BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC
VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

VIỆN TOÁN HỌC

NGÔ TẤN PHÚC

TƯƠNG ĐƯƠNG MORITA CỦA ĐẠI SỐ ĐƯỜNG LEAVITT VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HÀ NỘI - 2024

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC
VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

VIỆN TOÁN HỌC

NGÔ TẤN PHÚC

TƯƠNG ĐƯƠNG MORITA CỦA ĐẠI SỐ ĐƯỜNG LEAVITT VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Đại số và Lý thuyết số
Mã số: 9 46 01 04

Người hướng dẫn:
PGS. TS. Trần Giang Nam

HÀ NỘI - 2024

MỤC LỤC

Tóm tắt ..... **iii**
Abstract ..... **iv**
Lời cam đoan ..... **v**
Lời cảm ơn ..... **vi**
Danh mục các ký hiệu ..... **vii**
Mở đầu **1**
Chương 1. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ **11**
1.1. Tương đương Morita 11
1.2. Đồ thị 16
1.3. Đại số đường Leavitt 21
Chương 2. VỀ TƯƠNG ĐƯƠNG MORITA CỦA ĐẠI SỐ ĐƯỜNG LEAVITT **27**
2.1. Phép khử đỉnh nguồn trên đồ thị 28
2.2. Cấu trúc của đại số đường Leavitt 31
2.3. Cấu trúc của đại số đường Leavitt của đồ thị Hopf 49
Chương 3. MỘT SỐ ỨNG DỤNG **70**
3.1. Đại số đường Leavitt thoả mãn tính IBN 70
3.2. Đại số đường Leavitt thoả mãn tính UGN 95
Kết luận **117**
Các công trình liên quan đến Luận án **118**
Các kết quả trong Luận án đã được báo cáo tại **119**
Tài liệu tham khảo **120**
Chỉ mục **125**

TÓM TẮT

Luận án nghiên cứu về tương đương Morita của các đại số đường Leavitt và ứng dụng của nó. Các kết quả chính mô tả cấu trúc của đại số đường Leavitt của một đồ thị hữu hạn thông qua quá trình từng bước khử đỉnh nguồn, chứng minh Giả thuyết Abrams-Tomforde đúng cho một số lớp đồ thị Hopf và thiết lập các tiêu chuẩn về tính IBN, UGN cho đại số đường Leavitt của một đồ thị hữu hạn.

ABSTRACT

The dissertation studies about Morita equivalence of Leavitt path algebras and its applications. The main results provide the structure of the Leavitt path algebra of a finite graph via some step-by-step process of source eliminations, prove that Abrams-Tomforde's conjecture hold for some classes of Hopf graphs and give the criterions for the Leavitt path algebra of a finite graph with coefficients in a field has IBN, UGN property.

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi tại Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam, dưới sự hướng dẫn của PGS. TS. Trần Giang Nam. Tất cả các kết quả được trình bày trong luận án là trung thực và chưa được công bố bởi người khác.

Tháng 10, 2024

Tác giả

Ngô Tấn Phúc

LỜI CẢM ƠN

Trước hết, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn vô hạn đến thầy hướng dẫn, PGS. TS. Trần Giang Nam. Thầy luôn tận tình, chu đáo và kiên nhẫn dìu dắt tôi từ những bước chập chững đầu tiên trên con đường khoa học. Lòng nhiệt tình nghiên cứu không ngừng nghỉ của thầy đã gây ấn tượng và sẽ luôn ảnh hưởng sâu sắc đến tôi.

Tôi xin cảm ơn các thành viên tham dự Xêmina hàng tuần của liên phòng Đại số và Lý thuyết số, Viện Toán học về những nhận xét và góp ý hiệu quả cho các nghiên cứu của tôi trong quá trình học tập tại Viện. Đặc biệt, tôi xin cảm ơn GS. TSKH. Phạm Ngọc Ánh, người đã chỉ bảo rất nhiều điều bổ ích về đại số đường Leavitt và có những đề xuất quý báu về các kết quả nghiên cứu của tôi trong Luận án.

Ngoài ra, tôi xin gửi lời cảm ơn tới các đồng nghiệp tại Khoa Sư phạm Toán - Tin, Trường Đại học Đồng Tháp đã giúp đỡ tôi rất hiệu quả trong suốt những năm làm nghiên cứu sinh của tôi.

Tôi chân thành cảm ơn Quỹ đổi mới sáng tạo của Tập đoàn Vin Group (VINIF) đã cấp một học bổng ngắn hạn cho việc học Tiến sĩ của tôi. Nghiên cứu liên quan đến luận án này được hỗ trợ một phần bởi Quỹ Phát triển Khoa học và Công nghệ Quốc gia Việt Nam (NAFOSTED), Viện Nghiên cứu Cao cấp về Toán (VIASM), Bộ Giáo dục và Đào tạo Việt Nam và Trường Đại học Đồng Tháp.

Tôi cũng xin cảm ơn các anh chị nghiên cứu sinh tại Viện Toán học về những trao đổi, hỗ trợ, chia sẻ trong khoa học cũng như trong cuộc sống.

Cuối cùng, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn tới gia đình, đặc biệt là vợ và các con của tôi, đã luôn yêu thương, động viên, hỗ trợ và mong mỏi tôi hoàn thành luận án.

DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU

Ký hiệu	Ý nghĩa	Trang
$\mathbb{N}$	tập hợp các số tự nhiên	6
$\mathbb{Z}$	vành các số nguyên	15
$\mathbb{Z}_n$	nhóm xyclic $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	86
(a, b)	ước chung lớn nhất của hai số nguyên a và b	87
$\cong$	đẳng cấu	1
$\sim_{ME}$	tương đương Morita	1
$\sim_{SME}$	tương đương Morita mạnh	2
$\|X\|$	lực lượng của tập X	2
$\sqcup_{i\in\Lambda} X_i$	hợp rời của các tập X_i	31
$M^{(I)}$	$\bigoplus_{i\in I} M_i$ (tổng trực tiếp $\|I\|$ lần của M)	7
${}_R\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}_R$)	phạm trù các R-môđun trái (phải)	12
$\mathrm{End}_R(P)$	vành các tự đồng cấu của R-môđun phải P	13
$\mathcal{V}(R)$	tập các lớp đẳng cấu của các R-môđun phải xạ ảnh hữu hạn sinh	14
$K_0(R)$	nhóm Grothendieck của vành R	2
$M_n(R)$	tập các ma trận cỡ $n \times n$ với hệ số trong R	5
I_n	ma trận đơn vị cấp n	2
$\mathrm{Rank}(A)$	hạng của ma trận A	8
E	đồ thị có hướng	1
$\widehat{E}$	đồ thị mở rộng của E	18
A_E	ma trận kề của E	17
M_E	vị nhóm của đồ thị E	19
$\mathcal{S}_E$	tập các thành phần liên thông mạnh của E	6
$E_{\setminus v}$	đồ thị khử đỉnh nguồn của E tại v	28
A_n	đồ thị n đoạn có hướng	19

Ký hiệu	**Ý nghĩa**	**Trang**
R_n	đồ thị hoa hồng n cánh	20
$E_{G,S}$	đồ thị Cayley của nhóm G ứng với tập sinh S	112
$\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$	đồ thị Hopf liên kết với nhóm G và hàm phân nhánh $\mathfrak{r}$	6
Pow(S)	đồ thị luỹ thừa của nửa nhóm S	85
$C_K(E)$	đại số đường Cohn của đồ thị E với hệ số trong K	9
$C^*(E)$	C^* đại số đồ thị của đồ thị E	1
$L_K(E)$	đại số đường Leavitt của đồ thị E với hệ số trong K	1
$K[x, x^{-1}]$	đại số đa thức Laurent trên K	22
$L_K(1, n)$	đại số Leavitt kiểu $(1, n)$ trên K	22
IBN	tính IBN (Invariant Basis Number)	3
UGN	tính UGN (Unbounded Generating Number)	9

MỞ ĐẦU

Một *đồ thị* (có hướng) là một bộ $E = (E^0, E^1, r, s)$ bao gồm *tập đỉnh* E^0, *tập cạnh* E^1, cùng với hai ánh xạ $r, s : E^1 \longrightarrow E^0$. Các đỉnh $r(e)$ và $s(e)$ tương ứng được gọi là *ngọn* và *gốc* của cạnh e. Cho K là một trường. *Đại số đường Leavitt* $L_K(E)$ của đồ thị E với hệ số trên trường K đã được giới thiệu một cách độc lập bởi hai nhóm tác giả Abrams, Aranda Pino [6] vào năm 2005 và Ara, Moreno, Pardo [23] vào năm 2007. Abrams và Aranda Pino sau đó đã mở rộng định nghĩa trong [8] cho các đồ thị đếm được. Đại số đường Leavitt là mở rộng của đại số Leavitt $L_K(1, n)$ (được giới thiệu bởi Leavitt [45] vào năm 1962) và đồng thời chứa nhiều lớp đại số thú vị khác như đại số ma trận, đại số đa thức Laurent, đại số Jacobson,... Thêm nữa, đại số đường Leavitt cũng có thể được xem như một phiên bản đại số của C^*-đại số đồ thị (cho E là một đồ thị có hướng, *C^*-đại số đồ thị* $C^*(E)$ của E đã được giới thiệu bởi Kumjian, Pask và Raeburn [41] vào năm 1998). Trong suốt hai thập kỷ qua, đại số đường Leavitt đã trở thành một chủ đề nghiên cứu sôi động trong ngành đại số kết hợp và thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà toán học thuộc các lĩnh vực khác nhau. Để biết thêm lịch sử, các thành tựu và một số vấn đề mở của đại số đường Leavitt, chúng tôi giới thiệu đến người đọc bài viết tổng quan [3] của Abrams.

Hai vành R và S được gọi là *tương đương Morita*, ký hiệu $R \sim_{ME} S$, nếu hai phạm trù môđun phải trên chúng là tương đương. Một trong những vấn đề mở rất được quan tâm nghiên cứu trong lĩnh vực đại số đường Leavitt là phân loại sai khác tương đương Morita các đại số đường Leavitt dựa trên các bất biến dễ tính toán từ đồ thị, được gợi ý bởi chương trình Elliotts về phân loại các C^*-đại số thông qua K-lý thuyết. Đây là một vấn đề nghiên cứu hấp dẫn không chỉ đối với các nhà đại số mà cả các nhà giải

tích vì nó giúp giải thích một số hiện tượng chưa rõ ràng trong lý thuyết đại số các toán tử.

Hai đồ thị E và F được gọi là *tương đương dòng* nếu E có thể nhận được từ F thông qua các phép biến đổi đồ thị (S), (O), (I) và (R) được giới thiệu trong quyển sách [46] của D. Lind và B. Marcus. Cho R là một vành có đơn vị địa phương, ta gọi $\mathcal{V}(R)$ là *tập các lớp đẳng cấu* (ký hiệu bởi $[P]$) *của các R-môđun phải xạ ảnh hữu hạn sinh.* Khi đó $\mathcal{V}(R)$ là một vị nhóm giao hoán với phép toán cảm sinh từ phép cộng trực tiếp các R-môđun. *Nhóm Grothendieck của R*, ký hiệu $K_0(R)$, là nhóm Grothendieck của vị nhóm $\mathcal{V}(R)$. Trong [4, Theorem 2.8, Propositions 4.1, 4.2], Abrams, Ánh, Louly và Pardo đã chỉ ra rằng nếu E và F là các đồ thị hữu hạn không có cạnh song song (các cạnh trong một đồ thị được gọi là song song nếu chúng có cùng đỉnh ngọn và đỉnh gốc) sao cho $L_K(E)$, $L_K(F)$ là đơn vô hạn thuần tuý, $|E^0| = |F^0| \leq 3$ và tồn tại một đẳng cấu $\phi : K_0(L_K(E)) \to K_0(L_K(F))$ thoả mãn $\phi([L_K(E)]) = [L_K(F)]$ thì $L_K(E) \cong L_K(F)$ và E được đưa về F thông qua phép biến đổi (O).

Trong [14], Abrams, Louly, Pardo và Smith đã chỉ ra rằng nếu E tương đương dòng với F thì $L_K(E) \sim_{ME} L_K(F)$. Ngoài ra, bằng cách áp dụng Định lí Franks [33, Theorem 1], các tác giả thu được rằng nếu E và F là các đồ thị hữu hạn sao cho $L_K(E)$ và $L_K(F)$ là đơn vô hạn thuần tuý, $\det(I - A_E) = \det(I - A_F)$ và tồn tại một đẳng cấu $\phi : K_0(L_K(E)) \to K_0(L_K(F))$ thì $L_K(E) \sim_{ME} L_K(F)$ và E tương đương dòng với F. Nếu thêm điều kiện rằng $\phi([L_K(E)]) = [L_K(F)]$ thì ta được $L_K(E) \cong L_K(F)$.

Trong [52, Theorem 8.6], Ruiz và Tomforde đã chứng minh rằng nếu E và F là đồ thị hữu hạn đỉnh với vô hạn cạnh sao cho $L_K(E)$ và $L_K(F)$ là hai vành đơn vô hạn thuần tuý thì $L_K(E) \sim_{ME} L_K(F)$ khi và chỉ khi $K_0(L_K(E)) \cong K_0(L_K(F))$ và số đỉnh kỳ dị của E bằng số đỉnh kỳ dị của F. Hơn nữa, trong trường hợp này, E tương đương dòng với F.

Ngoài ra, các nỗ lực nghiên cứu cho vấn đề phân loại sai khác tương đương Morita của đại số đường Leavitt cũng nhằm giải quyết giả thuyết

tương đương Morita được Abrams và Tomforde nêu ra trong [18] như sau. Nhắc lại rằng với hai C^*-đại số A và B, ta nói *A tương đương Morita mạnh* với B, ký hiệu $A \sim_{SME} B$ nếu A tương đương Morita với B như các vành.

Giả thuyết Abrams-Tomforde: ([18, Section 9]) *Cho E và F là các đồ thị đếm được. Nếu $L_{\mathbb{C}}(E) \sim_{ME} L_{\mathbb{C}}(F)$ thì $C^*(E) \sim_{SME} C^*(F)$.*

Giả thuyết trên đã được chứng minh cho một số trường hợp riêng như sau. Trong [18], Abrams và Tomforde đã chứng minh giả thuyết trên là đúng cho lớp đồ thị không chứa chu trình và lớp đồ thị hữu hạn bậc ra mà đại số đường Leavitt liên kết là đơn. Gần đây, trong [32], Eilers, Restorff, Ruiz và Sørensen đã chứng minh Giả thuyết Abrams-Tomforde là đúng cho lớp đồ thị có tập đỉnh hữu hạn bằng cách sử dụng một số phép biến đổi đồ thị.

Mục tiêu đầu tiên của luận án này là quan tâm vấn đề sau.

Vấn đề 1. Tìm mối liên hệ giữa hai đồ thị E và F sao cho

$$L_K(E) \sim_{ME} L_K(F).$$

Bên cạnh đó, việc áp dụng tương đương Morita để nghiên cứu cấu trúc của đại số đường Leavitt cũng là một chủ đề rất được quan tâm. Abrams, Pino [8] đã khởi xướng cho hướng nghiên cứu này bằng cách sử dụng lý thuyết tương đương Morita để mô tả cấu trúc của các đại số đường Leavitt đơn, đại số đường Leavitt nửa nguyên tố và đại số đường Leavitt nửa nguyên thủy. Koç, Özaydın [40] ứng dụng tương đương Morita để đặc trưng cho các đại số đường Leavitt có một biểu diễn hữu hạn chiều không tầm thường. Trong luận án này, chúng tôi muốn ứng dụng tương đương Morita để mô tả các đại số đường Leavitt có tính IBN. Một vành R được gọi là *có tính IBN* nếu chúng ta có thể định nghĩa được số chiều của các R-môđun tự do hữu hạn sinh.

Nói chung là không dễ để xác định tính IBN của một vành cho trước. Tính IBN của các đại số đường Leavitt đã được nghiên cứu bởi nhiều tác giả. Cho K là một trường và E là một đồ thị. *Đại số đường Cohn* của đồ

thị E với hệ số trên K, ký hiệu $C_K(E)$, là một trường hợp riêng của đại số đường Leavitt. Abrams và Kanuni [13, Theorem 9] đã chỉ ra rằng $C_K(E)$ luôn thỏa mãn tính IBN. Dựa vào K_0-nhóm, Kanuni và Özaydın trong [38, Theorem 13] đã chỉ ra rằng với một đồ thị hữu hạn $E = (E^0, E^1, r, s)$, $L_K(E)$ có tính IBN khi và chỉ khi $\sum_{v\in E^0} v$ không thuộc vào $\mathbb{Q}$-không gian vectơ sinh bởi hệ $\{w - \sum_{e\in s^{-1}(w)} r(e) \mid w \in E^0, s^{-1}(w) \neq \emptyset\}$. Kanuni, Barquero, Gonzalez và Siles Molina [37] đã xác định được tất cả các đại số đường Leavitt của đồ thị hai đỉnh có tính IBN. Koç và Özaydin trong [40, Corollary 6.9] đã chứng minh rằng đại số đường Leavitt của các đồ thị hữu hạn mà mỗi đỉnh thuộc nhiều nhất một chu trình có tính IBN. Tuy nhiên, đến thời điểm hiện tại, vẫn chưa có một tiêu chuẩn thuần tuý đồ thị trên E sao cho $L_K(E)$ có tính IBN.

Mục tiêu thứ hai của luận án này là khảo sát vấn đề dưới đây.

Vấn đề 2. Tìm các điều kiện thuần tuý đồ thị trên E sao cho $L_K(E)$ có tính IBN.

Bố cục luận án chia làm ba chương. Chương 1 chuẩn bị các kiến thức cần thiết về tương đương Morita, đồ thị và đại số đường Leavitt. Chương 2 và Chương 3 lần lượt trình bày các kết quả về Vấn đề 1 và Vấn đề 2. Sau đây là giới thiệu ngắn gọn về các kết quả này.

Cho E là một đồ thị hữu hạn, K là một trường và E_{sf} là đồ thị không có đỉnh nguồn có được qua quá trình từng bước khử đỉnh nguồn từ E.

Đối với Vấn đề 1. Đầu tiên, chúng tôi chỉ ra rằng $L_K(E)$ tương đương Morita với tổng trực tiếp của $L_K(E_{sf})$ và một số bản sao của K. Kết quả này cho phép chúng ta quy việc nghiên cứu $L_K(E)$ về việc nghiên cứu $L_K(E_{sf})$.

Định lí 2.1.6. *Cho E là một đồ thị hữu hạn và K là một trường. Gọi*

$$E = E_0 \to E_1 \to \cdots \to E_i \to \cdots \to E_t = E_{sf}$$

là dãy các đồ thị được sinh ra trong quá trình từng bước khử đỉnh nguồn.

Khi đó, $L_K(E) \sim_{ME} K^s \oplus L_K(E_{sf})$*, trong đó* s *là số các đỉnh thu trong* E *nhưng không thuộc* E^0_{sf}*.*

Sử dụng các phép biến đổi đồ thị đã biết, chúng tôi chỉ ra rằng $L_K(E)$ đẳng cấu với tổng trực tiếp của một số đại số ma trận trên K và $L_K(F)$, trong đó F được xây dựng tường minh từ E_{sf}. Chúng tôi nhắc lại một số khái niệm như sau. Cho $E = (E^0, E^1, r, s)$ là một đồ thị và c là một chu trình trong E. Ta gọi c là *chu trình nguồn* nếu $|r^{-1}(v)| = 1$ với mọi đỉnh $v \in c^0$. Ta nói rằng tập con $H \subset E^0$ là *di truyền* nếu với mọi $v \in H$ và $w \in E^0$, $v \geq w$ kéo theo $w \in H$. Cho H là một tập con di truyền của E^0. Xét tập hợp

$$F(H) = \{\alpha \mid \alpha = e_1 e_2 \cdots e_n, e_1, e_2, \cdots, e_n \in E^1, s(e_n) \notin H, r(e_n) \in H\}.$$

Gọi $\overline{F}(H) = \{\overline{\alpha} \mid \alpha \in F(H)\}$. Ta định nghĩa đồ thị $E(H)$ chính là $(H, s^{-1}(H), s, r)$ cùng với các đỉnh nguồn $\alpha \in F(H)$ với duy nhất một cạnh $\overline{\alpha}$ từ α đến $r(\alpha)$.

Định lí 2.2.14. *Cho* E *là một đồ thị hữu hạn và* K *là một trường. Gọi*

$$E = E_0 \to E_1 \to \cdots \to E_i \to \cdots \to E_t = E_{sf}$$

dãy các đồ thị được sinh ra trong quá trình từng bước khử đỉnh nguồn. Khi đó, các khẳng định sau đây là đúng:

(1) $L_K(E) \cong M_{m_1+1}(K) \oplus \cdots \oplus M_{m_k+1}(K) \oplus L_K(E(E^0_{sf}))$*, trong đó* k *là số các đỉnh thu trong* E *nhưng không thuộc* E^0_{sf} *(gọi chúng là* $v_1, \cdots, v_k$*) và với mỗi* $1 \leq i \leq k$*,* m_i *là số các đường trong* E *kết thúc tại đỉnh thu* v_i*;*

(2) *Với mỗi đỉnh* $v \in E^0_{sf}$*, gọi* n_v *là số các đường trong* E *kết thúc tại* v*. Nếu* $n_v = n$ *với mọi* $v \in E^0_{sf}$ *thì* $L_K(E(E^0_{sf})) \cong M_{n+1}(L_K(E_{sf}))$*;*

(3) *Nếu* E_{sf} *không phải là đồ thị tầm thường thì tồn tại một đồ thị hữu hạn không chứa đỉnh nguồn* F *thoả mãn các điều kiện sau đây:*

(*i*) $L_K(F) \cong L_K(E(E^0_{sf}))$*;*

(*ii*) *Tồn tại một song ánh giữa tập các chu trình trong* F *và tập các chu trình trong* E*. Đặc biệt,* F *không có lối ra khi và chỉ khi* E *không có lối ra;*

(iii) Tồn tại một song ánh giữa tập các chu trình nguồn trong F và tập các chu trình nguồn trong E_{sf}.

Áp dụng Định lí 2.2.14, chúng tôi nhận lại được kết quả của Abrams, Pino, Molina [11] về cấu trúc của đại số đường Leavitt của đồ thị không có lối ra.

Hệ quả 2.2.16.([11, Theorems 3.8]) *Cho E là một đồ thị hữu hạn không có lối ra và K là một trường. Gọi $\{c_1, \cdots, c_\ell\}$ là tập các chu trình và $\{v_1, \cdots, v_k\}$ là tập các đỉnh thu trong E. Khi đó, $L_K(E)$ đẳng cấu với*

$$(\bigoplus_{i=1}^{k} M_{m_i+1}(K)) \oplus (\bigoplus_{j=1}^{\ell} M_{n_j+1}(K[x, x^{-1}])),$$

trong đó với mỗi $1 \leq i \leq k$, m_i là số các đường kết thúc tại đỉnh thu v_i và với mỗi $1 \leq j \leq \ell$, n_j là số các đường kết thúc tại một đỉnh cố định (chọn trước tuỳ ý) của chu trình c_j mà không chứa chu trình đó.

Chúng tôi nhắc lại khái niệm đồ thị Hopf đã được giới thiệu bởi Cibils và Rosso trong [26]. Cho G là một nhóm và $\mathcal{C}$ là tập tất cả các lớp liên hợp của G. Ta gọi một *hàm phân nhánh* của G là một ánh xạ $\mathfrak{r} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{N}$. Ta còn có thể viết hàm phân nhánh dưới dạng tổng hình thức $\mathfrak{r} = \sum_{C \in \mathcal{C}} \mathfrak{r}_C C$, trong đó $\mathfrak{r}_C := \mathfrak{r}(C)$. *Giá* của $\mathfrak{r}$ là tập hợp $\text{supp}(\mathfrak{r}) = \{\text{C} \in \mathcal{C} \mid \mathfrak{r}_\text{C} > 0\}$. *Đồ thị Hopf liên kết với cặp* $(G, \mathfrak{r})$, ký hiệu $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$, là đồ thị có tập đỉnh $\Gamma^0_{G,\mathfrak{r}} = G$ và có $\mathfrak{r}_C$ cạnh từ x đến xc với mỗi $x \in G$ và $c \in C$. Gọi $S_{G,\mathfrak{r}}$ là nửa nhóm con của G sinh bởi tập $\bigcup_{C \in \text{supp}(\mathfrak{r})} C$. Ta định nghĩa $\Delta_{G,\mathfrak{r}}$ là đồ thị con của $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ sau đây: nếu $\mathfrak{r} = 0$ thì $\Delta_{G,\mathfrak{r}}$ là đồ thị tầm thường, ngược lại

$$\Delta_{G,\mathfrak{r}} = (\Delta^0_{G,\mathfrak{r}}, \Delta^1_{G,\mathfrak{r}}, r|_{\Delta^1_{G,\mathfrak{r}}}, s|_{\Delta^1_{G,\mathfrak{r}}}),$$

trong đó $\Delta^0_{G,\mathfrak{r}} := \langle S_{G,\mathfrak{r}} \rangle$ và $\Delta^1_{G,\mathfrak{r}} := r^{-1}(\Delta^0_{G,\mathfrak{r}})$.

Ta định nghĩa $\Lambda_{G,\mathfrak{r}}$ là đồ thị con của $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ sau đây: nếu $S_{G,\mathfrak{r}}$ không phải là vị nhóm con của G thì $\Lambda_{G,\mathfrak{r}}$ là đồ thị tầm thường, ngược lại

$$\Lambda_{G,\mathfrak{r}} = (\Lambda^0_{G,\mathfrak{r}}, \Lambda^1_{G,\mathfrak{r}}, r|_{\Lambda^1_{G,\mathfrak{r}}}, s|_{\Lambda^1_{G,\mathfrak{r}}}),$$

trong đó $\Lambda^0_{G,\mathfrak{r}} := G(S_{G,\mathfrak{r}})$ là nhóm con lớn nhất của G được chứa trong $S_{G,\mathfrak{r}}$ và $\Lambda^1_{G,\mathfrak{r}} := r^{-1}(\Lambda^0_{G,\mathfrak{r}}) \cap s^{-1}(\Lambda^0_{G,\mathfrak{r}})$.

Ta ký hiệu bởi $\mathcal{S}_{\Delta_{G,\mathfrak{r}}}$ tập hợp tất cả các thành phần liên thông mạnh (xem trang 19) của $\Delta_{G,\mathfrak{r}}$. Với mỗi $\Pi \in \mathcal{S}_{\Delta_{G,\mathfrak{r}}}$, ta ký hiệu Π^0 là tập các đỉnh trong Π. Hiển nhiên $\mathcal{S}_{\Delta_{G,\mathfrak{r}}}$ là một tập sắp thứ tự bộ phận bởi quan hệ $\geq$ xác định như sau: với mọi $\Pi_1, \Pi_2 \in \mathcal{S}_{\Delta_{G,\mathfrak{r}}}$, $\Pi_1 \geq \Pi_2$ nếu tồn tại $v \in \Pi_1^0$ và $w \in \Pi_2^0$ để $v \geq w$. $\mathcal{S}_{\Delta_{G,\mathfrak{r}}}$ được gọi là tập *định hướng xuống* nếu với mọi $\Pi_1, \Pi_2 \in \mathcal{S}_{\Delta_{G,\mathfrak{r}}}$, tồn tại $\Pi_3 \in \mathcal{S}_{\Delta_{G,\mathfrak{r}}}$ sao cho $\Pi_1 \geq \Pi_3$ và $\Pi_2 \geq \Pi_3$. Trong định lí sau, chúng tôi mô tả cấu trúc của các đồ thị Hopf và đại số đường Leavitt của chúng.

Định lí 2.3.9. *Cho G là một nhóm với hàm phân nhánh $\mathfrak{r} = \sum_{C \in \mathcal{C}} \mathfrak{r}_C C$ và K là một trường. Khi đó, các khẳng định sau đây là đúng:*

(1) *$\Delta_{G,\mathfrak{r}}$ là một thành phần liên thông của $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ và $\Gamma_{G,\mathfrak{r}} = \bigsqcup_{i \in G/\Delta^0_{G,\mathfrak{r}}} \Omega_i$, trong đó Ω_i đẳng cấu với $\Delta_{G,\mathfrak{r}}$ như các đồ thị;*

(2) *$\Lambda_{G,\mathfrak{r}}$ là một thành phần liên thông mạnh của $\Delta_{G,\mathfrak{r}}$ và $\Pi \cong \Lambda_{G,\mathfrak{r}}$ như các đồ thị với mọi thành phần liên thông mạnh Π của $\Delta_{G,\mathfrak{r}}$. Hơn nữa,*

$$|\mathcal{S}_{\Delta_{G,\mathfrak{r}}}| = \begin{cases} |\Delta^0_{G,\mathfrak{r}}/\Lambda^0_{G,\mathfrak{r}}| & \text{nếu } S_{G,\mathfrak{r}} \text{ là một vị nhóm con của } G; \\ |\Delta^0_{G,\mathfrak{r}}| & \text{trường hợp còn lại;} \end{cases}$$

(3) *$\Delta_{G,\mathfrak{r}}$ là một thành phần liên thông mạnh của $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ khi và chỉ khi $\mathfrak{r} = 0$ hoặc $S_{G,\mathfrak{r}}$ là một nhóm con của G. Như một hệ quả, nếu $S_{G,\mathfrak{r}}$ là hữu hạn thì $\Delta_{G,\mathfrak{r}}$ là một thành phần liên thông mạnh của $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$;*

(4) *Nếu thêm rằng G là giao hoán thì $(\mathcal{S}_{\Delta_{G,\mathfrak{r}}}, \geq)$ là định hướng xuống;*

(5) *$L_K(\Gamma_{G,\mathfrak{r}}) \cong L_K(\Delta_{G,\mathfrak{r}})^{(G/\Delta^0_{G,\mathfrak{r}})}$.*

Áp dụng Định lí 2.3.9, chúng tôi chỉ ra Giả thuyết Abrams-Tomforde đúng cho một số lớp đồ thị Hopf.

Định lí 2.3.19. *Giả thuyết Abrams - Tomforde đúng cho các lớp đồ thị Hopf liên kết với các cặp $(G, \mathfrak{r})$ sao cho G là nhóm đếm được và một trong các điều kiện sau đây được thoả mãn:*

(1) *$S_{G,\mathfrak{r}}$ không là vị nhóm con của G.*

(2) *$\sum_{C \in \mathcal{C}} \mathfrak{r}_C |C| \leq 1$.*

(3) $\sum_{C\in\mathcal{C}} \mathfrak{r}_C|C| \geq 2$, $S_{G,\mathfrak{r}} = G$.

(4) *G là một nhóm hữu hạn.*

Đối với Vấn đề 2. Đầu tiên, chúng tôi cung cấp một tiêu chuẩn cho tính IBN của $L_K(E)$ dựa trên ma trận kề của E. Kết quả này là một dạng ma trận của [38, Theorem 13] đã được đề cập ở trên. Trong [38], Kanuni và Özaydın chứng minh dựa vào K_0-nhóm. Ở đây, chúng tôi chứng minh bằng cách dựa vào vị nhóm đồ thị và lý thuyết về hệ phương trình tuyến tính. Chúng tôi ký hiệu A_E là ma trận kề của đồ thị E và X^t là ma trận chuyển vị của ma trận X. Với một đỉnh $v \in E^0$ ta gọi v là *đỉnh chính quy* nếu $0 < |s^{-1}(v)| < \infty$.

Định lí 3.1.6. *Cho E là một đồ thị hữu hạn với tập đỉnh $\{v_i \mid 1 \leq i \leq h\}$ sao cho các đỉnh chính quy là $v_1, \cdots, v_z$. Đặt*

$$J_E = \begin{pmatrix} I_z & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_h(\mathbb{N}), \quad b = [1 \ \cdots \ 1]^t \in M_{h\times 1}(\mathbb{N}),$$

và $[A_E^t - J_E \ \ b]$ là ma trận có được từ $A_E^t - J_E$ bằng cách thêm vào cột b. Cho K là một trường. Khi đó, $L_K(E)$ có tính IBN khi và chỉ khi

$$\operatorname{rank}(A_E^t - J_E) < \operatorname{rank}([A_E^t - J_E \ \ b]).$$

Sử dụng phép khử đỉnh nguồn trên đồ thị và các Định lí 2.2.14, 3.1.6, chúng tôi cung cấp một tiêu chuẩn dựa trên quá trình khử đỉnh nguồn và ma trận kề của E_{sf} cho tính IBN của $L_K(E)$.

Định lí 3.1.8. *Cho E là một đồ thị hữu hạn và K là một trường. Gọi*

$$E = E_0 \to E_1 \to \cdots \to E_i \to \cdots \to E_p = E_{sf}$$

là dãy các đồ thị được sinh ra trong quá trình từng bước khử đỉnh nguồn. Đặt $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ là tập đỉnh của E_{sf}^0 và n_i số đường trong $F(E_{sf}^0)$ kết thúc tại đỉnh v_i. Khi đó, $L_K(E)$ có tính IBN khi và chỉ khi một trong các điều kiện sau thoả mãn:

(1) *Tồn tại $0 \leq i \leq p$ để E_i chứa một đỉnh cô lập.*

(2) $\text{rank}(A^t_{E_{sf}} - J_{E_{sf}}) < \text{rank}([A^t_{E_{sf}} - J_{E_{sf}} \quad b'])$, *trong đó* $b' = [1 + n_1, \cdots, 1 + n_k]^t$ *và* $[A^t_{E_{sf}} - J_{E_{sf}} \quad b']$ *là ma trận có được từ* $A^t_{E_{sf}} - J_{E_{sf}}$ *bằng cách thêm vào cột* b'.

Áp dụng Định lí 3.1.6 và 3.1.8, chúng tôi cung cấp một điều kiện đủ thuần tuý đồ thị trên E sao cho $L_K(E)$ có tính IBN.

Hệ quả 3.1.10. *Cho E là một đồ thị hữu hạn và K là một trường. Gọi*

$$E = E_0 \to E_1 \to \cdots \to E_i \to \cdots \to E_t = E_{sf}$$

là dãy các đồ thị được sinh ra trong quá trình từng bước khử đỉnh nguồn. Khi đó, nếu tồn tại $0 \leq i \leq t$ *để* E_i *chứa một đỉnh cô lập, hoặc* E_{sf} *chứa một chu trình nguồn thì* $L_K(E)$ *có tính IBN.*

Chúng tôi nhận lại được kết quả của Koç và Özaydin [40] chỉ ra đại số đường Leavitt của các đồ thị hữu hạn mà mỗi đỉnh thuộc nhiều nhất một chu trình thì có tính IBN.

Hệ quả 3.1.11. ([40, Corollary 6.9]) *Cho K là một trường và E là một đồ thị hữu hạn mà mỗi đỉnh thuộc nhiều nhất một chu trình. Khi đó,* $L_K(E)$ *có tính IBN.*

Chúng tôi cũng nhận lại được kết quả của Abrams và Kanuni [13] chỉ ra rằng đại số đường Cohn luôn thỏa mãn tính IBN.

Hệ quả 3.1.12. ([13, Theorem 9]) *Cho E là một đồ thị hữu hạn và K là một trường. Khi đó,* $C_K(E)$ *có tính IBN.*

Chúng ta đã biết tính IBN không bảo toàn qua tương đương Morita (xem [43, Exercise 11, trang 502]). Áp dụng Định lí 3.1.8, chúng ta có thể xây dựng nhiều ví dụ cho thấy tính IBN không phải là một bất biến Morita trong lớp đại số đường Leavitt.

Hệ quả 3.1.13. *Tính IBN không phải là một bất biến Morita trong lớp đại số đường Leavitt.*

Trong luận án này, chúng tôi chưa giải quyết được trọn vẹn Vấn đề 2. Tuy nhiên, chúng tôi giải quyết được một phần vấn đề trên thông qua đặc

trưng tính UGN của đại số đường Leavitt. Một vành R được gọi là có *tính UGN* nếu với mỗi số nguyên dương m, mọi hệ sinh của R-môđun phải tự do R^m có lực lượng không nhỏ hơn m. Trong [29], Cohn đã chỉ ra rằng R có tính UGN khi và chỉ khi ta có thể định nghĩa được số chiều của các R-môđun xạ ảnh hữu hạn sinh. Mỗi vành có tính UGN thì luôn thoả mãn tính IBN nhưng chiều ngược lại nói chung là không đúng (xem [43, Section 1A]). Ngược lại với tính IBN, chúng tôi chứng minh tính UGN bảo toàn qua tương đương đương Morita.

Định lí 3.2.8. *Cho R và S là các vành có đơn vị tương đương Morita. Khi đó, R có tính UGN khi và chỉ khi S tính UGN.*

Lúc đầu, chúng tôi chỉ ra rằng "tính UGN là một bất biến Morita trong lớp các đại số đường Leavitt có đơn vị". Khi được thông báo về tính chất này, P. Ara nhận ra rằng điều này cũng đúng đối với mọi vành có đơn vị. Chúng tôi cảm ơn ông ấy vì đã cho phép chúng tôi sử dụng kết quả này trong bài báo của chúng tôi. Áp dụng kết quả đó, chúng tôi cung cấp một tiêu chuẩn thuần tuý đồ thị trên E sao cho $L_K(E)$ có tính UGN.

Định lí 3.2.14. *Cho E là một đồ thị hữu hạn và K là một trường. Gọi*

$$E = E_0 \to E_1 \to \cdots \to E_i \to \cdots \to E_t = E_{sf}$$

là dãy các đồ thị được sinh ra trong quá trình từng bước khử đỉnh nguồn. Khi đó, $L_K(E)$ có tính UGN khi và chỉ khi tồn tại $0 \leq j \leq t$ để E_j chứa một đỉnh cô lập, hoặc E_{sf} chứa một chu trình nguồn.

Sử dụng Định lí 3.1.6 và Định lí 3.2.14, chúng tôi thiết lập được nhiều ví dụ để chứng tỏ rằng tính UGN thực sự mạnh hơn tính IBN (Ví dụ 3.2.18). Tuy nhiên, chúng tôi chỉ ra rằng tính UGN và tính IBN là tương đương trên hai lớp đại số đường Leavitt của đồ thị Hopf và đồ thị Cayley (Hệ quả 3.2.19 và 3.2.23).

CHƯƠNG 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Chương này trình bày một số kiến thức chuẩn bị liên quan đến luận án. Nội dung của chương này chủ yếu được trích từ các tài liệu [6], [12], [16], [23], [43], [48], [49]. Nội dung của từng mục như sau.

- Trong mục 1.1, chúng tôi trình bày định nghĩa và một số tính chất cơ bản về sự tương đương Morita của các vành.

- Trong mục 1.2, chúng tôi nhắc lại các định nghĩa đồ thị (có hướng), vị nhóm đồ thị và một số khái niệm về lý thuyết đồ thị quan trọng nhằm phục vụ cho việc khảo sát đại số đường Leavitt.

- Trong mục 1.3, chúng tôi trình bày định nghĩa và một số tính chất cơ bản của đại số đường Leavitt.

