BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC
VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

VIỆN TOÁN HỌC

NGÔ TẤN PHÚC

TƯƠNG ĐƯƠNG MORITA CỦA ĐẠI SỐ ĐƯỜNG LEAVITT VÀ ỨNG DỤNG

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Đại số và Lý thuyết số
Mã số: 9 46 01 04

HÀ NỘI - 2024

MỞ ĐẦU

Một *đồ thị* (có hướng) là một bộ $E = (E^0, E^1, r, s)$ bao gồm *tập đỉnh* E^0, *tập cạnh* E^1, cùng với hai ánh xạ $r, s : E^1 \longrightarrow E^0$. Các đỉnh $r(e)$ và $s(e)$ tương ứng được gọi là *ngọn* và *gốc* của cạnh e. Cho K là một trường. *Đại số đường Leavitt* $L_K(E)$ của đồ thị E với hệ số trên trường K đã được giới thiệu một cách độc lập bởi hai nhóm tác giả Abrams, Aranda Pino [6] vào năm 2005 và Ara, Moreno, Pardo [23] vào năm 2007. Abrams và Aranda Pino sau đó đã mở rộng định nghĩa trong [8] cho các đồ thị đếm được. Đại số đường Leavitt là mở rộng của đại số Leavitt $L_K(1, n)$ (được giới thiệu bởi Leavitt [45] vào năm 1962) và đồng thời chứa nhiều lớp đại số thú vị khác như đại số ma trận, đại số đa thức Laurent, đại số Jacobson,... Thêm nữa, đại số đường Leavitt cũng có thể được xem như một phiên bản đại số của C^*-đại số đồ thị (cho E là một đồ thị có hướng, *C^*-đại số đồ thị* $C^*(E)$ của E đã được giới thiệu bởi Kumjian, Pask và Raeburn [41] vào năm 1998). Trong suốt hai thập kỷ qua, đại số đường Leavitt đã trở thành một chủ đề nghiên cứu sôi động trong ngành đại số kết hợp và thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà toán học thuộc các lĩnh vực khác nhau. Để biết thêm lịch sử, các thành tựu và một số vấn đề mở của đại số đường Leavitt, chúng tôi giới thiệu đến người đọc bài viết tổng quan [3] của Abrams.

Hai vành R và S được gọi là *tương đương Morita*, ký hiệu $R \sim_{ME} S$, nếu hai phạm trù môđun trên chúng là tương đương. Một trong những vấn đề mở rất được quan tâm nghiên cứu trong lĩnh vực đại số đường Leavitt là phân loại sai khác tương đương Morita các đại số đường Leavitt dựa trên các bất biến dễ tính toán từ đồ thị, được gợi ý bởi chương trình Elliotts về phân loại các C^*-đại số thông qua K-lý thuyết. Đây là một vấn đề nghiên cứu hấp dẫn không chỉ đối với các nhà đại số mà cả các nhà giải

tích vì nó giúp giải thích một số hiện tượng chưa rõ ràng trong lý thuyết đại số các toán tử.

Hai đồ thị E và F được gọi là *tương đương dòng* nếu E có thể nhận được từ F thông qua các phép biến đổi đồ thị (S), (O), (I) và (R) được giới thiệu trong quyển sách [46] của D. Lind và B. Marcus. Cho R là một vành có đơn vị địa phương, ta gọi $\mathcal{V}(R)$ là *tập các lớp đẳng cấu* (ký hiệu bởi $[P]$) *của các R-môđun phải xạ ảnh hữu hạn sinh.* Khi đó $\mathcal{V}(R)$ là một vị nhóm giao hoán với phép toán cảm sinh từ phép cộng trực tiếp các R-môđun. *Nhóm Grothendieck của R*, ký hiệu $K_0(R)$, là nhóm Grothendieck của vị nhóm $\mathcal{V}(R)$. Trong [4, Theorem 2.8, Propositions 4.1, 4.2], Abrams, Ánh, Louly và Pardo đã chỉ ra rằng nếu E và F là các đồ thị hữu hạn không có cạnh song song (các cạnh trong một đồ thị được gọi là song song nếu chúng có cùng đỉnh ngọn và đỉnh gốc) sao cho $L_K(E)$, $L_K(F)$ là đơn vô hạn thuần tuý, $|E^0| = |F^0| \leq 3$ và tồn tại một đẳng cấu $\phi : K_0(L_K(E)) \to K_0(L_K(F))$ thoả mãn $\phi([L_K(E)]) = [L_K(F)]$ thì $L_K(E) \cong L_K(F)$ và E được đưa về F thông qua phép biến đổi (O).

Trong [14], Abrams, Louly, Pardo và Smith đã chỉ ra rằng nếu E tương đương dòng với F thì $L_K(E) \sim_{ME} L_K(F)$. Ngoài ra, bằng cách áp dụng Định lí Franks [33, Theorem 1], các tác giả thu được rằng nếu E và F là các đồ thị hữu hạn sao cho $L_K(E)$ và $L_K(F)$ là đơn vô hạn thuần tuý, $\det(I - A_E) = \det(I - A_F)$ và tồn tại một đẳng cấu $\phi : K_0(L_K(E)) \to K_0(L_K(F))$ thì $L_K(E) \sim_{ME} L_K(F)$ và E tương đương dòng với F. Nếu thêm điều kiện rằng $\phi([L_K(E)]) = [L_K(F)]$ thì ta được $L_K(E) \cong L_K(F)$.

Trong [52, Theorem 8.6], Ruiz và Tomforde đã chứng minh rằng nếu E và F là đồ thị hữu hạn đỉnh với vô hạn cạnh sao cho $L_K(E)$ và $L_K(F)$ là hai vành đơn vô hạn thuần tuý thì $L_K(E) \sim_{ME} L_K(F)$ khi và chỉ khi $K_0(L_K(E)) \cong K_0(L_K(F))$ và số đỉnh kỳ dị của E bằng số đỉnh kỳ dị của F. Hơn nữa, trong trường hợp này, E tương đương dòng với F.

Ngoài ra, các nỗ lực nghiên cứu cho vấn đề phân loại sai khác tương đương Morita của đại số đường Leavitt cũng nhằm giải quyết giả thuyết

tương đương Morita được Abrams và Tomforde nêu ra trong [18] như sau. Nhắc lại rằng với hai C^*-đại số A và B, ta nói *A tương đương Morita mạnh* với B, ký hiệu $A \sim_{SME} B$ nếu A tương đương Morita với B như các vành.

