

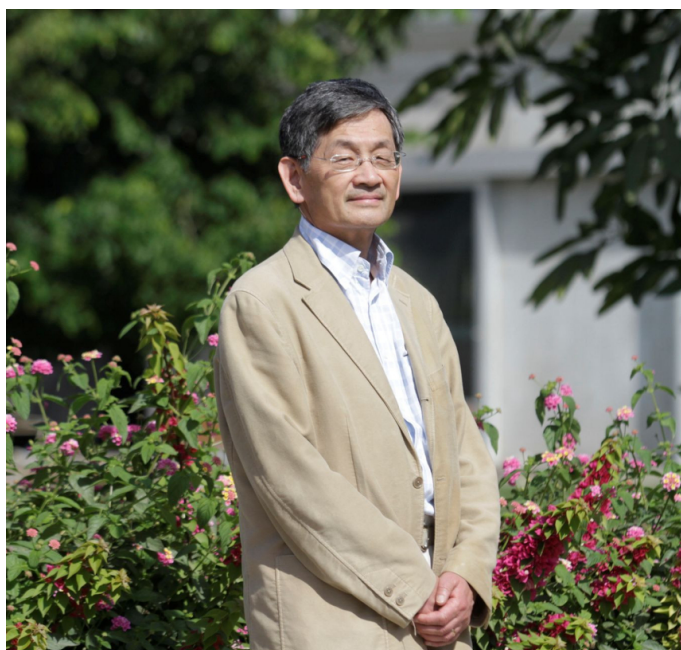
**Hội Toán Học Việt Nam**



# **THÔNG TIN TOÁN HỌC**

**Tháng 12 Năm 2025**

**Tập 29 Số 3 & 4**



# THÔNG TIN TOÁN HỌC

Newsletter of the Vietnam Mathematical Society

## TỔNG BIÊN TẬP

ĐOÀN TRUNG CƯỜNG, Viện Toán học, Viện  
HLKHCN Việt Nam (dtrucuong@math.ac.vn)

## PHÓ TỔNG BIÊN TẬP

NGUYỄN THỊ LÊ HƯƠNG, Hội Toán học Việt Nam  
(ntlhuong@viasm.edu.vn)

## THƯ KÝ

NGUYỄN ĐĂNG HỢP, Viện Toán học, Viện HLKHCN  
Việt Nam (ndhop@protonmail.com)

## BAN BIÊN TẬP

NGÔ QUỐC ANH, ĐH Khoa học Tự nhiên, ĐHQG  
Hà Nội (bookworm\_vn@yahoo.com)

PHAN THỊ HÀ DƯƠNG, Viện Toán học, Viện  
HLKHCN Việt Nam (phanhaduong@math.ac.vn)

NGUYỄN ĐĂNG HỒ HẢI, ĐH Khoa học, ĐH Huế  
(ndhohai@yahoo.com)

NGÔ HOÀNG LONG, ĐH Sư phạm Hà Nội  
(ngolong@hnue.edu.vn)

ĐỖ ĐỨC THUẬN, ĐH Bách khoa Hà Nội  
(ducthuank7@gmail.com)

NGUYỄN CHU GIA VƯỢNG, Viện Toán học, Viện  
HLKHCN Việt Nam (ncgvuong@math.ac.vn)

Bìa 1. Giáo sư Lê Dũng Tráng (1947–2025). Ảnh:  
*Pontifical Catholic University of Peru.*

## THỂ LỆ GỬI BÀI

Bài viết bằng tiếng Việt. Tất cả các bài, thông tin về sinh hoạt toán học ở các khoa (bộ môn) toán, về hướng nghiên cứu hoặc trao đổi về phương pháp nghiên cứu và giảng dạy đều được hoan nghênh. Bản tin cũng nhận đăng các bài giới thiệu tiềm năng khoa học của các cơ sở cũng như các bài giới thiệu các nhà toán học.

Bài viết xin gửi về tòa soạn theo địa chỉ email của một trong các biên tập viên, hoặc địa chỉ bưu điện ở trên. Nếu bài được đánh máy tính, xin gửi kèm theo file với phông chữ unicode. Tòa soạn khuyến khích các tác giả sử dụng chương trình soạn thảo Latex và gói tiếng Việt vntex.

## ĐỊA CHỈ BƯU ĐIỆN

Bản tin **Thông Tin Toán Học**,  
Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học  
và Công nghệ Việt Nam,  
18 Hoàng Quốc Việt, Nghĩa Đô,  
10307 Hà Nội  
© Hội Toán Học Việt Nam

BẢN ĐIỆN TỬ CỦA TẤT CẢ CÁC SỐ TẠP CHÍ  
CÓ THỂ TRUY CẬP TỪ TRANG MẠNG CỦA  
HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM  
[www.vms.org.vn](http://www.vms.org.vn)

# Gặp mặt đầu xuân Bính Ngọ

Nhân dịp năm mới 2026 và Tết Bính Ngọ, Ban Chấp hành Hội Toán học Việt Nam kính chúc quý vị đồng nghiệp một năm mới luôn

Mạnh khỏe, Hạnh phúc và Thành công

Ban Chấp hành Hội Toán học Việt Nam trân trọng kính mời các hội viên có mặt tại Hà Nội và các vùng lân cận tham dự Chương trình Du xuân và Gặp mặt đầu năm 2026.

**Thời gian:** Chủ Nhật, 8/3/2026 (tức 20 tháng Giêng năm Bính Ngọ).

**Địa điểm tham quan:** Ninh Bình (Hà Nam cũ).

**Chương trình:**

\* 7h00: Tập trung tại một trong hai địa điểm:

- Viện NCCC về Toán, 161 Huỳnh Thúc Kháng, p. Láng, HN.
  - Viện Toán học, 18 Hoàng Quốc Việt, Nghĩa Đô, HN.
- (BTC sẽ sắp xếp theo số lượng đăng ký).

\* 7h15: Xuất phát đi Ninh Bình (khu vực Hà Nam cũ).

\* 9h00-10h00: Tham quan Vương Cung Thánh Đường Sở Kiện.

\* 10h30-11h30: Họp mặt (địa điểm sẽ thông báo sau)

- Tổng kết công tác năm 2025 và lên kế hoạch hoạt động năm 2026 của Hội.
- Chúc mừng các hội viên cao tuổi.
- Trao giải thưởng Lê Văn Thiêm.

\* 11h45-13h30: Liên hoan.

\* 14h00-15h30: Tham quan chùa Bà Đanh.

**Đăng ký tham dự:** để việc tổ chức thuận lợi, đề nghị quý vị đăng ký trước 2/3/2026 tại <https://forms.gle/2bmGXRYvSkXU211H6>

**Phí liên hoan:** Miễn phí đối với hội viên. Người nhà đi cùng đóng góp 150.000 đồng/người lớn và 100.000 đồng/trẻ em (dưới 10 tuổi).

Rất mong sự có mặt của quý hội viên.

(Thông báo này thay cho giấy mời riêng)

Ảnh nền: eva.vn

# “Kính tặng quê hương tôi, nước Việt Nam anh hùng”

*Tưởng nhớ giáo sư Lê Dũng Tráng*

**Ngô Việt Trung**

Dòng chữ trên được viết cuối lời tựa luận án tiến sĩ của GS. Lê Dũng Tráng bảo vệ năm 1971, khi ông mới 24 tuổi. Có một điều kỳ lạ là lúc đó ông không mang quốc tịch Pháp mà có quốc tịch Việt Nam Dân chủ Cộng Hoà mặc dù hoàn toàn lớn lên ở Pháp, chỉ biết đến Việt Nam qua lời kể của gia đình. GS. Lê Dũng Tráng sinh năm 1947 tại Sài Gòn. Năm 1949 gia đình ông chuyển sang Pháp sinh sống khi ông mới 2 tuổi. Ông chỉ thực sự biết đến đất nước mình khi ông về thăm Việt Nam lần đầu tiên năm 1972, một năm sau khi ông bảo vệ luận án tiến sĩ. Chúng ta có thể tự hỏi điều gì đã gắn bó người thanh niên Lê Dũng Tráng với với đất nước Việt Nam đến như vậy.

GS. Lê Dũng Tráng có lẽ là một trong những người trẻ nhất đạt được học vị tiến sĩ ở Pháp (Doctorat d'État) vào thời điểm ông bảo vệ. Thời kỳ đó bảo vệ luận án tiến sĩ ở Pháp rất khó, phải trải qua 2 bước. Ông bảo vệ bước đầu (Doctorat de Troisième Cycle) năm 1969 khi mới 22 tuổi. Theo phả hệ toán học, những người hướng dẫn luận án của ông là hai nhà toán học hàng đầu thế giới Claude Chevalley và Pierre Deligne (huy chương Fields 1978). Hội đồng bảo vệ của ông gồm các nhà toán học nổi tiếng François Norguet, Yvette Amice, Pierre Deligne và René Thom (huy chương Fields 1958). Theo lời ông kể thì luận án của ông chịu ảnh hưởng từ loạt bài giảng của

Heisuke Hironaka (huy chương Fields 1970) về mối liên hệ giữa các tính chất đại số và tô pô của siêu mặt giải tích phức tại Viện nghiên cứu cao cấp IHES năm 1968. Trong một bài báo viết chung với nhà toán học Ấn Độ C.P. Ramanujam, GS. Lê Dũng Tráng giải quyết được một giả thuyết của Hironaka về mối quan hệ này năm 1976. Đây là công trình nổi tiếng nhất của ông đặt nền móng cho nhiều nghiên cứu sau này trong lý thuyết kỳ dị. Ông còn nổi tiếng với công thức Lê-Greuel, Lê cycles (chu trình Lê) và Lê numbers (số Lê) mang họ ông. Nhà toán học David Massey viết hẳn một cuốn sách mang tên “Lê cycles and hypersurface singularities” (Chu trình Lê và kỳ dị siêu mặt). Trước khi mất ông còn công bố công trình “On the topology of complex map-germs and a general Lê-Greuel formula” trên Arxiv<sup>(1)</sup> vào ngày 17 tháng 10 năm 2025.

GS. Lê Dũng Tráng từng là giáo sư tại Đại học Paris 7, Đại học Bách khoa Paris, Đại học Provence Marseille. Trước khi về hưu, ông là trưởng ban toán của Trung tâm vật lý lý thuyết ICTP 2002-2009, có nhiều đóng góp cho sự phát triển toán học ở các nước đang phát triển. Ông có 20 học trò bảo vệ luận án tiến sĩ, trong đó những nhà toán học nổi tiếng như Hélène Esnault, Claude Sabbah và hai nhà toán học Việt Nam Phạm Tiến Sơn (đồng hướng dẫn với Hà Huy Vui) và

Viện Toán học, Viện Hàn lâm KHCN Việt Nam. Email: nvtrung@math.ac.vn

<sup>(1)</sup>arXiv:2510.15825.



Trần Gia Lộc. Năm 1990 ông được Viện Hàn lâm Khoa học Pháp trao giải thưởng Prix d'Aumale. Năm 1993 ông được bầu là Viện sĩ Viện Hàn lâm Khoa học thế giới thứ ba TWAS với tư cách là một nhà toán học Việt Nam. Năm 2004, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam trao bằng tiến sĩ danh dự vinh danh những đóng góp của ông vào sự nghiệp phát triển toán học ở Việt Nam. Tôi đã đi nhiều nơi gặp nhiều đồng nghiệp quốc tế và câu hỏi tôi thường gặp là “Ông có biết ông Lê không?”.



GS. Lê Dũng Tráng tại Trung tâm Vật lý Lý thuyết Quốc tế (ICTP), Trieste, Italia (2010). Ảnh: Gert-Martin Greuel/Viện NC Toán Oberwolfach.

Ngay khi nhận được đồng lương đầu tiên đầu năm 1972, GS. Lê Dũng Tráng quyết định trở về thăm quê hương. Chúng ta cần nhớ là lúc đó là thời kỳ chiến tranh lạnh giữa phe xã hội chủ nghĩa và phương Tây và chiến tranh chống Mỹ ở Việt Nam vẫn đang diễn ra khốc liệt, miền Bắc vẫn bị ném bom. Việc đi lại xuyên biên giới rất khó khăn, nhất là đối với một người ở Pháp nhưng mang hộ chiếu Việt Nam. Ông đã phải bay sang Copenhagen (Đan Mạch) trước rồi bay tiếp đến Mátxcơva. Từ đó ông đi tàu xuyên Siberia đến Bắc Kinh rồi đổi tàu về Hà Nội. Chuyến đi đó kéo dài ba tuần. Hội Toán học ở Việt Nam đã tổ chức một buổi báo cáo của ông về các siêu mặt phức. Ông giảng bằng tiếng

Pháp vì không thạo tiếng Việt và phiên dịch là Bộ trưởng Bộ Đại học Tạ Quang Bửu. Buổi nói chuyện có hơn 200 người đến nghe. Bây giờ hiếm khi có được báo cáo toán học nào có số người nghe lớn như vậy. Qua đó có thể thấy trong chiến tranh mọi người khát khao tìm hiểu kiến thức khoa học mới như thế nào. Trong thời gian ở Việt Nam, ông tổ chức một lớp học về lý thuyết kỳ dị. Tham dự chỉ có 4 học viên là Hà Huy Khoái, Nguyễn Văn Khuê, Lê Hùng Sơn và Lê Văn Thành. Tất cả họ đều trở thành những nhà toán học hàng đầu ở Việt Nam sau này. Ông cũng gặp những chiến sĩ giải phóng quân miền Nam nghe họ kể chuyện đánh Mỹ. Ông rất cảm động khi họ bày tỏ nguyện vọng ông sẽ trở về nước để đào tạo các nhà toán học trẻ. Những trải nghiệm của chuyến thăm quê hương đầu tiên đã củng cố quyết tâm của ông giúp toán học Việt Nam phát triển. Những năm sau đó ông dành toàn bộ tiền tiết kiệm để hàng năm về Việt Nam giảng bài cùng với một số đồng nghiệp nước ngoài. Nhiều nhà toán học trẻ Việt Nam được ông giới thiệu đi tu nghiệp ở Pháp và Nhật.

Năm 1973, GS. Lê Dũng Tráng được David Mumford (huy chương Fields 1974) mời sang thăm Đại học Harvard. Ông băn khoăn không biết có nên đi không vì chiến tranh ở Việt Nam vẫn đang tiếp diễn, nhưng Bộ trưởng Tạ Quang Bửu nói là nên đi để giúp Hội Toán học Việt Nam gia nhập Liên đoàn Toán học Quốc tế IMU. Chuyến đi đó không hề dễ dàng vì có lẽ ông là người đầu tiên mang quốc tịch Việt Nam Dân chủ Cộng hòa sang Mỹ trong chiến tranh. Ông kể là ông chỉ nhận được thị thực sau khi những người bạn Mỹ nhờ một thượng nghị sĩ Mỹ tác động lên chính phủ. Khó khăn lớn nhất đối với việc Hội Toán học Việt Nam gia nhập IMU là khoản hội phí thường niên.

Hội không có tiền và khoản phí đó tương đối lớn so với lương của GS. Lê Dũng Tráng. Nhân dịp chuyến đi Mỹ ông đã gặp và vận động các nhà toán học John Mather, Samuel Eilenberg, Hyman Bass, Masatake Kuranishi, Lipman Bers, Philip Wagreich, Robert Fossum, Charles Titus, Heisuke Hironaka, Phillip Griffiths (sau này là giám đốc Viện nghiên cứu cao cấp Princeton), David Mumford, Oscar Zariski, Michael Artin, David Eisenbud (sau này là viện trưởng Viện nghiên cứu Toán MSRI), Robin Hartshorne, Raoul Bott đóng góp tiền cho Hội Toán học Việt Nam. Đây đều là những nhà toán học nổi tiếng trên toàn thế giới. Thú vị nhất là trong Hội nghị Hình học đại số ở Arcata, ông đã tranh thủ quyền góp tiền khi mọi

người tập trung trong phòng ăn để xem tổng thống Nixon tuyên bố từ chức vì vụ Watergate. Theo lời ông kể thì tất cả mọi người đều đóng góp dù họ theo phe cộng hoà, dân chủ hay gì khác đi nữa. Cuối cùng thì đoàn đại biểu của Hội Toán học Việt Nam cũng đủ kinh phí để đi dự Đại hội Toán học Quốc tế ICM 1974 ở Vancouver và gia nhập Liên đoàn Toán học Quốc tế ở đó. Kể lại chuyện này ông kết luận “Chúng tôi đã gia nhập Liên đoàn Toán học Quốc tế cứ như thể chúng tôi đang tiến hành chiến tranh du kích. Tôi có biết bao điều để kể về thời kỳ này của Việt Nam vì tôi đã sống những thời khắc đó. Tất cả mọi thứ đều khó khăn, nhưng tất cả đều có thể vượt qua.”



GS. Lê Dũng Tráng (ngồi) cùng Bộ trưởng Tạ Quang Bửu (thứ hai từ trái sang) thăm rừng Cúc Phương (1973). Nguồn ảnh: GS. Lê Dũng Tráng

Giới toán học Việt Nam sẽ luôn nhớ ơn GS. Lê Dũng Tráng, người có công đưa toán học Việt Nam hội nhập thế giới sau chiến tranh chống Mỹ.

#### TÀI LIỆU

- [1] Lê Dũng Tráng, *Sur les singularités des hypersurfaces complexes* (Thèse) <https://www.sudoc.fr/004761383>.

- [2] Lê Dũng Tráng, *Cảm tưởng về hợp tác Toán học Việt – Pháp*, phát biểu tại Hội nghị Toán học Việt – Pháp, Huế 8/2012.  
 [3] Lê Dũng Tráng, Bài viết trên Tia sáng, số tháng 5/2018, tháng 3/2022.  
 [4] Lê Dũng Tráng, *Những kỉ niệm về Việt Nam* (2 phần, Nguyễn Đặng Hồ Hải dịch từ nguyên bản tiếng Pháp), Thông tin Toán học tập 25 số 3 & 4 (2021), tập 27 số 1 (2023).

# Hội thảo quốc tế về Toán học công nghiệp và Toán ứng dụng 2025

Nguyễn Hồng Anh<sup>(1)</sup> và Vũ Hoàng Linh<sup>(2)</sup>

Hội thảo quốc tế về Toán học công nghiệp và Toán ứng dụng 2025 (ICIAM Board Meeting & Workshop on Industrial and Applied Mathematics 2025) diễn ra từ ngày 11 đến 13 tháng 9 năm 2025 tại Viện Nghiên cứu Cao cấp về Toán (VIASM), Hà Nội. Sự kiện do Hội đồng Quốc tế Toán học Công nghiệp và Toán Ứng dụng (ICIAM), Hội Toán học Việt Nam (VMS) và VIASM phối hợp tổ chức.

Hội đồng Quốc tế về Toán học Công nghiệp và Toán Ứng dụng (ICIAM) là một tổ chức toàn cầu dành cho các hội toán học ứng dụng chuyên nghiệp và các hội khác có mối quan tâm đáng kể đến toán học công nghiệp hoặc toán ứng dụng. Hiện tại, ICIAM có 54 hội thành viên. Các mục tiêu chính của ICIAM là:

- Thúc đẩy toán học công nghiệp và ứng dụng trên phạm vi quốc tế;
- Thúc đẩy sự tương tác giữa các hội thành viên;
- Thúc đẩy các mục tiêu của các hội thành viên này;
- Điều phối việc lập kế hoạch cho các hội nghị quốc tế định kỳ về toán học công nghiệp và ứng dụng.

ICIAM được thành lập nhằm đáp ứng sự phát triển mạnh mẽ của toán học ứng dụng trong những năm 1970 và 1980. Hội được chính thức thành lập vào năm 1987 bởi bốn hội GAMM, IMA, SIAM và SMAI. ICIAM có sự phối hợp chặt chẽ với Liên đoàn Toán học Quốc tế IMU và nhiều

tổ chức khoa học quốc tế khác. Hoạt động chính là Đại hội ICIAM, được tổ chức 4 năm một lần. Hội nghị ICIAM đã được tổ chức tại 10 thành phố lớn trên thế giới. Đại hội tiếp theo sẽ được tổ chức tại The Hague, Hà Lan vào năm 2027. Chủ tịch đương nhiệm của ICIAM là GS. Wil Schilders, ĐH Công nghệ Eindhoven, Hà Lan, một chuyên gia có kinh nghiệm trong lĩnh vực tính toán khoa học trong thiết kế chip và mô phỏng thiết bị bán dẫn.

Hội thảo diễn ra trong hai ngày (11–12/9) và một ngày họp Ban Điều hành ICIAM (13/9), với sự tham gia của khoảng 70 đại biểu trong nước và nước ngoài đến từ 5 châu lục trên thế giới như Mỹ, Canada, Mexico, Brazil, Trung Quốc, Nhật Bản, Hàn Quốc, Đài Loan, Hồng Kông, Singapore, Hà Lan, Anh, Đức, Ba Lan, Tây Ban Nha, Thụy Sĩ, Úc, New Zealand, Nam Phi,...

Mục tiêu của hội thảo là tạo ra diễn đàn trao đổi học thuật chất lượng cao giữa các nhà toán học quốc tế hàng đầu với cộng đồng toán học trong nước về ứng dụng toán học. Đồng thời, sự kiện cũng nhằm quảng bá vai trò và sự đóng góp ngày càng lớn của Việt Nam trong cộng đồng toán học thế giới, đặc biệt trong lĩnh vực toán ứng dụng và toán công nghiệp. Thông qua đó, hội thảo góp phần thúc đẩy hợp tác quốc tế, mở rộng mạng lưới nghiên cứu, cũng như giới thiệu tiềm

<sup>(1)</sup>Viện Nghiên cứu cao cấp về Toán. Email: [nguyenhonganh@viasm.edu.vn](mailto:nguyenhonganh@viasm.edu.vn)

<sup>(2)</sup>ĐH Khoa học Tự nhiên, ĐHQG HN. Email: [linhvh@vnu.edu.vn](mailto:linhvh@vnu.edu.vn)

năng và nhu cầu phát triển toán ứng dụng tại Việt Nam.

Bên cạnh các báo cáo, hội thảo còn có nhiều phiên thảo luận và trao đổi học thuật sôi nổi, giúp kết nối các nhóm nghiên cứu trong nước với các đồng nghiệp quốc tế. Đây là cơ hội quý báu để các nhà khoa học trẻ, nghiên cứu sinh và giảng viên đại học của Việt Nam tiếp cận các hướng nghiên cứu mới, đồng thời tìm

kiếm cơ hội hợp tác lâu dài với các đối tác nước ngoài.

