nhiều nước phát triển trên thế giới đánh giá là có những cống hiến quan trọng, có những thành tựu có tính chất dẫn đầu và là nền tảng cho sự ra đời của hàng loạt công trình của các tác gia nước ngoài. Trong tương lai, chúng ta cần phải phấn đấu để một số ekip khác có thể vươn lên vị trí tương tự như ekip tối ưu đã đạt được trong thời gian qua. Trước hết đó là các ekip về tô pô, đại số và giải tích là các ekip nghiên cứu các vấn đề có liên quan đến các cấu trúc cơ bản của toán học và là các công cụ cần thiết cho các ngành toán học khác mà bất cứ nước nào muốn có một nền toán học phát triển không thể không quan tâm đầy mạnh.

Viện đã có khoảng 900 công trình được công bố trên các tạp chí có uy tín ở trong và ngoài nước.

Các thành tựu nghiên cứu cơ bản của Viện tập trung vào các vấn đề sau đây :

- a. Lý thuyết tối ưu và điều khiển.
- b. Giải tích toán học : Giải tích hàm, Phương trình đạo hàm riêng và Giải tích số.

- c. Lý thuyết xác suất
- d. Tôpô hình học, Đại số và Lý thuyết số.
- e. Các cơ sở toán học của tin học.

#### a. Lý thuyết tối ưu và điều khiển

##### - Lý thuyết tối ưu :

Lý thuyết tối ưu, nếu hiểu theo nghĩa rộng, là nội dung nghiên cứu của nhiều đề tài và nhóm nghiên cứu của Viện trong những năm qua.

Dưới đây sẽ trình bày những kết quả quan trọng nhất về qui hoạch toán học và những vấn đề có liên quan mật thiết đã thu được trong Viện mà chủ yếu là ở nhóm thuật toán (hoặc thường gọi là nhóm tối ưu) của Phòng Tối ưu và Hệ thống. Những nội dung khác như qui hoạch cố hạn chế bao hàm thức, lý thuyết vi phân ánh xạ đa trị... có thể xem trong phần Giải tích đa trị.

Ở nước ta, ngay từ đầu những năm 60, song song với các hoạt động ứng dụng vận trù học và toán kinh tế, những nghiên cứu cơ bản về lý thuyết tối ưu đã được tiến hành tích cực. Đến đầu thập kỷ 70 trở đi, hướng nghiên cứu này đã được phát triển mạnh mẽ và ngày nay nhóm tối ưu của Viện Toán học Hà nội đã trở thành một nhóm nghiên cứu mạnh ở trình độ quốc tế, có khả năng đảm bảo cơ sở toán học cho một số ứng dụng có liên quan đến toán kinh tế và vận trù học ở trong nước, đồng thời có những đóng góp khoa học vào những lĩnh vực hiện đại quan trọng được giới chuyên môn quốc tế đánh giá cao.

Các thành tựu chính đã đạt được theo hướng nghiên cứu nói trên là :

##### + Tối ưu toàn cục :

"Tối ưu toàn cục" là tên gọi một hướng nghiên cứu mới rất quan trọng của lý thuyết tối ưu. Đó là việc nghiên cứu tính chất và đề xuất phương pháp giải cho những bài toán quy hoạch phi tuyến mà tối ưu địa phương không đồng thời là tối ưu toàn cục. Những lớp bài toán tiêu biểu nhất trong tối ưu toàn cục là qui hoạch lồi (cực tiểu một hàm lồi trên một tập lồi đóng), qui hoạch d.c. (cực tiểu hiệu 2 hàm lồi), qui hoạch lồi đạo (miễn ràng buộc là một tập lồi đóng bỏ đi một số tập lồi mở), qui hoạch song tuyến, qui hoạch Lipschitz, ... Đây là những bài toán rất khó - "khó về bản chất", như Dantzig đã nhận định, và vì thế cho đến trước năm 1964 người ta chưa thu được kết quả gì đáng kể trong lĩnh vực này.

Công trình mở đường của Giáo sư Hoàng Tụy công bố năm 1978 xét một bài toán cơ bản nhất trong tối ưu toàn cục - bài toán cực tiểu một hàm lồi trên một tập đa diện lồi giới nội. Kết quả quan trọng nhất của công trình này là việc đề xuất một "lát cắt" độc đáo. Lát cắt thật giản dị mà khả năng ứng dụng của nó lại đa dạng có hiệu quả không những đối với nhiều bài toán tối ưu toàn cục đối với cả những bài toán quy hoạch tổ hợp nữa.

Thập kỷ 80 là thời kỳ phát triển mạnh mẽ của tối ưu toàn cục trên thế giới trong đó nhóm tối ưu Hà Nội là một thành viên tích cực. Những lớp bài toán quan trọng nhất đã nhắc tới ở trên đều tập trung nghiên cứu và giải quyết một cách có hiệu quả. Gần đây chính tác giả của công trình đầu tiên về tối ưu toàn cục, Giáo sư Hoàng Tụy, đã hoàn thành việc xây dựng một lý thuyết tương đối hoàn chỉnh cho tối ưu toàn cục. Các lớp bài toán khác nhau đều tiếp cận một cách thống nhất thông qua một bài toán chuẩn: "Vấn đề 2 tập lồi cho trước trong một không gian hữu hạn chiều, hãy xác định xem một trong 2 tập đó có bao trùm tập kia hay không, và nếu không thì hãy tìm một điểm không chung nhau của chúng ("bài toán bù hình học").

Thuật toán giải bài toán chuẩn được xây dựng thích hợp và từng bài toán gốc sinh ra nó. Các thuật toán khác nhau này tuân theo một lược đồ tổng quát dựa trên phương pháp phân hoạch không gian theo kiểu "chia nón" kết hợp với phương pháp "xấp xỉ ngoài" để nâng cao hiệu quả.

Một trong những hướng nghiên cứu có hiệu quả nhất về tối ưu mà Viện đã đạt được là xây dựng những thuật toán hữu hiệu cho các bài toán tối ưu toàn cục có cấu trúc đặc biệt, nảy sinh từ các vấn đề kinh tế và kỹ thuật, chẳng hạn bài toán định tâm thiết kế bài toán thiết kế tối ưu mạng cấp nước của các thành phố, bài toán luồng một nguồn với chi phí lồi, bài toán cực tiểu tích cực các hàm lồi, cực tiểu hàm đa thức v.v...

Chúng ta đều biết, sự phát triển của quy hoạch toán học gắn liền với kỹ thuật tính toán hiện đại. Theo xu thế ngày nay, giá trị của các thuật toán là khả năng hiện thi và hiệu quả của chúng. Xuất phát từ quan điểm đó, việc thử nghiệm và so sánh hiệu quả của các thuật toán tối ưu toàn cục luôn luôn được coi trọng. Thông qua hợp tác quốc tế để tranh thủ sự dụng các phương tiện tính toán hiện đại, một số thuật toán chính đã được thử nghiệm so sánh công phu là một trong những công trình đầu tiên được công bố trên tạp chí quốc tế theo hướng này. Hiện nay một số bộ chức năng trình máy tính có chất lượng đã và đang được hoàn thiện theo tiêu chuẩn thương mại.

Những kết quả kể trên đã được công bố trong hơn 100 bài báo trên các tạp chí chuyên môn có uy tín trong nước và trên thế giới và được trình bày một cách có hệ thống trong cuốn sách mới "Global Optimization : Deterministic approaches" của các tác giả R. Horst và Hoàng Tuy, NXB Springer, 1990.

+ Minimax, điểm bất động và lý thuyết tối ưu phi tuyến

Trước năm 1980, các kết quả nghiên cứu chính về tối ưu dành cho các vấn đề nêu trong tiêu đề của mục này. Một trong những kết quả đáng kể nhất là việc tìm ra một định lý minimax tổng quát trong không gian tôpô Hausdorff với một cách chứng minh độc đáo trên cơ sở lý thuyết tập hợp. Về vấn đề điểm bất động, các kết quả chính bao gồm một thuật toán mới - thuật toán "xuống núi" để tính điểm bất động cho phép tái khởi mà không cần đến một thứ nguyên phụ như các thuật toán trước đó, cùng với một số định lý mới về sự tồn tại điểm bất động được chứng minh theo đường lối kiến thiết.

Trong lĩnh vực tối ưu phi tuyến, kết quả chính bao gồm định lý về hệ bất đẳng thức không tương thích (mà tác giả nước ngoài coi là một "nguyên lý rất tổng quát của giải tích lồi"), các định lý về xấp xỉ lồi, về tính ổn định của một hệ bất đẳng thức lồi, tính trần địa phương và tính khả nghịch địa phương của ánh xạ đa trị.

Các ánh xạ đa trị không lồi được nghiên cứu một cách có hệ thống trong không gian vô hạn chiều có thứ tự từng phần. Điều cần nhấn mạnh là các kết quả về nón lồi xa của các tập không lồi và ánh xạ lồi xa của các ánh xạ đa trị đã đưa ra một số nền tảng cho việc nghiên cứu tính toàn cục trong giải tích không lồi đồng thời cho phép nghiên cứu các bài toán tối ưu vectơ trong không gian vô hạn chiều không đòi hỏi nghiệm đúng tính chất compact thường gặp. Nhờ có sự nghiên cứu kỹ của ánh xạ đa trị nhưng vấn đề cơ sở của tối ưu vectơ như tính tồn tại của nghiệm hữu hiệu, đối ngẫu, các điều kiện tối ưu, cấu trúc của tập nghiệm hữu hiệu đã được chứng minh cho các bài toán tối ưu đa trị.

Trong một số vấn đề khác liên quan tới giải tích đa trị cũng thu được nhiều kết quả có ý nghĩa. Đặc biệt là sự tồn tại nghiệm và tính ổn định của bất đẳng thức biến phân phụ thuộc tham số, các tính chất của không gian các ánh xạ đa trị khả vi và sự mở rộng của định lý Sard về độ đo của tập các giá trị tới hạn cho lớp ánh xạ Lipschitz địa phương. Điểm đáng chú ý nữa là những kết quả về lý thuyết rẽ nhánh. Những định lý về sự rẽ nhánh của nghiệm của các phương trình toán tử phi tuyến phụ thuộc tham số đã được thiết lập, cho phép biểu diễn nghiệm một cách giải tích. Những kết quả này có nhiều ứng dụng trong vật lý, cơ học và hóa biến phân.

Hiện nay ở Viện Toán học, lĩnh vực nghiên cứu giải tích đã tri đang ở thời kỳ phát triển mạnh và càng ngày càng nâng cao được vị trí của mình.

### - Lý thuyết điều khiển hệ thống

Nhóm nghiên cứu về lý thuyết điều khiển của Viện tập trung nỗ lực vào nghiên cứu một số bài toán mở, có tính chất thời sự trong lĩnh vực điều khiển được, với các mục tiêu: xây dựng và phát triển một lý thuyết hoàn chỉnh về tính điều khiển được đối với các hệ động lực tuyến tính tổng quát trong không gian Banach vô hạn chiều với ràng buộc trên điều khiển; áp dụng các kết quả thu được cho hệ tổng quát vào giải quyết bài toán điều khiển được cho các hệ cụ thể như hệ được mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm và hệ có tham số phân phối, với ràng buộc trên biến điều khiển, là những bài toán cho đến hiện nay hầu như chưa được nghiên cứu trong lý thuyết điều khiển; xây dựng và phát triển lý thuyết điều khiển được cho các hệ động lực rời rạc có ràng buộc trạng thái và ràng buộc điều khiển trong không gian vô hạn chiều, đặc biệt là các hệ phi tuyến. Để giải quyết các vấn đề nêu trên, các tác giả đã đề xuất và phát triển các phương pháp nghiên cứu hữu hiệu dựa trên các công cụ mạnh của giải tích hàm, đặc biệt là lý thuyết nửa nhóm và lý thuyết Krein-Rutman về các nón bất biến, cũng như các phương pháp và các kết quả mới của giải tích lồi và giải tích phi tuyến. Nhờ đó đã nhận được nhiều kết quả mới, có ý nghĩa khoa học. Các kết quả nổi bật nhất thu được trong thời gian qua theo hướng nghiên cứu này là:

- Xây dựng lý thuyết điều khiển được cho hệ tuyến tính tổng quát trong không gian vô hạn chiều với ràng buộc trên điều khiển và ràng buộc trạng thái và với các toán tử bị chặn (tính lồi trừ mất của miền đạt được và của tập quỹ đạo, nguyên lý bang-bang cho hệ vô hạn chiều, các tiêu chuẩn điều khiển được địa phương chính xác và xấp xỉ, ...)

- Mở rộng các kết quả kể trên ra trường hợp các toán tử không bị chặn trên cơ sở áp dụng lý thuyết nửa nhóm và ứng dụng các kết quả đó vào nghiên cứu tính điều khiển được của các hệ với tham số phân phối mô tả bởi phương trình dạng parabolic trên miền compact với điều khiển dương.

- Xây dựng lý thuyết điều khiển được cho hệ động lực rời rạc với ràng buộc trạng thái và ràng buộc điều khiển: thu được các tiêu chuẩn điều khiển được địa phương chính xác và xấp xỉ cho hệ tuyến tính vô hạn chiều, tiêu chuẩn điều khiển được toàn cục cho trường hợp miền ràng buộc là tập lồi bất kỳ và trường hợp toán tử của hệ là compact, tiêu chuẩn điều khiển được cho trường hợp tập ràng buộc không lồi và cho trường hợp hệ tuyến tính không đúng có chập.

học trong thực tế đồng thời cũng làm nổi lên nhiều vấn đề lý thuyết hóc búa mà giải tích cổ điển chưa hề gặp phải. Nghiên cứu cơ sở lý thuyết và ứng dụng của giải tích đa trị, đó là mục tiêu của nhiều nhóm nghiên cứu trong Viện và tập trung ở các hướng chính sau đây :

- + Lý thuyết điểm bất động.
- + Vi phân của ánh xạ đa trị và các bài toán tối ưu với hạn chế bao hàm thức.
- + Giải tích không lồi và ứng dụng trong tối ưu vecto, rẽ nhánh, bất đẳng thức biến phân và lý thuyết tối hạn.

Trong hướng thứ nhất, kết quả nổi bật thu được là các nguyên lý ánh xạ cơ Banach của các ánh xạ đa trị trong không gian metric và những không gian tổng quát hơn như không gian đều, không gian metric xác suất, không gian dưới đối xứng. Những dạng khác của định lý điểm bất động trong trường hợp có tham số ngẫu nhiên hoặc ánh xạ đa trị mở đã được thiết lập. Những định lý kiểu này có ứng dụng trực tiếp trong lý thuyết trò chơi đa trị cũng như trò chơi mở. Một số thuật toán tìm nghiệm bao hàm thức (mà thực chất là tìm điểm bất động của ánh xạ đa trị) đã được đưa ra và áp dụng giải các bất đẳng thức suy rộng cho lớp bài toán rộng hơn so với một số thuật toán đã có của các tác giả như Robinson, Burke, Han v.v.

Trong hướng thứ hai, để xây dựng lý thuyết vi phân ánh xạ đa trị hai cách xấp xỉ đã được sử dụng : một là xấp xỉ đồ thị, hai là xấp xỉ hàm tựa của ánh xạ đa trị. Nhờ có các cách xấp xỉ này đã mở rộng được những kết quả cơ bản của phép tính vi phân sang trường hợp ánh xạ đa trị như định lý ánh xạ trần địa phương, định lý hàm ẩn đa trị, định lý giá trị trung bình. Ngoài ra, những kết quả có ý nghĩa quan trọng trong lý thuyết tối ưu như định lý Ljusternik về khoảng cách từ một điểm đến một tập, biểu diễn của nón Bouligand của tập nghiệm bao hàm thức cũng được tổng quát hóa. Cần nhấn mạnh một kết quả về nghiệm đúng nguyên lý tựa trong các hệ rời rạc không có lát cắt địa phương mà thực chất là đưa ra lời giải đầy đủ cho bài toán của Boltianskii. Việc áp dụng vi phân đa trị vào các bài toán tối ưu với hạn chế bao hàm thức đã được nghiên cứu khá kỹ. Khái niệm thích hợp về tính chính quy trong các bài toán này đã được đưa ra nhằm một mặt tổng quát hóa các khái niệm của Zowe-Kurcyusz-Penot trong quy hoạch toán học, mặt khác cho phép thiết lập các điều kiện tối ưu cấp một và cấp hai cho một lớp khá rộng các bài toán có hạn chế bao hàm thức. Riêng các điều kiện tối ưu cấp một được chứng minh với các giả thiết rộng rãi hơn. Ngoài ra các tính chất ổn định của các bài toán tối ưu bao hàm thức cũng được nghiên cứu.



*GS: Phạm Hữu Sách, Viện trưởng Viện Toán học*



*Hội đồng khoa học Viện Toán 7-1990*

Hướng nghiên cứu thứ ba và một số vấn đề khác có liên quan đến hai hướng nghiên cứu đầu có thể xem trong phần Lý thuyết tối ưu.

- Phương trình đạo hàm riêng

Đây là một trong những ngành được xây dựng ngay từ những ngày đầu thành lập Viện và được phát triển theo ba hướng :

- + Lý thuyết các phương trình vật lý toán
- + Lý thuyết toán tử vi phân cấp vô hạn
- + Lý thuyết toán tử giả vi phân.

Dưới sự lãnh đạo trực tiếp của Giáo sư Lê Văn Thiêm, Viện trưởng đầu tiên của Viện Toán học, hướng nghiên cứu đầu tiên được bắt đầu xây dựng từ lý thuyết hàm biến phức và ứng dụng vào giải các bài toán trong cơ học. Đã xây dựng được một phương pháp mới dựa trên nguyên lý thác triển đối xứng của hàm giải tích để tìm nghiệm hiện của bài toán thặng dư áp qua môi trường không đồng chất. Kết quả này đã được giới thiệu trong quyển sách "Sự phát triển lý thuyết thặng dư 50 năm ở Liên xô". Đã xây dựng được phương pháp tìm nghiệm tương minh dựa trên phương pháp hàm p-giải tích của một loạt các bài toán thặng dư và bài toán chuyển động của chất lỏng nhớt. Phương pháp này cũng đã được mở rộng cho một lớp phương trình sóng dạng đặc biệt. Thu được những kết quả có hệ thống về bài toán biên trong lớp  $L_p$  đối với vecto giải tích suy rộng. Trên cơ sở chứng minh được bổ đề cơ bản của Privalov và công thức Sokhotski-Plemeil đối với các công thức loại Cauchy suy rộng đã giải được bài toán liên hợp có dịch chuyển đối với vecto giải tích suy rộng. Nhờ xây dựng được các công thức biểu diễn tích phân đối với lớp hàm Smirnov suy rộng và dựa vào phương pháp đồng luân đã giải được các bài toán biên vi phân của Q-vecto chỉnh hình và vecto giải tích suy rộng khi trong điều kiện biên chứa đạo hàm bậc hữu hạn tùy ý. Nghiên cứu lý thuyết vecto chỉnh hình một sự khái quát hệ Cauchy-Rieman lên hệ phương trình trong trường hợp nhiều chiều. Tìm được công thức biểu diễn nghiệm và tính giải được của bài toán biên đối với vecto chỉnh hình. Ngoài ra đã thu được một số kết quả đối với bài toán ngược của hàm giải tích. Sử dụng phương pháp thặng dư của hàm giải tích và phép biến đổi Fourier đã đưa ra lời giải hiện và nghiên cứu tính chất nghiệm của nhiều bài toán khuyếch tán. Thu được nhiều kết quả trong lý thuyết phương trình cấp chuỗi với phép biến đổi Laplace, Fourier, Hankel v.v... và ứng dụng để giải một số bài toán của lý thuyết đàn hồi và lý thuyết thặng dư.

Tiếp theo các công trình mở đầu của Dubinski, Viện đã phát triển lý thuyết toán tử vi phân cấp vô hạn theo ba chủ đề chính là : Toán tử với hệ số biến đổi, Toán tử suy biến và Toán tử với ký hiệu (symbol) giải tích cùng với các ứng dụng có liên quan. Khi nghiên cứu các không gian năng lượng ứng với các bài toán biên của các toán tử này đã nhận được những kết quả cơ bản của lý

thuyết các không gian hàm cấp vô hạn có ý nghĩa khoa học độc lập như thiết lập các tiêu chuẩn không tầm thường của các lớp không gian hàm cấp vô hạn (như không gian Sobolev-Orlicz cấp vô hạn trên toàn  $R^n$  với  $n \geq 1$ ), không gian Sobolev-Orlicz có trong trường miền có độ đo hữu hạn, các định lý nhúng, các tính chất hình học trong các không gian này. Đặc biệt đã tìm ra một dạng khác của định lý Paley-Winer để đặc trưng giá của biến đổi Fourier của các hàm số thông qua dáng điệu chuẩn của bậc đạo hàm khi cấp của đạo hàm tiến đến vô hạn. Dựa trên các phương pháp quen biết của lý thuyết phương trình vi phân phi tuyến như chính quy hóa, điều kiện, Bubnov-Galerkin đã xây dựng được phương pháp chứng minh các định lý tồn tại và duy nhất nghiệm của các bài toán biên đối với các toán tử vi phân phi tuyến cấp vô hạn với hệ số biến đổi bất kỳ. Lần đầu tiên đã thu được một số kết quả xung quanh các bài toán biên của các phương trình vi phân phi tuyến cấp vô hạn sự biến với các hệ số biến đổi như đa thức. Mặt khác, toán tử vi phân tuyến tính cấp vô hạn là biểu diễn địa phương của toán tử giá vi phân với ký hiệu giải tích. Do đó việc nghiên cứu toán tử giá vi phân thông qua toán tử vi phân cấp vô hạn là tự nhiên. Dựa trên ý tưởng này, định lý về cấu trúc của siêu siêu hàm đã được chứng minh trong sự thống nhất với các định lý cấu trúc của các phân bố, siêu hàm Sato. Các định lý định tính của bài toán Cauchy, bài toán biên đã được thiết lập. Trên cơ sở các kết quả định tính về toán tử giá vi phân với ký hiệu giải tích, đặc biệt là các không gian hàm cấp vô hạn trừ mất trong các không gian Sobolev cấp hữu hạn và các toán tử vi phân cấp vô hạn tác động bất biến trong chúng, đã đưa ra một phương pháp giải xấp xỉ của các bài toán biên, bài toán Cauchy của phương trình đạo hàm riêng. Các ký hiệu của các toán tử được xấp xỉ bằng các chuỗi Taylor, đa thức đại số và đa thức lượng giác. Các định lý hội tụ đã được chứng minh.

Cũng đã có một số đóng góp trong việc nghiên cứu các toán tử vi phân phi tuyến cấp vô hạn, cho trường hợp các phương trình elliptic suy biến, hoặc khi phương trình phi tuyến cấp vô hạn là parabolic.