Giả thuyết Abrams-Tomforde: ([18, Section 9]) *Cho E và F là các đồ thị đếm được. Nếu $L_{\mathbb{C}}(E) \sim_{ME} L_{\mathbb{C}}(F)$ thì $C^*(E) \sim_{SME} C^*(F)$.*

Giả thuyết trên đã được chứng minh cho một số trường hợp riêng như sau. Trong [18], Abrams và Tomforde đã chứng minh giả thuyết trên là đúng cho lớp đồ thị không chứa chu trình và lớp đồ thị hữu hạn bậc ra mà đại số đường Leavitt liên kết là đơn. Gần đây, trong [32], Eilers, Restorff, Ruiz và Sørensen đã chứng minh Giả thuyết Abrams-Tomforde là đúng cho lớp đồ thị có tập đỉnh hữu hạn bằng cách sử dụng một số phép biến đổi đồ thị.

Mục tiêu đầu tiên của luận án này là quan tâm vấn đề sau.

Vấn đề 1. Tìm mối liên hệ giữa hai đồ thị E và F sao cho

$$L_K(E) \sim_{ME} L_K(F).$$

Bên cạnh đó, việc áp dụng tương đương Morita để nghiên cứu cấu trúc của đại số đường Leavitt cũng là một chủ đề rất được quan tâm. Abrams, Pino [8] đã khởi xướng cho hướng nghiên cứu này bằng cách sử dụng lý thuyết tương đương Morita để mô tả cấu trúc của các đại số đường Leavitt đơn, đại số đường Leavitt nửa nguyên tố và đại số đường Leavitt nửa nguyên thủy. Koç, Özaydın [40] ứng dụng tương đương Morita để đặc trưng cho các đại số đường Leavitt có một biểu diễn hữu hạn chiều không tầm thường. Trong luận án này, chúng tôi muốn ứng dụng tương đương Morita để mô tả các đại số đường Leavitt có tính IBN. Một vành R được gọi là *có tính IBN* nếu chúng ta có thể định nghĩa được số chiều của các R-môđun tự do hữu hạn sinh.

Nói chung là không dễ để xác định tính IBN của một vành cho trước. Tính IBN của các đại số đường Leavitt đã được nghiên cứu bởi nhiều tác giả. Cho K là một trường và E là một đồ thị. *Đại số đường Cohn* của đồ

thị E với hệ số trên K, ký hiệu $C_K(E)$, là một trường hợp riêng của đại số đường Leavitt. Abrams và Kanuni [13, Theorem 9] đã chỉ ra rằng $C_K(E)$ luôn thỏa mãn tính IBN. Dựa vào K_0-nhóm, Kanuni và Özaydın trong [38, Theorem 13] đã chỉ ra rằng với một đồ thị hữu hạn $E = (E^0, E^1, r, s)$, $L_K(E)$ có tính IBN khi và chỉ khi $\sum_{v\in E^0} v$ không thuộc vào $\mathbb{Q}$-không gian vectơ sinh bởi hệ $\{w - \sum_{e\in s^{-1}(w)} r(e) \mid w \in E^0, s^{-1}(w) \neq \emptyset\}$. Kanuni, Barquero, Gonzalez và Siles Molina [37] đã xác định được tất cả các đại số đường Leavitt của đồ thị hai đỉnh có tính IBN. Koç và Özaydin trong [40, Corollary 6.9] đã chứng minh rằng đại số đường Leavitt của các đồ thị hữu hạn mà mỗi đỉnh thuộc nhiều nhất một chu trình có tính IBN. Tuy nhiên, đến thời điểm hiện tại, vẫn chưa có một tiêu chuẩn thuần tuý đồ thị trên E sao cho $L_K(E)$ có tính IBN.

Mục tiêu thứ hai của luận án này là khảo sát vấn đề dưới đây.

Vấn đề 2. Tìm các điều kiện thuần tuý đồ thị trên E sao cho $L_K(E)$ có tính IBN.

Bố cục luận án chia làm ba chương. Chương 1 chuẩn bị các kiến thức cần thiết về tương đương Morita, đồ thị và đại số đường Leavitt. Chương 2 và Chương 3 lần lượt trình bày các kết quả về Vấn đề 1 và Vấn đề 2.

CHƯƠNG 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Chương này trình bày một số kiến thức chuẩn bị liên quan đến luận án. Nội dung của chương này chủ yếu được trích từ các tài liệu [6], [12], [16], [23], [43], [48], [49]. Nội dung của từng mục như sau.

- Trong mục 1.1, chúng tôi trình bày định nghĩa và một số tính chất cơ bản về sự tương đương Morita của các vành.

- Trong mục 1.2, chúng tôi nhắc lại các định nghĩa đồ thị (có hướng), vị nhóm đồ thị và một số khái niệm về lý thuyết đồ thị quan trọng nhằm phục vụ cho việc khảo sát đại số đường Leavitt.

- Trong mục 1.3, chúng tôi trình bày định nghĩa và một số tính chất cơ bản của đại số đường Leavitt

CHƯƠNG 2

VỀ TƯƠNG ĐƯƠNG MORITA CỦA ĐẠI SỐ ĐƯỜNG LEAVITT

Chương này nghiên cứu Vấn đề 1 được đề cập trong phần Mở đầu và được cấu trúc như sau:

Gọi E_{sf} là đồ thị phi nguồn có được qua quá trình từng bước khử đỉnh nguồn từ đồ thị hữu hạn ban đầu E và K là một trường.

- Trong mục 2.1 chúng tôi chỉ ra rằng $L_K(E)$ tương đương Morita với tổng trực tiếp của $L_K(E_{sf})$ và n bản sao của K, trong đó n là số đỉnh thu trong E và không thuộc E_{sf} (Định lí 2.1.6). Mục này được viết dựa trên bài báo [16].

- Trong mục 2.2 chúng tôi chỉ ra rằng $L_K(E)$ đẳng cấu với tổng trực tiếp của n đại số ma trận trên K và $L_K(F)$, trong đó F được xây dựng tường minh từ E_{sf} (Định lí 2.2.14). Như một hệ quả, chúng tôi nhận lại kết quả của Abrams, Pino, Molina [11] về cấu trúc của đại số đường Leavitt của đồ thị hữu hạn mà mọi chu trình đều không có lối ra (Hệ quả 2.2.16). Mục này được viết dựa trên bài báo [48].