Trong khuôn khổ Hội thảo, ngày 13/9, cuộc họp Ban Điều hành ICIAM đã diễn ra và bầu được Chủ tịch ICIAM nhiệm kỳ từ 2026: GS. Sven Leyffer (Phòng Thí nghiệm Quốc gia Argonne, Mỹ; trước đây đã từng là Tổng thư ký ICIAM). Ngoài ra, đại diện các hội thành viên đã bỏ phiếu chọn Busan (Hàn Quốc) để đăng cai Đại hội ICIAM năm 2031.



Ảnh chụp nhóm Hội thảo quốc tế về Toán học công nghiệp và Toán ứng dụng 2025.

Nhân dịp này, vào chiều ngày 12/9, Thứ trưởng Bộ GD & ĐT Việt Nam Nguyễn Văn Phúc cùng đại diện các Cục liên quan đã tiếp đón xã giao GS. Hiraku Nakajima, Chủ tịch Liên đoàn Toán học Quốc tế, ĐH Tokyo (Nhật Bản); GS. Yukari Ito, Chủ tịch Hiệp hội Phụ nữ ngành Toán học châu Á - châu Đại Dương, ĐH Tokyo (Nhật Bản) và GS. Wil Schilders, Chủ tịch ICIAM, ĐH Công nghệ Eindhoven (Hà Lan). Tại cuộc tiếp đón,

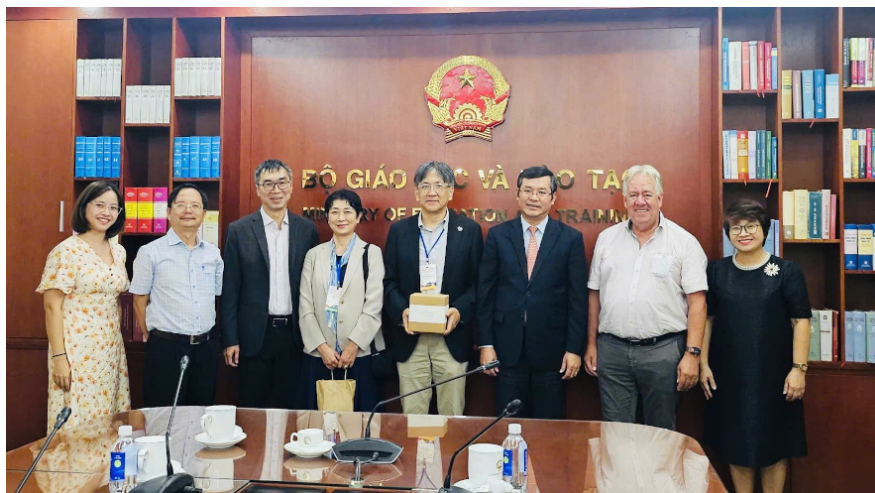
Thứ trưởng bày tỏ mong muốn ký kết các biên bản ghi nhớ hợp tác để mở rộng cơ hội nghiên cứu khoa học và tạo điều kiện cho sinh viên sau Đại học của Việt Nam được trao đổi, học tập các chương trình đào tạo chuyên sâu. Các giáo sư cũng bày tỏ hy vọng được hợp tác nhiều với các nhà toán học, các nhà khoa học Việt Nam và sẵn sàng hợp tác, trao đổi như đề xuất của Thứ trưởng.



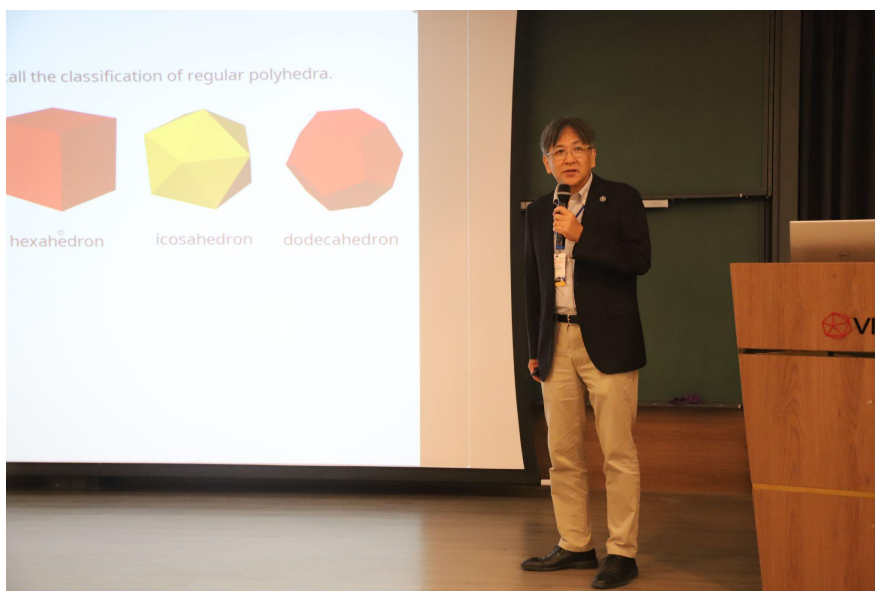
Hội thảo đã đạt được nhiều kết quả nổi bật: chất lượng khoa học cao, tính đa dạng trong chủ đề toán ứng dụng và toán công nghiệp, cũng như sự quan tâm sâu rộng của cộng đồng.

Hội thảo Quốc tế về Toán học công nghiệp và Toán ứng dụng 2025 đã để lại

dấu ấn quan trọng, góp phần nâng cao vị thế của toán học Việt Nam trong cộng đồng quốc tế. Sự kiện không chỉ tạo động lực cho nghiên cứu khoa học cơ bản và ứng dụng, mà còn mở ra những hướng hợp tác thiết thực nhằm đưa toán học ngày càng gắn bó chặt chẽ hơn với sự phát triển khoa học, công nghệ Việt Nam.



GS. Wil Schilders, Thứ trưởng Bộ GD & ĐT Nguyễn Văn Phúc, GS. Hiraku Nakajima, và GS. Yukari Ito (theo thứ tự từ phải sang trái, tính từ vị trí thứ hai) tại buổi tiếp xã giao ngày 12/9/2025.



GS. Hiraku Nakajima phát biểu tại hội nghị.

# Đại hội Hội Toán học Thành phố Hồ Chí Minh lần thứ VII nhiệm kỳ 2025-2030

Ngày 26/7, Ban Chấp hành Hội Toán học Thành phố Hồ Chí Minh tổ chức Đại hội lần thứ VII, nhiệm kỳ 2025-2030. Đại hội đã tiến hành tổng kết hoạt động

nhiệm kỳ trước, thảo luận phương hướng mới, kiện toàn tổ chức và đề ra các quyết sách chiến lược để đưa Hội phát triển đúng trọng tâm và mục tiêu.



PGS.TS. Phạm Hoàng Quân, Hiệu trưởng Trường đại học Sài Gòn, Chủ tịch Hội Toán học Tp. Hồ Chí Minh. Ảnh: Hội Toán học TP HCM

Đại hội có sự tham dự của 200 đại biểu là đại diện các tổ chức thành viên của Hội đến từ các trường đại học, cao đẳng và các trường phổ thông.

Đại hội bầu ra 13 thành viên Ban Chấp hành, với Chủ tịch Hội là PGS.TS. Phạm Hoàng Quân, Hiệu trưởng Trường Đại học Sài Gòn.

Tại Đại hội, các đại biểu đã thống nhất nhiều nhiệm vụ và giải pháp trọng yếu trong nhiệm kỳ tới, tập trung vào việc nâng cao năng lực nghiên cứu toán học, cả lý thuyết lẫn ứng dụng.

Hội đặt mục tiêu nâng cao trình độ chuyên môn của các nhóm nghiên cứu, thiết lập và hỗ trợ các nhóm nghiên cứu mạnh tại Tp. Hồ Chí Minh và các tỉnh lân cận. Đồng thời, đẩy mạnh hợp tác với các nhóm nghiên cứu quốc tế nhằm phát huy thế mạnh của Toán học Việt Nam trong các lĩnh vực mũi nhọn.

Một định hướng lớn được đưa ra là thúc đẩy nghiên cứu ứng dụng toán học gắn với nhu cầu thực tiễn của các ngành công nghiệp, trí tuệ nhân tạo, khoa học dữ liệu, cơ học, kinh tế, y sinh, tài chính,

biến đổi khí hậu và xã hội học. Bên cạnh đó, Hội cũng đặc biệt chú trọng các hoạt động quảng bá, lan tỏa niềm đam mê toán học đến đông đảo tầng lớp xã hội, đặc biệt là học sinh năng khiếu, sinh viên ngành toán và đội ngũ giáo viên phổ thông.

Ban Chấp hành Hội Toán học Tp. Hồ Chí Minh nhiệm kỳ 2025-2030:

1. PGS.TS. Phạm Hoàng Quân - Hiệu trưởng Trường Đại học Sài Gòn, Chủ tịch Hội;
2. TS. Trần Nam Dũng - Phó Hiệu trưởng Trường Phổ thông năng khiếu, Đại học Quốc gia Tp. Hồ Chí Minh, Phó Chủ tịch Hội;
3. PGS.TS. Kiều Phương Chi - Trưởng khoa Khoa Toán - Ứng dụng, Trường Đại học Sài Gòn, Tổng Thư ký;
4. ThS. Nguyễn Bảo Quốc - Phó Giám đốc Sở GD & ĐT Tp. Hồ Chí Minh, Ủy viên Ban Thường vụ, phụ trách công tác kiểm tra;
5. PGS.TS. Lê Minh Triết - Phó Hiệu trưởng Trường Đại học Sài Gòn, Ủy viên

Ban Thường vụ;

6. GS.TS. Mai Hoàng Biên - Trưởng khoa Khoa Toán - Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Tp. Hồ Chí Minh;
7. Ông Thân Đức Minh - Tổ trưởng Tổ Toán, THPT chuyên Lê Hồng Phong;
8. TS. Nguyễn Lê Chí Quyết - Phó Trưởng khoa Khoa Toán - Tin học, Trường Đại học Sư phạm Tp. Hồ Chí Minh;
9. ThS. Phạm Quang Thiện - Hiệu trưởng Trường THPT Bình Phú;
10. ThS. Hồ Lộc Thuận - Phó Hiệu trưởng Trường THPT Sài Gòn;
11. PGS.TS. Cao Thanh Tình - Trưởng bộ môn, Trường Đại học Công nghệ thông tin, Đại học Quốc gia Tp. Hồ Chí Minh;
12. PGS.TS. Nguyễn Minh Tùng - Phó Trưởng khoa Khoa học dữ liệu trong kinh doanh, Trường Đại học Ngân hàng Tp. Hồ Chí Minh;
13. PGS.TS. Phạm Hoàng Uyên - Trưởng khoa Khoa Toán kinh tế, Trường Đại học Kinh tế-Luật, Đại học Quốc gia Tp. Hồ Chí Minh.



Ban chấp hành Hội Toán học Tp. Hồ Chí Minh nhiệm kỳ 2025-2030.

Ảnh: Hội Toán học TP. HCM

# Giáo sư Gérard Laumon (1952-2025): Cuộc đời và sự nghiệp của một nhà toán học lớn

Đỗ Việt Cường<sup>(1)</sup>

Giáo sư Gérard Laumon (7/5/1952-4/10/2025), là một nhà toán học Pháp kiệt xuất, một nhà giáo dục đại tài. Ông được xem là người có những đóng góp quan trọng trong lĩnh vực Hình học số học và Lý thuyết biểu diễn, đồng thời là một trong những người tiên phong phát triển lý thuyết tương ứng Langlands hình học. Hai trong số các học trò của ông đã nhận được huy chương Fields cao quý.

## 1. TIỂU SỬ VÀ SỰ NGHIỆP

Giáo sư Gérard Laumon sinh ra tại Lyon (Pháp) vào ngày 7 tháng 5 năm 1952. Ông là cựu sinh viên của trường Đại học Sư Phạm Paris (École Normale Supérieure – ENS Ulm) từ năm 1972 đến năm 1976. Ông nhận được chứng chỉ *agrégation* (*agrégation* là kì thi công chức có tính cạnh tranh và uy tín bậc nhất trong hệ thống giáo dục công lập Pháp) năm 1975.

Trong toàn bộ sự nghiệp cống hiến khoa học của mình, Gérard Laumon làm việc tại khoa Toán của Đại học Paris-Sud (hay còn gọi là Paris XI - Orsay, nay là Đại học Paris-Saclay), nơi ông làm giáo sư trợ giảng (*assistant*) từ năm 1976 đến năm 1984. Ông bảo vệ luận án Tiến sĩ Quốc gia (*thèse d'État*) vào năm 1983 dưới sự hướng dẫn của giáo sư Luc Illusie. Luận án này đã giải quyết các vấn đề khó liên quan đến lý thuyết rẽ nhánh

(*ramification*) được Deligne đặt ra vào năm 1976.

Gérard Laumon gia nhập Trung tâm Nghiên cứu Khoa học Quốc gia Pháp (CNRS) với vai trò *Nghiên cứu viên* (*Chargé de recherche*) từ năm 1985 đến năm 1989, rồi trở thành *Giám đốc nghiên cứu* (*Directeur de recherche*) tại Đại học Paris-Sud từ năm 1989 đến năm 2018. Từ năm 2018 cho đến khi qua đời (ngày 4 tháng 10 năm 2025), ông giữ chức *Giám đốc nghiên cứu danh dự* (*Directeur de recherche émérite*) của CNRS tại Đại học Paris-Sud. Ông cũng từng là trưởng nhóm Số học và Hình học đại số tại Orsay từ năm 2000 đến năm 2008.

## 2. MỘT SỐ NGHIÊN CỨU QUAN TRỌNG

Giáo sư Laumon là người có những đóng góp quan trọng và nền tảng cho lĩnh vực Hình học số học và chương trình Langlands.

**2.1. Phép biến đổi Fourier-Deligne và các ứng dụng của chúng.** Trong loạt công trình [1, 2], ông đã xây dựng một phiên bản  $\ell$ -adic cho nguyên lý pha dừng của Witten và sử dụng nó để chứng minh công thức nhân cho các hằng số của các phương trình hàm của các  $L$ -hàm trên trường hàm và đưa ra một chứng minh mới cho giả thuyết Weil (đã được Deligne thiết lập trước đó). Ông cũng định nghĩa các phép biến đổi Fourier địa phương.

<sup>(1)</sup>ĐH Khoa học Tự nhiên, ĐHQG HN. Email: vcuong.do@gmail.com



Các phép biến đổi Fourier này về sau đóng một vai trò quan trọng trong chứng minh tương ứng Langlands địa phương của Henniart.

## 2.2. Tương ứng Langlands hình học.

Ông là người khởi xướng Lý thuyết tương ứng Langlands hình học, một chương trình nghiên cứu lớn và phức tạp.



Giáo sư Gérard Laumon

Mùa xuân năm 1995, Laumon đã chỉnh sửa một tiền ấn phẩm IHES (năm 1985) liên quan đến một mở rộng của phép biến đổi Fourier-Mukai cho các  $O$ -môđun trên các đa tạp abel lên cho các  $D$ -môđun. Trong phiên bản chỉnh sửa này, ông đã định nghĩa một biến đổi Fourier tổng quát cho các môđun trên các 1-mô-típ. Các biến đổi Fourier hình học đã tồn tại trong trường hợp đặc số không cũng được bao hàm trong định nghĩa này. Phép biến đổi Fourier tổng quát do ông định nghĩa có thể xem như tương ứng Langlands hình học cho  $GL_1$  và phục vụ như một mô hình cho các tương ứng tương tự cho các nhóm khác.

Khi chuẩn bị cho báo cáo tại Seminar Bourbaki về công trình của Frenkel, Gaitsgory và Viehweg về tương ứng của Drinfeld-Langlands, ông đã định nghĩa một phép biến đổi Fourier thuần nhất (*homogène*) – mở rộng phép biến đổi Radon hình học. Một lợi thế của phép

biến đổi Fourier thuần nhất là nó không phụ thuộc vào đặc số của trường.

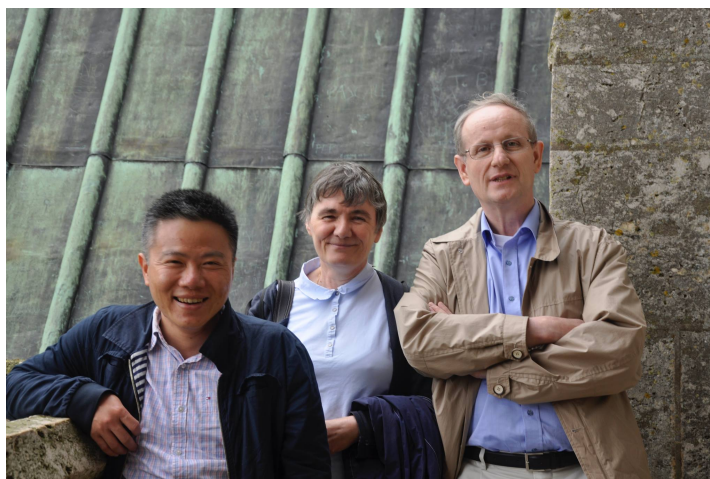
Trong công trình [3], ông đưa ra một đề xuất về việc tổng quát hóa xây dựng hình học của Drinfeld cho các dạng tự đẳng cấu liên kết với các biểu diễn Galois hạng 2 trên trường hàm. Ông cũng định nghĩa một phiên bản toàn cục cho các nón lũy linh, cho phép kiểm soát kỳ dị của các bó tự đẳng cấu. Đồng thời, ông cũng xây dựng phiên bản hình học cho các chuỗi Eisenstein. Trong hai báo cáo ở một hội nghị do Beauville, Drinfeld, Henniart và Lazslo tổ chức tại Luminy tháng 6/1995, ông phát triển các kết quả trước đó của mình trong những năm 86, 87 về những xây dựng đầu tiên của Drinfeld đối với bó tự đẳng cấu cho  $GL_n$  trên trường hàm.

Sử dụng công thức vết của Arthur trên trường hàm, với sự cộng tác của Waldspurger, Laumon mô tả trong [5, 6] các hàm zeta của đối đồng điều với giá compact của các đa tạp modular Drinfeld hạng  $d$  thông qua các  $L$ -hàm tự đẳng cấu. Kết hợp điều này với công thức vết Lefschetz (công thức này được Deligne phỏng đoán và sau đó được Pink và Fujiwara chứng minh), Laumon nhận được công thức tường minh cho đối đồng điều với giá compact của các đa tạp modular Drinfeld hạng  $d$  như là môđun ảo (module virtuel) trên tích của nhóm Galois của các trường hàm và đại số Hecke.

Sử dụng cùng một phương pháp đã phát triển cho  $GL_d$  trên trường hàm, về mặt nguyên tắc, ông có thể tính được đối đồng điều với giá compact của các đa tạp Shimura liên kết với một nhóm  $G$  reductive trên các trường số như môđun ảo trên tích của nhóm Galois và đại số Hecke (phương pháp này hoạt động tốt trong trường hợp các đường cong

modular cổ điển và trong trường hợp đa tạp Hilbert-Blumenthal). Tuy nhiên, nếu  $G$  không phải là nhóm tuyến tính thì các hiện tượng  $L$ -không phân biệt được tạo ra những khó khăn mới. Nhờ vào việc sử dụng các kết quả của Kottwitz (công thức tính số điểm trên các trường hữu hạn của

các đa tạp Shimura, ổn định một phần của các công thức vết,...), các kết quả của Clozel, Labesse, Hales, Waldspurger (bổ đề cơ bản) và kết quả của Arthur (tính toán thặng dư (residue)), ông tính thành công trong [7] đối đồng điều với giá compact trong trường hợp  $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{Q})$ .



Vợ chồng GS. Gérard Laumon cùng GS. Ngô Bảo Châu, người gọi thầy hướng dẫn của mình là “người dạy tôi cách làm toán, cách yêu toán, và cách tôn vinh toán học.”

Cùng với Rapoport và Stuhler, Laumon đã nghiên cứu đa tạp modular của các  $D$ -bó elliptic – một biến thể compact của các đa tạp modular Drinfeld. Nhóm của Laumon đã tính được đối đồng điều  $\ell$ -adic của các đa tạp này và nhận được một tương ứng toàn cục giữa các biểu diễn tự đẳng cấu của các đại số chia trên trường hàm và các biểu diễn  $\ell$ -adic của nhóm Galois trên cùng trường hàm đó. Tương ứng này là công cụ cần thiết để xây dựng một tương ứng địa phương giữa các biểu diễn cuspidal bất khả quy của  $\mathrm{GL}_d(F)$  và các biểu diễn bất khả quy phức bậc  $d$  của nhóm Galois của  $F$ , với  $F$  là một trường địa phương không Ácsimét có đặc số  $p > 0$  (tương ứng Langlands địa phương).

**2.3. Bổ đề cơ bản.** Trong công trình [9], cùng với Ngô Bảo Châu, Laumon đã

chứng minh bổ đề cơ bản của Langlands–Shelstad cho nhóm unita có hạng  $n > p$  trên các trường địa phương không Ácsimét đặc số  $p > 0$ . Trường hợp các nhóm unita hạng  $n > p$  trên trường địa phương không Ácsimét với đặc số 0 và đặc số thặng dư  $p > 0$  được suy ra từ kết quả trước đó của Hales và Waldspurger. Điểm mới của công trình này so với các công trình có liên quan trước đó là việc sử dụng các phân thớ Hitchin để mô tả các tích phân quỹ đạo xuất hiện trong bổ đề cơ bản. Sử dụng cùng một tiếp cận là lấy các phân thớ Hitchin để mô tả các tích phân quỹ đạo, sau đó N.B. Châu đã thành công trong việc chứng minh bổ đề cơ bản của Langlands–Shelstad cho các đại số Lie tổng quát.