Một phương hướng nữa được nhiều nhà toán học trên thế giới quan tâm là lý thuyết các toán tử giá vi phân, một lý thuyết chủ yếu lý thuyết các toán tử vi phân (thường và đạo hàm riêng), lý thuyết các toán tử tích phân (tích phân kỳ dị) như những trường hợp đặc biệt. Lý thuyết này đã được L. Hormander, R. Beals, A. Unterberger-Bokobza, M.I. Visik, G.I. Eskin, v.v... phát triển cho các toán tử cấp biến thiên mà toán tử cấp không đổi là một trường hợp đặc biệt. Viện cũng đã có những đóng góp trong lý thuyết các toán tử giá vi phân cấp biến thiên. Đã nghiên cứu các không gian Sobolev cấp biến thiên, với nhiều loại nhiều dạng khác nhau để có thể nghiên cứu các bài toán biên giá vi phân elliptic parabolic cấp biến thiên, suy biến, không suy biến, trong miền trụ, trong miền không trụ, với điều kiện biên liên tục hoặc giá trị

đoạn. Đối với các bài toán đạo hàm nghiêng không có biên và tổng quát hơn, đối với một lớp các bài toán biên không có biên, cũng đã thu được một số kết quả cho trường hợp cấp biên thiên.

Một phương pháp rất có hiệu lực để nghiên cứu các bài toán biên thuộc loại này thông qua một loại khác, chẳng hạn thuộc loại parabolic thông qua loại elliptic là phương pháp "tham biến lớn". Phương pháp này cũng đã được phát triển và hoàn thiện để có thể ứng dụng được cho lớp các bài toán biên giả vi phân cấp biên thiên, có biên hoặc không có biên. Ngoài ra đã có một số kết quả về đánh giá tiên nghiệm, trung bình hóa và G-hội tụ cho các toán tử elliptic không ở dạng bảo toàn, về tính hyperelliptic của phương trình elliptic suy biến và tính giải được của hệ phương trình Stokes hai chiều ngang trong miền có biên không trơn.

#### - Giải tích số

Song song với các hướng nghiên cứu truyền thống về cấu trúc trong toán học hiện đại, xu hướng tính toán trong các ngành khoa học là một xu hướng có tính qui luật. Toán học tính toán đang phát triển mạnh và nhanh chóng là một đòi hỏi của bản thân toán học và cũng là của các ngành khoa học, kỹ thuật và của thực tế sản xuất. Vì vậy trong mấy năm gần đây Viện đã cố gắng xây dựng ngành toán học này và đã có đóng góp đáng kể.

Về lĩnh vực các bài toán đặt không chính, bằng cách phát triển các phương pháp không khớp, phương pháp điều chỉnh Tchiopov đã giải quyết được các phương trình toán tử phi tuyến, các bất đẳng thức biên phân tổng quát, khi các toán tử nhiều có thể gián đoạn và không đơn điệu. Thiết lập được một số ước lượng tối ưu, một số điều kiện về B-hội tụ mạnh, B-hội tụ yếu. Bên cạnh các không gian Banach lồi chặt, lồi đều, cũng giải quyết được cho một số lớp các không gian vecto tôpô lồi địa phương và một số không gian được sắp thứ tự. Bài toán về tính giá trị chuẩn tắc của một toán tử đa trị cũng thu được một số kết quả lý thú.

Các phương pháp lặp, phương pháp chiếu lặp, phương pháp Newton-Seidel, phương pháp Stephensen mở rộng được sử dụng và hoàn thiện để giải các phương trình tựa tuyến tính, tựa co, phi tuyến với các toán tử khả vi Frechet hoặc khả vi Gateaux, với một hoặc hai biên, trong các không gian metric, supermetric. Thiết lập được các định lý về tốc độ hội tụ. Chỉ ra một số thuật toán mới để giải quyết những trường hợp mà các thuật toán trước đó không sử dụng được. Đã tìm được ứng dụng trong việc giải các phương trình tích phân phi tuyến Hammerstein.

Một hướng nghiên cứu cũng quan trọng trong lý thuyết xấp xỉ hiện đại là lý thuyết xấp xỉ trong các đối tượng đại số, như đa thức, phân thức, những tập hợp, những đa tạp được cho bởi các hệ phương trình đa thức v.v.... Trong mấy năm vừa qua đã khảo sát và chứng minh tính chất xấp xỉ yếu trong một số đa tạp được xác định

bởi hệ các dạng toàn phương và xây dựng được phần ví dụ trong lớp đa tạp này đối với tính chất xấp xỉ yếu: đưa ra được một phép chứng minh mới về tính chất xấp xỉ yếu cho một số nhóm nửa đơn trên trường toàn cục. Giải quyết được một phần một giả thuyết trong lý thuyết xấp xỉ yếu cho nửa nhóm đơn.

### c. Lý thuyết xác suất

Đóng góp chủ yếu theo hướng này là đã đưa ra một loạt phương pháp mới là phương pháp đạo hàm, phương pháp mactingan, phương pháp giải tích lồi, phương pháp tôpô đại số... để giải quyết một số vấn đề mới và quan trọng trong Giải tích xác suất. Cụ thể:

#### + Vấn đề dự báo và lọc ngẫu nhiên

Đã đưa ra phương pháp tiếp cận mactingan và xây dựng một lý thuyết mới về dự báo các quá trình mạnh trong  $L^1$ . Đặc biệt đã chứng minh một kết quả sâu sắc về biểu diễn tuyến tính các mactingan trong  $L^1$  và chứng minh thành công giả thuyết Nardzewski về thác triển các độ đo trụ. Phương pháp mactingan cũng được sử dụng để giải quyết các bài toán lọc ở dạng tổng quát và đặc biệt là các bài toán lọc với quan sát mactingan.

#### + Lý thuyết các định lý giới hạn

Ứng dụng có hiệu quả phương pháp "các điểm cực biên" (đã quen thuộc trong lý thuyết xác suất với những kết quả nổi tiếng của Johanson, Urbanik, Jajte, Kumaw-Schreibe) trong vấn đề biểu diễn các phân phối xác suất tự phân. Đặc biệt là đã phân lớp các độ đo khả phân vô hạn thành lớp các độ đo tự phân  $\alpha$ -lân với  $\alpha$  là số thực bất kỳ. Kết quả này không những làm sâu sắc thêm lý thuyết khai triển xác suất mà còn gắn lý thuyết độ đo tự phân với lý thuyết đạo hàm và tích phân bậc không nguyên. Đó là cơ sở để xây dựng lý thuyết giải tích bậc phân trong xác suất với các khái niệm mới chủ yếu là đạo hàm và tích phân của các phân phối xác suất.

Phương pháp đạo hàm được phát triển thành một công cụ rất có hiệu quả để nghiên cứu các luật tự phân nhiều lần. Giá trị của phương pháp đạo hàm là ở chỗ khác với phương pháp các điểm cực biên, nó cho phép chứng minh biểu diễn các luật tự phân trên không gian lồi địa phương và chứng minh biểu diễn các quá trình điểm tự phân. Mặt khác, công thức biểu diễn các độ đo như vậy có quy luật rõ ràng, dễ hiểu và qua đó có thể nhận được đặc trưng đẹp đẻ của tất cả các phân phối xác suất quan trọng như phân phối chuẩn, Poisson, ổn định...

Lý thuyết các phương trình vi phân trên các phân phối xác suất kê cả các phương trình vi phân đạo hàm riêng đã được xây dựng. Những nghiên cứu độ đo phổ dựng trên không gian tuyến tính đã đạt được những kết quả sâu sắc và tổng quát. Định lý giới hạn trung tâm cho các biến ngẫu nhiên phụ thuộc đã được xây dựng một cách có hệ thống. Ngoài ra mối quan hệ giữa xác suất và lý thuyết đồ thị đã được khẳng định qua việc chứng minh giả thuyết nổi tiếng Katona và Turan về vấn đề biểu diễn 3-đồ thị.

#### + Lý thuyết mactingan

Các nghiên cứu tập trung theo hai hướng : sự phát triển nội tại của lý thuyết mactingan và ứng dụng của phương pháp mactingan để giải quyết các bài toán dự báo và lọc. Các kết quả thuộc hướng thứ hai đã nói ở trên, còn các kết quả thuộc hướng thứ nhất chủ yếu liên quan đến các mactingan tiệm cận đa trị và được phát triển bằng phương pháp giải tích lồi. Ở đây các kết quả tập trung ở hai khía cạnh :

- Đơn trị : Đưa ra hai khái niệm mới là mactingan tiệm cận  $L^1$  với khai triển Riesz và quá trình mactingan tiệm cận bậc hữu hạn. Lần đầu tiên đã chứng minh những đặc trưng đầy đủ các quá trình có khai triển Riesz và các tiêu chuẩn của dãy Cauchy theo chuẩn Pettis trong không gian các hàm khả tích Bochner nhân giá trị trên không gian lồi địa phương. Từ đó có thể nhận được các kết quả về tính ổn định và hội tụ của lớp các mactingan tiệm cận.

- Đa trị : Gần đây các quá trình đa trị được đề cập đến nhiều cùng với những ứng dụng thực tế. Thông thường người ta dùng phương pháp nhúng để đưa trường hợp đa trị về đơn trị. Những phương pháp này đòi hỏi những điều kiện ràng buộc rất chặt chẽ và do đó phạm vi ứng dụng bị hạn chế. Các công trình thu được trong Viện đã đưa ra cách nhìn mới thông qua hai định lý chọn Kuratowski-Nardzewski và định lý biểu diễn Castaing và được thực hiện theo hai bước :

- Xem xét sự tồn tại của quá trình ngẫu nhiên đơn trị từ các bài toán của quá trình đa trị xuất phát.

- Biểu diễn các quá trình đa trị theo các quá trình đơn trị và sau đó áp dụng các kết quả đơn trị để nghiên cứu đa trị.

Đây là các ý tưởng và phương pháp mới để nghiên cứu giải tích xác suất đa trị. Bằng cách này đã chứng minh định lý giới hạn của mactingan. Mặt khác những định lý dạng này liên quan đến lý thuyết các toán tử khả tăng tuyệt đối trên không gian lồi địa phương. Như vậy phương pháp mactingan và phương pháp giải tích lồi không những mang lại những công cụ và hướng tiếp cận mới cho

giải tích đa trị mà về mặt nào đó cùng với phương pháp hình học Banach đã giải quyết được những vấn đề khó khăn và quan trọng của giải tích xác suất.

#### d. Tôpô hình học, Đại số và lý thuyết số

Các nghiên cứu được thực hiện theo các nhóm nghiên cứu :

- + "K-ly thuyết, Giải tích điều hòa và vật lý toán",
- + "Kỹ dị",
- + "Vành và môđun"
- + "Đại số giao hoán và Hình học đại số",
- + "Giải tích p-adic".

Nhóm "K-ly thuyết, Giải tích điều hòa và vật lý toán" nghiên cứu giải tích điều hòa trên nhóm Lie và các ứng dụng có liên quan bằng cách sử dụng nhiều công cụ khác nhau như Tôpô, Hình học vi phân, Giải tích hàm. Đã khảo sát những bài toán về biểu diễn nhóm Lie, C\*-đại số, siêu nhóm Lie, nhóm Lie affin và thu được những kết quả về việc xây dựng một phương pháp nghiên cứu C\*-đại số nhóm bằng bất biến  $\text{Index} C^*(G)$  trong các KK-hàm tử; xây dựng quy tắc lượng tử nhiều chiều; mô tả lớp nhóm con rời rạc kiểu Langlands thông qua lý thuyết đối đồng điều liên tục; mô tả biểu diễn nhóm Lie vô hạn chiều - nhóm loop - trong lý thuyết dây (string theory) bằng các định lý kiểu Kostant-Borel-Weil-Bott và độ đo Poisson-Plancherel.

Nhóm "Kỹ dị" nghiên cứu giải tích địa phương thực (kỹ dị các hàm k-xác định) và phức (kỹ dị các hệ holo-nôm, các  $\mathcal{D}$ -môđun và kỹ dị đường cong đại số) cùng với các ứng dụng vào quang hình học (caustiques). Đã thu được các tiêu chuẩn về hữu hạn xác định của kỹ dị ở vô cực và tính tối ưu Pareto địa phương, các phần tử Milnor của hàm đa thức, sự tương đương giữa tính ổn định của họ có kỹ dị chính quy và tính ổn định của đa tạp đặc trưng, kỹ dị của bài toán quang hình học với mặt sóng có kỹ dị. Đã tìm được thuật toán xác định phổ thông qua sơ đồ giải kỹ dị của đường cong phẳng, dùng lý thuyết Hodge hỗn hợp, số mũ tách đôi, đặc trưng Puiseux, bội giao v.v...; tìm được các dấu hiệu tôpô của sự xuất hiện kỹ dị ở vô cực, đóng góp của hàm pha vào tích phân giả đồng. Hoạt động của Nhóm "Kỹ dị" đã được sự giúp đỡ tích cực của Giáo sư F. Phạm (Đại học Nice, Pháp). Đặc biệt Giáo sư đã dành một năm về Việt nam để làm việc với nhóm.

Nhóm "Vành và Môđun" nghiên cứu những lớp vành và môđun thỏa mãn những điều kiện tối thiểu nào đó ví dụ tính Artin, tính Noether. Đã chứng minh nhiều tính chất của lớp các vành thỏa mãn điều kiện hữu hạn ví dụ tính tách được, cấu trúc vành. Đã đã chứng minh nhiều tính chất của vành Artin, Noether, vành có chiều Krull, vành tựa Frobenius, vành Artin di truyền bằng các môđun. Đã mô tả nhiều tính chất về cấu trúc vành và môđun kể trên.

Nhóm "Đại số giao hoán và Hình học đại số" nghiên cứu lý thuyết các vành Cohen-Macaulay suy rộng, vành Buchsbaum, vành địa phương, vành phân bậc, đại số Hodge, đa tạp Veronese. Các kết quả tiêu biểu là việc hoàn chỉnh lý thuyết vành Cohen-Macaulay suy rộng, mô tả cấu trúc vành phân bậc liên kết, việc đặc trưng số phân tử độc lập đại số cục đại, cấu trúc đại số của vành sinh bởi các đơn thức, việc nghiên cứu một cách hệ thống lý thuyết đại số về các siêu phẳng tổng quát.

Nhóm "Giải tích p-adic" tập trung nghiên cứu những vấn đề về nội suy p-adic và sự phân bố giá trị của các hàm p-adic. Đã xây dựng nội suy p-adic cho các hàm giải tích và phân hình p-adic; xây dựng, tương tự p-adic cho lý thuyết Nevalina; tìm được nhiều tính chất quan trọng của các hàm đơn điệp p-adic, các chuỗi Laurent p-adic.

Ngoài ra, cũng còn một số kết quả nghiên cứu riêng lẻ về các không gian, cấu hình (nhóm cơ bản, đối đồng điều) và đối đồng điều của một số nhóm hữu hạn liên quan với tôpô đại số.

#### e. Các cơ sở toán học của tin học

Nghiên cứu cơ sở toán học của tin học hay cũng gọi là Tin học lý thuyết có ý nghĩa hai mặt: một mặt sử dụng được các công cụ toán học sẵn có để nghiên cứu, giải quyết các vấn đề do tin học đề ra, và mặt khác, chính tin học lại là nguồn động lực cho sự phát triển nội tại của một số lĩnh vực toán học như logic, toán tổ hợp, đại số, tối ưu...

Với ý nghĩa đó, ngay từ những năm 70, dưới sự chủ trì của Giáo sư Phan Đình Diệu, tại Viện Toán học đã tiến hành xêmina "Lý thuyết ôtomat và ngôn ngữ hình thức" chủ yếu nghiên cứu các vấn đề về ôtomat xác suất, lưới lập các ôtomat, các đồ thị ngẫu nhiên và các đánh giá thời gian, trung bình của các thuật toán giải một số bài toán trong lý thuyết đồ thị và ôtomat.

Từ năm 1985, bắt đầu chọn lọc nghiên cứu các vấn đề cấp bách sau đây có ý nghĩa cả về mặt lý thuyết lẫn thực tiễn:

- + Tin học đại số.
- + Độ phức tạp tính toán.
- + Mô hình toán học của tính toán và sự lý song song.

Về Tin học đại số, tập trung nghiên cứu các vấn đề tử vô hạn và lý thuyết đa tạp các ngôn ngữ tử vô hạn. Trong các hệ tính toán và sự lý thông tin có nhiều quá trình tương tranh, cần được đồng bộ hóa. Có nhiều cách tiếp cận vấn đề này. Cách tiếp cận do Nivat và Arnold đề xuất, vào đầu những năm 80 cho thấy công cụ tử vô hạn là thích hợp để nghiên cứu vấn đề đồng bộ hóa các quá trình tương tranh. Đó là một động lực làm sôi động trở lại việc nghiên cứu các tử vô hạn mà trước đây chỉ có ý nghĩa thuần túy lý

thuyết. Đã nghiên cứu các ngôn ngữ tử vô hạn đoán nhận bởi ôtômat hữu hạn. Chứng minh rằng định lý Buchi-McNaughton và các dạng mở rộng khác vẫn còn đúng cho một lớp rộng rãi các đa tạp ngôn ngữ tử vô hạn đoán nhận được và ngôn ngữ tử vô hạn hai phía. Thiết lập được sự tương ứng một-một giữa các đa tạp ngôn ngữ tử vô hạn đoán nhận được, và các đa tạp monoid hữu hạn mà không là đa tạp nhóm. Đây là kết quả cơ bản để xây dựng lý thuyết đa tạp ngôn ngữ tử vô hạn giống như định lý Eilenberg và là cơ sở để xây dựng lý thuyết đa tạp ngôn ngữ tử vô hạn. Cũng nhận được một số kết quả về lớp mã tử hữu hạn liên quan đến các tử vô hạn hai phía gọi là các Z-ma. Thiết lập quan hệ giữa Z-ma với mã có độ trễ đồng bộ giới nội và mã tử vô hạn hai phía.

Một hướng quan trọng khác của Tin học lý thuyết là xét bản chất của các quá trình tính toán. Vấn đề nổi bật theo hướng này là xét độ phức tạp tính toán của các thuật toán. Xuất phát từ việc nghiên cứu các đồ thị ngẫu nhiên, đã đưa ra một số đánh giá đối với độ phức tạp thời gian trung bình của các thuật toán giải một số bài toán tối ưu rời rạc về đồ thị và ôtômat. Chẳng hạn đã chứng tỏ rằng các thuật toán đã biết giải bài toán tối ưu hóa trạng thái của các ôtômat không xác định khắp nơi, có độ phức tạp thời gian trung bình cỡ  $n \rightarrow n^{\frac{1}{2} \log 2}$ , trong đó  $n$  là số trạng thái của ôtômat, các bài toán NP-đầy đủ đóng vai trò trung tâm trong lĩnh vực tối ưu hóa rời rạc. Cho đến nay, các thuật toán giải các bài toán đó đều có độ phức tạp thời gian tính bằng hàm mũ. Đã đưa ra một lớp các bài toán NP-đầy đủ giải được bởi thuật toán với độ phức tạp thời gian trung bình tính bằng đa thức. Đó là lớp các bài toán CLIQUE  $N(n)$  tìm đồ thị con đầy đủ tối đại trong các đồ thị với  $n$  đỉnh và  $N(n)$  cạnh trong đó  $N(n) = n^l$ , với  $1 < l < 2$ .

Tính toán song song và các vấn đề có liên quan đang là vấn đề thời sự trọng tin học. Tính toán và xử lý tin song song liên quan đến nhiều khâu: mô hình toán học, thuật toán, chương trình, cấu tạo phần cứng. Một trong các mô hình như vậy, được biết rộng rãi nhất, đó là mạng Petri. Đã nghiên cứu khả năng biểu diễn ngôn ngữ của mạng Petri, tìm được các điều kiện cần dưới dạng các định lý bơm, trên cơ sở đó chỉ ra hàng loạt các ngôn ngữ cụ thể (ngôn ngữ tử hữu hạn và ngôn ngữ tử vô hạn) không thể biểu diễn được bởi các mạng Petri.

x  
x      x

Bên cạnh nhiệm vụ nghiên cứu cơ bản, Viện đã cố gắng đóng góp vào việc ứng dụng toán học ở trong nước. Công tác này đã được

tiến hành ngay trong tổ chức tiên thân của Viện là Phòng Toán học thuộc Ủy Ban Khoa học và Kỹ thuật Nhà nước. Từ năm 1962, Giáo sư Hoàng Tuy, lúc đó là chủ nhiệm khoa Toán trường Đại học Tổng hợp Hà nội và sau này là Viện trưởng kế tiếp Viện trưởng đầu tiên của Viện là Giáo sư Lê Văn Thiêm, đã hướng dẫn xây dựng trong Phòng Toán này một nhóm nghiên cứu có quan tâm đến việc ứng dụng toán học vào các vấn đề kinh tế. Dưới sự lãnh đạo của Giáo sư Hoàng Tuy, nhà khoa học đầu tiên đã đưa các tư tưởng của vận trù học vào thực tế Việt Nam từ đầu những năm 60, trong thời gian phối thai cũng như trong suốt 20 năm phát triển vừa qua, Viện đã tổ chức ứng dụng các tư tưởng và phương pháp toán kinh tế và lý thuyết hệ thống vào một số vấn đề quản lý kinh tế và phát triển sản xuất ở Việt Nam, góp phần đổi mới tư duy của cấp bộ quản lý, tạo nên một phong thái làm việc khoa học và hiệu quả của các cán bộ nhiều ngành, nhiều cấp hiện nay.

Các lý luận và kết quả nghiên cứu tiên tiến trên thế giới cũng như của chính cán bộ của Viện đã tạo cơ sở để Viện đã góp với Nhà nước nhiều ý kiến có căn cứ khoa học xác đáng về việc lựa chọn các chiến lược kinh tế-xã hội lâu dài cũng như các chính sách phát triển khoa học-kỹ thuật trong nước.

Viện đã chủ động đề xuất với Nhà nước và đã góp phần tích cực xây dựng hai đơn vị chuyên nghiên cứu ứng dụng toán học (Viện Toán kinh tế, Ủy Ban Kế hoạch Nhà nước và Trung Tâm phân tích hệ thống, Viện quản lý kinh tế Trung ương) và đã chuyển một số cán bộ có kinh nghiệm sang tăng cường cho các đơn vị này trong quá trình hoạt động.

Viện đã chú ý ứng dụng toán học vào một số vấn đề kinh tế cụ thể. Trước và trong những năm đầu thành lập, Viện đã áp dụng vận trù học vào những vấn đề như cát thép tại khu Gang thép Thái nguyên và Nhà máy Hoa quả hộp Hà nội; nghiên cứu một số bài toán cải tiến công tác kế hoạch, và quản lý ngành Thương nghiệp Hà nội; tham gia giúp các ban chỉ huy hân khẩu để trong vụ lũ lụt năm 1971; tham gia áp dụng toán kinh tế vào công tác lập kế hoạch ngành than; ứng dụng phương pháp sơ đồ mạng lưới để chỉ đạo thi công công trình lăng Bác.

Sau đó, từ giữa những năm 70 Viện đã hợp tác với Viện Phân Vùng Qui hoạch Trung ương, Viện Năng lượng, Tổng Công Ty Xăng Dầu, Bộ Vật Tư, Viện Toán-kinh tế và các cơ quan khác để giải quyết các vấn đề: xây dựng các bảng cân đối liên ngành dạng hiện vật với 43 sản phẩm chủ yếu cho cả nước và cho các vùng kinh tế, trên cơ sở đó tính toán các phương án phát triển kinh tế dài hạn; xây dựng mô hình tuyến tính và phi tuyến để tính toán các phương án tối ưu phát triển ngành nhiên liệu năng lượng; bố trí tối ưu các tàu ngoại quốc cho xăng dầu vào các cảng của Việt Nam; xây dựng mô hình kế hoạch vận tải hàng năm cho ngành vật tư hóa chất; nghiên cứu và đề xuất các phương pháp thiết kế tối ưu mạng cáp

nước của thành phố; tham gia góp ý cho soạn thảo tổng số độ triển kinh tế tỉnh Lâm đồng; áp dụng phân tích hệ thống và trừ học vào quản lý công ty du lịch tỉnh Lâm đồng.