1.1 Tương đương Morita

Trong phần này, chúng tôi trình bày lại định nghĩa và một số tính chất cơ bản về sự tương đương Morita của các vành. Nội dung của mục này chủ yếu được trích từ các tài liệu [20], [21], [43].

Như ta sẽ thấy trong mục 1.3, một đại số đường Leavitt có thể không có đơn vị, vì vậy trong suốt luận án này, một vành nói chung là một vành không yêu cầu sự tồn tại của đơn vị.

Định nghĩa 1.1.1. ([21, Definition 1]) Một phần tử e trong vành được gọi là *luỹ đẳng* nếu $e^2 = e$. Một vành R được gọi là có *đơn vị địa phương* nếu tồn tại một tập các lũy đẳng E trong R sao cho với mọi tập con hữu hạn $X = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq R$, tồn tại $e \in E$ sao cho $X \subseteq eRe$. Trong trường hợp này, $ex_i = x_i = x_ie$ với mỗi $i = 1, \ldots, n$ và e được gọi là đơn vị địa

phương của tập con X.

Trong trường hợp vành R có một đơn vị, ta ký hiệu đơn vị này bằng 1 (hoặc 1_R) như thường lệ. Khi đó $\{1\}$ là tập hợp các đơn vị địa phương của R.

Định nghĩa 1.1.2. ([21, trang 2]) Một R-môđun trái M được gọi là *unita* nếu $RM = M$, tức là với mỗi $m \in M$, tồn tại $r_1, \cdots, r_n \in R$ và $m_1, \cdots, m_n \in M$ sao cho $r_1m_1 + \cdots + r_nm_n = m$. Nếu R là một vành có đơn vị địa phương thì điều này suy ra rằng với mọi tập con hữu hạn $M' \subseteq M$ đều có một lũy đẳng $e \in R$ sao cho $em = m$ với mọi $m \in M'$.

Ta ký hiệu ${}_R\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}_R$) là phạm trù các R-môđun trái (phải).

Trong suốt luận án này, tất cả các vành đều có đơn vị địa phương, tất cả các môđun đều là unita.

Ta nhắc lại khái niệm hai phạm trù tương đương theo [20].

Định nghĩa 1.1.3. ([20, trang 250]) Cho $\mathcal{C}$ và $\mathcal{D}$ là hai phạm trù. Ta nói rằng $\mathcal{C}$ và $\mathcal{D}$ là *tương đương* nếu tồn tại các hàm tử hiệp biến cộng tính $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ và $G: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ sao cho

$$G \circ F \cong Id_{\mathcal{C}} \text{ và } F \circ G \cong Id_{\mathcal{D}},$$

trong đó $Id_{\mathcal{A}}$ là hàm tử đồng nhất trên $\mathcal{A}$.

Khái niệm tương đương Morita của hai vành có đơn vị địa phương được khảo sát đầu tiên bởi Abrams trong [2].

Định nghĩa 1.1.4. ([2, trang 18]) Hai vành có đơn vị địa phương R và S được gọi là *tương đương Morita*, ký hiệu $R \sim_{ME} S$, nếu hai phạm trù $\mathfrak{M}_R$ và $\mathfrak{M}_S$ là tương đương.

Nhận xét 1.1.5. ([21, Corollary 2.3]) Với hai vành có đơn vị địa phương R và S, nếu $\mathfrak{M}_R$ và $\mathfrak{M}_S$ là cặp phạm trù tương đương thì ${}_R\mathfrak{M}$ và ${}_S\mathfrak{M}$ cũng vậy.

Chúng tôi trình bày lại một số ví dụ về tương đương Morita. Nhắc lại rằng phần tử e được gọi là *luỹ đẳng đầy* trong vành R nếu $e^2 = e$ và $ReR = R$ (xem [43, trang 490]).

Ví dụ 1.1.6. (1) ([43, Theorem 17.20]) Cho R là một vành có đơn vị và n là một số nguyên dương. Khi đó, $R \sim_{ME} M_n(R)$.

(2) ([43, Example 18.30]) Cho R là một vành có đơn vị và e là luỹ đẳng đầy của R. Khi đó, $R \sim_{ME} eRe$.

(3) ([21, Proposition 3.4]) Cho R và S là hai vành giao hoán có đơn vị địa phương. Khi đó, $R \sim_{ME} S$ khi và chỉ khi $R \cong S$.

Định lí sau đây cung cấp một đặc trưng cho tương đương Morita của các vành có đơn vị địa phương. Nhắc lại rằng một R-môđun phải P được gọi là *vật sinh* của $\mathfrak{M}_R$ nếu với mọi $M \in \mathfrak{M}_R$, tồn tại một tập không rỗng I sao cho M là ảnh toàn cấu của $P^{(I)}$.

Định lí 1.1.7. ([20, Corollary 22.4] và [43, Proposition 3.4]) *Cho R và S là các vành có đơn vị. Khi đó, $R \sim_{ME} S$ khi và chỉ khi tồn tại vật sinh xạ ảnh hữu hạn sinh P của $\mathfrak{M}_R$ sao cho $S \cong \mathrm{End}_R(P)$.*

Abrams [2] và Ánh, Marki [21] đã mở rộng kết quả trên cho các vành có đơn vị địa phương. Nhắc lại rằng một vật sinh P của $\mathfrak{M}_R$ được gọi là *vật sinh xạ ảnh địa phương* nếu tồn tại một hệ trực tiếp các R-môđun phải xạ ảnh hữu hạn sinh $\{P_i\}_{i\in I}$ sao cho P_i là các hạng tử trực tiếp của P, P_i là hạng tử trực tiếp của P_j với mọi $i \leq j$ và $P = \varinjlim_i P_i$.

Định lí 1.1.8. ([2, Theorem 4.2] và [21, Theorem 2.5]) *Cho R và S là các vành có đơn vị địa phương. Khi đó, $R \sim_{ME} S$ khi và chỉ khi tồn tại vật sinh xạ ảnh địa phương P của $\mathfrak{M}_R$ sao cho $S \cong \varinjlim_i \mathrm{End}_R(P_i)$.*

Hệ quả sau đây đã biết bởi nhiều tác giả. Tuy nhiên chúng tôi trình bày lại ở đây vì không tìm thấy tài liệu nào chứa phép chứng minh.

Hệ quả 1.1.9. *Cho R và S là các vành có đơn vị sao cho $R \sim_{ME} S$. Khi đó, $R^{(J)} \sim_{ME} S^{(J)}$ với một tập không rỗng J.*

Chứng minh. Theo Định lí 1.1.7, tồn tại vật sinh xạ ảnh hữu hạn sinh Q của $\mathfrak{M}_R$ sao cho $S \cong \mathrm{End}_R(Q)$. Với mỗi $j \in J$ ta xét phép chiếu $\pi_j : R^{(J)} \to R, (r_k)_{k\in J} \mapsto r_j$ và xây dựng các $R^{(J)}$-môđun P_j như sau: $P_j := Q$ và phép nhân của môđun được cho bởi ánh xạ sau:

$$\begin{array}{rcl} P_j \times R^{(J)} & \to & P_j \\ (x, \alpha) & \mapsto & x\pi_j(\alpha) \end{array}$$

Đặt $P = \bigoplus_{j\in J} P_j$ và với mỗi tập con hữu hạn $F \subset J$, ta đặt $P_F = \bigoplus_{j\in F} P_j$. Ta thấy các môđun xạ ảnh hữu hạn sinh P_F là hạng tử trực tiếp của P và nếu $F \subset G$ là các tập con hữu hạn của J thì P_F là hạng tử trực tiếp của P_G. Thêm nữa, ta có $P = \varinjlim_F P_F$. Như vậy P là một vật sinh xạ ảnh địa phương của $\mathfrak{M}_{R^{(J)}}$. Theo [15, Proposition 1.5] ta có

$$\mathrm{End}_{R^{(J)}}(P_F) = \mathrm{End}_{R^{(J)}}(\bigoplus_{j\in F} P_j) \cong (\mathrm{Hom}_{R^{(J)}}(P_i, P_j))_{F\times F}.$$

Mặt khác, ta có

$$\mathrm{Hom}_{R^{(J)}}(P_i, P_i) \cong \mathrm{End}_R(Q) \cong S \text{ với mọi } i \in F \text{ và}$$
$$\mathrm{Hom}_{R^{(J)}}(P_i, P_j) = 0 \text{ với mọi } i \neq j \in F.$$

Do đó $\mathrm{End}_{R^{(J)}}(P_F) \cong S^F$. Từ đó ta thu được

$$\varinjlim_F \mathrm{End}_{R^{(J)}}(P_F) \cong \varinjlim_F S^F = S^{(J)}.$$

Vì $R^{(J)}$ và $S^{(J)}$ là các vành có đơn vị địa phương nên áp dụng Định lí 1.1.8 ta được $R^{(J)} \sim_{ME} S^{(J)}$. □

Trong phần còn lại của mục này, chúng tôi nhắc lại khái niệm vị nhóm $\mathcal{V}(R)$ của vành có đơn vị địa phương R và nhóm Grothendieck K_0 của R theo [34] và [35].

Định nghĩa 1.1.10. ([34, trang 200]) Cho R là một vành có đơn vị địa phương, ta gọi $\mathcal{V}(R)$ *tập các lớp đẳng cấu* (ký hiệu bởi $[P]$) *của các R-môđun phải xạ ảnh hữu hạn sinh* và ta trang bị cho $\mathcal{V}(R)$ một cấu trúc vị nhóm giao hoán bằng cách đặt phép toán:

$$[P] + [Q] = [P \oplus Q]$$

với mọi $[P], [Q] \in \mathcal{V}(R)$.

Chúng tôi nhắc lại một số ví dụ sau đây theo [51].

Ví dụ 1.1.11. (1) ([51, Example 1.1.6]) Cho K là một trường. Khi đó, $\mathcal{V}(K)$ là tập các lớp đẳng cấu của các K-không gian vectơ hữu hạn chiều. Gọi P là một không gian vectơ hữu hạn chiều trên K. Như ta đã biết $Q \in [P]$ khi và chỉ khi $\dim_K(P) = \dim_K(Q)$. Khi đó,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}(K) & \cong & \mathbb{N} \\ [\mathrm{P}] & \mapsto & \dim_K(P). \end{array}$$

(2) ([51, Theorem 1.3.1]) Cho K là một trường và n là một số nguyên dương. Khi đó, $\mathcal{V}(M_n(K)) \cong \mathbb{N}$.

Theo [12], chúng tôi nhắc lại khái niệm nhóm Grothendieck của một vị nhóm giao hoán như sau: Cho $(M, +)$ là một vị nhóm giao hoán. Trên $M \times M$ ta xét quan hệ tương đương $\sim$ cho bởi $(m, n) \sim (m', n') \Leftrightarrow \exists k \in M : m+n'+k = m'+n+k$ với mọi $(m, n), (m', n') \in M \times M$. Gọi $G(M)$ là tập thương $M \times M/_\sim$, trong đó các phần tử được ký hiệu bởi $[\ ]_0$. Ta định nghĩa phép $+$ trên $G(M)$ như sau: $[(m, n)]_0 + [(m', n')]_0 = [(m+m', n+n')]_0$ với mọi $[(m, n)]_0, [(m', n')]_0 \in G(M)$. Khi đó $(G(M), +)$ là một nhóm giao hoán, gọi là *nhóm Grothendieck của* M.

Định nghĩa 1.1.12. ([12, Definition 6.1.4]) Cho R là một vành có đơn vị địa phương. *Nhóm Grothendieck của* R, ký hiệu $K_0(R)$, là nhóm Grothendieck của $\mathcal{V}(R)$.

Ví dụ 1.1.13. Cho K là một trường và n là một số nguyên dương. Từ Ví dụ 1.1.11 ta thu được, $K_0((M_n(K))) \cong K_0(K) \cong \mathbb{Z}$.

Kết quả sau đây chỉ ra rằng $K_0(R)$ là một bất biến qua tương đương Morita.

Mệnh đề 1.1.14. ([35, Corollary 5.6]) *Cho R và S là các vành có đơn vị địa phương và tương đương Morita với nhau. Khi đó, $K_0(R) \cong K_0(S)$.*

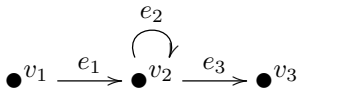
1.2 Đồ thị

Trong phần này, chúng tôi nhắc lại một số khái niệm đồ thị (có hướng), vị nhóm đồ thị và một số tính chất quan trọng trong lý thuyết đồ thị cần thiết cho quá trình khảo sát đại số đường Leavitt. Nội dung của mục này chủ yếu được tham khảo từ các tài liệu [1], [12].

Định nghĩa 1.2.1. ([12, Definition 1.2.2]) Một *đồ thị* (có hướng) là một bộ $E = (E^0, E^1, r, s)$ bao gồm *tập đỉnh* E^0, *tập cạnh* E^1, cùng với hai ánh xạ $r, s : E^1 \longrightarrow E^0$. Các đỉnh $r(e)$ và $s(e)$ tương ứng được gọi là *ngọn* và *gốc* của cạnh e. Đồ thị E là *hữu hạn* nếu cả hai tập E^0 và E^1 là hữu hạn. Đồ thị E được gọi là *đếm được* nếu E^0 và E^1 là các tập đếm được. Đồ thị E được gọi là *hữu hạn bậc ra* nếu $|s^{-1}(v)| < \infty$ với mọi $v \in E^0$.

Với một đỉnh $v \in E^0$ ta gọi v là *đỉnh thu* nếu $s^{-1}(v) = \emptyset$; v là *đỉnh nguồn* nếu $r^{-1}(v) = \emptyset$; v là *đỉnh cô lập* nếu nó vừa là đỉnh thu vừa là đỉnh nguồn; v là *đỉnh chính quy* nếu $0 < |s^{-1}(v)| < \infty$. Một đồ thị E được gọi là *phi nguồn* nếu nó không có đỉnh nguồn.

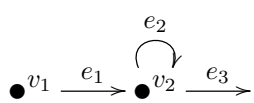
Ví dụ 1.2.2. Cho E là đồ thị như sau:



Trong đồ thị E ta có v_1 là một đỉnh nguồn, v_3 là một đỉnh thu và v_4 là một đỉnh cô lập. Các đỉnh chính quy trong E là v_1 và v_2.

Định nghĩa 1.2.3. Một *đường đi hữu hạn* $p = e_1 \cdots e_n$ trong một đồ thị E là một dãy các cạnh $e_1, \cdots, e_n$ sao cho $r(e_i) = s(e_{i+1})$ với $i = 1, \cdots, n-1$. Trong trường hợp này, ta nói rằng đường đi p bắt đầu tại đỉnh $s(p) := s(e_1)$ và kết thúc tại đỉnh $r(p) := r(e_n)$ và có *độ dài* $|p| := n$. Ta ký hiệu bởi p^0 tập các đỉnh của nó, nghĩa là, $p^0 = \{s(e_i), r(e_i) \mid i = 1, \cdots, n\}$.

Ví dụ 1.2.4. Cho E là đồ thị như sau:

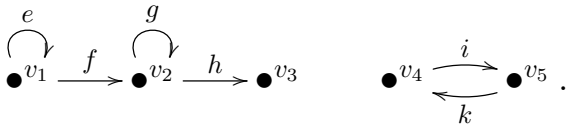


Trong đồ thị E ta có $p = e_1e_2^3 := e_1e_2e_2e_2$ là một đường đi có độ dài là 4 và $p^0 = \{v_1, v_2\}$.

Định nghĩa 1.2.5. ([12, trang 34]) Một đường đi hữu hạn p được gọi là *khép kín* nếu $s(p) = r(p)$, trong trường hợp này p được gọi là *có đáy tại đỉnh* $s(p)$. Một cạnh f là một *lối ra* của đường đi $p = e_1 \cdots e_n$ nếu tồn tại $1 \leq i \leq n$ sao cho $s(f) = s(e_i)$ nhưng $f \neq e_j$ với mọi $j = 1, \cdots, n$. Đường đi khép kín p được gọi là một *chu trình* nếu p không đi qua bất kỳ đỉnh nào của nó hai lần. Một đồ thị E được gọi là *không có lối ra* nếu mọi chu trình trong E đều không có lối ra. Với một chu trình c trong E ta gọi c là *chu trình cô lập* nếu $|r^{-1}(v)| = |s^{-1}(v)| = 1$ với mọi $v \in c^0$; c là *chu trình nguồn* nếu $|r^{-1}(v)| = 1$ với mọi $v \in c^0$.

Với các đỉnh $v, w \in E^0$, ta viết $v \geq w$ nếu tồn tại một đường đi trong E từ v đến w, nghĩa là, tồn tại một đường đi hữu hạn p với $s(p) = v$ và $r(p) = w$. Với $v \in E^0$ và $H \subset E^0$, ta viết $v \geq H$ nếu $v \geq w$ với mọi $w \in H$.

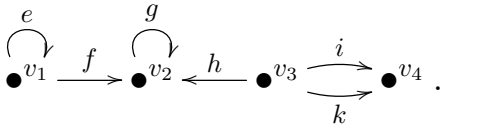
Ví dụ 1.2.6. Cho E là đồ thị như sau:



Trong đồ thị E ta có $c_1 = e$ là một chu trình nguồn, $c_2 = g$ không là chu trình nguồn, $c_3 = ik$ là một chu trình cô lập và do đó cũng là chu trình nguồn. Chu trình c_1 có lối ra f, chu trình c_2 có lối ra h và chu trình c_3 không có lối ra.

Định nghĩa 1.2.7. ([12, Definition 2.1.15]) Cho $E = (E^0, E^1, r, s)$ là một đồ thị hữu hạn với $E^0 = \{v_1, \cdots, v_n\}$. *Ma trận kề* của E, ký hiệu A_E, là ma trận $A_E = (a_{ij})_{n\times n}$, trong đó a_{ij} là số các cạnh e có $s(e) = v_i$ và $r(e) = v_j$.

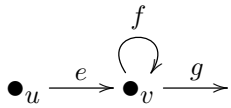
Ví dụ 1.2.8. Cho E là đồ thị như sau:



Khi đó ma trận kề của E là $A_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Định nghĩa 1.2.9. ([12, Definition 2.0.5]) Cho E là một đồ thị và H là một tập con của E^0. Ta nói rằng H là *di truyền* nếu với mọi $v \in H$ và $w \in E^0$, $v \geq w$ kéo theo $w \in H$. Ta nói rằng H là *bão hoà* nếu với mỗi đỉnh chính quy $v \in E^0$, $\{r(e) \mid e \in s^{-1}(v)\} \subseteq H$ kéo theo $v \in H$.

Ví dụ 1.2.10. Cho E là đồ thị như sau:



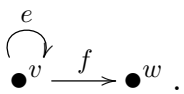
Khi đó, $H = \{v, w\}$ là tập con di truyền nhưng không bão hoà, $G = \{w\}$ là tập con di truyền và bão hoà của E^0.

Định nghĩa 1.2.11. ([6, Definition 1.2]) Cho $E = (E^0, E^1, r, s)$ là một đồ thị. *Đồ thị mở rộng* của E được định nghĩa là $\widehat{E} = (E^0, E^1 \cup (E^1)^*, \widehat{r}, \widehat{s})$, trong đó: $(E^1)^* = \{e^* \mid e \in E^1\}$, các ánh xạ $\widehat{r}$ và $\widehat{s}$ được cho bởi

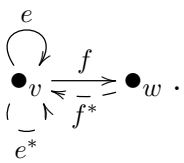
$$\widehat{r}(e) = r(e),\ \widehat{s}(e) = s(e),\ \widehat{r}(e^*) = s(e) \text{ và } \widehat{s}(e^*) = r(e) \text{ với mỗi } e \in E^1.$$

Trong đồ thị $\widehat{E}$, ta gọi $e \in E^1$ là *cạnh thực*, cạnh $e^* \in (E^1)^*$ là *cạnh ảo*. Một đường $e_1 \cdots e_n$ trong đó $e_i \in E^1$ được gọi là *đường thực*. Một đường $e_1^* \cdots e_n^*$ trong đó $e_i^* \in (E^1)^*$ được gọi là *đường ảo*. Với một đường thực $p = f_1 \cdots f_n$, đường ảo p^* xác định như sau: $p^* = f_n^* \cdots f_1^*$.

Ví dụ 1.2.12. Cho E là đồ thị



Khi đó, đồ thị mở rộng $\widehat{E}$ là



Một đồ thị E được gọi là *liên thông mạnh* nếu với mọi cặp đỉnh cho trước $(u, v) \in E^0 \times E^0$ tồn tại một đường đi h trong E sao cho $s(h) = u$ và $r(h) = v$.

Tiếp theo chúng tôi nhắc lại khái niệm đẳng cấu trong đồ thị.

Định nghĩa 1.2.13. ([12, Definition 1.6.1]) Cho $E = (E^0, E^1, r_E, s_E)$ và $F = (F^0, F^1, r_F, s_F)$ là các đồ thị. Ta nói rằng E *đẳng cấu với* F *như các đồ thị* nếu có hai song ánh $\varphi^0 : E^0 \longrightarrow F^0$ và $\varphi^1 : E^1 \longrightarrow F^1$ sao cho φ^0 và φ^1 giao hoán với các ánh xạ ngọn và gốc, nghĩa là, $r_F(\varphi^1(e)) = \varphi^0(r_E(e))$ và $s_F(\varphi^1(e)) = \varphi^0(s_E(e))$ với mọi $e \in E^1$.

Trong phần còn lại của mục này, chúng tôi trình bày một số lưu ý về vị nhóm đồ thị theo [23].

Định nghĩa 1.2.14. ([23, trang 163]) Cho $E = (E^0, E^1, s, r)$ là một đồ thị hữu hạn bậc ra. Ta ký hiệu bởi Y_E vị nhóm giao hoán tự do (phép toán viết theo lối cộng) với tập sinh E^0. Trên Y_E, ta xét các đồng nhất thức sau:

$$(M) \qquad\qquad v = \sum_{e \in s^{-1}(v)} r(e)$$

với mọi đỉnh chính quy $v \in E^0$. Gọi $\sim_E$ là quan hệ tương đẳng trên Y_E sinh ra bởi các đồng nhất thức trên. Vị nhóm thương $Y_E/_{\sim_E}$ được gọi là *vị nhóm đồ thị của* E, ký hiệu M_E. Các phần tử của M_E được ký hiệu bởi $[x]$, với $x \in Y_E$.

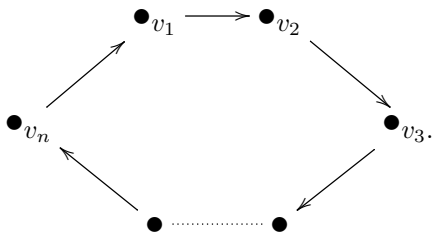
Chúng ta xem xét một số ví dụ sau.

Ví dụ 1.2.15. (1) Với mỗi $n \geq 1$, đặt

$$A_n = \qquad \bullet_{v_1} \xrightarrow{e_1} \bullet_{v_2} \xrightarrow{e_2} \bullet_{v_3} \cdots\cdots \bullet_{v_{n-1}} \xrightarrow{e_{n-1}} \bullet_{v_n} .$$

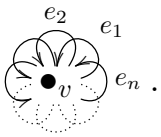
Khi đó, trong M_{A_n}, ta có $[v_1] = [v_2] = \cdots = [v_n]$ và $M_{A_n} = \{j[v_n] \mid j \in \mathbb{N}\} \cong \mathbb{N}$.

(2) Với mỗi $n \geq 1$ đặt C_n là "đồ thị chu trình cô lập n đỉnh"



Khi đó, trong M_{C_n} ta có $[v_1] = \cdots = [v_n]$ và $M_{C_n} = \{j[v_n] \mid j \in \mathbb{N}\} \cong \mathbb{N}$.

(3) Với mỗi $n \geq 2$, đặt

$R_n =$ 

.

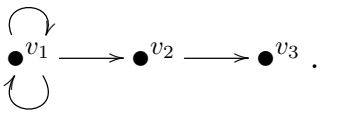
Khi đó, $M_{R_n} = \{0, 1[v], 2[v], \cdots, (n-1)[v]\}$, trong đó $n[v] = [v]$.

Cho E là một đồ thị hữu hạn với $|E^0| = h$ và $\{v_i \mid 1 \leq i \leq z\}$ là tập các đỉnh chính quy. Với $x = n_1 v_1 + \cdots + n_h v_h \in Y_E$ và $1 \leq i \leq z$, ký hiệu $M_i(x)$ là kết quả của việc áp dụng lên x đồng nhất thức (M) tương ứng với đỉnh v_i. Với mỗi dãy σ mà các phần tử được lấy từ $\{1, 2, \cdots, z\}$ và mỗi $x \in Y_E$, đặt $\Lambda_\sigma(x) \in Y_E$ là kết quả của việc áp dụng toán tử M_i theo thứ tự được cho bởi σ. Mệnh đề sau đây cho ta một cách để kiểm tra hai phần tử là bằng nhau trong vị nhóm M_E.

Mệnh đề 1.2.16. ([23, Lemma 4.3]) *Với mỗi cặp $x,\ y \in Y_E$, $[x] = [y]$ trong M_E khi và chỉ khi tồn tại hai dãy σ và σ' được lấy từ $\{1, 2, \cdots, z\}$ sao cho $\Lambda_\sigma(x) = \Lambda_{\sigma'}(y)$ trong Y_E.*

Chiều thuận của Mệnh đề 1.2.16 là rõ ràng. Chúng tôi minh hoạ chiều đảo thông qua ví dụ sau đây.

Ví dụ 1.2.17. Xét đồ thị

$E =$ 

.

Trong M_E, xét $[x] = 2[v_1 + v_2 + v_3] + [v_1]$ và $[y] = [v_1 + v_2 + v_3]$. Khi đó $[x] = [y]$. Thật vậy, trong M_E ta có các đồng nhất thức như sau:

$$(M_1)\ [v_1] = [2v_1 + v_2] \text{ và } (M_2)\ [v_2] = [v_3].$$

Vì thế, vế phải của đẳng thức có thể được biến đổi như sau:

$$\begin{aligned}
[y] &= [v_1 + v_2 + v_3] \\
&= [2v_1 + 2v_2 + v_3] && \text{do } (M_1) \\
&= [4v_1 + 4v_2 + v_3] && \text{do } (M_1) \\
&= [4v_1 + 3v_2 + 2v_3] = [z] && \text{do } (M_2)
\end{aligned}$$

Vế trái của đẳng thức có thể được biến đổi như sau:

$$\begin{aligned}
[x] &= 2[v_1 + v_2 + v_3] + [v_1] \\
&= [2v_1 + 2v_2 + 2v_3] + [2v_1 + v_2] \quad \text{do } (M_1) \\
&= [4v_1 + 3v_2 + 2v_3] = [z]
\end{aligned}$$

Do đó, $\Lambda_\sigma(x) = \Lambda_{\sigma'}(y)$ trong Y_E với $\sigma = \{1\}$ và $\sigma' = \{1, 1, 2\}$.

1.3 Đại số đường Leavitt

Trong phần này, chúng tôi trình bày khái niệm và một số tính chất cơ bản đại số đường Leavitt. Nội dung của mục này chủ yếu được trích từ các tài liệu [6], [12], [23].

Đại số đường Leavitt của một đồ thị với hệ số trên trường đã được giới thiệu một cách độc lập bởi hai nhóm tác giả Abrams, Aranda Pino [6] vào năm 2005 và Ara, Moreno, Pardo [23] vào năm 2007.

Định nghĩa 1.3.1. ([12, Definition 1.2.3]) Cho $E = (E^0, E^1, s, r)$ là một đồ thị và K là một trường, *đại số đường Leavitt* $L_K(E)$ của đồ thị E *với hệ số trên* K là một K-đại số với tập sinh là E^0 và $E^1 \cup (E^1)^*$, thoả mãn các đồng nhất thức sau đây: với mọi $v, w \in E^0$ và $e, f \in E^1$,

(1) $vw = \delta_{v,w} w$;

(2) $s(e)e = e = er(e)$ và $r(e)e^* = e^* = e^* s(e)$;

(3) $e^* f = \delta_{e,f} r(e)$;

(4) $v = \sum_{e \in s^{-1}(v)} ee^*$ với mỗi đỉnh chính quy v,

trong đó δ là ký hiệu Kronecker.

Khái niệm trên có thể diễn đạt theo một cách khác như sau.

Nhận xét 1.3.2. Xét K-đại số tự do $K_E = K\langle E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^* \rangle$ và gọi I là iđêan của K_E sinh bởi các phần tử có dạng:

(1) $vw - \delta_{v,w}w$ với mọi $v, w \in E^0$;

(2) $s(e)e - e, e - er(e), r(e)e^* - e^*, e^* - e^*s(e)$ với mọi $e \in E^1$;

(3) $e^*f - \delta_{e,f}r(e)$ với mọi $e, f \in E^1$;

(4) $v - \sum_{e \in s^{-1}(v)} ee^*$ với mỗi đỉnh chính quy $v \in E^0$,

trong đó δ là ký hiệu Kronecker. Khi đó, $L_K(E) = K_E/I$.

Với cách xây dựng này, đại số đường Leavitt thoả mãn *Tính chất phổ dụng* theo nghĩa sau.

Mệnh đề 1.3.3. ([12, Remark 1.2.5]) Cho E là một đồ thị, K là một trường và A là một K-đại số chứa tập các phần tử $\{a_v, a_e, a_e^* \mid v \in E^0, e \in E^1\}$ thoả mãn các đồng nhất thức tương tự như (1)–(4) trong Định nghĩa 1.3.1. Khi đó, tồn tại duy nhất một đồng cấu K-đại số $\psi : L_K(E) \to A$ sao cho $\psi(v) = a_v, \psi(e) = a_e$ và $\psi(e^*) = a_e^*$ với mọi $v \in E^0$ và $e \in E^1$.

Chúng tôi trình bày lại một số ví dụ về đại số đường Leavitt theo [6].

Ví dụ 1.3.4. ([6, Example 1.4]) (1) Cho K là một trường và ký hiệu $E_{triv} = A_1$ là đồ thị tầm thường với một đỉnh và không có cạnh. Khi đó, $L_K(E_{triv}) \cong K$.

(2) Cho K là một trường và với mỗi $n \geq 1$ ta ký hiệu A_n là một đường định hướng với n đỉnh và $n-1$ cạnh:

$$A_n = \quad \bullet_{v_1} \xrightarrow{e_1} \bullet_{v_2} \xrightarrow{e_2} \bullet_{v_3} \cdots\cdots \bullet_{v_{n-1}} \xrightarrow{e_{n-1}} \bullet_{v_n} .$$

Khi đó, ánh xạ $\phi : L_K(A_n) \to M_n(K)$ được cho bởi: $v_i \mapsto E_{ii}, e_i \mapsto E_{i,i+1}, e_i^* \mapsto E_{i+1,i}, i = 1, \cdots, n$, trong đó $E_{i,j}$ là ma trận có hệ số ở hàng i cột j nhận giá trị 1, các vị trí còn lại nhận giá trị 0.

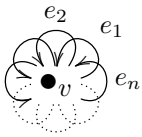
(3) Cho K là một trường và ký hiệu R_1 là đồ thị gồm một đỉnh và một cạnh:

$$R_1 = \quad \bullet_v \circlearrowleft e .$$

Khi đó, ánh xạ $\phi : L_K(R_1) \to K[x, x^{-1}]$ được cho bởi: $e \mapsto x, e^* \mapsto x^{-1}, v \mapsto 1$ là một đẳng cấu.

(4) Cho K là một trường và $n \geq 2$. Một *K-đại số Leavitt kiểu* $(1, n)$, ký hiệu bởi $L_K(1, n)$, là một đại số thương $K\langle x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n\rangle / I$, trong đó I là iđêan sinh bởi các phần tử có dạng $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - 1$ và $y_i x_j - \delta_{ij} 1$, $(1 \leq i, j \leq n)$.

Ký hiệu R_n là đồ thị hoa hồng n cánh với một đỉnh và $n \geq 2$ khuyên:

$R_n =$ 

.

Khi đó, ánh xạ $\phi : L_K(R_n) \to L_K(1, n)$ được cho bởi: $e_i \mapsto x_i, e_i^* \mapsto y_i, v \mapsto 1, i = 1, \cdots, n$ là một đẳng cấu.

Đại số đường Cohn của một đồ thị với hệ số trên trường đã được định nghĩa bởi Ara và Goodearl trong [22].

Định nghĩa 1.3.5. ([22, Definition 2.3]) Cho $E = (E^0, E^1, s, r)$ là một đồ thị và K là một trường. *Đại số đường Cohn $C_K(E)$* của đồ thị E *với hệ số trên K* là một K-đại số với tập sinh là E^0 và $E^1 \cup (E^1)^*$, thoả mãn các đồng nhất thức được cho bởi (1), (2) và (3) của Định nghĩa 1.3.1.

Khái niệm trên có thể diễn đạt theo một cách khác như sau.

Nhận xét 1.3.6. Xét K-đại số tự do $K_E = K\langle E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*\rangle$ và gọi J là iđêan của K_E sinh bởi các phần tử có dạng:

(1) $vw - \delta_{v,w} w$ với mọi $v, w \in E^0$;

(2) $s(e)e - e, e - er(e), r(e)e^* - e^*, e^* - e^* s(e)$ với mọi $e \in E^1$;

(3) $e^* f - \delta_{e,f} r(e)$ với mọi $e, f \in E^1$,

trong đó δ là ký hiệu Kronecker. Khi đó, $C_K(E) = K_E / J$.

Ví dụ 1.3.7. ([12, Proposition 1.3.7]) Cho K là một trường. Một *K-đại số Jacobson J_K* là đại số thương $K\langle x, y\rangle / J$, trong đó J là iđêan của $K\langle x, y\rangle$ sinh bởi $xy - 1$.

Xét đồ thị R_1:

$$R_1 = \quad \bullet_v \circlearrowleft e \,.$$

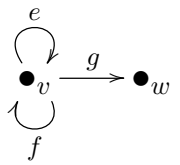
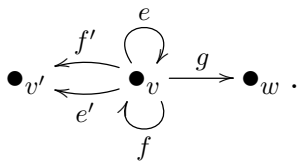
Khi đó, ánh xạ $\phi : C_K(R_1) \to J_K$ được cho bởi: $e \mapsto y, e^* \mapsto x, v \mapsto 1$ là một đẳng cấu.

Cho $E = (E^0, E^1, s, r)$ là một đồ thị và Y là tập các đỉnh chính quy của E. Gọi $Y' = \{v' \mid v \in Y\}$ là một bản sao của Y. Xét $v \in Y$ và với mỗi cạnh e trong E^1 sao cho $r_E(e) = v$, ta đặt một cạnh mới e'. Ta định nghĩa đồ thị $F(E)$ như sau:

$$F(E)^0 := E^0 \sqcup Y' \text{ và } F(E)^1 := E^1 \sqcup \{e' \mid r_E(e) \in Y\},$$

và với mỗi $e \in E^1$, $s_{F(E)}(e) = s_E(e), s_{F(E)}(e') = s_E(e), r_{F(E)}(e) = r_E(e)$ và $r_{F(E)}(e') = r_E(e)'$.

Chúng tôi minh hoạ đồ thị $F(E)$ thông qua ví dụ sau đây.

Ví dụ 1.3.8. Nếu $E =$  thì $F(E) =$ .

Kết quả sau đây cho thấy đại số đường Cohn là một trường hợp riêng của đại số đường Leavitt.

Định lí 1.3.9. ([12, Theorem 1.5.18]) *Cho $E = (E^0, E^1, s, r)$ là một đồ thị và K là một trường. Khi đó, $C_K(E) \cong L_K(F(E))$.*

Tiếp theo chúng tôi nhắc lại một số tính chất cơ bản của đại số đường Leavitt sẽ được dùng đến trong các phần tiếp theo. Ta ký hiệu $\mathrm{Path}(E)$ là tập tất cả các đường đi hữu hạn của E cùng với tập đỉnh E^0.

Mệnh đề 1.3.10. *Cho $E = (E^0, E^1, r, s)$ là một đồ thị và K là một trường. Khi đó, các khẳng định sau đây là đúng:*

(1) ([6, Lemma 1.6]) *Nếu E^0 là tập vô hạn thì $L_K(E)$ là một vành có đơn vị địa phương. Nếu E^0 là hữu hạn thì $L_K(E)$ là một vành có đơn vị với $1_{L_K(E)} = \sum_{v \in E^0} v$.*

(2) ([35, Lemma 1.5]) *Mọi phần tử của tập* $\{v, e, e^* \mid v \in E^0, e \in E^1\}$ *đều khác không trong* $L_K(E)$.

(3) ([12, Corollary 2.1.5]) $L_K(E)$ *là một đại số* $\mathbb{Z}$*-phân bậc, trong đó* $L_K(E) = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} L_K(E)_n$ *với*

$$L_K(E)_n := \mathrm{span}_K\{\gamma\lambda^* \mid \gamma, \lambda \in \mathrm{Path}(E) \text{ và } |\gamma| - |\lambda| = n\}.$$

(4) ([12, Proposition 1.2.14]) *Nếu* $\{E_i\}_{i\in\Lambda}$ *là các thành phần liên thông của* E *thì* $L_K(E) \cong \bigoplus_{i\in\Lambda} L_K(E_i)$.

Định lí sau đây cho phép ta thu gọn mọi phần tử khác không trong đại số đường Leavitt về một đỉnh hoặc một đa thức theo một chu trình không có lối ra. Để làm điều này, chúng tôi nhắc lại một số ký hiệu. Cho $p(x) = \sum_{i=-n}^{m} k_i x^i, m, n \in \mathbb{N}$ là một phần tử của $K[x, x^{-1}]$ và c là một chu trình có đáy tại v trong đồ thị E. Trong $L_K(E)$ ta định nghĩa $p(c) = \sum_{i=-n}^{m} k_i c^i$, trong đó $c^0 = v$ và $c^{-p} := (c^*)^p$ với mọi số nguyên dương p.

Định lí 1.3.11. ([12, Theorem 2.2.11]) *Cho* $E = (E^0, E^1, r, s)$ *là một đồ thị và* K *là một trường. Với mỗi phần tử khác không* $\alpha \in L_K(E)$ *tồn tại* $\mu, \eta \in \mathrm{Path}(E)$ *sao cho:*

(1) *tồn tại* $k \in K$ *và* $v \in E^0$ *để* $0 \neq \mu^*\alpha\eta = kv$*; hoặc*

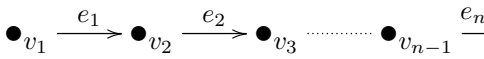
(2) $0 \neq \mu^*\alpha\eta = p(c)$*, trong đó* c *là một chu trình không có lối ra trong* E *và* $p(x)$ *là một đa thức khác không trong* $K[x, x^{-1}]$.

Định lí sau đây mô tả vị nhóm các lớp đẳng cấu các môđun xạ ảnh hữu hạn sinh trên đại số đường Leavitt, được Ara, Moreno và Pardo cung cấp trong [23].

Định lí 1.3.12. ([23, Theorem 3.5]) *Cho* $E = (E^0, E^1, r, s)$ *là một đồ thị hữu hạn bậc ra và* K *là một trường. Khi đó, ánh xạ* $[v] \longmapsto [vL_K(E)]$ *xác định một đẳng cấu của các vị nhóm giao hoán* $M_E \cong \mathcal{V}(L_K(E))$*. Đặc biệt, qua đẳng cấu này, ta có* $[\sum_{v\in E^0} v] \longmapsto [L_K(E)]$.