Việc chứng minh bổ đề cơ bản chỉ là một trong những bước đầu tiên để

ổn định hóa các công thức vết và chứng minh phép chuyển endoscopic của Langlands. Để đi tiếp những bước sau, ta cần thiết lập những đẳng thức tổ hợp phức tạp hơn giữa các tích phân quỹ đạo có trọng được định hình bởi Arthur. Các đẳng thức này thường được gọi là bổ đề cơ bản có trọng. Các bổ đề cơ bản này được Laumon cùng với Chaudouard chứng minh trong chuỗi công trình [10, 11, 12]. Một trong những khó khăn mà ông và Chaudouard gặp phải khi mở rộng chứng minh của N.B. Châu sang trường hợp tổng quát hơn này là không gian moduli các phân thố Higgs ở ngoài các điểm elliptic rất xấu và cần phải có một cách vượt qua đặc biệt. Để vượt qua, ông và đồng nghiệp đã giới thiệu một khái niệm ổn định có trọng cho các phân thố Higgs. Khái niệm ổn định này cho phép cắt cụt các phân thố Hitchin sao cho không gian toàn phần của phân thố Hitchin bị cắt cụt này trơn trên trường cơ sở và phân thố là riêng (proper).

Trong [13], ông cùng với Chaudouard thực hiện việc đếm số điểm trong thành phần ổn định của phân thố Hitchin. Điều này dẫn đến việc tính tích phân quỹ đạo có trọng toàn cục xuất hiện trong công thức vết Arthur-Selberg.

Định lý về giá của N.B. Châu cho thành phần elliptic của phân thố Hitchin là công cụ quan trọng trong chứng minh bổ đề cơ bản Langlands–Shelstad. Trong các công trình về bổ đề cơ bản có trọng viết chung với Chaudouard, Laumon đã mở rộng định lý này cho các thành phần hyperbolic. Trong [14], họ nhận được kết quả tổng quát cho toàn bộ phân thố Hitchin.

### 3. ẢNH HƯỞNG CỘNG ĐỒNG

Giáo sư Laumon đã truyền cảm hứng cho nhiều thế hệ nhà nghiên cứu, không

chỉ bởi những công trình sâu sắc, được trình bày rõ ràng và rành mạch, mà còn bởi những phẩm chất tuyệt vời của chính con người ông. Ông sẵn sàng giúp đỡ và đưa ra những lời khuyên sáng suốt cho tất cả các đồng nghiệp muốn được tư vấn, bất kể trình độ hay tuổi tác.

Sự kết hợp giữa nhân cách tuyệt vời và tài năng toán học xuất sắc khiến ông trở thành một người thầy vĩ đại. Trong suốt sự nghiệp của mình, ông đã hướng dẫn 10 nghiên cứu sinh [19], tất cả đều ở Đại học Paris XI:

- Alain Genestier, *Tính rẽ nhánh của lớp phủ Drinfeld* (1992).
- Saïbi Moussa, *Phép biến đổi Fourier-Deligne trên nhóm lũy đơn* (1992).
- Laurent Lafforgue, *Các  $D$ -shtuka Drinfeld* (1994).
- Ngô Bảo Châu, *Bổ đề cơ bản Jacquet–Yee trong trường hợp đẳng đặc số* (1997).
- Pascal Boyer, *Rút gọn tối của đa tạp Drinfeld* (1998).
- Sergey Lysenko, *Quan hệ trực giao giữa các bó tự đẳng cấu liên kết với các hệ địa phương bất khả quy hạng 2 trên đường cong* (1999).
- Sophie Morel, *Phức giao của compact hóa Baily-Borel* (2005).
- Chen Zongbin, *Tính thuần túy của phân thố Springer affine cho  $GL_4$*  (2011).
- Alexis Bouthier, *Hình học hóa bên quỹ đạo của công thức vết* (2014).
- Cong Xue, *Đối đồng điều cuspidal của các chồng (stack) các shtuka* (2017).

Nhiều học trò của Laumon đã thành danh, như: Laurent Lafforgue nhận huy chương Fields 2002, Ngô Bảo Châu nhận huy chương Fields 2010 và Sophie Morel nhận giải thưởng Hội Toán học Châu Âu 2012.

Bên cạnh việc nghiên cứu khoa học, ông còn rất tận tụy trong các công việc phục vụ cộng đồng như tham gia ban

biên tập các tạp chí, hay tham gia vào các công việc tuyển dụng và các chính sách khoa học. Ông là tổng biên tập của tạp chí *Annales scientifiques de l'École normale supérieure* (1991–1996), và là biên tập viên của nhiều tạp chí uy tín khác như *Manuscripta Mathematica* (1997–2005), *Inventiones mathematicae* (2000–2010) và *Publications mathématiques de l'IHÉS* (2011–2014).

#### 4. GIẢI THƯỞNG VÀ DANH HIỆU

Giáo sư Gérard Laumon đã nhận được nhiều giải thưởng, vinh dự, và danh hiệu cao quý trong suốt sự nghiệp của mình:

- Huy chương Bạc của CNRS (1987).
- Báo cáo mời tại Đại hội Toán học Quốc tế Kyoto (1990), Madrid (2006).
- Trình bày các công trình của Lafforgue tại Đại hội Toán học Quốc tế Bắc Kinh (2002).
- Giải thưởng nghiên cứu viện Clay (cùng với N.B. Châu) (2004).
- Viện sĩ Viện Hàn lâm khoa học Pháp (Académie des sciences) (2004-2025).
- Huân chương Bắc đẩu bội tinh bậc Hiệp sĩ (Chevalier de la Légion d'honneur) (2010).
- Viện sĩ Viện Hàn lâm Châu Âu (2013-2025).

#### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] N. M. Katz, G. Laumon, *Transformation de Fourier et majoration de sommes exponentielles*, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci., vol. 62, 1985, 145–202.
- [2] G. Laumon, *Transformation de Fourier, constantes d'équations fonctionnelles et conjecture de Weil*, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci., vol. 65, 1987, 131–210.
- [3] G. Laumon, *Correspondance de Langlands géométrique pour les corps de fonctions*, Duke Math. J., vol. 54 (2), 1987, 309–359.
- [4] G. Laumon, M. Rapoport, U. Stuhler, *D-elliptic sheaves and the local Langlands*

*conjecture*, Inventiones Math., vol. 133, 1993, 217–338.

- [5] G. Laumon, *Cohomology of Drinfeld modular varieties, Part I: Geometry, Counting of Points and Local Harmonic Analysis*, Cambridge University Press, coll. “Cambridge studies in advanced mathematics” (no. 41), 1995.
- [6] G. Laumon, *Cohomology of Drinfeld modular varieties, Part II. Automorphic forms, trace formulas and Langlands correspondence*, Cambridge University Press, coll. “Cambridge Studies in Advanced Mathematics” (no. 56), 1996.
- [7] G. Laumon, *Sur la cohomologie à support compacts des variétés de Shimura attachées à  $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{Q})$* , Compositio Math., vol. 105, 1997, 267–359.
- [8] G. Laumon, L. Moret-Bailly, *Champs algébriques*, Springer-Verlag, 1999.
- [9] G. Laumon, B. C. Ngô, *Le lemme fondamental pour les groupes unitaires*, Ann. of Math., 168, 2008, 477–573.
- [10] P-H. Chaudouard, G. Laumon, *Sur l'homologie des fibres de Springer affines tronquées*, Duke Math. J., vol. 145 (3), 2008, 443–535.
- [11] P-H. Chaudouard, G. Laumon, *Le lemme fondamental pondéré. I. Constructions géométriques*, Composition Mahtematica, 146, 2010, 1416–1506.
- [12] P-H. Chaudouard, G. Laumon, *Le lemme fondamental pondéré. II. Énoncés cohomologiques*, Ann. of Math., 176, 2012, 1647–1781.
- [13] P-H. Chaudouard, G. Laumon, *Sur le comptage des fibrés de Hitchin nilpotents*, J. Inst. Math. Jussieu , 15(1), 2016, 91–164.
- [14] P-H. Chaudouard, G. Laumon, *Un théorème du support pour la fibration de Hitchin*, Ann. Inst. Fourier , 66(2), 2016, 711–727.
- [15] Sociétés mathématiques de France, <https://smf.emath.fr/actualites-smf/deces-de-gerard-laumon>
- [16] <https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/fr/linstitut/actualites/décès-de-gerard-laumon/>
- [17] Wikipedia, [https://fr.wikipedia.org/wiki/Gérard\\_Laumon](https://fr.wikipedia.org/wiki/Gérard_Laumon).
- [18] Académie des Sciences, Institut de France, <https://www.academie-sciences.fr/gerard-laumon>.
- [19] Mathematics Genealogy Project, <https://genealogy.math.ndsu.nodak.edu/id.php?id=56576>.



# Trò chuyện cùng Luis Ángel Caffarelli, chủ nhân giải thưởng Abel 2023<sup>(1)</sup>

Bjørn Ian Dundas<sup>(2)</sup> và Christian F. Skau<sup>(3)</sup>

**Bjørn Ian Dundas/Christian F. Skau:** Xin chào giáo sư Caffarelli, trước hết chúng tôi muốn chúc mừng ông đã được trao Giải thưởng Abel năm 2023 vì “những đóng góp mang tính khởi nguồn trong lý thuyết về tính chính quy của phương trình đạo hàm riêng phi tuyến, bao gồm các bài toán biên tự do và phương trình Monge–Ampère.” Ông sẽ nhận được giải thưởng vào ngày mai từ Đức vua Na Uy.

Trước khi nói về sự nghiệp toán học, chúng ta hãy dành một chút thời gian để nói về tuổi thơ của giáo sư. Ông sinh ra ở Buenos Aires vào năm 1948. Thưa giáo sư, ông có ấn tượng gì về thời thơ ấu của mình?

**Luis Ángel Caffarelli:** Gia đình tôi sống ở một khu trung lưu ở Buenos Aires. Khi còn nhỏ, tôi thường chơi bóng đá với các bạn đồng trang lứa. Một trò chơi khác mà chúng tôi cũng rất thích đó là ném bóng và xem ai là người ném được sát vách tường hoặc sát vạch kẻ nhất.

Thủa nhỏ, nơi tôi sống có thể được coi là một khu phố của dân kỹ thuật. Cha tôi là một kỹ sư cơ khí làm việc trong ngành vận tải biển, lắp ráp và sửa chữa tàu thuyền hàng hải ở vịnh Río de la Plata. Khi tôi 16 tuổi, tôi đã được cùng ông lắp ráp động cơ tàu thủy. Đây là một trong

những kỷ niệm ám áp nhất của thời thơ ấu.

Phải chăng chính cha ông là người đã truyền ngọn lửa đam mê cho ông?

Đúng vậy. Với tất cả tình yêu thương, cha đã khích lệ tôi theo đuổi những công việc nghiêm túc trong kỹ thuật và khoa học. Làm theo lời khuyên của cha, tôi sau đó đã được nhận vào một trường trung học nổi tiếng, Colegio Nacional de Buenos Aires, nằm trong Đại học Buenos Aires. Các thầy, cô ở đó đã truyền cảm hứng cho tôi về khoa học, đặc biệt là vật lý và toán học. Tôi tốt nghiệp trung học phổ thông năm 1966 và bắt đầu học tại Đại học Buenos Aires vào tháng 3 năm 1967, chuyên ngành vật lý và toán học. Tôi tốt nghiệp đại học vào năm 1970.

Khi còn là sinh viên, tôi đã chịu ảnh hưởng sâu sắc và nhận được nguồn cảm hứng lớn lao từ Luis Santaló [1911–2001], Manuel Balanzat [1912–1994] và Carlos Segovia [1937–2007]. Santaló và Balanzat đều là những nhà toán học người Tây Ban Nha chuyển đến Argentina do hậu quả củaội chiến Tây Ban Nha. Santaló đã có những đóng góp quan trọng cho hình học tích phân và xác suất hình học, còn Balanzat nghiên cứu giải tích hàm. Họ cùng với

<sup>(1)</sup>Dịch với sự cho phép của European Mathematical Society Magazine và các tác giả. Bản gốc: Bjørn Ian Dundas, Christian F. Skau, *Abel interview 2023: Luis Ángel Caffarelli*, Eur. Math. Soc. Mag. **129** (2023), pp. 20–24.

<sup>(2)</sup>Bjørn Ian Dundas là giáo sư toán học tại Đại học Bergen, Na Uy. Nghiên cứu của ông nằm trong  $K$ -lý thuyết đại số, lý thuyết đồng luân và tô pô đại số. Email: dundas@math.uib.no

<sup>(3)</sup>Christian F. Skau là giáo sư toán danh dự tại Đại học Khoa học và Công nghệ Na Uy (NTNU) ở Trondheim. Nghiên cứu của ông là về  $C^*$ -đại số và sự giao thoa với các hệ động lực hình thức. Ông cũng rất quan tâm đến các công trình toán học của Abel và đã xuất bản một số bài báo về chủ đề này. Email: csk@math.ntnu.no

Rey Pastor [1888–1962] và Pi Calleja [1907– 1986] đã xây dựng chương trình đại học và sau đại học xuất sắc về toán tại Đại học Buenos Aires, từ đó tạo ra một nhóm rất mạnh về giải tích, hình học và hình học đại số.

Segovia, sau này trở thành chuyên gia trong giải tích điều hòa, là một sinh viên tốt nghiệp xuất sắc tại Đại học Buenos Aires, người đã nhận bằng Tiến sĩ tại Đại học Chicago năm 1967 dưới sự hướng dẫn của Alberto Calderón [1920–1988].

Dù gần tôi về mặt tuổi tác hơn so với Santaló và Balanar, nhưng Segovia là người luôn hỗ trợ tôi mạnh mẽ nhất.

Sau đó, Ông bắt đầu làm nghiên cứu sinh, nhận bằng Tiến sĩ toán học vào năm 1972. Thầy hướng dẫn của ông là Calixto Calderón [1939–], em cùng cha khác mẹ của nhà toán học rất nổi tiếng là Alberto Calderón mà ông đã nhắc đến. Ông có thể cho biết đôi chút về nghiên cứu của mình trong khoảng thời gian đó?



GS. Luis Caffarelli trình bày bài giảng tại Đại học Oslo, 2023.

Calixto Calderón định hướng tôi tới lý thuyết các hàm đặc biệt, một chủ đề sôi động gắn với việc tìm ra cách biểu diễn tối ưu cho nghiệm của phương trình đạo hàm riêng (PTĐHR) bằng các phương pháp giải tích, bao gồm các biểu diễn chuỗi của các dạng đa thức đặc biệt. Điểm mấu chốt trong luận án của tôi liên quan đến kỹ thuật về tính khả tổng Abel, thật thú vị khi giờ đây tôi lại nhận được

chính giải thưởng mang tên ông. Một trong những bài báo tôi đã xuất bản cùng với Calixto Calderón vào năm 1974, dựa vào luận án của tôi, có tựa đề: “On Abel summability of multiple Jacobi series”.

Chúng tôi có thể đưa ra một nhận xét mà ít nhất là có liên quan đến điều này không? Năm 2007, ông đã xuất bản, cùng với học trò của mình là Luis Silvestre [1977–], bài

báo có sức ảnh hưởng to lớn trong chuyên ngành “An extension problem related to the fractional Laplacian”. Trong lịch sử, Abel [1802–1829] là người đầu tiên đưa ra đạo hàm và tích phân phân thứ (ông ấy đã sử dụng nó một cách hiệu quả để giải bài toán đẳng thời suy rộng (Generalized isochrone problem) – một bài toán có từ thời Christiaan Huygens [1629–1695]). Theo một nghĩa nào đó, một số khái niệm quan trọng trong nghiên cứu của ông có thể bắt nguồn từ Abel.

Đúng rồi, đó là lí do tại sao chúng ta đang ở đây!

### **Khởi đầu sự nghiệp và những nghiên cứu về bài toán biên tự do**

Sau khi nhận bằng Tiến sĩ tại Đại học Buenos Aires, ông đến Đại học Minnesota nghiên cứu sau tiến sĩ vào tháng 1 năm 1973. Điều gì khiến ông chọn đến đó?

Trước đó, Khoa Toán, Đại học Buenos Aires và Khoa Toán, Đại học Minnesota đã thiết lập mối quan hệ hợp tác, nên việc tôi đến đó làm nghiên cứu sau tiến sĩ là điều hoàn toàn tự nhiên. Ngoài ra, thầy hướng dẫn của tôi, Calixto Calderón, đã đến đó vào năm 1972 và được đề nghị một vị trí giáo sư. Tuy nhiên, ông rời Đại học Minnesota vào mùa thu năm 1974 để đảm nhận một vị trí chính thức tại Đại học Illinois ở Chicago.

Tôi nhận thấy các đồng nghiệp của mình ở Khoa Toán, Trường Đại học Minnesota rất thân thiện, cực kì tốt bụng và tận tâm, họ đã dạy tôi rất nhiều điều. Họ chia sẻ ý tưởng và hướng dẫn tôi khi tôi bắt đầu chương trình nghiên cứu sau tiến sĩ.

Có ai đó đặc biệt quan trọng đối với nghiên cứu toán của ông trong khoảng thời gian tại Đại học Minnesota không?

Vâng, khi đến đó tôi đã gặp Hans Lewy [1904–1988]. Ông là một nhà toán học

xuất sắc nghiên cứu các PTDHR phi tuyến và các mặt cực tiểu. Tôi đã tham dự các bài giảng về giải tích điều hòa của Lewy. Ông ấy đưa cho tôi hai bài toán mà tôi đã giải thành công trong mấy tháng sau đó. Sự hỗ trợ của ông ấy là yếu tố ảnh hưởng mạnh mẽ đến con đường sự nghiệp của tôi sau này. Một trong những bài toán mà Lewy đề xuất là bài toán có vật cản (obstacle problem), một dạng bài toán biên tự do điển hình.



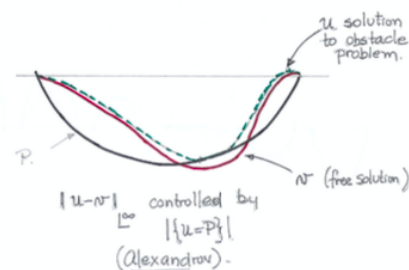
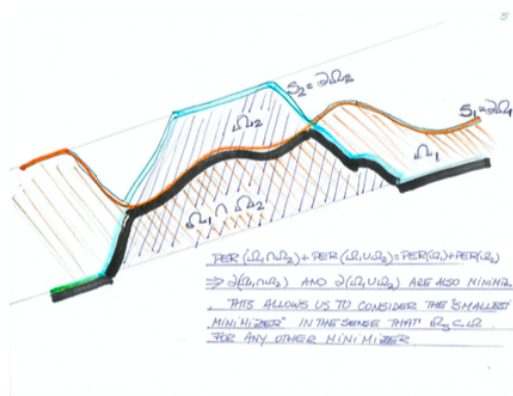
Luis Caffarelli, người đoạt giải Abel năm 2023.

Năm 1977, ông đã xuất bản một bài báo có tựa đề “The regularity of free boundaries in higher dimensions” trên tạp chí uy tín *Acta Mathematica*. Với bài báo này, ông đã làm thế giới toán học ngạc nhiên bởi một công trình mà sự mới lạ và xuất sắc của nó là nền tảng cho sự nổi tiếng của ông sau này. Ông là nhà toán học đầu tiên thực sự hiểu được bài toán biên tự do trong trường hợp nhiều chiều. Hơn nữa, những phương pháp mà ông đưa ra cực kì hiệu quả và vẫn đang được sử dụng trong việc giải quyết nhiều bài toán khác. Ông có thể bình luận thêm về những sự kiện này?

Băng tan là một ví dụ của bài toán biên tự do, biên tự do là bề mặt giữa băng và nước. Bề mặt thay đổi khi băng tan.

Một ví dụ khác về bài toán này là một quả bóng bay bên trong một chiếc hộp (hoặc một giọt nước bên trong một hốc đá). Nếu quả bóng bay lơ lửng trong không khí mà không bị ràng buộc, thì hình dáng của nó ở mức xấp xỉ thứ nhất sẽ được xác định bởi phương trình độ cong trung bình – một phương trình đạo hàm riêng phi tuyến nhẹ mà chúng ta có

thể suy ra từ thực tế rằng quả bóng luôn tự điều chỉnh để đạt mức năng lượng thấp nhất. Nếu bị buộc phải nằm bên trong chiếc hộp, bề mặt của quả bóng sẽ thay đổi khác nhau tùy thuộc vào việc nó có ép vào thành hộp hay không, từ đó sinh ra các PTĐHR phi tuyến mạnh. Đường cong tách các miền khác nhau được gọi là biên tự do. Trong chủ đề này, tôi đã nghiên cứu khá sâu các vấn đề toán học liên quan đến bề mặt tiếp xúc chất lỏng-rắn, dòng bọt khí, dòng khí và chất lỏng trong môi trường xốp.



Hình minh họa do GS. Luis Caffarelli cung cấp.

## Phương trình Navier–Stokes và Monge–Ampère

Đầu những năm 1960 chứng kiến sự phát triển vượt bậc trong lý thuyết PTĐHR tuyến tính, ở đó một PTĐHR được gọi là tuyến tính nếu nó tuyến tính đối với ẩn hàm và các đạo hàm của nó. Rất nhiều người đã có những đóng góp cho sự phát triển này, nhưng kết quả sâu sắc và ý nghĩa nhất là của Lars Hörmander [1931–2012], trích lời tuyên dương khi ông nhận Huy chương Fields năm 1962. Bên cạnh đó, một số kết quả mà Alberto Calderón thu được vào những năm 1950 cũng rất quan trọng cho sự phát triển này.

Đối với PTĐHR tuyến tính, chúng ta có cả một lý thuyết tổng quát. Điều này trái

ngược với trường hợp của các PTĐHR phi tuyến, trong đó người ta thường thừa nhận rằng không có lý thuyết “chung” cho lớp các phương trình này. PTĐHR, và đặc biệt là PTĐHR phi tuyến, có mặt khắp nơi trong vật lý, từ lực hấp dẫn đến động lực học chất lỏng. Chúng cũng rất quan trọng trong toán học và được sử dụng để giải các bài toán như giả thuyết Poincaré và giả thuyết Calabi.

Có nhiều PTĐHR nền tảng trong vật lý, chẳng hạn như các phương trình Einstein của thuyết tương đối rộng và các phương trình Navier–Stokes, là các phương trình tựa tuyến tính (có nghĩa là phương trình tuyến tính đối với các đạo hàm bậc cao nhất, có thể không tuyến tính đối với các



đạo hàm bậc thấp hơn). Mặt khác, phương trình Monge–Ampère, xuất hiện trong hình học vi phân, là phi tuyến hoàn toàn, nghĩa là phương trình phi tuyến đối với đạo hàm cấp cao nhất.