Tóm lại, Viện đã giữ được vai trò tiên phong trong toàn công việc đưa vào trong nước, tuyên truyền, ứng dụng và đào cán bộ về vận trừ học, tối ưu và tiếp cận hệ thống trong các tác lãnh đạo, quản lý kinh tế, kế hoạch hóa từ cấp trung (chiến lược chính sách) đến các cấp bộ, ngành, xí nghiệp, phường. Bên cạnh những kết quả cụ thể, còn có kết quả góp thay đổi nếp nghĩ (tư duy) và nếp làm việc. Mặc dù khó khăn hạn chế kết quả, những đứng về ý nghĩa lâu dài đây là đóng rất đáng kể.

Cùng với Nhóm nghiên cứu ứng dụng toán học vào kinh tế nói ở trên, từ năm 1962 Giáo sư Lê Văn Thiêm, lúc đó là trưởng Ban Toán-Lý Ủy Ban Khoa học và Kỹ thuật Nhà nước và sau là trưởng đầu tiên của Viện Toán học, đã chỉ đạo xây dựng nghiên cứu ứng dụng toán học vào các bài toán kỹ thuật liên đến vấn đề thềm và nổ mìn. Nhóm đã phối hợp với các cơ quan tính toán thềm cho việc rửa mặn ở nông trường Rạng đông Hà Ninh; tính toán nổ mìn ở mỏ đá Núi voi phục vụ xây dựng khu Thép, Thái nguyên và mỏ đá Phú lý, Đông mỏ phục vụ giao thông chiền; tính toán nổ mìn định hướng nạo vét đoạn kênh nhà L Ninh bình đến Vinh; tính toán băng nổ mìn làm đường cho binh.

Từ giữa những năm 70, Viện đã hợp tác với Bộ Điện lực, Nghiên cứu khoa học Thủy lợi, Đại học Thủy lợi, Ủy Ban sông và các cơ quan khác để giải quyết các vấn đề về qui hoạch và sử dụng hợp lý tài nguyên nước. Trước năm 1975, một số cơ quan đã nghiên cứu phương pháp sơ giải bài toán dòng chảy một chiều trên thông sông, nhưng chưa nhận được các kết quả sơ ổn định trên tính. Viện Toán học là đơn vị đầu tiên của Viện Khoa học Việt xây dựng phương pháp giải gần đúng cho kết quả sơ ổn định máy tính để tính toán dòng chảy một chiều, tính xói sau trình thủy điện và tính lan truyền sóng gián đoạn khi vỡ đập điện. Các tính toán này đã góp phần vào việc nghiệm thụ thiết kế kỹ thuật của các đập thủy điện Hòa bình và Trị an. Đã xây dựng được các thuật toán giải bài toán dòng chảy hai chiều và ba chiều dựa trên các phương pháp đặc trưng, phương pháp phân rã, phương pháp sai phân ẩn và hiện. Các kết quả trên đã được dùng để đồng phân lũ vùng Phả Lại, tính toán áp lực nước lên các cánh van tự động của các công trình thủy lợi và góp phần vào việc chế độ thủy lực của hồ chứa nước đập thủy điện Trị an. Xây dựng bộ chương trình giải bài toán xâm nhập mặn một chiều trên thông sông và ứng dụng để dự báo quá trình ô nhiễm trong trên sông sau nhà máy thủy điện Trị an cho kết quả phù hợp tiên. Xây dựng được bộ chương trình dựa trên phương pháp phân hữu hạn giải bài toán thềm qua hệ thống đập đất với mức trung gian đã cho hoặc chưa biết và sử dụng tính thềm phục vụ



*Phòng toán UKHKTNN - 1970*



*Văn phòng Viện Toán học*

phát  
vận

n bộ  
tạo  
công  
ưởng  
địa  
phần  
n đã  
góp

é, đã  
ưởng  
Viện  
Nhóm  
quan  
khác  
nam  
Gang  
thời  
ê từ  
công

Viện  
à và  
dụng  
hiện  
n hệ  
máy  
nam  
trên  
công  
thủy  
t kế  
dụng  
hiệu  
ưởng  
tính  
của  
tính  
dụng  
n hệ  
ổ và  
thực  
n từ  
nước  
kip

thời cho công tác phòng lũ của đập thủy điện Hòa bình, sau giai đoạn lập sông đợt I (1974) và phục vụ cho việc thiết kế đập thủy điện Vĩnh sơn.

Trong lĩnh vực thống kê toán học, Viện cũng có truyền thống hợp tác với các Viện nghiên cứu trong các ngành nông nghiệp, lâm nghiệp, khí tượng thủy văn, địa chất, thống kê và Viện tiêu chuẩn (UBKHNN) để ứng dụng các phương pháp thống kê giải quyết nhiều vấn đề thực tế của các ngành như : xây dựng kích cỡ quần áo may sẵn, kiểm tra thống kê chất lượng sản phẩm, phân tích ảnh hưởng của các nhân tố đến năng suất một số cây trồng, v.v.... Các lĩnh vực quan trọng của thống kê ứng dụng như : lý thuyết lấy mẫu, kiểm tra chất lượng sản phẩm bằng phương pháp thống kê, các phương pháp phân tích và xử lý số liệu, tính toán thống kê trong một thời gian dài chưa được giảng dạy trong các trường đại học. Viện không chỉ dừng lại ở việc ứng dụng các phương pháp này cho từng vấn đề cụ thể mà còn biên soạn giáo trình, tài liệu hướng dẫn và tổ chức nhiều lớp học để phổ biến cho các cán bộ kỹ thuật ở các ngành sử dụng. Thông qua việc hợp tác nghiên cứu ứng dụng thống kê, đã có 5 luận án PTS khoa học kỹ thuật được bảo vệ thành công.

Viện đã hợp tác với CP84 để xây dựng các hệ mã khóa công khai dựa trên bài toán tư của đại số và các L-hệ của lý thuyết ngôn ngữ hình thức.

Viện cũng đã phát triển phần mềm cho máy vi tính trên ba lĩnh vực : tối ưu, phương pháp toán lý và thống kê ứng dụng.

Nhìn chung, Viện đã có một số tác dụng thiết thực trong việc áp dụng các phương pháp toán học giải quyết một số yêu cầu phục vụ chiến đấu và phát triển sản xuất trong xã hội. Tuy vậy, đây là một khâu công tác còn cần được đẩy mạnh hơn thông qua các hình thức mới như phân đầu tham gia các dự án do quốc tế tài trợ, phân đầu để một số nghiên cứu về phần mềm máy tính có thể trở thành các sản phẩm được sự quan tâm quốc tế...

## B. Tăng cường tiềm lực, đào tạo cán bộ và xây dựng cơ sở vật chất

### 1. Đội ngũ cán bộ

Tăng cường tiềm lực cán bộ là một yêu cầu cực kỳ quan trọng cho sự phát triển Viện. Tổ chức tiên thân của Viện Toán học Phòng toán học Ủy Ban Khoa học và Kỹ thuật Nhà nước gồm 5 cán bộ đại học 1 được thành lập theo sáng kiến của các Giáo sư Lê Văn Thiêm và Hoàng Tụy vào năm 1962. Khi ra đời, Viện mới có 22, cán bộ đại học, trong đó có 6 người trình độ trên đại học, chiếm lệ 35%. Đến nay, đội ngũ cán bộ nghiên cứu của Viện đã khá mạnh 83 cán bộ với 20 tiến sĩ và 51 phó tiến sĩ chiếm tỉ lệ 85% trình độ đại học. Về chức vụ khoa học Viện có 2 Giáo sư và 11 Phó giáo sư. Ngoài ra trong 2 năm vừa qua, Viện đã đề nghị Viện Khoa học Việt Nam và Nhà nước công nhận thêm 10 Giáo sư và 21 Phó giáo sư khác. Sự trưởng thành của đội ngũ cán bộ của Viện là do, một mặt do sự bổ sung của Nhà nước, nhưng mặt rất quan trọng khác là do tự lực đào tạo qua quá trình thực hiện các đề tài nghiên cứu khoa học: 34 người đã bảo vệ luận án phó tiến sĩ thông qua hình thức nghiên cứu sinh trong nước và 5 người đã bảo vệ luận án tiến sĩ ở nước ngoài sau khi đã hoàn thành luận án tiến sĩ ở trong nước không qua con đường thực tập sinh cao cấp. Chất lượng đội ngũ cán bộ nói chung tốt, được giới khoa học quốc tế công nhận, (xem phần Hợp tác khoa học dưới đây). Điều đáng mừng là tính kỷ luật giữa các thế hệ cán bộ trong Viện được đảm bảo, cán bộ trẻ đã phát huy được tốt năng lực và tỏ ra có đủ sức tiếp bước các thế hệ trước. Tuy vậy, việc trẻ hóa đội ngũ đang là một vấn đề bức xúc trong Viện. Hiện nay tuổi bình quân của cán bộ Viện là 39, công trình bình quân là 12,5 và còn thấp nửa nếu chỉ xét như công trình có chất lượng theo tiêu chuẩn quốc tế. Rõ ràng đây là một mức bình quân còn chưa cao so với thế giới.

### 2. Đào tạo nghiên cứu sinh

Như một cơ thể phát triển lành mạnh không thể không thức xuyên bổ sung những nguồn sinh lực mới, một Viện nghiên cứu đã trưởng thành phải gắn chặt công tác nghiên cứu với công tác đào tạo. Điều đó không chỉ nhằm đáp ứng mục tiêu chính là cung cấp các cán bộ nghiên cứu toán học trẻ có trình độ cho Viện riêng, và cho đất nước nói chung, mà hơn thế nữa, đó còn là cơ hội nội tại của việc nghiên cứu và góp phần không nhỏ vào nghiên cứu toán học. Không ít vấn đề nghiên cứu và kết quả khoa học đã nảy nở và được thực hiện trong quá trình hướng dẫn nghiên cứu sinh, nhiều ekip nghiên cứu trong Viện cũng qua đó mà hình thành và phát triển. Chính vì vậy mà kể từ khi thành lập, Viện thường xuyên chú trọng công tác đào tạo nghiên cứu sinh, coi đó là một nhiệm vụ quan trọng gắn liền với nhiệm vụ nghiên cứu.

1 Đó là các đồng chí: Phạm Trà Ân, Ngô Văn Lộc, Phạm Hữu Sách, Trần Vũ Thiệu và Đỗ Long Vân.

Trong thời gian đầu (1970-1980), Viện chủ yếu tạo điều kiện để gửi cán bộ đi đào tạo sau đại học ở nước ngoài thông qua các chỉ tiêu của Bộ Đại học và Trung học chuyên nghiệp, đồng thời cũng sớm đề ra những biện pháp tự bồi dưỡng và nâng cao trình độ. Viện là đơn vị đầu tiên của Viện Khoa học Việt Nam có nghiên cứu sinh (đặc cách) bảo vệ thành công luận án phó tiến sĩ (năm 1979). Đến năm 1980, Viện cũng là đơn vị đầu tiên trong Viện, Khoa học Việt Nam được Nhà nước chính thức công nhận là một cơ sở đào tạo, nghiên cứu sinh.

Sau 10 khóa tuyển chọn và đào tạo nghiên cứu sinh trong nước, công tác này đã tỏ ra có hiệu quả lớn :

- Tổng số nghiên cứu sinh đã tuyển chọn : 66 người, trong đó 37 người là cán bộ của Viện.

- Tổng số nghiên cứu sinh đã bảo vệ thành công luận án Phó tiến sĩ : 44 người, trong đó có 9 luận án được bảo vệ đặc cách và 34 người là cán bộ của Viện.

- Tổng số nghiên cứu sinh hiện nay còn thời hạn là 22 người.

Viện Toán học đã và đang đào tạo nghiên cứu sinh cho nhiều cơ quan nghiên cứu, và đặc biệt là các trường đại học trong cả nước, như trường ĐH sư phạm Vinh, ĐH sư phạm Quy Nhơn, ĐH sư phạm Huế, ĐH Tổng hợp Huế, ĐH Y Huế, ĐH sư phạm I và II Hà Nội, ĐH sư phạm thành phố Hồ Chí Minh, Bộ Giáo dục. Trong 3 khóa gần đây, số nghiên cứu sinh của cơ quan ngoài chiếm 88% tổng số nghiên cứu sinh.

Đào tạo một số lượng lớn nghiên cứu sinh là một điều quan trọng. Nhưng quan trọng hơn là ở chỗ chất lượng đào tạo được bảo đảm và chú trọng nâng cao. Theo đánh giá của nhiều chuyên gia, các luận án phó tiến sĩ được bảo vệ tại Viện Toán học có chất lượng khoa học tốt, nhiều luận án được đánh giá xuất sắc, về nội dung không hề thua kém các luận án phó tiến sĩ của các nước tiên tiến (hầu hết các luận án bảo vệ trong những năm gần đây đều có vài ba công trình được đăng trên các tạp chí toán học có uy tín trong nước và quốc tế). Trong số các phó tiến sĩ do Viện Toán học đào tạo, có đồng chí đã bảo vệ thành công luận án tiến sĩ, 12 đồng chí đã được sự tài trợ của các tổ chức khoa học ở nước ngoài và được mời đến công tác nghiên cứu khoa học tại nhiều trường đại học và viện nghiên cứu của một số nước như Tây Đức, Nhật, Áo, Ý, Pháp, ... thông qua sự cạnh tranh quốc tế về khoa học. 28 cán bộ khoa học trẻ là nghiên cứu sinh của Viện đã được phân chỉ tiêu đi thực tập ở Liên xô và Đông Âu từ 1 đến 2 năm. Một số nghiên cứu sinh đã nhận dịp này bảo vệ thành công luận án trước hạn ở nước bạn. Do thành tích đào tạo nghiên cứu sinh, Viện đã được Bộ Đại học và Trung học Chuyên nghiệp và Dạy nghề khen thưởng.

Có được các kết quả như trên trong công tác đào tạo trước hết nhờ Viện có một đội ngũ các cán bộ chuyên môn có trình độ, ngày càng được tăng cường về số lượng và chất lượng, có khả năng tiếp nhận và hướng dẫn có kết quả ngày càng nhiều nghiên cứu sinh trong nghiên cứu. Việc Viện và đặc biệt là các cán bộ khoa học chủ chốt của Viện có quan hệ hợp tác nghiên cứu quốc tế tốt, nhất là trong những năm gần đây, đã tạo điều kiện thuận lợi cho việc trao đổi thông tin khoa học kịp thời, hướng nghiên cứu sinh vào các vấn đề thời sự trong các đề tài luận án, cũng như bổ sung các tài liệu cần thiết cho việc nghiên cứu của nghiên cứu sinh. Bên cạnh đó, việc quản lý khoa học, tổ chức hoạt động nghiên cứu, đánh giá kết quả nghiên cứu của nghiên cứu sinh và công tác tổ chức tuyển chọn nghiên cứu sinh cũng đã được cải tiến, ngày càng tốt hơn. Các sinh hoạt khoa học của Viện như xemina, hội thảo, hội nghị khoa học được tổ chức thường xuyên cũng tạo các điều kiện thuận lợi để nghiên cứu sinh trao đổi, báo cáo kết quả nghiên cứu và tranh thủ ý kiến giúp đỡ của các cán bộ chuyên môn có trình độ trong Viện. Tất nhiên không thể không kể đến sự chỉ đạo và hỗ trợ của cơ quan, quản lý Nhà nước về công tác đào tạo là Viện Khoa học Việt Nam, Ủy Ban Khoa học và Kỹ thuật Nhà nước và Bộ Giáo dục và Đào tạo.

### 3. Xây dựng cơ sở vật chất

Khi mới thành lập, cơ sở vật chất của Viện rất nghèo nàn. Viện chỉ có một phòng duy nhất, diện tích khoảng 30 m<sup>2</sup>, vừa là nơi họp hành, làm việc và nghiên cứu. Tài sản duy nhất của Viện phục vụ cho hoạt động khoa học là mấy giá sách với vài trăm cuốn sách và tạp chí tiếng Nga là chủ yếu. Do những khó khăn như vậy, cán bộ trong Viện phải sử dụng Phòng đọc của Thư viện Khoa học và Kỹ thuật Trung ương như là một địa điểm làm việc thường xuyên:

Do sự quan tâm của đồng chí Phạm Văn Đồng, nguyên Chủ tịch Hội đồng Bộ trưởng, đến năm 1981 Viện đã được xây dựng một trụ sở làm việc mới, một ngôi nhà 2 tầng kiên cố có tổng diện tích khoảng 1000 m<sup>2</sup> với hội trường 100 m<sup>2</sup>, có thư viện và các phòng riêng biệt phục vụ cho các nhóm nghiên cứu.

Viện đã tranh thủ mọi khả năng (như sự giúp đỡ của bè bạn quốc tế, sự trao đổi ấn phẩm Acta Mathematica Vietnamica của Viện với các cơ quan khoa học nước ngoài) để tăng cường nguồn tài liệu cho thư viện. Do đó thư viện của Viện đã lớn mạnh nhiều với 10.000 quyển sách và 250 tên tạp chí, phục vụ có hiệu quả cho công tác nghiên cứu. Tuy vậy, việc tiếp tục bổ sung tài liệu, đặc biệt là những tạp chí phương Tây thiết yếu mà chúng ta chưa có, vẫn là một yêu cầu nóng bỏng của Viện. Trong tương lai Viện sẽ phấn đấu tiên hành từng bước việc tin học hóa trong hoạt động thư viện.

ước  
độ,  
lãng  
nh  
học  
hất  
iệc  
vào  
các  
Bên  
tủ,  
tổ  
àng  
áo,  
iêu  
quá  
môn,  
chỉ  
là  
và



*Thư viện Viện Toán học*

àn.  
là  
iện  
uôn  
ây,  
và

ịch  
sơ  
ích  
đng

oạn  
iện  
iêu  
vời  
cho  
lặc  
ổ,  
se  
hử



*Phòng máy vi tính Viện Toán học*

về trang thiết bị, chủ yếu do sự giúp đỡ quốc tế và sự đóng góp ngoại tệ của cán bộ của Viện, chúng ta đã trang bị được 2 máy vi tính loại AT, 2 máy photocopy hiện đại và một máy in laze để phục vụ cho các hoạt động khoa học. So với yêu cầu phát triển hiện nay thì cơ sở vật chất của Viện còn cần được tăng cường xây dựng nhiều hơn nữa.

### C. Hợp tác khoa học trong nước

Với tư cách là một trung tâm toán học vững mạnh trong cả nước, Viện Toán học có khả năng và trong thực tế đã thực hiện có kết quả việc hợp tác nghiên cứu khoa học, triển khai các hoạt động nghiên cứu ứng dụng và đào tạo cán bộ trình độ cao với nhiều viện nghiên cứu, các trường đại học và các đơn vị thuộc các bộ chuyên ngành. Các cơ quan trong Viện Khoa học Việt nam có quan hệ hợp tác với Viện Toán học là Viện Tin học, Viện Cơ học, Trung Tâm Vật lý lý thuyết, Trung Tâm nghiên cứu hệ thống và quản lý. Ở ngoài Viện Khoa học Việt nam, đó là các trường Đại học Bách khoa Hà nội, Đại học Tổng hợp Hà nội, Đại học Tổng hợp thành phố Hồ Chí Minh, Đại học Tổng hợp Huế, Đại học Sư phạm Hà nội, Đại học Sư phạm Vinh, Đại học Sư phạm Huế, Đại học Sư phạm thành phố Hồ Chí Minh, Đại học Đà lạt, Học Viện Kỹ thuật Quân sự, Ban Cố vấn Trung ương và một số đơn vị của Ủy Ban Kế hoạch Nhà nước, Bộ Năng lượng, Bộ Thương nghiệp...

Các hình thức hợp tác chủ yếu là :

- Phối hợp tổ chức các hoạt động xêmine và các hội thảo chuyên ngành như các hội nghị chuyên đề về Khoa học Hệ thống (Nha trang, 1981); Xác suất thống kê (Nha trang, 1983 và Hà nội, 1984); Giải tích lồi và Lý thuyết điều khiển (Tam đảo, 1983); Giải tích số và Lập trình (Sầm sơn, 1984); Toán học lý thuyết (Xuân Hòa, 1984 và Vinh, 1985); Cơ sở toán học của tin học và bảo vệ tin (Hà nội, 1986); Lý thuyết tối ưu và ứng dụng (Bãi Cháy, 1986); Đại số-tôpô-Hình học (Hà nội, 1986); Phương trình vi phân đạo hàm riêng (Hà nội, 1986); Giải tích phi tuyến và ứng dụng (Hà nội, 1987); Giải tích hiện đại và ứng dụng (Huế, 1987); Phân tích hệ thống và ứng dụng (Hà nội, 1987); Tin học lý thuyết : song song và đồng bộ hóa (Bãi Cháy, 1987); Phương pháp luận xây dựng chiến lược kinh tế xã hội (Hà nội, 1987 và Thành phố Hồ Chí Minh, 1988); Tối ưu hệ thống và phương pháp số (Bãi Cháy, 1988); Các phương pháp và thuật toán trong các bài toán tối ưu và dự báo (Hà nội, 1989); Lý thuyết tối ưu (Hà nội, 1989 và 1990); Lý thuyết xác suất (Hà nội, 1989); Các hướng mới trong giải tích phi tuyến (Đỗ sơn, 1990). Đặc biệt Viện đã góp phần quan trọng trong việc tổ chức và tham gia 3 Đại hội Toán học toàn quốc gần đây.

- Mời làm cộng tác viên của Viện Toán học để cùng thực hiện các đề tài nghiên cứu và ứng dụng toán học (tổng số khoảng 15 người).

- Nhận đào tạo nghiên cứu sinh cho các cơ quan ngoại và bồi dưỡng tại Viện các cán bộ trẻ được biệt phái đến Viện để nâng cao trình độ chuyên môn hoặc hoàn thành các công trình nghiên cứu. Cho đến năm 1989 Viện đã tuyển chọn được 31 nghiên cứu sinh ngoài Viện và đã có 11 người bảo vệ thành công luận án Phó tiến sĩ với chất lượng nói chung tốt.

Viện đã cử nhiều cán bộ có kinh nghiệm nghiên cứu giúp đỡ bồi dưỡng chuyên môn cho khoảng 10 cán bộ trẻ do các trường đại học phía Nam biệt phái đến Viện.

- Cử các cán bộ của Viện đến giảng dạy và đọc các giáo trình về toán cơ bản và chuyên ngành ở khoa Toán của các trường đại học, đặc biệt là các trường đại học phía Nam.

- Ký kết và thực hiện các hợp đồng ứng dụng toán học vào một số vấn đề kinh tế, kỹ thuật (xem chi tiết trong phần nói về Ứng dụng toán học).

## II. Hợp tác quốc tế

Hợp tác quốc tế chiếm một vị trí quan trọng trong hoạt động của Viện. Trong điều kiện đầu tư của Nhà nước cho ngành Toán còn ít ỏi, bằng con đường hợp tác quốc tế phi chính phủ, Viện đã có thể tự trang bị một số phương tiện làm việc, giải quyết được một phần sự thiếu thốn thông tin khoa học và góp phần nâng cao đời sống của cán bộ công nhân viên chức. Sự thành công trong hợp tác quốc tế chủ yếu do những nguyên nhân sau đây :

- Viện đã xác định được những phương hướng nghiên cứu đúng đắn, chọn lựa được những đề tài nghiên cứu quan trọng có ý nghĩa phương pháp luận cho những nghiên cứu ứng dụng trước mắt và lâu dài của đất nước đồng thời lại là những vấn đề toán học thời sự được thế giới quan tâm.