- Trong mục 2.3, chúng tôi chỉ ra rằng đại số đường Leavitt của đồ thị Hopf đẳng cấu với một số bản sao của đại số đường Leavitt của một thành phần liên thông của đồ thị Hopf đã cho (Định lí 2.3.9). Áp dụng kết quả này, chúng tôi chứng minh Giả thuyết Abrams-Tomforde đúng cho một số lớp đồ thị Hopf (Định lí 2.3.19). Mục này được viết dựa trên bài báo [49].

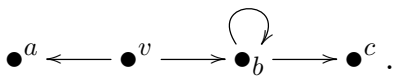
2.1 Phép khử đỉnh nguồn trên đồ thị

Chúng tôi bắt đầu mục này bằng cách nhắc lại phép khử đỉnh nguồn trên đồ thị theo [14].

Định nghĩa 2.1.1. ([14, Definition 1.2]) Cho $E = (E^0, E^1, r, s)$ là một đồ thị, và đặt $v \in E^0$ là một đỉnh nguồn. Ta gọi *đồ thị khử đỉnh nguồn* (Phép biến đổi (S)) $E_{\backslash v}$ của E là đồ thị như sau: $(E_{\backslash v})^0 = E^0 \setminus \{v\}$, $(E_{\backslash v})^1 = E^1 \setminus s^{-1}(v)$, $s_{E_{\backslash v}} = s|_{(E_{\backslash v})^1}$ và $r_{E_{\backslash v}} = r|_{(E_{\backslash v})^1}$. Nói cách khác, $E_{\backslash v}$ ký hiệu cho đồ thị thu được từ E bằng cách xoá bỏ đỉnh v và tất cả các cạnh trong E phát ra từ v.

Chúng tôi minh hoạ phép khử đỉnh nguồn thông qua ví dụ sau đây.

Ví dụ 2.1.2. Cho E là đồ thị



Khi đó, đồ thị khử đỉnh nguồn $E_{\backslash v}$ là



Bổ đề sau đây khẳng định phép khử đỉnh nguồn bảo toàn tương đương Morita của các đại số đường Leavitt liên kết. Khẳng định này được Abrams, Louly, Pardo và Smith chứng minh trong [14] với giả thiết rằng $L_K(E)$ là đơn. Trường hợp tổng quát đã được chứng minh bởi Ara, Rangaswamy trong [24] và một cách độc lập bởi Ruiz, Tomforde trong [52].

Bổ đề 2.1.3. ([24, Lemma 4.3] và [52, Proposition 3.2]) *Cho E là đồ thị hữu hạn, v là một đỉnh nguồn nhưng không phải là đỉnh thu trong E và K là một trường. Khi đó, $L_K(E) \sim_{ME} L_K(E_{\backslash v})$.*

Định lí sau đây là kết quả chính của mục này, cho phép ta đưa việc nghiên cứu đại số đường Leavitt $L_K(E)$ về đại số đường Leavitt $L_K(E_{sf})$.

Định lí 2.1.6. *Cho E là một đồ thị hữu hạn và K là một trường. Gọi*

$$E = E_0 \to E_1 \to \cdots \to E_i \to \cdots \to E_t = E_{sf}$$

là dãy các đồ thị được sinh ra trong quá trình từng bước khử đỉnh nguồn. Khi đó $L_K(E) \sim_{ME} K^s \oplus L_K(E_{sf})$, trong đó s là số các đỉnh thu trong E nhưng không có trong E^0_{sf}.

2.2 Cấu trúc của đại số đường Leavitt

Sử dụng các phép biến đổi đồ thị đã biết, chúng tôi chỉ ra rằng $L_K(E)$ đẳng cấu với tổng trực tiếp của một số đại số ma trận trên K và $L_K(F)$, trong đó F được xây dựng tường minh từ E_{sf}. Chúng tôi nhắc lại một số khái niệm như sau. Cho $E = (E^0, E^1, r, s)$ là một đồ thị và c là một chu trình trong E. Ta gọi c là *chu trình nguồn* nếu $|r^{-1}(v)| = 1$ với mọi đỉnh $v \in c^0$. Ta nói rằng tập con $H \subset E^0$ là *di truyền* nếu với mọi $v \in H$ và $w \in E^0$, $v \geq w$ kéo theo $w \in H$. Cho H là một tập con di truyền của E^0. Xét tập hợp

$$F(H) = \{\alpha \mid \alpha = e_1 e_2 \cdots e_n, e_1, e_2, \cdots, e_n \in E^1, s(e_n) \notin H, r(e_n) \in H\}.$$

Gọi $\overline{F}(H) = \{\overline{\alpha} \mid \alpha \in F(H)\}$. Ta định nghĩa đồ thị $E(H)$ chính là $(H, s^{-1}(H), s, r)$ cùng với các đỉnh nguồn $\alpha \in F(H)$ với duy nhất một cạnh $\overline{\alpha}$ từ α đến $r(\alpha)$.

Định lí 2.2.14. *Cho E là một đồ thị hữu hạn và K là một trường. Gọi*

$$E = E_0 \to E_1 \to \cdots \to E_i \to \cdots \to E_t = E_{sf}$$

dãy các đồ thị được sinh ra trong quá trình từng bước khử đỉnh nguồn. Khi đó, các khẳng định sau đây là đúng:

(1) $L_K(E) \cong M_{m_1+1}(K) \oplus \cdots \oplus M_{m_k+1}(K) \oplus L_K(E(E^0_{sf}))$, *trong đó k là số các đỉnh thu trong E nhưng không thuộc E^0_{sf} (gọi chúng là $v_1, \cdots, v_k$) và với mỗi $1 \leq i \leq k$, m_i là số các đường trong E kết thúc tại v_i;*

(2) *Với mỗi đỉnh $v \in E^0_{sf}$, gọi n_v là số các đường trong E kết thúc tại v. Nếu $n_v = n$ với mọi $v \in E^0_{sf}$ thì $L_K(E(E^0_{sf})) \cong M_{n+1}(L_K(E_{sf}))$;*

(3) *Nếu E_{sf} không phải là đồ thị tầm thường thì tồn tại một đồ thị hữu hạn không chứa đỉnh nguồn F thoả mãn các điều kiện sau đây:*

(i) $L_K(F) \cong L_K(E(E^0_{sf}))$;

(ii) Tồn tại một song ánh giữa tập các chu trình trong F và tập các chu trình trong E. Đặc biệt, F không có lối ra khi và chỉ khi E không có lối ra;

(iii) Tồn tại một song ánh giữa tập các chu trình nguồn trong F và tập các chu trình nguồn trong E_{sf}.