Từ Ví dụ 1.2.15 ta có các kết quả sau.

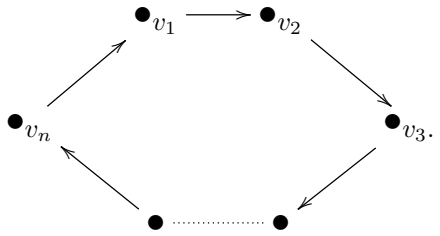
Ví dụ 1.3.13. (1) Với mỗi $n \geq 1$, xét đồ thị

$A_n =$ 

.

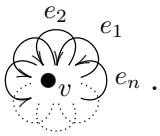
Khi đó, $\mathcal{V}(L_K(A_n)) \cong M_{A_n} \cong \mathbb{N}$.

(2) Với mỗi $n \geq 1$, xét đồ thị C_n



Khi đó, $\mathcal{V}(L_K(C_n)) \cong M_{C_n} \cong \mathbb{N}$.

(3) Với mỗi $n \geq 2$, xét đồ thị

$R_n =$ 

.

Khi đó, $\mathcal{V}(L_K(R_n)) \cong M_{R_n} = \{0, 1[v], 2[v], \cdots, (n-1)[v]\}$, trong đó $n[v] = [v]$.

CHƯƠNG 2

VỀ TƯƠNG ĐƯƠNG MORITA CỦA ĐẠI SỐ ĐƯỜNG LEAVITT

Chương này nghiên cứu Vấn đề 1 được đề cập trong phần Mở đầu và được cấu trúc như sau:

Gọi E_{sf} là đồ thị phi nguồn có được qua quá trình từng bước khử đỉnh nguồn từ đồ thị hữu hạn ban đầu E và K là một trường.

- Trong mục 2.1 chúng tôi chỉ ra rằng $L_K(E)$ tương đương Morita với tổng trực tiếp của $L_K(E_{sf})$ và n bản sao của K, trong đó n là số đỉnh thu trong E và không thuộc E_{sf} (Định lí 2.1.6). Mục này được viết dựa trên bài báo [16].

- Trong mục 2.2 chúng tôi chỉ ra rằng $L_K(E)$ đẳng cấu với tổng trực tiếp của n đại số ma trận trên K và $L_K(F)$, trong đó F được xây dựng tường minh từ E_{sf} (Định lí 2.2.14). Như một hệ quả, chúng tôi nhận lại kết quả của Abrams, Pino, Molina [11] về cấu trúc của đại số đường Leavitt của đồ thị hữu hạn không có lối ra (Hệ quả 2.2.16). Mục này được viết dựa trên bài báo [48].

- Trong mục 2.3, chúng tôi chỉ ra rằng đại số đường Leavitt của đồ thị Hopf đẳng cấu với một số bản sao của đại số đường Leavitt của một thành phần liên thông trong đồ thị Hopf đó (Định lí 2.3.9). Áp dụng kết quả này, chúng tôi chứng minh Giả thuyết Abrams-Tomforde đúng cho một số lớp đồ thị Hopf (Định lí 2.3.21). Mục này được viết dựa trên bài báo [49].

2.1 Phép khử đỉnh nguồn trên đồ thị

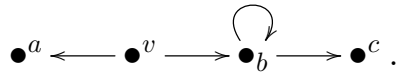
Trong phần này, chúng tôi chỉ ra rằng đại số đường Leavitt của một đồ thị hữu hạn trên trường K là tương đương Morita với tổng trực tiếp của đại số đường Leavitt của một đồ thị phi nguồn có được qua quá trình từng bước khử đỉnh nguồn từ đồ thị ban đầu và một số bản sao của K (Định lí 2.1.6). Mục này được viết dựa trên bài báo [16].

Chúng tôi bắt đầu mục này bằng cách nhắc lại phép khử đỉnh nguồn trên đồ thị theo [14].

Định nghĩa 2.1.1. ([14, Definition 1.2]) Cho $E = (E^0, E^1, r, s)$ là một đồ thị và v là một đỉnh nguồn trong E. *Đồ thị khử đỉnh nguồn* $E_{\backslash v}$ của E là đồ thị được định nghĩa như sau: $(E_{\backslash v})^0 = E^0 \setminus \{v\}$, $(E_{\backslash v})^1 = E^1 \setminus s^{-1}(v)$, $s_{E_{\backslash v}} = s|_{(E_{\backslash v})^1}$ và $r_{E_{\backslash v}} = r|_{(E_{\backslash v})^1}$. Nói cách khác, $E_{\backslash v}$ là đồ thị thu được từ E bằng cách xoá bỏ đỉnh v và tất cả các cạnh trong E phát ra từ v.

Chúng tôi minh hoạ phép khử đỉnh nguồn thông qua ví dụ sau đây.

Ví dụ 2.1.2. Cho E là đồ thị



Khi đó, đồ thị khử đỉnh nguồn $E_{\backslash v}$ là



Bổ đề sau đây khẳng định phép khử đỉnh nguồn bảo toàn tương đương Morita của các đại số đường Leavitt liên kết. Khẳng định này được Abrams, Louly, Pardo và Smith chứng minh trong [14] với giả thiết rằng $L_K(E)$ là đơn. Trường hợp tổng quát đã được chứng minh bởi Ara, Rangaswamy trong [24] và một cách độc lập bởi Ruiz, Tomforde trong [52].

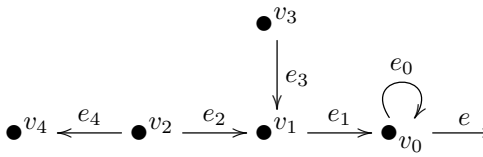
Bổ đề 2.1.3. ([24, Lemma 4.3] và [52, Proposition 3.2]) *Cho E là đồ thị hữu hạn, v là một đỉnh nguồn nhưng không phải là đỉnh thu trong E và K là một trường. Khi đó, $L_K(E) \sim_{ME} L_K(E_{\backslash v})$.*

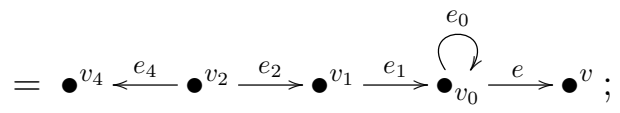
Xét dãy các đồ thị được sinh ra trong quá trình từng bước khử đỉnh nguồn

$$E = E_0 \to E_1 \to \cdots \to E_i \to \cdots \to E_t = E_{sf}.$$

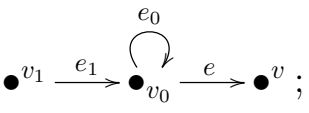
Để tránh việc dẫn đến một đồ thị rỗng, ta định nghĩa E_{sf} là đồ thị tầm thường E_{triv} trong trường hợp $E_{t-1} = E_{triv}$.

Ví dụ 2.1.4. Cho E là đồ thị

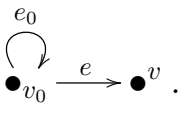


Khi đó, $F = E_{\setminus v_3} =$ 

;

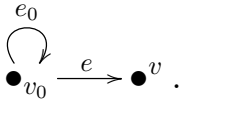
$G = F_{\setminus v_2} =$ 

;

$H = G_{\setminus v_1} =$ 

.

Cuối cùng, ta nhận được

$E_{sf} = H_{\setminus v_4} =$ 

.

Có nhiều cách khác nhau để nhận được đồ thị phi nguồn E_{sf} từ một đồ thị E ban đầu. Kết quả sau cho thấy, E_{sf} không phụ thuộc vào việc chọn quá trình khử đỉnh nguồn. Ngoài ra, E^0_{sf} là tập con di truyền của E^0.

Mệnh đề 2.1.5. *Với mọi đồ thị hữu hạn E, các khẳng định sau là đúng.*

(1) *$E_{sf} = E_{triv}$ khi và chỉ khi E không chứa chu trình.*

(2) *Giả sử E chứa chu trình. Khi đó,*

$$E^0_{sf} = \bigcup\nolimits_c T_E(c) \text{ và } E^1_{sf} = E^1|_{E^0_{sf}},$$

trong đó $T_E(c) := \{w \in E^0 \mid$ *tồn tại* $v \in c^0$ *để* $v \geq w\}$ *với* c *là một chu trình trong* E.

Chứng minh. Trước tiên, ta chú ý rằng, nếu $v \in E^0$ là một đỉnh nguồn thì ta có các khẳng định sau:

(1) c là chu trình trong E khi và chỉ khi c là chu trình trong $E_{\backslash v}$ và

(2) nếu c là chu trình trong E thì $T_E(c) = T_{E_{\backslash v}}(c)$.

(3) Nếu E không chứa chu trình và $E \neq E_{triv}$ thì $E_{\backslash v}$ chứa đỉnh nguồn.

Bây giờ, xét dãy các đồ thị được sinh ra trong quá trình từng bước khử đỉnh nguồn

$$E = E_0 \to E_1 \to \cdots \to E_i \to \cdots \to E_t =: E_{sf}$$

Sử dụng các chú ý ở trên, ta lập tức thu được $E_{sf} = E_{triv}$ khi và chỉ khi E không chứa chu trình; và $T_E(c) \subseteq E^0_{sf}$ với mỗi chu trình c trong E. Từ đó suy ra $\bigcup_c T_E(c) \subseteq E^0_{sf}$. Tiếp theo, ta chứng minh $E^0_{sf} \subseteq \bigcup_c T_E(c)$. Gọi $v \in E^0$ sao cho $v \notin \bigcup_c T_E(c)$, ta cần chứng minh rằng $v \notin E^0_{sf}$. Thật vậy, xét đồ thị con $X = (X^0, X^1, r|_{X^1}, s|_{X^1})$ của E, trong đó $X^0 = \{x \in E^0 \mid x \geq v\}$ và $X^1 = r^{-1}(X^0)$. Vì $v \notin \bigcup_c T_E(c)$ nên với mọi đỉnh $x \in X^0$, x không thể là đáy của một chu trình. Từ đó suy ra X là một đồ thị con không chứa chu trình của E. Vì thế $x \notin E^0_{sf}$ với mọi $x \in X^0$. Do đó $v \notin E^0_{sf}$, nghĩa là $E^0_{sf} \subseteq \bigcup_c T_E(c)$. □

Định lí sau đây là kết quả chính của mục này, cho phép ta đưa việc nghiên cứu đại số đường Leavitt $L_K(E)$ về đại số đường Leavitt $L_K(E_{sf})$.

Định lí 2.1.6. *Cho* E *là một đồ thị hữu hạn và* K *là một trường. Gọi*

$$E = E_0 \to E_1 \to \cdots \to E_i \to \cdots \to E_t = E_{sf}$$

là dãy các đồ thị được sinh ra trong quá trình từng bước khử đỉnh nguồn. Khi đó, $L_K(E) \sim_{ME} K^s \oplus L_K(E_{sf})$, *trong đó* s *là số các đỉnh thu trong* E *nhưng không thuộc* E^0_{sf}.

Chứng minh. Giả sử $\{v_1, \cdots, v_s\}$ là tập tất cả các đỉnh thu trong E nhưng không thuộc E^0_{sf}. Với mỗi $v \in \{v_1, \cdots, v_s\}$ xét đồ thị con

$$X = (X^0, X^1, r|_{X^1}, s|_{X^1})$$

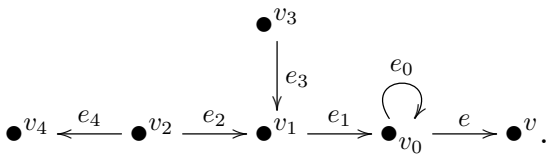
của E, trong đó $X^0 = \{x \in E^0 \mid x \geq v\}$ và $X^1 = r^{-1}(X^0)$. Theo Mệnh đề 2.1.5, $v \notin \bigcup_c T_E(c)$. Vì thế, với mọi đỉnh $x \in X^0$, x không thể là đáy của một chu trình. Từ đó suy ra X là một đồ thị con không chứa chu trình của E. Với mỗi $i = 1, \cdots, s$, gọi E_i là đồ thị tầm thường với một đỉnh v_i và không có cạnh. Gọi $F = (\sqcup_{i=1}^s E_i) \sqcup E_{sf}$. Áp dụng Bổ đề 2.1.3, ta thu được $L_K(E) \sim_{ME} L_K(F)$. Theo Mệnh đề 1.3.10 (4) ta có

$$L_K(F) = (\oplus_{i=1}^s L_K(E_i)) \oplus L_K(E_{sf}).$$

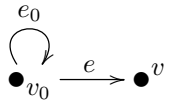
Theo Ví dụ 1.3.4 (1) ta được $L_K(E_i) \cong K$ và $L_K(F) \cong K^s \oplus L_K(E_{sf})$. Do đó, $L_K(E) \sim_{ME} K^s \oplus L_K(E_{sf})$, kết thúc chứng minh. □

Định lí 2.1.6 cho phép chúng ta quy việc nghiên cứu đại số đường Leavitt trên đồ thị ban đầu về đồ thị đơn giản hơn. Chúng tôi minh hoạ điều đó thông qua ví dụ sau đây.

Ví dụ 2.1.7. Cho E là đồ thị



Theo Ví dụ 2.1.4 ta được E_{sf} là đồ thị sau:



Thêm nữa, chỉ có v_4 là đỉnh thu trong E nhưng không thuộc E^0_{sf}. Khi đó, theo Định lí 2.1.6 ta có $L_K(E) \sim_{ME} K \oplus L_K(E_{sf})$.

2.2 Cấu trúc của đại số đường Leavitt

Nội dung chính của phần này là cung cấp cấu trúc của đại số đường Leavitt của một đồ thị hữu hạn thông qua quá trình từng bước khử đỉnh nguồn (Định lí 2.2.14). Mục này được viết dựa trên bài báo [48].

Chúng tôi bắt đầu mục này bằng việc đề cập đến một số định nghĩa về đồ thị đã được giới thiệu trong [25].

Định nghĩa 2.2.1. ([25, Definition 3.2]) Cho E là một đồ thị, v_0 là một đỉnh trong E và n là một số nguyên dương. Ta định nghĩa một đồ thị $E(v_0, n)$ như sau:

$$E(v_0, n)^0 = E^0 \cup \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$$

$$E(v_0, n)^1 = E^1 \cup \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$$

trong đó $r_{E(v_0,n)}$, $s_{E(v_0,n)}$ tương ứng là mở rộng của r_E, s_E và $r_{E(v_0,n)}(e_i) = v_{i-1}$ và $s_{E(v_0,n)}(e_i) = v_i$.

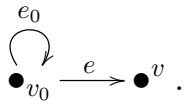
Định nghĩa 2.2.2. ([25, Definition 3.3]) Cho E là một đồ thị, e_0 là một cạnh trong E và n là một số nguyên dương. Ta định nghĩa một đồ thị $E(e_0, n)$ như sau:

$$E(e_0, n)^0 = E^0 \cup \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$$
$$E(e_0, n)^1 = E^1 \setminus \{e_0\} \cup \{e_1, e_2, \cdots, e_{n+1}\}$$

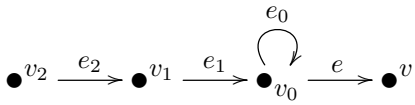
trong đó $r_{E(e_0,n)}$, $s_{E(e_0,n)}$ tương ứng là mở rộng của r_E, s_E và $r_{E(e_0,n)}(e_i) = v_{i-1}$ với $i = 2, \cdots, n+1$; $s_{E(e_0,n)}(e_i) = v_i$ với $i = 1, \cdots, n$; $r_{E(e_0,n)}(e_1) = r_E(e_0)$; $s_{E(e_0,n)}(e_{n+1}) = s_E(e_0)$.

Chúng tôi minh hoạ các khái niệm đồ thị trên thông qua ví dụ sau đây.

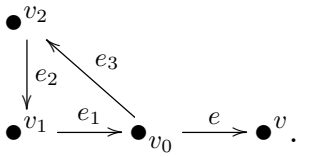
Ví dụ 2.2.3. Cho E là đồ thị



Khi đó, $E(v_0, 2)$ là đồ thị



và $E(e_0, 2)$ là đồ thị



Trong [25], Arklint và Ruiz đã chứng minh kết quả sau đây cho trường hợp C^*-đại số đồ thị. Trong bổ đề sau, chúng tôi thiết lập một phiên bản tương tự cho đại số đường Leavitt.

Bổ đề 2.2.4. *Cho E là một đồ thị, e_0 là một cạnh trong E, n là một số nguyên dương và K là một trường. Gọi $v_0 = r_E(e_0)$. Khi đó,*

$$L_K(E(v_0, n)) \cong L_K(E(e_0, n)).$$

Chứng minh. Giả sử rằng $L_K(E(v_0, n))$ có tập sinh là

$$\{v, e, e^* \mid v \in E(v_0, n)^0, e \in E(v_0, n)^1\}$$

và thoả mãn các đồng nhất thức (1) - (4) trong Định nghĩa 1.3.1. Ta định nghĩa các phần tử $\{a_v, a_e, a_e^* \mid v \in E(v_0, n)^0, e \in E(v_0, n)^1\}$ của $L_K(E(e_0, n))$ bằng cách đặt: $a_v = v$,

$$a_e = \begin{cases} e & \text{nếu } e \neq e_0, \\ e_{n+1}e_n \cdots e_1 & \text{nếu } e = e_0, \end{cases}$$

và

$$a_e^* = \begin{cases} e^* & \text{nếu } e \neq e_0, \\ e_1^* \cdots e_n^* e_{n+1}^* & \text{nếu } e = e_0. \end{cases}$$

Chúng tôi lặp lại nguyên văn các lập luận trong chứng minh của [25, Proposition 3.5] để chỉ ra rằng các phần tử $\{a_v, a_e, a_e^* \mid v \in E(v_0, n)^0, e \in E(v_0, n)^1\}$ thoả mãn các đồng nhất thức sau:

(1) $a_v a_w = \delta_{v,w} a_w$, trong đó δ là ký hiệu Kronecker;

(2) $a_{s(e)} a_e = a_e = a_e a_{r(e)}$ và $a_{r(e)} a_e^* = a_e^* = a_e^* a_{s(e)}$;

(3) $a_e^* a_f = \delta_{e,f} a_{r(e)}$;

(4) $a_v = \sum_{e \in s_{E(v_0,n)}^{-1}(v)} a_e a_e^*$ với mỗi đỉnh chính quy v trong $E(v_0, n)$,

với mọi $v, w \in E(v_0, n)^0$ và với mọi $e, f \in E(v_0, n)^1$.

Ta có $a_v a_w = vw = \delta_{v,w} w = \delta_{v,w} a_w$. Vì vậy ta có (1).

Ta lại có

$$a_{s(e)} a_e = \begin{cases} s(e)e = e = a_e & \text{nếu } e \neq e_0, \\ s(e_0)e_{n+1}e_n \cdots e_1 = e_{n+1}e_n \cdots e_1 = a_e & \text{nếu } e = e_0. \end{cases}$$

Tương tự ta chứng minh được các đẳng thức còn lại trong (2).

Ta có

$$a_e^* a_e = \begin{cases} e^* e = r(e) = a_{r(e)} & \text{nếu } e \neq e_0, \\ e_1^* \cdots e_n^* e_{n+1}^* e_{n+1} e_n \cdots e_1 = r(e_1) = r(e_0) = a_{r(e_0)} & \text{nếu } e = e_0, \end{cases}$$

Tương tự cách tính trên, ta thu được rằng $a_e^* a_f = 0$ với mọi $e \neq f \in E(v_0, n)^1$. Như vậy ta đã chứng minh (3).

Tiếp theo ta chứng minh (4). Nếu $v \in \{v_1, \cdots, v_n\}$ thì rõ ràng $a_{v_i} = v_i = e_i e_i^* = a_{e_i} a_{e_i}^*$. Nếu $v \notin \{v_1, \cdots, v_n\}$ thì ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $e_{n+1} \notin s^{-1}_{E(e_0,n)}(v)$. Khi đó $v \neq s(e_0)$ và $s^{-1}_{E(e_0,n)}(v) = s^{-1}(v) = s^{-1}_{E(v_0,n)}(v)$. Do đó

$$a_v = v = \sum_{e \in s^{-1}_{E(e_0,n)}(v)} ee^* = \sum_{e \in s^{-1}(v)} ee^* = \sum_{e \in s^{-1}_{E(v_0,n)}(v)} ee^* = \sum_{e \in s^{-1}_{E(v_0,n)}(v)} a_e a_e^*.$$

Trường hợp 2: $e_{n+1} \in s^{-1}_{E(e_0,n)}(v)$. Khi đó $v = s(e_{n+1}) = s(e_0)$. Do đó

$$\begin{aligned} a_v = v &= \textstyle\sum_{e \in s^{-1}_{E(e_0,n)}(v)} ee^* \\ &= \textstyle\sum_{e \in s^{-1}(v) \setminus \{e_0\}} ee^* + e_{n+1} e_{n+1}^* \\ &= \textstyle\sum_{e \in s^{-1}(v) \setminus \{e_0\}} ee^* + e_{n+1} v_n e_{n+1}^* \\ &= \textstyle\sum_{e \in s^{-1}(v) \setminus \{e_0\}} ee^* + e_{n+1} e_n e_n^* e_{n+1}^* \\ &\cdots \\ &= \textstyle\sum_{e \in s^{-1}(v) \setminus \{e_0\}} ee^* + e_{n+1} e_n \cdots e_1 e_1^* \cdots e_n^* e_{n+1}^* \\ &= \textstyle\sum_{e \in s^{-1}(v) \setminus \{e_0\}} a_e a_e^* + a_{e_0} a_{e_0}^* \\ &= \textstyle\sum_{e \in s^{-1}_{E(v_0,n)}(v)} a_e a_e^*. \end{aligned}$$

Theo Mệnh đề 1.3.3, tồn tại duy nhất một đồng cấu K-đại số $\psi : L_K(E(v_0, n)) \longrightarrow L_K(E(e_0, n))$ sao cho $\psi(v) = a_v$, $\psi(e) = a_e$ và $\psi(e^*) = a_e^*$ với mọi $v \in E(v_0, n)^0$ và $e \in E(v_0, n)^1$.

Ta chứng minh rằng ψ là toàn cấu. Để làm điều đó, ta sẽ chỉ ra mọi phần tử sinh của $L_K(E(e_0, n))$ đều thuộc $\mathrm{Im}(\psi)$. Thật vậy, $v = \psi(v)$, $e = \psi(e)$, $e^* = \psi(e^*)$ với mọi $v \in E(e_0, n)^0$ và $e \in E(e_0, n)^1$ mà $e \neq e_{n+1}$. Lưu ý rằng ta luôn có $v_i = e_i e_i^*$ với mọi $i = 1, \cdots, n$ và do đó,

$$\psi(e_0 e_1^* \cdots e_n^*) = e_{n+1} e_n \cdots e_1 e_1^* \cdots e_n^* = e_{n+1},$$

và

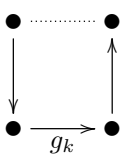
$$\psi(e_n \cdots e_1 e_0^*) = e_n \cdots e_1 e_1^* \cdots e_n^* e_{n+1}^* = e_{n+1}^*.$$

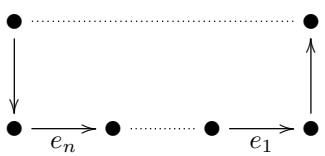
Vì vậy, $e_{n+1}, e_{n+1}^* \in \psi(L_K(E(v_0, n)))$, suy ra ψ là toàn cấu.

Tiếp theo ta chứng minh rằng ψ là đơn cấu bằng cách phản chứng. Giả sử rằng ψ không đơn cấu, nghĩa là tồn tại một phần tử khác không $x \in \ker(\psi)$. Khi đó, theo Định lí 1.3.11, tồn tại các phần tử $a, b \in L_K(E(v_0, n))$ sao cho tồn tại $u \in E(v_0, n)^0$ để $axb = u \neq 0$, hoặc $axb = p(c) \neq 0$, trong đó c là một chu trình không có lối ra trong $E(v_0, n)$ và $p(x)$ là một đa thức khác không trong $K[x, x^{-1}]$. Ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: Tồn tại các phần tử $a, b \in L_K(E(v_0, n))$ sao cho tồn tại $u \in E(v_0, n)^0$ để $axb = u \neq 0$. Khi đó, vì $axb \in \ker(\psi)$ nên $u = \psi(u) = 0$ trong $L_K(E(e_0, n))$. Mặt khác, theo Mệnh đề 1.3.10 (2) ta có $u \neq 0$. Ta gặp một mâu thuẫn.

Trường hợp 2: Tồn tại các phần tử $a, b \in L_K(E(v_0, n))$ sao cho $axb = p(c)$, trong đó c là một chu trình không có lối ra trong $E(v_0, n)$ và $p(x)$ là một đa thức khác không trong $K[x, x^{-1}]$. Gọi $p(x) = \sum_{i=-n}^{m} k_i x^i$. Khi đó, ta có $\sum_{i=-n}^{m} k_i \psi(c)^i = \psi(axb) = 0$ trong $L_K(E(e_0, n))$. Ta viết $c = g_1 \cdots g_h$, trong đó $g_i \in E(v_0, n)^1$. Nếu $g_i \neq e_0$ với mọi $i = 1, \cdots, h$ thì $\psi(c) = \psi(g_1) \cdots \psi(g_h) = g_1 \cdots g_m$. Vì thế $\psi(c)$ là một chu trình trong $E(e_0, n)$. Ngược lại, tồn tại $1 \leq k \leq h$ sao cho $g_k = e_0$. Khi đó, ta có $s(e_0) = r(g_{k-1})$ và $r(e_0) = s(g_{k+1})$ trong $E(v_0, n)$. Điều đó chứng tỏ rằng $s(e_n) = r(g_{k-1})$ và $r(e_1) = s(g_{k+1})$ trong $E(e_0, n)$. Do đó $\psi(c) = \psi(g_1 \cdots g_{k-1} e_0 g_{k+1} \cdots g_h) = g_1 \cdots g_{k-1} e_n \cdots e_1 g_{k+1} \cdots g_h$ cũng là một chu trình trong $E(e_0, n)$. Chúng tôi minh hoạ qua hình vẽ sau:

$c =$ 

$\psi(c) =$ 

Như vậy, trong mọi trường hợp $\psi(c)$ đều là chu trình trong $E(e_0, n)$. Khi đó, sự $\mathbb{Z}$-phân bậc của $L_K(E(e_0, n))$ chỉ ra rằng một đẳng thức dạng $\sum_{i=-n}^{m} k_i \psi(c)^i = \psi(axb) = 0$ không thể xảy ra trong $L_K(E(e_0, n))$. Điều

đó mâu thuẫn với $\psi(axb) = 0$ ở trên.

Do đó, trong mọi trường hợp, ta đều gặp một mâu thuẫn. Điều đó chứng tỏ rằng ψ là một đơn cấu. Như vậy, ψ là một đẳng cấu. □

Chúng tôi trình bày lại khái niệm về đồ thị sau đây theo [25].

Định nghĩa 2.2.5. ([25, Definition 3.6]) Cho $E = (E^0, E^1, r, s)$ là một đồ thị và H là một tập con di truyền của E^0. Xét tập hợp

$$F(H) = \{\alpha \mid \alpha = e_1 e_2 \cdots e_n, s(e_n) \notin H, r(e_n) \in H\}.$$

Gọi $\overline{F}(H)$ là một bản sao của $F(H)$, trong đó các phần tử được viết là $\overline{\alpha}$ với mỗi phần tử α của $F(H)$. Ta định nghĩa một đồ thị $E(H)$ như sau:

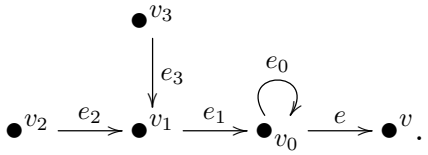
$$E(H)^0 = H \cup F(H)$$
$$E(H)^1 = s^{-1}(H) \cup \overline{F}(H)$$

và mở rộng các ánh xạ s và r lên $E(H)$ bằng cách đặt $s_{E(H)}(\overline{\alpha}) = \alpha$ và $r_{E(H)}(\overline{\alpha}) = r(\alpha)$.

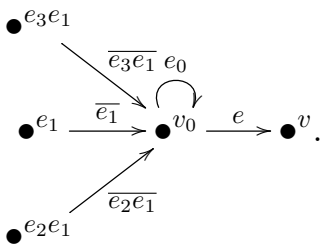
Lưu ý rằng có thể hiểu $E(H)$ chính là đồ thị $(H, s^{-1}(H), s, r)$ cùng với các đỉnh nguồn $\alpha \in F(H)$ với duy nhất một cạnh từ α đến $r(\alpha)$.

Chúng tôi minh hoạ khái niệm trên thông qua ví dụ sau đây.

Ví dụ 2.2.6. Cho E là đồ thị



và $H = \{v_0, v\}$. Khi đó, $F(H) = \{e_1, e_2e_1, e_3e_1\}$. Vì vậy, hình vẽ sau



là biểu diễn của đồ thị $E(H)$.

Trong [25], Arklint và Ruiz đã chứng minh kết quả sau đây cho trường hợp C^*-đại số đồ thị. Trong bổ đề sau, chúng tôi thiết lập một phiên bản tương tự cho đại số đường Leavitt.

Bổ đề 2.2.7. *Cho $E = (E^0, E^1, r, s)$ là một đồ thị, H là một tập con di truyền của E^0 và K là một trường. Giả sử*

$$(E^0 \setminus H, r_E^{-1}(E^0 \setminus H), s_E, r_E)$$

là một đồ thị hữu hạn không chứa chu trình và $v \geq H$ với mọi $v \in E^0 \setminus H$. Giả thiết thêm rằng tập hợp $s^{-1}(E^0 \setminus H) \cap r^{-1}(H)$ là hữu hạn. Khi đó,

$$L_K(E) \cong L_K(E(H)).$$

Chứng minh. Giả sử rằng $L_K(E(H))$ được sinh bởi tập $\{v, e, e^* \mid v \in E(H)^0, e \in E(H)^1\}$ và thoả mãn các đồng nhất thức (1) - (4) trong Định nghĩa 1.3.1. Ta định nghĩa các phần tử $\{p_v, s_e, s_e^* \mid v \in E(H)^0, e \in E(H)^1\}$ của $L_K(E)$ bằng cách đặt: với $v \in E(H)^0$, đặt

$$p_v = \begin{cases} v & \text{nếu } v \in H, \\ \alpha\alpha^* & \text{nếu } v = \alpha \in F(H) \end{cases}$$

và với $e \in E(H)^1$, đặt

$$s_e = \begin{cases} e & \text{nếu } e \in s_E^{-1}(H), \\ \alpha & \text{nếu } e = \overline{\alpha} \in \overline{F}(H), \end{cases}$$

và

$$s_e^* = \begin{cases} e^* & \text{nếu } e \in s_E^{-1}(H), \\ \alpha^* & \text{nếu } e = \overline{\alpha} \in \overline{F}(H). \end{cases}$$

Chúng tôi lặp lại nguyên văn các lập luận trong chứng minh của [25, Theorem 3.8] để chỉ ra rằng các phần tử $\{p_v, s_e, s_e^* \mid v \in E(H)^0, e \in E(H)^1\}$ thoả mãn các đồng nhất thức sau:

(1) $p_v p_w = \delta_{v,w} p_w$, trong đó δ là ký hiệu Kronecker;

(2) $p_{s(e)} s_e = s_e = s_e p_{r(e)}$ và $p_{r(e)} s_e^* = s_e^* = s_e^* p_{s(e)}$;

(3) $s_e^* s_f = \delta_{e,f} p_{r(e)}$;

(4) $p_v = \sum_{e \in s_{E(H)}^{-1}(v)} s_e s_e^*$ với mỗi đỉnh chính quy v trong $E(H)$,

với mọi $v, w \in E(H)^0$ và với mọi $e, f \in E(H)^1$.

Ta có

$$p_v p_w = \begin{cases} vw = \delta_{v,w} w = \delta_{v,w} p_w & \text{nếu } v, w \in H, \\ \alpha\alpha^*\beta\beta^* = \delta_{\alpha,\beta}\alpha\beta^* = \delta_{v,w} p_w & \text{nếu } v = \alpha, w = \beta \in F(H), \\ v\alpha\alpha^* = 0 = \delta_{v,w} p_w & \text{nếu } v \in H, w = \beta \in F(H). \end{cases}$$

Như vậy, (1) được chứng minh.

Ta lại có

$$p_{s(e)} s_e = \begin{cases} s(e)e = e = s_e & \text{nếu } e \in s_E^{-1}(H), \\ \alpha\alpha^*\alpha = \alpha = s_e & \text{nếu } e = \overline{\alpha} \in \overline{F}(H). \end{cases}$$

Tương tự ta chứng minh được các đẳng thức còn lại trong (2).

Ta có

$$s_e^* s_e = \begin{cases} e^* e = r(e) = p_{r(e)} & \text{nếu } e \in s_E^{-1}(H), \\ \alpha^*\alpha = r(\alpha) = p_{r(\alpha)} = p_{r(e)} & \text{nếu } e = \overline{\alpha} \in \overline{F}(H). \end{cases}$$

Tương tự cách tính trên, ta thu được rằng $s_e^* s_f = 0$ với mọi $e \neq f \in E(H)^1$. Như vậy (3) được chứng minh.

Tiếp theo ta chứng minh (4). Giả sử v là một đỉnh chính quy trong $E(H)$. Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $v \in H$. Khi đó,

$$p_v = v = \sum_{e \in s^{-1}(v)} ee^* = \sum_{e \in s_{E(H)}^{-1}(v)} s_e s_e^*.$$

Trường hợp 2: $v = \alpha \in F(H)$. Khi đó,

$$p_v = \alpha\alpha^* = s_e s_e^* = \sum_{e \in s_{E(H)}^{-1}(v)} s_e s_e^*.$$

Theo Mệnh đề 1.3.3, tồn tại duy nhất một đồng cấu K-đại số $\phi : L_K(E(H)) \longrightarrow L_K(E)$ sao cho $\phi(v) = p_v$, $\phi(e) = s_e$ và $\phi(e^*) = s_e^*$ với mọi $v \in E(H)^0$ và $e \in E(H)^1$.

Ta chứng minh rằng ϕ là đơn cấu bằng cách phản chứng. Giả sử rằng ϕ không đơn cấu, nghĩa là tồn tại một phần tử khác không $x \in \ker(\phi)$. Khi đó, theo Định lí 1.3.11, tồn tại các phần tử $a, b \in L_K(E(H))$ sao cho tồn tại $u \in E(H)^0$ để $axb = u \neq 0$, hoặc $axb = p(c) \neq 0$, trong đó c là một chu trình không có lối ra trong $E(H)$ và $p(x)$ là một đa thức khác không trong $K[x, x^{-1}]$. Ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: Tồn tại các phần tử $a, b \in L_K(E(H))$ sao cho tồn tại $u \in E(H)^0$ để $axb = u \neq 0$. Vì $axb \in \ker(\phi)$ nên $u = \phi(u) = 0$ trong $L_K(E(H))$. Mặt khác, theo Mệnh đề 1.3.10 (2) ta có $u \neq 0$. Ta gặp một điều mâu thuẫn.

Trường hợp 2: Tồn tại các phần tử $a, b \in L_K(E(H))$ sao cho $axb = p(c)$, trong đó c là một chu trình không có lối ra trong $L_K(E(H))$ và $p(x)$ là một đa thức khác không trong $K[x, x^{-1}]$. Gọi $p(x) = \sum_{i=-n}^{m} k_i x^i$. Khi đó, ta có $\sum_{i=-n}^{m} k_i \phi(c)^i = \phi(axb) = 0$ trong $L_K(E)$. Theo giả thiết, c là một chu trình trong $(H, s_E^{-1}(H), s_E, r_E)$. Ta viết $c = g_1 \cdots g_h$, trong đó $g_i \in s_E^{-1}(H)$. Do đó $\phi(c) = \phi(g_1) \cdots \phi(g_h) = g_1 \cdots g_h$ cũng là một chu trình trong E. Khi đó, sự $\mathbb{Z}$-phân bậc trong $L_K(E)$ chỉ ra rằng một đẳng thức dạng $\sum_{i=-n}^{m} k_i \phi(c)^i = \phi(axb) = 0$ không thể xảy ra trong $L_K(E)$. Điều này mâu thuẫn với $\phi(axb) = 0$ ở trên.

Như vậy, trong mọi trường hợp ta đều gặp một mâu thuẫn. Điều đó chứng tỏ rằng ϕ là một đơn cấu.

Tiếp theo ta chứng minh rằng ϕ là toàn cấu. Để làm điều đó, ta sẽ chỉ ra rằng $v, e, e^* \in \mathrm{Im}(\phi)$ với mọi $v \in E^0$ và $e \in E^1$. Bằng cách lặp lại nguyên văn các lập luận trong chứng minh của [25, Theorem 3.8], ta thu được rằng $v, e \in \mathrm{Im}(\phi)$ với mọi $v \in E^0$ và $e \in E^1$. Theo định nghĩa của ϕ ta có $e^* \in \mathrm{Im}(\phi)$ với mọi $e \in E^1$ mà $r(e) \in H$. Cuối cùng, ta chỉ ra rằng $e^* \in \mathrm{Im}(\phi)$ với mọi $e \in r^{-1}(E^0 \setminus H)$. Ta định nghĩa tập con D_k của $E^0 \setminus H$ như sau: $D_0 = H$ và với mỗi số nguyên dương k, D_k là tập gồm tất cả các đỉnh v sao cho k là độ dài lớn nhất của một đường từ v đến H. Từ cách đặt trên ta có nhận xét rằng với mỗi $k \geq 1$, tất cả các đỉnh trong D_k là

chính quy.

Tương tự như chứng minh của [25, Theorem 3.8], bằng cách quy nạp trên $k \geq 1$, ta sẽ chỉ ra rằng mọi đường α trong E với $r(\alpha) \in D_k$ đều có $\alpha^* \in \mathrm{Im}(\phi)$.

Với $k = 1$ và α là một đường trong E với $r(\alpha) \in D_1$. Ta có chú ý rằng $r(e) \in H$ với mọi $e \in s^{-1}(r(\alpha))$. Do đó

$$\begin{aligned} \alpha^* = r(\alpha)\alpha^* = (\textstyle\sum_{e\in s^{-1}(r(\alpha))} ee^*)\alpha^* &= \textstyle\sum_{e\in s^{-1}(r(\alpha))} ee^*\alpha^* \\ &= \textstyle\sum_{e\in s^{-1}(r(\alpha))} \phi(\overline{e})\phi(\overline{\alpha e}^*) \in \mathrm{Im}(\phi) \end{aligned}$$

vì $\alpha e, e \in F(H)$.