- Ở một số ngành trọng điểm, Viện đã đào tạo được một đội ngũ cán bộ khoa học có năng lực, làm việc nghiêm túc, có thực chất và được sự tín nhiệm quốc tế.

- Viện được sự trợ giúp của chính sách mở cửa của Nhà nước trong những năm gần đây.

Qua hai mươi năm phấn đấu, Viện đã tiến một bước rất xa trong quan hệ hợp tác với nước ngoài. Tư cách hợp tác quốc tế củ

Viện chủ yếu mang tính chất của sự học hỏi hoặc nâng cấp trình độ, đến nay chúng ta đã đạt được một sự hợp tác tương đối ngang bằng.

Quan hệ quốc tế của Viện được thực hiện theo các hướng sau đây :

#### a. Trao đổi cán bộ khoa học :

Viện đã tiếp đón nhiều chuyên gia nước ngoài đến trao đổi khoa học và đọc bài giảng, trong đó có các nhà toán học L. Schwartz (Pháp, 1969), A. Chenciner (Pháp, 1970), B. Malgrange (Pháp, 1970), A. Martino (Pháp, 1970), L. Tartar (Pháp, 1974), E. Björk (Thụy Điển, 1979), F. Pham (Pháp, 1980), K. Saito (Nhật, 1981), H. Lauter (CHDC Đức, 1981), W. Zelazco (Balan, 1981), Neal Koblitz; Ann Koblitz (Mỹ, 1983, 1985), K. Urbanik (Balan, 1983, 1989), Y. Amice (Pháp, 1983), B. Pshenichnyi (Liên xô, 1984), E. Platen (CHDC Đức, 1984), W. Levis (Mỹ, 1986), F. Hampel (Thụy sĩ, 1986), R. Horst (CHLB Đức, 1986), Ch. Davis (Canada, 1986), V. Gordenko (Liên xô, 1986), L. Mazki (Hungari, 1986, 1989), R. Wiegandt (Hungari, 1986), I. Kun (Hungaria, 1987), Z. Soós (Hungaria, 1987), T. Rapcsak (Hungaria, 1987), J. Tadeusz (Balan, 1987), A. Tyc (Balan, 1987), A. Ash (Mỹ, 1987), T. Mitsui (Nhật, 1988), Fujiwara (Nhật, 1988), S. Stechkin (Liên xô, 1988), J.P. Cartier (Pháp, 1988), S. Utkin (Liên xô, 1988), N. Astakhov (Liên xô, 1988), R. Gorenflo (CHLB Đức, 1987, 1988, 1989), J. Binda (Đan Mạch, 1989), P. Kenderoy (Bungaria, 1989), R. Alvarez (Cu ba, 1989), A. Kufner (Tiệp khắc, 1989), A. Pazman (Tiệp khắc, 1989), T. Schmidt (Hungaria, 1983, 1989), A. Chasaz (Hungaria, 1989), K. Mathes (CHDC Đức, 1985, 1989), F. Kuhnert (CHDC Đức, 1989), T. Postelnicu (Rumani, 1989), C. Nikolski (Liên xô, 1989), G. Olech (Balan, 1989), Z. Cieselski (Balan, 1989), O. Kegel (CHLB Đức, 1989), Lee peng Yee (Singapore, 1989), R. Wisbauer (CHLB Đức, 1990), I. Lavallée (Pháp, 1979, 1990), W. Oettli (CHLB Đức, 1987, 1990). Viện đã có quan hệ tốt với các giáo sư toán học Việt kiều yêu nước. Đặc biệt các giáo sư F. Pham, Bùi Trọng Liễu, Lê Dũng Tráng, Nguyễn Xuân Lai, Hoàng Hải Học... không những đã nhiều lần về làm việc tại Viện Toán, mà còn đóng góp cho việc xây dựng Viện, đào tạo nghiên cứu sinh hoặc tạo điều kiện đi công tác nước ngoài cho một số cán bộ trẻ của Viện.

Nhiều cán bộ trình độ cao của Viện, trong đó có các cán bộ trẻ, đã được mời làm cộng tác viên, trao đổi nghiên cứu hoặc thỉnh giảng như một giáo sư mời ở các trung tâm toán học quốc tế ở Mỹ, Pháp, Nhật, Ý, CHLB Đức, Áo, Bỉ, Mehico, Anh, Phần Lan, Đan Mạch, Tây Ban Nha, Liên xô, CHDC Đức, Ba Lan, Hungari...

Ở đây có thể thấy nổi lên một số đặc điểm :

- Hợp tác quốc tế của Viện được thực hiện thông qua sự sàng lọc và cạnh tranh quốc tế gay gắt. Các tổ chức quốc tế về tài trợ

ngiên cứu khoa học như các tổ chức Humboldt, DAAD, Viện Toán học Max-Planck của CHLB Đức, JSPS của Nhật bản, CNR của Ý đã được biết như là các tổ chức tài trợ một số lượng rất ít so với tổng số người nộp đơn từ mọi nước trên thế giới, kể cả những nước có truyền thống về phát triển toán học. Tuy vậy, chỉ trong mấy năm gần đây đã có tới 14 cán bộ trình độ cao của Viện được các tổ chức đó mời đến nghiên cứu. Ngoài ra, cũng bằng sự cạnh tranh quốc tế, 5 cán bộ trẻ khác của Viện đã được đi tu nghiệp tại Nhật bản và Thái Lan. Sự thành công của gần 20 cán bộ này đã phần nào nói lên được trình độ khoa học và mức độ vững vàng của Viện đối với quốc tế.

- Nhịp độ giao lưu khoa học của Viện ngày càng lớn, thể hiện trong số lượng lượt người ra công tác ở nước ngoài ngày càng tăng nhanh :

1985 : 9  
 1986 : 14  
 1987 : 20  
 1988 : 33  
 1989 : 39  
 1990 : 42 (tính đến 1/9)

- Số lượng các công trình viết chung với tác giả nước ngoài có trình độ cao ngày càng nhiều : nếu trước năm 1985 số lượng đó còn ít ỏi và chủ yếu là viết cùng với giáo sư hướng dẫn làm nghiên cứu sinh, thì trong các năm 1986-1990 theo thống kê chưa đầy đủ đã có cả thảy 24 công trình viết chung được hoàn thành

#### b. Tổ chức và tham gia các hội nghị quốc tế

Một số giáo sư của Viện đã được mời tham gia vào Ban Chương trình và đọc báo cáo mời toàn thể trong một số hội nghị quốc tế. Riêng ngành tối ưu là ngành mà Viện đã khẳng định được vị trí quốc tế của mình thì cán bộ của Viện đã được mời vào Ban Chương trình Quốc tế của tất cả 6 Đại hội của ngành qui hoạch toán học toàn thế giới từ 1976 đến nay, đọc 20 báo cáo, mời trong các hội nghị quốc tế trong đó có 4 báo cáo mời toàn thể.

Viện đã có khoảng 100 lượt người tham dự các hội nghị quốc tế chuyên ngành. Đại biểu của Viện đã tham dự 6 Đại hội toán học quốc tế do Hội Toán học quốc tế tổ chức. Đặc biệt, thông qua việc cạnh tranh quốc tế, 10 cán bộ trẻ của Viện (trong toàn thế giới người trong toàn quốc) đã được Hội Toán học thế giới và Hội Toán học Nhật bản tài trợ tham dự 4 Đại hội toán học thế giới gần đây



*GS: Hoàng Tuy, Chủ tịch Hội đồng khoa học ngành toán.*



*GS: Hoàng Tuy làm việc ở Nhật Bản 9-1988*

ở trong nước, Viện đã đứng ra tổ chức 2 hội nghị quốc tế (Hội nghị IFIP về tối ưu và mô hình hóa tại Hà Nội năm 1983 và Hội nghị Hội Đồng Trung Tâm Toán học Banach cũng tại Hà Nội năm 1989) và phối hợp với Viện Tin học tổ chức 2 hội nghị quốc tế khác (Hội nghị do Ủy Ban Kỹ thuật tính toán, viết tắt là KHBTT, tại Hà Nội, năm 1979 và Hội nghị về Toán học tính toán của Ủy ban phối hợp quốc tế về toán học của các nước đang phát triển, viết tắt là ICOMIDC, tại thành phố Hồ Chí Minh năm 1988).

### c. Hợp tác quốc tế trong lĩnh vực xuất bản

Cán bộ của Viện đã được mời tham gia Ban Biên tập của 3 tạp chí quốc tế có uy tín là Mathematical Programming (Mỹ), Optimization (CHDC Đức), Probability and Mathematical Statistics (Ba Lan) và tham gia sáng lập tạp chí mới Global Optimization (CHLB Đức). Hai tạp chí lớn về thông tin toán học trên thế giới là Mathematical Reviews (Mỹ) và Zentralblatt (CHLB Đức) đã mời nhiều cán bộ của Viện làm cộng tác viên.

Cán bộ của Viện đã có 3 cuốn sách chuyên khảo trong đó có 2 cuốn do nhà xuất bản Springer in và phát hành (Springer là nhà xuất bản quốc tế lớn nhất về sách và tạp chí khoa học) :

- Global Optimization (Deterministic Approaches) (R. Horst and Hoàng Tụy). Springer Verlag, 1990 (694 trang).

- Theory of vector optimization (Đình Thế Lục). Springer Verlag, 1989 (170 trang).

- Phương trình vi phân phi tuyến và không gian hàm cấp vô hạn (tiếng Nga) (Trần Đức Vân), Nhà xuất bản Trường Đại học Quốc gia Belorussia, 1983.

Và 3 giáo trình khác in ở AIT và Đại học Mexico là :

- Deterministic decision model (Hoàng Tụy). AIT, IE & M, Lecture Notes 21, 1987.

- Optimal control theory and applications (Hoàng Tụy). AIT, IE & M, Lecture Notes 21, 1987.

- Introduction to Nonlinear Optimization (Đình Thế Lục). INVESTAV-IPN, Mexico D.F., 1989.

Trong tình hình có nhiều khó khăn, đặc biệt là khó khăn về việc in ấn, Viện đã chủ trì in tạp chí tiếng nước ngoài Acta Mathematica Vietnamica ra thường xuyên mỗi năm 2 số (mỗi số khoảng 150 trang). Nhiều nhà toán học ở Pháp, Nhật, Mỹ, Liên xô, Ấn Độ, Bungari trong đó có các nhà toán học có uy tín quốc tế như F. Pham (Pháp), Hironaka (Nhật Bản), đã tham gia viết bài trong Tạp chí này. Tạp chí đã được trao đổi với các trường đại học và thư

viện của 22 nước trên thế giới trong đó có Mỹ, Pháp, Ấn độ, CH Đức, Nhật... và là tạp chí khoa học cơ bản duy nhất của Việt Nam ở trình độ quốc tế đã được duy trì liên tục từ 20 năm nay.

#### d. Sự tham gia và giúp đỡ của các tổ chức khoa học quốc tế

Viện đại diện cho ngành toán học của Việt Nam tham gia Trung tâm Toán học quốc tế Banach, một tổ chức toán học thành lập trên khuôn khổ hợp tác nhiều bên giữa các Viện Hàn Lâm khoa học nước xã hội chủ nghĩa. Cũng trong khuôn khổ này Viện đã có một đề tài khoa học hợp tác với Viện Toán học Steklov (Liên Xô), Viện Toán Karl-Weierstrass (CHDC Đức), các Viện Toán học Hungari, Lan, Bungari nhưng nhìn chung mới chỉ giới hạn ở việc trao đổi hoặc đào tạo cán bộ.

Một chuyên gia trình độ cao của Viện (Giáo sư Hoàng Tuy) được mời tham gia vào Ủy Ban Phát triển và Trao đổi (Committee for Development and Exchange) của Hội Toán học quốc tế trong năm 1982-1985.

Ngoài việc giúp đỡ của các tổ chức Việt kiều yêu nước ở nước ngoài, Viện đã được Ủy Ban Hợp Tác Khoa học Việt-Mỹ, đặc biệt Giáo sư N. Koblitz, giành cho những sự ủng hộ nhất định trong đó có một số lượng đáng kể các tài liệu khoa học quý giá : sách chuyên khảo và tạp chí tây văn.

#### Kết luận

Từ một đơn vị nghiên cứu khoa học được bắt đầu với một lượng ít ỏi, cán bộ mà đại đa số có trình độ khoa học còn hạn chế và một cơ sở vật chất hầu như không có gì, sau 20 năm hoạt động đến nay Viện Toán học đã trở thành một trung tâm nghiên cứu và đào tạo toán học vững mạnh làm hạt nhân cho toàn bộ ngành toán học trong cả nước, có tiềm lực cán bộ tốt, có khả năng đoàn kết hợp tác với các cơ quan khác để tham gia giải quyết từng bước những vấn đề kinh tế xã hội của đất nước. Đồng thời Viện đã góp phần quan trọng trong việc khẳng định được chỗ đứng của ngành Toán học Việt Nam trên quốc tế.

Đạt được những kết quả ấy là do các nguyên nhân chủ yếu như sau :

1. Sự xác định đúng đắn và duy trì các phương hướng chiến lược, chọn lọc những đề tài thời sự phù hợp với yêu cầu toán học thế giới và những yêu cầu thực tế của đất nước.

2. Sự nỗ lực và làm việc có thực chất của đại đa số cán bộ công nhân viên chức của Viện, kể cả cán bộ làm công tác nghiên cứu và phục vụ nghiên cứu.

3. Sự đoàn kết, tương trợ và ổn định trong Viện.

Việc tiếp tục phát huy các truyền thống này và phát huy các nguyên tắc công khai, công bằng và dân chủ trong hoạt động của Viện sẽ là những phương châm chủ yếu để phát triển Viện trong giai đoạn mới.

Trong bối cảnh có nhiều biến động về kinh tế, chính trị trên thế giới và những đòi hỏi đang diễn ra trên đất nước ta, chắc chắn Viện còn gặp nhiều khó khăn trong bước đường tiến lên, nhưng toàn thể cán bộ công nhân viên của Viện sẽ kiên trì phấn đấu, nhằm góp phần xứng đáng nhất của mình vào sự nghiệp cách mạng vĩ đại của dân tộc như lời đồng chí Phạm Văn Đồng, nguyên Chủ tịch Hội Đồng Bộ trưởng, đã phát biểu khi đến thăm Viện Toán học năm 1986.

**PHỤ LỤC 1**

**BÁO CÁO 20 NĂM HOẠT ĐỘNG  
CỦA CÁC NHÓM NGHIÊN CỨU**

## CÁC THUẬT TOÁN GIẢI CÁC BÀI TOÁN TỐI ƯU

(Nhóm Thuật Toán, Phòng Tối ưu và Hệ Thống)

Nguyễn Văn Thoai

Hướng nghiên cứu thuật toán đã hình thành trong nhóm vận trù học ra đời ngay từ khi thành lập Viện Toán học. Trước đó nữa, từ những năm đầu của thập kỷ 60, nhóm vận trù học đã hình thành và hoạt động với nhiều kết quả thiết thực mà rõ rệt nhất là đã sớm ứng dụng bộ môn toán mới mẻ này vào một số vấn đề trong sản xuất và quản lý kinh tế ở nước ta. Từ năm 1970 đến năm 1980, nghiên cứu của nhóm tập trung vào những vấn đề định tính của lý thuyết các bài toán tối ưu phi tuyến. Đáng kể nhất ở đây là định lý về tính không tương thích của hệ bất đẳng thức lồi (1972), định lý minimax tổng quát (1973), các định lý về tính ổn định, tính trơn và tính khả nghịch địa phương của các ánh xạ không khả vi (1976), thuật toán tính điểm bất động (1978)... Trong phạm vi bài này, chúng tôi tập trung giới thiệu các kết quả nghiên cứu của nhóm trong 10 năm trở lại đây (1979-1989).

Sau công trình nghiên cứu có tính chất mở đường của Giáo sư Hoàng Tụy năm 1964, việc nghiên cứu các tính chất và đề xuất phương pháp giải cho các bài toán quy hoạch phi tuyến không lồi đã được nhiều người ở nước ta và trên thế giới quan tâm. Tuy nhiên, mãi tới những năm đầu của thập kỷ 70 vấn đề này mới được nghiên cứu một cách tập trung và trong vòng mười năm trở lại đây đã được phát triển mạnh mẽ và trở thành một hướng nghiên cứu quan trọng và hấp dẫn trong lý thuyết tối ưu mang tên là "Tối ưu toàn cục".

Tối ưu toàn cục bao gồm những lớp bài toán quan trọng cả về lý thuyết lẫn ứng dụng. Những lớp bài toán quan trọng nhất được nhắc tới nhiều là: quy hoạch đ.c. (quy hoạch mà trong đó các hàm số tạo nên cấu trúc của bài toán đều được biểu thị dưới dạng hiệu của các hàm lồi); quy hoạch lõm (cực tiểu hàm lõm trên tập lồi); quy hoạch lồi dao (quy hoạch mà miền chấp nhận là giao của một tập lồi đóng với phần bù của những tập lồi mở) v.v... Khó khăn cơ bản đối với một bài toán tối ưu toàn cục là ở chỗ nó có nhiều cực trị và cực trị toàn cục nói chung là khác cực trị địa phương.

Trải qua, hơn 10 năm nghiên cứu, nhóm "Thuật toán" đã thu được những kết quả phong phú và rất có ý nghĩa :

a. Xây dựng một lý thuyết hoàn chỉnh và có hệ thống cho bài toán tối ưu toàn cục theo quan điểm tậ định. Qua đó làm rõ vai trò của cấu trúc đ.c. (hiệu hai hàm lồi, hiệu hai tập lồi) trong bài toán này.

b. Xây dựng những thuật toán hữu hiệu cho các lớp bài toán chính nhờ tận dụng được những tính chất đặc biệt trong cấu trúc của chúng : Quy hoạch lồi, Quy hoạch lồi cỡ lớn với cấu trúc đặc biệt, Quy hoạch đ.c., Quy hoạch lồi đảo, Quy hoạch song tuyến, Quy hoạch rời rạc, Tối ưu hàm đa thức v.v...

c. Xây dựng các thuật toán hữu hiệu cho các bài toán nảy sinh từ các vấn đề kỹ thuật và kinh tế : Bài toán dinh tâm thiết kế, Bài toán thiết kế tối ưu mạng cấp nước của các thành phố, Bài toán luồng một nguồn với chi phí lồi, Bài toán quy hoạch phát triển nguồn điện v.v...

d. Lập trình thử nghiệm và so sánh hiệu quả của một số thuật toán chính nêu ở các phần trên. Một số bộ chương trình có chất lượng cao đang được hoàn thiện theo dạng thương mại.

Hầu hết những kết quả của các thành viên trong nhóm đã được công bố trong khoảng 100 công trình nghiêm túc đăng ở các tạp chí quốc tế có uy tín và được trình bày chi tiết hoặc giới thiệu trong cuốn sách quan trọng "Global Optimization : Deterministic Approaches" của R. Horst và Hoàng Tuy, Nhà xuất bản Springer, 1990 (694 trang).

Sự đóng góp của nhóm "Thuật toán" mà trước hết là các công trình nghiên cứu của Giáo sư Hoàng Tuy trong lĩnh vực tối ưu toàn cục đã được dư luận chuyên môn quốc tế đánh giá cao. Sự đóng góp đó thực chất đã có vai trò rất quan trọng trong việc hình thành một tiểu ban riêng về tối ưu toàn cục của đại hội quốc tế về Quy hoạch toán học lần thứ 13 ở Tokyo năm 1988 và trong việc ra đời của tạp chí quốc tế "Global Optimization" mà Giáo sư Hoàng Tuy là một trong những người sáng lập.

Công tác ứng dụng của nhóm bao gồm hai mặt. Thứ nhất là vận dụng những phương pháp tối ưu toàn cục để xử lý một số bài toán quy hoạch không lồi với cấu trúc đặc biệt phát sinh từ các vấn đề khoa học, kỹ thuật và kinh tế như đã kể ở trên (mục c.). Thứ hai là áp dụng các phương pháp tối ưu nói chung để giải quyết những vấn đề thực tế, thông qua hàng chục hợp đồng kinh tế với một số cơ quan nghiên cứu, sản xuất, kinh doanh.

## LÝ THUYẾT ĐIỀU KHIỂN HỆ THỐNG

(Nhóm Lý thuyết điều khiển và trò chơi vi phân,  
Phòng Các hệ động lực và Phòng Tối ưu-Hệ thống)

Nguyễn Khoa Sơn, Vũ Ngọc Phát,  
Phan Huy Khải

Lý thuyết điều khiển hệ thống động lực được quan tâm và đẩy mạnh nghiên cứu ở Viện Toán học từ hơn 10 năm nay. Việc nghiên cứu được tiến hành chủ yếu bởi nhóm cán bộ thuộc phòng Các hệ động lực và phòng Tối ưu và hệ thống. Hướng nghiên cứu chủ yếu là các vấn đề định tính của hệ động lực có điều khiển, trong đó nổi bật nhất là các kết quả thu được trong lĩnh vực lý thuyết điều khiển được và lý thuyết trò chơi vi phân.

### 1. Lý thuyết điều khiển được

Là một trong những hướng nghiên cứu chính trong lý thuyết điều khiển toán học hiện đại, các vấn đề điều khiển được đóng vai trò quan trọng trong nhiều lĩnh vực khác nhau của toán học ứng dụng như lý thuyết điều khiển tối ưu, lý thuyết trò chơi, lý thuyết ước lượng tối ưu, ... và có nhiều ứng dụng vào các hệ thống thực tiễn trong kỹ thuật và kinh tế. Mục tiêu chính của lý thuyết này là xây dựng các phương pháp toán học để kiểm tra tính điều khiển được, theo một nghĩa xác định nào đó, của các hệ động lực được mô tả bởi phương trình vi phân hoặc sai phân, nghiên cứu mối quan hệ giữa tính điều khiển được và các tính chất định tính khác của hệ thống như tính quan sát được, tính ổn định và tính ổn định hóa được, v.v., ... Qua gần 30 năm phát triển, khởi đầu từ những công trình nổi tiếng của các nhà toán học Liên xô và Mỹ như Tsypkin, Kalman, Lasalle, Krasovskii, Lý thuyết điều khiển được đã thu được nhiều kết quả hết sức phong phú, cho nhiều loại mô hình hệ thống khác nhau, ngày càng phức tạp, như các hệ song tuyến và phi tuyến, các hệ với tham số phân phối được mô tả bởi phương trình đạo hàm riêng, các hệ có chập, các hệ điều khiển ngẫu nhiên, ... Tuy nhiên, cho đến những năm gần đây, các kết quả thu được trong lĩnh vực này vẫn chủ yếu tập trung cho các hệ động lực hữu hạn chiều và các hệ không có ràng buộc trên biên trạng thái và biên điều khiển. Điều này rõ ràng hạn chế khả năng ứng dụng các kết quả thu được vào việc nghiên cứu các bài toán và các mô hình nảy sinh trong thực tiễn. Ngoài ra, các bài toán điều khiển được của các hệ động lực phi tuyến cũng mới có rất ít kết quả.