Như một hệ quả của Định lí 2.2.14, chúng tôi nhận lại kết quả của Abrams, Pino, Molina [11] về cấu trúc của đại số đường Leavitt của đồ thị hữu hạn không có lối ra.

Hệ quả 2.2.16. ([11, Theorem 3.8]) *Cho E là một đồ thị hữu hạn không có lối ra và K là một trường. Gọi $\{c_1, \cdots, c_l\}$ là tập các chu trình và $\{v_1, \cdots, v_k\}$ là tập các đỉnh thu trong E. Khi đó, $L_K(E)$ đẳng cấu với*

$$(\bigoplus_{i=1}^{k} M_{m_i+1}(K)) \oplus (\bigoplus_{j=1}^{l} M_{n_j+1}(K[x, x^{-1}])),$$

trong đó với mỗi $1 \leq i \leq k$, m_i là số các đường kết thúc tại đỉnh thu v_i và với mỗi $1 \leq j \leq l$, n_j là số các đường kết thúc tại một đỉnh cố định (chọn trước tuỳ ý) của chu trình c_j mà không chứa chu trình đó.

2.3 Cấu trúc của đại số đường Leavitt liên kết với đồ thị Hopf

Chúng tôi nhắc lại khái niệm đồ thị Hopf đã được giới thiệu bởi Cibils và Rosso trong [26]. Cho G là một nhóm và $\mathcal{C}$ là tập tất cả các lớp liên kết của G. Ta gọi một *hàm phân nhánh* của G là một ánh xạ $\mathfrak{r} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{N}$. Ta còn có thể viết hàm phân nhánh dưới dạng tổng hình thức $\mathfrak{r} = \sum_{C \in \mathcal{C}} \mathfrak{r}_C C$, trong đó $\mathfrak{r}_C := \mathfrak{r}(C)$. *Giá* của $\mathfrak{r}$ là tập hợp $\text{supp}(\mathfrak{r}) = \{\text{C} \in \mathcal{C} \mid \mathfrak{r}_\text{C} > 0\}$. *Đồ thị Hopf liên kết với cặp* $(G, \mathfrak{r})$, ký hiệu $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$, là đồ thị có tập đỉnh $\Gamma^0_{G,\mathfrak{r}} = G$ và có $\mathfrak{r}_C$ cạnh từ x đến xc với mỗi $x \in G$ và $c \in C$. Gọi $S_{G,\mathfrak{r}}$ là nửa nhóm

con của G sinh bởi tập $\bigcup_{C\in\mathrm{supp}(\mathfrak{r})} C$. Ta định nghĩa $\Delta_{G,\mathfrak{r}}$ là đồ thị con của $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ sau đây: nếu $\mathfrak{r}=0$ thì $\Delta_{G,\mathfrak{r}}$ là đồ thị tầm thường, ngược lại

$$\Delta_{G,\mathfrak{r}} = (\Delta^0_{G,\mathfrak{r}}, \Delta^1_{G,\mathfrak{r}}, r|_{\Delta^1_{G,\mathfrak{r}}}, s|_{\Delta^1_{G,\mathfrak{r}}}),$$

trong đó $\Delta^0_{G,\mathfrak{r}} := \langle S_{G,\mathfrak{r}}\rangle$ và $\Delta^1_{G,\mathfrak{r}} := r^{-1}(\Delta^0_{G,\mathfrak{r}})$.

Ta định nghĩa $\Lambda_{G,\mathfrak{r}}$ là đồ thị con của $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ sau đây: nếu $S_{G,\mathfrak{r}}$ không phải là vị nhóm con của G thì $\Lambda_{G,\mathfrak{r}}$ là đồ thị tầm thường, ngược lại

$$\Lambda_{G,\mathfrak{r}} = (\Lambda^0_{G,\mathfrak{r}}, \Lambda^1_{G,\mathfrak{r}}, r|_{\Lambda^1_{G,\mathfrak{r}}}, s|_{\Lambda^1_{G,\mathfrak{r}}}),$$

trong đó $\Lambda^0_{G,\mathfrak{r}} := G(S_{G,\mathfrak{r}})$ là nhóm con lớn nhất của G được chứa trong $S_{G,\mathfrak{r}}$ và $\Lambda^1_{G,\mathfrak{r}} := r^{-1}(\Lambda^0_{G,\mathfrak{r}}) \cap s^{-1}(\Lambda^0_{G,\mathfrak{r}})$.

Ta ký hiệu bởi $\mathcal{S}_{\Delta_{G,\mathfrak{r}}}$ tập hợp tất cả các thành phần liên thông mạnh của $\Delta_{G,\mathfrak{r}}$. Hiển nhiên $\mathcal{S}_{\Delta_{G,\mathfrak{r}}}$ là tập sắp thứ tự bộ phận bởi quan hệ $\geq$ xác định như sau: với mọi $\Pi_1, \Pi_2 \in \mathcal{S}_{\Delta_{G,\mathfrak{r}}}$, $\Pi_1 \geq \Pi_2$ nếu tồn tại $v \in \Pi_1^0$ và $w \in \Pi_2^0$ để $v \geq w$. $\mathcal{S}_{\Delta_{G,\mathfrak{r}}}$ được gọi là tập *định hướng xuống* nếu với mọi $\Pi_1, \Pi_2 \in \mathcal{S}_{\Delta_{G,\mathfrak{r}}}$, tồn tại $\Pi_3 \in \mathcal{S}_{\Delta_{G,\mathfrak{r}}}$ sao cho $\Pi_1 \geq \Pi_3$ và $\Pi_2 \geq \Pi_3$. Trong định lí sau, chúng tôi mô tả cấu trúc của các đồ thị Hopf và đại số đường Leavitt của chúng.