Với $k > 1$ và α là một đường trong E với $r(\alpha) \in D_k$. Ta có nhận xét rằng với mọi $e \in s^{-1}(r(\alpha))$ tồn tại một $j < k$ sao cho $r(\alpha e) = r(e) \in D_j$. Do đó

$$\alpha^* = r(\alpha)\alpha^* = (\sum_{e\in s^{-1}(r(\alpha))} ee^*)\alpha^* = \sum_{e\in s^{-1}(r(\alpha))} ee^*\alpha^* \in \mathrm{Im}(\phi).$$

Vì vậy, ϕ là một toàn cấu và do đó ϕ là một đẳng cấu. □

Định nghĩa 2.2.8. ([25, Definition 3.9]) Cho E là một đồ thị, $v_0 \in E^0$ là một đỉnh và gọi n là một số nguyên dương. Ta định nghĩa một đồ thị $E'(v_0, n)$ như sau:

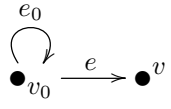
$$E'(v_0, n)^0 = E^0 \cup \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$$

$$E'(v_0, n)^1 = E^1 \cup \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$$

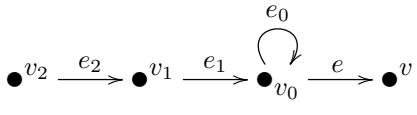
trong đó $r_{E'(v_0,n)}$, $s_{E'(v_0,n)}$ tương ứng là mở rộng của r_E, s_E và $r_{E'(v_0,n)}(e_i) = v_0$, $s_{E'(v_0,n)}(e_i) = v_i$ với mọi $i = 1, \cdots, n$.

Chúng tôi minh hoạ khái niệm trên thông qua ví dụ sau đây.

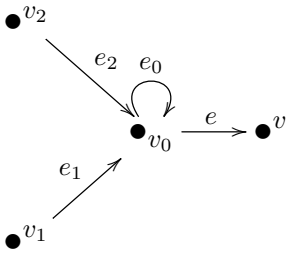
Ví dụ 2.2.9. Cho E là đồ thị



Khi đó, $E(v_0, 2)$ là đồ thị



và $E'(v_0, 2)$ là đồ thị



Hệ quả sau đây đã được Arklint và Ruiz chứng minh trong [25] cho trường hợp C^*-đại số đồ thị. Trong hệ quả sau, chúng tôi thiết lập một phiên bản tương tự cho đại số đường Leavitt.

Hệ quả 2.2.10. *Cho E là một đồ thị, v_0 là một đỉnh trong E, n là một số nguyên dương và K là một trường. Khi đó, $L_K(E(v_0, n)) \cong L_K(E'(v_0, n))$.*

Chứng minh. Gọi $v \in E^0$ và $w \in E(v_0, n)^0$ sao cho $v \geq w$. Theo Định nghĩa 2.2.1 ta có $v \not\geq v_i$ với mọi $1 \leq i \leq n$. Do đó $w \notin \{v_1, \cdots, v_n\}$ và vì vậy $w \in E^0$. Suy ra E^0 là một tập con di truyền của $E(v_0, n)^0$.

Xét hai ánh xạ $\varphi^0 : E(v_0, n)(E^0)^0 \longrightarrow E'(v_0, n)^0$ và $\varphi^1 : E(v_0, n)(E^0)^1 \longrightarrow E'(v_0, n)^1$ xác định bởi: với $v \in E(v_0, n)(E^0)^0$,

$$\varphi^0(v) = \begin{cases} v & \text{nếu } v \in E^0, \\ v_i & \text{nếu } v = e_i \cdots e_1 \in F(E^0), \end{cases}$$

và với $e \in E(v_0, n)(E^0)^1$,

$$\varphi^1(e) = \begin{cases} e & \text{nếu } e \in E^1, \\ e_i & \text{nếu } e = \overline{e_i \cdots e_1} \in \overline{F}(E^0). \end{cases}$$

Khi đó, φ^0 và φ^1 là hai song ánh và $r_{E'(v_0,n)}(\varphi^1(e)) = \varphi^0(r_{E(v_0,n)(E^0)}(e))$ và $s_{E'(v_0,n)}(\varphi^1(e)) = \varphi^0(s_{E(v_0,n)(E^0)}(e))$ với mọi $e \in E(v_0, n)(E^0)^1$. Vì vậy, $E(v_0, n)(E^0)$ đẳng cấu với $E'(v_0, n)$. Suy ra $L_K(E(v_0, n))(E^0) \cong L_K(E'(v_0, n))$. Mặt khác, theo Bổ đề 2.2.7 ta được $L_K(E(v_0, n)) \cong L_K(E(v_0, n))(E^0)$. Do đó

$$L_K(E(v_0,n)) \cong L_K(E(v_0,n))(E^0) \cong L_K(E'(v_0,n)).$$

Chúng ta kết thúc chứng minh. □

Trong [18], Abrams và Tomforde đã chứng minh rằng đại số ma trận của một đại số đường Leavitt cũng là một đại số đường Leavitt. Chúng tôi sẽ trình bày lại kết quả này trong Mệnh đề 2.2.13. Để làm điều đó, chúng tôi nhắc lại khái niệm sau.

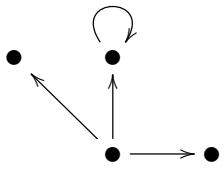
Định nghĩa 2.2.11. ([18, Definition 9.1]) Cho E là một đồ thị và n là một số nguyên dương. Ta gọi M_nE là một đồ thị có được từ E bằng cách thêm vào tại mỗi đỉnh $v \in E^0$ một đoạn "đầu vào" có độ dài $n-1$ có dạng

$$v_{n-1} \xrightarrow{e_{n-1}^v} \cdots \xrightarrow{e_3^v} v_2 \xrightarrow{e_2^v} v_1 \xrightarrow{e_1^v} v$$

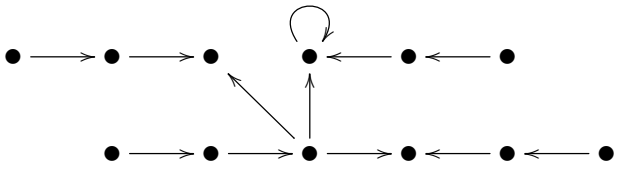
gắn vào E.

Chúng tôi minh hoạ khái niệm trên thông qua ví dụ sau đây.

Ví dụ 2.2.12. Nếu E là một đồ thị



thì M_3E là đồ thị sau



Mệnh đề 2.2.13. ([18, Proposition 9.3]) *Cho E là một đồ thị hữu hạn bậc ra, K là một trường và $n \geq 1$. Khi đó, $L_K(M_nE) \cong M_n(L_K(E))$.*

Định lí sau đây là kết quả chính của mục này, cung cấp cho ta cấu trúc của đại số đường Leavitt của một đồ thị hữu hạn thông qua quá trình từng bước khử đỉnh nguồn.

Định lí 2.2.14. *Cho E là một đồ thị hữu hạn và K là một trường. Gọi*

$$E = E_0 \to E_1 \to \cdots \to E_i \to \cdots \to E_t = E_{sf}$$

dãy các đồ thị được sinh ra trong quá trình từng bước khử đỉnh nguồn. Khi đó, các khẳng định sau đây là đúng:

(1) $L_K(E) \cong M_{m_1+1}(K) \oplus \cdots \oplus M_{m_k+1}(K) \oplus L_K(E(E^0_{sf}))$, *trong đó k là số các đỉnh thu trong E nhưng không thuộc E^0_{sf} (gọi chúng là $v_1, \cdots, v_k$) và với mỗi $1 \leq i \leq k$, m_i là số các đường trong E kết thúc tại v_i;*

(2) *Với mỗi đỉnh $v \in E^0_{sf}$, gọi n_v là số các đường trong E kết thúc tại v. Nếu $n_v = n$ với mọi $v \in E^0_{sf}$ thì $L_K(E(E^0_{sf})) \cong M_{n+1}(L_K(E_{sf}))$;*

(3) *Nếu E_{sf} không phải là đồ thị tầm thường E_{triv} thì tồn tại một đồ thị phi nguồn hữu hạn F thoả mãn các điều kiện sau đây:*

(i) $L_K(F) \cong L_K(E(E^0_{sf}))$;

(ii) Tồn tại một song ánh giữa tập các chu trình trong F và tập các chu trình trong E. Đặc biệt, F không có lối ra khi và chỉ khi E không có lối ra;

(iii) Tồn tại một song ánh giữa tập các chu trình nguồn trong F và tập các chu trình nguồn trong E_{sf}.

Chứng minh. (1) Gọi $H := \{v_1, \cdots, v_k\}$ là tập tất cả các đỉnh thu trong E nhưng không thuộc E^0_{sf}. Trước tiên, ta chứng minh rằng $H \cup E^0_{sf}$ là một tập con di truyền của E^0. Gọi $v \in H \cup E^0_{sf}$ và $w \in E^0$ sao cho $v \geq w$. Nếu $v \in H$ thì $w = v \in H$. Nếu $v \in E^0_{sf}$ thì theo Mệnh đề 2.1.5, tồn tại một chu trình c trong E để $v \in T_E(c)$. Vì $v \geq w$ nên $w \in T_E(c)$. Theo Mệnh đề 2.1.5 ta có $w \in E^0_{sf}$. Như vậy, trong mọi trường hợp ta luôn có $w \in H \cup E^0_{sf}$. Do đó $H \cup E^0_{sf}$ là một tập con di truyền của E^0.

Theo Mệnh đề 2.1.5 ta có đồ thị $(E^0 \setminus (H \cup E^0_{sf}), r^{-1}_{E^0 \setminus (H \cup E^0_{sf})}, s_E, r_E)$ không chứa chu trình. Theo cách đặt tập H ta có $v \geq H \cup E^0_{sf}$ với mọi $v \in E^0 \setminus (H \cup E^0_{sf})$. Áp dụng Bổ đề 2.2.7 ta được $L_K(E) \cong L_K(E(H \cup E^0_{sf}))$.

Với mỗi $1 \leq i \leq k$, ta ký hiệu $H_i = (H^0_i, H^1_i)$ là đồ thị con của $E(H \cup E^0_{sf})$

định nghĩa bởi:

$$H_i^0 := \{v_i, s_{E(H\cup E_{sf}^0)}(f) \mid f \in r^{-1}_{E(H\cup E_{sf}^0)}(v_i)\} \text{ và } \ H_i^1 := r^{-1}_{E(H\cup E_{sf}^0)}(v_i).$$

Chú ý rằng $m_i := |H_i^1| = |\{s_{E(H\cup E_{sf}^0)}(f) \mid f \in r^{-1}_{E(H\cup E_{sf}^0)}(v_i)\}|$ là số đường trong E kết thúc tại v_i. Theo cách xây dựng các H_i ta có $E(H \cup E_{sf}^0) = H_1 \sqcup \cdots \sqcup H_k \sqcup E(E_{sf}^0)$. Theo Mệnh đề 1.3.10 (4) ta có

$$L_K(E(H \cup E_{sf}^0)) \cong L_K(H_1) \oplus \cdots \oplus L_K(H_k) \oplus L_K(E(E_{sf}^0)).$$

Mặt khác, với mỗi $1 \leq i \leq k$, theo Hệ quả 2.2.10 ta được $L_K(H_i)$ đẳng cấu với $L_K(A_{m_i+1})$, trong đó

$$A_{m_i+1} = \ \bullet^{w_{m_i}} \xrightarrow{e_{m_i}} \bullet^{w_{m_i-1}} \xrightarrow{e_{m_i-1}} \cdots \qquad \bullet^{w_1} \xrightarrow{e_1} \bullet^{v_i}.$$

Từ Ví dụ 1.3.4 (2) ta có $L_K(A_{m_i+1}) \cong M_{m_i+1}(K)$. Vì thế, $L_K(H_i) \cong M_{m_i+1}(K)$.

Từ các đạt được ở trên, ta lập tức có được

$$L_K(E) \cong L_K(E(H \cup E_{sf}^0)) \cong M_{m_1+1}(K) \oplus \cdots \oplus M_{m_k+1}(K) \oplus L_K(E(E_{sf}^0)).$$

(2) Giả sử rằng $n_v = n$ với mọi $v \in E_{sf}^0$. Khi đó, áp dụng Hệ quả 2.2.10 lên tất cả các đỉnh của E_{sf} ta thu được $L_K(E(E_{sf}^0)) \cong L_K(M_{n+1}E_{sf})$. Theo Mệnh đề 2.2.13 ta có $L_K(M_{n+1}E_{sf}) \cong M_{n+1}(L_K(E_{sf}))$. Vì vậy, $L_K(E(E_{sf}^0)) \cong M_{n+1}(L_K(E_{sf}))$.

(3) Giả sử rằng E_{sf} không phải là đồ thị tầm thường E_{triv}. Gọi c là một chu trình trong E_{sf} có độ dài n và có đáy tại v_0. Gọi m là số các đường trong E kết thúc tại v_0. Theo Hệ quả 2.2.10 ta có $L_K(E(E_{sf}^0)) \cong L_K(E_{sf}(v_0, m))$. Theo Bổ đề 2.2.4 ta có $L_K(E_{sf}(v_0, m)) \cong L_K(F_0)$, trong đó F_0 là đồ thị có được từ E_{sf} bằng cách thay chu trình c bởi chu trình c' có độ dài $m + n$. Lặp lại quá trình trên cho tất cả các chu trình còn lại trong E_{sf} ta thu được đồ thị phi nguồn hữu hạn F sao cho:

(*i*) $L_K(F) \cong L_K(E(E_{sf}^0))$;

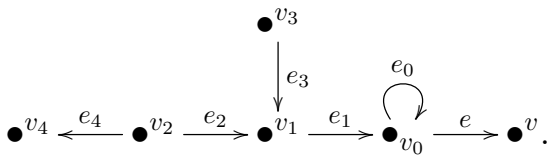
(*ii*) F là đồ thị có được từ E_{sf} bằng cách thay mỗi chu trình c trong E_{sf} bởi chu trình c' có độ dài lớn hơn. Điều này chỉ ra rằng tồn tại một

song ánh giữa tập các chu trình trong F và tập các chu trình trong E_{sf}. Hiển nhiên, số chu trình trong E_{sf} bằng với số chu trình trong E. Do đó, tồn tại một song ánh giữa tập các chu trình trong F và tập các chu trình trong E. Hơn nữa, trong cách xây dựng F từ E_{sf} đã chỉ ra ở trên, chỉ có độ dài các chu trình là bị thay đổi, số cạnh đi vào và số cạnh đi ra chu trình được giữ nguyên. Như vậy c là chu trình có lối ra trong E_{sf} khi và chỉ khi c' là chu trình có lối ra trong F. Hiển nhiên c là chu trình có lối ra trong E_{sf} khi và chỉ khi c là chu trình có lối ra trong E. Vì vậy, ta thu được kết luận sau: F không có lối ra khi và chỉ khi E không có lối ra.

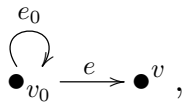
(*iii*) Cũng theo lập luận trên, c là chu trình nguồn trong E_{sf} khi và chỉ khi c' là chu trình nguồn trong F. Do đó, có một song ánh giữa tập các chu trình nguồn trong F và tập các chu trình nguồn trong E_{sf}. □

Chúng tôi minh hoạ các ý tưởng trong chứng minh của Định lí 2.2.14 (1) và (3) thông qua ví dụ sau đây.

Ví dụ 2.2.15. Cho E là đồ thị



Khi đó, theo Ví dụ 2.1.4 ta có $H = \{v_4\}$ và E_{sf} là đồ thị

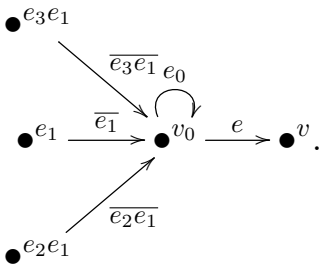


trong đó $c = e_0$ là một chu trình nguồn của E_{sf} và c có lối ra là e. Ta có $E(H \cup E^0_{sf}) = H_1 \sqcup E(E^0_{sf})$, trong đó

$$H_1 = \quad \bullet_{e_4} \xrightarrow{\overline{e_4}} \bullet_{v_4}$$

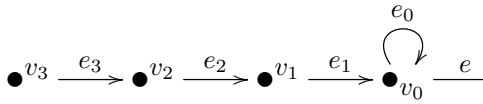
và

$$E(E^0_{sf}) =$$

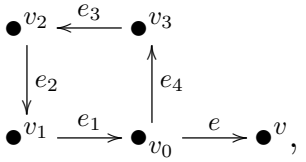


Theo Bổ đề 2.2.7 và Mệnh đề 1.3.10 (4), $L_K(E) \cong L_K(E(H \cup E^0_{sf})) \cong L_K(H_1) \oplus L_K(E(E^0_{sf}))$. Mặt khác, theo Ví dụ 1.3.4 (2) ta có $L_K(H_1) \cong M_2(K)$. Vì vậy $L_K(E) \cong M_2(K) \oplus L_K(E(E^0_{sf}))$.

Hơn nữa, theo Hệ quả 2.2.10, $L_K(E(E^0_{sf})) \cong L_K(E_{sf}(v_0, 3))$, trong đó $E_{sf}(v_0, 3)$ là đồ thị



Theo Bổ đề 2.2.4, $L_K(E(E^0_{sf})) \cong L_K(E_{sf}(v_0, 3)) \cong L_K(F)$, trong đó F là đồ thị sau đây:



trong đó $c' = e_4e_3e_2e_1$ là chu trình nguồn của F và c' có lối ra là e.

Như một hệ quả của Định lí 2.2.14, chúng tôi nhận lại kết quả của Abrams, Pino, Molina [11] về cấu trúc của đại số đường Leavitt của đồ thị hữu hạn không có lối ra.

Hệ quả 2.2.16. ([11, Theorem 3.8]) *Cho E là một đồ thị hữu hạn không có lối ra và K là một trường. Gọi $\{c_1, \cdots, c_\ell\}$ là tập các chu trình và $\{v_1, \cdots, v_k\}$ là tập các đỉnh thu trong E. Khi đó, $L_K(E)$ đẳng cấu với*

$$(\bigoplus_{i=1}^{k} M_{m_i+1}(K)) \oplus (\bigoplus_{j=1}^{\ell} M_{n_j+1}(K[x, x^{-1}])),$$

trong đó với mỗi $1 \leq i \leq k$, m_i là số các đường kết thúc tại đỉnh thu v_i và với mỗi $1 \leq j \leq \ell$, n_j là số các đường kết thúc tại một đỉnh cố định (chọn trước tuỳ ý) của chu trình c_j mà không chứa chu trình đó.

Chứng minh. Nếu $\ell = 0$ (nghĩa là, đồ thị E không chứa chu trình) thì theo Định lí 2.2.14 ta có $E_{sf} = \{v_k\}$ và

$$L_K(E) \cong M_{m_1+1}(K) \oplus \cdots \oplus M_{m_{k-1}+1}(K) \oplus L_K(E(E^0_{sf})).$$

Mặt khác, ta có $E(E^0_{sf})^0 = \{v_k, s_{E(E^0_{sf})}(f) \mid f \in r^{-1}_{E(E^0_{sf})}(v_k)\}$, $E(E^0_{sf})^1 = r^{-1}_{E(E^0_{sf})}(v_k)$ và $|E(E^0_{sf})^1| = |\{s_{E(E^0_{sf})}(f) \mid f \in r^{-1}_{E(E^0_{sf})}(v_k)\}| = m_k$. Theo Hệ quả 2.2.10, $L_K(E(E^0_{sf}))$ đẳng cấu với $L_K(A_{m_k+1})$, trong đó

$$A_{m_k+1} = \bullet^{w_{m_k}} \xrightarrow{e_{m_k}} \bullet^{w_{m_k-1}} \xrightarrow{e_{m_k-1}} \cdots \qquad \bullet^{w_1} \xrightarrow{e_1} \bullet^{v_k},$$

do đó $L_K(E(E^0_{sf})) \cong M_{m_k+1}(K)$. Từ các đẳng cấu trên, ta thu được

$$L_K(E) \cong M_{m_1+1}(K) \oplus \cdots \oplus M_{m_{k-1}+1}(K) \oplus M_{m_k+1}(K).$$

Xét trường hợp $\ell \geq 1$ (nghĩa là, E chứa ít nhất một chu trình). Khi đó, ta lưu ý rằng $E^0_{sf} = c^0_1 \sqcup \cdots \sqcup c^0_\ell$ và v_i là đỉnh thu trong E không thuộc E^0_{sf} với mọi $i = 1, \cdots, k$. Theo Định lí 2.2.14 ta được

$$L_K(E) \cong M_{m_1+1}(K) \oplus \cdots \oplus M_{m_k+1}(K) \oplus L_K(E(E^0_{sf})).$$

Với mỗi $1 \leq j \leq \ell$, ta ký hiệu $G_j = (G^0_j, G^1_j)$ là đồ thị con của $E(E^0_{sf})$ được xác định như sau:

$$G^0_j := \{c^0_j,\ s_{E(E^0_{sf})}(f) \mid f \in r^{-1}_{E(E^0_{sf})}(c^0_j)\} \text{ và } \ G^1_j := r^{-1}_{E(E^0_{sf})}(c^0_j).$$

Chú ý rằng $E(E^0_{sf}) = G_1 \sqcup \cdots \sqcup G_\ell$ và

$$n_j = |G^1_j| - 1 = |\{s_{E(E^0_{sf})}(f) \mid f \in r^{-1}_{E(E^0_{sf})}(c^0_j)\}| - 1$$

là số đường trong E kết thúc tại một đỉnh cố định v^j (chọn trước tuỳ ý) của chu trình c_j mà không chứa chu trình đó. Áp dụng Hệ quả 2.2.10 và Bổ đề 2.2.4 ta thu được $L_K(G_j) \cong L_K(E_1^{n_j+1})$, trong đó $E_1^{n_j+1}$ là đồ thị với $n_j + 1$ đỉnh và $n_j + 1$ cạnh:

$$E_1^{n_j+1} = \bullet^{w_{n_j}} \xrightarrow{e_{n_j}} \bullet^{w_{n_j-1}} \xrightarrow{e_{n_j-1}} \cdots \qquad \bullet^{w_1} \xrightarrow{e_1} \overset{e^j}{\curvearrowright}\bullet^{v^j}.$$

Áp dụng Định lí 2.2.14 (2), ta thu được $L_K(E_1^{n_j+1}) \cong M_{n_j+1}(L_K(R_1))$, trong đó R_1 là đồ thị với một đỉnh v^j và một khuyên e^j. Theo Ví dụ 1.3.4 (3) ta có $L_K(R_1) \cong K[x, x^{-1}]$. Vì thế,

$$L_K(G_j) \cong L_K(E_1^{n_j+1}) \cong M_{n_j+1}(K[x, x^{-1}]).$$

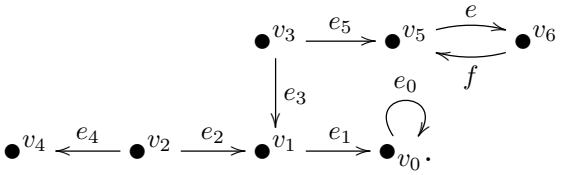
Theo Mệnh đề 1.3.10 (4) ta được $L_K(E(E^0_{sf})) \cong L_K(G_1) \oplus \cdots \oplus L_K(G_l)$. Khi đó, ta có

$$L_K(E(E^0_{sf})) \cong M_{n_1+1}(K[x, x^{-1}]) \oplus \cdots \oplus M_{n_l+1}(K[x, x^{-1}]).$$

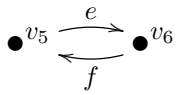
□

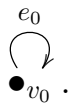
Chúng tôi minh hoạ các ý tưởng trong chứng minh Hệ quả 2.2.16 thông qua ví dụ sau đây.

Ví dụ 2.2.17. Cho E là đồ thị



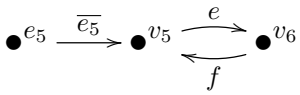
Khi đó, ta có v_4 là một đỉnh thu và đồ thị $E_{sf} = c_1 \sqcup c_2$, trong đó

$c_1 =$ 

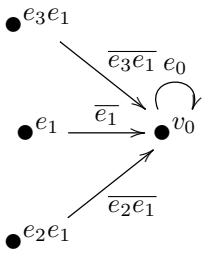
và $c_2 =$ 

.

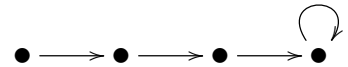
Theo Định lí 2.2.14, $L_K(E) \cong M_2(K) \oplus L_K(E(E^0_{sf}))$. Mặt khác, đồ thị $E(E^0_{sf}) = G_1 \sqcup G_2$, trong đó

$G_1 =$ 

và

$G_2 =$ 

Xét các đồ thị sau:

$G'_1 =$  và $G'_2 =$ 

Theo Bổ đề 2.2.4 ta có $L_K(G_1) \cong L_K(G_1')$ và theo Hệ quả 2.2.10 ta có $L_K(G_2) \cong L_K(G_2')$.

Theo Định lí 2.2.14 (2) và Ví dụ 1.3.4 (3) ta có $L_K(G_1') \cong M_3(K[x, x^{-1}])$ và $L_K(G_2') \cong M_4(K[x, x^{-1}])$. Theo Mệnh đề 1.3.10 (4) ta có

$$\begin{aligned} L_K(E(E^0_{sf})) &\cong L_K(G_1) \oplus L_K(G_2) \\ &\cong L_K(G_1') \oplus L_K(G_2') \\ &\cong M_3(K[x, x^{-1}]) \oplus M_4(K[x, x^{-1}]). \end{aligned}$$

Vì thế, $L_K(E) \cong M_2(K) \oplus M_3(K[x, x^{-1}]) \oplus M_4(K[x, x^{-1}])$.

2.3 Cấu trúc của đại số đường Leavitt của đồ thị Hopf

Nội dung chính của phần này là cung cấp các cấu trúc của các đồ thị Hopf và đại số đường Leavitt của chúng (Định lí 2.3.9) theo tính chất của hàm phân nhánh. Áp dụng kết quả này, chúng tôi chứng minh Giả thuyết Abrams-Tomforde đúng cho một số lớp đồ thị Hopf (Định lí 2.3.21). Mục này được viết dựa trên bài báo [49].

Ta bắt đầu mục này bằng việc nhắc lại khái niệm đồ thị Hopf đã được giới thiệu bởi Cibils và Rosso trong [26]. Cho G là một nhóm và $\mathcal{C}$ là tập tất cả các lớp liên hợp của G. Ta gọi một *hàm phân nhánh* của G là một ánh xạ $\mathfrak{r} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{N}$. Ta còn có thể viết hàm phân nhánh dưới dạng tổng hình thức $\mathfrak{r} = \sum\limits_{C \in \mathcal{C}} \mathfrak{r}_C C$, trong đó $\mathfrak{r}_C := \mathfrak{r}(C)$. *Giá* của $\mathfrak{r}$ là tập hợp

$$\mathrm{supp}(\mathfrak{r}) = \{\mathrm{C} \in \mathcal{C} \mid \mathfrak{r}_\mathrm{C} > 0\}.$$

Ta ký hiệu bởi $S_{G,\mathfrak{r}}$ là *nửa nhóm con* của G sinh bởi tập $\bigcup_{C \in \mathrm{supp}(\mathfrak{r})} C$.

Định nghĩa 2.3.1. ([26, Definition 3.1]) Cho G là một nhóm với hàm phân nhánh $\mathfrak{r} = \sum\limits_{C \in \mathcal{C}} \mathfrak{r}_C C$. *Đồ thị Hopf liên kết với cặp* $(G, \mathfrak{r})$, ký hiệu bởi $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$, có tập đỉnh $\Gamma^0_{G,\mathfrak{r}} = G$ và có $\mathfrak{r}_C$ cạnh từ x đến xc với mỗi $x \in G$ và $c \in C$.

Chúng tôi minh hoạ khái niệm đồ thị Hopf thông qua các ví dụ sau. Ở đây, chúng tôi ký hiệu $[x]$ là lớp liên hợp của một phần tử x trong nhóm G.

Ví dụ 2.3.2. Xét nhóm tầm thường $G = \{1_G\}$ và hàm phân nhánh $\mathfrak{r} = n[1_G]$. Khi đó, $\Gamma_{\mathbb{Z},\mathfrak{r}}$ là đồ thị sau:

$R_n =$ 

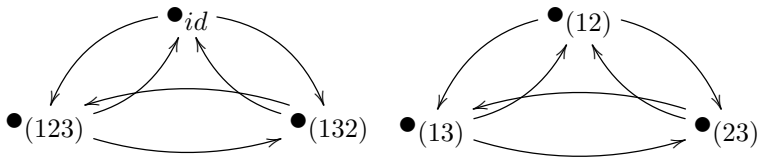
Ví dụ 2.3.3. Cho $G = S_3$ là nhóm đối xứng cấp 3 và viết

$$G = \{\mathrm{id}, (12), (13), (23), (123), (132)\}.$$

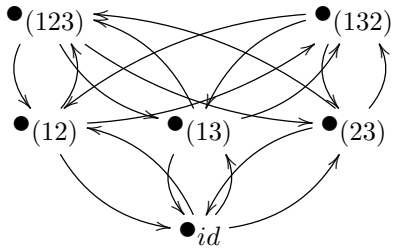
Khi đó, ta có $\mathcal{C} = \{C_1 := [\mathrm{id}], C_2 := [(12)], C_3 := [(123)]\}$, trong đó

$$C_1 = \{\mathrm{id}\}, C_2 = \{(12), (13), (23)\}, C_3 = \{(123), (132)\}.$$

(1) Xét hàm phân nhánh $\mathfrak{r} = [(123)]$. Khi đó, $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ là đồ thị sau đây:

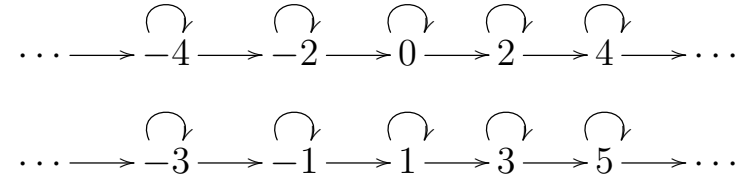


(2) Xét hàm phân nhánh $\mathfrak{r} = [(12)]$. Khi đó, $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ là đồ thị sau đây:

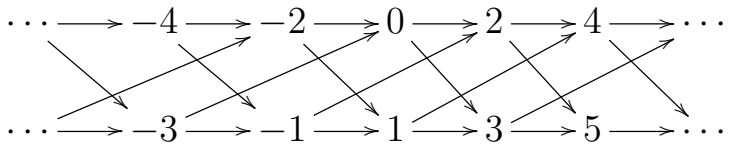


Ví dụ 2.3.4. Xét nhóm cộng các số nguyên $\mathbb{Z}$. Khi đó, ta có $\mathcal{C} = \{[n] \mid n \in \mathbb{Z}\}$, trong đó $[n] = \{n\}$ với mọi $n \in \mathbb{Z}$.

(1) Xét hàm phân nhánh $\mathfrak{r} = [0] + [2]$. Khi đó, $\Gamma_{\mathbb{Z},\mathfrak{r}}$ là đồ thị sau đây:



(2) Xét hàm phân nhánh $\mathfrak{r} = [2] + [3]$. Khi đó, $\Gamma_{\mathbb{Z},\mathfrak{r}}$ là đồ thị sau đây:



Mệnh đề sau đây cung cấp cho ta một số tính chất cơ bản của các đồ thị Hopf. Nhắc lại rằng với đồ thị $E = (E^0, E^1, r, s)$, đồ thị mở rộng của E được định nghĩa là $\widehat{E} = (E^0, E^1 \cup (E^1)^*, \widehat{r}, \widehat{s})$, trong đó: $(E^1)^* = \{e^* \mid e \in E^1\}$, các ánh xạ $\widehat{r}$ và $\widehat{s}$ được cho bởi

$\widehat{r}(e) = r(e)$, $\widehat{s}(e) = s(e)$, $\widehat{r}(e^*) = s(e)$ và $\widehat{s}(e^*) = r(e)$ với mỗi $e \in E^1$.

Mệnh đề 2.3.5. *Cho G là một nhóm với hàm phân nhánh $\mathfrak{r} = \sum_{C\in\mathcal{C}} \mathfrak{r}_C C$. Khi đó, các khẳng định sau đây là đúng:*

(1) *Tồn tại một đường trong $\widehat{\Gamma_{G,\mathfrak{r}}}$ (tương ứng, $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$) từ một đỉnh g đến một đỉnh h khi và chỉ khi tồn tại $w \in \langle S_{G,\mathfrak{r}}\rangle$ (tương ứng, $w \in S_{G,\mathfrak{r}}$) sao cho $h = gw$, trong đó $\langle S_{G,\mathfrak{r}}\rangle$ là nhóm con của G sinh bởi $S_{G,\mathfrak{r}}$;*

(2) *Nếu $\mathfrak{r} = 0$ thì $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ là hợp rời của các đỉnh cô lập;*

(3) *Nếu $\mathfrak{r} \neq 0$ thì $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ không có đỉnh thu và không có đỉnh nguồn;*

(4) *$\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ chứa một chu trình khi và chỉ khi $S_{G,\mathfrak{r}}$ là một vị nhóm con của G.*

Chứng minh. (1) Đặt $(\bigcup_{C\in\mathrm{supp}(\mathfrak{r})} C)^{-1} := \{c^{-1} \mid c \in \bigcup_{C\in\mathrm{supp}(\mathfrak{r})} C\}$. Tồn tại một đường $p = e_1e_2\cdots e_n$ trong $\widehat{\Gamma_{G,\mathfrak{r}}}$ từ g đến h khi và chỉ khi $g = \widehat{s}(e_1)$, $h = \widehat{r}(e_n)$ và với mỗi $1 \leq i \leq n$, nếu e_i là một cạnh thực thì tồn tại $c_i \in \bigcup_{C\in\mathrm{supp}(\mathfrak{r})} C$ để $\widehat{r}(e_i) = \widehat{s}(e_i)c_i$, nếu e_i là một cạnh ảo thì tồn tại $c_i \in (\bigcup_{C\in\mathrm{supp}(\mathfrak{r})} C)^{-1}$ để $\widehat{r}(e_i) = \widehat{s}(e_i)c_i$. Khi đó, ta có $h = \widehat{r}(e_n) = \widehat{s}(e_1)c_1\cdots c_n = gc_1\cdots c_n$, trong đó c_i là các phần tử thuộc vào $\bigcup_{C\in\mathrm{supp}(\mathfrak{r})} C \cup (\bigcup_{C\in\mathrm{supp}(\mathfrak{r})} C)^{-1}$. Đặt $w := c_1\cdots c_n$. Khi đó, ta có $h = gw$ và $w \in \langle S_{G,\mathfrak{r}}\rangle$. Nếu p là một đường thực thì $c_i \in \bigcup_{C\in\mathrm{supp}(\mathfrak{r})} C$ với mọi $1 \leq i \leq n$. Vì thế, $w \in S_{G,\mathfrak{r}}$.

(2) Nếu $\mathfrak{r} = 0$ thì $|s^{-1}(g)| = |r^{-1}(g)| = 0$ với mọi $g \in G$. Vì thế, $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ là hợp rời của các đỉnh cô lập.

(3) Nếu $\mathfrak{r} \neq 0$ thì $|s^{-1}(g)| = |r^{-1}(g)| \neq 0$ với mọi $g \in G$. Vì thế, $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ không có đỉnh thu và không có đỉnh nguồn.

(4) ($\Longrightarrow$). Giả sử rằng $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ chứa một chu trình $\alpha = e_1e_2\cdots e_n$. Khi đó, tồn tại các phần tử $\{c_i\}_{i=1}^n \subseteq \bigcup_{C\in\mathrm{supp}(\mathfrak{r})} C$ sao cho $r(e_i) = s(e_i)c_i$ với mọi $i = 1, \cdots, n$. Vì α là một chu trình nên ta có $s(e_1) = r(e_n) = s(e_1)c_1c_2\cdots c_n$. Vì thế, $1_G = c_1\cdots c_n \in S_{G,\mathfrak{r}}$. Điều này chứng tỏ rằng $S_{G,\mathfrak{r}}$ là một vị nhóm con của G.

($\Longleftarrow$). Giả sử rằng $S_{G,\mathfrak{r}}$ là một vị nhóm con của G. Khi đó, tồn tại các phần tử $\{c_i\}_{i=1}^n \subseteq \bigcup_{C\in\mathrm{supp}(\mathfrak{r})} C$ sao cho $c_1\cdots c_n = 1_G$. Gọi g là một phần tử bất kỳ của G. Khi đó, ta nhận thấy trong $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ tồn tại các cạnh $\{e_i\}_{i=1}^n$ sao cho $s(e_1) = g$, $s(e_i) = gc_1\cdots c_{i-1}$ với mọi $i \geq 2$ và $r(e_i) = gc_1\cdots c_i$ với mọi $1 \leq i \leq n$. Vì $c_1\cdots c_n = 1_G$ nên ta thu được $s(e_1) = r(e_n)$. Vì thế, $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ chứa một chu trình $e_1\cdots e_n$. □

Để khảo sát cấu trúc của các đồ thị Hopf và các đại số đường Leavitt của chúng, chúng tôi cần một số ký hiệu sau đây.

Định nghĩa 2.3.6. Cho G là một nhóm với hàm phân nhánh $\mathfrak{r} = \sum_{C\in\mathcal{C}} \mathfrak{r}_C C$.

(1) Ta ký hiệu $\Delta_{G,\mathfrak{r}}$ là đồ thị con của $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ như sau: nếu $\mathfrak{r} = 0$ thì $\Delta_{G,\mathfrak{r}}$ là đồ thị tầm thường, ngược lại

$$\Delta_{G,\mathfrak{r}} = (\Delta^0_{G,\mathfrak{r}}, \Delta^1_{G,\mathfrak{r}}, r|_{\Delta^1_{G,\mathfrak{r}}}, s|_{\Delta^1_{G,\mathfrak{r}}}),$$

trong đó $\Delta^0_{G,\mathfrak{r}} := \langle S_{G,\mathfrak{r}}\rangle$ và $\Delta^1_{G,\mathfrak{r}} := r^{-1}(\Delta^0_{G,\mathfrak{r}})$.

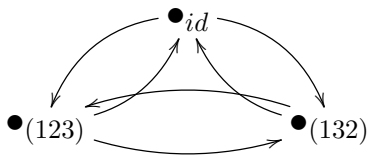
(2) Ta ký hiệu $\Lambda_{G,\mathfrak{r}}$ là đồ thị con của $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ sau đây: nếu $S_{G,\mathfrak{r}}$ không phải là vị nhóm con của G thì $\Lambda_{G,\mathfrak{r}}$ là đồ thị tầm thường, ngược lại

$$\Lambda_{G,\mathfrak{r}} = (\Lambda^0_{G,\mathfrak{r}}, \Lambda^1_{G,\mathfrak{r}}, r|_{\Lambda^1_{G,\mathfrak{r}}}, s|_{\Lambda^1_{G,\mathfrak{r}}}),$$

trong đó $\Lambda^0_{G,\mathfrak{r}} := G(S_{G,\mathfrak{r}})$ là nhóm con lớn nhất của G được chứa trong $S_{G,\mathfrak{r}}$ và $\Lambda^1_{G,\mathfrak{r}} := r^{-1}(\Lambda^0_{G,\mathfrak{r}}) \cap s^{-1}(\Lambda^0_{G,\mathfrak{r}})$.