Nhóm nghiên cứu về lý thuyết điều khiển của Viện tập trung nỗ lực vào nghiên cứu một số bài toán mới, có tính chất thời sự trong lĩnh vực điều khiển được, với các mục tiêu: xây dựng và phát triển một lý thuyết hoàn chỉnh về tính điều khiển được đối với các hệ động lực tuyến tính tổng quát trong không gian Banach vô hạn chiều với ràng buộc trên điều khiển; áp dụng các kết quả thu được cho hệ tổng quát vào giải quyết bài toán điều khiển được cho các hệ cụ thể như hệ được mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm, và hệ có tham số phân phối, với ràng buộc trên biên điều khiển, là những bài toán cho đến hiện nay hầu như chưa được nghiên cứu trong lý thuyết điều khiển; xây dựng và phát triển lý thuyết điều khiển được cho các hệ động lực rời rạc có ràng buộc trạng thái và ràng buộc điều khiển trong không gian vô hạn chiều, đặc biệt là các hệ phi tuyến. Để giải quyết các vấn đề nêu trên, các tác giả đã đề xuất và phát triển các phương pháp nghiên cứu hữu hiệu trên các công cụ mạnh của giải tích hàm, đặc biệt là lý thuyết nửa nhóm và lý thuyết Krein-Rutman về các nón bất biến, cũng như các phương pháp và các kết quả mới của giải tích lồi và giải tích phi tuyến. Nhờ đó đã nhận được nhiều kết quả mới, có ý nghĩa khoa học. Các kết quả nổi bật nhất thu được trong thời gian qua theo hướng nghiên cứu này là:

- Xây dựng lý thuyết điều khiển được cho hệ tuyến tính tổng quát trong không gian vô hạn chiều với ràng buộc trên điều khiển và ràng buộc trạng thái và với các toán tử bị chặn. (tính lồi trừ mật của miền đạt được và của tập quỹ đạo, nguyên lý bang-bang cho hệ vô hạn chiều, các tiêu chuẩn điều khiển được địa phương chính xác và xấp xỉ, ...).

- Mở rộng các kết quả kể trên ra trường hợp các toán tử không bị chặn trên cơ sở áp dụng lý thuyết nửa nhóm, và ứng dụng các kết quả đó vào nghiên cứu tính điều khiển được của các hệ với tham số phân phối mô tả bởi phương trình dạng parabolic trên miền compact với điều khiển dương.

- Xây dựng lý thuyết điều khiển được cho hệ động lực rời rạc với ràng buộc trạng thái và ràng buộc điều khiển: thu được các tiêu chuẩn điều khiển được địa phương chính xác và xấp xỉ cho hệ tuyến tính vô hạn chiều, tiêu chuẩn điều khiển được toàn cục cho trường hợp miền ràng buộc là tập lồi bất kỳ và trường hợp toán tử của hệ là compact, tiêu chuẩn điều khiển được cho trường hợp tập ràng buộc không lồi và cho trường hợp hệ tuyến tính không đứng có chậm.

- Áp dụng các kết quả của lý thuyết điều khiển được hệ rời rạc có ràng buộc vào nghiên cứu tính chất của một số hệ động lực khác, nhận được nhiều kết quả mới như tiêu chuẩn điều khiển được chính xác của hệ không đứng có hệ số tuần hoàn, tiêu chuẩn điều khiển được xấp xỉ cho hệ phương trình vi phân phiếm hàm tổng quát với điều khiển dương.

- Nhận được các điều kiện đủ của tính điều khiển được địa phương của hệ động lực phi tuyến rời rạc với ràng buộc điều khiển trong trường hợp về phải là hàm khả vi hoặc Lipschitz địa phương, điều kiện đủ về điều khiển được cho các hệ phi tuyến đa tham số và các hệ phi tuyến chưa nhiều.

Với trên 30 bài báo khoa học công bố trên các tạp chí toán học quốc tế, các kết quả kể trên là những đóng góp đáng kể vào việc phát triển hướng nghiên cứu về lý thuyết điều khiển hệ thống ở nước ta; nhiều kết quả đã được nhiều nhà chuyên môn nhiều nước quan tâm và đánh giá cao: một số báo cáo khoa học về các kết quả kể trên được nhận trình bày tại các hội nghị khoa học quốc tế như IFIP (Hanoi, 1983), IFAC (Perpignan, 1989), IFIP (Leipzig, 1989), được mời báo cáo tại nhiều trung tâm nghiên cứu và trường đại học ở một số nước như Liên xô, Ba lan, CHDC Đức, CHLB Đức, Anh, Ý, Phần lan. Nhiều kết quả đã được sử dụng trong các công trình nghiên cứu của các tác giả khác của các nước, được trình bày kỹ trong một số giáo trình và sách chuyên khảo của chuyên gia nổi tiếng trong lĩnh vực điều khiển hệ thống (Giáo trình "Linear Autonomous Controllability", R. Conti, University of Minnestota, 1982, Chuyên khảo của Hội Toán học Ý "Prossesi di Controllo Lineari in  $R^n$ ", R. Roberto, Bologna, 1985).

Hiện nay và trong một số năm tới sẽ tiếp tục đẩy mạnh nghiên cứu trong lĩnh vực lý thuyết điều khiển hệ thống, hướng vào một số bài toán đang được giới chuyên môn về điều khiển trên thế giới quan tâm như: điều khiển được các hệ có tham số phân phối với điều khiển biên bị chặn, các hệ mô tả bởi phương trình vi phân và sai phân kỳ dị có ràng buộc trên điều khiển, các bài toán về ổn định hóa và điều khiển được các hệ phi tuyến và các hệ được mô tả bởi bao hàm thức vi phân và sai phân Lipschitz. Đặc biệt sẽ tập trung nghiên cứu các bài toán liên quan đến giải tích robust như tính robust điều khiển được của hệ vô hạn chiều, phương pháp và thuật toán tính bán kính ổn định và bán kính điều khiển được với việc áp dụng các thuật toán tối ưu toàn cục, áp dụng các kết quả này vào phân tích robust các tính chất đỉnh tính của hệ có chập và hệ có tham số phân phối. Ngoài ra, sẽ tiến hành nghiên cứu các ứng dụng dựa lý thuyết điều khiển vào các hệ kinh tế động, các hệ thống tự động và các bài toán quản lý.

## 2. Lý thuyết trò chơi

Lý thuyết trò chơi là một phần quan trọng trong lý thuyết định tính của các hệ động lực. Trong vòng mười năm qua nhóm nghiên cứu lý thuyết trò chơi Viện Toán học đã thu được nhiều kết quả đáng kể.

Trước hết nhóm nghiên cứu đã thu được các phương pháp mới hiệu quả để giải bài toán dưới bất trong trò chơi vi phân, sai phân với giả thiết tổng quát nhất về việc sử dụng thông tin của các đối thủ. Phương pháp này tỏ ra có hiệu quả rõ rệt trong các trường hợp sử dụng thông tin chậm, thông tin không đầy đủ mà các phương pháp trước đây của các tác giả khác hoặc là không giải được, hoặc là kém hiệu lực. Các kết quả thu được nhằm bổ sung cho các kết quả của các tác giả nổi tiếng trong lĩnh vực lý thuyết trò chơi : L.S. Pontryagin, N.B. Psenitruui, M.S. Nikol'skii, N.Yu. Satimov.

Nhóm nghiên cứu cũng lần đầu tiên giải bài toán dưới bất với thông tin trạng thái; và đã đề xuất một phương pháp mới trong lý thuyết trò chơi : gắn việc xét bài toán dưới bất với một bài toán điều khiển được. Phương pháp này cho phép tìm ra điều kiện kết thúc trong các bài toán dưới bất nhiều người với ràng buộc tích phân trực tiếp trên các tham số của trò chơi.

Gần đây L.S. Pontryagin và A.C. Misenko đã xét các bài toán trong lý thuyết trò chơi với một quan điểm mới : trò chơi không phân lập đối tượng. Nhóm nghiên cứu đã thu được những kết quả ban đầu về hướng mới này : Xét bài toán dưới bất không phân lập đối tượng với ràng buộc tích phân (trong khi đó L.S. Pontryagin... xét với ràng buộc hình học).

## GIẢI TÍCH LỖI VÀ ỨNG DỤNG

(Nhóm Giải tích lỗi Phòng Tối ưu và Hệ thống)

Nguyễn Xuân Tấn

Vào những năm 70 Giải tích lỗi trở thành một trong những điểm nóng của toán học nhờ vào công trình của các nhà toán học có tiếng như Fenchel, Rockafellar, Moreau, Ioffe v.v... Trong bối cảnh ấy nhóm Giải tích lỗi thuộc Phòng Tối ưu đã được thành lập. Hiện nay những hướng khác nhau những cùng xuất phát từ giải tích lỗi đã được các cán bộ của nhóm nghiên cứu. Những hướng chính đó là : Bất đẳng thức biến phân và tựa biến phân, lý thuyết tối ưu đa mục tiêu, định lý Sard mở rộng cho lớp ánh xạ Lipschitz địa phương, lý thuyết rẽ nhánh của nghiệm của các phương trình phi tuyến và mối liên quan của chúng tới các bài toán tối ưu.

1) Về bất đẳng thức biến phân và tựa biến phân : Đã thu được các kết quả về sự tồn tại nghiệm với các điều kiện đơn giản hơn nhiều so với các kết quả quen biết. Nghiên cứu tính ổn định của nghiệm của bất đẳng thức biến phân và tựa biến phân. Một số vấn đề về bất đẳng thức biến phân và tựa biến phân phụ thuộc tham số cũng được khảo sát.

2) Về tối ưu đa mục tiêu : Đã thu được các kết quả về sự tồn tại nghiệm, các điều kiện cần và đủ cho bài toán tối ưu, lý thuyết đối ngẫu, cấu trúc của các tập nghiệm, một số bài toán qui hoạch ngẫu nhiên và qui hoạch động, các vấn đề về cân bằng trong các mô hình kinh tế và lý thuyết trò chơi. Ngoài ra còn nghiên cứu nón lồi của các ánh xạ không lồi sau đó ứng dụng chúng vào các bài toán tối ưu không lồi. Đây là những đóng góp quan trọng cho giải tích đa trị không lồi.

3) Đã nghiên cứu một số tính chất của ánh xạ đa trị khả vi và tính chất của không gian các ánh xạ này. Mở rộng định lý Sard quan trọng trong giải tích cổ điển cho lớp ánh xạ Lipschitz địa phương và chứng minh công thức về sự đánh giá độ đo của tập các giá trị tới hạn.

4) Về lý thuyết rẽ nhánh : Nghiên cứu sự rẽ nhánh của nghiệm các phương trình toán tử phi tuyến phụ thuộc tham số bằng phương pháp giải tích, biểu diễn nghiệm của chúng theo biểu thức giải tích. Tìm mối liên quan giữa bài toán rẽ nhánh với các bài toán trong lý thuyết tối ưu hóa. Nghiên cứu các bài toán rẽ nhánh từ các nghiệm suy biến bằng các phương pháp của lý thuyết bậc. Các kết quả này đã được áp dụng để nghiên cứu sự rẽ nhánh của các bài toán trong vật lý, cơ học và hóa sinh như các bài toán trong vật lý bán dẫn, sự dẫn hồi của vật liệu xây dựng, các tế bào hình cầu v.v....

Trong khoảng thời gian năm năm trở lại đây từ các lĩnh vực trên cả nhóm đã công bố được 30 bài báo trên các tạp chí quốc tế. Đáng lưu ý là nhiều công trình đã được đăng trên các tạp chí có tiếng ở Mỹ và Tây Âu. Hai cuốn sách chuyên khảo được in ở nước ngoài là :

- Lý thuyết tối ưu vectơ, xuất bản tại Tây Đức do nhà xuất bản Springer thực hiện.

- Mở đầu về tối ưu phi tuyến, xuất bản tại Mexico do nhà xuất bản của Đại học Bách khoa Mexico thực hiện.

## LÝ THUYẾT VI PHÂN ẢNH XẠ ĐA TRI VÀ CÁC BÀI TOÁN TỐI ƯU CÁC BẠO HÀM THỨC

(Nhóm Giải tích đa trị và tối ưu hóa phòng Các hệ động lực)

Phạm Hữu Sách, Phạm Huy Điển

Giải tích đa trị nghiên cứu những vấn đề lý thuyết và ứng dụng của giải tích liên quan đến các đối tượng được mô tả bởi các ánh xạ đa trị. Các ánh xạ này xuất hiện trong quá trình mô hình hóa nhiều hệ thống kinh tế kỹ thuật phức tạp và được sử dụng trong một công cụ có hiệu lực để tìm lời giải mạnh cho nhiều bài toán tối ưu và điều khiển. Một trong những động lực thúc đẩy sự phát triển mạnh mẽ của giải tích đa trị là nhu cầu giải quyết sự định chuyên động và vấn đề tối ưu hóa các hệ điều khiển xác định bởi các ánh xạ không trơn. Các nghiên cứu của Nhóm hướng vào nghiên cứu thứ hai (tức là các bài toán tối ưu) và được thực hiện theo các hướng sau đây :

### 1. Xây dựng hoàn chỉnh lý thuyết vi phân ánh xạ đa trị

Mỗi ánh xạ đa trị nhận giá trị lớn và đóng được đặc trưng bởi đồ thị hoặc hàm tựa của nó. Do đó khi xây dựng lý thuyết vi phân ánh xạ đa trị Nhóm đã sử dụng hai cách xấp xỉ tự nhiên xấp xỉ đồ thị hoặc xấp xỉ hàm tựa của các ánh xạ đã cho. Nét đặc biệt của phương pháp thứ nhất là ở chỗ có thể định nghĩa vi phân đối với một lớp rộng rãi các ánh xạ đa trị như là một ánh xạ tuyến tính thỏa mãn một số tính chất nào đó. Khái niệm ánh xạ lớn lần đầu tiên được đưa vào trong công trình của Phạm Hữu Sách ("Lý thuyết điều khiển các quá trình được cho bởi các ánh xạ đa trị", Tạp chí tiếng Nga Kibernetika, No.2, 1976) để nghiên cứu nhiều bài toán tối ưu và điều khiển trong các hệ thống đa trị mà mãi sau này mới được A.D. Ioffe định nghĩa như là một quạt (fan) và được khảm thác như một công cụ tốt để xấp xỉ các ánh xạ đơn trị không khả vi.

Sử dụng hai cách định nghĩa vi phân ánh xạ đa trị nêu trên Nhóm đã mở rộng được các kết quả cơ bản của tính vi phân cổ điển trong hợp ánh xạ đa trị (như các định lý ánh xạ trên địa phương định lý hàm ẩn đa trị, định lý đạo hàm hàm hợp, định lý giá trị trung bình...). Đặc biệt đã chứng minh được dạng tổng quát của định lý Ljusternik cổ điển về việc đánh giá khoảng cách một điểm đến một tập hợp các nghiệm của một bạo hàm thức. Đã đưa ra được những đặc trưng và công thức biểu diễn cụ thể các phân

hình nón Bouligand của tập nghiệm này. Đây là những kết quả có trong việc xây dựng bất cứ một lý thuyết vi phân mới nào dựa vào việc giải quyết các bài toán tối ưu.

2. Xây dựng lý thuyết tối ưu cấp 1 và cấp 2 trong các bài toán tối ưu các bao hàm thức (tức là bài toán cực trị mà tập các phương án chấp nhận được là nghiệm của một hệ thống các bao hàm thức).

Kết quả có tính chất chỉ đạo cho việc nghiên cứu điều kiện tối ưu trong các bài toán này và cũng được tác giả nước ngoài nghiên cứu sử dụng là công trình của Phạm Hữu Sách ("Nguyên lý cực trị trong các quá trình rời rạc", Tạp chí tiếng Nga Phương trình vi phân, No.8, 1975) trong đó lần đầu tiên đã giải quyết được bài toán do V.G. Boltianskii đặt ra về giả thuyết nghiệm đúng nguyên tắc cực tiểu trong các hệ rời rạc không có lát cắt địa phương tròn.

Ngoài các công cụ vi phân đã thiết lập ở trên, việc nghiên cứu bài toán tối ưu các bao hàm thức đòi hỏi phải đưa vào khái niệm về tính chính qui của một hệ thống các bao hàm thức trong không gian vô hạn chiều đảm bảo tính chuẩn tắc của bài toán (tức là đảm bảo cho nhân tử Lagrange ứng với hàm mục tiêu phải khác không). Tương ứng với hai khái niệm xấp xỉ ảnh xạ đa trị đã đưa vào các khái niệm chính qui thích hợp vừa tổng quát hóa được các khái niệm của Zowe-Kurcyusz-Penot trong qui hoạch toán học, vừa cho phép đảm bảo tính yên tĩnh (calmness) của bài toán để có thể qui bài toán xuất phát về bài toán không có hạn chế bao hàm thức và do đó thu được tính chuẩn tắc. Chính phương pháp này đã được sử dụng để thiết lập điều kiện cần cấp hai cho bài toán tối ưu các bao hàm thức trong không gian hữu hạn chiều mà các hàm tựa khả vi liên tục 2 lần. Tương tự như trường hợp cổ điển, đã chứng minh được rằng các điều kiện ấy cũng là đủ nếu bất đẳng thức đặc trưng cho điều kiện tối ưu cấp 2 là một bất đẳng thức chặt (và tập các phương án chấp nhận được nơi rộng thích hợp).

Vấn đề tối ưu hàm vecto cũng được nghiên cứu một cách nhất quán theo cách tiếp cận đã đề xuất. Trong các hệ thống lồi đa tìm được phương pháp đặc trưng tập nghiệm Pareto và chính xác hóa một số kết luận sai lầm của một số tác giả nước ngoài.

Các tính chất ổn định điển hình của bài toán tối ưu các bao hàm thức (như tính liên tục, tính Lipschitz của hàm biên duyên, việc đánh giá đạo hàm và duoi vi phân của hàm này...) cũng được xác lập và là mở rộng các kết quả tương ứng của J. Gauvin, J.P. Aubin, H. Frankowska ...

3. Nghiên cứu các phương pháp số trong bài toán tìm nghiệm các bao hàm thức

Đã thu được một số thuật toán tìm nghiệm bao hàm thức và các giá thiết mới là hàm tử của ánh xạ đa trị là trơn hoặc lồi (không nhất thiết là trơn). Các thuật toán này được ứng dụng trong việc giải bất đẳng thức suy rộng (khi không gián được định hướng bởi 1 nón lồi bất kỳ) mà một trường hợp riêng là hệ hỗn hợp phương trình-bất phương trình phi tuyến dạng được nhiều người quan tâm. Thuật toán tìm được có hiệu lực với một lớp bài toán rộng hơn so với các thuật toán đã biết trước đây (của các tác giả khác như : S. Robinson, J. Burke, S.P. Han, U. Garcia-Palomares A. Restuccia,...) và trong trường hợp riêng khi xét lớp bài toán mà các thuật toán kể trên cũng có hiệu lực, thuật toán của chúng tôi cũng có những nét đặc thù riêng, có tính bổ trợ cho các thuật toán đã biết.

Tóm lại, các kết quả mà Nhóm thu được có 3 đặc điểm :

- Xây dựng hoàn chỉnh một lý thuyết vi phân mới đối với một lớp rộng rãi các ánh xạ đa trị và một lý thuyết tối ưu mạnh hơn một số lý thuyết khác. Đặc biệt, lần đầu tiên đã giải quyết được bài toán về nghiệm đúng nguyên lý tựa trong các hệ rời rạc không có lát cắt địa phương.

- Một số kết quả và khái niệm (như ánh xạ lồi, tính chính qui...) có tính chất độc đáo và chứa đựng nhiều kết quả và khái niệm đã có.

- Các kết quả cơ bản công bố trên các tạp chí trong nước và quốc tế có uy tín, trong đó có kết quả và khái niệm đã được sử dụng trong công trình nghiên cứu của tác giả nước ngoài. Ngoài ra, các kết quả đó còn là cơ sở cho việc đào tạo nhiều nghiên cứu sinh của Viện.

Cần nhấn mạnh rằng hướng nghiên cứu và các kết quả của Nhóm mang tính chất thời sự và tuy được tiến hành nhiều năm nhưng luôn luôn nằm ở mũi nhọn trong bối cảnh chung của thế giới. Mặt khác một số kết quả có liên quan đến nghiên cứu của Nhóm (như định lý ánh xạ trên địa phương; thuật toán tìm điểm bất động của ánh xạ đa trị và do đó có thể sử dụng để tìm nghiệm bao hàm thức) cũng được nghiên cứu trong Nhóm Tối ưu của Phòng Tối ưu và Hệ thống.

## LÝ THUYẾT ĐIỂM BẤT ĐỘNG

(Nhóm nghiên cứu Lý thuyết điểm bất động, phòng Giải tích hàm)

Đo Hồng Tân

Lý thuyết điểm bất động ra đời vào đầu thế kỷ này với hai kết quả nổi tiếng: nguyên lý điểm bất động Brouwer và nguyên lý ánh xạ co Banach. Cùng với sự phát triển của các ngành toán học khác, lý thuyết này đã được bổ sung thêm một số hướng mới như: các định lý điểm bất động kiểu Krasnoselski, lý thuyết điểm bất động cho ánh xạ không gian, các định lý điểm bất động ngẫu nhiên, v.v... và đã thu được sự chú ý của nhiều nhà toán học trên thế giới, đặc biệt trong các lĩnh vực tô pô và giải tích hàm. Một nhóm nghiên cứu của phòng Giải tích hàm bắt đầu nghiên cứu lý thuyết điểm bất động từ năm 1975. Sau đây là phần tóm tắt những kết quả chính.

1. Về nguyên lý ánh xạ co, đã chứng minh các định lý về sự tồn tại điểm bất động cho các ánh xạ đa trị loại co rất tổng quát, trong đó ở vế phải của điều kiện co thông thường khoảng cách  $d(x, y)$  được thay bằng một biểu thức chứa  $d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)$ , chẳng hạn một tổ hợp lồi trong chúng. Những kết quả đó còn đúng cho một dãy ánh xạ đa trị.

Đối với ánh xạ đơn trị chúng tôi định nghĩa một lớp ánh xạ (1) - có tổng quát và chứng minh nguyên lý ánh xạ co cho lớp đó. Chúng tôi cũng chứng minh được rằng tất cả các kết quả đã biết về sự tồn tại điểm bất động của ánh xạ đơn trị loại có tổng quát vẫn còn đúng cho một lớp không gian rộng hơn gọi là không gian metric xác suất trong đó khái niệm khoảng cách được thay bằng xác suất khoảng cách đó nhỏ hơn một số cho trước. Đồng thời chúng tôi cũng chứng minh được rằng phần lớn các kết quả thu được cho ánh xạ đơn trị loại có tổng quát cũng đúng cho không gian tựa metric, trong đó khoảng cách không nhất thiết phải thỏa mãn bất đẳng thức tam giác, mà chỉ cần liên tục đều.

2. Về nguyên lý điểm bất động, chúng tôi đã đưa ra khái niệm độ đo không compact xác suất tổng quát mà các loại độ đo không compact xác suất do các tác giả khác đề ra chỉ là những trường hợp riêng, nghiên cứu các tính chất của độ đo đó và chứng minh một định lý về sự tồn tại điểm bất động cho ánh xạ cố đặc xác nhất đối với loại độ đo này. Ngoài ra chúng tôi cũng chứng minh được mối liên hệ hai chiều rất chặt chẽ khái niệm độ đo không

compact xác suất và độ đo không compact thông thường, giữa ánh xạ cô đặc xác suất với ánh xạ cô đặc thông thường. Từ kết quả này và định lý tổng quát vừa nêu trên có thể thu được một loạt định lý mới về sự tồn tại điểm bất động của ánh xạ cô đặc xác suất tương ứng với những định lý đã biết cho ánh xạ cô đặc thông thường. Chúng đều là các dạng mở rộng của nguyên lý điểm bất động Schauder quen biết trong không gian lồi địa phương.