Định lí 2.3.9. *Cho G là một nhóm với hàm phân nhánh $\mathfrak{r} = \sum_{C\in\mathcal{C}} \mathfrak{r}_C C$, và K là một trường. Khi đó các khẳng định sau đây là đúng:*

(1) *$\Delta_{G,\mathfrak{r}}$ là một thành phần liên thông của $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ và $\Gamma_{G,\mathfrak{r}} = \bigsqcup_{i\in G/\Delta^0_{G,\mathfrak{r}}} \Omega_i$ trong đó Ω_i đẳng cấu với $\Delta_{G,\mathfrak{r}}$ như các đồ thị;*

(2) *$\Lambda_{G,\mathfrak{r}}$ là một thành phần liên thông mạnh của $\Delta_{G,\mathfrak{r}}$ và $\Pi \cong \Lambda_{G,\mathfrak{r}}$ như các đồ thị với mọi thành phần liên thông mạnh Π của $\Delta_{G,\mathfrak{r}}$. Hơn nữa,*

$$|\mathcal{S}_{\Delta_{G,\mathfrak{r}}}| = \begin{cases} |\Delta^0_{G,\mathfrak{r}}/\Lambda^0_{G,\mathfrak{r}}| & \text{nếu } S_{G,\mathfrak{r}} \text{ là một vị nhóm con của } G; \\ |\Delta^0_{G,\mathfrak{r}}| & \text{trường hợp còn lại;} \end{cases}$$

(3) *$\Delta_{G,\mathfrak{r}}$ là một thành phần liên thông mạnh của $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ nếu và chỉ nếu $\mathfrak{r}=0$ hoặc $S_{G,\mathfrak{r}}$ là một nhóm con của G. Như một hệ quả, nếu $S_{G,\mathfrak{r}}$ là hữu hạn, thì $\Delta_{G,\mathfrak{r}}$ là một thành phần liên thông mạnh của $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$;*

(4) *Nếu thêm rằng G là giao hoán, thì $(\mathcal{S}_{\Delta_{G,\mathfrak{r}}}, \geq)$ là hướng xuống (downward directed);*

(5) $L_K(\Gamma_{G,\mathfrak{r}}) \cong L_K(\Delta_{G,\mathfrak{r}})^{(G/\Delta^0_{G,\mathfrak{r}})}$.

Áp dụng Định lí 2.3.9, chúng tôi chỉ ra Giả thuyết Abrams-Tomforde đúng cho một số lớp đồ thị Hopf.

Định lí 2.3.19. *Giả thuyết Abrams-Tomforde là đúng cho các lớp đồ thị Hopf liên kết với cặp $(G, \mathfrak{r})$ sao cho G là nhóm đếm được và một trong các điều kiện sau đây được thoả mãn:*

(1) *$S_{G,\mathfrak{r}}$ không là vị nhóm con của G.*

(2) *$\sum_{C\in\mathcal{C}} \mathfrak{r}_C|C| \leq 1$.*

(3) *$\sum_{C\in\mathcal{C}} \mathfrak{r}_C|C| \geq 2$ và $S_{G,\mathfrak{r}} = G$.*

(4) *G là một nhóm hữu hạn.*

CHƯƠNG 3

MỘT SỐ ỨNG DỤNG

Chương này nghiên cứu Vấn đề 2 được đề cập ở phần Mở đầu và được tổ chức như sau.

- Trong mục 3.1, chúng tôi cung cấp các tiêu chuẩn trên ma trận kề của E và E_{sf} để $L_K(E)$ có tính IBN (Định lí 3.1.6, Định lí 3.1.8). Sử dụng tiêu chuẩn này, chúng tôi nhận lại được kết quả của Koc, Ozaydin [40] về tính IBN của đại số đường Leavitt của đồ thị hữu hạn mà mỗi định chỉ thuộc nhiều nhất một chu trình và nhận lại được kết quả của Abrams, Kanuni [13] về tính IBN của đại số đường Cohn (Hệ quả 3.1.12). Mục này được viết dựa trên bài báo [48].

- Trong mục 3.2, chúng tôi cung cấp một tiêu chuẩn thuần tuý đồ thị trên E sao cho $L_K(E)$ có tính UGN (Định lí 3.2.14). Từ đó, chúng tôi chỉ ra rằng tính UGN và tính IBN là tương đương trên các lớp đại số đường Leavitt của đồ thị Hopf (Hệ quả 3.2.15) và đồ thị Cayley (Hệ quả 3.2.23). Mục này được viết dựa trên các bài báo [16], [48] và [49].

3.1 Đại số đường Leavitt thoả mãn tính chất IBN

Như chúng ta đã biết, với một trường K bất kỳ, mọi cơ sở của một K-không gian vectơ luôn có cùng lực lượng. Khẳng định này nói chung là không đúng đối với các môđun tự do trên một vành bất kỳ. Chẳng hạn, vành các tự đồng cấu của một K-không gian vectơ vô hạn chiều (xem [43, Example 1.4]

Định nghĩa 3.1.1. ([30, page 3]) Một vành R có đơn vị được gọi là có *tính IBN* (Invariant Basis Number) nếu với mọi cặp số nguyên dương m và n,

$R^m \cong R^n$ (như các R-môđun phải) kéo theo $m = n$. Một cách tương đương, R có tính IBN nếu chúng ta có thể định nghĩa được số chiều của các R-môđun tự do hữu hạn sinh.

Định lí sau đây cung cấp một tiêu chuẩn cho tính IBN của $L_K(E)$ dựa trên ma trận kề của E. Kết quả này là một dạng ma trận của [38, Theorem 13] đã được đề cập trong phần Mở đầu. Trong [38], Kanuni và Özaydın chứng minh dựa vào K_0-nhóm. Ở đây, chúng tôi chứng minh bàng cách dựa vào vị nhóm đồ thị và lý thuyết về hệ phương trình tuyến tính. Chúng tôi ký hiệu A_E là ma trận kề của đồ thị E và X^t là ma trận chuyển vị của ma trận X.

Định lí 3.1.6. *Cho E là một đồ thị hữu hạn với tập đỉnh $\{v_i \mid 1 \leq i \leq h\}$ sao cho các đỉnh chính quy là $v_1, \cdots, v_z$. Đặt*

$$J_E = \begin{pmatrix} I_z & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_h(\mathbb{N}), \quad b = [1 \ \cdots \ 1]^t \in M_{h\times 1}(\mathbb{N}),$$

và $[A_E^t - J_E \ \ b]$ là ma trận có được từ $A_E^t - J_E$ bằng cách thêm vào cột b. Cho K là một trường. Khi đó, $L_K(E)$ có tính IBN khi và chỉ khi

$$\operatorname{rank}(A_E^t - J_E) < \operatorname{rank}([A_E^t - J_E \ \ b]).$$

Áp dụng các Định lí 2.2.14 và 3.1.6, chúng tôi cung cấp một tiêu chuẩn dựa trên quá trình khử đỉnh nguồn và ma trận kề của E_{sf} cho tính IBN của $L_K(E)$.