Trong số rất nhiều câu hỏi mở, câu hỏi về sự tồn tại và tính chính qui của nghiệm của các phương trình Navier–Stokes, được mệnh danh là một trong những bài toán thiên niên kỷ của Quỹ Clay năm 2000. Ông có thể cho biết về sự liên quan giữa nghiên cứu của ông với phương trình Navier–Stokes.

Năm 1980, Louis Nirenberg [1926–2020], người nhận Giải Abel năm 2015 (cùng với John Nash, Jr. [1928–2015]) đã mời tôi làm giáo sư chính thức tại Viện Courant ở ĐH New York. Điều này đã làm thay đổi rất lớn sự nghiệp nghiên cứu của tôi. Nirenberg hướng tôi đến động lực học chất lỏng và các phương trình phi tuyến hoàn toàn. Một ngày đi dạo ở khu phố người Hoa với Nirenberg và Robert Kohn [1953–], chúng tôi quyết định cùng nhau viết một bài báo về các phương trình Navier–Stokes, một tập hợp các PTĐHR phi tuyến mô hình hóa sự thay đổi của dòng chất lỏng nhớt không nén được (trong trường hợp ba chiều).

Kết quả của sự hợp tác “CKN” này là bài báo năm 1982 có tựa đề “Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier–Stokes equations”. Chúng tôi đã chỉ ra rằng các dòng có các điểm kỳ dị không quá một tập hợp có độ đo một chiều bằng không (tức là tập các điểm kỳ dị nhỏ hơn một đường cong) trong không gian và thời gian. Đây là kết quả gần như tối ưu theo các ví dụ được đưa ra bởi Vladimir Scheffer [1950–2023].

Phát biểu một cách kỹ thuật hơn cho định lý CKN là như sau: Giả sử  $u$  là nghiệm yếu của phương trình

Navier–Stokes cho chất lỏng không nén được, thỏa mãn điều kiện tăng trưởng thích hợp. (Để đi đến ý tưởng về một nghiệm yếu của PTĐHR, người ta nhân phương trình với hàm thử, sau đó tích phân từng phần (một cách hình thức) để chuyển các đạo hàm sang hàm thử.) Kết quả nói rằng  $u$  là chính qui bên ngoài một tập đóng có độ đo Hausdorff parabolic một chiều bằng không.

Đây là định lý tốt nhất về tính chính qui được biết đến cho các phương trình Navier–Stokes. Có vẻ như rất khó để thiết lập các kết quả tốt hơn và để có thể làm điều đó, chúng ta cần những ý tưởng mới và rất sâu sắc.

Nirenberg đã nói rằng ông có một “trực giác tuyệt vời”, điều này khiến các cộng sự khó theo kịp: “Bằng cách nào đó, anh ấy nhìn thấy ngay những thứ mà người khác không nhìn thấy, nhưng anh ấy gặp khó khăn khi giải thích chúng,” Nirenberg nói.

Tiếp theo, chúng ta chuyển sang phương trình Monge–Ampère, trong đó ông đã có những đóng góp quan trọng, đặc biệt là về tính chính qui của chúng, tức là tính khả vi cấp cao. Phương trình Monge–Ampère là một PTĐHR phi tuyến hoàn toàn thường xuất hiện trong hình học vi phân; chẳng hạn, nó được sử dụng để xây dựng các mặt có độ cong Gauss cho trước. Ông bắt đầu nghiên cứu phương trình Monge–Ampère và tổng quát hơn là các phương trình phi tuyến hoàn toàn như thế nào?

Khi ở Courant, tôi đã nghe buổi nói chuyện của Pierre-Louis Lions [1956–], người đã để lại một bài toán mở trong chủ đề này. Tôi có thể giải được bài toán này bằng cách sử dụng các ý tưởng từ lý thuyết biên tự do, từ đó tìm ra mối liên hệ giữa hai mảng khác nhau của PTĐHR. Sau đó, tôi bắt đầu làm việc với Nirenberg và Joel Spruck [1946–], và chúng tôi đã xuất bản một số bài báo về phương

trình Monge–Ampère, trong đó có một bài báo về phương trình Monge–Ampère phức (cùng với Kohn).

Những bài báo này, được xuất bản giữa những năm 1984 và 1986, là một trong những cố gắng tiên phong trong việc phát triển một lý thuyết tổng quát về các phương trình elliptic cấp hai phi tuyến hoàn toàn cùng với lý thuyết chính qui mở rộng cho đến biên. Bài báo từ năm 1985 được xuất bản trên Acta Mathematica và có tựa đề “The Dirichlet problem for nonlinear second-order elliptic equations III. Functions of the eigenvalues of the Hessian” có sức ảnh hưởng lớn trong lĩnh vực giải tích hình học, vì nhiều PTĐHR hình học có thể áp dụng được phương pháp trong công trình đó.

Trong nhiều thập kỷ, ông đã viết nhiều bài báo (cùng với các đồng tác giả) mà trong tiêu đề có chứa cụm từ “phương trình Monge–Ampère”. Điều đặc biệt là các định lý về tính chính qui của ông từ những năm 1990 tạo ra một bước đột phá lớn trong nghiên cứu phương trình Monge–Ampère. Hơn nữa, dẫn lời tuyên dương giải Abel, ông “đã lấp đầy khoảng trống trong nghiên cứu các điểm kì dị bằng cách chứng minh rằng các ví dụ đã biết về nghiệm kì dị là duy nhất”.

### Toán tử Laplace phân thứ

Bây giờ, chúng ta hãy chuyển sang một bài báo gần đây hơn của ông vào năm 2007 (đồng tác giả là Luis Silvestre), một bài báo mà chúng tôi đã đề cập ở trên và có tựa đề “An extension problem related to the fractional Laplacian”. Bài báo dài 15 trang nhưng có ảnh hưởng to lớn đến nhiều ngành hẹp của PTĐHR. Đây cũng là bài báo được trích dẫn nhiều nhất của ông, với hơn 1600 trích dẫn trên MathSciNet! Ông có thể kể đôi chút về bài báo này.

Không quá thiên về mặt kĩ thuật, tôi sẽ cố gắng giải thích ý chính cũng như một số kết quả của bài báo này. Toán tử Laplace là toán tử vi phân bậc hai

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Trên  $\mathbb{R}^n$ , toán tử Laplace phân thứ  $(-\Delta)^s$ , với  $s$  là số thực nằm trong  $(0, 1)$ , có lẽ được hiểu dễ dàng nhất thông qua phép biến đổi Fourier, ở đó đạo hàm tương ứng với phép nhân với chuẩn của biến số. Do đó, toán tử Laplace phân thứ thể hiện qua phép biến đổi Fourier bằng cách nhân với chuẩn của biến số với số mũ thích hợp. Một cách khác để định nghĩa toán tử Laplace phân thứ  $(-\Delta)^s$  là thông qua công thức

$$(-\Delta)^s f(x) = C_{n,s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x) - f(\xi)}{|x - \xi|^{n+2s}} d\xi,$$

ở đó  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  là một hàm và  $C_{n,s}$  là hằng số chuẩn hóa.

Ý tưởng chính của bài báo là chứng minh một kết quả liên kết bài toán không địa phương tương ứng với lũy thừa phân số của toán tử Laplace với bài toán elliptic suy biến địa phương.

Kết quả này cũng cho phép chúng ta chứng minh tính chính qui nghiệm của bài toán chứa toán tử Laplace phân thứ bằng cách khai thác các kĩ thuật địa phương thuần túy. Đặc biệt, chúng tôi chứng minh cả bất đẳng thức Harnack và bất đẳng thức Harnack trên biên.

### Phong cách làm việc, học trò và những nghiên cứu gần đây

Là một nhà toán học, ông có sức sáng tạo rất mạnh và vô cùng cởi mở. Ông đã xuất bản hơn 320 bài báo, là đồng tác giả với hơn 130 người và là người hướng dẫn của hơn 30 nghiên cứu sinh. Ông có bình luận gì về những điều này?

Trong nhiều năm, tôi đã có cơ hội làm việc tại các cơ sở giáo dục và nghiên cứu tuyệt vời, bắt đầu với Đại

học Buenos Aires, sau đó là Đại học Minnesota, Viện Courant (ĐH New York), Đại học Chicago, Viện Nghiên cứu Cao cấp, Princeton và trong 26 năm qua là Đại học Texas ở Austin.

Điều này đã cho tôi cơ hội kết bạn và cộng tác với các nhà khoa học xuất sắc trên khắp thế giới. Nó cũng mang đến nhiều cơ hội để hướng dẫn những bạn trẻ tài năng, những người đã tiếp thêm sinh lực cho nghiên cứu của tôi bởi những ý tưởng mới.

Tôi cũng nghiên cứu nhiều chủ đề khác nhau trong lĩnh vực PTĐHR rộng lớn. Có nhiều người đã thu được những kết quả tuyệt vời trong những chuyên ngành hẹp. Nhưng khoa học giống như một sự tiến hóa toàn cầu. Nó đòi hỏi sự trao đổi ý tưởng, nhìn mọi thứ từ những góc độ khác nhau, từ từ cải thiện những gì có thể.



Giáo sư Luis Caffarelli.

*Ông có vẻ thuộc nhóm giải toán hơn là nhóm xây dựng lý thuyết phải không?*

Đúng rồi. Nói chung, có hai nhóm các nhà toán học. Có những nhà toán học phát triển lý thuyết và có những người chủ yếu tìm lời giải cho các bài toán. Tôi thuộc nhóm thứ hai.

*Như ông đã nói với chúng tôi, ông đã dành 26 năm làm việc tại Đại học Texas ở*

*Austin. Vợ của ông, Irene Martínez Gamba, cũng là một nhà toán học, là giáo sư về khoa học và kỹ thuật tính toán ở cùng trường đại học. Ông đã hướng dẫn hơn 20 nghiên cứu sinh trong thời gian ở Đại học Texas. Vậy, ông có thể mô tả các hoạt động nghiên cứu của ông ở đó?*

Ở đó, các nghiên cứu của tôi đã phát triển một cách đáng kể do tôi có thêm các nghiên cứu sinh và nhiều người trong số họ vẫn còn hợp tác lâu dài với tôi. Trong số các chủ đề nghiên cứu cụ thể mà tôi đã thực hiện, tôi muốn đề cập đến ba chủ đề:

(i) Biên tự do trong việc nhận dạng các mặt Lipschitz.

(ii) Các bài toán về khuếch tán phân tử; một lý thuyết hoàn toàn mới mà tôi đã tập trung nghiên cứu trong thời gian dài.

(iii) Tôi tiếp tục nghiên cứu lớp phương trình Monge–Ampère phi tuyến hoàn toàn và lý thuyết chính qui tương ứng.

Tôi cũng muốn nhấn mạnh rằng, ở đó, tôi được trao đổi với một nhóm kỹ sư và các nhà khoa học khác. Tôi rất thích được thảo luận và trao đổi các ý tưởng với họ.

*Trước khi kết thúc cuộc phỏng vấn, chúng tôi cũng muốn biết một vài sở thích ngoài toán học của ông. Ông có những sở thích hay những quan tâm đặc biệt nào ngoài toán học không?*

Tôi thích nấu ăn, nhưng vợ tôi nấu ăn ngon hơn tôi. Tôi cũng thích chơi bóng đá nếu có thời gian. Tôi chơi piano. Sở thích của tôi thiên về nhạc cổ điển.

*Thay mặt Hội Toán học Na Uy, Hội Toán học Châu Âu, chúng tôi xin cảm ơn ông về cuộc phỏng vấn thú vị này.*

Cảm ơn các bạn rất nhiều.

**Người dịch:** Dương Anh Tuấn - Đại học Bách khoa Hà Nội

# Từ bài toán tổng các bình phương đến giả thuyết Milnor

(Phần 2/2)

Nguyễn Mạnh Linh<sup>(1)</sup>

## 5. MỘT SỐ BẤT BIẾN TRÊN CÁC DẠNG TOÀN PHƯƠNG

Như đã nói ở Mục 4<sup>(2)</sup>, phát biểu của giả thuyết Milnor cung cấp một họ các bất biến đầy đủ  $\{e_0, e_1, \dots\}$  cho phép phân biệt các dạng toàn phương (dị hướng). Ta bắt đầu xây dựng các bất biến từ vành Witt  $W(k)$ . Bất biến ngây thơ nhất chính là số chiều. Vì

$$\begin{aligned}\dim(q_1 + q_2) &= \dim(q_1) + \dim(q_2) \\ &\quad - 2w(q_1 \perp q_2), \\ \dim(q_1 \cdot q_2) &= \dim(q_1) \dim(q_2) \\ &\quad - 2w(q_1 \otimes q_2)\end{aligned}$$

nên ta thu được toàn cấu vành

$$W(k) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad q \mapsto \dim(V) \pmod{2}.$$

Hạt nhân  $I(k)$  của nó là idêan của  $W(k)$  gồm các dạng toàn phương dị hướng với số chiều chẵn, được gọi là *idêan cơ bản*. Vậy ta có đẳng cấu vành

$$e_0 : W(k)/I(k) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Bước tiếp theo là nghiên cứu idêan  $I(k)$ . Nhắc lại rằng  $\langle\langle a \rangle\rangle := \langle 1, -a \rangle$  với  $a \in k^\times$ . Vì

$$\langle a, b \rangle \perp \langle\langle b \rangle\rangle \simeq \langle\langle -a \rangle\rangle \perp H$$

nên nếu dạng toàn phương  $\langle a, b \rangle$  dị hướng thì nó bằng  $\langle\langle -a \rangle\rangle_{\text{an}} - \langle\langle b \rangle\rangle_{\text{an}}$  trong vành  $W(k)$ . Vậy idêan  $I(k)$  được sinh (như một nhóm abel) bởi phần dị hướng của các dạng Pfister cấp 1. Từ đó suy ra rằng, với mỗi  $n \geq 0$ , idêan  $I(k)^n$  cũng

được sinh bởi phần dị hướng của các dạng Pfister cấp  $n$ .

Bất biến thứ hai là biệt thức. Với mỗi dạng toàn phương đường chéo  $q = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ , biệt thức của nó là  $a_1 \cdots a_n \in k^\times$ . Vì  $q \simeq \langle \lambda_1^2 a_1, \dots, \lambda_n^2 a_n \rangle$  với mọi  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in k^\times$  nên giá trị  $\text{disc}(q) := a_1 \cdots a_n$  chỉ được định nghĩa tốt sai khác một bình phương trong  $k$ , nó được gọi là *biệt thức* của  $q$ . Ta nhận xét rằng  $\text{disc}$  không phải một đồng cấu nhóm  $W(k) \rightarrow k^\times/k^{\times 2}$ , trừ khi  $-1$  là một bình phương trong  $k$ . Để khắc phục điều này khi  $\dim(q)$  có số chiều chẵn (hay  $q \in I(k)$ ), ta sử dụng *biệt thức có dấu*, được định nghĩa là  $(-1)^{\frac{\dim(q)}{2}} \text{disc}(q)$ . Ta có đồng cấu nhóm

$$I(k) \rightarrow k^\times/k^{\times 2}, \quad q \mapsto (-1)^{\frac{\dim(q)}{2}} \text{disc}(q).$$

Biệt thức có dấu của một dạng Pfister  $\langle\langle a, b \rangle\rangle = \langle 1, -a, -b, ab \rangle$  (phần dị hướng của chúng sinh ra nhóm abel  $I(k)^2$ ) là một bình phương trong  $k^\times$ , nên ta thu được đồng cấu

$$e_1 : I(k)/I(k)^2 \rightarrow k^\times/k^{\times 2}.$$

Đây là một đẳng cấu, với đẳng cấu ngược cho bởi  $a \mapsto \langle\langle a \rangle\rangle_{\text{an}}$ . Thật vậy, với  $a, b \in k^\times$ , ta có

$$(1) \quad \langle\langle a \rangle\rangle \perp \langle\langle b \rangle\rangle \perp H \simeq \langle\langle a, b \rangle\rangle \perp \langle\langle ab \rangle\rangle,$$

$$\text{hay } \langle\langle a \rangle\rangle_{\text{an}} + \langle\langle b \rangle\rangle_{\text{an}} = \langle\langle ab \rangle\rangle_{\text{an}} \pmod{I(k)^2}.$$

Ta tiếp tục với việc nghiên cứu idêan  $I(k)^2$  và bắt đầu với các phần tử sinh của nó. Ở Mục 3, ta biết rằng dạng Pfister

<sup>(1)</sup>Institut de Mathématiques de Jussieu - Paris Rive Gauche, Pháp. Email: manh-linh.nguyen@imj-prg.fr

<sup>(2)</sup>Xem phần đầu của bài viết trên Thông tin Toán học tập 29 số 2 (2025), trang 17–24.



$\langle\langle a, b \rangle\rangle = \langle 1, -a, -b, ab \rangle$  chính là chuẩn thu gọn của đại số quaternion suy rộng  $\mathcal{H}_{a,b}$ . Bằng tính toán sơ cấp, ta có

**Mệnh đề 5.1.** Với  $a, b, a', b' \in k^\times$ , các đại số quaternion suy rộng  $\mathcal{H}_{a,b}$  và  $\mathcal{H}_{a',b'}$  đẳng cấu khi và chỉ khi các dạng toàn phương  $\langle\langle a, b \rangle\rangle$  và  $\langle\langle a', b' \rangle\rangle$  đẳng cự.

Như vậy, các dạng Pfister cấp 2 được phân loại bởi các đại số quaternion suy rộng. Tuy nhiên, một phần tử của  $I(k)^2$  là tổng của một số hữu hạn các dạng  $\langle\langle a, b \rangle\rangle_{\text{an}}$ , nên ta cần một phép toán trên các đại số quaternion suy rộng. Để làm điều này, ta cần ra khỏi thế giới của các đại số quaternion. Trước hết, nhắc lại rằng dạng Pfister  $\langle\langle a, b \rangle\rangle$  hoặc là hyperbolic (đẳng cự với  $H^{\perp 2} = \langle\langle 1, 1 \rangle\rangle$ ), hoặc là dị hướng. Trong trường hợp thứ nhất, theo Mệnh đề 5.1, ta có  $\mathcal{H}_{a,b} \cong \mathcal{H}_{1,1} \cong \mathcal{M}_2(k)$ . Trong trường hợp thứ hai, mọi phần tử  $x \in \mathcal{H}_{a,b} \setminus \{0\}$  đều thỏa mãn  $N(x) \neq 0$ , nên có nghịch đảo là  $\frac{\bar{x}}{N(x)}$ . Nói cách khác,  $\mathcal{H}_{a,b}$  là một đại số chia (không giao hoán).

Phép toán thích hợp trên các đại số quaternion mà ta muốn chính là tích tenxơ. Dù tích tenxơ của hai đại số chia không nhất thiết là một đại số chia, ta có (xem [5, Định lý 2.1.3 và Bổ đề 2.4.4]):

**Mệnh đề 5.2.** Nếu  $A$  và  $B$  là hai đại số chia thì tồn tại duy nhất đại số chia  $C$  (sai khác đẳng cấu) và số nguyên dương  $n$  sao cho  $A \otimes_k B \cong C \otimes_k \mathcal{M}_n(k)$ .

Ký hiệu bởi  $\text{Br}(k)$  tập hợp các đại số chia trên  $k$  sai khác đẳng cấu. Trên đó, ta định nghĩa phép toán  $+$  cho bởi  $A + B := C$ , với  $C$  là đại số chia xác định như trên. Khi đó  $\text{Br}(k)$  trở thành một nhóm abel, gọi là nhóm Brauer của trường  $k$ . Ta định nghĩa đồng cấu nhóm  $\text{cl} : I(k)^2 \rightarrow \text{Br}(k)$  bởi công thức  $\text{cl}(\langle\langle a, b \rangle\rangle_{\text{an}}) := [\mathcal{H}_{a,b}]$  trên các phần tử sinh, trong đó  $[\mathcal{H}_{a,b}] = \mathcal{H}_{a,b}$

nếu  $[\mathcal{H}_{a,b}]$  là một đại số chia và  $[\mathcal{H}_{a,b}] = 0$  nếu ngược lại. Nó được gọi là bất biến Clifford. Việc chứng minh rằng  $\text{cl}$  được định nghĩa tốt là một công việc nặng nhọc. Ta chỉ cần biết rằng nó chỉ phụ thuộc vào các tính chất cơ bản sau đây của các đại số quaternion.

**Mệnh đề 5.3.** Với  $a, b, c \in k^\times$ , ta có các kết quả sau.

- (1) (Song tuyến tính)  $[\mathcal{H}_{a,c}] + [\mathcal{H}_{b,c}] = [\mathcal{H}_{ab,c}]$  và  $[\mathcal{H}_{a,b}] + [\mathcal{H}_{a,c}] = [\mathcal{H}_{a,bc}]$ .
- (2) (Quan hệ Steinberg) Nếu  $a \in k \setminus \{0, 1\}$  thì  $[\mathcal{H}_{a,1-a}] = 0$ .
- (3) (Đặc số 2)  $2[\mathcal{H}_{a,b}] = 0$ .

Theo Mệnh đề 5.3, bất biến Clifford  $\text{cl}(q)$  của mọi dạng toàn phương  $q \in I(k)^2$  đều thuộc nhóm con 2-xoắn  $\text{Br}(k)[2]$  của  $\text{Br}(k)$ . Vậy ta có một đồng cấu nhóm

$$\text{cl} : I(k)^2 \rightarrow \text{Br}(k)[2].$$

Ngoài ra, với  $a, b, c \in k^\times$ , lấy tích tenxơ hai vế của (1) với  $\langle\langle c \rangle\rangle$ , ta thu được

$$\langle\langle a, b, c \rangle\rangle \perp \langle\langle ab, c \rangle\rangle \simeq \langle\langle a, c \rangle\rangle \perp \langle\langle b, c \rangle\rangle \perp H^{\perp 2},$$

Theo Mệnh đề 5.3, ta có  $\text{cl}(\langle\langle a, b, c \rangle\rangle_{\text{an}}) = [\mathcal{H}_{a,c}] + [\mathcal{H}_{b,c}] - [\mathcal{H}_{ab,c}] = 0$ . Vì  $I(k)^3$  được sinh bởi các dạng  $\langle\langle a, b, c \rangle\rangle_{\text{an}}$  nên  $\text{cl}$  cảm sinh một đồng cấu nhóm

$$e_2 : I(k)^2/I(k)^3 \rightarrow \text{Br}(k)[2].$$

Trong [10], Merkurjev đã chứng minh kết quả quan trọng nói rằng  $e_2$  là một đẳng cấu. Vậy, với  $n = 0, 1, 2$ , ta có các bất biến  $e_n$  định nghĩa trên  $I(k)^n/I(k)^{n+1}$  và giá trị lần lượt trong các nhóm  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,  $k^\times/k^{\times 2}$  và  $\text{Br}(k)[2]$ .