3. Về điểm bất động ngẫu nhiên, chúng tôi cũng đã thu được các kết quả liên quan đến cả hai hướng trên. Đó là các định lý khẳng định sự tồn tại điểm bất động cho những ánh xạ phụ thuộc một tham biến thuộc một không gian với độ đo, ngoài ra còn phải khẳng định điểm bất động nói trên là đo được theo tham biến độ. Về hướng ánh xạ co, chúng tôi đã thu được dạng ngẫu nhiên của định lý Ciric, một kết quả được xem là đẹp nhất trong các dạng mở rộng của nguyên lý ánh xạ co. Về hướng ánh xạ compact chúng tôi cũng đã thu được dạng ngẫu nhiên của định lý Kakutani-Ky Fan quen biết và đặc biệt, đã ứng dụng những kết quả đó vào việc chứng minh sự tồn tại nghiệm của một số lớp phương trình tích phân và vi phân đa trị.

Tương tự như bài toán trên chúng tôi cũng xét tính liên tục của điểm bất động đối với một tham biến thuộc một không gian tôpô khi mà chính bản thân ánh xạ phụ thuộc một cách liên tục vào tham biến đó. Ở đây chúng tôi cũng thu được các kết quả thuộc cả hai hướng trên cho ánh xạ co và ánh xạ compact.

4. Một số kết quả khác. Chúng tôi đã chứng minh được một vài định lý điểm bất động kiểu Krasnoselski cho những ánh xạ có dạng tổng của một ánh xạ co và một ánh xạ compact và vì vậy có thể xem như sự tổng hợp của hai hướng trên. Đồng thời cũng đã tìm ra một đặc trưng của không gian Banach với chuẩn tròn thông qua sự tồn tại điểm bất động của ánh xạ không gian. Đây là một đóng góp vào lý thuyết điểm bất động cho ánh xạ không gian, một hướng tương đối trẻ trong lý thuyết điểm bất động. Ngoài ra cũng đã thu được một vài định lý điểm bất động trên các tập mở theo nghĩa của Zadeh và tìm ra những ứng dụng của chúng vào bất đẳng thức biến phân.

Các kết quả vừa nêu trên đã được công bố trong gần bốn chục bài báo trên các tạp chí ở trong nước và ngoài nước. Một số kết quả khác có gắn với nghiên cứu của Nhóm như các phương pháp thuật toán tìm điểm bất động, việc tính nghiệm của bao hàm thức... cũng được thực hiện trong Phòng Tối ưu - Hệ thống và Phòng Các Hệ động lực (xem các báo cáo tương ứng).

PHƯƠNG PHÁP SỐ GIẢI CÁC BÀI TOÁN  
TRONG VIỆC SỬ DỤNG NGUỒN NƯỚC Ở VIỆT NAM

(Nhóm Phương pháp số, phòng Phương pháp Toán lý)

Ngô Văn Lược

Tài nguyên nước có một vị trí quan trọng trong kinh tế, kỹ thuật và đời sống của nước ta và vì thế được nhiều cơ quan nghiên cứu và ứng dụng quan tâm.

Trước năm 1975 một số cơ quan đã nghiên cứu phương pháp số giải bài toán dòng chảy một chiều trên hệ thống sông nhưng ít nhận được các kết quả số ổn định trên máy tính điện tử. Nhóm chúng tôi là đơn vị đầu tiên của Viện Khoa học Việt nam nghiên cứu vấn đề này từ năm 1975. Phối hợp với công ty máy tính IBM nhóm đã xây dựng được các bộ chương trình đầu tiên ở nước ta cho kết quả số ổn định trên máy tính điện tử để tính toán dòng chảy một chiều trên hệ thống sông, tính xói sau công trình thủy điện theo mô hình một chiều và tính lan truyền sóng gián đoạn khi vỡ đập thủy điện. Các tính toán này đã góp phần vào việc nghiên cứu thiết kế kỹ thuật của các đập thủy điện Hòa bình và Trị an.

Nhóm chúng tôi cũng là một trong những đơn vị đầu tiên ở nước ta nghiên cứu dòng chảy hai chiều. Nhóm đã xây dựng được 4 bộ chương trình tính dòng chảy hai chiều cho kết quả số ổn định trên máy tính điện tử dựa trên phương pháp nón đặc trưng của Daubert, số đồ sai phân ẩn của Baklanovska, số đồ sai phân theo lưới tam giác và phương pháp phân rã. Sử dụng thuật toán và các bộ chương trình này nhóm đã tính dòng phân lũ vùng Phả Lại (hợp tác với trường Đại học Thủy lợi), tính áp lực nước lên các cánh của van tự động của các công trình thủy lợi miền Nam (hợp tác với Viện nghiên cứu khoa học Thủy lợi) và góp phần vào việc tính chế độ thủy lực của hồ chứa nước đập thủy điện Trị an.

Hiện nay Nhóm đã xây dựng xong các thuật toán giải số dòng chảy ba chiều dựa theo số đồ sai phân ẩn và phương pháp luận hướng và đang thử nghiệm trên máy tính điện tử. Dựa vào điều kiện tiêu tán Nhóm cũng đã đưa ra được các điều kiện đủ để tồn tại duy nhất nghiệm cho các mô hình tuyến tính hóa các dòng chảy một và hai chiều. Chúng minh sự ổn định của số đồ sai phân và đưa ra các điều kiện đủ để phép truy đuổi không tích lũy sai số.

Việc tính toán thấm qua các công trình thủy lợi và thủy điện có một ý nghĩa quan trọng vì nhờ đó ta có thể xác định được lượng tổn thất nước qua hồ chứa và xác định độ an toàn của đập. Sử dụng phương pháp bất đẳng thức biến phân, phương pháp phần tử hữu hạn, phương pháp biểu diễn tổng, phương pháp đường thẳng, Nhóm đã xây dựng được lời giải sơ của bài toán thấm qua đập đất phẳng và không gian cũng như lập bộ chương trình giải bài toán thấm của hệ thống đập đất với mực nước trung gian đã cho hoặc chưa biết trước. Hợp tác với Viện Quy hoạch và Kinh tế điện (hiện nay là Viện Năng lượng) Nhóm đã sử dụng bộ chương trình này tính thấm phục vụ kịp thời cho công tác phòng lũ của đập thủy điện Hòa Bình sau giai đoạn lập sông đột I (1983) và phục vụ cho việc thiết kế đập thủy điện Vĩnh Sơn.

Ô nhiễm môi trường nước là một trong những vấn đề thời sự của nước ta và thế giới hiện nay, Nhóm đã xây dựng bộ chương trình giải bài toán xâm nhập mặn một chiều trên hệ thống sông cho kết quả sơ phù hợp với thực tiễn. Chứng minh sự tồn tại của nghiệm bằng số và tính không âm của nó. Nhóm cũng đã xây dựng bộ chương trình dự báo ô nhiễm một và hai chiều do chua phèn hoặc các chất độc hóa học gây ra. Nhóm đã dùng các bộ chương trình này để dự báo quá trình ô nhiễm trên hồ và sau nhà máy thủy điện Trị an và dự đoán rằng sự ô nhiễm này không ảnh hưởng đến nhà máy cung cấp nước cho thành phố Hồ Chí Minh. Các kết quả tính toán này đã được chuyên giao cho Đoàn chuyên gia Liên xô tại Trị an năm 1984 và các đo đạc thực tế hiện nay chứng tỏ dự báo của Nhóm là chính xác và được Đoàn thiết kế thủy điện Trị an đánh giá cao.

## PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP VÔ HẠN VÀ ỨNG DỤNG

(Phòng Phương trình Đạo hàm riêng)

Trần Đức Văn

Từ năm 1983 phòng Phương trình vi phân Đạo hàm riêng đã triển khai nghiên cứu đề tài "Phương trình vi phân cấp vô hạn và ứng dụng" dưới sự chủ trì của Tiến sĩ Trần Đức Văn. Các kết quả của Tiến sĩ Trần Đức Văn đã được nêu tóm tắt trong phần Phương trình đạo hàm riêng và vật lý toán (trang 9,10). Sau đây là tóm tắt một số kết quả chính của các thành viên khác.

1) Thiết lập các tiêu chuẩn không tầm thường của các lớp và không gian Sobolev-Orlicz cấp vô hạn trên toàn  $R^n, n \geq 1$ . Các tiêu chuẩn này để kiểm tra và đóng vai trò quan trọng trong việc chứng minh tồn tại nghiệm suy rộng của các phương trình vi phân cấp vô hạn có hệ số biến đổi bất kỳ trên  $R^n$ . Đã đưa ra một phương pháp mới dựa trên dạng điều kiện chuẩn của đạo hàm hàm số khi bậc của đạo hàm tiến đến vô hạn để chứng minh các định lý những của các không gian hàm cấp vô hạn. Đặc biệt đã tìm ra một dạng khác của định lý Paley-Winer để đặc trưng giá của biến đổi Fourier của các hàm số thông qua dạng điều kiện chuẩn của bậc đạo hàm khi cấp của đạo hàm tiến đến vô hạn.

2) Đã đưa ra các không gian hàm  $W^-$  bất biến dưới tác động của toán tử vi phân cấp vô hạn, các định lý cấu trúc của các hàm suy rộng kiểu Dubinskii để làm công cụ nghiên cứu một số bài toán của phương trình vi phân đạo hàm riêng. Đặc biệt đã nghiên cứu kỹ các bài toán biên của các phương trình vi phân thường cấp vô hạn, chỉ rõ sự liên quan chặt chẽ của tính đúng đắn của bài toán biên với các không điểm của ký hiệu toán tử, đưa ra thuật toán nghiên cứu bài toán biên bằng bài toán Cauchy trong đại vô hạn. Đã chứng minh định lý tồn tại và duy nhất nghiệm cổ bản của bài toán Cauchy cho các toán tử vi phân đạo hàm riêng với hệ số hằng.

3) Đã đưa ra khái niệm bậc gần không của hàm số Young bất kỳ và nghiên cứu tính không tầm thường của các không gian Sobolev-Orlicz có trọng trong trường hợp miền có độ đo hữu hạn, và chứng minh một số định lý những các không gian Sobolev-Orlicz có trọng. Thiết lập điều kiện cần và đủ liên quan đến bậc suy biến của hàm trọng đảm bảo tính không tầm thường của các không gian có trọng.

4) Đã tổng quát các kết quả về tính không tầm thường của các lớp Sobolev-Orlicz cấp vô hạn trong các trường hợp: miền có độ đo hữu hạn, hình xuyên không gian  $R^n$  cho trường hợp không gian Sobolev-Orlicz cấp vô hạn được định nghĩa như không gian Orlicz cổ điển. Nhờ vậy, định lý duy nhất nghiệm các bài toán biên được chứng minh cho một lớp rộng rãi các phương trình phi tuyến có hệ số biến thiên bất kỳ.

5) Dựa trên các kết quả định tính về toán tử giá vi phân với ký hiệu giải tích, đặc biệt là các không gian hàm cấp vô hạn trừ mặt trọng các không gian Sobolev, cấp hữu hạn và các toán tử vi phân cấp vô hạn tác động bất biến trong chúng đã đưa ra phương pháp giải xấp xỉ các bài toán biên, bài toán Cauchy của phương trình đạo hàm riêng. Các symbol của toán tử được xấp xỉ bằng chuỗi Taylor, đa thức đại số và đa thức lượng giác. Các định lý hội tụ đã được chứng minh, một số công thức hiện cho nghiệm chính xác đã được thiết lập dựa trên kỹ thuật của toán tử vi phân cấp vô hạn.

## THÔNG KÊ ỨNG DỤNG

(Nhóm nghiên cứu Thông kê ứng dụng  
phòng Xác suất-Thống kê)

Trần Mạnh Tuấn

Từ năm 1964, nhóm Thông kê ứng dụng (phối hợp với một số cán bộ thông kê xác suất thuộc Khoa Toán ĐHTH Hà nội và các cán bộ kỹ thuật của nhiều ngành) đã ứng dụng các phương pháp thống kê toán học để giải quyết nhiều vấn đề thực tế. Nhóm đã chủ động đưa vào ứng dụng ở Việt nam nhiều hướng quan trọng của thống kê như:

### 1. Lý thuyết lấy mẫu và kiểm tra chất lượng sản phẩm bằng phương pháp thống kê

Xuất phát từ nhu cầu xây dựng kích cỡ quần áo may sẵn (năm 1964), nhóm đã phối hợp xây dựng tiêu chuẩn quần áo may sẵn cho nam giới. Tiêu chuẩn này được ban hành, ứng dụng và đã đem lại những hiệu quả kinh tế nhất định. Trong việc áp dụng các phương pháp thống kê để kiểm tra thu nhận các mặt hàng thủ công tại các công ty thuộc Bộ Nội thương, nhóm đã đề xuất một phương án kiểm tra mới phù hợp với thực tiễn Việt nam. Nhóm đã biên soạn giáo trình về kiểm tra thống kê thu nhận sản phẩm và đã giảng dạy tại Cục kiểm tra chất lượng UBKHKTNN, Cục kiểm tra chất lượng và đo lường hàng hóa Bộ Nội thương, Cục Quân giới, XI nghiệp được phẩm 2.

### 2. Phân tích số liệu

Nhiều vấn đề trong khí tượng-thủy văn, nông nghiệp, lâm nghiệp, địa chất v.v... đòi hỏi phải vận dụng các phương pháp thống kê phân tích số liệu. Nhóm đã phối hợp với cán bộ kỹ thuật các ngành vận dụng công cụ thống kê-máy tính nhằm rút ra các kết luận có căn cứ từ các số liệu thu thập được. Các phương pháp hồi quy (tuyến tính hay phi tuyến), phân tích thành phần chính, phân tích phân biệt, phân tích phương sai, phân tích cụm, phân tích chuỗi thời gian đã được dùng để xử lý các bài toán sau :

- Dự báo mưa nhỏ, dự báo nhiệt độ trung bình khu vực Hà nội.
- Dự báo lũ sông Hồng.
- Xây dựng biểu thể tích cây mọng và bò đê.
- Suất tiêu hao than cho vận tải đường sắt.
- Ảnh hưởng của các nhân tố đến năng suất một số cây trồng, mô hình giống lúa năng suất cao, v.v...

Nhóm đã tổ chức hoặc phối hợp với các chuyên gia Pháp tổ chức nhiều lớp học về phân tích số liệu nhằm phổ biến rộng rãi các phương pháp này cho các cán bộ kỹ thuật nhiều ngành ứng dụng. Đã có 5 luận án phó tiến sĩ KHKT được bảo vệ theo hướng này.

### 3. Xây dựng và phổ biến các bộ chương trình thống kê

Trong quá trình ứng dụng thống kê ở Việt Nam, nhóm đã đi đầu trong việc xây dựng các chương trình máy tính để đảm bảo cho các ứng dụng thống kê trong các bài toán đã nêu ở trên.

Nhu cầu sử dụng máy tính để ứng dụng các phương pháp thống kê cho các ngành ngày một tăng. Từ năm 1978, qua con đường hợp tác quốc tế, nhóm đã thu thập, cài đặt (trên máy lớn và máy vi tính) và làm chủ những bộ chương trình có giá trị về thống kê và toán học như: SSP, AMANCE, BMDP, SPSS, IMSL, TSP, GENSTAT, RATS.

Nhóm đã biên soạn tài liệu và mở lớp hướng dẫn sử dụng các bộ chương trình nhằm giúp đỡ cán bộ của nhiều ngành tiết kiệm thời gian và công sức trong quá trình ứng dụng các phương pháp thống kê xác suất.

### 4. Xây dựng các tiêu chuẩn Việt Nam về thống kê xác suất.

Hợp tác với Viện Tiêu chuẩn UBKHN, nhóm đã xây dựng 3 tiêu chuẩn Việt Nam về thống kê và đã góp ý kiến xây dựng cho 15 tiêu chuẩn khác về thống kê toán học và lý thuyết độ tin cậy.

Ngoài những hướng ứng dụng đã nêu ở trên, nhóm đã có kết quả nghiên cứu về một mô hình của lý thuyết phục vụ đảm đồng, và thống kê của mô hình chịu sự tương tác giữa không gian và thời gian.

## MỘT SỐ THÀNH TỰU VỀ VÀNH VÀ MODUN

(Nhóm nghiên cứu Vành và Modun, Phòng Đại số và Lý thuyết số)

Đinh Văn Huỳnh

Kết quả đạt được chủ yếu theo hai hướng chính : Nghiên cứu vành với các điều kiện nội tại của nó và nghiên cứu vành dựa trên các tính chất của phạm trù các môđun trên vành.

**I. Nghiên cứu vành với các điều kiện nội tại.** Các kết quả đạt được là :

- Chứng minh sự tách được của MHR-vành, một bài toán được nhiều người quan tâm.
- Chứng minh được một định lý tách trực tiếp tổng quát của vành Artin, phần lớn các kết quả đã biết về hướng này là hệ quả trực tiếp. Sau đó nghiên cứu cấu trúc của vành Artin dựa trên lực lượng của các idêan của chúng. Các kết quả đạt được đã được mở rộng cho vành compact tuyến tính.
- Thiết lập các điều kiện tồn tại đơn vị cũng như các mối quan hệ giữa điều kiện tối đại và điều kiện tối tiểu.

Các kết quả nêu trên đã được đưa vào sách chuyên khảo về vành Artin (bằng tiếng Anh) của A. Kertész tái bản tại Budapest năm 1987 và sách chuyên khảo về vành và môđun của R. Wisbauer xuất bản năm 1988 tại Tây Đức.

**II. Nghiên cứu vành dựa vào các tính chất của môđun**

1. Nghiên cứu vành R sao cho mọi R-môđun hữu hạn sinh X có tính chất tách trực tiếp :  $X \cong A \oplus B$ . Trong đó A là nội xạ, hay xạ ảnh, B có chiều đều hữu hạn, Artin, Noether hoặc một tính chất nào đó nhẹ hơn. Đã thu được ở hướng này những đặc trưng mới về vành Artin, vành Noether, vành có chiều Krull v.v. Kết quả đã được nhiều nhà chuyên môn nổi tiếng quan tâm và đặc biệt đã thu hút được sự cộng tác của họ, như sự cộng tác của R. Wisbauer (Tây Đức, đã viết chung với nhóm nghiên cứu vành ở Viện Toán học Hà nội 4 bài); P.F. Smith (Anh, đã viết chung 6 bài). Ngoài ra các kết quả đạt được còn làm cơ sở cho các nghiên cứu của các tác giả như Orosfsky (Mỹ), P.F. Smith (Anh) trong các công bố gần đây.

2. Nghiên cứu vành tự nội xạ thỏa mãn điều kiện hữu hạn hạn chế. Thu được các kết quả về đặc trưng vành tua Frobenius, vành Noether, vành nửa đơn. Một số kết quả trong hướng này được các tác giả nước ngoài áp dụng cũng như mở rộng một cách có hiệu quả như trong các công trình gần đây của : Camillo-Yousif, Armendariz-Yousif, Jain-Lopez-Permouth-Rizvi...

3. Ngoài ra còn đạt được nhiều kết quả quan trọng về các loại vành khác như : vành chuỗi, co-H-vành, RIC-vành, SI-vành.

### MỘT SỐ THÀNH TỰU VỀ ĐẠI SỐ GIAO HOÁN VÀ HÌNH HỌC ĐẠI SỐ

(Nhóm nghiên cứu Đại số giao hoán và Hình học Đại số,  
phòng Đại số và Lý thuyết số)

Ngô Việt Trung

Nhóm nghiên cứu đã công bố hơn 40 công trình về các vấn đề sau của chuyên ngành Đại số giao hoán và Hình học Đại số :

- 1) Vành Cohen-Macaulay suy rộng,
- 2) Các hệ phân tử đặc biệt của vành địa phương,
- 3) Các cấu trúc phân bậc liên kết với ideal,
- 4) Số mũ tương trưng,
- 5) Vành sinh bởi các đơn thức,
- 6) Lý thuyết đại số Hodge,
- 7) Bất biến vành phân bậc và đa tạp xạ ảnh,
- 8) Siêu phẳng tổng quát.

Có thể nêu một số kết quả tiêu biểu sau :

- Đưa ra khái niệm và góp phần hoàn chỉnh lý thuyết vành Cohen-Macaulay suy rộng hiện nay đóng một vai trò quan trọng trong Đại số giao hoán.

- Đặc trưng được số phân tử độc lập đại số cực đại và qua đó giải quyết tất cả các vấn đề liên quan.

- Mô tả thành công một số điều kiện và cấu trúc của vành phân bậc liên kết như điều kiện vành Cohen-Macaulay hay nhóm các lớp divisor.

- Mô tả các cấu trúc đại số của vành sinh bởi các đơn thức thông qua các khái niệm của tôpô đại số và qua đó đã đặt cơ sở cho các nghiên cứu tiếp theo về vấn đề này.

- Nghiên cứu một cách hệ thống lý thuyết đại số về các siêu phẳng tổng quát và ứng dụng giải quyết được nhiều vấn đề mở.

## GIẢI TÍCH p-ADIC

(Nhóm nghiên cứu Giải tích p-adic,  
phòng Đại số và Lý thuyết số)

Hà Huy Khoái, Nguyễn Hồng Minh

Ba hướng nghiên cứu chính của nhóm là :

1. Nghiên cứu về sự phân bố giá trị của hàm phân hình p-adic, nói cách khác xây dựng tương tự p-adic của lý thuyết Nevalina (một chiều) và lý thuyết Griffith (nhiều chiều).

- Xây dựng hoàn chỉnh lý thuyết nội suy của các hàm giải tích p-adic trên đĩa đơn vị. Trên cơ sở đó đưa ra phân loại các hàm phân hình p-adic.

- Chứng minh tương tự p-adic của hai định lý Nevalina cơ bản.

- Để xây dựng tương tự p-adic của lý thuyết Griffith đã chứng minh được định lý nội suy của hàm giải tích p-adic nhiều biến theo một dãy nội suy đặc biệt.

- Đưa ra khái niệm độ cao, chứng minh được công thức Jensen nhiều chiều.

2. Giải tích p-adic : Trong giải tích phức có 3 định nghĩa khác nhau tương đương của hàm giải tích. Có hai định nghĩa về hàm giải tích p-adic tương tự với 2 định nghĩa cổ điển.

- Nhằm mục đích xây dựng tương tự p-adic của định nghĩa thứ 3 và chứng minh định lý Morera p-adic dùng tích phân Schnirelman thay cho tích phân Cauchy.

- Đã chứng minh được nguyên lý cực đại, công thức thặng dư.

3. Nghiên cứu về các L-hàm p-adic tương ứng với dạng modula.

- Xây dựng biến đổi ngược Mellin-Mazur.

- Thác triển phân hình và phân loại các L-hàm p-adic tương ứng với các dạng modula là hàm riêng của các toán tử Hecke xây dựng bởi Manin, Mazur...