Định lí 3.1.8. *Cho E là một đồ thị hữu hạn và K là một trường. Gọi*

$$E = E_0 \to E_1 \to \cdots \to E_i \to \cdots \to E_p = E_{sf}$$

là dãy các đồ thị được sinh ra trong quá trình từng bước khử đỉnh nguồn. Đặt $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ là tập đỉnh của E_{sf}^0 và n_i số đường trong $F(E_{sf}^0)$ kết thúc tại đỉnh v_i. Khi đó, $L_K(E)$ có tính IBN khi và chỉ khi một trong các điều kiện sau được thoả mãn:

(1) *Tồn tại $0 \leq i \leq p$ để E_i chứa một đỉnh cô lập.*

(2) $\text{rank}(A^t_{E_{sf}} - J_{E_{sf}}) < \text{rank}([A^t_{E_{sf}} - J_{E_{sf}} \quad b'])$, *trong đó* $b' = [1 + n_1, \cdots, 1 + n_k]^t$ *và* $[A^t_{E_{sf}} - J_{E_{sf}} \quad b']$ *là ma trận có được từ* $A^t_{E_{sf}} - J_{E_{sf}}$ *bằng cách thêm vào cột* b'.

Áp dụng Định lí 3.1.6 và 3.1.8, chúng tôi cung cấp một điều kiện đủ thuần tuý đồ thị trên E sao cho $L_K(E)$ có tính IBN.

Hệ quả 3.1.10. *Cho E là một đồ thị hữu hạn và K là một trường. Gọi*

$$E = E_0 \to E_1 \to \cdots \to E_i \to \cdots \to E_t = E_{sf}$$

là dãy các đồ thị được sinh ra trong quá trình từng bước khử đỉnh nguồn. Khi đó, nếu tồn tại $0 \leq i \leq t$ *để* E_i *chứa một đỉnh cô lập, hoặc* E_{sf} *chứa một chu trình nguồn thì* $L_K(E)$ *có tính IBN.*

Sử dụng Hệ quả 3.1.10, chúng tôi nhận lại được kết quả của Koç và Özaydin trong [40], chỉ ra rằng đại số đường Leavitt của một đồ thị hữu hạn mà mỗi đỉnh thuộc nhiều nhất một chu trình luôn có tính IBN. Chúng tôi cũng nhận lại được kết quả của Abrams và Kanuni trong [13] về tính IBN của đại số đường Cohn.

Hệ quả 3.1.12. ([13, Theorem 9]) *Cho E là một đồ thị hữu hạn và K là một trường. Khi đó,* $C_K(E)$ *có tính IBN.*

Chúng ta đã biết tính IBN không bảo toàn qua tương đương Morita (xem [43, Exercise 11, page 502]). Áp dụng Định lí 3.1.8, chúng tôi có thể xây dựng nhiều ví dụ cho thấy tính IBN không phải là một bất biến Morita trong lớp đại số đường Leavitt.

3.2 Đại số đường Leavitt thoả mãn tính chất UGN

Như chúng ta đã biết, với một trường K bất kỳ, mọi hệ sinh của một K-không gian vectơ n chiều luôn có lực lượng từ n trở lên. Điều này nói chung là không đúng đối với các môđun xạ ảnh hữu hạn sinh trên một vành bất kỳ.

Định nghĩa 3.2.1. ([30, page 2]) Một vành R có đơn vị được gọi là có *tính UGN* (Unbounded Generating Number) nếu với mọi số nguyên dương n tồn tại một R-môđun phải hữu hạn sinh không thể được sinh bởi n phần tử. Một cách tương đương, với mỗi số nguyên dương m, mọi hệ sinh của R-môđun phải tự do R^m có lực lượng không nhỏ hơn m.

Trước tiên chúng tôi chứng minh tính UGN là một bất biến qua tương đương Morita.

Định lí 3.2.8. *Cho R và S là các vành có đơn vị và tương đương Morita. Khi đó, R có tính UGN khi và chỉ khi S tính UGN.*

Lúc đầu, chúng tôi chỉ ra rằng "tính UGN là một bất biến Morita trong lớp các đại số đường Leavitt có đơn vị". Khi được thông báo về tính chất này, P. Ara nhận ra rằng điều này cũng đúng đối với mọi vành có đơn vị (Định lí 3.2.8). Chúng tôi cảm ơn ông ấy vì đã cho phép chúng tôi sử dụng kết quả này trong bài báo [16].

Áp dụng các Định lí 2.2.14 và 3.2.8, chúng tôi cung cấp một tiêu chuẩn thuần tuý đồ thị trên E sao cho $L_K(E)$ có tính UGN.

Định lí 3.2.14. *Cho E là một đồ thị hữu hạn và K là một trường. Gọi*

$$E = E_0 \to E_1 \to \cdots \to E_i \to \cdots \to E_t = E_{sf}$$

là dãy các đồ thị được sinh ra trong quá trình từng bước khử đỉnh nguồn. Khi đó, $L_K(E)$ có tính UGN khi và chỉ khi tồn tại $0 \leq j \leq t$ để E_j chứa một đỉnh cô lập, hoặc E_{sf} chứa một chu trình nguồn.

Chúng ta đã biết tính UGN là thực sự mạnh hơn tính IBN (xem [43, Section 1A]). Sử dụng Định lí 3.1.6 và Định lí 3.2.14, chúng tôi thiết lập được nhiều ví dụ để chứng tỏ để chứng tỏ điều đó trong lớp các đại số đường Leavitt. Bên cạnh đó, trong hệ quả sau đây, chúng tôi chứng minh rằng những tính chất này là tương đương với nhau trong lớp đại số đường Leavitt của các đồ thị kiểu Cayley hữu hạn.

Hệ quả 3.2.15. *Cho G là một nhóm hữu hạn với hàm phân nhánh $\mathfrak{r} = \sum_{C\in\mathcal{C}} \mathfrak{r}_C C$ và K là một trường. Khi đó, các khẳng định sau đây là tương đương:*

(1) $L_K(\Gamma_{G,\mathfrak{r}})$ *có tính UGN;*

(2) $L_K(\Gamma_{G,\mathfrak{r}})$ *có tính IBN;*

(3) $\sum_{C\in\mathcal{C}} \mathfrak{r}_C|C| \leq 1$.