Chúng tôi minh hoạ các ký hiệu $\Delta_{G,\mathfrak{r}}$ và $\Lambda_{G,\mathfrak{r}}$ thông qua các ví dụ sau đây.

Ví dụ 2.3.7. (1) Xét đồ thị Hopf $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ trong Ví dụ 2.3.3 (1). Khi đó, ta có $\Lambda_{G,\mathfrak{r}} = \Delta_{G,\mathfrak{r}}$ là đồ thị sau đây:

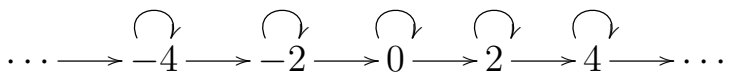


(2) Xét đồ thị Hopf $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ trong Ví dụ 2.3.3 (2). Khi đó, ta có $\Lambda_{G,\mathfrak{r}} = \Delta_{G,\mathfrak{r}} = \Gamma_{G,\mathfrak{r}}$.

(3) Xét đồ thị Hopf $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ trong Ví dụ 2.3.4 (1). Khi đó, ta có $\Lambda_{G,\mathfrak{r}}$ là đồ thị sau đây:



và $\Delta_{G,\mathfrak{r}}$ là đồ thị sau đây:



(4) Xét đồ thị Hopf $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ trong Ví dụ 2.3.4 (2). Khi đó, ta có $\Lambda_{G,\mathfrak{r}}$ là đồ thị tầm thường và $\Delta_{G,\mathfrak{r}} = \Gamma_{G,\mathfrak{r}}$.

Bổ đề 2.3.8. *Cho G là một nhóm với hàm phân nhánh $\mathfrak{r} = \sum_{C\in\mathcal{C}} \mathfrak{r}_C C$. Khi đó, $\Lambda^0_{G,\mathfrak{r}}$ và $\Delta^0_{G,\mathfrak{r}}$ là các nhóm con chuẩn tắc của G.*

Chứng minh. Trước tiên, ta chú ý rằng với mọi $c \in \bigcup_{C\in\mathrm{supp}(\mathfrak{r})} C$ và $g \in G$, ta có $gcg^{-1} \in \bigcup_{C\in\mathrm{supp}(\mathfrak{r})} C$ và $gc^{-1}g^{-1} \in (\bigcup_{C\in\mathrm{supp}(\mathfrak{r})} C)^{-1}$. Bây giờ, ta chứng minh rằng $\Lambda^0_{G,\mathfrak{r}}$ là một nhóm con chuẩn tắc của G. Thật vậy, xét $g \in G$ và $h \in \Lambda^0_{G,\mathfrak{r}}$. Ta viết $h = c_1c_2\cdots c_n$, trong đó $c_i \in \bigcup_{C\in\mathrm{supp}(\mathfrak{r})} C$ với mọi i. Khi đó, ta có

$$ghg^{-1} = gc_1g^{-1}gc_2g^{-1}\cdots gc_ng^{-1} \text{ và } gc_ig^{-1} \in \bigcup_{C\in\mathrm{supp}(\mathfrak{r})} C$$

với mọi i. Vì thế, $ghg^{-1} \in S_{G,\mathfrak{r}}$. Thêm nữa, vì $h \in \Lambda^0_{G,\mathfrak{r}}$ nên $h^{-1} \in S_{G,\mathfrak{r}}$. Lập luận như trên ta suy ra $gh^{-1}g^{-1} \in S_{G,\mathfrak{r}}$. Do đó $(ghg^{-1})^{-1} = gh^{-1}g^{-1} \in S_{G,\mathfrak{r}}$. Như vậy $ghg^{-1} \in \Lambda^0_{G,\mathfrak{r}}$. Điều này chứng tỏ rằng $\Lambda^0_{G,\mathfrak{r}}$ là một nhóm con chuẩn tắc của G.

Tiếp theo, ta chứng minh rằng $\Delta^0_{G,\mathfrak{r}}$ là một nhóm con chuẩn tắc của G. Thật vậy, với $g \in G$ và $h \in \Delta^0_{G,\mathfrak{r}}$, lặp lại lập luận trên ta được, $ghg^{-1} \in S_{G,\mathfrak{r}}$. Do đó $ghg^{-1} \in \Delta^0_{G,\mathfrak{r}}$. Vì vậy $\Delta^0_{G,\mathfrak{r}}$ là một nhóm con chuẩn tắc của G. □

Định lí sau đây là kết quả chính của mục này, cung cấp cho ta cấu trúc của các đồ thị Hopf và các đại số đường Leavitt của chúng. Chúng tôi nhắc lại một số ký hiệu cần thiết sau. Ta ký hiệu bởi $\mathcal{S}_E$ tập hợp tất cả các thành phần liên thông mạnh của đồ thị E. Hiển nhiên $\mathcal{S}_E$ là tập sắp thứ tự bộ phận bởi quan hệ $\geq$ xác định như sau: với mọi $\Pi_1, \Pi_2 \in \mathcal{S}_E$, $\Pi_1 \geq \Pi_2$ nếu tồn tại $v \in \Pi_1^0$ và $w \in \Pi_2^0$ để $v \geq w$. $\mathcal{S}_E$ được gọi là tập *định hướng xuống* nếu với mọi $\Pi_1, \Pi_2 \in \mathcal{S}_E$, tồn tại $\Pi_3 \in \mathcal{S}_E$ sao cho $\Pi_1 \geq \Pi_3$ và $\Pi_2 \geq \Pi_3$.

Định lí 2.3.9. *Cho G là một nhóm với hàm phân nhánh $\mathfrak{r} = \sum_{C \in \mathcal{C}} \mathfrak{r}_C C$ và K là một trường. Khi đó, các khẳng định sau đây là đúng:*

(1) *$\Delta_{G,\mathfrak{r}}$ là một thành phần liên thông của $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ và $\Gamma_{G,\mathfrak{r}} = \bigsqcup_{i \in G/\Delta^0_{G,\mathfrak{r}}} \Omega_i$, trong đó Ω_i đẳng cấu với $\Delta_{G,\mathfrak{r}}$ như các đồ thị;*

(2) *$\Lambda_{G,\mathfrak{r}}$ là một thành phần liên thông mạnh của $\Delta_{G,\mathfrak{r}}$ và $\Pi \cong \Lambda_{G,\mathfrak{r}}$ như các đồ thị với mọi thành phần liên thông mạnh Π của $\Delta_{G,\mathfrak{r}}$. Hơn nữa,*

$$|\mathcal{S}_{\Delta_{G,\mathfrak{r}}}| = \begin{cases} |\Delta^0_{G,\mathfrak{r}}/\Lambda^0_{G,\mathfrak{r}}| & \text{nếu } S_{G,\mathfrak{r}} \text{ là một vị nhóm con của } G; \\ |\Delta^0_{G,\mathfrak{r}}| & \text{trường hợp còn lại;} \end{cases}$$

(3) *$\Delta_{G,\mathfrak{r}}$ là một thành phần liên thông mạnh của $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ khi và chỉ khi $\mathfrak{r} = 0$ hoặc $S_{G,\mathfrak{r}}$ là một nhóm con của G. Đặc biệt, nếu $S_{G,\mathfrak{r}}$ là hữu hạn thì $\Delta_{G,\mathfrak{r}}$ là một thành phần liên thông mạnh của $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$;*

(4) *Nếu giả thiết thêm rằng G là giao hoán thì $(\mathcal{S}_{\Delta_{G,\mathfrak{r}}}, \geq)$ là tập định hướng xuống;*

(5) $L_K(\Gamma_{G,\mathfrak{r}}) \cong L_K(\Delta_{G,\mathfrak{r}})^{(G/\Delta^0_{G,\mathfrak{r}})}$.

Chứng minh. (1) Xét x và y là các phần tử của $\Delta^0_{G,\mathfrak{r}}$. Khi đó, tồn tại các phần tử $\{c_i\}_{i=1}^n \subseteq (\bigcup_{C\in\mathrm{supp}(\mathfrak{r})} C) \cup (\bigcup_{C\in\mathrm{supp}(\mathfrak{r})} C)^{-1}$ sao cho $x^{-1}y = c_1\cdots c_n$ và $y = xc_1\cdots c_n$. Theo Mệnh đề 2.3.5 (1), tồn tại một đường trong $\widehat{\Delta_{G,\mathfrak{r}}}$ từ x đến y. Gọi z là một phần tử của G. Nếu tồn tại một đường trong $\widehat{\Delta_{G,\mathfrak{r}}}$ từ z đến x (tương ứng, từ x đến z) thì theo Mệnh đề 2.3.5 (1), tồn tại phần tử $w \in \langle S_{G,\mathfrak{r}}\rangle = \Delta^0_{G,\mathfrak{r}}$ sao cho $x = zw$ (tương ứng, $z = xw$). Vì thế, $z = xw^{-1} \in \Delta^0_{G,\mathfrak{r}}$ (tương ứng, $z = xw \in \Delta^0_{G,\mathfrak{r}}$). Do đó $\Delta_{G,\mathfrak{r}}$ là một thành phần liên thông của $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$.

Gọi Ω là một thành phần liên thông của $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$. Ta chứng minh rằng Ω đẳng cấu đồ thị với $\Delta_{G,\mathfrak{r}}$. Thật vậy, gọi g là một đỉnh bất kỳ của Ω và đặt $\phi^0 : \Delta^0_{G,\mathfrak{r}} \longrightarrow \Omega^0$ là một ánh xạ xác định bởi: $\phi^0(w) = gw$ với mọi $w \in \Delta^0_{G,\mathfrak{r}}$. Khi đó, nếu $\phi^0(w) = gw = gw' = \phi^0(w')$ thì $w = w'$. Vì thế, ϕ^0 là một đơn ánh. Gọi h là một phần tử của Ω^0. Vì Ω là một đồ thị liên thông nên tồn tại một đường trong $\widehat{\Omega}$ từ g đến h. Theo Mệnh đề 2.3.5 (1), tồn tại $w \in \langle S_{G,\mathfrak{r}}\rangle = \Delta^0_{G,\mathfrak{r}}$ để $h = gw$, nghĩa là, $h = \phi^0(w)$. Điều này chứng tỏ rằng ϕ^0 là toàn ánh. Do đó ϕ^0 là một song ánh.

Với mỗi cạnh e trong $\Delta_{G,\mathfrak{r}}$ từ v đến w, luôn tồn tại $c \in \bigcup_{C\in\mathrm{supp}(\mathfrak{r})} C$ để $w = vc$ và $\phi^0(v) = gv$, $\phi^0(w) = gw = gvc$. Như vậy, tồn tại duy nhất một cạnh trong Ω từ $\phi^0(v)$ đến $\phi^0(w)$ tương ứng với cạnh e. Điều này chứng tỏ rằng tồn tại một song ánh $\phi^1 : \Delta^1_{G,\mathfrak{r}} \longrightarrow \Omega^1$ từ tập các cạnh của $\Delta_{G,\mathfrak{r}}$ đến tập các cạnh của Ω sao cho ϕ^0 và ϕ^1 giao hoán với các ánh xạ đỉnh gốc và đỉnh ngọn. Vì thế, $\Delta_{G,\mathfrak{r}}$ đẳng cấu đồ thị với Ω.

Ta chú ý rằng, vì $\Omega^0 = \phi^0(\Delta^0_{G,\mathfrak{r}}) = g\Delta^0_{G,\mathfrak{r}}$ nên lực lượng của tất cả các thành phần liên thông của $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ bằng với lực lượng của nhóm thương $G/\Delta^0_{G,\mathfrak{r}}$. Như vậy (1) được chứng minh.

(2) Gọi g và h là các phần tử của $\Lambda^0_{G,\mathfrak{r}}$. Vì $\Lambda^0_{G,\mathfrak{r}}$ là một nhóm con của G nên $g^{-1}h, h^{-1}g \in \Lambda^0_{G,\mathfrak{r}}$. Vì thế, $g^{-1}h, h^{-1}g \in S_{G,\mathfrak{r}}$. Vì $h = g(g^{-1}h)$ và $g = h(h^{-1}g)$ nên theo Mệnh đề 2.3.5 (1), tồn tại hai đường p và q trong $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ sao cho $s(p) = g, r(p) = h$ và $s(q) = h, r(q) = g$. Gọi $g \in \Lambda^0_{G,\mathfrak{r}}$ và

$h \in G$ sao cho tồn tại hai đường p và q trong $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ mà $s(p) = g, r(p) = h$ và $s(q) = h, r(q) = g$. Ta chứng minh rằng $h \in \Lambda^0_{G,\mathfrak{r}}$. Thật vậy, theo Mệnh đề 2.3.5 (1), tồn tại $w, w' \in S_{G,\mathfrak{r}}$ để $h = gw$ và $g = hw'$. Khi đó, $h = gw = hw'w$. Vì thế, $w'w = 1_G$. Suy ra $w^{-1} = w' \in S_{G,\mathfrak{r}}$. Từ đó ta có $h^{-1} = w^{-1}g^{-1} \in S_{G,\mathfrak{r}}$. Hiển nhiên $h = gw \in S_{G,\mathfrak{r}}$. Do đó, $h \in \Lambda^0_{G,\mathfrak{r}}$. Như vậy, $\Lambda_{G,\mathfrak{r}}$ là một thành phần liên thông mạnh của $\Delta_{G,\mathfrak{r}}$.

Tiếp theo ta chứng minh rằng $\Pi \cong \Lambda_{G,\mathfrak{r}}$ như các đồ thị với mọi thành phần liên thông mạnh Π của $\Delta_{G,\mathfrak{r}}$. Xét ánh xạ $\phi^0 : \Lambda^0_{G,\mathfrak{r}} \longrightarrow \Pi^0$ xác định bởi: $\phi^0(w) = gw$ với mọi $w \in \Lambda^0_{G,\mathfrak{r}}$, trong đó g là một đỉnh bất kỳ của Π. Bằng cách lặp lại nguyên văn các lập luận trong chứng minh của (1), ta thu được ϕ^0 là đơn ánh. Tiếp theo, ta chứng minh ϕ^0 là toàn ánh. Gọi h là một phần tử của Π^0. Vì Π là một đồ thị liên thông mạnh nên tồn tại hai đường trong $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ từ g đến h và từ h đến g. Bằng cách sử dụng lại cách lập luận ở trên, ta suy ra tồn tại $w, w^{-1} \in S_{G,\mathfrak{r}}$ để $h = gw$ và $g = hw^{-1}$. Từ đó suy ra $w \in \Lambda^0_{G,\mathfrak{r}}$. Vì thế, $h = gw = \phi^0(w)$. Vậy ϕ^0 là một song ánh. Lặp lại các lập luận trong chứng minh của (1), ta thu được đẳng cấu đồ thị $\Pi \cong \Lambda_{G,\mathfrak{r}}$.

Nếu $S_{G,\mathfrak{r}}$ không phải là vị nhóm con của G thì $\Lambda_{G,\mathfrak{r}}$ là đồ thị tầm thường. Vì thế, $|\mathcal{S}_{\Delta_{G,\mathfrak{r}}}| = |\Delta^0_{G,\mathfrak{r}}|$. Ngược lại, nếu $S_{G,\mathfrak{r}}$ là một vị nhóm con của G thì tương tự như chứng minh của (1) ta thu được rằng lực lượng của tất cả các thành phần liên thông mạnh của $\Delta_{G,\mathfrak{r}}$ bằng với lực lượng của nhóm thương $\Delta^0_{G,\mathfrak{r}}/\Lambda^0_{G,\mathfrak{r}}$. Như vậy, (2) được chứng minh.

(3) ($\Longleftarrow$) Nếu $\mathfrak{r} = 0$ thì $\Delta_{G,\mathfrak{r}}$ là đồ thị tầm thường. Vì thế, nó là một thành phần liên thông mạnh của $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$. Giả sử rằng $\mathfrak{r} \neq 0$ và $S_{G,\mathfrak{r}}$ là một nhóm con của G. Khi đó, ta có $\Delta^0_{G,\mathfrak{r}} = \Lambda^0_{G,\mathfrak{r}} = S_{G,\mathfrak{r}}$. Do đó, $\Delta_{G,\mathfrak{r}} = \Lambda_{G,\mathfrak{r}}$ là một thành phần liên thông mạnh của $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ bởi phần (2).

($\Longrightarrow$) Giả sử rằng $\Delta_{G,\mathfrak{r}}$ là một thành phần liên thông mạnh của $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$. Nếu $\Delta_{G,\mathfrak{r}}$ là đồ thị tầm thường thì $\mathfrak{r} = 0$. Giả sử rằng $\Delta_{G,\mathfrak{r}}$ tồn tại một cạnh. Ta chứng minh rằng $S_{G,\mathfrak{r}}$ là một nhóm con của G. Thật vậy, gọi e là một cạnh trong $\Delta_{G,\mathfrak{r}}$ và $c \in \bigcup_{C \in \mathrm{supp}(\mathfrak{r})} C$ sao cho $r(e) = s(e)c$. Vì $\Delta_{G,\mathfrak{r}}$ là

một thành phần liên thông mạnh của $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ nên tồn tại một đường p_e trong $\Delta_{G,\mathfrak{r}}$ sao cho $s(p_e) = r(e)$ và $r(p_e) = s(e)$. Vì thế, ep_e là một chu trình trong $\Delta_{G,\mathfrak{r}}$. Theo Mệnh đề 2.3.5 (4) ta có $S_{G,\mathfrak{r}}$ là một vị nhóm con của G. Ta viết $p_e = f_1 \cdots f_n$, trong đó tồn tại $w_i \in \bigcup_{C\in \mathrm{supp}(\mathfrak{r})} C$ để $r(f_i) = s(f_i)w_i$, $1 \leq i \leq n$. Vì ep_e là một chu trình trong $\Delta_{G,\mathfrak{r}}$ nên $s(e) = r(p_e) = r(f_n) = s(f_n)w_n = \cdots = s(e)cw_1 \cdots w_n$. Vì thế, $cw_1 \cdots w_n = 1_G$. Điều đó chứng tỏ $S_{G,\mathfrak{r}}$ là một nhóm con của G.

Giả sử rằng $S_{G,\mathfrak{r}}$ là một nửa nhóm con hữu hạn của G. Nếu $S_{G,\mathfrak{r}} = \emptyset$ thì $\Delta_{G,\mathfrak{r}}$ là đồ thị tầm thường. Do đó, $\Delta_{G,\mathfrak{r}}$ là một thành phần liên thông mạnh của $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$. Ngược lại, nếu $S_{G,\mathfrak{r}}$ là một nửa nhóm con hữu hạn khác rỗng của G thì $S_{G,\mathfrak{r}}$ cũng là một nhóm con của G. Vì thế, $\Delta_{G,\mathfrak{r}}$ là một thành phần liên thông mạnh của $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$.

(4) Giả sử rằng G là một nhóm giao hoán. Gọi $x, y \in \Delta^0_{G,\mathfrak{r}}$. Ta chứng minh rằng tồn tại phần tử $z \in \Delta^0_{G,\mathfrak{r}}$ sao cho $x \geq z$ và $y \geq z$. Vì G giao hoán nên ta có thể viết $x = c_1c_2 \cdots c_n d_1^{-1} d_2^{-1} \cdots d_m^{-1}$ và $y = k_1k_2 \cdots k_{n'} l_1^{-1} l_2^{-1} \cdots l_{m'}^{-1}$, trong đó $c_i, d_j, k_{i'}, l_{j'} \in \bigcup_{C\in \mathrm{supp}(\mathfrak{r})} C$ với mọi $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, $1 \leq i' \leq n'$, $1 \leq j' \leq m'$. Xét các đường $p = e_1 \cdots e_m$ và $q = f_1 \cdots f_{n'}$ sao cho $s(e_1) = x, r(e_i) = s(e_i)d_i$, $1 \leq i \leq m$ và $s(f_1) = r(p), r(f_i) = s(f_i)k_i$, $1 \leq i \leq n'$. Khi đó, ta có $s(pq) = x$ và $r(pq) = c_1c_2 \cdots c_n k_1k_2 \cdots k_{n'} =: z \in \Delta^0_{G,\mathfrak{r}}$. Vì thế, $x \geq z$. Tương tự, tồn tại các đường p', q' in $\Delta_{G,\mathfrak{r}}$ sao cho $s(p'q') = y$, $r(p'q') = k_1k_2 \cdots k_{n'}c_1c_2 \cdots c_n = z$. Vì thế, $y \geq z$, đều cần chứng minh. Điều nay suy ra rằng $(\mathcal{S}_{\Delta_{G,\mathfrak{r}}}, \geq)$ là định hướng xuống.

(5) Kết hợp phần (1) và Mệnh đề 1.3.10 (4) ta lập tức suy ra điều phải chứng minh. □

Như một áp dụng của Định lí 2.3.9, ta thu được hệ quả hữu dụng sau đây.

Hệ quả 2.3.10. *Cho G là một nhóm với hàm phân nhánh $\mathfrak{r} = \sum_{C\in\mathcal{C}} \mathfrak{r}_C C$. Khi đó, các khẳng định sau đây đúng:*

(1) *Nếu* $\mathfrak{r} = 0$ *thì* $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ *là hợp rời của các đỉnh cô lập và*

$$L_K(\Gamma_{G,\mathfrak{r}}) = K^{(G)}.$$

(2) *Nếu* $\sum_{C\in\mathcal{C}} \mathfrak{r}_C|C| = 1$ *và* $S_{G,\mathfrak{r}}$ *là một vị nhóm con của* G *thì* $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ *là hợp rời của các chu trình cô lập,* $S_{G,\mathfrak{r}}$ *là một nhóm con hữu hạn chuẩn tắc của* G *và*

$$L_K(\Gamma_{G,\mathfrak{r}}) \cong M_{|S_{G,\mathfrak{r}}|}(K[x, x^{-1}])^{(G/S_{G,\mathfrak{r}})}.$$

Chứng minh. (1) Được lập tức suy ra từ Mệnh đề 2.3.5 (2) và Định lí 2.3.9.

(2) Giả sử rằng $\sum_{C\in\mathcal{C}} \mathfrak{r}_C|C| = 1$ và $S_{G,\mathfrak{r}}$ là một vị nhóm con của G. Khi đó, ta suy ra tồn tại $c \in G$ để $\bigcup_{C\in\mathrm{supp}(\mathfrak{r})} C = \{c\}$. Vì $S_{G,\mathfrak{r}}$ là một vị nhóm con của G nên tồn tại số nguyên dương n sao cho $c^n = 1_G$. Vì thế, $S_{G,\mathfrak{r}} = \Delta^0_{G,\mathfrak{r}}$ là một nhóm con xyclic của G sinh bởi c và theo Bổ đề 2.3.8 ta có $S_{G,\mathfrak{r}}$ cũng là nhóm con chuẩn tắc của G. Suy ra $\Delta_{G,\mathfrak{r}}$ là một chu trình cô lập gồm n đỉnh và n cạnh. Theo Định lí 2.2.14 ta có $L_K(\Delta_{G,\mathfrak{r}}) = M_{|S_{G,\mathfrak{r}}|}(K[x, x^{-1}])$. Khi đó, theo Định lí 2.3.9 ta có $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ là hợp rời của các chu trình cô lập và $L_K(\Gamma_{G,\mathfrak{r}}) \cong M_{|S_{G,\mathfrak{r}}|}(K[x, x^{-1}])^{(G/S_{G,\mathfrak{r}})}$. □

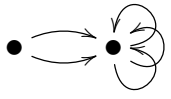
Trong phần tiếp theo, chúng tôi quan tâm đến câu hỏi sau:

Cho trước một đồ thị E *và trường* K*, có tồn tại một đồ thị Hopf* Γ *sao cho* $L_K(E) \cong L_K(\Gamma)$*?*

Câu hỏi này được nảy sinh một cách tự nhiên bởi mệnh đề sau đây.

Mệnh đề 2.3.11. *Với mọi trường* K*, tồn tại hai đồ thị* E *và* F *sao cho* E *là một đồ thị Hopf,* F *không là đồ thị Hopf và* $L_K(E) \cong L_K(F)$*.*

Chứng minh. Gọi $E = \Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ là đồ thị Hopf trong Ví dụ 2.3.2 với $n = 3$ và F là đồ thị sau đây:



Khi đó, vì F có hai thành phần liên thông mạnh không đẳng cấu với nhau

nên theo Định lí 2.3.9 (2) ta có F không phải là đồ thị Hopf. Theo Ví dụ 1.3.4 (4) ta được $L_K(E) \cong L_K(1,3)$. Mặt khác, theo Định lí 2.2.14 (2) ta được $L_K(F) \cong M_3(L_K(1,3))$. Theo [5, Theorem 4.14] ta có $L_K(1,3) \cong M_3(L_K(1,3))$. Vì thế, $L_K(E) \cong L_K(F)$. □

Chúng tôi giải quyết câu hỏi được đề cập trước Mệnh đề 2.3.11 bằng cách tính toán chiều Gelfand-Kirillov của các đại số đường Leavitt của các đồ thị Hopf. Để làm điều đó, trước tiên chúng tôi nhắc lại khái niệm chiều Gelfand-Kirillov của các đại số theo [42].

Cho K là một trường và A là K-đại số hữu hạn sinh với tập sinh là $\{a_1, \cdots, a_m\}$. Gọi $V = \text{span}_K\{a_1, \cdots, a_m\}$. Đặt $V^0 := K$ và

$$V^n = \text{span}_K\{x_1, \cdots, x_n \mid x_i \in \{a_1, \cdots, a_m\}\}, n \geq 1.$$

Chiều Gelfand-Kirillov của A, ký hiệu GKdim(A), được định nghĩa là

$$\text{GKdim}(A) := \limsup_{n\to\infty} \log_n(\dim(V^n)).$$

Nếu A không là đại số hữu hạn sinh trên K, chiều Gelfand-Kirillov của A được định nghĩa là

$$\text{GKdim}(A) = \sup\{\text{GKdim}(B) \mid B \text{ là một đại số con hữu hạn sinh của } A\}.$$

Trong [19] Alahmadi, Alsulami, Jain và Zelmanov đã xác định chiều Gelfand-Kirillov của các đại số đường Leavitt của các đồ thị hữu hạn. Trong [47] Moreno-Fernández và Siles Molina đã mở rộng kết quả này cho các đồ thị bất kỳ. Chúng tôi sẽ nhắc lại kết quả này ở đây. Để làm điều đó, chúng tôi cần trình bày lại một số khái niệm trong lý thuyết đồ thị.

Cho E là một đồ thị. Một chu trình c trong E được gọi là một *chu trình độc lập* nếu không có đỉnh nào trên c là đáy của một chu trình khác ngoài hoán vị vòng quanh của c. Ta nói rằng E thoả mãn *Điều kiện* (EXC) nếu mọi chu trình của E đều là chu trình độc lập.

Với hai chu trình c và c', ta viết $c \Rightarrow c'$ nếu tồn tại một đường bắt đầu từ một đỉnh trong c và kết thúc tại một đỉnh trong c'. Một dãy các chu

trình $c_1, \cdots, c_k$ là một *xích* với độ dài k nếu $c_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow c_k$. Ta nói xích $c_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow c_k$ có một *lối ra* nếu chu trình c_k có một lối ra. Gọi d_1 là độ dài lớn nhất của xích các chu trình trong E và d_2 là độ dài lớn nhất của xích các chu trình có lối ra trong E. Với mọi trường K, theo [47, Theorem 3.21], $\mathrm{GKdim}(L_K(E))$ là hữu hạn khi và chỉ khi E thoả mãn Điều kiện (EXC) và độ dài lớn nhất của xích các chu trình trong E là hữu hạn. Trong trường hợp này, $\mathrm{GKdim}(L_K(E)) = \max\{2d_1 - 1, 2d_2\}$. Như một hệ quả, mọi số tự nhiên có thể được xem là chiều Gelfand-Kirillov của một đại số đường Leavitt nào đó.

Ta sẽ sử dụng kết quả sau đây về các đồ thị Hopf để tính chiều Gelfand-Kirillov của các đại số đường Leavitt liên kết.

Bổ đề 2.3.12. *Cho G là một nhóm với hàm phân nhánh $\mathfrak{r} = \sum_{C\in\mathcal{C}} \mathfrak{r}_C C$ thoả mãn $\sum_{C\in\mathcal{C}} \mathfrak{r}_C|C| \geq 2$. Khi đó, với mọi chu trình α trong $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$, tồn tại một chu trình β trong $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ sao cho β không phải là một hoán vị vòng quanh của α và $\beta \Rightarrow \alpha$.*

Chứng minh. Gọi $\alpha = e_1 \cdots e_n$ là một chu trình trong $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$. Ta chứng minh rằng tồn tại chu trình β trong $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ để $\beta \Rightarrow \alpha$. Thật vậy, theo Mệnh đề 2.3.5 (4) ta có $S_{G,\mathfrak{r}}$ là một vị nhóm con của G. Vì thế, tồn tại các phần tử $\{c_i\}_{i=1}^n \subseteq \bigcup_{C\in\mathrm{supp}(\mathfrak{r})} C$ sao cho $c_1 \cdots c_n = 1_G$, $s(\alpha) = s(e_1)$ và $s(e_i) = s(\alpha)c_1 \cdots c_{i-1}$ với mọi $2 \leq i \leq n$ và $r(e_i) = s(\alpha)c_1 \cdots c_i$ với mọi $1 \leq i \leq n$. Ta xét hai trường hợp sau đây:

Trường hợp 1: $|\bigcup_{C\in\mathrm{supp}(\mathfrak{r})} C| = 1$. Khi đó, ta có $\mathrm{supp}(\mathfrak{r}) = \{\mathrm{C}\}$, $\mathfrak{r}_C \geq 2$ và tồn tại $c \in G$ để $C = \{c\}$. Do đó, theo định nghĩa của đồ thị $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$, tồn tại $\mathfrak{r}_C$ cạnh từ $s(e_i)$ đến $r(e_i)$ với mọi $1 \leq i \leq n$. Vì thế, $s(\alpha)$ là đáy của ít nhất $\mathfrak{r}_C$ chu trình, điều đó có nghĩa là, tồn tại một chu trình β trong $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ sao cho β không phải là một hoán vị vòng quanh của α và $\beta \Rightarrow \alpha$.

Trường hợp 2: $|\bigcup_{C\in\mathrm{supp}(\mathfrak{r})} C| \geq 2$. Ta xét hai trường hợp con sau đây:

Trường hợp 2.1: Tồn tại $x \in \bigcup_{C\in\mathrm{supp}(\mathfrak{r})} C \setminus \{c_n\}$ và số nguyên dương m để $x^m = 1_G$. Khi đó, $s(\alpha)$ là đáy của chu trình $\beta = f_1 \cdots f_{|x|}$ khác với chu

trình α, trong đó $|x|$ là cấp của x, $s(f_1) = s(\alpha)$, $s(f_i) = s(\alpha)x^{i-1}$ với mọi $2 \leq i \leq n$ và $r(f_i) = s(\alpha)x^i$ với mọi $1 \leq i \leq n$. Suy ra rằng $\beta \Rightarrow \alpha$.

Trường hợp 2.2: $x^m \neq 1_G$ với mọi $x \in \bigcup_{C \in \mathrm{supp}(\mathfrak{r})} C \setminus \{c_n\}$ và số nguyên dương m. Gọi x là một phần tử bất kỳ của $\bigcup_{C \in \mathrm{supp}(\mathfrak{r})} C \setminus \{c_n\}$. Khi đó, ta có $s(\alpha)x^{-1} \neq s(\alpha)$, $s(\alpha)x^{-1} \neq s(\alpha)c_1 \cdots c_{n-1}$ và tồn tại một cạnh trong $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ từ $s(\alpha)x^{-1}$ đến $s(\alpha)$. Thêm nữa, ta thu được $s(\alpha)x^{-1}$ là đáy của chu trình $\beta = f_1 \cdots f_n$, trong đó $s(\alpha)x^{-1} = s(f_1)$ và $s(f_i) = s(\alpha)x^{-1}c_1 \cdots c_{i-1}$ với mọi $2 \leq i \leq n$ và $r(f_i) = s(\alpha)x^{-1}c_1 \cdots c_i$ với mọi $1 \leq i \leq n$. Như vậy β là một chu trình trong $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ khác với α và $\beta \Rightarrow \alpha$.

Do đó, trong mọi trường hợp ta thu được rằng tồn tại một chu trình β trong $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ sao cho β không là một hoán vị vòng quanh của α và $\beta \Rightarrow \alpha$. Chúng ta kết thúc chứng minh. □

Trong mệnh đề sau đây, chúng tôi tính chiều Gelfand-Kirillov của các đại số đường Leavitt của đồ thị Hopf dựa theo thông tin của hàm phân nhánh.

Mệnh đề 2.3.13. *Cho G là một nhóm với hàm phân nhánh $\mathfrak{r} = \sum_{C \in \mathcal{C}} \mathfrak{r}_C C$ và K là một trường. Khi đó,*

$$\mathrm{GKdim}(\mathrm{L_K}(\Gamma_{\mathrm{G},\mathfrak{r}})) = \begin{cases} \infty & \text{nếu } \sum_{C \in \mathcal{C}} \mathfrak{r}_C |C| \geq 2 \text{ và } S_{G,\mathfrak{r}} \text{ là vị nhóm con của } G; \\ 1 & \text{nếu } \sum_{C \in \mathcal{C}} \mathfrak{r}_C |C| = 1 \text{ và } S_{G,\mathfrak{r}} \text{ là vị nhóm con của } G; \\ 0 & \text{trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

Chứng minh. Trường hợp 1: $\sum_{C \in \mathcal{C}} \mathfrak{r}_C |C| \geq 2$ và $S_{G,\mathfrak{r}}$ là một vị nhóm con của G. Khi đó, theo Mệnh đề 2.3.5 (4) ta được $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ chứa một chu trình. Khi đó, theo Bổ đề 2.3.12 ta thu được rằng $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ không thoả mãn Điều kiện (EXC) hoặc $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ thoả mãn Điều kiện (EXC) và độ dài lớn nhất của xích các chu trình trong $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ là vô hạn. Áp dụng [47, Theorem 3.21] ta nhận được $\mathrm{GKdim}(L_K(\Gamma_{G,\mathfrak{r}})) = \infty$.

Trường hợp 2: $\sum_{C \in \mathcal{C}} \mathfrak{r}_C |C| = 1$ và $S_{G,\mathfrak{r}}$ là một vị nhóm con của G. Khi đó, theo Hệ quả 2.3.10 (2) ta có $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ là hợp rời của các chu trình cô lập. Vì thế, theo [47, Theorem 3.21] ta có $\mathrm{GKdim}(L_K(\Gamma_{G,\mathfrak{r}})) = 1$.

Trường hợp 3: $\mathfrak{r} = 0$ hoặc $S_{G,\mathfrak{r}}$ không là vị nhóm con của G. Khi đó, theo Mệnh đề 2.3.5 (4) và Hệ quả 2.3.10 ta có $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ không chứa chu trình. Khi đó, theo [47, Theorem 3.21] ta được $\mathrm{GKdim}(L_K(\Gamma_{G,\mathfrak{r}})) = 0$. □

Hệ quả sau đây đưa ra câu trả lời phủ định cho câu hỏi được đề cập trước Mệnh đề 2.3.11.

Hệ quả 2.3.14. *Tồn tại một đại số đường Leavitt không đẳng cấu với mọi đại số đường Leavitt của đồ thị Hopf.*

Chứng minh. Cho K là một trường và E là một đồ thị sao cho $2 \leq \mathrm{GKdim}(L_K(E)) < \infty$. Khi đó, theo Mệnh đề 2.3.13 ta có

$$\mathrm{GKdim}(L_K(\Gamma_{G,\mathfrak{r}})) \neq \mathrm{GKdim}(L_K(E))$$

với mọi cặp $(G, \mathfrak{r})$. Do đó, $L_K(E) \ncong L_K(\Gamma_{G,\mathfrak{r}})$ với mọi cặp $(G, \mathfrak{r})$. □

Trong phần còn lại của mục này, chúng tôi xem xét giả thuyết của Abrams và Tomforde được nêu ra trong [18] cho các đồ thị Hopf.

Năm 1998, Kumjian, Pask và Raeburn [41] đã giới thiệu khái niệm C^*-đại số đồ thị. Chúng tôi trình bày lại khái niệm này theo [12].

Gọi $\mathcal{H}$ là tập các không gian Hilbert vô hạn chiều trên $\mathbb{C}$. Với mỗi $H \in \mathcal{H}$ ta đặt

$$\mathcal{B}(H) = \{f : H \to H \mid f \text{ tuyến tính và bị chặn}\}.$$

Khi đó $\mathcal{B}(H)$ là một C^*-đại số với chuẩn

$$\| f \| = \sup\{\frac{\| f(x) \|}{\| x \|} \mid 0 \neq x \in H\}.$$

Cho E là một đồ thị. Khi đó, với mỗi $a \in L_{\mathbb{C}}(E)$ tồn tại $S = S(a)$ sao cho $\| \pi(a) \| \leq S$ với mọi $*$-đồng cấu $\pi : L_{\mathbb{C}}(E) \to \mathcal{B}(H)$. Do đó, theo [53, Section 7] ta có

$$\| a \| := \sup\{\| \pi(a) \| \mid \pi : L_{\mathbb{C}}(E) \to \mathcal{B}(H) \text{ là một } *\text{-đồng cấu không suy biến}\}$$

là một chuẩn trên $L_{\mathbb{C}}(E)$.

Định nghĩa 2.3.15. ([12, Definition 5.2.1]) Cho E là một đồ thị. *C^*-đại số đồ thị* của đồ thị E, kí hiệu $C^*(E)$, được định nghĩa là

$$C^*(E) = \overline{L_{\mathbb{C}}(E)},$$

trong đó phép đầy đủ hoá lấy theo chuẩn $\| \, . \, \|$ nói trên.

Ví dụ 2.3.16. ([18, Example 4.9]) Ký hiệu $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Gọi $C(\mathbb{T}) = \{f : \mathbb{T} \to \mathbb{C} \mid f \text{ tuyến tính và bị chặn}\}$. Khi đó $C(\mathbb{T})$ là một C^*-đại số. Xét đồ thị R_1:

$$R_1 = \qquad \bullet_v \circlearrowright e \, .$$

Khi đó, $C^*(R_1) \cong C(\mathbb{T})$.

Rieffel [50] định nghĩa hai C^*-đại số A và B được gọi là *tương đương Morita mạnh*, ký hiệu bởi $A \sim_{SME} B$ nếu chúng tương đương Morita như các vành.

Giả thuyết sau đây được Abrams và Tomforde đặt ra trong [18].

Giả thuyết Abrams-Tomforde. ([18, Section 9]) *Cho E và F là các đồ thị đếm được. Nếu $L_{\mathbb{C}}(E) \sim_{ME} L_{\mathbb{C}}(F)$ thì $C^*(E) \sim_{SME} C^*(F)$.*

Đến thời điểm hiện tại, Giả thuyết Abrams-Tomforde đã được chứng minh là đúng cho các lớp đồ thị sau đây.