- Chứng minh được giả thuyết Mazur-Swinnerton-Dyer cho các dạng modula trong 2, tương ứng với nhóm

- Đạt được những kết quả bước đầu để xác định khi nào một hàm giai tích p-adic là L-hàm p-adic tương ứng với một dạng modula là hàm riêng của các toán tử Hecke.

### VỀ LÝ THUYẾT KỸ DỊ

(Nhóm nghiên cứu kỹ dị, phòng Tôpô-Hình học)

Lê Văn Thành

Vào những năm 70, có lẽ bất cứ ai tự giác bước vào lĩnh vực này đều bắt đầu bằng các bài học nhập môn về "Kỹ dị của các ánh xạ khả vi". Chúng tôi cũng không là ngoại lệ. Và như là một thử thách đầu tiên chúng tôi đã đề xuất và nghiên cứu các ánh xạ "vô hạn xác định" đối với nhóm các biến đổi contact, contact ngặt và vi phôi bậc vô hạn của không gian nguồn. Đó là các ánh xạ mà quỹ đạo của chúng, dưới tác động của mỗi một trong các nhóm nói trên, hoàn toàn xác định bởi khai triển Taylor bậc vô hạn của các ánh xạ đại diện. Chúng tôi đã xây dựng được các tiêu chuẩn tương đương để nhận dạng tính vô hạn xác định mà thực chất là mở rộng các tiêu chuẩn quen biết của tính hữu hạn xác định. Một đặc trưng khác của khai triển Taylor mà chúng tôi đã nghiên cứu có quan hệ tới tính tối ưu Pareto địa phương. Chúng tôi đã chỉ ra được một phân hoạch không gian  $J^k(n, m)$  (các tia cấp k của các ánh xạ khả vi vô hạn từ  $R^n$  vào  $R^m$ ) thành ba tập nửa đại số rời nhau ngoài vectơ  $0 \in J^k(n, m)$ :

$$J^k(n, m) = C^k \cup T^k \cup K^k$$

trong đó  $C^k$  (tương ứng  $K^k$ ) là tập các tia mà mọi đại diện của nó (tương ứng, không một đại diện nào của nó) nhận  $0 \in R^m$  làm điểm tối Pareto, còn  $T^k$  là tập các tia trung lập. Hơn nữa tập  $C^k \cup K^k$

(ứng với các ánh xạ có thể kiểm tra được tính tối ưu Pareto địa phương thông qua khai triển Taylor cấp  $k$  của nó) có tính chất phổ biến, theo nghĩa  $\lim_{k \rightarrow \infty} C_{k,m} T^k = \infty$ .

Về kỹ di của các hệ vi phân (các  $\mathcal{D}$ -môđun), có thể nói, các kết quả của chúng tôi là triển khai ứng dụng một phương pháp tiếp cận mới trong lĩnh vực này, đó là lý thuyết trải (déploiement) của F. Pham. Bằng phương pháp trải, trước hết chúng tôi đã nhận lại được một số kết quả cơ bản của lý thuyết  $\mathcal{D}$ -môđun mà tiêu biểu nhất là chứng minh sự tương đương giữa tính ổn định của hệ có kỹ di chính qui và tính ổn định của đa tạp đặc trưng. Trong sự cố gắng tiếp cận đến các hệ chính qui với đa tạp đặc trưng có thể có kỹ di chúng tôi đã mở rộng được khái niệm và kết quả về hệ Gauss-Manin. Chẳng hạn đã chứng minh được rằng nếu đa tạp đặc trưng thỏa mãn điều kiện tương tác chính qui thì hệ tương ứng tương đương với một hệ Gauss-Manin suy rộng theo nghĩa của chúng tôi. Đây là sự mở rộng một kết quả quan trọng đã biết nói rằng mọi hệ holonom với kỹ di chính qui và với đa tạp đặc trưng trơn đều tương đương với một hệ Gauss-Manin nào đó (ảnh trực tiếp qua ánh xạ không suy biến của hệ De Rham cổ điển). Có thể hình dung điều kiện tương tác chính qui của đa tạp đặc trưng như một điều kiện bờ và như vậy trên thực tế chúng tôi đã xác lập được một cách tiếp cận đến kỹ di của bài toán Cauchy. Theo hướng đó chúng tôi đã mô tả được kỹ di của bài toán quang hình học với mặt sóng có kỹ di.

Về kỹ di của đường cong phẳng chúng tôi đặc biệt quan tâm đến các vấn đề đơn đạo địa phương và hình học toàn cục. Lý thuyết định tính về đơn đạo địa phương của kỹ di với siêu mặt tổng quát đã được xây dựng khá hoàn chỉnh; ở đây chúng tôi quan tâm đến vấn đề xác định đơn đạo ("định lượng"), đối với siêu mặt một chiều phức tức là đường cong phẳng. Kết quả quan trọng nhất của chúng tôi là đã tìm được thuật toán xác định phổ (và do đó đơn đạo) thông qua sơ đồ giải kỹ di của đường cong phẳng. Đối với đường cong phẳng sơ đồ giải kỹ di được thiết lập để dàng bằng các phép tính sơ cấp do đó công thức tính phổ của chúng tôi thật sự kiện thiết mặc dù để chứng minh nó phải dùng đến lý thuyết Hodge hỗn hợp. Trong quá trình tìm hiểu vai trò của các yếu tố hình học ảnh hưởng đến đơn đạo (trước khi đi đến kết quả cơ bản nói trên) chúng tôi cũng đã tìm được một bất biến hình học mới - Các số mũ tách đôi, và chúng tôi đã nghiên cứu nó một cách toàn diện trong mối liên quan đến các bất biến hình học cổ điển khác như các đặc trưng Puiseux các bội giao, số Milnor và các bất biến cực... Nhờ các số mũ tách đôi chúng tôi đã đánh giá được các tích phân lớp Nilsson nói chung và tiệm cận của tích phân dao động nói riêng. Đặc biệt gần đây các kết quả đó đã được F. Loeser ứng dụng để đánh giá công thức tích phân của H. Weyl. Về hiện tượng kỹ di ở vô hạn và do đó hình học toàn cục của đường cong phẳng, một số tác giả đã đề cập đến khi nghiên cứu vấn đề nhúng đường thẳng phức vào mặt phẳng hay các dạng yếu khác nhau của giả thuyết Jacobi. Còn các tác giả nghiên cứu vấn đề khai triển tiệm cận một

cách toàn cục của các tích phân dao động thì thường né tránh sử dụng độ với kỹ di ở vô hạn bằng cách giả thiết hàm pha đủ tốt (chẳng hạn là một ánh xạ riêng). Trong bối cảnh đó chúng tôi đã tiếp cận đến hiện tượng kỹ di ở vô hạn của đường cong phẳng đại số một cách hình học, trực diện và hệ thống theo quan điểm tìm kiếm những đóng góp đáng kể vào tiệm cận của tích phân Laplace nói chung. Kết quả là chúng tôi đã cơ bản hoàn thành việc mô tả hình học các hiện tượng kỹ di ở vô hạn đối với các đường cong phẳng đại số. Cụ thể, chúng tôi đã tìm được dấu hiệu tô pô của sự xuất hiện kỹ di ở vô hạn, xác định được các chu trình tàn lụi ở vô hạn, các cơ sở đánh dấu của phân thớ Milnor toàn cục, chứng minh tính tựa lũy linh của đơn đạo của phân thớ Milnor địa phương ở vô hạn và cũng đã bước đầu ứng dụng các kết quả hình học đã nêu vào việc khảo sát khai triển tiệm cận của tích phân Laplace trong trường hợp hàm pha có kỹ di ở vô hạn.

Các kết quả của Nhóm được công bố trong khoảng 20 bài báo ở trong nước và nước ngoài.

### MỘT SỐ KẾT QUẢ VỀ K-LÝ THUYẾT GIẢI TÍCH ĐIỀU HÒA VÀ VẬT LÝ TOÁN

(Nhóm nghiên cứu "K-lý thuyết giải tích điều hòa và vật lý toán)

Đỗ Ngọc Diệp

Nhóm nghiên cứu này được hình thành từ năm 1978 với mục đích là nghiên cứu giải tích điều hòa trên nhóm Lie và các ứng dụng bằng nhiều công cụ khác nhau như tô pô, hình học vi phân, giải tích hàm, lý thuyết nhóm Lie và đại số Lie v.v... Những bài toán chủ yếu mà nhóm đã nghiên cứu đạt nhiều kết quả hữu hiệu là:

1. Nghiên cứu cấu trúc  $C^*$ -đại số nhờ các K-hàm tử.
2. Quy tắc lượng tử hình học và biểu diễn nhóm Lie.
3. Đối đồng điều liên tục của các nhóm con rời rạc trong nhóm Lie.
4. Siêu đối xứng và mô hình dây.

Sau đây chúng tôi sẽ mô tả ngắn gọn các kết quả đã đạt được

1. Nghiên cứu cấu trúc  $C^*$ -đại số nhờ các K-hàm tử

Chúng tôi đã bắt đầu bài toán này bằng việc dùng BDF K-hàm tự Ext(.) để mô tả cấu trúc của  $C^*$ -đại số của nhóm các phép biến đổi affine của đường thẳng thực. Kết quả này dẫn đến việc định nghĩa và xác định bất biến Index  $C^*(G)$ . Kết quả mở ra hướng nghiên cứu mới và được nhiều tác giả trong và ngoài nước tiếp tục phát triển như J. Rosenberg (Mỹ), G.G. Kasparov (Liên xô), X. Wang (Mỹ), ... Sau đó bằng phương pháp tương tự chúng tôi đã dùng KK-nhóm của Kasparov để mô tả cấu trúc của phần phổ dạng của nhóm các biến đổi affine của đường thẳng phức. Kết quả mô tả trọn vẹn các  $C^*$ -đại số của lớp nhóm Lie MD (gồm các nhóm Lie mà các quỹ đạo đối phù hợp của chúng có chiều bằng 0 hoặc bằng chính chiều của nhóm).

Nhóm nghiên cứu đã tìm ra phân loại triệt để các nhóm Lie MD4 gồm các nhóm Lie 4 chiều mà các quỹ đạo đối phù hợp có chiều cực đại hoặc chiều bằng 0, và mô tả tường minh các bất biến chỉ số Index  $C^*(G)$  tương ứng và các phân lá của chúng.

Gần đây nhóm đã tìm ra cách xây dựng chính tắc và thu gọn bất biến Index  $C^*(G)$  về các trường hợp tính toán được.

## 2. Lượng tử hình học và biểu diễn nhóm Lie

Nhờ các nghiên cứu nói trên về  $C^*$ -đại số nhóm và đặc biệt là các tiêu chuẩn compact, nhóm chúng tôi đã đi đến việc lượng tử hóa các hệ Hamilton với tác động phẳng của một nhóm Lie, đã xây dựng được qui tắc lượng tử nhiều chiều và chứng minh được rằng đạo hàm hiệp biến của các biểu diễn biến từng phần và chính hình từng phần là trùng với biểu diễn thu được nhờ lượng tử hóa. Từ đó suy ra mọi biểu diễn theo phép dung Duflo có thể thu được từ lượng tử hóa và cùng với phép dung Duflo, chúng ta có được phương pháp quỹ đạo nhiều chiều. Nhóm chúng tôi cũng đã mô tả các biểu diễn có chiều hàm hữu hạn của nhóm vi phối, đã lượng tử hóa đồng thời họ các quỹ đạo ở vị trí tổng quát, đã xây dựng hai phép thu gọn lượng tử nhiều chiều về trường hợp giải được và lũy linh.

## 3. Đối đồng điều liên tục của các nhóm con rời rạc trong nhóm Lie

Quy tắc lượng tử hóa dẫn đến việc phải xét các đối đồng điều liên tục của nhóm con rời rạc. Nhóm chúng tôi đã xây dựng lớp nhóm kiểu Langlands, tức là các nhóm con rời rạc có các tính chất cần thiết của nhóm con số học nhưng không gian thuần nhất cơ bản tương ứng theo nó chỉ có thể tích hữu hạn. Đã xây dựng được compact hóa Borel-Serre mà biên của nó đồng phối với thương của phần đỉnh trong tòa nhà Tits. Đã chứng minh tính hữu hạn bội của không gian các dạng tự đẳng cấu và xây dựng lý thuyết chuỗi Eisenstein tương ứng cùng với việc phân tích phổ biểu diễn chính quy xoắn  $L^2(G/\Gamma, E)$ . Đã chứng minh được sự hội tụ theo tổng trực tiếp của dãy phổ



Hochschild-Serre cho nhóm con rời rạc Parabolic. Hướng nghiên cứu đi theo chương trình Langlands về luật thuận nghịch không giao hoán.

#### 4. Siêu đối xứng và mô hình dây

Đã mô tả các biểu diễn thu được nhờ phép lượng tử hóa các hệ cơ siêu đối xứng, đã chứng minh định lý kiểu Borel-Weil-Bott cho mở rộng tâm của nhóm các lớp trong nhóm compact và mô tả độ đo Poisson-Plancherel của nó. Các kết quả cho phép tiếp cận đến mô hình dây tử quan điểm hình học của phương pháp quỹ đạo.

Hiện nay cả 4 bài toán nói trên đang tiếp tục phát triển và có nhiều hứa hẹn mới.

PHỤ LỤC 2

DANH SÁCH CÁC SÁCH VÀ GIÁO TRÌNH  
CỦA VIỆN IN Ở TRONG NƯỚC

1. Hoàng Tuy, Trần Vũ Thiệu. Vấn đề học là gì (110 trang): Nhà xuất bản khoa học và kỹ thuật, 1966.
2. Ngô Văn Lược, Lê Văn Thành. Hàm biến phức và lý thuyết nước thấm (in Ronéo). Ủy ban KHKTNN, 1967-1968.
3. Trần Mạnh Tuấn. Kiểm tra chất lượng bằng phương pháp thống kê. Ủy ban KHKTNN, 1968.
4. Lê Văn Thành, Ngô Văn Lược và các tác giả khác. Bảng tính bậc phá làm đường. Cục Kỹ thuật Bộ quốc phòng in và lưu hành nội bộ, 1969.
5. Ngô Văn Lược. Hàm biến phức và phép biến hình bảo giác (in Ronéo). Đại học thủy lợi và Viện Toán học, 1975.
6. Trần Vũ Thiệu, Nguyễn Quang Thái. Tìm hiểu về vấn đề học (126 trang). Nhà xuất bản khoa học và kỹ thuật, 1976.
7. Lê Văn Thiêm, Hoàng Đình Dung, Ngô Văn Lược. Một số vấn đề toán học trong chuyên động nước thấm (in Opset). ĐHTH Tp Hồ Chí Minh, 1978.
8. Hoàng Tuy. Giải tích hiện đại. Tập I (180 trang); Tập II (136 trang); Tập III (192 trang). Nhà xuất bản Giáo dục, 1978.
9. Hoàng Tuy. Cơ sở giải tích lồi (95 trang) (in Ronéo). Đại học Tổng hợp thành phố Hồ Chí Minh, 1978.
10. Hoàng Tuy, Nguyễn Xuân My, Nguyễn Văn Khuê, Hà Huy Khoái. Mở đầu một số lý thuyết hiện đại của tôpô và đại số. Tập I (387 trang); Tập II (199 trang). Nhà xuất bản khoa học và kỹ thuật, 1979.
11. Hoàng Tuy. Phân tích hệ thống và ứng dụng (152 trang). Nhà xuất bản khoa học và kỹ thuật, 1987.
12. Trần Vũ Thiệu, Nguyễn Văn Thiệu, Bùi Thế Tâm. Thuật toán và chương trình máy tính trong kinh tế (190 trang). Nhà xuất bản khoa học và kỹ thuật, 1987.
13. (Nhiều tác giả). Essays on Nonlinear Analysis and Optimization Problems. Viện Toán học, 1987.

14. Trần Mạnh Tuấn, Vũ Ngọc Cũ, Nguyễn Văn Thiệu. Tuyển tập các chương trình bảng ngôn ngữ BASIC (190 trang). Nhà xuất bản Giao thông, 1987.
15. Trần Mạnh Tuấn. Hệ xử lý văn bản Lotus Manuscript (152 trang). Nhà xuất bản Thống kê, 1989.

PHỤ LỤC 3

DANH SÁCH NGHIÊN CỨU SINH

VIỆN TOÁN HỌC

## DANH SÁCH NGHIÊN CỨU SINH ĐÃ BẢO VỆ LUẬN ÁN

(Chú ý :

- dấu \* chỉ NCS bảo vệ đặc cách tại Viện.
- dấu \*\* chỉ NCS của Viện đã có tập thể hướng dẫn được Bộ Giáo dục và Đào tạo quyết định ở trong nước và khi ra bảo vệ ở nước ngoài có cả người hướng dẫn nước ngoài.
- dấu \*\*\* chỉ người hướng dẫn nước ngoài khi NCS ra bảo vệ ở nước ngoài.)

- \*1. Phạm Hữu Vinh (Đại học Tổng hợp Hà nội)  
 "Phương pháp biểu diễn tổng và bài toán thám đối xứng trực trong môi trường không đồng chất".  
 Tập thể hướng dẫn : GS Lê Văn Thiêm  
 PGS-TS Ngô Văn Lược  
 Ngày bảo vệ : 1/1979  
 Nơi bảo vệ : Viện Toán học
- \*2. Ngô Xuân Sơn (Đại học Sư phạm I Hà nội)  
 "Một số biểu diễn tích phân và nghiệm tương minh của một lớp bài toán biên của hàm số  $x^k$  giải tích".  
 Tập thể hướng dẫn : GS Lê Văn Thiêm  
 PGS Hoàng Đình Dung  
 PGS Trần Anh Bảo  
 PGS-TS Ngô Văn Lược  
 Ngày bảo vệ : 1/1979  
 Nơi bảo vệ : Viện Toán học
- \*3. Phạm Trà Ân (Viện Toán học)  
 "Các otômát xác xuất cấu trúc thay đổi theo thời gian".  
 Người hướng dẫn : GS Phan Đình Diệu  
 Ngày bảo vệ : 5/1979  
 Nơi bảo vệ : Viện Toán học
- \*4. Đỗ Văn Lưu (Viện Toán học)  
 "Về điều kiện cần và đủ cho các bài toán tối ưu".  
 Tập thể hướng dẫn : GS Hoàng Huy  
 PGS Phan Văn Chương  
 Ngày bảo vệ : 7/1980  
 Nơi bảo vệ : Viện Toán học
- \*5. Nguyễn Quang Thái (Viện Toán Kinh tế, Ủy ban Kế hoạch Nhà nước)  
 "Phương pháp giải một số lớp bài toán quy hoạch toán học loại vận tải và ứng dụng".

Người hướng dẫn : GS Hoàng Tuy  
 Ngày bảo vệ : 7/1980  
 Nơi bảo vệ : Viện Toán học

- \*6. Lê Văn Thành (Viện Toán học),  
 "Kỹ di của đường cong phẳng và tích phân lớp Nilsson địa phương".  
 Người hướng dẫn : GS F. Phạm  
 Ngày bảo vệ : 10/1980  
 Nơi bảo vệ : Viện Toán học.
- \*7. Hà Huy Vui (Viện Toán học)  
 "Một số tính chất Taylor của các ánh xạ khả vi".  
 Người hướng dẫn : GS F. Phạm  
 Ngày bảo vệ : 10/1980  
 Nơi bảo vệ : Viện Toán học
- \*8. Nguyễn Hữu Đức (Viện Toán học)  
 "Hệ Gauss-Manin với bó và vấn đề ổn định"  
 Người hướng dẫn : GS F. Phạm  
 Ngày bảo vệ : 10/1980  
 Nơi bảo vệ : Viện Toán học.
- \*9. Trần Mạnh Tuấn (Viện Toán học)  
 "Một số vấn đề sử dụng máy tính điện tử trong nghiên cứu ứng dụng thống kê toán học ở Việt nam".  
 Ngày bảo vệ : 1/1981  
 Nơi bảo vệ : Viện Toán học.
- \*10. Lê Công Thành (Viện Toán học)  
 "Một số vấn đề về lý thuyết đồ thị và ứng dụng".  
 Người hướng dẫn : GS Phan Đình Diệu  
 Ngày bảo vệ : 7/1981  
 Nơi bảo vệ : Viện Toán học.
11. Nguyễn Văn Thoại (Viện Toán học)  
 "Thuật toán giải một lớp quy hoạch phi tuyến không lồi và bài toán bù tuyến tính".  
 Tập thể hướng dẫn : GS Hoàng Tuy  
 Ngày vào NCS : 5/1980  
 Ngày bảo vệ : 7/1982  
 Nơi bảo vệ : Viện Toán học.
- \*\*12. Nguyễn Văn Ngọc (Viện Toán học)  
 "Giải các bài toán biên hỗn hợp của vật lý toán bằng phương pháp phương trình cấp" (tiếng Nga).  
 Tập thể hướng dẫn : GS G. Ia Popov\*\*\*  
 PGS-TS Ngô Văn Lực

Ngày vào NCS : 5/1980

Ngày bảo vệ : 11/1983

Nơi bảo vệ : Trường Đại Học Tổng hợp quốc gia Odessa (Liên xô).

13. Phạm Huy Điển (Viện Toán học)

"Các ánh xạ Lipschitz địa phương và bài toán tối ưu với ràng buộc bao hàm thức".

Tập thể hướng dẫn : GS Phạm Hữu Sách  
PTS Nguyễn Khoa Sơn

Ngày vào NCS : 5/1980

Ngày bảo vệ : 7/1983

Nơi bảo vệ : Viện Toán học.

\*\*14. Vũ Văn Đạt (Viện Toán học)

"Nghiên cứu toán học các quá trình thấm trong môi trường không đồng chất" (tiếng Nga).

Tập thể hướng dẫn : GS X.K. Aslanov\*\*\*  
PGS-TS Ngô Văn Lược

Ngày vào NCS : 5/1980

Ngày bảo vệ : 3/1984

Nơi bảo vệ : Trường Đại Học Tổng hợp quốc gia Odessa (Liên xô).

\*\*15. Vũ Ngọc Phát (Viện Toán học)

"Tính điều khiển được các hệ động lực rời rạc" (tiếng Nga)

Tập thể hướng dẫn : GS Phạm Hữu Sách  
PTS Nguyễn Khoa Sơn  
GS R. Faradzev \*\*\*

Ngày vào NCS : 6/1981

Ngày bảo vệ : 4/1984

Nơi bảo vệ : Trường Đại Học Tổng hợp Quốc gia Baku (Liên xô).