Một cách tự nhiên, bước tiếp theo là nghiên cứu nhóm  $I(k)^3$  (gồm các dạng toàn phương dị hướng, số chiều chẵn, có biệt thức có dấu bằng 1 và bất biến Clifford bằng 0). Năm 1975, Arason đã xây dựng thành công một bất biến trên

nhóm này và triệt tiêu trên các dạng Pfister cấp 4 (tức là một đồng cấu  $e_3$  từ  $I(k)^3/I(k)^4$ ), gọi là *bất biến Arason* [1]. Tuy nhiên, nhóm giá trị của  $e_3$  có mô tả phức tạp hơn các nhóm  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,  $k^\times/k^{\times 2}$  và  $\text{Br}(k)[2]$ . Ta sẽ quay lại vấn đề này ở Mục 6, nơi các bất biến  $e_n$  được xây dựng với mọi  $n \geq 0$ .

## 6. GIẢI THUYẾT MILNOR

Ta đưa ra một mô tả mới cho các nhóm  $I(k)^n/I(k)^{n+1}$  từ nhóm nhân  $k^\times$ . Chúng là các nhóm *K-lý thuyết Milnor modulo 2*, ký hiệu bởi  $K_n(k)/2$ . Ta bắt đầu với các trường hợp  $n = 0, 1, 2$  và liên hệ chúng với các bất biến  $e_0, e_1, e_2$  đã xây dựng ở các mục trước.

Với  $n = 0$ , nhóm  $K_0(k)/2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  là nhóm abel với phần tử sinh duy nhất (ký hiệu bởi  $\{1\}$ ) và quan hệ  $2\{1\} = 0$ . Với  $n = 1$ , nhóm  $K_1(k)/2 := k^\times/k^{\times 2}$  là nhóm abel trên các phần tử sinh  $\{a\}$  với  $a \in k^\times$ , và các quan hệ

$$\{a\} + \{b\} = \{ab\}, \quad 2\{a\} = 0$$

với mọi  $a, b \in k^\times$ . Với  $n = 2$ , ta định nghĩa nhóm  $K_2(k)/2$  bởi các tính chất đã phát biểu ở Mệnh đề 5.3, tức là nhóm abel trên các phần tử sinh  $\{a, b\}$  với  $a, b \in k^\times$  và các quan hệ

- (1) (Song tuyến tính)  $\{ab, c\} = \{a, c\} + \{b, c\}$  và  $\{a, bc\} = \{a, b\} + \{a, c\}$  với mọi  $a, b, c \in k^\times$ .
- (2) (Quan hệ Steinberg)  $\{a, 1 - a\} = 0$  với mọi  $a \in k \setminus \{0, 1\}$ .
- (3) (Đặc số 2)  $2\{a, b\} = 0$  với mọi  $a, b \in k^\times$ .

Việc định nghĩa bất biến Clifford  $cl : I(k)^2/I(k)^3 \rightarrow \text{Br}(k)$  hoàn toàn phụ thuộc vào ba quan hệ nói trên và không dùng bất kỳ tính chất nào khác của nhóm Brauer. Bằng cách tương tự, ta cũng định

nghĩa được một đồng cấu nhóm

$$I(k)^2/I(k)^3 \rightarrow K_2(k)/2, \\ \langle\langle a, b \rangle\rangle_{\text{an}} \mapsto \{a, b\}.$$

Đây là một đẳng cấu, với đẳng cấu ngược

$$\pi_2 : K_2(k)/2 \rightarrow I(k)^2/I(k)^3, \\ \pi_2(\{a, b\}) = \langle\langle a, b \rangle\rangle_{\text{an}} \pmod{I(k)^3}.$$

Từ đó, Milnor [12] thu được một phiên bản đơn giản của định lý của Merkurjev [10] khi thay nhóm  $\text{Br}(k)[2]$  bởi  $K_2(k)/2$ . Kết quả này là tiền đề để định nghĩa các nhóm *K-lý thuyết Milnor bậc cao*.

**Định nghĩa 6.1.** Với  $n \geq 0$ , ta định nghĩa nhóm *K-lý thuyết Milnor modulo 2 thứ  $n$* , ký hiệu bởi  $K_n(k)/2$ , là nhóm abel trên các phần tử sinh  $\{a_1, \dots, a_n\}$  với  $a_1, \dots, a_n \in k^\times$  và các quan hệ

- (1) (Đa tuyến tính)

$$\{a_1, \dots, a_i a'_i, \dots, a_n\} = \\ \{a_1, \dots, a_i, \dots, a_n\} + \{a_1, \dots, a'_i, \dots, a_n\} \\ \text{với mọi } i \in \{1, \dots, n\} \text{ và mọi } a_1, \dots, a_i, a'_i, \dots, a_n \in k^\times.$$

- (2) (Quan hệ Steinberg)  $\{a_1, \dots, a_n\} = 0$  với mọi  $a_1, \dots, a_n \in k^\times$  sao cho tồn tại các chỉ số  $1 \leq i < j \leq n$  mà  $a_i + a_j = 1$ .

- (3) (Đặc số 2)  $2\{a_1, \dots, a_n\} = 0$  với mọi  $a_1, \dots, a_n \in k^\times$ .

Ta có một đồng cấu nhóm như sau:

$$\pi_n : K_n(k)/2 \rightarrow I(k)^n/I(k)^{n+1}, \\ \{a_1, \dots, a_n\} \mapsto \langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle_{\text{an}} \pmod{I(k)^{n+1}}.$$

Milnor [12] đã phát biểu một giả thuyết quan trọng trong bài toán phân loại các dạng toàn phương.

**Giả thuyết 6.2** (Nửa đầu tiên của giả thuyết Milnor). Đồng cấu  $\pi_n$  nói trên là một đẳng cấu.

Giả thuyết 6.2 cho ta một mô tả của nhóm  $I(k)^n/I(k)^{n+1}$  như thương của tập hợp  $(k^\times)^n$  bởi các quan hệ đa tuyến tính, Steinberg và đặc số 2. Đồng cấu  $\pi_n$  cho phép ta phân biệt hai dạng Pfister cấp

$n$  modulo các dạng Pfister cấp  $n + 1$ . Giả thuyết này đã được chứng minh nhờ một loạt các công trình của Morel [13, 14], Kahn–Sujatha [7] và Orlov–Vishik–Voevodsky [16].



John Milnor. Ảnh: stonybrook.edu.

Trở lại với vấn đề xây dựng các bất biến  $e_n$  trên nhóm  $I(k)^n/I(k)^{n+1}$ . Việc xây dựng nhóm giá trị cho các bất biến này cần tới *đối đồng điều Galois*, một công cụ quan trọng trong đại số và lý thuyết số. Phần còn lại của bài viết yêu cầu một số kiến thức cơ bản về lý thuyết Galois.

Ta xét bao đóng đại số  $\bar{k}$  và nhóm Galois tuyệt đối  $G := \text{Gal}(\bar{k}/k)$  của  $k$ . Với mỗi  $n \geq 0$ , ta ký hiệu  $Z^n$  là tập hợp các ánh xạ  $f : G^n \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  thỏa mãn điều kiện *đối chu trình*

$$\begin{aligned} & f(g_1, \dots, g_n) + \\ & + \sum_{i=1}^n (-1)^i f(g_0, \dots, g_{i-1} \circ g_i, \dots, g_n) + \\ & + (-1)^{n+1} f(g_0, \dots, g_{n-1}) = 0 \end{aligned}$$

với mọi  $g_0, \dots, g_n \in G$ . Phép cộng trên  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  cho ta một cấu trúc nhóm abel trên  $Z^n$ , các phần tử của chúng được gọi là các  *$n$ -đối chu trình*. Với  $n \geq 1$ , ta nói  $f$  là một  *$n$ -đối biên* nếu nó có dạng

$$\begin{aligned} & f(g_1, \dots, g_n) = \\ & f'(g_2, \dots, g_n) + \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i f'(g_1, \dots, g_i \circ g_{i+1}, \dots, g_n) + \\ & + (-1)^n f'(g_1, \dots, g_{n-1}) \end{aligned}$$

với một ánh xạ  $f' : G^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  nào đó. Ký hiệu bởi  $B^n \subseteq Z^n$  nhóm các  *$n$ -đối biên* (quy ước  $B^0 := 0$ ). Ta gọi nhóm thương

$$H^n(k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) := Z^n/B^n$$

là *nhóm đối đồng điều Galois thứ  $n$  của  $k$  với hệ số trong  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$* . Định nghĩa trên khá

kỹ thuật và thực tế thì ta không cần phải nhớ chúng trong phần còn lại của bài viết.

Với  $n = 0$ , ta có  $G^0 = \{1\}$ , nên một phần tử của  $Z^0$  đơn giản là một phần tử  $x \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  (điều kiện đối chu trình luôn được thỏa mãn vì  $x - x = 0$ ). Vậy  $H^0(k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = Z^0 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

Với  $n = 1$  và  $f : G \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , điều kiện đối chu trình được cho bởi

$$f(h) - f(g \circ h) + f(g) = 0$$

với mọi  $g, h \in G$ , nghĩa là  $f$  là một đồng cấu nhóm. Ngoài ra, ta có  $B^1 = 0$  vì một ánh xạ  $f' : G^0 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  đơn giản là một phần tử  $y \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , và nó thỏa mãn  $y - y = 0$ . Do đó

$$H^1(k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = Z^1 = \text{Hom}(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

Ta có thể mô tả nhóm trên bằng nhóm nhân  $k^\times$  như sau. Với  $a \in k^\times$ , cố định một căn bậc hai  $\alpha \in \bar{k}^\times$  của  $a$ . Với mọi  $g \in \text{Gal}(\bar{k}/k)$ , ta có  $g(\alpha)^2 = g(\alpha^2) = g(a) = a$ , nên  $g(\alpha) \in \{\alpha, -\alpha\}$ . Ta đặt

$$(a)_g := \begin{cases} 0 & \text{nếu } g(\alpha) = \alpha, \\ 1 & \text{nếu } g(\alpha) = -\alpha \end{cases} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Nói cách khác  $(a)_g$  là phần tử ứng với  $\frac{g(\alpha)}{\alpha} \in \{1, -1\}$  qua đẳng cấu  $\{1, -1\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Hiển nhiên, giá trị  $(a)_g \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  không đổi khi ta chọn căn bậc hai còn lại của  $a$  (là  $-\alpha$ ) thay vì  $\alpha$ .

**Mệnh đề 6.3** (Lý thuyết Kummer). Ánh xạ

$$k^\times \rightarrow H^1(k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), \quad a \mapsto (a).$$

cảm sinh một đẳng cấu nhóm  $k^\times/k^{\times 2} \cong H^1(k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ .

Với  $n = 2$ , dù phức tạp hơn nhiều, ta chứng minh được rằng  $H^2(k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \text{Br}(k)[2]$  (xem [5, Hệ quả 4.4.9]). Như vậy, các nhóm đối đồng điều Galois bậc cao  $H^n(k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  chính là những tổng quát hóa của  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,  $k^\times/k^{\times 2}$  và  $\text{Br}(k)[2]$

mà ta cần tìm để định nghĩa các bất biến trên các nhóm  $I(k)^n/I(k)^{n+1}$ . Điều này cho phép ta liên hệ ba đối tượng với bản chất khác nhau là các dạng toàn phương,  $K$ -lý thuyết Milnor và đối đồng điều Galois. Khác với hai đối tượng đầu tiên, các nhóm đối đồng điều Galois linh hoạt hơn rất nhiều. Thứ nhất, ta có thể áp dụng hàng loạt kỹ thuật của đại số đồng điều. Thứ hai, ta chỉ cần làm việc trực tiếp với nhóm Galois  $G$  và hoàn toàn không cần quan tâm đến các tính chất số học nội tại của trường  $k$ .

Với  $a_1, \dots, a_n \in k^\times$ , ta định nghĩa tích cup  $(a_1) \cup \dots \cup (a_n) \in H^n(k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  là phần tử được biểu diễn bởi đối chu trình  $G^n \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  cho bởi công thức

$$(g_1, \dots, g_n) \mapsto (a_1)_g \dots (a_n)_g$$

(ở đây, ta dùng phép nhân trên vành  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ). Tích cup có tính đa tuyến tính và hiển nhiên  $2\alpha = 0$  với mọi  $\alpha \in H^n(k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ .

Với  $a, b \in k^\times$ , đẳng cấu  $H^2(k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \text{Br}(k)[2]$  gửi phần tử  $(a) \cup (b) \in H^2(k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  vào lớp  $[\mathcal{H}_{a,b}]$  của đại số quaternion suy rộng  $\mathcal{H}_{a,b}$ . Nói riêng, ta có quan hệ Steinberg  $(a) \cup (1 - a) = 0$ , với mọi  $a \in k \setminus \{0, 1\}$ . Từ đây, ta thu được đẳng cấu nhóm

$$r_n : K_n(k)/2 \rightarrow H^n(k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}),$$

$$\{a_1, \dots, a_n\} \mapsto (a_1) \cup \dots \cup (a_n).$$

**Giả thuyết 6.4** (Nửa sau của giả thuyết Milnor). Đồng cấu  $r_n$  ở trên là một đẳng cấu.

Giả thuyết này đã được chứng minh hoàn chỉnh bởi Voevodsky [21], dựa trên những tiến bộ trước đó của Merkurjev [10], Rost [20] và Merkurjev–Suslin [11] cùng sự phát triển của lý thuyết đồng luân motivic bởi chính Voevodsky. Ý tưởng của lý thuyết này về cơ bản là xây dựng các phiên bản hình học đại

số của những đối tượng cùng tên trong tôpô đại số. Voevodsky đã được trao huy chương Fields vì lý thuyết đồng luân motivic. Năm 2008, Voevodsky tiếp tục chứng minh được giả thuyết Bloch–Kato [22], đó là tổng quát hóa của Giả thuyết

6.4 khi ta thay các nhóm  $K_n(k)/2$  bởi các nhóm  $K$ -lý thuyết Milnor modulo  $\ell$  (với  $\ell$  là số nguyên dương tùy ý không chia hết cho đặc số của  $k$ ), cũng như các nhóm đối đồng điều Galois  $H^n$  có hệ số trong  $\mu_\ell^{\otimes n}$ .



Vladimir Voevodsky. Ảnh: ethz.ch

**Chú ý.** Khi  $k$  là một trường với đặc số 2, ta cần làm việc với các đối tượng tổng quát hơn các dạng toàn phương, đó là các *dạng song tuyến tính đối xứng* (lúc này, ta không thể “chia 2” trong  $k$ , nên phương pháp Gauß không đảm bảo được rằng mọi dạng song tuyến tính đối xứng đều đến từ một dạng toàn phương), đồng thời ta cần định nghĩa lại các nhóm  $K$ -lý thuyết Milnor modulo 2 thông qua các môđun vi phân lôgarit. Trong bối cảnh này, giả thuyết Milor đã được chứng minh bởi Kato (xem [8]).

Để thấy được sức mạnh của khẳng định trong Giả thuyết 6.4, ta xét hệ quả hiển nhiên sau đây. Vì nhóm  $K_n(k)/2$  được sinh bởi các ký hiệu  $\{a_1, \dots, a_n\}$ , ta suy ra rằng mọi phần tử của  $H^n(k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  đều

là tổng của một số hữu hạn tích cup. Theo hiểu biết của tác giả thì chưa có cách nào để chứng minh kết quả này mà không dùng giả thuyết Milnor.

Khi kết hợp các Giả thuyết 6.2 và 6.4, ta thu được một đẳng cấu nhóm

$$e_n = r_n \circ \pi_n^{-1} : I(k)^n / I(k)^{n+1} \xrightarrow{\cong} H^n(k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

Đó chính là tổng quát hóa cần tìm của các khái niệm số chiều modulo 2 (với  $n = 0$ ), biệt thức có dấu (với  $n = 1$ ), bất biến Clifford (với  $n = 2$ ) và bất biến Arason (với  $n = 3$ ). Họ bất biến  $\{e_0, e_1, \dots\}$  cho phép phân biệt hai dạng toàn phương dị hướng. Thật vậy, nếu  $q$  và  $q'$  là hai dạng toàn phương dị hướng sao cho  $e_n(q) = e_n(q')$  với mọi  $n \geq 0$  thì  $q - q' \in I(k)^{n+1}$



với mọi  $n$ . Mặt khác, từ “định lý chính” (Hauptsatz) của Arason–Pfister [2], ta có

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} I(k)^n = 0,$$

suy ra  $q \simeq q'$ .

#### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Jon Kristinn Arason. *Cohomologische Invarianten quadratischer Formen*. Journal of Algebra, **36**(3):448–491, 1975.
- [2] Jon Kristinn Arason and Albrecht Pfister. *Beweis des Krullschen Durchschnittsatzes für den Witttring*. Inventiones Mathematicae, **12**:173–176, 1971.
- [3] Emil Artin, *Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg **5** (1), 100–115, 1927.
- [4] Carl Ferdinand Degen, *Adumbratio demonstrationis theorematis arithmeticae maxime generalis*, Mémoires de l’Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg, **8**, 207–219, 1922.
- [5] Philippe Gille and Tamas Szamuely, *Central Simple Algebras and Galois Cohomology*, volume **101** of Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, New York, 2006.
- [6] Adolf Hurwitz, *Über die Komposition der quadratischen Formen*, Mathematische Annalen **88**, 1–25, 1922.
- [7] Bruno Kahn and Ramdorai Sujatha, *Motivic cohomology and unramified cohomology of quadrics*. Journal of the European Mathematical Society, **2**(2):145–177, 2000.
- [8] Kazuya Kato, *Symmetric bilinear forms, quadratic forms and Milnor K-theory in characteristic two*. Inventiones mathematicae, **66**:493–510, 1982.
- [9] Tsit Yuen Lam, *Introduction to Quadratic Forms over Fields*, Graduate Studies in Mathematics **67**, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2005.
- [10] Alexander Merkurjev, *On the norm residue symbol of degree 2*. Soviet Mathematics - Doklady, **24**(3):546–551, 1981. translated from Doklady Akademii Nauk SSSR, **261**(3):542–547, 1981.
- [11] Alexander Merkurjev and Andrei Suslin, *The norm residue homomorphism of degree three*. Mathematics of the USSR-Izvestiya, **36**(2):349–367, 1991. translated from Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya, **36**(2):339–356, 1990.
- [12] John Willard Milnor. *Algebraic K-theory and quadratic forms*. Inventiones Mathematicae, **9**(4):318–344, 1970.
- [13] Fabien Morel, *Suite spectrale d’Adams et invariants cohomologiques des formes quadratiques*. Comptes Rendus de l’Académie des Sciences - Series I - Mathématiques, **328**(11):963–968, 1999.
- [14] Fabien Morel, *Milnor’s conjecture on quadratic forms and mod 2 motivic complexes*. Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, **114**:63–101, 2006.
- [15] Théodore Samuel Motzkin, *The arithmetic-geometric inequality*, Inequalities (Proc. Sympos. Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1965), 1967, 205–224, Academic Press, New York.
- [16] Dmitri Olegovich Orlov, Alexander Vishik, and Vladimir Voevodsky. *An exact sequence for  $K_*^M/2$  with applications to quadratic forms*. Annals of Mathematics (2), **165**(1):1–13, 2007.
- [17] Albrecht Pfister, *Multiplikative quadratische Formen*, Archiv der Mathematik **16**, 363–370, 1965.
- [18] Albrecht Pfister, *Zur Darstellung von  $-1$  als Summe von Quadraten in einem Körper*, Journal of the London Mathematical Society **40**, 159–165, 1965.
- [19] Albrecht Pfister, *Zur Darstellung definiter Funktionen als Summe von Quadraten*, Inventiones Mathematicae **4**, 229–237, 1967.
- [20] Markus Rost, *Hilbert 90 for K3 for degree-two extensions*, 1986. preprint, 14 pages, available at <https://www.math.uni-bielefeld.de/~rost/data/hilb90.pdf>.
- [21] Vladimir Voevodsky. *Motivic cohomology with  $\mathbb{Z}/2$ -coefficients*. Publications Mathématiques de l’IHÉS, **98**:59–104, 2003.
- [22] Vladimir Voevodsky. *On motivic cohomology with  $\mathbb{Z}/l$ -coefficients*. Annals of Mathematics, **174**(1):401–438, 2011.
- [23] Don Zagier, *A one-sentence proof that every prime  $p \equiv 1 \pmod{4}$  is a sum of two squares*, The American Mathematical Monthly **97** (2), 144, 1990.

# Công việc của tôi vốn là giảng bài trước lớp. Giờ tôi đi đối phó với gian lận bằng ChatGPT<sup>(1)</sup>

Troy Jollimore

Tôi từng tin rằng đại học là cộng đồng của những người truy tìm chân lý. Niềm tin đó đang dần trở nên lỗi thời.

Chiếc hộp thần kỳ. Đó là một mô-típ văn chương quen thuộc. Thỉnh cầu Chiếc hộp thần kỳ một điều ước, bất kỳ điều ước gì – và trong nháy mắt, điều ước thành sự thực. Câu chuyện Chiếc hộp thần kỳ có nhiều phiên bản khác nhau trong các câu chuyện cổ tích và thần thoại, trong các câu chuyện đùa, trong nhiều tập phim *Twilight Zone*<sup>(2)</sup>. Vị thần đèn. Cái bàn chân khi<sup>(3)</sup>. Boong toàn ảnh trên phi thuyền không gian *Enterprise* trong *Star Trek*. Thông điệp của câu chuyện, trong không ít trường hợp, là: Hãy dè chừng những điều bạn mơ ước. Khi bạn cho ta những điều ta tưởng chừng mình mong muốn, Chiếc hộp thần kỳ cảnh báo mỗi nguy hiểm tàng khi mơ ước trở thành sự thật, nhắc nhở chúng ta rằng khao khát thường tốt hơn mãn nguyện.