Cho G là nhóm hữu hạn có tập sinh S. Đồ thị Cayley của (G, S), ký hiệu $E_{G,S}$, là đồ thị có tập đỉnh là G và ta nói có một cạnh từ g đến h nếu tồn tại $s \in S$ sao cho $h = gs$.

Hệ quả 3.2.23. *Cho G là một nhóm hữu hạn với S là tập sinh và K là một trường. Khi đó, các điều kiện sau đây là tương đương:*

(1) $L_K(E_{G,S})$ *có tính UGN;*

(2) $L_K(E_{G,S})$ *có tính IBN;*

(3) S *chứa duy nhất một phần tử;*

(4) $E_{G,S}$ *là đồ thị bao gồm một chu trình đơn với $|G|$ đỉnh;*

(5) $L_K(E_{G,S}) \cong M_{|G|}(K[x, x^{-1}])$.

KẾT LUẬN

Cho E là một đồ thị hữu hạn, K là một trường và E_{sf} là đồ thị không có đỉnh nguồn có được qua quá trình từng bước khử đỉnh nguồn từ E. Trong luận án này, chúng tôi đạt được những kết quả sau đây:

(1) Chỉ ra rằng $L_K(E)$ tương đương Morita với tổng trực tiếp của $L_K(E_{sf})$ và một số bản sao của K, đồng thời $L_K(E)$ đẳng cấu với tổng trực tiếp của một số đại số ma trận trên K và $L_K(F)$, trong đó F được xây dựng tường minh từ E_{sf}. Như một hệ quả, chúng tôi nhận lại kết quả của Abrams, Pino, Molina [11] về cấu trúc của đại số đường Leavitt của đồ thị hữu hạn không có lối ra.

(2) Chỉ ra rằng đại số đường Leavitt của đồ thị Hopf đẳng cấu với một số bản sao của đại số đường Leavitt của một thành phần liên thông trong đồ thị Hopf đã cho. Áp dụng kết quả này, chúng tôi chứng minh Giả thuyết Abrams-Tomforde đúng cho một số lớp đồ thị Hopf.

(3) Đưa ra các tiêu chuẩn trên ma trận kề của E và E_{sf} để $L_K(E)$ có tính IBN. Sử dụng tiêu chuẩn này, chúng tôi nhận lại được kết quả của Abrams, Kanuni [13] về tính IBN của đại số đường Cohn.

(4) Cung cấp một tiêu chuẩn thuần tuý đồ thị trên E sao cho $L_K(E)$ có tính UGN. Từ đó, chúng tôi chỉ ra rằng tính UGN và tính IBN là tương đương trên các lớp đại số đường Leavitt của đồ thị Hopf và đồ thị Cayley.

CÁC CÔNG TRÌNH LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

1. G. Abrams, T. G. Nam and N. T. Phuc (2017), "Leavitt path algebras having Unbounded Generating Number", *Journal of Pure and Applied Algebra*, 6 (221), 1322–1343.

2. T. G. Nam and N. T. Phuc (2019), "The structure of Leavitt path algebras và the Invariant Basis Number property", *Journal of Pure and Applied Algebra*, 11 (223), 4827–4856.

3. T. G. Nam and N. T. Phuc (2023), "On Leavitt path algebras of Hopf graphs", *Acta Mathematica Vietnamica*, (48), 533–549.

CÁC KẾT QUẢ TRONG LUẬN ÁN ĐÃ ĐƯỢC BÁO CÁO VÀ THẢO LUẬN TẠI

- Xêmina liên phòng Đại số và Lý thuyết số, Viện Toán học: 5/2024;

- Hội nghị nghiên cứu sinh, Viện Toán học: 11/2019, 11/2021, 11/2022, 11/2023;

- Hội nghị "Đại số - Hình học - Tôpô " (DAHITO, Bà Rịa - Vũng Tàu), 4-6/12/2019;

- Hội nghị "Đại số - Hình học - Tôpô " (DAHITO, Thái Nguyên), 21-23/10/2021;

- Hội nghị Toán học Việt Nam lần thứ 10 (Đà Nẵng), 8-12/8/2023.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

TIẾNG VIỆT

[1] Ngô Đắc Tân (2003), *Lý thuyết tổ hợp và đồ thị*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.

TIẾNG ANH

[2] G. Abrams (1983), "Morita equivalence for rings with local units", *Communications in Algebra*, 8 (11), 801–837.

[3] G. Abrams (2015), "Leavitt path algebras: the first decade", *Bulletin of Mathematical Sciences*, (5), 59–120.

[4] G. Abrams, P. N. Ánh, A. Louly and E. Pardo (2008), "The classification question for Leavitt path algebras", *Journal of Algebra*, 5 (320), 1983–2026.

[5] G. Abrams, P. N. Ánh and E. Pardo (2008), "Isomorphisms between Leavitt algebras and their matrix rings", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, (624), 103–132.

[6] G. Abrams and G. Aranda Pino (2005), "The Leavitt path algebra of a graph", *Journal of Algebra*, 2 (293), 319–334.

[7] G. Abrams and G. Aranda Pino (2006), "Purely infinite simple Leavitt path algebras", *Journal of Pure and Applied Algebra*, 3 (207), 553–563.

[8] G. Abrams and G. Aranda Pino (2008), "The Leavitt path algebras of arbitrary graphs", *Houston Journal of Math*, 2 (34), 423–442.

[9] G. Abrams and G. Aranda Pino (2016), "The Leavitt path algebras of generalized Cayley graphs", *Mediterranean Journal of Mathematics*, (13), 1–27.

[10] G. Abrams, S. Erickson and C. Canto (2018), "The Leavitt path algebras of Cayley graphs C_n^j", *Mediterranean Journal of Mathematics*, 5 (15), 23 pages.

[11] G. Abrams, G. Aranda Pino and M. Siles Molina (2008), "Locally finite Leavitt path algebras", *Israel Journal of Mathematics*, (165), 329-348.

[12] G. Abrams, P. Ara, and M. Siles Molina (2017), *Leavitt path algebras*, Lecture Notes in Mathematics series, Springer-Verlag Inc.

[13] G. Abrams and M. Kanuni (2016), "Cohn path algebras have invariant basic number", *Communications in Algebra*, 1 (44), 371 – 380.