Định lí 2.3.17. *Giả thuyết Abrams-Tomforde đúng cho các lớp đồ thị thoả mãn một trong các điều kiện sau đây:*

(1) ([18, Proposition 9.13]) *Các đồ thị không chứa chu trình.*

(2) ([18, Corollary 9.16]) *Các đồ thị hữu hạn bậc ra mà đại số đường Leavitt liên kết là đơn.*

(3) ([32, Theorem 14.10]) *Các đồ thị có tập đỉnh hữu hạn.*

Một phần tử luỹ đẳng e trong vành R được gọi là *vô hạn* nếu eR đẳng cấu như các R-môđun với một hạng tử trực tiếp thực sự của nó. Một vành đơn R được gọi là *vô hạn thuần tuý* nếu như mọi iđêan phải của R đều

chứa một luỹ đẳng vô hạn. Trong [7, 8] Abrams và Aranda Pino cung cấp một tiêu chuẩn trên các đồ thị hữu hạn bậc ra để đại số đường Leavitt của chúng là đơn vô hạn thuần tuý. Kết quả này đã được mở rộng cho các đồ thị bất kỳ trong [12, Theorem 3.1.10].

Định lí 2.3.18. ([12, Theorem 3.1.10]) *Cho E là một đồ thị và K là một trường. Khi đó, $L_K(E)$ là đơn vô hạn thuần tuý khi và chỉ khi các điều kiện sau đây được thoả mãn:*

(1) *Các tập con di truyền và bão hoà của E^0 chỉ là $\emptyset$ và E^0;*

(2) *Mọi chu trình trong E đều có một lối ra;*

(3) *E có một chu trình.*

Chúng tôi cung cấp một tiêu chuẩn theo hàm phân nhánh để một đại số đường Leavitt của đồ thị Hopf là đơn vô hạn thuần tuý.

Mệnh đề 2.3.19. *Cho G là một nhóm với hàm phân nhánh $\mathfrak{r} = \sum_{C\in\mathcal{C}} \mathfrak{r}_C C$ và K là một trường. Khi đó, $L_K(\Gamma_{G,\mathfrak{r}})$ là đơn vô hạn thuần tuý khi và chỉ khi $S_{G,\mathfrak{r}} = G$ và $\sum_{C\in\mathcal{C}} \mathfrak{r}_C|C| \geq 2$.*

Chứng minh. ($\Longrightarrow$). Giả sử rằng $L_K(\Gamma_{G,\mathfrak{r}})$ là đơn vô hạn thuần tuý. Theo Định lí 2.3.18 ta có $L_K(\Gamma_{G,\mathfrak{r}})$ tồn tại một chu trình. Vì thế, theo Mệnh đề 2.3.5 (4) ta được $S_{G,\mathfrak{r}}$ là một vị nhóm con của G. Nếu $\mathfrak{r} = 0$ thì theo Mệnh đề 2.3.5 (2) ta có $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ là hợp rời của các đỉnh cô lập, mâu thuẫn. Xét trường hợp $\sum_{C\in\mathcal{C}} \mathfrak{r}_C|C| = 1$. Vì $S_{G,\mathfrak{r}}$ là một vị nhóm con của G nên theo Hệ quả 2.3.10 (2) ta được $L_K(\Gamma_{G,\mathfrak{r}}) = M_{|S_{G,\mathfrak{r}}|}(K[x,x^{-1}])^{(G/\Delta^0_{G,\mathfrak{r}})}$. Vì thế, $L_K(\Gamma_{G,\mathfrak{r}})$ không là đơn vô hạn thuần tuý. Ta gặp một mâu thuẫn. Do đó, ta có $\sum_{C\in\mathcal{C}} \mathfrak{r}_C|C| \geq 2$.

Nếu $\langle S_{G,\mathfrak{r}}\rangle \neq G$ thì theo Định lí 2.3.9 ta có $L_K(\Gamma_{G,\mathfrak{r}}) = L_K(\Delta_{G,\mathfrak{r}})^{(G/\langle S_{G,\mathfrak{r}}\rangle)}$. Vì thế, $L_K(\Gamma_{G,\mathfrak{r}})$ không đơn. Ta gặp một mâu thuẫn. Điều này suy ra $\langle S_{G,\mathfrak{r}}\rangle = G$.

Ta chứng minh rằng $S_{G,\mathfrak{r}}$ là một nhóm. Thật vậy, nếu $S_{G,\mathfrak{r}} = \{1_G\}$ thì điều cần chứng minh là hiển nhiên. Xét trường hợp $S_{G,\mathfrak{r}} \neq \{1_G\}$.

Gọi $d \in \bigcup_{C\in\mathrm{supp}(\mathfrak{r})} C$ và $d \neq 1_G$. Khi đó, tồn tại một cạnh e trong $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ sao cho $s(e) = d$ và $r(e) = d^2$. Vì $S_{G,\mathfrak{r}}$ là một vị nhóm con của G nên tồn tại các phần tử $\{w_i\}_{i=1}^n \subseteq \bigcup_{C\in\mathrm{supp}(\mathfrak{r})} C$ sao cho $w_1 \cdots w_n = 1_G$. Vì thế, tồn tại một chu trình $\alpha = e_1e_2 \cdots e_n$ in $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ sao cho $d = s(e_1)$ và $r(e_i) = s(e_i)w_i$ với mọi $1 \leq i \leq n$. Vì $L_K(\Gamma_{G,\mathfrak{r}})$ là đơn nên theo [12, Theorem 2.9.7], tồn tại một đường $p = f_1 \cdots f_k$ trong $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ bắt đầu tại d^2 và kết thúc trong α. Ta viết $r(f_i) = s(f_i)c_i$ với mọi $1 \leq i \leq k$, trong đó $c_i \in \bigcup_{C\in\mathrm{supp}(\mathfrak{r})} C$. Vì p kết thúc trong α nên tồn tại $1 \leq i \leq n$ để $r(p) = s(e_i)$. Đặt $\beta := ef_1 \cdots f_k e_i e_{i+1} \cdots e_n$. Khi đó, ta có β là một đường khép kín trong $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ có đáy tại d^2. Vì thế, $s(e) = d = r(e_n) = s(e)dc_1 \cdots c_k w_i \cdots w_n$ và $dc_1 \cdots c_k w_i \cdots w_n = 1_G$. Điều này suy ra rằng d khả nghịch trong $S_{G,\mathfrak{r}}$, Vì vậy $S_{G,\mathfrak{r}}$ là một nhóm con của G. Khi đó, vì $\langle S_{G,\mathfrak{r}}\rangle = G$ nên ta có được $S_{G,\mathfrak{r}} = G$.

($\Longleftarrow$). Vì $S_{G,\mathfrak{r}} = G$ nên theo Định lí 2.3.9 và Mệnh đề 2.3.5 (4) ta thu được rằng $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ vừa là liên thông mạnh và vừa có chu trình. Áp dụng [12, Lemma 2.9.6]) ta thấy tập con di truyền và bão hoà của $\Gamma^0_{G,\mathfrak{r}}$ chỉ là $\emptyset$ và $\Gamma^0_{G,\mathfrak{r}}$. Vì $\sum_{C\in\mathcal{C}} \mathfrak{r}_C|C| \geq 2$ nên mọi chu trình trong $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ đều có lối ra. Khi đó, theo Định lí 2.3.18 ta có $L_K(\Gamma_{G,\mathfrak{r}})$ là đơn vô hạn thuần tuý. □

Hệ quả 2.3.20. *Cho G là một nhóm với hàm phân nhánh $\mathfrak{r} = \sum_{C\in\mathcal{C}} \mathfrak{r}_C C$ và K là một trường. Khi đó, nếu $\sum_{C\in\mathcal{C}} \mathfrak{r}_C|C| \geq 2$ và $S_{G,\mathfrak{r}}$ là một nhóm con của G thì $L_K(\Delta_{G,\mathfrak{r}})$ là đơn vô hạn thuần tuý.*

Chứng minh. Theo Định lí 2.3.9 (3) ta có $\Delta_{G,\mathfrak{r}}$ là đồ thị liên thông mạnh. Áp dụng chứng minh của Mệnh đề 2.3.19 ta suy ra $\Delta_{G,\mathfrak{r}}$ thoả mãn tất cả các điều kiện của Định lí 2.3.18. Vì thế $L_K(\Delta_{G,\mathfrak{r}})$ là đơn thuần tuý vô hạn. □

Định lí sau đây chỉ ra rằng Giả thuyết Abrams-Tomforde đúng cho một số lớp đồ thị Hopf.

Định lí 2.3.21. *Giả thuyết Abrams-Tomforde đúng cho các lớp đồ thị Hopf liên kết với cặp $(G, \mathfrak{r})$ sao cho G là nhóm đếm được và một trong các*

điều kiện sau đây được thoả mãn:

(1) $S_{G,\mathfrak{r}}$ *không là vị nhóm con của* G.

(2) $\sum_{C\in\mathcal{C}} \mathfrak{r}_C|C| \leq 1$.

(3) $\sum_{C\in\mathcal{C}} \mathfrak{r}_C|C| \geq 2$ *và* $S_{G,\mathfrak{r}} = G$.

(4) G *là một nhóm hữu hạn.*

Chứng minh. (1) Gọi $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ và $\Gamma_{G',\mathfrak{r}'}$ là các đồ thị Hopf sao cho $S_{G,\mathfrak{r}}$ và $S_{G',\mathfrak{r}'}$ không là vị nhóm con của G và G' và $L_{\mathbb{C}}(\Gamma_{G,\mathfrak{r}}) \sim_{ME} L_{\mathbb{C}}(\Gamma_{G',\mathfrak{r}'})$. Ta cần chứng minh $C^*(\Gamma_{G,\mathfrak{r}}) \sim_{SME} C^*(\Gamma_{G',\mathfrak{r}'})$. Thật vậy, theo Mệnh đề 2.3.5 (4) ta có $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ và $\Gamma_{G',\mathfrak{r}'}$ là các đồ thị không chứa chu trình. Do đó, theo Định lí 2.3.17 (1) ta có $C^*(\Gamma_{G,\mathfrak{r}}) \sim_{SME} C^*(\Gamma_{G',\mathfrak{r}'})$.

(2) Gọi $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ và $\Gamma_{G',\mathfrak{r}'}$ là các đồ thị Hopf sao cho $\sum_{C\in\mathcal{C}} \mathfrak{r}_C|C| \leq 1$, $\sum_{C'\in\mathcal{C}'} \mathfrak{r}'_{C'}|C'| \leq 1$ và $L_{\mathbb{C}}(\Gamma_{G,\mathfrak{r}}) \sim_{ME} L_{\mathbb{C}}(\Gamma_{G',\mathfrak{r}'})$. Ta cần chứng minh

$$C^*(\Gamma_{G,\mathfrak{r}}) \sim_{SME} C^*(\Gamma_{G',\mathfrak{r}'}).$$

Thật vậy, ta xét các trường hợp sau đây.

Trường hợp 1: $S_{G,\mathfrak{r}}$ và $S_{G',\mathfrak{r}'}$ không là các vị nhóm con của G và G'. Theo phần (1) ta thu được $C^*(\Gamma_{G,\mathfrak{r}}) \sim_{SME} C^*(\Gamma_{G',\mathfrak{r}'})$.

Trường hợp 2: $S_{G,\mathfrak{r}}$ là một vị nhóm con của G nhưng $S_{G',\mathfrak{r}'}$ không là vị nhóm con của G'. Khi đó, theo Mệnh đề 2.3.13 ta được

$$\mathrm{GKdim}(\mathrm{L}_{\mathbb{C}}(\Gamma_{\mathrm{G},\mathfrak{r}})) = 1 \text{ và } \mathrm{GKdim}(\mathrm{L}_{\mathbb{C}}(\Gamma_{\mathrm{G}',\mathfrak{r}'})) = 0.$$

Mặt khác, vì $L_{\mathbb{C}}(\Gamma_{G,\mathfrak{r}}) \sim_{ME} L_{\mathbb{C}}(\Gamma_{G',\mathfrak{r}'})$ nên theo [47, Theorem 2.6] ta có

$$\mathrm{GKdim}(\mathrm{L}_{\mathbb{C}}(\Gamma_{\mathrm{G},\mathfrak{r}})) = \mathrm{GKdim}(\mathrm{L}_{\mathbb{C}}(\Gamma_{\mathrm{G}',\mathfrak{r}'})).$$

Ta gặp một mâu thuẫn. Như vậy Trường hợp 2 không thể xảy ra.

Trường hợp 3: $S_{G,\mathfrak{r}}$ và $S_{G',\mathfrak{r}'}$ là các vị nhóm con của G và G'. Theo Hệ quả 2.3.10 ta có $S_{G,\mathfrak{r}}$ (tương ứng, $S_{G',\mathfrak{r}'}$) là nhóm con chuẩn tắc của G (tương ứng, G') và

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{C}}(\Gamma_{G,\mathfrak{r}}) &\cong M_{|S_{G,\mathfrak{r}}|}(\mathbb{C}[x,x^{-1}])^{(G/S_{G,\mathfrak{r}})}, \\ L_{\mathbb{C}}(\Gamma_{G',\mathfrak{r}'}) &\cong M_{|S_{G',\mathfrak{r}'}|}(\mathbb{C}[x,x^{-1}])^{(G'/S_{G',\mathfrak{r}'})}. \end{aligned}$$

Vì $L_{\mathbb{C}}(\Gamma_{G,\mathfrak{r}}) \sim_{ME} L_{\mathbb{C}}(\Gamma_{G',\mathfrak{r}'})$ nên theo Mệnh đề 1.1.14 ta được

$$K_0(M_{|S_{G,\mathfrak{r}}|}(\mathbb{C}[x,x^{-1}])^{(G/S_{G,\mathfrak{r}})}) \cong K_0(M_{|S_{G',\mathfrak{r}'}|}(\mathbb{C}[x,x^{-1}])^{(G'/S_{G',\mathfrak{r}'})}).$$

Áp dụng [51, Theorem 1.2.5] ta được

$$(K_0(M_{|S_{G,\mathfrak{r}}|}(\mathbb{C}[x,x^{-1}]))^{(G/S_{G,\mathfrak{r}})} \cong (K_0(M_{|S_{G',\mathfrak{r}'}|}(\mathbb{C}[x,x^{-1}]))^{(G'/S_{G',\mathfrak{r}'})}.$$

Theo [12, Example 6.1.11] ta có

$$K_0(M_{|S_{G,\mathfrak{r}}|}\mathbb{C}[x,x^{-1}]) \cong K_0(M_{|S_{G',\mathfrak{r}'}|}\mathbb{C}[x,x^{-1}]) \cong \mathbb{Z}.$$

Suy ra $\mathbb{Z}^{(G/S_{G,\mathfrak{r}})} \cong \mathbb{Z}^{(G'/S_{G',\mathfrak{r}'})}$. Do đó $|G/S_{G,\mathfrak{r}}| = |G'/S_{G',\mathfrak{r}'}|$. Mặt khác, theo Hệ quả 2.3.10 ta có $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ (tương ứng, $\Gamma_{G',\mathfrak{r}'}$) là hợp rời của các chu trình cô lập. Do đó

$$\begin{aligned} C^*(\Gamma_{G,\mathfrak{r}}) &\cong (C^*(C_{|S_{G,\mathfrak{r}}|}))^{(G/S_{G,\mathfrak{r}})} \text{ và} \\ C^*(\Gamma_{G',\mathfrak{r}'}) &\cong (C^*(C_{|S_{G',\mathfrak{r}'}|}))^{(G'/S_{G',\mathfrak{r}'})}, \end{aligned}$$

trong đó C_n là chu trình cô lập n đỉnh. Theo Ví dụ 2.3.16 ta được $C^*(C_1) \cong C(\mathbb{T})$. Áp dụng [25, Proposition 3.5] và [18, Proposition 9.3] ta được

$$C^*(C_n) \cong M_n(C^*(C_1)) \cong M_n(C^*(\mathbb{T})).$$

Từ đó ta được

$$\begin{aligned} C^*(\Gamma_{G,\mathfrak{r}}) &\cong (M_{|S_{G,\mathfrak{r}}|}(C^*(\mathbb{T})))^{(G/S_{G,\mathfrak{r}})} \text{ và} \\ C^*(\Gamma_{G',\mathfrak{r}'}) &\cong (M_{|S_{G',\mathfrak{r}'}|}(C^*(\mathbb{T})))^{(G'/S_{G',\mathfrak{r}'})}. \end{aligned}$$

Theo Ví dụ 1.2.15 (1) ta có

$$M_{|S_{G,\mathfrak{r}}|}(C(\mathbb{T})) \sim_{ME} M_{|S_{G',\mathfrak{r}'}|}(C(\mathbb{T})).$$

Áp dụng Hệ quả 1.1.9 ta được $C^*(\Gamma_{G,\mathfrak{r}}) \sim_{ME} C^*(\Gamma_{G',\mathfrak{r}'})$.

Như vậy, trong mọi trường hợp có thể xảy ra, Giả thuyết Abrams-Tomforde đúng cho lớp đồ thị thoả mãn điều kiện (2).

(3) Gọi $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ và $\Gamma_{G',\mathfrak{r}'}$ là các đồ thị Hopf sao cho $\sum_{C\in\mathcal{C}} \mathfrak{r}_C|C| \geq 2$, $S_{G,\mathfrak{r}} = G$, $\sum_{C'\in\mathcal{C}'} \mathfrak{r}'_{C'}|C'| \geq 2$, $S_{G',\mathfrak{r}'} = G'$ và $L_{\mathbb{C}}(\Gamma_{G,\mathfrak{r}}) \sim_{ME} L_{\mathbb{C}}(\Gamma_{G',\mathfrak{r}'})$. Ta cần chứng minh $C^*(\Gamma_{G,\mathfrak{r}}) \sim_{SME} C^*(\Gamma_{G',\mathfrak{r}'})$. Thật vậy, từ Mệnh đề 2.3.19 ta suy

ra $L_{\mathbb{C}}(\Gamma_{G,\mathfrak{r}})$ và $L_{\mathbb{C}}(\Gamma_{G',\mathfrak{r}'})$ là đơn vô hạn thuần tuý. Theo [8, Theorem 5.2] và [31, Theorem 2.11], tồn tại các đồ thị hữu hạn bậc ra E và E' sao cho

$$\begin{aligned} &L_{\mathbb{C}}(E) \sim_{ME} L_{\mathbb{C}}(\Gamma_{G,\mathfrak{r}}); \quad L_{\mathbb{C}}(E') \sim_{ME} L_{\mathbb{C}}(\Gamma_{G',\mathfrak{r}'}); \\ &C^*(E) \sim_{SME} C^*(\Gamma_{G,\mathfrak{r}}); \text{ và } C^*(E') \sim_{SME} C^*(\Gamma_{G',\mathfrak{r}'}). \end{aligned}$$

Áp dụng [7, Proposition 10] ta có $L_{\mathbb{C}}(E)$ và $L_{\mathbb{C}}(E')$ là đơn vô hạn thuần tuý. Mặt khác, vì $L_{\mathbb{C}}(\Gamma_{G,\mathfrak{r}}) \sim_{ME} L_{\mathbb{C}}(\Gamma_{G',\mathfrak{r}'})$ nên $L_{\mathbb{C}}(E) \sim_{ME} L_{\mathbb{C}}(E')$. Do đó, áp dụng Định lí 2.3.17 (2) ta được $C^*(E) \sim_{SME} C^*(E')$. Từ đó suy ra $C^*(\Gamma_{G,\mathfrak{r}}) \sim_{SME} C^*(\Gamma_{G',\mathfrak{r}'})$.

(4) Gọi $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ và $\Gamma_{G',\mathfrak{r}'}$ là các đồ thị Hopf sao cho G và G' là các nhóm hữu hạn và $L_{\mathbb{C}}(\Gamma_{G,\mathfrak{r}}) \sim_{ME} L_{\mathbb{C}}(\Gamma_{G',\mathfrak{r}'})$. Ta cần chứng minh $C^*(\Gamma_{G,\mathfrak{r}}) \sim_{SME} C^*(\Gamma_{G',\mathfrak{r}'})$. Trường hợp $\sum_{C\in\mathcal{C}} \mathfrak{r}_C|C| = \sum_{C'\in\mathcal{C}'} \mathfrak{r}'_{C'}|C'| = 1$ đã xét ở phần (2) nên ta chỉ cần xét các khả năng sau:

Trường hợp 1: $\sum_{C\in\mathcal{C}} \mathfrak{r}_C|C| \leq 1$ và $\sum_{C'\in\mathcal{C}'} \mathfrak{r}'_{C'}|C'| \geq 2$. Theo Mệnh đề 2.3.13 ta có

$$\mathrm{GKdim}(\mathrm{L}_{\mathbb{C}}(\Gamma_{\mathrm{G},\mathfrak{r}})) \leq 1 \text{ và } \mathrm{GKdim}(\mathrm{L}_{\mathbb{C}}(\Gamma_{\mathrm{G}',\mathfrak{r}'})) = \infty.$$

Mặt khác, vì $L_{\mathbb{C}}(\Gamma_{G,\mathfrak{r}}) \sim_{ME} L_{\mathbb{C}}(\Gamma_{G',\mathfrak{r}'})$ nên theo [47, Theorem 2.6] ta có

$$\mathrm{GKdim}(\mathrm{L}_{\mathbb{C}}(\Gamma_{\mathrm{G},\mathfrak{r}})) = \mathrm{GKdim}(\mathrm{L}_{\mathbb{C}}(\Gamma_{\mathrm{G}',\mathfrak{r}'})).$$

Ta gặp một mâu thuẫn. Như vậy, Trường hợp 1 không thể xảy ra.

Trường hợp 2: $\sum_{C\in\mathcal{C}} \mathfrak{r}_C|C| \geq 2$ và $\sum_{C'\in\mathcal{C}'} \mathfrak{r}'_{C'}|C'| \geq 2$. Theo Định lí 2.3.9 (5) ta được

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{C}}(\Gamma_{G,\mathfrak{r}}) &\cong (L_{\mathbb{C}}(\Delta_{G,\mathfrak{r}}))^{(G/S_{G,\mathfrak{r}})} \text{ và} \\ L_{\mathbb{C}}(\Gamma_{G',\mathfrak{r}'}) &\cong (L_{\mathbb{C}}(\Delta_{G',\mathfrak{r}'}))^{(G'/S_{G',\mathfrak{r}'})}. \end{aligned}$$

Theo Hệ quả 2.3.20 ta có $L_{\mathbb{C}}(\Delta_{G,\mathfrak{r}})$ và $L_{\mathbb{C}}(\Delta_{G',\mathfrak{r}'})$ là đơn vô hạn thuần tuý. Vì $L_{\mathbb{C}}(\Gamma_{G,\mathfrak{r}}) \sim_{ME} L_{\mathbb{C}}(\Gamma_{G',\mathfrak{r}'})$ nên theo [15, Theorem 1.6], tồn tại một phân tích $L_{\mathbb{C}}(\Gamma_{G',\mathfrak{r}'}) \cong \bigoplus_{i\in G/S_{G,\mathfrak{r}}} S_i$ sao cho $S_i \sim_{ME} L_{\mathbb{C}}(\Delta_{G,\mathfrak{r}})$. Áp dụng [7, Proposition 10] ta có S_i là đơn vô hạn thuần tuý. Theo Bổ đề [44, Lemma 3.8] ta được $|G/S_{G,\mathfrak{r}}| = |G'/S_{G',\mathfrak{r}'}|$ và $S_i \cong L_{\mathbb{C}}(\Delta_{G',\mathfrak{r}'})$. Từ đó

ta được $L_{\mathbb{C}}(\Delta_{G,\mathfrak{r}}) \sim_{ME} L_{\mathbb{C}}(\Delta_{G',\mathfrak{r}'})$. Áp dụng Định lí 2.3.17 (2), ta được $C^*(\Delta_{G,\mathfrak{r}}) \sim_{SME} C^*(\Delta_{G',\mathfrak{r}'})$. Theo Hệ quả 1.1.9 ta có

$$C^*(\Gamma_{G,\mathfrak{r}}) \cong C^*(\Delta_{G,\mathfrak{r}})^{(G/S_{G,\mathfrak{r}})} \sim_{ME} C^*(\Delta_{G',\mathfrak{r}'})^{(G'/S_{G',\mathfrak{r}'})} \cong C^*(\Gamma_{G',\mathfrak{r}'}).$$

Như vậy, trong mọi trường hợp có thể xảy ra, Giả thuyết Abrams-Tomforde đúng cho lớp đồ thị thoả mãn điều kiện (4). □

Chúng ta kết thúc phần này bằng nhận xét sau đây.

Nhận xét 2.3.22. Phần (4) trong Định lí 2.3.21 được suy ra từ Định lí 2.3.17 (3). Tuy nhiên, trong chứng minh trên chúng tôi trình bày một cách chứng minh đơn giản hơn dựa vào cấu trúc của đồ thị Hopf.

CHƯƠNG 3

MỘT SỐ ỨNG DỤNG

Chương này nghiên cứu Vấn đề 2 được đề cập ở phần Mở đầu và được tổ chức như sau.

- Trong mục 3.1, chúng tôi cung cấp các tiêu chuẩn trên ma trận kề của E và E_{sf} để $L_K(E)$ có tính IBN (Định lí 3.1.6, Định lí 3.1.8). Sử dụng tiêu chuẩn này, chúng tôi nhận lại được kết quả của Koc, Ozaydin [40] về tính IBN của đại số đường Leavitt của đồ thị hữu hạn mà mỗi đỉnh chỉ thuộc nhiều nhất một chu trình (Hệ quả 3.1.11) và nhận lại được kết quả của Abrams, Kanuni [13] về tính IBN của đại số đường Cohn (Hệ quả 3.1.12). Mục này được viết dựa trên bài báo [48].

- Trong mục 3.2, chúng tôi cung cấp một tiêu chuẩn thuần tuý đồ thị trên E sao cho $L_K(E)$ có tính UGN (Định lí 3.2.14). Từ đó, chúng tôi chỉ ra rằng tính UGN và tính IBN là tương đương trên các lớp đại số đường Leavitt của đồ thị Hopf (Hệ quả 3.2.19) và đồ thị Cayley (Hệ quả 3.2.23). Mục này được viết dựa trên các bài báo [16], [48] và [49].

3.1 Đại số đường Leavitt thoả mãn tính IBN

Nội dung chính của phần này là cung cấp một tiêu chuẩn trên ma trận kề của đồ thị hữu hạn E và đồ thị phi nguồn E_{sf} có được qua quá trình từng bước khử đỉnh nguồn để $L_K(E)$ có tính IBN (Định lí 3.1.6 và 3.1.8). Từ đó, chúng tôi cung cấp một số điều kiện đủ thuần tuý đồ thị trên E để $L_K(E)$ có tính IBN. Mục này được viết dựa trên bài báo [48].

Như chúng ta đã biết, với một trường K bất kỳ, mọi cơ sở của một K-không gian vectơ luôn có cùng lực lượng. Khẳng định này nói chung là

không đúng đối với các môđun tự do trên một vành bất kỳ. Chẳng hạn, vành các tự đồng cấu của một K-không gian vectơ vô hạn chiều (xem [43, Example 1.4])

Định nghĩa 3.1.1. ([30, trang 3]) Một vành R có đơn vị được gọi là có *tính IBN* (Invariant Basis Number) nếu với mọi cặp số nguyên dương m và n, $R^m \cong R^n$ (như các R-môđun phải) kéo theo $m = n$. Một cách tương đương, R có tính IBN nếu chúng ta có thể định nghĩa được số chiều của các R-môđun tự do hữu hạn sinh.

Chúng tôi trình bày lại một vài đặc trưng của tính IBN.

Nhận xét 3.1.2. ([30, trang 3]) Các điều kiện sau đây là tương đương với mỗi vành R có đơn vị:

(1) R có tính IBN;

(2) với mỗi cặp số nguyên dương m và n, $m[R] = n[R]$ trong $\mathcal{V}(R)$ kéo theo $m = n$;

(3) với mỗi $A \in M_{m\times n}(R)$ và $B \in M_{n\times m}(R)$, nếu $AB = I_m$ và $BA = I_n$ thì $n = m$.

Nhận xét 3.1.2 (3) chỉ ra rằng tính IBN là một điều kiện đối xứng trái - phải. Trên thực tế, không dễ dàng để kiểm tra tính IBN của một vành cho trước. Tuy nhiên, bổ đề sau đây cho phép ta chỉ ra tính IBN của một số lớp vành đặc biệt.

Bổ đề 3.1.3. ([43, Remark 1.5]) *Cho R và S là các vành có đơn vị, $f : R \to S$ là một đồng cấu vành và S có tính IBN. Khi đó, R có tính IBN.*

Chúng tôi trình bày lại một số lớp vành có tính IBN.

Ví dụ 3.1.4. ([43, Example 1.6]) (1) Mọi vành chia đều có tính IBN.

(2) Cho R là một vành chia. Khi đó, vành ma trận $M_n(R)$ có tính IBN.

(3) Mọi vành địa phương $(R, \mathfrak{m})$ đều có tính IBN.

(4) Mọi vành giao hoán không tầm thường R đều có tính IBN.

(5) Mọi vành Noether đều có tính IBN.

Trong phần tiếp theo, chúng tôi đặc trưng cho tính IBN của đại số đường Leavitt. Để làm điều đó, trước tiên chúng tôi áp dụng Định lí 1.3.12 và Nhận xét 3.1.2(2) để đặc trưng tính IBN của đại số đường Leavitt thông qua vị nhóm đồ thị M_E.

Hệ quả 3.1.5. *Cho $E = (E^0, E^1, r, s)$ là một đồ thị hữu hạn và K là một trường. Khi đó, các điều kiện sau đây là tương đương:*

(1) *$L_K(E)$ có tính IBN;*

(2) *với mỗi cặp số nguyên dương m và n,*

$$\text{nếu } \ m[\textstyle\sum_{v\in E^0} v] = n[\sum_{v\in E^0} v] \text{ trong } M_E \text{ thì } m = n.$$

Định lí sau đây cung cấp một tiêu chuẩn cho tính IBN của $L_K(E)$ dựa trên ma trận kề của E. Kết quả này là một dạng ma trận của [38, Theorem 13] đã được đề cập trong phần Mở đầu. Trong [38], Kanuni và Özaydın chứng minh dựa vào K_0-nhóm. Ở đây, chúng tôi chứng minh bằng cách dựa vào vị nhóm đồ thị và lý thuyết về hệ phương trình tuyến tính. Chúng tôi ký hiệu A_E là ma trận kề của đồ thị E và X^t là ma trận chuyển vị của ma trận X.

Định lí 3.1.6. *Cho E là một đồ thị hữu hạn với tập đỉnh $\{v_i \mid 1 \leq i \leq h\}$ sao cho các đỉnh chính quy là $v_1, \cdots, v_z$. Đặt*

$$J_E = \begin{pmatrix} I_z & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_h(\mathbb{N}), \quad b = [1 \ \cdots \ 1]^t \in M_{h\times 1}(\mathbb{N}),$$

và $[A_E^t - J_E \ \ b]$ là ma trận có được từ $A_E^t - J_E$ bằng cách thêm vào cột b. Cho K là một trường. Khi đó, $L_K(E)$ có tính IBN khi và chỉ khi

$$\operatorname{rank}(A_E^t - J_E) < \operatorname{rank}([A_E^t - J_E \ \ b]).$$

Chứng minh. ($\Longleftarrow$) Giả sử rằng $\operatorname{rank}(A_E^t - J_E) < \operatorname{rank}([A_E^t - J_E \ \ b])$, ta chứng minh $L_K(E)$ có tính IBN dựa vào Hệ quả 3.1.5. Một cách tương đương, cho m và n là các số nguyên dương thỏa mãn

$$m[\sum_{i=1}^{h} v_i] = n[\sum_{i=1}^{h} v_i] \text{ trong } M_E,$$

ta phải chứng minh rằng $m = n$. Thật vậy, theo Mệnh đề 1.2.16 và giả thiết $m[\sum_{i=1}^{h} v_i] = n[\sum_{i=1}^{h} v_i]$, tồn tại hai dãy biến đổi σ và σ' sao cho

$$\Lambda_\sigma(m\sum_{i=1}^{h} v_i) = \gamma = \Lambda_{\sigma'}(n\sum_{i=1}^{h} v_i)$$

trong đó $\gamma \in Y_E$. Lưu ý rằng, mỗi lần áp dụng đồng nhất thức M_j ($1 \leq j \leq z$) lên một phần tử của Y_E, kết quả mang lại là:

(i) trừ 1 vào hệ số của v_j;

(ii) cộng a_{ji} vào hệ số của v_i (với $1 \leq i \leq h$).

Với mỗi $1 \leq j \leq z$, kí hiệu k_j (tương ứng, k'_j) là số lần mà đồng nhất thức M_j áp dụng lên Λ_σ (tương ứng, $\Lambda_{\sigma'}$). Kết quả của việc áp dụng đồng nhất thức M_j lên các phần tử của Y_E làm cho

$$\begin{aligned}
\gamma &= \Lambda_\sigma(m\sum_{i=1}^{h} v_i) \\
&= ((m-k_1) + a_{11}k_1 + a_{21}k_2 + ... + a_{z1}k_z)v_1 \\
&\quad +((m-k_2) + a_{12}k_1 + a_{22}k_2 + ... + a_{z2}k_z)v_2 + ... \\
&\quad +((m-k_z) + a_{1z}k_1 + a_{2z}k_2 + ... + a_{zz}k_z)v_z \\
&\quad +(m + a_{1(z+1)}k_1 + a_{2(z+1)}k_2 + ... + a_{z(z+1)}k_z)v_{z+1} + ... \\
&\quad +(m + a_{1h}k_1 + a_{2h}k_2 + ... + a_{zh}k_z)v_h.
\end{aligned}$$

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned}
\gamma &= \Lambda_{\sigma'}(n\sum_{i=1}^{h} v_i) \\
&= ((n-k'_1) + a_{11}k'_1 + a_{21}k'_2 + ... + a_{z1}k'_t)v_1 \\
&\quad +((n-k'_2) + a_{12}k'_1 + a_{22}k'_2 + ... + a_{z2}k'_z)v_2 + ... \\
&\quad +((n-k'_z) + a_{1z}k'_1 + a_{2z}k'_2 + ... + a_{zz}k'_z)v_z \\
&\quad +(n + a_{1(z+1)}k'_1 + a_{2(z+1)}k'_2 \ + ... + a_{z(z+1)}k'_z)v_{z+1} + ... \\
&\quad +(n + a_{1h}k'_1 + a_{2h}k'_2 + ... + a_{zh}k'_z)v_h.
\end{aligned}$$

Với mỗi $1 \leq i \leq z$, ký hiệu $m_i = k'_i - k_i$. Khi đó, từ các kết quả trên, so sánh hệ số của các phần tử sinh trên Y_E, ta được một hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} m-n &= (a_{11}-1)m_1 + a_{21}m_2 + ... + a_{z1}m_z \\ m-n &= a_{12}m_1 + (a_{22}-1)m_2 + ... + a_{z2}m_z \\ & ... \\ m-n &= a_{1z}m_1 + a_{2z}m_2 + ... + (a_{zz}-1)m_z \\ m-n &= a_{1(z+1)}m_1 + a_{2(z+1)}m_2 + ... + a_{z(z+1)}m_z \\ & ... \\ m-n &= a_{1h}m_1 + a_{2h}m_2 + ... + a_{zh}m_z. \end{cases}$$

Nói cách khác, bộ số $(m_1, ..., m_z, 0, ..., 0) \in \mathbb{Z}^h$ là một nghiệm của hệ phương trình:

$$(A_E^t - J_E)\mathrm{x} = (m-n)b,$$

trong đó $\mathrm{x} = [x_1 \ ... \ x_h]^t$ là cột ẩn số. Theo tiêu chuẩn của Kronecker-Capelli về điều kiện có nghiệm của hệ phương trình tuyến tính ta có

$$\mathrm{rank}(A_E^t - J_E) = \mathrm{rank}([A_E^t - J_E \ \ (m-n)b]).$$

Nếu $m - n \neq 0$ thì ta phải có

$$\mathrm{rank}([A_E^t - J_E \ \ (m-n)b]) = \mathrm{rank}([A_E^t - J_E \ \ b]),$$

và do đó $\mathrm{rank}(A_E^t - J_E) = \mathrm{rank}([A_E^t - J_E \ \ b])$. Điều này trái với giả thiết.

Vậy $m = n$ hay $L_K(E)$ có tính IBN.

($\Longrightarrow$) Giả sử ngược lại rằng $\mathrm{rank}(A_E^t - J_E) = \mathrm{rank}([A_E^t - J_E \ \ b])$, ta sẽ chứng minh $L_K(E)$ không có tính IBN, nghĩa là, ta sẽ tìm hai số nguyên dương khác nhau m và n thỏa mãn

$$m[\sum_{i=1}^{h} v_i] = n[\sum_{i=1}^{h} v_i]$$

trong M_E. Một cách tương đương theo lập luận trong chứng minh trên, ta sẽ tìm hai số nguyên dương m và n khác nhau và các số nguyên dương

$k_j,\ k'_j\ (j=1,...,z)$ thỏa mãn $k_j \le m$, $k'_j \le n$ với mọi $j=1,...,z$ và

$$\begin{cases} m-n &= (a_{11}-1)m_1 + a_{21}m_2 + ... + a_{z1}m_z \\ m-n &= a_{12}m_1 + (a_{22}-1)m_2 + ... + a_{z2}m_z \\ & ... \\ m-n &= a_{1z}m_1 + a_{2z}m_2 + ... + (a_{zz}-1)m_z \\ m-n &= a_{1(z+1)}m_1 + a_{2(z+1)}m_2 + ... + a_{z(z+1)}m_z \\ & ... \\ m-n &= a_{1h}m_1 + a_{2h}m_2 + ... + a_{zh}m_z. \end{cases} \tag{3.1}$$

trong đó $m_j := k'_j - k_j$ với mọi $j=1,...,z$. Hệ phương trình trên có thể được viết dưới dạng một phương trình ma trận như sau

$$(A_E^t - J_E)\mathrm{x} = (m-n)b,$$

trong đó $\mathrm{x} = [m_1,...,m_z,0,...,0] \in \mathbb{Z}^h$.

Ta sẽ chỉ ra một nghiệm của hệ phương trình như sau: Đặt $\mathrm{rank}(A_E^t - J_E) = \mathrm{rank}([A_E^t - J_E \quad b]) =: r \le z$. Sau các bước biến đổi sơ cấp trên dòng, $[A_E^t - J_E \quad b]$ có thể đưa được về dạng:

$$\begin{pmatrix} 0 & ... & 0 & a_{1j_1} & ... & a_{1(j_2-1)} & 0 & a_{1(j_2+1)} & ... & a_{1(j_r-1)} & 0 & ... & b_1 \\ 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 & a_{2j_2} & a_{2(j_2+1)} & ... & a_{2(j_r-1)} & 0 & ... & b_2 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & a_{rj_r} & ... & b_r \\ 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

trong đó mỗi phần tử là một số nguyên, $j_1 < j_2 < ... < j_r$, $a_{1j_1}a_{2j_2}...a_{rj_r} \ne 0$ và $\sum\limits_{i=1}^{r} b_i^2 \ne 0$ (sau các phép biến đổi sơ cấp trên dòng, các phần tử trên cột cuối không thể đồng thời bằng không). Ta xác định các số nguyên m_j, n và m như sau:

$$m_j := \begin{cases} \frac{b_j|a_{1j_1}a_{2j_2}...a_{rj_r}|}{a_{ij_i}} & \text{nếu } j = j_i\ (1 \le i \le r), \\ \\ 0 & \text{trường hợp còn lại,} \end{cases}$$

$$n := \max\{|m_j| \mid j = 1, ..., z\} \text{ và } m := |a_{1j_1}a_{2j_2}...a_{rj_r}| + n.$$

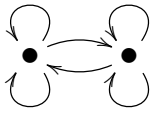
Khi đó, ta xác định các số nguyên k_j và k'_j $(j = 1, ..., z)$ như sau:

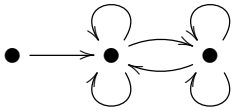
$$(k'_j, k_j) := \begin{cases} (0,0) & \text{nếu } m_j = 0, \\ (m_j, 0) & \text{nếu } m_j > 0, \\ (0, -m_j) & \text{nếu } m_j < 0. \end{cases}$$

Khi đó, dễ thấy rằng việc xác định các số nguyên trên thỏa mãn hệ phương trình (3.1) ở trên. Đồng thời, lưu ý rằng ta luôn có $k'_j, k_j \leq n < m$ với mọi $j = 1, ..., z$. Định lí được chứng minh. □

Chúng tôi minh hoạ Định lí 3.1.6 thông qua ví dụ sau đây.