Gần đây, một loại Hộp thần kỳ mới đã tìm đường đến thế giới thực. Tôi đã dạy triết học, chủ yếu là đạo đức học, tại một đại học ở California trong nhiều năm qua. Tôi dạy cả những lớp học trực tiếp lẫn những lớp học trực tuyến, và phương pháp đánh giá môn học chủ yếu của tôi là

chấm bài luận sinh viên. Nhưng như hầu hết chúng ta đều biết, các công cụ trí tuệ nhân tạo (TTNT) như ChatGPT và Google Gemini cho phép tạo ra những bài luận sinh viên, chỉ sau vài cái lướt đầu ngón tay.

Yêu cầu một trong các công cụ giao tiếp này một bài luận về tác phẩm *Cộng hòa* của Plato<sup>(4)</sup> hay phương diện đạo đức của việc mua bán thận – hay đơn giản là một câu hỏi trong bài thi – và, chỉ vài giây sau, hiện ra một bài viết trong mắt nhiều người không khác gì kết quả lao động trí óc của con người. Dễ như ăn kẹo. Nếu giảng viên của bạn không biết cách lần ra manh mối, hay nếu công cụ TTNT bạn đang dùng đủ sắc bén, bạn có thể thuyết phục thầy mình bạn đã nắm vững hoàn toàn môn học mà khỏi cần tốn một chút công sức học tập nào.

Những bài luận sinh viên không mấy tinh tế tạo ra bởi TTNT có thể phát hiện dễ dàng – miễn là, để nhắc lại, bạn biết cách lần ra manh mối. Cả về bộ cục lẫn hành văn, các bài luận tạo ra bởi TTNT đều hao hao như sau. Hết sức trung tính, không mảy may rung động. Bất kể vấn đề được hỏi là gì, các bài luận này cũng tiếp cận vấn đề đó một cách đặc biệt lồi lõm,

<sup>(1)</sup>Nguyên bản: *I used to teach students. Now I catch ChatGPT cheats*, đăng trên mạng The Walrus, ngày 05/03/2025. Đường dẫn đến bài viết nguyên bản: <https://thewalrus.ca/i-used-to-teach-students-now-i-catch-chatgpt-cheats>.

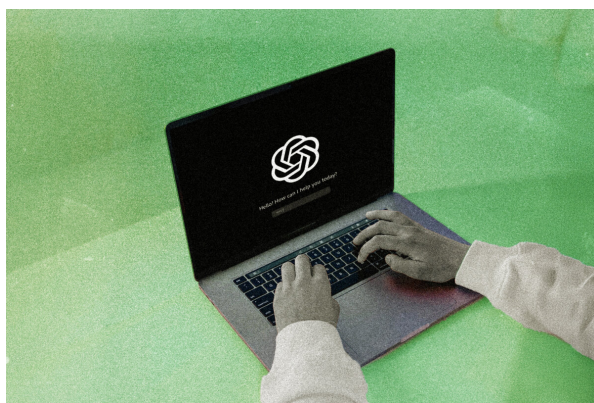
<sup>(2)</sup>Dựa theo Wikipedia: *Twilight Zone* (tạm dịch: *Vùng chạng vạng*) là một chương trình truyền hình dài kỳ rất ăn khách của Mỹ từ những năm 1959, do Rod Serling sản xuất. Các cước chú trong bài đều là của người dịch.

<sup>(3)</sup>Ví dụ xem truyện ngắn kinh dị đặc sắc “*The Monkey’s Paw*” (*Cái bàn chân khi*) của tác giả W. W. Jacobs tại <https://americanliterature.com/author/w-w-jacobs/short-story/the-monkeys-paw>.

<sup>(4)</sup>Cuốn sách đã được dịch giả Đỗ Khánh Hoan dịch ra tiếng Việt, Công ty Alphabooks và NXB Thế Giới xuất bản năm 2023.

xuất phát từ việc phát triển một khuôn khổ thống nhất, rồi đặt cạnh nhau và giải quyết xung đột giữa các luận điểm tranh chấp để đưa đến một đánh giá chung cuộc. Đôi khi các bài viết này còn cung cấp những câu trích dẫn cùng với số trang tài liệu, mà không hiếm khi, không tìm đâu thấy trên đời. Những bài luận này, xin nhắc lại, là những trò gian lận dễ phát hiện nhất. Tôi không mấy hoài nghi rằng có những cách gian lận tinh tế hơn, và tôi đã từng bị qua mặt.

Dựa trên số lượng bài viết chắc chắn tạo ra bởi TTNT trong học kỳ vừa rồi, có thể nói rất nhiều sinh viên đang đam mê món sáng chế thời thượng này. Cũng rõ ràng là sự đam mê đó không mấy sút giảm bởi, chẳng hạn, một quy định cấm sử dụng TTNT ghi rõ trong đề cương môn học. Cũng không có mấy tác động khi nhắc đi nhắc lại quy định cấm đó, và khẩn thiết đề nghị rằng các bạn sinh viên, hãy chỉ nộp những gì là sản phẩm lao động của mình.



Nguồn ảnh: Mart Productions,  
Pexels/iStock/The Walrus

Giảng viên đại học ở Bắc Mỹ phải làm quen với những lực lượng đối kháng. Xã hội chúng ta đã luôn thể hiện rõ khuynh hướng phản trí thức. (Trong quá khứ, khuynh hướng phản trí thức có lẽ thể hiện rõ hơn ở Hoa Kỳ so với ở Canada; tôi không chắc điều đó còn đúng đến mức nào, nếu nó vẫn còn đúng). Một quan niệm phổ biến là khôn ngoan lọc lõi, hay thứ tinh ranh đường phố, là loại trí tuệ đáng kể hơn cả. Những ai đề cao lý thuyết, nghiên cứu, và học thuật thường được xem như những kẻ lạc loài bị đẩy trong tháp ngà với năng lực chuyên môn hầu hết, nếu không phải hoàn toàn, là giả mạo.

Đấu tranh chống lại thái độ nghi kỵ đó là phần lớn nhiệm vụ của giáo dục.

Cách tốt nhất để thuyết phục một người về ý nghĩa của giáo dục là mang giáo dục đến cho họ; đây là một loại giá trị không thể đứng từ xa nhận định được. Luôn có những sinh viên giàu thiện chí học tập nhưng cảm thấy một sự phản kháng tự động với bất cứ nỗ lực giúp đỡ họ học tập nào. Họ cần bị lôi kéo, nắm tay chỉ việc, ở một mức nhất định. Nhưng trong quá trình hoàn thành các bài luận được giao, một số người trong họ bắt đầu hình thành một cảm nhận. Những sinh viên này bắt đầu hiểu ra rằng tư duy tốt, với sự trang bị thông tin đầy đủ, khác xa tư duy tồi hay tư duy dựa trên sự thiên cận, phiến diện.

Thời điểm khi bạn nhận ra sức mạnh của tư duy mạch lạc, là một bước ngoặt.

Vấn đề với TTNT tạo sinh (generative) là nó cắt đứt toàn bộ con đường dẫn đến tư duy mạch lạc. Không thể không nghi ngờ rằng rất nhiều sinh viên chỉ thèm khát một điều: đi qua thời đại học không suy suyển, không khó nhọc. Từng từng nguyên si trong lễ tốt nghiệp và mãi mãi về sau, hết như ở ngày đầu đặt chân đến giảng đường. Như thể chưa từng có gì xảy ra.

Tôi từng tin rằng bản thân mình và sinh viên là những người đồng hành, cùng dần bước trên con đường truy tầm tri thức. Niềm tin đó đang dần trở nên lỗi thời từ vài học kỳ vừa qua. Và nguyên nhân không chỉ là số lượng choáng ngợp các bài luận dường như được TTNT sản sinh – những bài viết không cho thấy người sinh viên thực sự tập trung trong lúc nghe giảng, từng làm một bài tập về nhà nào, hay thậm chí nắm được một khái niệm nào từ khóa học.

Còn những nguyên nhân khác nữa. Phải kể đến những sinh viên tuyên bố: *Em đã tự viết bài luận, em chỉ dùng TTNT để chỉnh trang và mài dũa bài luận đôi chút.* Hay: *Em chỉ nhờ TTNT trợ giúp nghiên cứu tài liệu.* (Họ ngày càng đông, chính vì những lý do này mà tôi đã quy định không được sử dụng nghiên cứu bên ngoài trong việc viết các bài luận đó. Đương nhiên, cảm đoán có cái giá của nó. Và tôi ghét việc ngăn cản những sinh viên thực lòng muốn đi sâu hơn vào những đề tài của họ.) Chính những sinh viên nói những lời phản kháng như trên là những người không trả lời nổi những câu hỏi sơ đẳng nhất về chủ đề đang bàn hay về bài luận họ cam đoan rằng mình là tác giả. Cũng [chính họ] là những người muốn giảng viên rút lại điểm 0 để họ không mất học bổng. (Tôi muốn bảo họ rằng: *Chẳng phải học bổng đó phải dành cho ChatGPT sao?*)

Cũng chính những sinh viên đó, chính họ, là người nhìn bạn với ánh mắt đầy kinh ngạc. Việc sử dụng TTNT dường như đã trở nên tự nhiên với nhiều người trong họ, đã có vẻ như một điều tất yếu và một khía cạnh được thừa nhận của phong cảnh giáo dục, đến mức mọi điều cảm đoán đều có vẻ phi lý với họ. *Chẳng nhẽ giảng viên chúng ta không hiểu sinh viên ngày nay sẽ có thể, và sẽ được kỳ vọng phải dùng TTNT khi tham gia thị trường lao động? Viết lách không còn là điều người ta phải thực hiện để kiếm được việc làm.*

Một số sinh viên đã nói với tôi những điều tương tự. Vì lý do đó, họ lập luận tiếp, buộc họ viết bài ở trường đại học là việc vô nghĩa. Ánh mắt kinh ngạc đó không biến mất – thậm chí còn mãnh liệt hơn – khi tôi đáp lại: *Thế này nhé, kể cả nếu điều em vừa nói là đúng, em cũng phải hiểu rằng tôi không đánh đồng giáo dục với đào tạo nghề.*

*Ý thầy là gì? chắc họ sẽ hỏi tiếp.*

Và tôi nói rằng: *Tôi không quá bận tâm đến công việc tương lai của em. Tôi muốn chuẩn bị cho em để sống giữa đời.*

Hóa ra nếu có điều gì phi lý hơn việc sinh viên sau này có thể phải viết lách trong lúc làm việc, thì điều đó là việc họ có thể phải viết, hoặc muốn viết, trong một giai đoạn nào đó của cuộc đời *không phải* lúc hành nghề. Hoặc, để nói rộng ra, [một điều phi lý với nhiều sinh viên] là việc giá trị của giáo dục không phải nằm ở việc khiến cho người ta nhận được lương cao hơn, mà ở việc, nó cho người ta tiếp cận với một cuộc đời đáng sống hơn, theo một cách thực chất.

Sinh viên của tôi được nhào nặn ra từ một văn hóa đã từ lâu thờ giá trị của việc suy nghĩ và viết cho chính mình – một văn hóa ngày càng tin nhiệm sức mạnh của máy móc trong việc nghĩ

và viết thay cho con người. Vậy nên, khi đối mặt với nhiệm vụ viết bài luận, những sinh viên này thẳng thừng khước từ nhiệm vụ đó. Họ xem những giảng viên đặt ra các quy định cấm đoán TTNT như những kẻ lạc thời, phê tích của một thời đại tiền-ChatGPT, một thời đại quá vắng.

Một hệ quả của việc sử dụng TTNT tràn lan là, trong các lớp học trực tuyến, tôi không còn biết chắc được sinh viên của mình đang học được gì. Tôi không có cách nào xác định được những khái niệm nào nằm trong khả năng tiếp cận của họ, những khái niệm nào khó nắm bắt. Và vậy nên, tôi không sao tìm ra cách điều chỉnh bài giảng của mình để giúp đỡ sinh viên. Tôi cần đầu tư thời gian vào khái niệm nào? Phần nào tôi có thể lướt nhanh qua? Hãy tưởng tượng bạn là một bác sĩ điều trị cho một bệnh nhân mà bạn không được phép khám. Tình trạng của tôi tựa như thế.

Dĩ nhiên, tôi có thể làm như không biết và giả điếc khi chấm bài, dù xác suất bài viết trước mặt tôi được đầu óc con người nghĩ ra có thấp đến đâu. Tôi có thể nói, như nhiều đồng nghiệp, rằng tôi tin tưởng vào sinh viên, và thà tin tưởng và đôi lúc nhầm lẫn còn hơn là nghi kỵ và luôn đúng. Tôi thông cảm với tất cả những người từng nói với tôi: *Việc của anh không phải là khiến người ta chính trực hơn. Cứ để những kẻ trí trá gian lận đi. Về lâu về dài, những kẻ trí trá chỉ làm hại bản thân họ, và tước mất của bản thân hành trang giáo dục đích thực họ có thể nhận được (và chính là hành trang giáo dục lấy đi một số tiền không nhỏ từ họ hoặc cha mẹ họ).*

Đó là những ý tưởng hay ho, cuộc đời có lẽ sẽ dễ chịu hơn nhiều nếu như tôi có thể cho phép mình nuốt trôi những ý tưởng đó. Nhưng tôi không thể. (Tôi là

giáo sư triết học chuyên ngành đạo đức học, để nhắc lại cho rõ.) Một lý do là, dù quả thực những người gian lận đang sa vào con đường gian dối phản giáo dục, không thể nói rằng chỉ có họ là người bị hại. Không thể phủ nhận được thực tế một phần trung tâm trong công việc của giảng viên là quyết định xem ai đỗ và ai trượt. Một số các sinh viên của tôi vẫn tự tay viết bài luận. Họ vẫn đọc sách. Họ muốn học. (Và ngoài ra có những người lười đọc, lười học, nhưng đủ chính trực để tuân thủ quy định.) Các bài tập tôi giao không dễ để hoàn thành, tài liệu tôi giao cho sinh viên đọc không dễ hiểu; môn triết là vậy. Nhưng vẫn có những sinh viên thực sự lao động. Họ đầu tư nỗ lực thực sự, và tôi trân trọng và khâm phục nỗ lực của các bạn đó.

Sẽ là sai lầm nghiêm trọng nếu đối xử với sinh viên trung thực và sinh viên gian dối theo cùng một cách, nếu buộc những sinh viên trung thực phải cạnh tranh bình đẳng về nghề nghiệp, học bổng, đầu vào làm nghiên cứu sinh với những người "kiếm được" điểm bằng những bài luận không phải của mình.

Dĩ nhiên, nếu những hành vi gian lận như thế tiếp tục lan rộng, việc không tránh khỏi là tấm bằng cử nhân sẽ mất giá và có lẽ còn không đem lại bất cứ lợi thế nào. Nhưng một kết cục như thế không thể là niềm an ủi cho những sinh viên lao động miệt mài vì tấm bằng tốt nghiệp, những người muốn tấm bằng cử nhân của họ có một giá trị và ý nghĩa nào đó.

Vấn đề là không có biện pháp nào trong tầm tay tôi không có những nhược điểm nghiêm trọng. Tôi có thể, ví dụ, yêu cầu sinh viên hoàn thành bài viết trên lớp. Theo cách này, tôi sẽ biết được chắc chắn ai cũng tự viết bài của mình. (Đương nhiên, với giả thiết, là sinh viên làm bài



trên giấy.) Theo kinh nghiệm của tôi, có một áp lực không nhỏ buộc giảng viên không được phụ thuộc vào các bài viết trên lớp. Có những quan ngại rằng những bài luận viết trực tiếp trên lớp tạo lợi thế cho những người tư duy nhanh, làm việc tốt dưới áp lực, và sử dụng thuần thục bút và mực. Với tôi, những quan ngại này có tính phiến diện; cuối cùng, những bài viết giao về nhà cũng lại tạo lợi thế cho một nhóm các sinh viên khác. Tôi thừa nhận là ý kiến đó có lý của nó: phần nào đó là bất công nếu chỉ cho điểm dựa trên bài viết trên lớp. Nhưng sự bất công này không là gì khi so sánh với sự bất công lớn hơn khi một số sinh viên phải lao động để có bài viết trong khi một số khác nộp lại thành tích nhờ vả một Chiếc hộp thần kỳ.

Viết bài trên lớp không bao giờ sánh ngang được về mức độ tập trung bền bỉ đòi hỏi để hoàn thành một bài viết được nghiền ngẫm kỹ càng và gọt giũa cẩn thận trong thời gian dài. Được giao những kế hoạch dài hạn như vậy khuyến khích sinh viên suy nghĩ ở mức độ cao hơn và huy động rất ráo hơn năng lực trí tuệ của họ. Các bài viết như vậy dạy họ rằng bài viết tốt là thành quả của lao động, chứ không phải kết quả của cảm hứng nhất thời. Và nó chứng minh cho sinh viên thấy họ có khả năng viết ra những dòng đáng tự hào. Hơn nữa, hạn chế các bài viết của sinh viên trong bối cảnh lớp học bỏ qua thực tế là khả năng thấu hiểu và suy nghĩ của sinh viên hầu như luôn được phản ánh chính xác hơn qua những câu chữ được họ dành thời gian cân nhắc, viết ra, và chỉnh sửa so với những chữ vụt ra khi họ đối mặt với một bài thi.

Tôi đã nói đi nói lại những điều này với sinh viên, để giải thích tại sao, phần lớn điểm của họ – trong một số trường hợp, tất cả điểm của họ – đều dựa trên những

bài tập viết luận dài hơi. Những bài tập như vậy là công cụ giáo dục mạnh mẽ nhất tôi có, đặc biệt là những bài tập được chia làm nhiều chặng: một bản nháp đầu tiên với nhận xét từ giảng viên, theo sau bởi một bản chỉnh sửa được nhận xét, vân vân. Giả thiết rằng người sinh viên có đầu tư công sức, bài luận luôn tốt lên sau quá trình như vậy.

Nhưng điều quan trọng hơn là chính *người sinh viên* đó sẽ tiến bộ. Cuối cùng, tôi không thực sự cần các bài luận. Tôi không thiếu tài liệu để đọc. Các bài luận tôi giao là phương tiện dẫn đến một mục đích, và mục đích ấy là biến đổi tác giả của chúng thành một người có học. Loại bài tập viết luận này chính là phương tiện tốt nhất để dẫn đến kết quả rất đáng kỳ vọng kia.

Nhưng dĩ nhiên, con đường ấy chỉ dẫn đến đích nếu sinh viên tự viết lấy bài luận.

Còn con đường nào khác không? Tôi có thể tiếp tục giao các bài luận như vậy trong khi giành một lượng lớn thời gian sẫm soi các bài nộp, hy vọng phát giác được càng nhiều càng tốt các bài viết do TTNT sản sinh. Tôi có thể sửa đổi các tiêu đề bài luận để khiến chúng kháng cự lại TTNT tốt hơn. Tôi có thể chọn giao những bài đọc không mấy quen thuộc với các công cụ TTNT. Tôi có thể, tóm lại, thay đổi cách dạy.

Những nỗ lực này có thể buộc một số sinh viên từ bỏ gian lận và hạn chế bớt tác hại của gian lận. Nhưng khi các công cụ TTNT ngày càng trở nên tinh vi – và các công cụ này quả đang tiến bộ nhanh – các phương pháp trên sẽ ngày càng bớt hiệu lực. Chính ý tưởng về các bài luận kháng cự lại TTNT có thể sớm trở thành một phạm trù rỗng. Hơn nữa, những chiến lược vừa nêu làm suy giảm chất lượng của thứ giáo dục tôi có thể mang lại. Chính

sửa đề bài các bài luận của bạn để gây khó dễ cho các công cụ TTNT thường có nghĩa là không được phép đặt ra những loại câu hỏi mà bạn muốn sinh viên của mình trả lời, và không thể yêu cầu sinh viên làm loại công việc từ đó họ có thể học hỏi được nhiều nhất – chính loại công việc giúp phát triển năng lực nghĩ và viết.

Theo thời gian, tôi nhận thấy mình ngày càng mất nhiều thời gian, năng lượng, và các nguồn lực dành cho giảng dạy vào việc đối đầu với thử thách do TTNT gây ra. Tôi thực sự dạy ngày càng ít và xử lý các sự vụ ngày càng nhiều. Đôi khi tôi cố nhớ lại lần cuối cùng mình thực sự trông mong được bước vào lớp học là khi nào. Lần đó cũng lâu rồi.

Một trong các khóa tôi dạy là về đạo đức học y tế (health ethics). Nhiều sinh viên tham gia khóa học này muốn có sự nghiệp trong ngành y dược, theo cách này hay cách khác. Những người thành đạt có thể trở thành y tá, bác sĩ, dược sĩ, hay chuyên viên dược điều trị cấp cứu. Dù đi theo con đường nào, những người này chắc chắn đều sẽ đối mặt với những nan đề đạo đức – đôi khi khá nhức nhối.

Bạn sẽ làm gì khi một bệnh nhân yêu cầu phác đồ điều trị không được các thiết chế y tế chấp nhận? Hay khi bệnh nhân từ chối một phác đồ điều trị chắc chắn cần cho họ? Có thể những yêu cầu của người bệnh đến từ thông tin tôi trên mạng. Có thể họ đơn giản là nhầm lẫn, đang bị rối trí, và không đủ khả năng ra quyết định ở thời điểm hiện tại. Nhưng chính xác thế nào là đủ khả năng ra quyết định, và làm thế nào để nhận biết khi nào một ai đó không có đủ khả năng như vậy? Biết đâu sự kháng cự của người bệnh đến từ những xác tín tôn giáo của họ; vậy phải làm sao? Hay phải làm gì khi một người bệnh hay khách hàng yêu cầu một điều gì đó mâu thuẫn với những tín niệm

tôn giáo của đội ngũ nhân viên của bệnh viện? Ta phải ưu tiên cho giá trị nào trong những tình huống này, và trong những trường hợp có mâu thuẫn và bất đồng khác?

Những nan đề đạo đức các nhân viên chăm sóc sức khỏe gặp phải không xuất hiện rành rọt như một bài thi viết luận. Nó sẽ không phải bất cứ cái gì bạn google ra được. Ngay cả nếu bạn có thời gian để đưa song đề này cho một công cụ TTNT, công cụ đó cũng sẽ không giúp bạn tìm ra được đâu là những câu hỏi cần đặt ra và trả lời. Và trong đời thực, chính việc tìm ra những câu hỏi đó thường là việc khó nhất.