[14] G. Abrams, A. Louly, E. Pardo and C. Smith (2011), "Flow invariants in the classification of Leavitt path algebras", *Journal of Algebra*, 1 (333), 202–231.

[15] G. Abrams and T. G. Nam (2020), "Corners of Leavitt path algebras of finite graphs are Leavitt path algebras", *Journal of Algebra*, (547), 494–518.

[16] G. Abrams, T. G. Nam and N. T. Phuc (2017), "Leavitt path algebras having Unbounded Generating Number", *Journal of Pure and Applied Algebra*, 6 (221), 1322–1343.

[17] G. Abrams and B. Schoonmaker (2015), "Leavitt path algebras of Cayley graphs arising from cyclic groups", *Noncommutative rings and their applications*, (634), 1–10.

[18] G. Abrams and M. Tomforde (2011), "Isomomorphism and Morita equivalence of graph algebras", *Transactions of the American Mathematical Society*, 7 (363), 3733–3767.

[19] A. Alahmadi, H. Alsulami, S. K. Jain and E. I. Zelmanov (2012), "Leavitt path algebras of finite Gelfand-Kirillov dimension", *Journal of Algebra and Its Applications*, 6 (11), 6 pages.

[20] F. W. Anderson and K. R. Fuller (1992), *Rings and Categories of Modules*, Springer-Verlag, New York.

[21] P. N. Ánh and L. Márki (1987), "Morita equivalence for rings without identity", *Tsukuba Journal of Mathematics*, 1 (11), 1–16.

[22] P. Ara and K. Goodearl (2012), "Leavitt path algebras of separated graphs", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, (669), 165–224.

[23] P. Ara, M. A. Moreno and E. Pardo (2007), "Nonstable K-theory for graph algebras", *Algebras and Representation Theory*, (10), 157–178.

[24] P. Ara and K.M. Rangaswamy (2014), "Finitely presented simple modules over Leavitt path algebras", *Journal of Algebra*, (417), 333–352.

[25] S. E. Arklint and E. Ruiz (2015), "Corners of Cuntz-Krieger algebras", *Transactions of the American Mathematical Society*, 11 (367), 7595-7612.

[26] C. Cibils and M. Rosso (2002), "Hopf quivers", *Journal of Algebra*, (254), 241–251.

[27] A. H. Clifford and G. B. Preston (1961), *The algebraic theory of semigroups, vol. 1*, AMS surveys.

[28] P. M. Cohn (1966), "Some remarks on the invariant basic property", *Topology*, 3 (5), 215–228.

[29] P. M. Cohn (1990), "Rank functions on rings", *Journal of Algebra*, 2 (133), 373–385.

[30] P. M. Cohn (2006), *Free ideal rings and localization in general rings*, Cambridge University Press, New York.

[31] D. Drinen and M. Tomforde (2005), "The C^*-algebras of arbitrary graphs", *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 1 (35), 105–135.

[32] S. Eilers, G. Restorff, E. Ruiz and P. W. Sørensen (2021), "The complete classification of unital graph C^*-algebras: Geometric and strong", *Duke Mathematical Journal*, 11 (170), 2421 – 2517.

[33] J. Franks (1984), "Flow equivalence of subshifts of finite type", *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 4 (1), 53–66.

[34] K.R. Goodearl (1979), *von Neumann Regular Rings*, Pitman, London.

[35] K. R. Goodearl (2009), "Leavitt path algebras and direct limits", *Contemporary Mathematics series*, (480), 165–187.

[36] A. Haghany and K. Varadarajan (2002), "IBN and related properties for rings", *Acta Mathematica Hungarica*, 3 (94), 251 – 261.

[37] M. Kanuni, D. M. Barquero, C. M. González and M. Siles Molina (2019), "Classification of Leavitt path algebras with two vertices", *Moscow Mathematical Journal*, 3 (19), 523—548.

[38] M. Kanuni and M. Özaydin (2019), "Cohn-Leavitt path algebras and the invariant basic number property", *Journal of Algebra and Its Applications*, 5 (18), 14 pages.

[39] A.V. Kelarev and S.J. Quinn (2002), "Directed graph and combinatorial properties of semigroups", *Journal of Algebra*, 1 (251), 16 - 26.

[40] A. Koç and M. Özaydın (2020), "Representations of Leavitt path algebras", *Journal of Pure and Applied Algebra*, 3 (224), 1297–1319.

[41] A. Kumjian, D. Pask and I. Raeburn (1998), "Cuntz–Krieger algebras of directed graphs", *Pacific Journal of Mathematics*, 1 (184), 161-174.

[42] G. R. Krause and T. H. Lenagan (2000), *Growth of Algebras and Gelfand-Kirillov Dimension*, Graduate studies in Mathematics Vol. 22. Providence, RI: AMS.

[43] T. Y. Lam (1999), *Lectures on modules and rings*, Springer-Verlag, New York-Berlin.

[44] T. Y. Lam (1991), *A first course in noncommutative rings*, Springer-Verlag, Heidelberg.

[45] W. G. Leavitt (1962), "The module type of a ring", *Transactions of the American Mathematical Society*, (42), 113–130.

[46] D. Lind and B. Marcus (1995), *An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding*, Cambridge University Press, Cambridge.

[47] J. M. Moreno-Fernández and M. Siles Molina (2018), "Graph algebras and the Gelfand-Kirillov dimension", *Journal of Algebra and Its Applications*, 5 (17), 15 pages.

[48] T. G. Nam and N. T. Phuc (2019), "The structure of Leavitt path algebras and the Invariant Basis Number property", *Journal of Pure and Applied Algebra*, 11 (223), 4827–4856.

[49] T. G. Nam and N. T. Phuc (2023), "On Leavitt path algebras of Hopf graphs", *Acta Mathematica Vietnamica*, (48), 533–549.

[50] M. Rieffel (1982), "Morita equivalence for operator algebras", *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, (38), Part1, pp. 285–298.

[51] J. Rosenberg (1994), *Algebraic K-Theory and Its Applications*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag New York.

[52] E. Ruiz and M. Tomforde (2013), "Classification of unital simple Leavitt path algebras of infinite graphs", *Journal of Algebra*, (384), 45–83.

[53] M. Tomforde (2007), "Uniqueness theorems and ideal structure for Leavitt path algebras", *Journal of Algebra*, 1 (318), 270–299.