Ví dụ 3.1.7. Cho K là một trường và gọi E, F là các đồ thị

$E =$ 

$F =$ 

Khi đó, ta có

$$[A_E^t - J_E \;\; b] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

và

$$[A_F^t - J_F \;\; b] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

điều đó kéo theo

$$\text{rank}(A_E^t - J_E) = 1 = \text{rank}([A_E^t - J_E \;\; b]).$$

và

$$\text{rank}(A_F^t - J_F) = 2 < 3 = \text{rank}([A_F^t - J_F \;\; b]).$$

Do đó, theo Định lí 3.1.6 ta được $L_K(E)$ không có tính IBN và $L_K(F)$ có tính IBN.

Áp dụng các Định lí 2.2.14 và 3.1.6, chúng tôi cung cấp một tiêu chuẩn dựa trên quá trình khử đỉnh nguồn và ma trận kề của E_{sf} cho tính IBN của $L_K(E)$.

Định lí 3.1.8. *Cho E là một đồ thị hữu hạn và K là một trường. Gọi*

$$E = E_0 \to E_1 \to \cdots \to E_i \to \cdots \to E_p = E_{sf}$$

là dãy các đồ thị được sinh ra trong quá trình từng bước khử đỉnh nguồn. Đặt $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ là tập đỉnh của E^0_{sf} và n_i số đường trong $F(E^0_{sf})$ kết thúc tại đỉnh v_i. Khi đó, $L_K(E)$ có tính IBN khi và chỉ khi một trong các điều kiện sau đây thoả mãn:

(1) *Tồn tại $0 \leq i \leq p$ để E_i chứa một đỉnh cô lập.*

(2) $\operatorname{rank}(A^t_{E_{sf}} - J_{E_{sf}}) < \operatorname{rank}([A^t_{E_{sf}} - J_{E_{sf}} \quad b'])$, *trong đó $b' = [1 + n_1, \cdots, 1 + n_k]^t$ và $[A^t_{E_{sf}} - J_{E_{sf}} \quad b']$ là ma trận có được từ $A^t_{E_{sf}} - J_{E_{sf}}$ bằng cách thêm vào cột b'.*

Chứng minh. (1) Giả sử rằng tồn tại $0 \leq i \leq p$ để E_i chứa một đỉnh cô lập. Khi đó, tồn tại một đỉnh thu trong E^0 nhưng không thuộc E^0_{sf}. Gọi l là số các đỉnh thu trong E nhưng không thuộc E^0_{sf} (gọi các đỉnh này là $v'_1, \cdots, v'_l$) và với mỗi $1 \leq i \leq l$, gọi m_i là số các đường trong E kết thúc tại đỉnh thu v'_i. Theo Định lí 2.2.14 ta có $L_K(E) \cong M_{m_1+1}(K) \oplus \cdots \oplus M_{m_l+1}(K) \oplus L_K(E(E^0_{sf}))$. Do đó tồn tại phép chiếu tự nhiên từ $L_K(E)$ lên $M_{m_1+1}(K)$. Theo Ví dụ 3.1.4 (2) ta được vành ma trận $M_{m_1+1}(K)$ có tính IBN. Vì thế, theo Bổ đề 3.1.3 ta có $L_K(E)$ có tính IBN.

(2) Giả sử rằng mọi E_i đều không chứa đỉnh cô lập. Khi đó, theo Định lí 2.2.14 ta được $L_K(E) \cong L_K(E(E^0_{sf}))$. Từ chứng minh của Định lí 2.2.14 ta suy ra rằng $E(E^0_{sf})^0 = E^0_{sf} \cup F(E^0_{sf})$ và mỗi đỉnh $\alpha \in F(E^0_{sf})$ là một đỉnh nguồn phát ra đúng một cạnh $\overline{\alpha}$ đến $r_E(\alpha) \in E^0_{sf}$. Đồng thời, với mỗi đỉnh $v_i \in E^0_{sf}$ $(1 \leq i \leq k)$, tồn tại đúng n_i đỉnh α sao cho $r_{E(E^0_{sf})}(\overline{\alpha}) = v_i$.

Bằng cách đặt lại tên các đỉnh nếu cần, không mất tính tổng quát ta có thể giả sử rằng

$$E(E^0_{sf})^0 = \{v_1, \cdots, v_k, v_{11}, \cdots, v_{1n_1}, v_{21}, \cdots, v_{2n_2}, \cdots, v_{k1}, \cdots, v_{kn_k}\},$$

trong đó mỗi đỉnh v_{ij} $(1 \leq i \leq k$ và $1 \leq j \leq n_i)$ là một đỉnh nguồn phát ra đúng một cạnh đến v_i. Khi đó, ma trận $[A^t_{E(E^0_{sf})} - J_{E(E^0_{sf})} \;\; b]$ có dạng sau:

$$\left(\begin{array}{c|cccccccccc|c} & \overbrace{\begin{matrix}1&1&\cdots&1\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{matrix}}^{n_1} & \overbrace{\begin{matrix}0&0&\cdots&0\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{matrix}}^{n_2} & \cdots & \overbrace{\begin{matrix}0&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{matrix}}^{n_k} & \begin{matrix}1\\1\\\vdots\\1\end{matrix} \\ A^t_{E_{sf}} - J_{E_{sf}} & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ \hline \mathbf{0} & \multicolumn{10}{c|}{-I_{\sum_{i=1}^k n_i}} & \begin{matrix}1\\1\\\vdots\\1\end{matrix} \end{array}\right).$$

Với mỗi $1 \leq i \leq k$, ta biến đổi dòng i như sau: cộng dòng i với n_i dòng bắt đầu từ dòng $k + \sum_{j=1}^{i-1} n_j + 1$ đến dòng $k + \sum_{j=1}^{i} n_j$, Khi đó, ta được một ma trận tương đương về hạng:

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} A^t_{E_{sf}} - J_{E_{sf}} & \multicolumn{3}{c|}{\mathbf{0}\;\;\mathbf{0}\;\;\cdots\;\;\mathbf{0}} & \begin{matrix}1+n_1\\1+n_2\\\vdots\\1+n_k\end{matrix} \\ \hline \mathbf{0} & \multicolumn{3}{c|}{-I_{\sum_{i=1}^k n_i}} & \begin{matrix}1\\1\\\vdots\\1\end{matrix} \end{array}\right).$$

Điều đó suy ra rằng

$$\begin{aligned} &\operatorname{rank}(A^t_{E(E^0_{sf})} - J_{E(E^0_{sf})}) \;\; < \operatorname{rank}([A^t_{E(E^0_{sf})} - J_{E(E^0_{sf})} \;\; b]) \\ \iff &\operatorname{rank}(A^t_{E_{sf}} - J_{E_{sf}}) \;\; < \operatorname{rank}([A^t_{E_{sf}} - J_{E_{sf}} \;\; b']). \end{aligned}$$

Do đó, theo Định lí 3.1.6 ta có $\operatorname{rank}(A^t_{E_{sf}} - J_{E_{sf}}) < \operatorname{rank}([A^t_{E_{sf}} - J_{E_{sf}} \;\; b'])$ khi và chỉ khi $L_K(E)$ có tính IBN. Ta kết thúc chứng minh. □

Chúng tôi minh hoạ Định lí 3.1.8 thông qua ví dụ sau đây.

Ví dụ 3.1.9. Cho K là một trường và E là đồ thị sau

$$E = \quad \bullet^{v_0} \longrightarrow \bullet^{v_1} \longrightarrow \bullet^{v_2} \longrightarrow \bullet^{v_3} .$$

Khi đó, áp dụng quá trình khử đỉnh nguồn lên E ta thu được đồ thị E_{sf} sau đây

$$E_{sf} = \quad \bullet^{v_1} \longrightarrow \bullet^{v_2} \longrightarrow \bullet^{v_3} .$$

Gọi n_i là số đường trong $F(E^0_{sf})$ kết thúc tại đỉnh v_i, $i = 1, 2, 3$. Ta có $n_1 = 1$, $n_2 = 0 = n_3$. Khi đó,

$$b' = [2 \;\; 1 \;\; 1]^t \text{ và } \; [A^t_{E_{sf}} - J_{E_{sf}} \;\; b'] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Suy ra

$$\text{rank}(A^t_{E_{sf}} - J_{E_{sf}}) = 2 = \text{rank}([A^t_{E_{sf}} - J_{E_{sf}} \;\; b']).$$

Theo Định lí 3.1.8 ta được $L_K(E)$ không có tính IBN.

Áp dụng Định lí 3.1.6 và 3.1.8, chúng tôi cung cấp một điều kiện đủ thuần tuý đồ thị trên E sao cho $L_K(E)$ có tính IBN.

Hệ quả 3.1.10. *Cho E là một đồ thị hữu hạn và K là một trường. Gọi*

$$E = E_0 \to E_1 \to \cdots \to E_i \to \cdots \to E_t = E_{sf}$$

là dãy các đồ thị được sinh ra trong quá trình từng bước khử đỉnh nguồn. Khi đó, nếu tồn tại $0 \leq i \leq t$ để E_i chứa một đỉnh cô lập, hoặc E_{sf} chứa một chu trình nguồn thì $L_K(E)$ có tính IBN.

Chứng minh. Ta biểu diễn E^0 thành tập $\{v_1, v_2, \cdots, v_h\}$ sao cho các đỉnh

chính quy của E xuất hiện dưới dạng $v_1, \cdots, v_z$. Khi đó, ta có

$$[A_E^t - J_E \;\; b] = \begin{pmatrix} a_{11}-1 & a_{21} & \cdots & a_{z1} & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_{12} & a_{22}-1 & \cdots & a_{z2} & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . & \\ a_{1z} & a_{2z} & \cdots & a_{zz}-1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_{1(z+1)} & a_{2(z+1)} & \cdots & a_{z(z+1)} & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . & \\ a_{1h} & a_{2h} & \cdots & a_{zh} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Giả sử rằng tồn tại $0 \leq i \leq t$ để E_i chứa một đỉnh cô lập. Khi đó, theo Định lí 3.1.8 ta được $L_K(E)$ có tính IBN.

Mặt khác, giả sử rằng mọi E_i đều không chứa đỉnh cô lập. Theo Định lí 2.2.14 (1) và (3), tồn tại một đồ thị phi nguồn hữu hạn F sao cho $L_K(E) \cong L_K(E(E^0_{sf})) \cong L_K(F)$. Vì thế, không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết rằng E là một đồ thị phi nguồn hữu hạn, nghĩa là, $E = E_{sf}$ và E chứa một chu trình nguồn c. Bằng cách đặt tên lại các đỉnh nếu cần, không mất tính tổng quát ta có thể giả sử rằng $c^0 = \{v_1, \cdots, v_p\}$. Mỗi đỉnh trong c^0 phát ra ít nhất một cạnh nên ta có mỗi đỉnh trong $\{v_1, \cdots, v_p\}$ đều là đỉnh chính quy và $|r^{-1}(v)| = 1$ với mọi $v \in \{v_1, \cdots, v_p\}$. Từ đó ta có các lưu ý sau:

- $\diamond$ $a_{i(i+1)} = 1$ với $1 \leq i \leq p-1$;
- $\diamond$ $a_{p1} = 1$;
- $\diamond$ $a_{j(i+1)} = 0$ với $1 \leq i \leq p-1$ và $j \neq i$ $(1 \leq j \leq h)$;
- $\diamond$ $a_{j1} = 0$ nếu $j \neq p$ $(1 \leq j \leq h)$.

Nếu $p = 1$ thì $a_{11} = 1$ và ma trận $[A_E^t - J_E \;\; b]$ trở thành

$$[A_E^t - J_E \;\; b] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_{12} & a_{22}-1 & \cdots & a_{z2} & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . & \\ a_{1z} & a_{2z} & \cdots & a_{zz}-1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_{1(z+1)} & a_{2(z+1)} & \cdots & a_{z(z+1)} & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . & \\ a_{1h} & a_{2h} & \cdots & a_{zh} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Điều này kéo theo

$$\text{rank}(A_E^t - J_E) < \text{rank}([A_E^t - J_E \;\; b]).$$

Theo Định lí 3.1.8 ta được $L_K(E)$ có tính IBN.

Nếu $p \geq 2$ thì p dòng đầu tiên của ma trận $[A_E^t - J_E \;\; b]$ có thể được viết như sau:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_{1(p+1)} & a_{2(p+1)} & a_{3(p+1)} & \cdots & a_{(p-1)(p+1)} & a_{p(p+1)} & a_{(p+1)(p+1)} & \cdots & 0 & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . & & & \\ a_{1h} & a_{2h} & a_{3h} & \cdots & a_{(p-1)h} & a_{ph} & a_{(p+1)h} & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bằng cách cộng vào dòng 1 tất cả các dòng i $(2 \leq i \leq p)$, ta được ma trận tương đương sau:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_{1(p+1)} & a_{2(p+1)} & a_{3(p+1)} & \cdots & a_{(p-1)(p+1)} & a_{p(p+1)} & a_{(p+1)(p+1)} & \cdots & 0 & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . & & & \\ a_{1h} & a_{2h} & a_{3h} & \cdots & a_{(p-1)h} & a_{ph} & a_{(p+1)h} & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Điều này suy ra

$$\operatorname{rank}(A_E^t - J_E) < \operatorname{rank}([A_E^t - J_E \;\; b]).$$

Theo Định lí 3.1.6 ta được $L_K(E)$ có tính IBN. □

Sử dụng Hệ quả 3.1.10, chúng tôi nhận lại được kết quả của Koç và Özaydin trong [40], chỉ ra rằng đại số đường Leavitt của một đồ thị hữu hạn mà mỗi đỉnh thuộc nhiều nhất một chu trình luôn có tính IBN.

Hệ quả 3.1.11. ([40, Corollary 6.9]) *Cho K là một trường và E là một đồ thị hữu hạn mà mỗi đỉnh thuộc nhiều nhất một chu trình. Khi đó, $L_K(E)$ có tính IBN.*

Chứng minh. Gọi $E = E_0 \to E_1 \to \cdots \to E_i \to \cdots \to E_t = E_{sf}$ là dãy các đồ thị được sinh ra trong quá trình từng bước khử đỉnh nguồn. Ta xét hai trường hợp sau.

Trường hợp 1: E không chứa chu trình. Khi đó, theo Mệnh đề 2.1.5, tồn tại $0 \leq i \leq t$ để E_i chứa một đỉnh cô lập. Theo Hệ quả 3.1.10 ta được $L_K(E)$ có tính IBN.

Trường hợp 2: E chứa chu trình. Khi đó, theo Mệnh đề 2.1.5 ta có E_{sf} chứa chu trình. Ta chứng minh rằng E_{sf} chứa một chu trình nguồn. Thật vậy, giả sử ngược lại rằng E_{sf} không chứa chu trình nguồn. Gọi c_1 là một chu trình trong E_{sf}. Vì c_1 không là chu trình nguồn trong E_{sf} nên tồn tại

chu trình c_2 trong E_{sf} sao cho $c_2 \Longrightarrow c_1$. Vì c_2 không là chu trình nguồn trong E_{sf} nên tồn tại chu trình c_3 trong E_{sf} sao cho $c_3 \Longrightarrow c_2$. Vì E_{sf} không chứa chu trình nguồn nên quá trình trên lặp lại vô hạn lần. Tức là ta được một dãy vô hạn các chu trình trong E_{sf}: $\{c_1, c_2, \cdots, c_k, \cdots\}$ trong đó $c_{i+1} \Longrightarrow c_i$ với mọi $i \geq 1$. Vì trong E_{sf} mỗi đỉnh thuộc nhiều nhất một chu trình nên các chu trình trong dãy $\{c_1, c_2, \cdots, c_k, \cdots\}$ là phân biệt. Điều này mâu thuẫn với tính hữu hạn của E_{sf}. Do đó, E_{sf} chứa một chu trình nguồn. Theo Hệ quả 3.1.10 ta được $L_K(E)$ có tính IBN. □

Áp dụng Định lí 3.1.6, chúng tôi nhận lại được kết quả của Abrams và Kanuni trong [13] về tính IBN của đại số đường Cohn.

Hệ quả 3.1.12. ([13, Theorem 9]) *Cho E là một đồ thị hữu hạn và K là một trường. Khi đó, $C_K(E)$ có tính IBN.*

Chứng minh. Trước tiên, ta có $C_K(E) \cong L_K(F(E))$, trong đó $F(E)$ là đồ thị được xác định trong Định lí 1.3.9. Tiếp theo, ta chứng minh rằng đồ thị $F(E)$ thoả mãn điều kiện

$$\operatorname{rank}(A^t_{F(E)} - J_{F(E)}) < \operatorname{rank}([A^t_{F(E)} - J_{F(E)} \;\; b]).$$

Thật vậy, ta biểu diễn E^0 thành tập $\{v_1, v_2, \cdots, v_h\}$ sao cho các đỉnh chính quy của E xuất hiện dưới dạng $v_1, \cdots, v_z$. Khi đó, ta có $F(E)^0 = \{v_1, \cdots, v_h, v'_1, \cdots, v'_z\}$ và các đỉnh chính quy của $F(E)$ là $\{v_1, v_2, \cdots, v_z\}$. Chú ý rằng $|F(E)^0| = h + z$.

Gọi $A_E = (a_{ij})_{h\times h}$ là ma trận kề của E. Khi đó, ma trận kề của $F(E)$ là ma trận cỡ $(h+z)\times(h+z)$ sau đây:

$$A_{F(E)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1h} & a_{11} & \cdots & a_{1z} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2h} & a_{21} & \cdots & a_{2z} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{z1} & a_{z2} & \cdots & a_{zh} & a_{z1} & \cdots & a_{zz} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Do đó

$$[A^t_{F(E)} - J_{F(E)} \quad b] = \begin{pmatrix} a_{11}-1 & a_{21} & \cdots & a_{z1} & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_{12} & a_{22}-1 & \cdots & a_{z2} & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . & \\ a_{1z} & a_{2z} & \cdots & a_{zz}-1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_{1(z+1)} & a_{2(z+1)} & \cdots & a_{z(z+1)} & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . & \\ a_{1h} & a_{2h} & \cdots & a_{zh} & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{z1} & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{z2} & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . & \\ a_{1z} & a_{2z} & \cdots & a_{zz} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bằng cách lấy dòng $h+i$ trừ đi dòng i với mọi $1 \leq i \leq z$, ta được ma trận tương đương B như sau:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11}-1 & a_{21} & \cdots & a_{z1} & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_{12} & a_{22}-1 & \cdots & a_{z2} & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . & \\ a_{1z} & a_{2z} & \cdots & a_{zz}-1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_{1(z+1)} & a_{2(z+1)} & \cdots & a_{z(z+1)} & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . & \\ a_{1h} & a_{2h} & \cdots & a_{zh} & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bằng cách lấy dòng i trừ đi b_{ij} lần dòng $h+j$ với mọi $1 \leq i \leq h, 1 \leq j \leq z$

mà $b_{ij} \neq 0$, ta được một ma trận tương đương C như sau:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ta thu được

$$\operatorname{rank}(A^t_{F(E)} - J_{F(E)}) = z < z + 1 = \operatorname{rank}([A^t_{F(E)} - J_{F(E)} \quad b]).$$

Theo Định lí 3.1.6 ta được $C_K(E)$ có tính IBN. □

Chúng ta đã biết tính IBN không bảo toàn qua tương đương Morita (xem [43, Exercise 11, trang 502]). Áp dụng Định lí 3.1.8, chúng ta có thể xây dựng nhiều ví dụ cho thấy tính IBN không phải là một bất biến Morita trong lớp đại số đường Leavitt.

Hệ quả 3.1.13. *Tính IBN không phải là một bất biến Morita trong lớp đại số đường Leavitt.*

Chứng minh. Cho K là một trường và gọi E và F tương ứng là các đồ thị sau:

$$E = \bullet^{v_0} \longrightarrow \bullet^{v_1} \longrightarrow \bullet^{v_2} \longrightarrow \bullet^{v_3}$$

và

$$F = \bullet^{v_1} \longrightarrow \bullet^{v_2} \longrightarrow \bullet^{v_3}.$$

Dễ thấy rằng F là đồ thị có được từ E qua phép khử đỉnh nguồn v_0. Vì thế, theo Bổ đề 2.1.3 ta có $L_K(E) \sim_{ME} L_K(F)$. Đồng thời, ta có

$$[A_F^t - J_F \;\; b] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

suy ra

$$\text{rank}(A_F^t - J_F) = 2 < 3 = \text{rank}([A_F^t - J_F \;\; b]).$$

Do đó, theo Định lí 3.1.8 ta được $L_K(F)$ có tính IBN. Nhưng theo Ví dụ 3.1.9 ta có $L_K(E)$ không có tính IBN. □

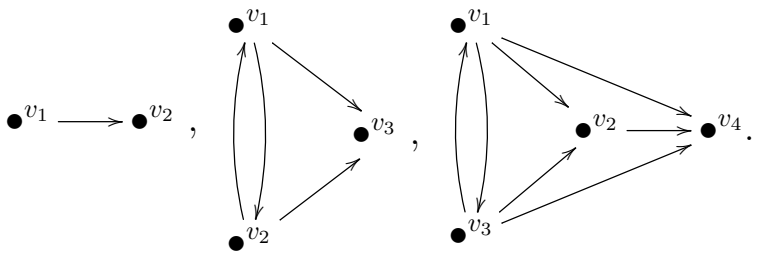
Trong luận án này, chúng tôi vẫn chưa cung cấp được một tiêu chuẩn thuần tuý đồ thị trên E sao cho $L_K(E)$ có tính IBN. Trong phần còn lại của mục này, chúng tôi khảo sát vấn đề trên cho một lớp hẹp hơn, đó là đại số đường Leavitt của các đồ thị luỹ thừa.

Chúng tôi nhắc lại khái niệm đồ thị luỹ thừa của một nửa nhóm theo Kelarev và Quinn trong [39].

Định nghĩa 3.1.14. ([39, trang 1]) Cho S là một nửa nhóm. *Đồ thị luỹ thừa* của S là đồ thị $\text{Pow}(S)$ có tập đỉnh $\{v_s \mid s \in S\}$ và ta nói có một cạnh từ v_s đến $v_{s'}$ trong trường hợp $s \neq s'$ và tồn tại một số nguyên dương n sao cho $s' = s^n$.

Chúng tôi minh hoạ khái niệm trên bằng cách vẽ hình ba đồ thị $\text{Pow}(\mathbb{Z}_2), \text{Pow}(\mathbb{Z}_3)$ và $\text{Pow}(\mathbb{Z}_4)$ dưới đây.

Ví dụ 3.1.15. Các đồ thị $\text{Pow}(\mathbb{Z}_2), \text{Pow}(\mathbb{Z}_3)$ và $\text{Pow}(\mathbb{Z}_4)$ tương ứng là các đồ thị sau đây



Trong phần còn lại của mục này chúng tôi khảo sát tính IBN của đại số đường Leavitt của các đồ thị luỹ thừa $\mathrm{Pow}(\mathbb{Z}_n)$. Để làm điều đó, chúng tôi cần mô tả ma trận kề của $\mathrm{Pow}(\mathbb{Z}_n)$.

Bổ đề 3.1.16. *Cho n, a và b là các số nguyên dương sao cho $1 \leq a, b \leq n$. Giả sử rằng $(a, n) = i$ và $(b, n) = j$. Khi đó, tồn tại một cạnh từ v_a đến v_b trong đồ thị luỹ thừa $Pow(\mathbb{Z}_n)$ khi và chỉ khi $a \neq b$ và i là ước của j.*

Chứng minh. Giả sử rằng tồn tại một cạnh từ đỉnh v_a đến đỉnh v_b, nghĩa là, $a \neq b$ và tồn tại số nguyên dương k để $b \equiv ka \pmod{n}$. Vì $(a, n) = i$ nên ta có i là ước của cả a và n và do đó, i là ước của b. Suy ra i là ước của $(b, n) = j$.

Ngược lại, giả sử rằng i là ước của j. Vì $(a, n) = i$ nên tồn tại các số nguyên s và r sao cho $i = as + nr$, nghĩa là, $i \equiv as \pmod{n}$. Mặt khác, do i là ước của j và j là ước của b nên ta có thể viết $j = id$ và $b = jk$ với d, k là các số nguyên. Các kết quả trên cho thấy $b = jk = idk \equiv asdk \pmod{n}$. Nếu $sdk > 0$ thì theo Định nghĩa 3.1.14, tồn tại một cạnh từ đỉnh v_a đến đỉnh v_b. Nếu $sdk < 0$ thì tồn tại số nguyên dương n_0 sao cho $nn_0 + sdk > 0$. Khi đó $b \equiv asdk \equiv a(nn_0 + sdk) \pmod{n}$. Theo Định nghĩa 3.1.14, tồn tại một cạnh từ đỉnh v_a đến đỉnh v_b. kết thúc chứng minh. □

Gọi n, i và j là các số nguyên dương sao cho $1 \leq i, j \leq n$. Đặt

$$C(i) := \{v_j \in \mathrm{Pow}(\mathbb{Z}_n)^0 \mid (j, n) = i\}.$$

Khi đó, từ Bổ đề 3.1.16 ta nhận được hai khẳng định sau: (1) với mỗi cặp đỉnh phân biệt v_j và v_k trong $C(i)$, tồn tại duy nhất một cạnh từ v_j đến v_k và tồn tại duy nhất một cạnh từ v_k đến v_j; (2) với mỗi $v_k \in C(i)$ và $v_l \in C(j)$, tồn tại một cạnh từ v_k đến v_l khi và chỉ khi i là ước của j.

Sử dụng hai khẳng định trên, ta có thể đặt tên lại cho các đỉnh trong đồ thị luỹ thừa $\mathrm{Pow}(\mathbb{Z}_n)$ theo quy tắc như sau. Gọi $\{d_1, d_2, \cdots, d_m\}$ là tập tất cả các ước số dương của n và giả sử rằng $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_m$. Chú ý rằng $d_1 = 1$, $d_m = n$ và $\mathrm{Pow}(\mathbb{Z}_n)^0 = C(d_1) \sqcup C(d_2) \sqcup \cdots \sqcup C(d_m)$. Bây giờ, ta đặt tên các đỉnh của $C(d_i)$ như sau:

$$\begin{aligned} C(d_1) &= \{v_1, v_2, \cdots, v_{k_1}\} \\ C(d_2) &= \{v_{k_1+1}, v_{k_1+2}, \cdots, v_{k_1+k_2}\} \\ \vdots &\ \vdots\ \vdots \\ C(d_{m-1}) &= \{v_{\Sigma_{i=1}^{m-2}k_i+1}, v_{\Sigma_{i=1}^{m-2}k_i+2}, \cdots, v_{\Sigma_{i=1}^{m-1}k_i}\} \\ C(d_m) &= \{v_n\} \end{aligned}$$

trong đó $k_i := |C(d_i)| \geq 1$ $(1 \leq i \leq m-1)$ và v_n là một đỉnh thu. Khi đó, ta có ma trận kề của $\mathrm{Pow}(\mathbb{Z}_n)$ có dạng như sau:

$$A_{\mathrm{Pow}(\mathbb{Z}_n)} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ B_{21} & A_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ B_{31} & B_{32} & A_{33} & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ B_{(m-1)1} & B_{(m-1)2} & B_{(m-1)3} & \cdots & A_{(m-1)(m-1)} & 0 \\ r_1 & r_2 & r_3 & \cdots & r_{m-1} & 0 \end{pmatrix}^t \tag{3.2}$$

trong đó $r_i = [1\ 1\ \cdots\ 1]_{1\times k_i}$ $(1 \leq i \leq m-1)$ và A_{ii}, B_{ij} được xác định bởi:

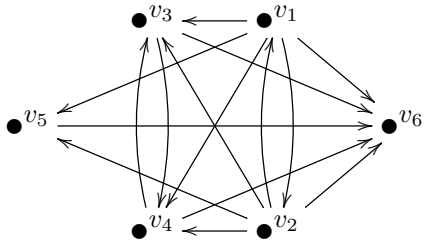
$$A_{ii} := \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ . & . & . & . \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{k_i} & \text{nếu } k_i > 1, \\ 0 & \text{trường hợp còn lại,} \end{cases}$$

và

$$B_{ij} := \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ . & . & . & . \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{k_i\times k_j} & \text{nếu } d_j \text{ chia hết } d_i, \\ 0 & \text{trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

Để rõ hơn, chúng tôi minh hoạ ý tưởng trên thông qua ví dụ sau đây.

Ví dụ 3.1.17. Xét đồ thị luỹ thừa $\mathrm{Pow}(\mathbb{Z}_6)$. Khi đó, ta có các ước số dương của 6 là $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 3$ và $d_4 = 6$. Dễ thấy, $|C(d_1)| = |C(d_2)| = 2$ và $|C(d_3)| = 1 = |C(d_4)|$. Bây giờ ta đặt tên các đỉnh của $C(d_i)$ như sau: $C(d_1) = \{v_1, v_2\}$, $C(d_2) = \{v_3, v_4\}$, $C(d_3) = \{v_5\}$ và $C(d_4) = \{v_6\}$. Khi đó, $\mathrm{Pow}(\mathbb{Z}_6)$ là đồ thị:



với ma trận kề của $\mathrm{Pow}(\mathbb{Z}_6)$ là:

$$A_{\mathrm{Pow}(\mathbb{Z}_6)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t$$

và

$$A_{11} = A_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ A_{33} = 0,\ B_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_{31} = [1\ 1],\ B_{32} = [0\ 0],\ r_1 = [1\ 1] = r_2,\ r_3 = 1.$$

Áp dụng Định lí 3.1.6 và Hệ quả 3.1.10, ta thu được rằng đại số đường Leavitt của các đồ thị luỹ thừa liên kết với nhóm xyclic cấp luỹ thừa của số nguyên tố luôn có tính IBN.

Định lí 3.1.18. *Với mọi số nguyên dương m, mọi số nguyên tố p và mọi trường K, đại số đường Leavitt $L_K(\mathrm{Pow}(\mathbb{Z}_{p^m}))$ có tính IBN.*

Chứng minh. Chú ý rằng tất cả các ước số của p^m có dạng p^i $(0 \leq i \leq m)$. Với mỗi $1 \leq i \leq m$, đặt $k_i := |C(p^{i-1})| \geq 1$. Sử dụng ma trận kề mô tả ở

(3.2) chúng ta sẽ chứng minh định lí bằng cách xem xét các trường hợp sau đây.

Trường hợp 1: $p > 3$. Dễ thấy rằng $k_i \geq 3$ với mọi $i = \overline{1,\ m}$. Do đó, theo (3.2) ma trận $[A^t_{\mathrm{Pow}(\mathbb{Z}_{p^m})} - J_{\mathrm{Pow}(\mathbb{Z}_{p^m})}\ b]$ có dạng

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_1 \\ B_{21} & A_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_2 \\ B_{31} & B_{32} & A_{33} & \cdots & 0 & 0 & c_3 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ B_{m1} & B_{m2} & B_{m3} & \cdots & A_{mm} & 0 & c_m \\ r_1 & r_2 & r_3 & \cdots & r_m & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

trong đó,

$$A_{ii} = \begin{pmatrix} \text{-1} & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \text{-1} & \cdots & 1 \\ . & . & . & . \\ 1 & 1 & \cdots & \text{-1} \end{pmatrix}_{k_i}, \quad B_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ . & . & . & . \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{k_i \times k_j}$$

$$r_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}^t_{k_i}, \quad \text{và} \quad c_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{k_i} \quad (1 \leq i \leq m).$$

Dễ thấy $|A_{ii}| = (k_i - 2)(-2)^{k_i - 1}$ và

$$\begin{vmatrix} A_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ B_{21} & A_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ B_{31} & B_{32} & A_{33} & \cdots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ B_{m1} & B_{m2} & B_{m3} & \cdots & A_{mm} \end{vmatrix} = |A_{11}| \times \cdots \times |A_{mm}| \neq 0.$$

Do đó, ta có $\mathrm{rank}(A^t_{\mathrm{Pow}(\mathbb{Z}_{p^m})} - J_{\mathrm{Pow}(\mathbb{Z}_{p^m})}) = \sum_{i=1}^{m} k_i$.

Tiếp theo ta chỉ ra rằng

$$D = \begin{vmatrix} A_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ B_{21} & A_{22} & 0 & \cdots & 0 & c_2 \\ B_{31} & B_{32} & A_{33} & \cdots & 0 & c_3 \\ . & . & . & . & . & . \\ B_{m1} & B_{m2} & B_{m3} & \cdots & A_{mm} & c_m \\ r_1 & r_2 & r_3 & \cdots & r_m & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Thật vậy, lấy các dòng j $(1 \leq j \leq \sum_{i=1}^{m} k_i)$ trừ đi dòng $\sum_{i=1}^{m} k_i + 1$, ta thu được

$$D = \begin{vmatrix} A'_{11} & -B_{12} & -B_{13} & \cdots & -B_{1m} & 0 \\ 0 & A'_{22} & -B_{23} & \cdots & -B_{2m} & 0 \\ 0 & 0 & A'_{33} & \cdots & -B_{3m} & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A'_{mm} & 0 \\ r_1 & r_2 & r_3 & \cdots & r_m & 1 \end{vmatrix}$$

trong đó,

$$A'_{ii} = \begin{pmatrix} \text{-2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \text{-2} & \cdots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & \text{-2} \end{pmatrix}_{k_i}, \quad B_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ . & . & . & . \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{k_i \times k_j}.$$

Bằng cách khai triển theo cột cuối ta được

$$D = |A'_{11}| \times \cdots \times |A'_{mm}| = (-2)^{k_1} \times \cdots \times (-2)^{k_m} \neq 0.$$

Suy ra

$$\text{rank}[A^t_{\text{Pow}(\mathbb{Z}_{p^m})} - J_{\text{Pow}(\mathbb{Z}_{p^m})}\ b] = \sum_{i=1}^{m} k_i + 1 > \text{rank}(A^t_{\text{Pow}(\mathbb{Z}_{p^m})} - J_{\text{Pow}(\mathbb{Z}_{p^m})}).$$

Vì thế, theo Định lí 3.1.6 ta thu được $L_K(\text{Pow}(\mathbb{Z}_{p^m}))$ có tính IBN.

Trường hợp 2: $p = 2$. Nếu $m = 1$ hoặc $m = 2$ thì theo Hệ quả 3.1.10 và Ví dụ 3.1.15 ta được $L_K(\text{Pow}(\mathbb{Z}_{p^m}))$ có tính IBN.

Giả sử rằng $m \geq 3$. Khi đó ta có $|C(2^{m-1})| = 1$, $|C(2^{m-2})| = 2$ và $|C(2^{m-k})| \geq 4$ với mọi $k = 3, \cdots, m$. Do đó, ma trận $A^t_{\mathrm{Pow}(\mathbb{Z}_{p^m})} - J_{\mathrm{Pow}(\mathbb{Z}_{p^m})}$ có dạng

$$\begin{pmatrix}
A_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
B_{21} & A_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
B_{31} & B_{32} & A_{33} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
B_{(m-2)1} & B_{(m-2)2} & B_{(m-2)3} & \cdots & A_{(m-2)(m-2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
r_1 & r_2 & r_3 & \cdots & r_{m-2} & -1 & 1 & 0 & 0 \\
r_1 & r_2 & r_3 & \cdots & r_{m-2} & 1 & -1 & 0 & 0 \\
r_1 & r_2 & r_3 & \cdots & r_{m-2} & 1 & 1 & -1 & 0 \\
r_1 & r_2 & r_3 & \cdots & r_{m-2} & 1 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

trong đó, A_{ii}, B_{ij} và r_i được xác định như trong Trường hợp 1. Xét định thức sau (có dược bằng cách bỏ đi cột cuối và dòng $\sum_{i=1}^{m-2} k_i + 1$ của ma trận $A^t_{\mathrm{Pow}(\mathbb{Z}_{p^m})} - J_{\mathrm{Pow}(\mathbb{Z}_{p^m})}$):

$$D = \begin{vmatrix}
A_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
B_{21} & A_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
B_{31} & B_{32} & A_{33} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
B_{(m-2)1} & B_{(m-2)2} & B_{(m-2)3} & \cdots & A_{(m-2)(m-2)} & 0 & 0 & 0 \\
r_1 & r_2 & r_3 & \cdots & r_{m-2} & 1 & -1 & 0 \\
r_1 & r_2 & r_3 & \cdots & r_{m-2} & 1 & 1 & -1 \\
r_1 & r_2 & r_3 & \cdots & r_{m-2} & 1 & 1 & 1
\end{vmatrix}.$$

Bằng cách khai triển Laplace theo $\sum_{i=1}^{m-2} k_i$ dòng đầu tiên, ta thu được

$$D = 4|A_{11}| \times \cdots \times |A_{(m-2)(m-2)}| = 4 \prod_{i=1}^{m-2} (k_i - 2)(-2)^{k_i} \neq 0.$$

Vì thế,

$$\mathrm{rank}(A^t_{\mathrm{Pow}(\mathbb{Z}_{p^m})} - J_{\mathrm{Pow}(\mathbb{Z}_{p^m})}) = \sum_{i=1}^{m-2} k_i + 3.$$

Mặt khác, ta có ma trận $[A^t_{\mathrm{Pow}(\mathbb{Z}_{p^m})} - J_{\mathrm{Pow}(\mathbb{Z}_{p^m})}\ b]$ có dạng

$$\begin{pmatrix}
A_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 \\
B_{21} & A_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 \\
B_{31} & B_{32} & A_{33} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
B_{(m-2)1} & B_{(m-2)2} & B_{(m-2)3} & \cdots & A_{(m-2)(m-2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{m-2} \\
r_1 & r_2 & r_3 & \cdots & r_{m-2} & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
r_1 & r_2 & r_3 & \cdots & r_{m-2} & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
r_1 & r_2 & r_3 & \cdots & r_{m-2} & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\
r_1 & r_2 & r_3 & \cdots & r_{m-2} & 1 & 1 & 1 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

trong đó $c_i = [1\ 1\ \cdots\ 1]^t_{1\times k_i}$ $(1 \le i \le m-2)$. Xét định thức con D' có được bằng cách bỏ đi cột $\sum_{i=1}^{m-2} k_i + 4$ của ma trận $[A^t_{\mathrm{Pow}(\mathbb{Z}_{p^m})} - J_{\mathrm{Pow}(\mathbb{Z}_{p^m})}\ b]$:

$$D' = \begin{vmatrix}
A_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 \\
B_{21} & A_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 \\
B_{31} & B_{32} & A_{33} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
B_{(m-2)1} & B_{(m-2)2} & B_{(m-2)3} & \cdots & A_{(m-2)(m-2)} & 0 & 0 & 0 & c_{m-2} \\
r_1 & r_2 & r_3 & \cdots & r_{m-2} & -1 & 1 & 0 & 1 \\
r_1 & r_2 & r_3 & \cdots & r_{m-2} & 1 & -1 & 0 & 1 \\
r_1 & r_2 & r_3 & \cdots & r_{m-2} & 1 & 1 & -1 & 1 \\
r_1 & r_2 & r_3 & \cdots & r_{m-2} & 1 & 1 & 1 & 1
\end{vmatrix}.$$

Bằng cách lấy dòng j trừ đi dòng $\sum_{i=1}^{m-2} k_i + 4$ với mọi $1 \le j \le \sum_{i=1}^{m-2} k_i + 3$, ta thu được

$$D' = \begin{vmatrix} A'_{11} & -B_{12} & -B_{13} & \cdots & -B_{1(m-2)} & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & A'_{22} & -B_{23} & \cdots & -B_{2(m-2)} & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & A'_{33} & \cdots & -B_{3(m-2)} & -1 & -1 & -1 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A'_{(m-2)(m-2)} & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ r_1 & r_2 & r_3 & \cdots & r_{m-2} & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -8|A'_{11}| \times \cdots \times |A'_{(m-2)(m-2)}| = -8(-2)^{k_1} \times \cdots \times (-2)^{k_{m-2}} \neq 0.$$

Do đó,

$$\text{rank}[A^t_{\text{Pow}(\mathbb{Z}_{p^m})} - J_{\text{Pow}(\mathbb{Z}_{p^m})}\ b] = \sum_{i=1}^{m-2} k_i + 4 > \text{rank}(A^t_{\text{Pow}(\mathbb{Z}_{p^m})} - J_{\text{Pow}(\mathbb{Z}_{p^m})}).$$

Theo Định lí 3.1.6 ta suy ra $L_K(\text{Pow}(\mathbb{Z}_{p^m}))$ có tính IBN.