Một người chưa hấp thụ, và thuộc nằm lòng, một lượng đáng kể những nhận thức đạo đức học trước khi bị đặt vào những tình huống vừa kể hầu như chắc chắn không thể phản ứng tốt, hoặc thậm chí là phản ứng ở mức tối thiểu chấp nhận được. Ta cần có khả năng nhìn vào một tình huống đời thực và nắm bắt được đâu là điểm trung tâm và cốt yếu, để tưởng tượng ra rất nhiều kết cục khả dĩ và nhận định xem ai và cái gì đang gặp nguy hiểm – những mối đe dọa và nguy cơ thường ẩn giấu dưới bề mặt của những gì ta quan sát.

Và có những hậu quả nghiêm trọng có thể chờ phía trước. Phản ứng tồi trong một tình huống đạo lý phức tạp bạn không được chuẩn bị trước có thể ám ảnh bạn suốt một phần đời lâu dài. Không phải là phóng đại nếu nói rằng trong những nghề nghiệp về sức khỏe, những tình huống như vậy có thể, theo đúng nghĩa đen, là lựa chọn giữa sống và chết.

Tôi không dám huênh hoang rằng mình có thể, sau một học kỳ, chuẩn bị đầy đủ cho sinh viên để đương đầu với những tình huống [đạo lý phức tạp] như vậy. Cuối cùng, chẳng ai có bao giờ được

chuẩn bị tốt nhất có thể. Nhưng tôi có thể giúp sinh viên của mình tiến gần hơn đến sự chuẩn bị – miễn là họ tận tâm và thực sự làm việc. Tôi có thể chỉ ra và giúp họ khám phá những ví dụ của suy nghĩ đạo đức đúng đắn trong khi cung cấp cho họ một bộ khung lý thuyết và khái niệm để giải nghĩa những tình huống phức tạp. Bằng những con đường này, người học có thể tiến bộ trong việc nhận ra những vấn đề cốt yếu nhất, và tiến bộ trong việc diễn giải những vấn đề này theo những cách tinh tế hơn – những cách diễn giải nhiều khả năng đưa đến một kết quả tốt hơn, đến một quyết định giúp họ thanh thản.

Những sinh viên không muốn trải qua bước nói trên, những người dùng TTNT để tránh phải hấp thụ hoặc thậm chí là tiếp xúc với những ý tưởng đạo đức đó, đang tự làm mình què quặt. Bằng con đường gian dối đó, họ có nguy cơ gây ra những tác hại nghiêm trọng, không chỉ cho bản thân họ mà cả cho những bệnh nhân, khách hàng, đồng nghiệp tương lai – và bất cứ ai, mà những hành vi lầm lỗi và những quyết định thiếu kinh nghiệm của họ có thể tác động tới.

Nhưng hãy cứ vờ xem như điều sau đây là đúng: những sinh viên gian lận chỉ làm hại chính bản thân mình. Dù đương nhiên tôi rất giận những kẻ cố tình dối trá, thực tế là tôi cũng quan tâm và có phần cảm thông với họ. Tôi không muốn họ bỏ lỡ cơ hội được giáo dục, ngay cả nếu nguyên nhân là lựa chọn tôi từ phía họ.

Đây là một cái vòng luẩn quẩn<sup>(5)</sup>. Làm sao ta có thể kỳ vọng sinh viên đưa ra những lựa chọn tốt, về việc học tập hay bất cứ chuyện gì khác, nếu họ chưa được trang bị những công cụ để suy nghĩ có phê phán? Làm sao ta có thể kỳ vọng sinh viên nắm bắt được ý nghĩa của giáo dục

nếu những nhà giáo chúng ta chưa khởi động việc tiêu trừ tác hại tích lũy lâu dài lên nhận thức và tinh thần gây ra bởi một xã hội xem đến trường như là phương tiện để đạt đến cái đích là lương bổng, có lẽ cả danh vọng xã hội, nhưng không gì khác? Hay tệ hơn nữa, xem giáo dục như hoàn toàn vô giá trị, chỉ ngang với một loại mèo mực về thần thái, một màn kịch công phu?

Giống như mọi người, cuộc đời tôi có thể đã đi theo rất nhiều ngã rẽ khác. Trên con đường đã qua, tôi may mắn chọn đi sâu vào một lĩnh vực mình yêu mến – triết học, và theo đuổi triết học đã cho phép tôi hưởng thụ những giá trị của thực học. Do vậy tôi đủ khả năng để ghi nhận và trân trọng sự khác biệt về chất giáo dục có thể đem lại cho cuộc đời mỗi người. Sự rộng lớn của thế giới được khai mở bởi giáo dục và đồng thời niềm khao khát khám phá thế giới thâm thấu từ giáo dục. Ý thức tìm bối cảnh mà giáo dục mang lại, cho phép bạn nhìn những sự kiện trong cuộc đời riêng, hay các sự kiện của bất cứ khoảnh khắc lịch sử nào bạn phải đối mặt, trong một bối cảnh rộng lớn hơn nhiều, thay vì thúc thủ nhìn chúng từ góc nhìn phiến diện vô tri, như thể những sự kiện đó xuất hiện không có tiền lệ và như từ trên trời rơi xuống.

Thực tế là, tôi muốn sinh viên của mình, không trừ một ai, có trải nghiệm đó, được sống một cuộc đời như vậy. Tôi không muốn họ bỏ lỡ cả cuộc đời vì bị lừa gạt. Tôi không muốn như vậy, ngay cả khi những sinh viên đó đang tự lừa gạt bản thân. Chẳng Chiếp hộp thần kỳ nào đáng để làm như vậy.

**Người dịch:** Nguyễn Đăng Hợp, Viện Toán học, Viện Hàn lâm KHCN Việt Nam.

<sup>(5)</sup>Nguyên bản: *Catch-22*, tức là một tình huống mà lối thoát duy nhất bị chính bối cảnh hoặc đặc tính quy định tình huống đó loại trừ.

# Hội nghị quốc tế về Đại số giao hoán 2025

Sáng ngày 21/7/2025, Hội nghị quốc tế về Đại số giao hoán do Viện Nghiên cứu cao cấp về Toán và chính thức khai mạc, thu hút hơn 130 đại biểu, bao gồm các nhà khoa học quốc tế, báo cáo viên, nghiên cứu sinh và sinh viên đến từ nhiều quốc gia như Hoa Kỳ, Nhật Bản, Ấn Độ, Trung Quốc, Hàn Quốc, Ba Lan, Đức, Romania, Việt Nam, v.v. Hội nghị kéo dài từ ngày 21 đến 25 tháng 7 năm 2025 tại Viện Nghiên cứu Cao cấp về Toán, đã diễn ra thành công tốt đẹp.

Hội nghị được tổ chức để giúp các nhà nghiên cứu trẻ trong cộng đồng toán học tại Việt Nam được gặp gỡ, giao lưu và học hỏi từ các chuyên gia hàng đầu thế giới. Bên cạnh đó, hội nghị nhằm tưởng nhớ giáo sư Jürgen Herzog (1941-2024), người đã có những đóng góp to lớn cho đại số giao hoán cũng như các lĩnh vực liên quan mật thiết như Tổ hợp và Đại số đồng điều, trong suốt nửa thế kỷ qua.



Ảnh chụp nhóm của Hội nghị quốc tế về Đại số giao hoán 2025 tại VNCCT. Ảnh: VIASM

Phát biểu khai mạc, PGS. Đoàn Trung Cường, phó Viện trưởng Viện Toán học, Viện HL KHCN Việt Nam, đã nhắc đến những đóng góp to lớn của GS. Jürgen Herzog cho ngành đại số giao hoán. Ông

cho rằng việc tôn vinh sự nghiệp của GS. Herzog vừa là một nghĩa cử đẹp của bạn bè, đồng nghiệp của ông và vừa là cơ hội tuyệt vời để các nhà nghiên cứu thảo luận và cộng tác nghiên cứu.

Trong khuôn khổ hội nghị, 33 báo cáo chuyên môn đã được trình bày bởi các học giả hàng đầu như GS. Giulio Caviglia (ĐH Purdue), GS. Marc Chardin (Sorbonne), GS. Steven Cutkosky (Đại học Missouri), GS. David Eisenbud (MSRI, Hoa Kỳ, báo cáo online), GS. Srikanth Iyengar (Đại học Utah), GS. Claudia Polini (Đại học Notre Dame), GS. Dumitru Stamate (ĐH Bucharest), GS. Jugal Verma (IIT Gandhinagar), GS. Kei-ichi Watanabe (ĐH Nihon và ĐH Meiji), cùng nhiều diễn giả đến từ các viện nghiên cứu và đại học uy tín quốc tế.

Tại hội nghị, GS. Winfried Bruns (Đại học Osnabrück, CHLB Đức), người cùng chấp bút cuốn sách nổi tiếng “Cohen–Macaulay rings” với Jürgen Herzog đã giới thiệu một cái nhìn tổng quan về cuộc đời và sự nghiệp của GS. Herzog. Theo Winfried Bruns, các chủ đề chính trong sự nghiệp của Jürgen Herzog bao gồm: mô-đun chính tắc, tính hữu hạn của kiểu biểu diễn Cohen–Macaulay, giải tự do thuần túy (pure), tính chất tiệm cận của idêan (công trình với Steven Cutkosky và Ngô Việt Trung), idêan tuyến tính từng phần, đại số giao hoán tổ hợp (các công trình Herzog viết chung với người đồng nghiệp tri kỷ Takayuki Hibi), và vành Golod (công trình với Craig Huneke).

GS. Bernd Ulrich và GS. David Eisenbud mô tả những kết quả mới rất đáng ngạc nhiên về giải tự do vô hạn: cấu trúc xoắn của trường thặng dư của vành Golod, tính ổn định của các idêan định thức con của các ma trận vi phân trong giải tự do tối thiểu. Các kết quả này nằm trong các nghiên cứu gần đây của một nhóm tác giả, trong đó có Đoàn Trung Cường và Hai Long Dao (Đào Hải Long). Hướng nghiên cứu về cấu trúc xoắn của trường thặng dư và tính ổn định của các idêan định thức con của các ma trận vi

phân tỏ ra là một hướng nghiên cứu hứa hẹn nhiều kết quả bất ngờ.

GS. Giulio Caviglia trình bày những kết quả đáng ngạc nhiên liên quan đến những vấn đề rất cổ điển của đại số giao hoán: tìm các chặn trên đều cho số chiều không gian các dạng toàn phương chứa trong một idêan nguyên tố với độ cao  $h$  cho trước. “Chặn trên đều” ở đây có nghĩa là chặn chỉ phụ thuộc vào  $h$ , mà không phụ thuộc vào số biến của vành đa thức cơ sở. Trong hướng nghiên cứu cổ điển này, cùng với De Stefani, Caviglia đã thu được những chặn tối ưu đáng kinh ngạc: ví dụ, không gian các dạng toàn phương chứa trong một idêan nguyên tố độ cao  $h$  có chiều không vượt quá  $h^2$ .

Cũng khai thác một chủ đề cổ điển được khởi đầu bởi Herzog và Hibi, GS. Đào Hải Long trình bày những kết quả cấu trúc đẹp đẽ về các idêan tuyến tính từng phần, thu được bằng cách phối hợp nhiều tiếp cận (có vẻ ngoài) rất khác nhau về các idêan này.



GS. Đào Hải Long (ĐH Kansas) báo cáo tại hội nghị. Ảnh: VIASM

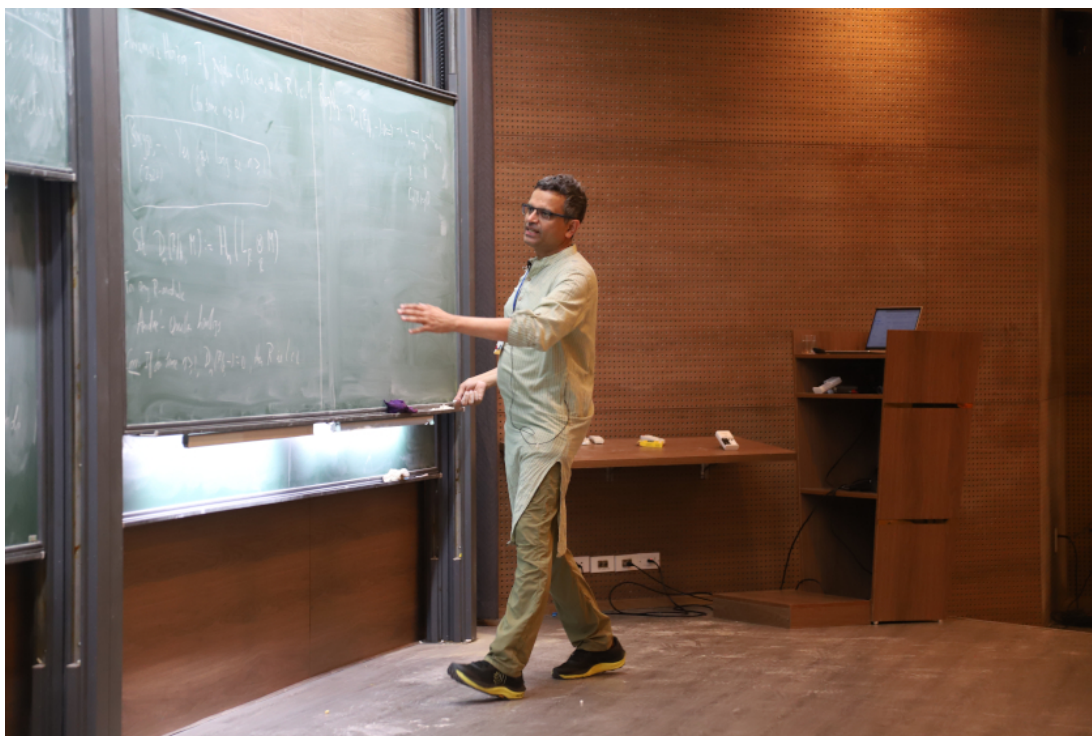
GS. Hà Huy Tài và GS. Srikanth Iyengar trình bày những nghiên cứu mới về những bài toán do Jürgen Herzog và cộng sự đặt ra. GS. Tài thảo luận về chỉ số chính quy tiệm cận của họ các lũy thừa thường và lũy thừa hình thức, hay tổng quát hơn là họ phân bậc các idêan. Nghiên cứu về chỉ số chính quy của các họ



phân bậc như vậy là một hướng nghiên cứu có truyền thống và có những thành tựu hứa hẹn tại Việt Nam.

GS. Srikanth Iyengar trình bày giả thuyết Herzog về đặc trưng của giao đầy

đủ địa phương thông qua đồng điều của phức đối tiếp xúc. Bài giảng súc tích và lôi cuốn của ông kết thúc với những kết quả khẳng định một phần tính đúng đắn của giả thuyết Herzog.



GS. Srikanth Iyengar (ĐH Utah) báo cáo tại hội nghị. Ảnh: VIASM

Ngoài các phiên báo cáo chuyên sâu, hội thảo còn có phiên poster dành cho các nhà nghiên cứu trẻ. Phiên thảo luận này thu hút 44 tác giả tham gia, trong đó có các nhà khoa học của Ấn Độ, Nhật Bản,

Trung Quốc, Thổ Nhĩ Kỳ, Tây Ban Nha, Hoa Kỳ, Việt Nam, v.v. Các poster có nội dung đa dạng, thể hiện sức phát triển của đại số giao hoán trên nhiều hướng nghiên cứu và tại nhiều quốc gia.

### Tin tức hội viên và hoạt động toán học

#### **\* Thông báo Xét tặng Giải thưởng “Hội Toán học Việt Nam” năm 2026**

Hội Toán học Việt Nam trân trọng thông báo đến các tổ chức (trường đại học, viện nghiên cứu,...) và cá nhân về

việc xét tặng Giải thưởng “Hội Toán học Việt Nam” năm 2026. Quỹ Giải thưởng “Hội Toán học Việt Nam” được Hội Toán học Việt Nam thành lập theo Quyết định số 33-2024/QĐ-HTH ngày 6/9/2024 và được một nhóm các cá nhân yêu mến

Toán học và tâm huyết với sự phát triển ngành Toán học ở Việt Nam đóng góp kinh phí tài trợ.

**Mục đích:** Giải thưởng nhằm biểu dương thành tích đặc biệt xuất sắc của nhà toán học Việt Nam, tôn vinh những cá nhân có phát kiến quan trọng trong Toán học nước nhà, đồng thời khuyến khích những nghiên cứu có tính chất đột phá và có khả năng ứng dụng trong nước hoặc trên thế giới.

**Đối tượng:** Đối tượng xét tặng Giải thưởng là người Việt Nam cho đến năm xét đã làm việc tại Việt Nam ít nhất 3 năm. Những người đã được nhận giải thưởng Hồ Chí Minh, Giải thưởng Nhà nước về Khoa học và Công nghệ, và các giải thưởng toán học cao quý trên thế giới không thuộc diện được xét trao giải thưởng. Mỗi cá nhân chỉ được trao Giải thưởng tối đa một lần.

**Thời gian, địa điểm nộp hồ sơ, công bố và trao Giải thưởng:**

- Thời gian nhận đề cử bắt đầu từ ngày 01/01 đến ngày 30/04 năm 2026.
- Địa chỉ nhận hồ sơ đề cử:  
GS. Vũ Hoàng Linh, Chủ tịch Hội Toán học Việt Nam,  
Trường ĐH Khoa học Tự nhiên, 334 Nguyễn Trãi, Thanh Xuân, Hà Nội,  
E-mail: linhvh@vnu.edu.vn. SDT: 0913062989  
(Hồ sơ bản in gửi theo đường bưu điện, bản mềm dạng PDF gửi qua e-mail)
- Giải thưởng sẽ được trao trước ngày 20/11/2026 và được thông báo trên trang mạng của Hội Toán học Việt Nam tại địa chỉ vms.org.vn.

Thông tin chi tiết hơn về Giải thưởng “Hội Toán học Việt Nam” năm 2026 cũng có tại trang mạng vừa dẫn.

\* Thông báo số 1 về việc Tổ chức **Hội thảo Quốc tế “Toán học Miền Trung - Tây Nguyên lần thứ 6 năm 2026”**: Nhằm kết nối, thúc đẩy hoạt động nghiên cứu, trao đổi, giảng dạy và ứng dụng toán học giữa các nhà khoa học Việt Nam và thế giới, tạo ra diễn đàn để các nhà nghiên cứu ứng dụng và giáo dục toán học Việt Nam và thế giới trình bày những thành tựu khoa học của mình trong những năm gần đây, tạo điều kiện cho các sinh viên và các nghiên cứu viên trẻ ngành Toán học và Thống kê được tiếp xúc với những vấn đề nghiên cứu mang tính thời sự cũng như tạo ra một cơ hội để họ được gặp gỡ - các nhà nghiên cứu với kỳ vọng sẽ mở ra hợp tác khoa học trong tương lai, Trường ĐH Quảng Nam dự kiến tổ chức Hội thảo khoa học quốc tế chủ đề “Toán học Miền Trung - Tây Nguyên lần thứ 6 năm 2026”.

#### 1. Thời gian và địa điểm

- Thời gian: Dự kiến ngày 23 - 25 tháng 8 năm 2026.
- Địa điểm: Trường ĐH Quảng Nam, số 102 đường Hùng Vương, Phường Tam Kỳ, Tp. Đà Nẵng.

#### 2. Nội dung

Hội thảo, tập trung vào các nội dung sau đây:

- Đại số - Hình học - Tô-pô;
- Giải tích toán học;
- Tối ưu và tính toán khoa học;
- Xác suất, Thống kê và Toán tài chính;
- Khoa học và công nghệ lượng tử; Cơ sở Toán cho Tin học;
- Giảng dạy và Lịch sử toán học.

#### 3. Cách thức và thời gian nộp bài

Tác giả gửi phiếu đăng ký tham gia Hội thảo (theo mẫu Phụ lục 2) hoặc đăng ký trực tuyến theo link: <https://forms.gle/shj9ooeZ6kGjd3Ss5> và

gửi tóm tắt báo cáo (nếu có) về ban tổ chức trước ngày 26/06/2026 theo địa chỉ email:

hoithaodaihocquangnam@gmail.com

Từ ngày 15/07/2026 Ban tổ chức sẽ gửi giấy mời và Thông báo số 2 của Hội thảo.

\* **Giải thưởng Phan Đức Chính** mang tên cô NGND.PGS.TS. Phan Đức Chính, nguyên giảng viên cao cấp Khoa Toán – Cơ – Tin học, Trường ĐH KHTN, ĐHQGHN (trước đây là Khoa Toán – Cơ, Trường ĐH Tổng hợp Hà Nội). Thầy Chính là người đã gắn bó trọn sự nghiệp với Khoa Toán – Cơ, Trường ĐH Tổng hợp Hà Nội, dành nhiều tâm huyết, công sức cho công tác phát hiện, bồi dưỡng học sinh giỏi và phong trào Olympic Toán học quốc tế của đất nước. Giải thưởng do gia đình của thầy lập ra năm 2018 và hàng năm được trao vào dịp Lễ khai giảng, nhằm động viên, khích lệ và tôn vinh các thầy cô giáo và học sinh xuất sắc của Khối Chuyên Toán – Tin, Trường THPT Chuyên KHTN.

Năm nay, Hội đồng xét giải đã quyết định trao giải thưởng Phan Đức Chính 2025 cho 2 giáo viên và 2 học sinh sau đây.

1. ThS. Trần Quang Hùng, giáo viên Bộ môn Chuyên Toán học, Trường THPT Chuyên KHTN.

Thầy đã vinh dự được nhận Giải thưởng Phan Đức Chính năm 2020. Trong kỳ thi Toán quốc tế năm 2025 vừa qua tại Úc, có một bài toán do đoàn Việt Nam đề xuất được chọn làm đề thi chính thức, tác giả bài toán hình học này là thầy Trần Quang Hùng.

2. ThS. Phạm Huy Thông, Phó Trưởng Bộ môn Chuyên Vật lý, Trường THPT Chuyên KHTN. Thầy tham gia dạy

tại khối chuyên Toán – Tin từ năm 2000, đến nay tròn 25 năm.

3. Nguyễn Đình Tùng, học sinh lớp 12A2 Toán, Trường THPT Chuyên KHTN, huy chương Bạc Olympic Toán học quốc tế 2025 năm học lớp 11.
4. Nguyễn Hữu Tuấn, học sinh lớp 12A3 Tin, Trường THPT Chuyên KHTN, huy chương Vàng Olympic Trí tuệ nhân tạo quốc tế 2025.