16. Dương Trọng Nhân (Viện Toán học)

"Một số vấn đề của lý thuyết điểm bất động và ứng dụng"

Tập thể hướng dẫn : PGS Phan Văn Chương  
PTS Phan Huy Khải

Ngày vào NCS : 10/1982

Ngày bảo vệ : 7/1984

Nơi bảo vệ : Viện Toán học

17. Vũ Thiên Bản (Trường Đại học kỹ thuật thông tin liên lạc)

"Phương pháp giải một lớp bài toán quy hoạch phi tuyến không lồi và ứng dụng"

Tập thể hướng dẫn : GS Hoàng Tuy  
PGS Trần Vũ Thiệu  
PTS Bùi Thế Tâm

Ngày vào NCS : 5/1980  
 Ngày bảo vệ : 11/1984  
 Nơi bảo vệ : Viện Toán học

18. Hồ Hữu Việt (Viện Toán học)  
 "Cấu trúc C - đại số nhóm của một lớp nhóm Lie giải được"  
 Tập thể hướng dẫn : TS Huỳnh Mùi  
 PTS Đỗ Ngọc Diệp

Ngày vào NCS : 5/1983  
 Ngày bảo vệ : 12/1984  
 Nơi bảo vệ : Viện Toán học

- \*19. Trần Hùng Thao (Viện Toán học)  
 "Một số bài toán về lọc ngẫu nhiên"  
 Ngày bảo vệ : 11/1984  
 Nơi bảo vệ : Viện Toán học

20. Nguyễn Hữu Trợ (Viện Toán học)  
 "Một số định lý giới hạn Poat-Xông trong mô hình chùm"  
 Tập thể hướng dẫn : GS K. Krickeberg  
 TS Nguyễn Văn Thu

Ngày vào NCS : 5/1980  
 Ngày bảo vệ : 4/1985  
 Nơi bảo vệ : Viện Toán học

- \*\*21. Nguyễn Huy Việt (Viện Toán học)  
 "Về điểm bất động của ánh xạ đa trị" (tiếng Nga)  
 Tập thể hướng dẫn : PGS Phan Văn Chương  
 PGS-TS Đỗ Hồng Tân  
 GS V.M. Tikhomirov\*\*\*

Ngày vào NCS : 6/1981  
 Ngày bảo vệ : 3/1985  
 Nơi bảo vệ : Trường Đại Học Tổng hợp Quốc gia Matxcova (Liên xô)

- \*\*22. Nguyễn Hữu Điện (Viện Toán học)  
 "Những điểm bất động và những ánh xạ mở" (tiếng Bungari)  
 Tập thể hướng dẫn : PGS Phan Văn Chương  
 PGS-TS Đỗ Hồng Tân  
 GS S.T. Dimiev\*\*\*

Ngày vào NCS : 6/1981  
 Ngày bảo vệ : 12/1986  
 Nơi bảo vệ : Viện Toán học Bungari

23. Lê Dũng Mưu (Viện Toán học)  
 "Một số phương pháp tính điểm bất động và giải bất đẳng thức biên phân"  
 Tập thể hướng dẫn : GS Hoàng Tụy

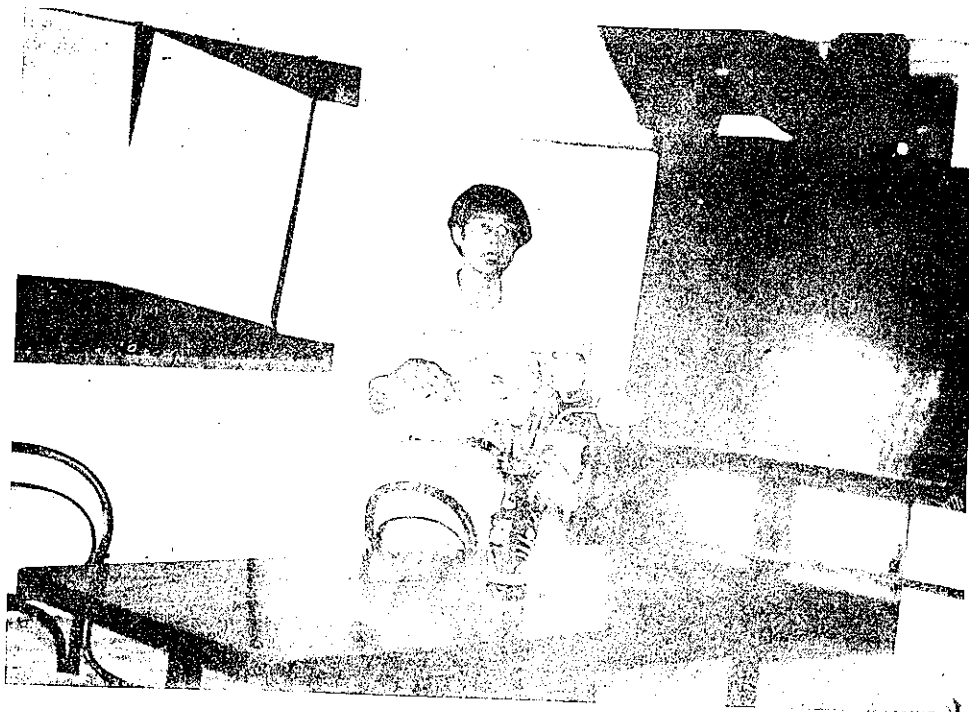
PTS Bùi Thế Tâm

Ngày vào NCS : 6/1981

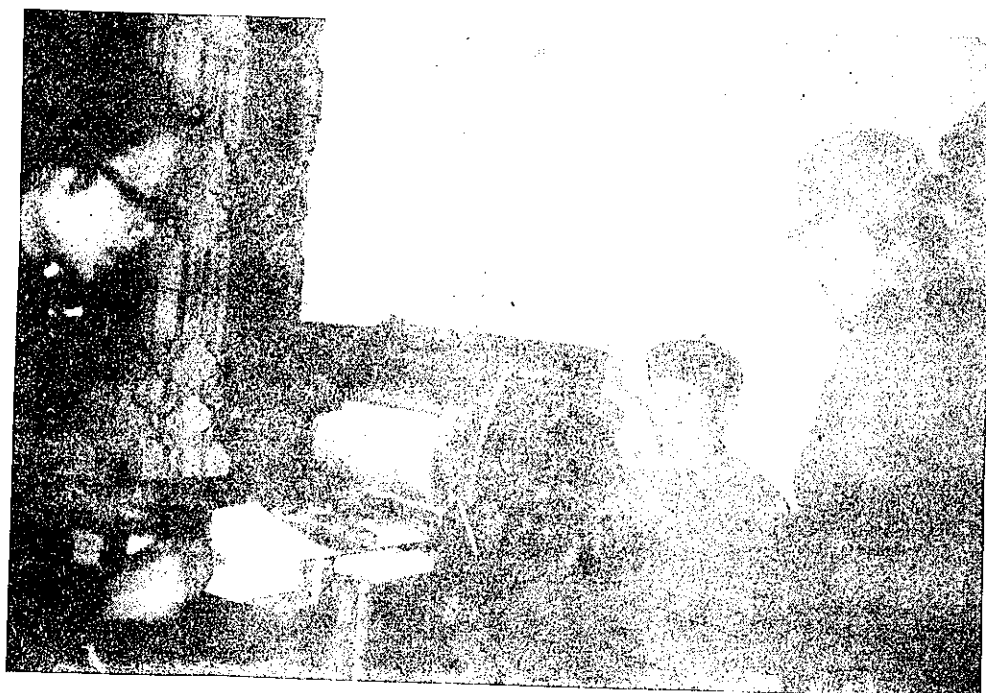
Ngày bảo vệ : 1/1986

Nơi bảo vệ : Viện Toán học

24. Nguyễn Văn Thương (Bộ Giáo dục)  
 "Một số thuật toán giải quy hoạch lồi đảo với hàm mục tiêu lồi"  
 Tập thể hướng dẫn : GS Hoàng Tuy  
 PGS Trần Vũ Thiệu  
 Ngày vào NCS : 6/1981  
 Ngày bảo vệ : 3/1986  
 Nơi bảo vệ : Viện Toán học
- \*\*25. Đào Quang Tuyến (Viện Toán học)  
 "Về sự hội tụ của dãy các biến ngẫu nhiên phụ thuộc yếu" (tiếng Anh)  
 Tập thể hướng dẫn : TS Nguyễn Xuân Lộc  
 TS Nguyễn Văn Thu  
 J. Gatner\*\*\*  
 Ngày vào NCS : 6/1981  
 Ngày bảo vệ : 6/1986  
 Nơi bảo vệ : Viện Toán học Viện hàn lâm khoa học CHDC Đức
26. Hồ Đăng Phúc (Viện Toán học)  
 "Về luật giới hạn của tổng các đại lượng ngẫu nhiên độc lập"  
 Tập thể hướng dẫn : TS Nguyễn Văn Thu  
 PGS-TS Nguyễn Duy Tiên  
 Ngày vào NCS : 4/1985  
 Ngày bảo vệ : 12/1986  
 Nơi bảo vệ : Viện Toán học
- \*\*27. Nguyễn Sĩ Minh (Viện Toán học)  
 "Kỹ di bài toán Cauchy " (tiếng Nga)  
 Tập thể hướng dẫn : GS F. Phạm  
 GS Lê Dũng Tráng  
 GS Ia.V. Raduno\*\*\*  
 Ngày bảo vệ : 10/1987  
 Nơi bảo vệ : Trường Đại Học Tổng hợp Minsk (Liên xô)
28. Nguyễn Tiến Đại (Viện Toán học)  
 "Nghiên cứu tính ổn định của các hệ vi mô vi phân Holonom"  
 Tập thể hướng dẫn : GS F. Phạm  
 PTS Đỗ Ngọc Diệp  
 Ngày vào NCS : 6/1981  
 Ngày bảo vệ : 7/1987  
 Nơi bảo vệ : Viện Toán học



*Độc Tạ Duy Phương bảo vệ luận án phó tiến sĩ ngày 30-7-1990*



*Bộ phận in ấn của Viện*

9. Chử Văn Đông (Viện Toán học)  
 "Phân bố xác suất tự phân hàm trên không gian lồi địa phương  
 và trên đại số tích chập suy rộng Urbanik"  
 Tập thể hướng dẫn : TS Nguyễn Văn Thu  
 PTS Đinh Quang Lưu  
 Ngày vào NCS : 10/1982  
 Ngày bảo vệ : 6/1987  
 Nơi bảo vệ : Viện Toán học
10. Nguyễn Việt Dũng (Viện Toán học)  
 "Tôpô của không gian cầu hình B"  
 Tập thể hướng dẫn : TS Huỳnh Mùi  
 PTS Đỗ Ngọc Diệp  
 Ngày vào NCS : 5/1983  
 Ngày bảo vệ : 8/1987  
 Nơi bảo vệ : Viện Toán học
11. Phạm Hồng Quang (Viện Toán học)  
 "Về các phương pháp dưới bất đẳng thức trò chơi vi phân tuyến tính  
 nhiều người dưới"  
 Tập thể hướng dẫn : PTS Phan Huy Khải  
 PTS Vũ Ngọc Phát  
 Ngày vào NCS : 4/1985  
 Ngày bảo vệ : 12/1987  
 Nơi bảo vệ : Viện Toán học
12. Phạm Phú Triêm (Trường Đại học Thủy lợi)  
 "Về tính chất phổ của trường thuận nhất và ma trận đứng"  
 Tập thể hướng dẫn : PGS Trần Mạnh Tuấn  
 PGS Lý Hoàng Trí  
 Ngày bảo vệ : 11/1987  
 Nơi bảo vệ : Viện Toán học
13. Trương Mỹ Dung (Thành đoàn Thanh niên TP. Hồ Chí Minh)  
 "Một số thuật toán tìm cực tiểu hàm tuyến tính trên miền lồi  
 có thêm một ràng buộc bù"  
 Tập thể hướng dẫn : GS Hoàng Tuy  
 PGS Trần Gia Lịch  
 PTS Lê Văn Chông  
 Ngày vào NCS : 5/1980  
 Ngày bảo vệ : 3/1988  
 Nơi bảo vệ : Viện Toán học
14. Đinh Sĩ Đại (Sở Giáo dục Hà Nội)  
 "Các bài toán dưới bất và chạy trốn trong trò chơi vi phân  
 và sai phân nhiều người"  
 Tập thể hướng dẫn : PGS Trần Vũ Thiệu  
 PTS Phan Huy Khải

Ngày vào NCS : 5/1983  
 Ngày bảo vệ : 9/1988  
 Nơi bảo vệ : Viện Toán học

35. Trịnh Ngọc Minh (Viện Toán học)  
 "Về lý thuyết các toán tử vi phân cấp vô hạn và ứng dụng của chúng"  
 Tập thể hướng dẫn : TS Trần Đức Vân  
 PTS Hà Tiên Ngoạn  
 Ngày vào NCS : 6/1984  
 Ngày bảo vệ : 2/1988  
 Nơi bảo vệ : Viện Toán học
36. Hà Huy Bằng (Viện Toán học)  
 "Một số vấn đề của lý thuyết không gian hàm cấp vô hạn"  
 Tập thể hướng dẫn : TS Trần Đức Vân  
 PTS Lê Hữu Diện  
 Ngày vào NCS : 6/1984  
 Ngày bảo vệ : 2/1988  
 Nơi bảo vệ : Viện Toán học
37. Nguyễn Đông Yên (Viện Toán học)  
 "Một số đóng góp trong lý thuyết ánh xạ đa trị và ứng dụng của chúng trong các bài toán tối ưu"  
 Tập thể hướng dẫn : GS Phạm Hữu Sách,  
 PTS Phạm Huy Điền  
 Ngày vào NCS : 4/1985  
 Ngày bảo vệ : 9/1988  
 Nơi bảo vệ : Viện Toán học
38. Nguyễn Việt Dũng (Viện Toán học)  
 "Về một số lớp vành thỏa mãn điều kiện hữu hạn"  
 Người hướng dẫn : PGS-TS Đinh Văn Huỳnh  
 Ngày vào NCS : 4/1985  
 Ngày bảo vệ : 8/1988  
 Nơi bảo vệ : Viện Toán học
39. Nguyễn Văn Châu (Viện Toán học)  
 "Về tính điều khiển được của hệ tuyến tính và trò chơi đuổi bắt tuyến tính không phân lập đối tượng chạy"  
 Tập thể hướng dẫn : PTS Phan Huy Khải  
 PTS Vũ Ngọc Phát  
 Ngày vào NCS : 4/1986  
 Ngày bảo vệ : 12/1988  
 Nơi bảo vệ : Viện Toán học

40. Phan Thiên Thạch (Viện Toán học)  
 "Về quy hoạch đ.c và ứng dụng"  
 Người hướng dẫn : TS Nguyễn Văn Thoại  
 Ngày vào NCS : 4/1986  
 Ngày bảo vệ : 4/1988  
 Nơi bảo vệ : Viện Toán học
41. Lê Quang Trung (Trưởng ĐHSP I Hà nội)  
 "Về bài toán biến không cố điển đối với các toán tử giá vi  
 phân cấp không đổi và cấp biến thiên"  
 Người hướng dẫn : PGS-TS Nguyễn Minh Chương  
 Ngày vào NCS : 7/1986  
 Ngày bảo vệ : 4/1989  
 Nơi bảo vệ : Viện Toán học
42. Vũ Việt Yên (Trưởng ĐHSP I Hà nội)  
 "Về sự hội tụ và công thức Taylor ngẫu nhiên đối với các quá  
 trình dạng mactingan hai tham số"  
 Tập thể hướng dẫn : TS Nguyễn Văn Thu  
 PTS Đinh Quang Lưu  
 PTS Phạm Văn Kiêu  
 Ngày vào NCS : 4/1985  
 Ngày bảo vệ : 11/1989  
 Nơi bảo vệ : Viện Toán học
43. Phan Dân (Trưởng ĐHSP Vinh)  
 "Một số lớp vành đặc trưng bởi các điều kiện tách trực tiếp  
 của các môđun hữu hạn sinh"  
 Người hướng dẫn : PGS-TS Đinh Văn Huỳnh  
 Ngày vào NCS : 5/1985  
 Ngày bảo vệ : 12/1989  
 Nơi bảo vệ : Viện Toán học
44. Nguyễn Văn Kính (Trưởng ĐHSP Quy nhơn)  
 "Về một số phương pháp biến phân giải các bài toán đặt không  
 chính"  
 Người hướng dẫn : PGS-TS Nguyễn Minh Chương  
 Ngày vào NCS : 5/1986  
 Ngày bảo vệ : 1/1990  
 Nơi bảo vệ : Viện Toán học
45. Lê Anh Vũ (Trưởng ĐHSP Huế)  
 "Không gian phân lá tạo thành từ các K-quỹ đạo chiều cực đại  
 của lớp nhóm Lie MD4"  
 Tập thể hướng dẫn : PTS Đỗ Ngọc Diệp  
 PTS Hồ Hữu Việt

Ngày vào NCS : 5/1986  
 Ngày bảo vệ : 5/1990  
 Nơi bảo vệ : Viện Toán học

46. Tạ Khắc Cư (Trưởng ĐHSP Vinh)  
 "Hàm tử độ đo xác suất với giá hữu hạn tác động trên các không gian tôpô, không gian metric và giới hạn thuận của siêu không gian các tập lồi compact trong không gian Banach"  
 Người hướng dẫn : TS Nguyễn Tố Nhu  
 Ngày vào NCS : 5/1986  
 Ngày bảo vệ : 7/1990  
 Nơi bảo vệ : Viện Toán học.
47. Tạ Duy Phương (Viện Toán học)  
 "Một số bài toán đố bất trong trò chơi tuyến tính có chập"  
 Tập thể hướng dẫn : PTS Phan Huy Khải  
 PTS Phạm Huy Điện  
 Ngày vào NCS : 4/1985  
 Ngày bảo vệ : 7/1990  
 Nơi bảo vệ : Viện Toán học.

#### DANH SÁCH NGHIÊN CỨU SINH CHỨA BẢO VỆ LUẬN AN

1. My Vinh Quang (Trưởng ĐHSP Vinh)  
 "Thác triển p-adic của các chuỗi Laurent"  
 Tập thể hướng dẫn : PGS-TS Hà Huy Khoái  
 PTS Đỗ Ngọc Diệp  
 Ngày vào NCS : 4/1985
2. Khuất Văn Ninh (Trưởng ĐHSP II Hà nội)  
 "Một số phương pháp giải gần đúng phương trình toán tử trong không gian vectơ tôpô"  
 Người hướng dẫn : PGS-TS Nguyễn Minh Chương  
 Ngày vào NCS : 5/1986
3. Tạ Hồng Quang (Viện Toán học)  
 "xấp xỉ hàm một biến và hàm nhiều biến"  
 Tập thể hướng dẫn : TS Đinh Dũng  
 TS Trần Đức Văn  
 Ngày vào NCS : 5/1986

4. Huỳnh Thế Phùng (Trưởng ĐHSP Huế)  
"Một số thuật toán giải bao hàm thức  $0 \in F(x)$ "  
Tập thể hướng dẫn : GS Phạm Hữu Sách,  
PTS Phạm Huy Điển  
Ngày vào NCS : 5/1986
5. Thái Quỳnh Phong (Trưởng ĐHBK Đà Nẵng)  
"Các thuật toán giải tối ưu toàn cục"  
Người hướng dẫn : TS Nguyễn Văn Thoại  
Ngày vào NCS : 5/1986
6. Lê Văn Trí Minh (Trưởng ĐHSP Hồ Chí Minh)  
"Tích tenxơ các đại số"  
Người hướng dẫn : PGS-TS Ngô Việt Trung  
Ngày vào NCS : 8/1987
7. Nguyễn Đình (Trưởng ĐHSP Huế)  
"Nghiên cứu sự ổn định vi phân hàm giá trị của bài toán tối ưu"  
Tập thể hướng dẫn : GS Phạm Hữu Sách,  
PTS Phạm Huy Điển  
Ngày vào NCS : 8/1987
8. Trịnh Công Diệu (Trưởng ĐHSP Hồ Chí Minh)  
"Điều kiện đủ của bài toán cực trị với hạn chế đa trị"  
Tập thể hướng dẫn : GS Phạm Hữu Sách  
PTS Vũ Ngọc Phát  
Ngày vào NCS : 8/1987
9. Nguyễn Chí Long (Trưởng ĐHSP Thành phố Hồ Chí Minh)  
"Giải tích ngẫu nhiên lượng tử"  
Người hướng dẫn : TS Nguyễn Văn Thu  
Ngày vào NCS : 8/1987
10. Nguyễn Hồng Minh (Viện Toán học)  
"Thác triển p-adic và biến đổi Mellin-Mazur nhiều chiều"  
Người hướng dẫn : PGS-TS Hà Huy Khoái  
Ngày vào NCS : 8/1987
11. Nguyễn Văn Khải (Trưởng ĐHSP I Hà Nội)  
"Phương pháp chiếu lặp để giải phương trình toán tử"  
Tập thể hướng dẫn : PGS-TS Nguyễn Minh Chương  
PTS Lê Đình Thịnh  
Ngày vào NCS : 8/1987

12. Phan Trung Huy (Trưởng ĐHSP Xuân Hòa)  
"Đa tạp monoid hữu hạn và ngôn ngữ tử vô hạn"  
Người hướng dẫn : PGS-TS Đỗ Long Vân  
Ngày vào NCS : 6/1987
13. Nguyễn Đình Huy (Trưởng ĐHSP Quy Nhơn)  
"Sự tồn tại và tính trừ mật của nghiệm phương trình vi phân đa trị"  
Người hướng dẫn : PGS Phan Văn Chương  
PTS Nguyễn Khoa Sơn  
Ngày vào NCS : 8/1987
14. Phạm Anh Tuấn (Trưởng ĐH Y Huế)  
"Ứng dụng toán quy hoạch tối ưu để giải một số vấn đề tồn tại trong ngành kinh tế xã hội"  
Người hướng dẫn : TS Bùi Công Cường  
Ngày vào NCS : 8/1987
15. Nguyễn Duy Thái Sơn (Trưởng ĐHTH Huế)  
"Một số vấn đề lý thuyết của phương trình vi phân phi tuyến cấp 2"  
Người hướng dẫn : TS Trần Đức Văn  
Ngày vào NCS : 11/1988
16. Dương Quốc Việt (Sở Giáo dục Hải Hưng)  
"Một số tính chất của Modul Coban"  
Tập thể hướng dẫn : PGS-TS Ngô Việt Trung  
PTS Nguyễn Tự Cường  
Ngày vào NCS : 11/1988
17. Lê Văn Thuyết (Trưởng ĐHSP Huế)  
"Một số lớp modul về vành đặc trưng bởi các tính chất nội xạ và xạ ảnh"  
Người hướng dẫn : PGS-TS Đinh Văn Huỳnh  
Ngày vào NCS : 11/1988
18. Nguyễn Hắc Hải (Trưởng ĐHSP I Hà Nội)  
"Các định lý giới hạn mactingan và ứng dụng"  
Tập thể hướng dẫn : PTS Đinh Quang Lưu  
PTS Phạm Văn Kiều  
Ngày vào NCS : 11/1988
19. Nguyễn Hương Lâm (Viện Toán học)  
"Những vấn đề tổ hợp trên ngôn ngữ tử vô hạn"  
Người hướng dẫn : PGS-TS Đỗ Long Vân  
Ngày vào NCS : 11/1988

20. Trần Lộc Hùng (Trưởng ĐHTH Huế)  
"Một số vấn đề mactingan và ứng dụng trong giải tích ngẫu  
nhiên và lý thuyết tiếng ồn trắng"  
Tập thể hướng dẫn : PTS Đinh Quang Lưu  
PTS Trần Hùng Thao  
Ngày vào NCS : 12/1989
21. Nguyễn Văn Sanh (Trưởng ĐHSP Huế)  
"Nghiên cứu một số lớp vành qua tính chất của các môđun đặc  
biệt trên vành số"  
Người hướng dẫn : PGS-TS Đinh Văn Huỳnh  
Ngày vào NCS : 12/1989
22. Nguyễn Đắc Liêm (Trưởng ĐHTH Huế)  
"Một số vấn đề lý thuyết của phương trình vi phân cấp 2"  
Tập thể hướng dẫn : TS Trần Đức Văn  
PTS Hà Tiên Ngoan  
Ngày vào NCS : 12/1989.