**Từ tháng 10/2025, GS. Lê Anh Vinh, Thành viên Ban chấp hành Hội Toán học Việt Nam**, trở thành đại diện của Hội Toán học Việt Nam tại Ủy ban Quốc tế về Giảng dạy Toán học (ICMI), Liên đoàn Toán học Quốc tế. GS Lê Anh Vinh hiện nay là Viện trưởng Viện Khoa học Giáo dục Việt Nam, Bộ GD-ĐT.

Ủy ban Quốc tế về Giảng dạy Toán học được thành lập vào năm 1908 và là một ủy ban trực thuộc Liên đoàn Toán học Quốc tế (IMU) từ năm 1952. Đây là một tổ chức toàn cầu chuyên về nghiên cứu và phát triển giáo dục toán học ở mọi cấp độ. Mục đích của Ủy ban là:

- Thúc đẩy các chương trình hoạt động và các ấn phẩm quốc tế nhằm tăng cường sự hợp tác, trao đổi và phổ biến các ý tưởng, thông tin về mọi khía cạnh của lý thuyết và thực hành giáo dục toán học hiện đại.

- Khuyến khích các nỗ lực nhằm cải thiện chất lượng dạy và học toán trên toàn thế giới.

- Hỗ trợ và trợ giúp Đại hội Quốc tế về Giáo dục Toán học (ICME) cũng như các cuộc họp hoặc hội nghị của các tổ chức thành viên ICMI.

Trước GS. Lê Anh Vinh, đại diện của Hội Toán học Việt Nam tại ICMI là GS. Nguyễn Văn Mậu, Trường ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội.

## Thông tin bổ nhiệm

\* Tháng 12/2025, PGS.TS. **Ngô Quốc Anh** được bổ nhiệm làm Trưởng Khoa Toán – Cơ – Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG Hà Nội. PGS. Ngô Quốc Anh sinh năm 1983, là chuyên gia về phương trình vi phân. Hiện nay các phó trưởng khoa của Khoa Toán – Cơ – Tin học là PGS.TS. Đào Phương Bắc, PGS.TS. Lê Hồng Phương và TS. Phạm Đình Tùng.

\* Tháng 10/2025, TS. **Võ Đức Cẩm Hải** được bổ nhiệm làm Trưởng Khoa Toán – Tin, Trường ĐH Khoa học Tự nhiên, ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh. Lĩnh vực nghiên cứu của TS. Võ Đức Cẩm Hải là tin học. Ban chủ nhiệm Khoa Toán – Tin hiện nay gồm TS. Võ Đức Cẩm Hải và TS. Hoàng Văn Hà (phó chủ nhiệm khoa).

## Tin buồn

**GS.TSKH. Lê Dũng Tráng** (xem ảnh bìa), nhà toán học Việt Nam nổi tiếng, nguyên Trưởng ban Toán, Trung tâm Vật lý lý thuyết Abdus Salam (ICTP), đã qua đời hôm 20/11/2025, hưởng thọ 78 tuổi.

Giáo sư Lê Dũng Tráng sinh năm 1947 tại Sài Gòn, Việt Nam, và theo gia đình sang Pháp năm 1949. Ông bảo vệ luận án Tiến sĩ khoa học (Doctorat d'Etat) năm 1971 ở tuổi 24, dưới sự hướng dẫn của các nhà toán học nổi tiếng C. Chevalley và P. Deligne (huy chương Fields 1978, giải thưởng Abel 2013).

Ông từng là giáo sư tại ĐH Paris 7, ĐH Bách khoa Paris, ĐH Provence Marseille, đồng thời là Trưởng ban Toán của Trung tâm Vật lý lý thuyết ICTP, CH Ý, từ 2002 - 2009. Ông là chuyên gia hàng đầu về kỳ dị, một hướng nghiên cứu quan trọng trong lĩnh vực hình học trong thế kỷ 20.

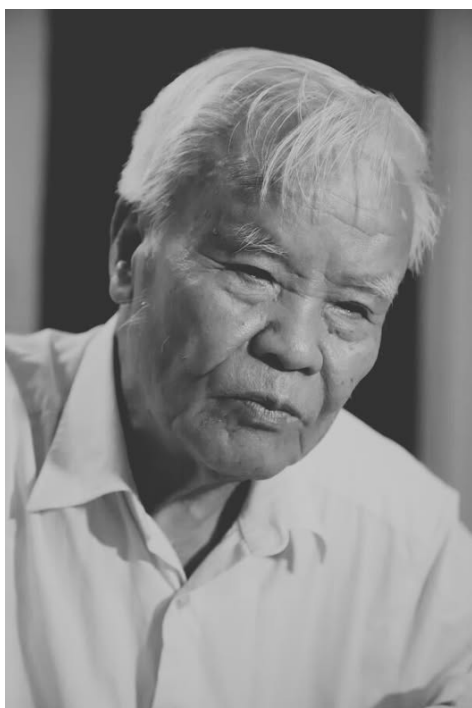
Mặc dù thành danh ở Pháp, Giáo sư Lê Dũng Tráng luôn hướng về quê hương.

Ngay từ những năm 1970, ông đã tự bỏ tiền túi về Việt Nam giảng dạy gần như hàng năm. Năm 1974, theo lời mời của Bộ trưởng Tạ Quang Bửu, ông cùng các nhà Toán học quốc tế sang Việt Nam tổ chức chuỗi bài giảng về các vấn đề Toán học tại Đại học Bách khoa Hà Nội. Ông là người giúp Việt Nam gia nhập Liên đoàn Toán học Quốc tế (IMU) năm 1974. Nhờ sự vận động của ông, nhiều nhà toán học nổi tiếng đã đến giảng bài và trao đổi khoa học ở Việt Nam, đồng thời nhiều nhà toán học Việt Nam được tạo điều kiện ra nước ngoài tu nghiệp và tiếp cận với cộng đồng Toán học quốc tế. Có thể coi ông là người đã đưa toán học Việt Nam hội nhập toán học thế giới.

Giáo sư Lê Dũng Tráng là hình mẫu tiêu biểu kết hợp giữa tài năng, nỗ lực cá nhân và tấm lòng đối với quê hương. Nhiều nhà toán học như GS. Hà Huy Khoái, GS. Ngô Việt Trung (nguyên Viện trưởng Viện Toán học Việt Nam) đều đồng ý rằng ông "là người bạn lớn, là thành viên đặc biệt của cộng đồng toán học Việt Nam". Dù phần lớn cuộc đời ông sống ở châu Âu, nhưng ông là một phần của kỷ ức toán học Việt Nam, là chiếc cầu nối toán học Việt Nam với thế giới trong những ngày gian khó.

**GS. TSKH. NGUYỄN Thừa Hợp**, Trường đại học KHTN-ĐHQG Hà Nội, đã qua đời ngày 22/11/2025, hưởng thọ 94 tuổi. Giáo sư Nguyễn Thừa Hợp sinh ngày 24/12/1932 ở Hạ Đình, Thanh Xuân, Hà Nội. Ông tốt nghiệp ĐH Sư phạm Khoa học Hà Nội năm 1956, rồi gia nhập đội ngũ giảng dạy Khoa Toán, Trường ĐH Tổng hợp Hà Nội, sau này là ĐH Khoa học Tự nhiên – ĐHQG HN, và làm việc ở đây cho đến khi nghỉ hưu năm 2000. Ông được công nhận học vị Tiến sĩ năm 1975, Tiến sĩ khoa học năm 1991. Năm 1980 được phong học hàm Phó giáo sư

và năm 1991 ông được phong học hàm Giáo sư. Ông cũng được nhà nước phong tặng Danh hiệu Nhà giáo Ưu tú năm 1992 và Nhà giáo Nhân dân năm 2008. Giáo sư Nguyễn Thừa Hợp thuộc vào thế hệ đầu của Khoa Toán, Trường ĐH Tổng hợp Hà Nội, trong cả sự nghiệp của mình, ông đã góp công đào tạo nhiều thế hệ sinh viên của trường, đóng góp vào sự phát triển của cộng đồng toán học Việt Nam từ những năm đầu tiên hình thành.



GS. Nguyễn Thừa Hợp. Ảnh: ĐH Quốc gia HN.

**Nhà toán học người Đức và người bạn lớn của cộng đồng toán học Việt Nam, Giáo sư Klaus Krickeberg**, đã ra đi trong giấc ngủ bình yên tại thành phố Bielefeld, CHLB Đức, vào đêm ngày 27/11/2025, hưởng thọ 96 tuổi.

GS. Klaus Krickeberg sinh năm 1929 tại Ludwigslust, bang Mecklenburg-Vorpommern, Đức. Ông là một trong những người trẻ nhất được phong hàm giáo sư tại Đại học Heidelberg (1958). Ông đã giảng dạy và nghiên cứu tại

các Đại học Heidelberg, Bielefeld (CHLB Đức) và Paris V (Cộng hòa Pháp). Giáo sư Klaus Krickeberg là một chuyên gia về xác suất, thống kê và dịch tễ học, các công trình nghiên cứu của ông trải rộng trên cả lĩnh vực lý thuyết và ứng dụng, được công nhận rộng rãi. Ông từng là Chủ tịch Hội Toán học Thống kê và Xác suất Bernoulli quốc tế (1977-1979), và là thành viên của Viện hàn lâm Khoa học Đức Leopoldina.



GS. Klaus Krickeberg. Ảnh: Wikipedia.

Chuyến thăm Việt Nam năm 1974 đã đưa Giáo sư Krickeberg trở thành người bạn đồng hành trung thành của Việt Nam và sau năm 1975, ông tiếp tục dồn tâm huyết vào công cuộc xây dựng hòa bình. Ông đã dành hơn 50 năm cống hiến cho Việt Nam, hỗ trợ khoa học, y tế công cộng, và có tình cảm sâu sắc với văn hóa Việt Nam, được các đồng nghiệp Việt Nam xem như “người Việt Nam”. Lĩnh vực ông cống hiến mạnh mẽ và lâu dài nhất là Y tế công cộng. Ông tham gia giảng dạy, hướng dẫn ở nhiều trình độ bao gồm tiến sĩ, viết sách bằng tiếng Việt.



Tủ sách về Y tế công cộng của Giáo sư Klaus Krickeberg dành cho Việt Nam gồm 6 quyển sách, là một tủ sách giáo khoa quan trọng, được viết rất khoa học, hiện đại, vừa có tính hàn lâm, vừa có tính ứng dụng, để phục vụ cho giáo dục, nghiên cứu và thực hành. Sự hợp tác kéo dài suốt 35 năm của ông đã tạo ra một sự thay đổi cơ bản trong lĩnh vực y tế công cộng tại Việt Nam.

Những đóng góp kiên trì và bền bỉ của Giáo sư Klaus Krickeberg luôn được ghi

nhận một cách trang trọng trong cộng đồng toán học, thống kê và y tế công cộng Việt Nam. Năm 2014, Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh đã trao tặng ông danh hiệu Tiến sỹ Danh dự. Năm 2019, nhân dịp sinh nhật lần thứ 90, Nhà nước Việt Nam đã trao tặng ông Huân chương Hữu nghị cao quý, ghi nhận những đóng góp lớn của ông đối với sự nghiệp giải phóng dân tộc, nghiên cứu toán học và phát triển y tế cộng đồng của Việt Nam.

## Tin thể giới

\* **Hội nghị Toán học châu Á 2025** đã được Hội Toán học Đông Nam Á phối hợp với Hội Toán học Thái Lan tổ chức từ 3–8/8/2025 ở Chiang Mai, Thái Lan. Có khoảng 300 người đã tham dự đại hội này. Ngoài các hội toán học thành viên của Hội Toán học Đông Nam Á, các hội Toán học Nhật Bản và Hàn Quốc đã có đại diện tham dự hội nghị.

Trong thời gian tổ chức hội nghị Toán học Châu Á, Ban điều hành Hội Toán học Đông Nam Á đã họp để thảo luận về các hoạt động của Hội trong thời gian qua và tiếp tục thúc đẩy hợp tác giữa các cộng đồng toán học Đông Nam Á. Ban điều hành cũng tiến hành bầu lãnh đạo của Hội Toán học Đông Nam Á nhiệm kỳ 2026-2027 gồm:

1. Chủ tịch: Jose Ernie C. Lope, ĐH Philippines, Phó chủ tịch Hội Toán học Đông Nam Á nhiệm kỳ 2024–2025;
2. Phó chủ tịch: Đoàn Trung Cường, Viện Toán học - Viện HLKHCN Việt Nam, Phó chủ tịch Hội Toán học Việt Nam và thành viên Ban điều hành Hội Toán học Đông Nam Á nhiệm kỳ 2024–2025;

3. Phó chủ tịch: Wicharn Lewkeeratiyutkul, ĐH Chulalongkorn, Thái Lan, Phó chủ tịch Hội Toán học Đông Nam Á nhiệm kỳ 2024–2025.

\* **Danh sách báo cáo mời tại Đại hội Toán học Quốc tế (ICM) 2026** đã được Ban Tổ chức công bố. Các nhà toán học sẽ đọc báo cáo mời toàn thể tại đại hội năm tới là:

1. Peter Bartlett, University of California, Berkeley, Google DeepMind, Mỹ;
2. Simon Brendle, Columbia University, Mỹ;
3. Annalisa Buffa, EPFL, Thụy Sĩ;
4. Dmitry Dolgopyat, University of Maryland, Mỹ;
5. Dennis Gaitsgory, Max Planck Institute for Mathematics, Bonn, Đức;
6. Patrick Gérard, Université Paris-Saclay, Pháp;
7. Jacob Lurie, Institute for Advanced Study, Princeton, Mỹ;
8. Ciprian Manolescu, Stanford University, Mỹ;
9. Ngaiming Mok, The University of Hong Kong, Trung Quốc;
10. Robert Morris, IMPA, Brasil;
11. Hee Oh, Yale University, Mỹ;

12. Felix Otto, Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences, Leipzig, Đức;
13. Jeremy Quastel, University of Toronto, Canada;
14. Éva Tardos, Cornell University, Mỹ;
15. Xavier Tolsa, ICREA, Autonomous University of Barcelona, and CRM, Tây Ban Nha;
16. Jacob Tsimmerman, University of Toronto, Canada;
17. Stephen Wright, University of Wisconsin-Madison, Mỹ;
18. Horng-Tzer Yau, Harvard University, Mỹ;
19. Tamar Ziegler, Hebrew University of Jerusalem, Israel.

Trong danh sách trên, Annalisa Buffa, Hee Oh, Éva Tardos và Tamar Ziegler là các nhà toán học nữ.

\* **Peter Lax (1926–2025).** Peter Lax từng là giám đốc Viện Courant (ĐH New York, Mỹ) từ 1972-1980 và là giáo sư danh dự xuất sắc tại ĐH New York. Những đóng góp phi thường của ông cho toán học đã mang lại cho ông Huân chương Khoa học Quốc gia của Mỹ (1986), Giải thưởng Wolf (1987) và Giải thưởng Abel (2005).

Sinh ra ở Budapest, ông di cư đến Mỹ vào năm 1941. Viện Hàn lâm Khoa học Na Uy mô tả ông là "nhà toán học đa năng nhất trong thế hệ của mình", nhấn mạnh công trình đột phá của ông trong những năm 1950 và 1960 đã thiết lập nền tảng cho lý thuyết hiện đại về phương trình phi

tuyến cho các hệ hyperbolic. Các lược đồ số Lax-Friedrichs và Lax-Wendroff được sử dụng rộng rãi đã cách mạng hóa các phương pháp tính toán với các ứng dụng thực tế từ dự báo thời tiết đến thiết kế máy bay. "Định lý tương đương Lax" đã trở thành nền tảng của giải tích số hiện đại, trong khi cách tiếp cận sáng tạo của ông đối với các nghiệm "soliton" đã thống nhất một hệ thống khái niệm làm biến đổi lĩnh vực này.



Peter Lax. Ảnh: Anne Lise Flavik/Hội đồng giải Abel.

Ngoài những thành tựu nghiên cứu đáng chú ý của mình, Lax đã hướng dẫn 55 nghiên cứu sinh với 430 "hậu duệ". Báo cáo năm 1982 của ông về siêu máy tính, được biết đến rộng rãi là "Báo cáo Lax", đóng một vai trò quan trọng trong việc thúc đẩy cơ sở hạ tầng nghiên cứu tính toán ở Hoa Kỳ.

**Kính mời quý vị và các bạn đồng nghiệp  
đăng kí tham gia Hội Toán học Việt Nam**

Hội Toán học Việt Nam được thành lập vào năm 1966. Mục đích của Hội là góp phần đẩy mạnh công tác giảng dạy, nghiên cứu, ứng dụng và phổ biến toán học. Tất cả những ai có tham gia giảng dạy, nghiên cứu, ứng dụng và phổ biến toán học đều có thể gia nhập Hội. Là hội viên, quý vị sẽ được tham gia cùng như được thông báo đầy đủ về các hoạt động của Hội, được đăng ký nhận miễn phí bản tin Thông tin Toán học, được mua một số ấn phẩm toán với giá ưu đãi. Để gia nhập Hội lần đầu tiên hoặc để đăng kí lại hội viên, quý vị cần điền và cắt gửi phiếu đăng ký dưới đây tới BCH Hội theo địa chỉ:

**Chị Cao Ngọc Anh, Viện Toán Học, 18 Hoàng Quốc Việt, 10072 Hà Nội**

Việc đóng hội phí có thể thực hiện theo tập thể hoặc từng cá nhân bằng một trong các hình thức sau:

- 1. Đóng trực tiếp hoặc gửi tiền qua bưu điện đến chị Cao Ngọc Anh theo địa chỉ trên.
- 2. Chuyển khoản tới tài khoản của Hội:

Tên tài khoản: Hội Toán học Việt Nam.

Số tài khoản: 0491000028899.

Ngân hàng TMCP Ngoại thương Việt Nam - Chi nhánh Thăng Long.

(Đề nghị thông báo cho chị Cao Ngọc Anh danh sách những hội viên đóng hội phí).

Thông tin về hội viên Hội Toán học Việt Nam cũng như tình hình đóng hội phí được cập nhật thường xuyên trên trang web của Hội.

**BCH Hội Toán học Việt Nam**

✂ .....

| Hội Toán Học Việt Nam<br>Phiếu đăng kí hội viên                                                   | Hội phí năm 2026                                                                                                                                                                                                                                                             |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. Họ và tên: .....                                                                               | Hội phí: 100 000 Đ <input type="checkbox"/>                                                                                                                                                                                                                                  |
| 2. Nam <input type="checkbox"/> Nữ <input type="checkbox"/>                                       | Acta Math. Vietnamica (*): 120 000 Đ <input type="checkbox"/>                                                                                                                                                                                                                |
| 3. Ngày sinh: .....                                                                               | Vietnam J. Mathematics (*): 112 000 Đ <input type="checkbox"/>                                                                                                                                                                                                               |
| 4. Nơi sinh (huyện, tỉnh): .....                                                                  | Tổng cộng: .....                                                                                                                                                                                                                                                             |
| 5. Học vị (năm, nơi bảo vệ):<br>Cử nhân: .....<br>Thạc sỹ: .....<br>Tiến sỹ: .....<br>TSKH: ..... | Hình thức đóng:<br><input type="checkbox"/> Đóng tập thể theo cơ quan<br>Tên cơ quan: .....<br>.....<br><input type="checkbox"/> Đóng trực tiếp<br><input type="checkbox"/> Chuyển khoản<br><input type="checkbox"/> Gửi bưu điện (Đề nghị gửi kèm bản chụp thư chuyển tiền) |
| 6. Học hàm (nơi được phong):<br>PGS: .....<br>GS: .....                                           | (*) Việc mua các tạp chí Acta Mathematica Vietnamica và Vietnam Journal of Mathematics là tự nguyện. Trên đây là giá ưu đãi dành cho hội viên Hội Toán học (gồm 4 số, kể cả bưu phí).                                                                                        |
| 7. Chuyên ngành: .....                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| 8. Nơi công tác: .....                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| 9. Chức vụ hiện nay: .....                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| 10. Địa chỉ liên hệ: .....<br>.....<br>Email: .....<br>Điện thoại: .....                          |                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| Ngày: ..... Kí tên: .....                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                              |

## THÔNG TIN TOÁN HỌC, Tập 29 SỐ 3 & 4 (2025)

|                                                                                                              |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Chúc mừng năm mới và thông báo Chương trình</b> .....                                                     | 1  |
| <b>Gặp mặt đầu xuân Bính Ngọ 2026</b>                                                                        |    |
| <b>“Kính tặng quê hương tôi, nước Việt Nam anh hùng”</b> .....                                               | 2  |
| <b>– Tưởng nhớ giáo sư Lê Dũng Tráng</b><br>Ngô Việt Trung                                                   |    |
| <b>Hội thảo quốc tế về Toán học công nghiệp</b> .....                                                        | 5  |
| <b>và Toán ứng dụng 2025</b><br>Nguyễn Hồng Anh và Vũ Hoàng Linh                                             |    |
| <b>Đại hội Hội Toán học Thành phố Hồ Chí Minh</b> .....                                                      | 8  |
| <b>lần thứ VII nhiệm kỳ 2025–2030</b>                                                                        |    |
| <b>Giáo sư Gérard Laumon (1952-2025): Cuộc đời</b> .....                                                     | 10 |
| <b>và sự nghiệp của một nhà toán học lớn</b><br>Đỗ Việt Cường                                                |    |
| <b>Trò chuyện cùng Luis Ángel Caffarelli,</b> .....                                                          | 15 |
| <b>chủ nhân giải thưởng Abel 2023</b><br>Bjørn Ian Dundas và Christian F. Skau<br><i>Dương Anh Tuấn dịch</i> |    |
| <b>Từ bài toán tổng các bình phương</b> .....                                                                | 22 |
| <b>đến giả thuyết Milnor (phần 2/2)</b><br>Nguyễn Mạnh Linh                                                  |    |
| <b>Công việc của tôi vốn là giảng bài trước lớp.</b> .....                                                   | 29 |
| <b>Giờ tôi đi đối phó với gian lận bằng ChatGPT</b><br>Troy Jollimore<br><i>Nguyễn Đăng Hợp dịch</i>         |    |
| <b>Hội nghị quốc tế về Đại số giao hoán 2025</b> .....                                                       | 36 |
| <b>Tin tức hội viên và hoạt động toán học</b> .....                                                          | 38 |
| <b>Tin thể giới</b> .....                                                                                    | 43 |