Trường hợp 3: $p = 3$. Nếu $m = 1$ thì theo Hệ quả 3.1.10 và Ví dụ 3.1.15 ta được $L_K(\text{Pow}(\mathbb{Z}_3))$ có tính IBN.

Giả sử rằng $m \geq 2$. Khi đó $|C(3^{m-1})| = 2$ và $|C(3^{m-k})| \geq 6$ với mọi $k = 2, \cdots, m$. Khi đó, ta có ma trận $[A^t_{\text{Pow}(\mathbb{Z}_{p^m})} - J_{\text{Pow}(\mathbb{Z}_{p^m})}\ b]$ có dạng

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 \\ B_{21} & A_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 \\ B_{31} & B_{32} & A_{33} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ B_{(m-2)1} & B_{(m-2)2} & B_{(m-2)3} & \cdots & A_{(m-2)(m-2)} & 0 & 0 & 0 & c_{m-2} \\ r_1 & r_2 & r_3 & \cdots & r_{m-2} & -1 & 1 & 0 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 & \cdots & r_{m-2} & 1 & -1 & 0 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 & \cdots & r_{m-2} & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

trong đó A_{ii}, B_{ij}, r_i và c_i được xác định như trên. Lập luận tương tự Trường hợp 2, ta có được

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(A^t_{\mathrm{Pow}(\mathbb{Z}_{p^m})} - J_{\mathrm{Pow}(\mathbb{Z}_{p^m})}) &= \textstyle\sum_{i=1}^{m-1} k_i + 2\\ < \operatorname{rank}[A^t_{\mathrm{Pow}(\mathbb{Z}_{p^m})} - J_{\mathrm{Pow}(\mathbb{Z}_{p^m})}\ b] &= \textstyle\sum_{i=1}^{m-1} k_i + 3.\end{aligned}$$

Theo Định lí 3.1.6 ta suy ra $L_K(\mathrm{Pow}(\mathbb{Z}_{p^m}))$ có tính IBN. □

3.2 Đại số đường Leavitt thoả mãn tính UGN

Trong Mục 3.1, chúng tôi chưa thiết lập được một tiêu chuẩn thuần tuý đồ thị trên E để $L_K(E)$ có tính IBN. Tuy nhiên, trong mục này chúng tôi giải quyết được cho một trường hợp riêng. Nội dung chính của phần này là cung cấp một điều kiện cần và đủ thuần tuý đồ thị trên E để $L_K(E)$ có tính UGN (Định lí 3.2.14). Từ đó, chúng tôi chỉ ra rằng tính UGN và tính IBN là tương đương trên các lớp đại số đường Leavitt của đồ thị Hopf (Hệ quả 3.2.19) và đồ thị Cayley (Hệ quả 3.2.23). Mục này được viết dựa trên các bài báo [16], [48] và [49].

Như chúng ta đã biết, với một trường K bất kỳ, mọi hệ sinh của một K-không gian vectơ n chiều luôn có lực lượng từ n trở lên. Điều này nói chung là không đúng đối với các môđun xạ ảnh hữu hạn sinh trên một vành bất kỳ.

Định nghĩa 3.2.1. ([30, trang 2]) Một vành R có đơn vị được gọi là có *tính UGN* (Unbounded Generating Number) nếu với mọi số nguyên dương n tồn tại một R-môđun phải hữu hạn sinh không thể được sinh bởi n phần tử. Một cách tương đương, với mỗi số nguyên dương m, mọi hệ sinh của R-môđun phải tự do R^m có lực lượng không nhỏ hơn m.

Các vị nhóm được đề cập trong phần còn lại của Chương 3 đều được trang bị quan hệ thứ tự như sau. Cho M là một vị nhóm giao hoán với phép toán viết theo lối cộng. Ta định nghĩa một quan hệ $\leq$ trên M bằng cách đặt

$$x \leq y \text{ trong trường hợp tồn tại } z \in M \text{ sao cho } x + z = y.$$

Khi đó, $\leq$ là một tiền thứ tự (thoả mãn hai tính chất phản xạ và bắc cầu).

Ta lưu ý sau đây một vài đặc trưng của tính UGN đã được đề cập trong các tài liệu [28], [30] và [43].

Nhận xét 3.2.2. Các điều kiện sau đây là tương đương với mỗi vành R:

(1) R có tính UGN;

(2) với mỗi cặp số nguyên dương (m, n) và mọi R-môđun phải P, $R^n \cong R^m \oplus P$ kéo theo $n \geq m$;

(3) với mỗi cặp số nguyên dương (m, n) $m[R] \leq n[R]$ trong $\mathcal{V}(R)$ kéo theo $m \leq n$;

(4) với mỗi $A \in M_{m\times n}(R)$ và $B \in M_{n\times m}(R)$, nếu $AB = I_m$, thì $n \geq m$.

Theo Nhận xét 3.2.2 (4) ta thu được tính UGN cũng là một điều kiện có tính đối xứng trái - phải. Ngoài ra, sử dụng điều kiện (2) hoặc (3), ta cũng dễ thấy rằng tính UGN kéo theo tính IBN. Tuy nhiên, điều ngược lại là không đúng (xem, [43, Section 1A]).

Trong [29, Theorem 4.1], Cohn đã chứng minh rằng, vành R có tính UGN khi và chỉ khi ta có thể định nghĩa được số chiều của các R-môđun xạ ảnh hữu hạn sinh. Do đó, một thuật ngữ khác đôi khi được sử dụng thay cho UGN là "điều kiện hạng (rank condition)" trong một số tài liệu (xem, chẳng hạn, [43, Section 1C] và [36]).

Trên thực tế, không dễ dàng để kiểm tra xem một vành cho trước có tính UGN hay không. Tuy nhiên, bổ đề sau đây cho phép chúng ta kiểm tra tính UGN của một số lớp vành đặc biệt.

Bổ đề 3.2.3. ([43, Proposition 1.23]) *Cho R và S là các vành có đơn vị, $f : R \to S$ là một đồng cấu vành và S có tính UGN. Khi đó, R có tính UGN.*

Chúng tôi nhắc lại một số lớp vành có tính UGN theo [30].

Ví dụ 3.2.4. ([30, trang 3]) (1) Mọi vành chia đều có tính UGN.

(2) Mọi vành giao hoán không tầm thường R đều có tính UGN.

(3) Cho R là một vành giao hoán. Khi đó, vành ma trận $M_n(R)$ có tính UGN.

(4) Mọi vành Noether đều có tính UGN.

Trong phần tiếp theo, chúng tôi chứng minh tính UGN là một bất biến Morita trong lớp vành có đơn vị. Lúc đầu, chúng tôi chỉ ra rằng "tính UGN là một bất biến Morita trong lớp các đại số đường Leavitt có đơn vị". Khi được thông báo về tính chất này, P. Ara nhận ra rằng điều này cũng đúng đối với mọi vành có đơn vị (Định lí 3.2.8). Chúng tôi cảm ơn ông ấy vì đã cho phép chúng tôi sử dụng kết quả này trong bài báo [16]. Để trình bày lại kết quả trên, trước tiên, chúng tôi nhắc lại một số khái niệm cơ bản cũng như thiết lập một số kết quả hữu ích.

Định nghĩa 3.2.5. ([27, Section 1]) Cho M là một vị nhóm giao hoán với phép toán viết theo lối cộng.

(1) Ta gọi một phần tử $u \in M$ là *vô hạn thực sự* nếu $2u \leq u$ trong M.

(2) Một phần tử $d \in M$ được gọi là một *đơn vị theo thứ tự* nếu với mỗi $x \in M$ tồn tại một số nguyên dương n sao cho $x \leq nd$.

(3) Một phần tử $d \in M$ được gọi là có tính chất UGN (Unbounded Generating Number) nếu, với mọi cặp số nguyên dương n, n', $nd \leq n'd$ trong M kéo theo $n \leq n'$.

Bổ đề sau đây chỉ ra cách để kiểm tra tính UGN của một phần tử trong vị nhóm giao hoán.

Bổ đề 3.2.6. *Cho M là một vị nhóm giao hoán và $d \in M$. Khi đó, d không có tính UGN khi và chỉ khi tồn tại số nguyên dương n để nd là vô hạn thực sự.*

Chứng minh. ($\Longrightarrow$) Giả sử rằng d không có tính UGN, nghĩa là, tồn tại hai số nguyên dương m, n sao cho $m > n$ và tồn tại $x \in M$ để $md + x = nd$.

Đặt $k := m - n > 0$. Khi đó, ta có

$$(m + k)d + x = nd + kd = md,$$

vì thế $(m + k)d + 2x = nd$. Bằng cách quy nạp, ta lập tức thu được rằng $(m + tk)d + (t + 1)x = nd$ với mọi số nguyên dương t. Do đó, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng $m \geq 2n$. Khi đó,

$$2nd + (m - 2n)d + x = md + x = nd,$$

nghĩa là, $2nd \leq nd$. Vì vậy, nd là vô hạn thực sự .

($\Longleftarrow$) Suy ra từ định nghĩa. □

Mệnh đề sau đây chỉ ra tính UGN là như nhau đối với mọi đơn vị theo thứ tự trong vị nhóm giao hoán.

Mệnh đề 3.2.7. *Cho M là một vị nhóm giao hoán và d_1, d_2 là hai đơn vị theo thứ tự trong M và d_1 có tính UGN. Khi đó, d_2 có tính UGN.*

Chứng minh. Giả sử rằng d_2 không có tính UGN. Theo Bổ đề 3.2.6, tồn tại một số nguyên dương n sao cho nd_2 là vô hạn thực sự, nghĩa là, $2nd_2 \leq nd_2$. Vì d_1 là một đơn vị theo thứ tự trong M nên tồn tại một số nguyên dương m sao cho $u := nd_2 \leq md_1 =: v$. Ngoài ra, vì d_2 là một đơn vị theo thứ tự trong M nên tồn tại một số nguyên dương k sao cho $v \leq kd_2$.

Ta sẽ chứng minh rằng $v \leq u$. Thật vậy, nếu $k \leq 2n$ thì ta có $v \leq kd_2 \leq 2nd_2 \leq nd_2 = u$. Ngược lại, tồn tại số nguyên dương nhỏ nhất t với $0 < k - tn \leq 2n$. Khi đó,

$$\begin{aligned} v \leq kd_2 &= 2nd_2 + (k - 2n)d_2 \leq nd_2 + (k - 2n)d_2 = (k - n)d_2 \\ &= 2nd_2 + (k - 3n)d_2 \leq nd_2 + (k - 3n)d_2 = (k - 2n)d_2 \\ &\text{.....} \\ &= 2nd_2 + (k - (t + 1)n)d_2 \leq nd_2 + (k - (t + 1)n)d_2 = \\ &= (k - tn)d_2 \leq 2nd_2 \leq nd_2 = u. \end{aligned}$$

Từ các lập luận trên ta được $2v \leq 2u \leq u \leq v$. Suy ra v cũng là vô hạn thực sự. Do đó, theo Bổ đề 3.2.6 ta được d_1 không có tính UGN. □

Áp dụng Mệnh đề 3.2.7 ta thu được định lí sau đây chỉ ra rằng tính UGN là một bất biến qua tương đương Morita của các vành có đơn vị.

Định lí 3.2.8. *Cho R và S là các vành có đơn vị tương đương Morita và R có tính UGN. Khi đó, S có tính UGN.*

Chứng minh. Đặt $\Phi : \mathfrak{M}_R \to \mathfrak{M}_S$ là hàm tử thể hiện sự tương đương giữa hai phạm trù $\mathfrak{M}_R$ và $\mathfrak{M}_S$. Khi đó, sự hạn chế $\phi = \Phi|_{\mathcal{V}(R)} : \mathcal{V}(R) \to \mathcal{V}(S)$ là một đẳng cấu vị nhóm.

Ta chứng minh ϕ biến đơn vị theo thứ tự thành đơn vị theo thứ tự. Thật vậy, giả sử $[D]$ là một đơn vị theo thứ tự trong $\mathcal{V}(R)$, ta chứng minh $\phi([D])$ là một đơn vị theo thứ tự trong $\mathcal{V}(S)$. Lấy tuỳ ý $[Q] \in \mathcal{V}(S)$. Khi đó, tồn tại $[P] \in \mathcal{V}(R)$ sao cho $\phi([P]) = [Q]$. Do $[D]$ là một đơn vị theo thứ tự trong $\mathcal{V}(R)$ nên tồn tại số nguyên dương n sao cho $[P] \leq n[D]$. Khi đó, $[Q] = \phi([P]) \leq n\phi([D])$. Suy ra $\phi([D])$ là một đơn vị theo thứ tự trong $\mathcal{V}(S)$.

Mặt khác, nếu d là phần tử có tính UGN trong $\mathcal{V}(R)$ thì $\phi(d)$ là phần tử có tính UGN trong $\mathcal{V}(S)$. Thật vậy, giả sử n và n' là các số nguyên dương thoả mãn $n\phi(d) \leq n'\phi(d)$. Khi đó, $\phi(nd) \leq \phi(n'd)$. Vì ϕ là đẳng cấu nên ta được $nd \leq n'd$. Do d là phần tử có tính UGN nên $n \leq n'$. Vậy, $\phi(d)$ là phần tử có tính UGN trong $\mathcal{V}(S)$.

Theo Nhận xét 3.2.2 (3), ta thu được rằng đơn vị theo thứ tự $[R]$ của $\mathcal{V}(R)$ có tính UGN. Từ hai đạt được ở trên về đẳng cấu ϕ, ta có $\phi([R])$ là một đơn vị theo thứ tự của $\mathcal{V}(S)$ và $\phi([R])$ có tính UGN. Theo Mệnh đề 3.2.7, ta thu được đơn vị theo thứ tự $[S]$ của $\mathcal{V}(S)$ cũng có tính UGN. Theo Nhận xét 3.2.2 (3), ta thu được S có tính UGN. □

Trong phần tiếp theo, chúng tôi cung cấp một điều kiện cần và đủ cho tính UGN của đại số đường Leavitt. Để làm điều đó, trước tiên chúng tôi áp dụng Định lí 1.3.12 và Nhận xét 3.2.2 (3) để đặc trưng tính UGN của đại số đường Leavitt thông qua vị nhóm đồ thị M_E.

Hệ quả 3.2.9. *Cho $E = (E^0, E^1, r, s)$ là một đồ thị hữu hạn và K là một trường. Khi đó, $L_K(E)$ có tính UGN khi và chỉ khi với mỗi cặp số nguyên dương (m, n) và mọi $[x] \in M_E$, nếu $m[\sum_{v\in E^0} v] + [x] = n[\sum_{v\in E^0} v]$ trong M_E thì $m \leq n$.*

Kết quả sau đây chỉ ra rằng một đồ thị phi nguồn hữu hạn và không chứa chu trình nguồn luôn chứa một đỉnh là đáy của hai chu trình phân biệt.

Bổ đề 3.2.10. *Cho E là một đồ thị phi nguồn hữu hạn và không chứa chu trình nguồn. Khi đó, tồn tại một đỉnh $v \in E^0$ sao cho v là đáy của hai chu trình phân biệt và $|r^{-1}(v)| \geq 2$.*

Chứng minh. Gọi $v_1 \in E^0$ là một đỉnh bất kỳ. Khi đó, vì v_1 không là đỉnh nguồn nên tồn tại $e_1 \in E^1$ sao cho $r(e_1) = v_1$. Đặt $v_2 := s(e_1)$. Nếu $v_2 = v_1$ thì ta thu được một chu trình $c = e_1$. Ngược lại, vì v_2 không là đỉnh nguồn nên tồn tại $e_2 \in E^1$ sao cho $r(e_2) = v_2$. Đặt $v_3 := s(e_2)$ và ta tiếp tục lặp lại quá trình này. Vì E là hữu hạn nên tồn tại số nguyên dương nhỏ nhất n sao cho $r(e_n) = v_n$ và tồn tại i $(1 \leq i \leq n)$ để $s(e_n) = v_i$ và $c := e_n \cdots e_{i+1}e_i$ là một chu trình trong E.

Vì E không chứa chu trình nguồn nên tồn tại $j \in \{i, \cdots, n\}$ sao cho $|r^{-1}(v_j)| \geq 2$. Đặt $f_1 \in r^{-1}(v_j)$ sao cho $f_1 \neq e_j$. Nếu $s(f_1) = v_j$ thì v_j là đáy của hai chu trình phân biệt c và $c' := f_1$. Vậy v_j là điểm cần tìm. Ngược lại, vì $w_1 := s(f_1)$ không là một đỉnh nguồn nên tồn tại $f_2 \in E^1$ sao cho $r(f_2) = w_1$. Vì E là hữu hạn nên ta phải đi đến một trong hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: Tồn tại một số nguyên m sao cho $r(f_m) = w_{m-1}$ và tồn tại k $(1 \leq k \leq n)$ để $s(f_m) = v_k$. Chọn số m nhỏ nhất thoả mãn điều kiện

trên. Khi đó, ta có

$$c' = \begin{cases} e_{j-1}\cdots e_k f_m \cdots f_1 & \text{nếu } k < j, \\ f_m \cdots f_1 & \text{nếu } k = j, \\ e_{j-1}\cdots e_i e_n e_{n-1}\cdots e_k f_m \cdots f_1 & \text{nếu } k > j \end{cases}$$

là một chu trình có đáy tại v_j, khác với chu trình c và $|r^{-1}(v_j)| \geq 2$. Vậy v_j là điểm cần tìm.

Trường hợp 2: Tồn tại một số nguyên m sao cho $r(f_m) = w_{m-1}$ và tồn tại ℓ $(1 \leq \ell \leq m-1)$ để $s(f_m) = w_\ell$. Chọn số m nhỏ nhất thoả mãn điều kiện trên. Khi đó, $c_1 := f_m \cdots f_\ell$ là một chu trình trong E và c_1 là phân biệt với c. Bằng cách này ta tạo ra một dãy các chu trình $c, c_1, c_3 \cdots$. Vì E là hữu hạn nên ta phải đạt đến Trường hợp 1. □

Sự tồn tại của loại đỉnh được mô tả trong Bổ đề 3.2.10 đóng vai trò chìa khoá cho kết quả sau đây. Với mỗi cặp ma trận $A = (a_{ij})$ và $B = (b_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{Z})$, $A \leq B$ nghĩa là $a_{ij} \leq b_{ij}$ với mọi $i = 1, \cdots, m$ và $j = 1, \cdots, n$.

Bổ đề 3.2.11. *Cho $E = (E^0, E^1, r, s)$ là một đồ thị phi nguồn hữu hạn và không chứa chu trình nguồn. Đặt $n := |E^0|$. Khi đó, với mỗi số nguyên dương a tồn tại một vectơ $\overrightarrow{m_a} = [m_1 \ ... \ m_n] \in \mathbb{N}^n$ sao cho $m_i \geq a$ với mọi $i = 1, ..., n$ và*

$$(A_E^t - I_n)\overrightarrow{m_a}^t \geq [a \ ... \ a]^t.$$

Chứng minh. Theo Bổ đề 3.2.10, tồn tại một đỉnh $w_1 \in E^0$ sao cho w_1 là đáy của hai chu trình phân biệt, và $|r^{-1}(w_1)| \geq 2$. Nếu $E^0 \setminus T_E(w_1) \neq \emptyset$ thì ta xét đồ thị con $F = (F^0, F^1, r|_{F^1}, s|_{F^1})$, trong đó $F^0 := E^0 \setminus T(w_1)$ và $F^1 := r^{-1}(F^0)$. Ta luôn có $r_F^{-1}(v) = r_E^{-1}(v)$ với mỗi đỉnh $v \in F^0$. Suy ra F là phi nguồn và không chứa chu trình nguồn.

Áp dụng Bổ đề 3.2.10, suy ra tồn tại $w_2 \in F^0$ sao cho w_2 là đáy của hai chu trình phân biệt trong F và $|r_F^{-1}(w_2)| \geq 2$. Nếu $F^0 \setminus T_F(w_2) \neq \emptyset$, ta lặp lại quá trình trên. Vì E hữu hạn nên quá trình này phải dừng lại

sau hữu hạn (đặt là k) bước, tức là ta được tập đỉnh $\{w_1, w_2, ..., w_k\}$. Ta chứng minh Bổ đề bằng cách qui nạp theo k.

Với $k = 1$ ta có $E^0 = T_E(w_1)$. Bằng cách đặt tên lại tập đỉnh trong E^0, không mất tính tổng quát, ta giả sử rằng

$$E^0 = \{v_1, v_2, ..., v_n\}, v_1 := w_1 \text{ và } |r^{-1}(v_1)| \geq 2.$$

Với mỗi số nguyên dương a, ta chọn vectơ dòng $\overrightarrow{m_a} := [m_1 \ ... \ m_n]$ theo quy tắc sau:

- Đặt $m_1 := 3na$.

- Với mỗi $i \in \{2, ..., n\}$, do $E^0 = T_E(v_1)$ nên ta có $v_i \in T_E(v_1)$ và do đó tồn tại một đường p (có thể chọn chiều dài tối thiểu) sao cho $s(p) = v_1$ và $r(p) = v_i$. Khi đó, ta xác định

$$m_i := m_1 - |p|a = (3n - |p|)a,$$

trong đó $|p|$ là chiều dài của đường p.

Lưu ý rằng với $|E^0| = n$ ta luôn có $1 \leq |p| \leq n$ và $m_i \geq 2na$. Ngoài ra, đối với bất kỳ $j \in \{2, ..., n\}$, luôn có $v_i \neq v_j$ để $v_j \in r(s^{-1}(v_i))$, vì vậy tồn tại $i \in \{1, ..., n\}$ sao cho $m_j = m_i - a$.

Ta sẽ chứng minh rằng các véctơ $\overrightarrow{m_a}$ đáp ứng tất cả các điều kiện của Bổ đề, nói cách khác là $(A_E^t - I_n)\overrightarrow{m_a}^t \geq [a \ ... \ a]^t$. Ta sẽ chỉ ra rằng

$$a_{1j}m_1 + ... + (a_{jj} - 1)m_j + ... + a_{nj}m_n \geq a \text{ với mọi } j = 1, ..., n.$$

Trường hợp 1: $j \in \{2, ..., n\}$. Khi đó, vì $v_j \in T(v_1)$ nên tồn tại một đỉnh v_i sao cho $v_j \in r(s^{-1}(v_i))$ và $v_i \neq v_j$. Như đã nói ở trên, tồn tại phần tử $i \in \{1, ..., n\}$ sao cho $a_{ij} \geq 1$ và $m_j = m_i - a$. Có nghĩa là

$$\begin{aligned} a_{1j}m_1 + ... + (a_{jj} - 1)m_j + ... + a_{nj}m_n &\geq a_{ij}m_i + (a_{jj} - 1)m_j \\ &\geq m_i - m_j = a. \end{aligned}$$

Trường hợp 2: $j = 1$. Khi đó, vì $|r^{-1}(v_1)| \geq 2$ nên tồn tại hai số $k, h \in \{1, ..., n\}$ sao cho $a_{k1} \geq 1$ và $a_{h1} \geq 1$. Nếu $k \geq 2$ và $h \geq 2$, ta có

$$\begin{aligned}(a_{11}-1)m_1+...+a_{n1}m_n &\geq -m_1+m_k+m_h\\ &\geq -3na+2na+2na=a.\end{aligned}$$

Ngược lại, không mất tính tổng quát, ta giả sử $k=1$ và $h\geq 2$. Khi đó, ta có $a_{11}-1\geq 0$ và

$$(a_{11}-1)m_1+...+a_{h1}m_h+...+a_{n1}m_n\geq m_h\geq 2a.$$

Như vậy Bổ đề đã được chứng minh với trường hợp $k=1$.

Ta tiến hành theo quy nạp theo k. Cho $k>1$, xét $F=(F^0,F^1,r|_{F^1},s|_{F^1})$ và $G=(G^0,G^1,r|_{G^1},s|_{G^1})$ là các đồ thị con của E được định nghĩa bởi:

$$F^0:=E^0\setminus T(w_1) \text{ và } F^1:=r^{-1}(F^0)$$

cùng với

$$G^0:=T(w_1) \text{ và } G^1:=\{f\in E^1\mid s(f),\ r(f)\in G^0\}.$$

Vậy, F và G đáp ứng các điều kiện tương tự như đồ thị E. Khi đó, theo giả thuyết quy nạp, cho mỗi số nguyên dương a, tồn tại vectơ hàng $\overrightarrow{x_a}=[m_1\ ...\ m_f]\in\mathbb{N}^f$ $(m_i\geq a)$ và $\overrightarrow{y_a}=[m'_1\ ...\ m'_g]\in\mathbb{N}^g$ $(m'_j\geq a)$ sao cho

$$(A_F^t-I_f)\overrightarrow{x_a}^t\geq[a\ ...\ a]^t$$

và

$$(A_G^t-I_g)\overrightarrow{y_a}^t\geq[a\ ...\ a]^t,$$

trong đó $f=|F^0|$, $g=|G^0|$, A_F và A_G là các ma trận kề tương ứng với các đồ thị F và G.

Ta viết ma trận $(A_E^t-I_h)$ như sau:

$$A_E^t-I_h=\begin{pmatrix}A_F^t-I_f & A_{21}\\ A_{12} & A_G^t-I_g\end{pmatrix}.$$

Trong đó A_{12} và A_{21} là các ma trận con có kích thước thích hợp với phần tử là những số không âm. Xét $\overrightarrow{m_a}:=[m_1\ ...\ m_f\ \ m'_1\ ...\ m'_g]\in\mathbb{N}^n$. Khi đó,

ta được

$$(A_E^t - I_n)\overrightarrow{m_a}^t = \begin{pmatrix} A_F^t - I_f & A_{21} \\ A_{12} & A_G^t - I_g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{x_a}^t \\ \overrightarrow{y_a}^t \end{pmatrix} \geq [a \ ... \ a]^t,$$

kết thúc chứng minh. □

Định lí sau đây cung cấp điều kiện cần và đủ để đại số đường Leavitt của một đồ thị phi nguồn hữu hạn có tính UGN.

Định lí 3.2.12. *Cho $E = (E^0, E^1, r, s)$ là một đồ thị phi nguồn hữu hạn, K là một trường. Khi đó, $L_K(E)$ có tính UGN khi và chỉ khi E chứa một chu trình nguồn.*

Chứng minh. Ta biểu diễn E^0 thành tập $\{v_1, v_2, \cdots, v_h\}$ sao cho các đỉnh chính quy của E xuất hiện dưới dạng $v_1, \cdots, v_z$.

($\Longleftarrow$) Giả sử rằng E chứa một chu trình nguồn c, ta chứng minh rằng $L_K(E)$ có tính UGN bằng cách sử dụng Hệ quả 3.2.9. Giả sử m và n là các số nguyên dương sao cho

$$m[\sum_{i=1}^{h} v_i] + [x] = n[\sum_{i=1}^{h} v_i] \text{ trong } M_E$$

với $[x] \in M_E$, ta chứng minh rằng $m \leq n$. Ta viết $x \in Y_E$ dưới dạng

$$x = \sum_{i=1}^{h} n_i v_i,$$

trong đó n_i $(i = 1, ..., h)$ là số các nguyên không âm. Vì $m[\sum_{i=1}^{h} v_i] + [x] = n[\sum_{i=1}^{h} v_i]$ nên theo Mệnh đề 1.2.16, tồn tại hai chuỗi σ và σ' được lấy từ $\{1, ..., z\}$ sao cho

$$\Lambda_\sigma(\sum_{i=1}^{h}(m + n_i)v_i) = \gamma = \Lambda_{\sigma'}(n\sum_{i=1}^{h} v_i),$$

trong đó $\gamma \in Y_E$. Lưu ý rằng, mỗi lần áp dụng đồng nhất thức M_j $(1 \leq j \leq z)$ lên một phần tử của Y_E, kết quả mang lại là:

(i) trừ 1 từ hệ số của v_j;

(ii) cộng a_{ji} đến hệ số của v_i (với $1 \leq i \leq h$).

Với mỗi $1 \leq j \leq z$, kí hiệu k_j (tương ứng, k'_j) là số lần mà M_j được áp dụng trong trong Λ_σ (tương ứng, $\Lambda_{\sigma'}$). Ta thấy rằng

$$\begin{aligned}
\gamma &= \Lambda_\sigma(\sum_{i=1}^{h}(m+n_i)v_i) \\
&= ((m+n_1-k_1)+a_{11}k_1+a_{21}k_2+...+a_{z1}k_z)v_1 \\
&\quad +((m+n_2-k_2)+a_{12}k_1+a_{22}k_2+...+a_{z2}k_z)v_2 \\
&\quad + \cdots \\
&\quad +((m+n_z-k_z)+a_{1z}k_1+a_{2z}k_2+...+a_{zz}k_z)v_z \\
&\quad +((m+n_{z+1})+a_{1(z+1)}k_1+a_{2(z+1)}k_2+...+a_{z(z+1)}k_z)v_{z+1} \\
&\quad + \cdots \\
&\quad +((m+n_h)+a_{1h}k_1+a_{2h}k_2+...+a_{zh}k_z)v_h.
\end{aligned}$$

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned}
\gamma &= \Lambda_{\sigma'}(n\sum_{i=1}^{h}v_i) \\
&= ((n-k'_1)+a_{11}k'_1+a_{21}k'_2+...+a_{z1}k'_z)v_1 \\
&\quad +((n-k'_2)+a_{12}k'_1+a_{22}k'_2+...+a_{z2}k'_z)v_2 \\
&\quad + \cdots \\
&\quad +((n-k'_z)+a_{1z}k'_1+a_{2z}k'_2+...+a_{zz}k'_z)v_z \\
&\quad +(n+a_{1(z+1)}k'_1+a_{2(z+1)}k'_2+...+a_{z(z+1)}k'_z)v_{z+1} \\
&\quad + \cdots \\
&\quad +(n+a_{1h}k'_1+a_{2h}k'_2+...+a_{zh}k'_z)v_h.
\end{aligned}$$

Với mỗi $1 \leq i \leq z$, đặt $m_i := k'_i - k_i$. Khi đó, so sánh hệ số của các phần

tử $\{v_i \mid 1 \leq i \leq h\}$ trong Y_E, ta được hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} m-n+n_1 &= (a_{11}-1)m_1 + a_{21}m_2 + ... + a_{z1}m_z \\ m-n+n_2 &= a_{12}m_1 + (a_{22}-1)m_2 + ... + a_{z2}m_z \\ & \vdots \\ m-n+n_z &= a_{1z}m_1 + a_{2z}m_2 + ... + (a_{zz}-1)m_z \\ m-n+n_{z+1} &= a_{1(z+1)}m_1 + a_{2(z+1)}m_2 + ... + a_{z(z+1)}m_z \\ & \vdots \\ m-n+n_h &= a_{1h}m_1 + a_{2h}m_2 + ... + a_{zh}m_z. \end{cases} \tag{3.3}$$

Bằng cách đánh số các đỉnh nếu cần thiết, ta có thể giả sử là $c^0 = \{v_1, ..., v_p\}$. Mỗi đỉnh trong c^0 phát ra ít nhất một cạnh nên ta có mỗi đỉnh trong $\{v_1, \cdots, v_p\}$ đều là đỉnh chính quy và $|r^{-1}(v)| = 1$ với mọi $v \in \{v_1, \cdots, v_p\}$. Từ đó ta có các lưu ý sau:

- $a_{i,i+1} = 1$ cho $1 \leq i \leq p-1$;

- $a_{p,1} = 1$;

- $a_{j,i+1} = 0$ cho $1 \leq i \leq p-1$ và $j \neq i$ $(1 \leq j \leq h)$; và

- $a_{j,1} = 0$ nếu $j \neq p$ $(1 \leq j \leq h)$.

Trường hợp 1: $p = 1$. Khi đó, $a_{11} = 1$ và phương trình đầu tiên trong hệ phương trình (3.3) trở thành

$$m - n + n_1 = (1-1)m_1 + 0m_2 + \cdots + 0m_z = 0,$$

vì thế $m - n = -n_1 \leq 0$, hay $m \leq n$.

Trường hợp 2: $p \geq 2$. Khi đó, p phương trình đầu tiên của hệ phương trình (3.3) được viết lại như sau:

$$\begin{cases} m-n+n_1 &= -m_1 & & & & +m_p \\ m-n+n_2 &= m_1 & -m_2 & & & \\ m-n+n_3 &= & m_2 & -m_3 & & \\ & \vdots & & & & \\ m-n+n_p &= & & & m_{p-1} & -m_p. \end{cases}$$

Cộng hai vế các phương trình ta được $p(m-n)+(n_1+...+n_p)=0$, do đó $p(m-n)=-(n_1+...+n_p)\leq 0$, hay $m\leq n$.

Do đó, $L_K(E)$ có tính UGN.

($\Longrightarrow$) Giả sử rằng E không chứa chu trình nguồn, ta sẽ chứng minh rằng $L_K(E)$ không có tính UGN bằng cách sử dụng Hệ quả 3.2.9. Giả sử m và n là hai số nguyên dương sao cho $m>n$. Ta sẽ chỉ ra sự tồn tại của một phần tử $x=\sum_{i=1}^{h} n_i v_i \in Y_E$ sao cho

$$m[\sum_{i=1}^{h} v_i]+[x]=n[\sum_{i=1}^{h} v_i]$$

trong M_E. Lập luận như trong chứng minh trên, ta thấy rằng ta có thể tìm thấy các số nguyên không âm $n_i,\ k_j$ và k'_j ($i=1,...,h$ và $j=1,...,z$) sao cho

$$\begin{cases} m-n+n_1 &= (a_{11}-1)m_1+a_{21}m_2+...+a_{z1}m_z \\ m-n+n_2 &= a_{12}m_1+(a_{22}-1)m_2+...+a_{z2}m_z \\ & \vdots \\ m-n+n_z &= a_{1z}m_1+a_{2z}m_2+...+(a_{zz}-1)m_z \\ m-n+n_{z+1} &= a_{1(z+1)}m_1+a_{2(z+1)}m_2+...+a_{z(z+1)}m_z \\ & \vdots \\ m-n+n_h &= a_{1h}m_1+a_{2h}m_2+...+a_{zh}m_z \end{cases} \tag{3.4}$$

trong đó $m_j:=k'_j-k_j$ với $j=1,...,z$.

Ta áp dụng Bổ đề 3.2.11 để tìm các phần tử như vậy. Cụ thể, xét F là đồ thị con của E được xác định bởi:

$$F^0:=\{v_1,...,v_z\} \text{ và } F^1:=r^{-1}(F^0).$$

Nói cách khác, F là đồ thị được tạo ra từ E bằng cách bỏ đi các đỉnh không chính quy. Cụ thể, ta có A_F^t là ma trận cỡ $z\times z$ sau đây:

$$A_F^t=\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{z1} \\ a_{12} & ... & a_{z2} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1z} & ... & a_{zz} \end{pmatrix}.$$

Ngoài ra, ta lưu ý rằng z phương trình đầu tiên của hệ phương trình (3.4) được biểu diễn bởi ma trận $A_F^t - I_z$. Ta thấy rằng F không chứa các chu trình nguồn vì E không chứa chu trình nguồn. Áp dụng Bổ đề 3.2.11 cho đồ thị F và số nguyên dương $a = m - n$, tồn tại vectơ hàng $\overrightarrow{m} = [m_1 \ ... \ m_z] \in \mathbb{N}^z$ sao cho $m_j \geq m - n$ với mọi $j = 1, ..., z$ và

$$(A_F^t - I_z)\overrightarrow{m}^t \geq [m - n \ ... \ m - n]^t.$$

Do đó, ta có

$$a_{1j}m_1 + ... + (a_{jj} - 1)m_j + ... + a_{zj}m_z \geq m - n.$$

Với mỗi $j = 1, ..., z$, đặt

$$n_j := a_{1j}m_1 + ... + (a_{jj} - 1)m_j + ... + a_{hj}m_h - (m - n).$$

Với mọi $j = z+1, ..., h$, do v_j không là đỉnh nguồn nên tồn tại $i \in \{1, ..., z\}$ sao cho $a_{ij} \geq 1$, do đó với mỗi j,

$$a_{1j}m_1 + a_{2j}m_2 + ... + a_{zj}m_z \geq a_{ij}m_i \geq m_i \geq m - n.$$

Khi đó, ta chọn số nguyên không âm n_j $(j = z + 1, ..., h)$ như sau:

$$n_j := a_{1j}m_1 + a_{2j}m_2 + ... + a_{zj}m_z - (m - n).$$

Cuối cùng, các số nguyên dương k_j và k'_j $(j = 1, ..., z)$ được chọn ngẫu nhiên sao cho $m_j = k'_j - k_j$ với mọi $j = 1, .., z$. Khi đó, ta có thể kiểm tra được rằng các số nguyên được xác định như trên thoả mãn hệ phương trình (3.4) ở trên. Ta kết thúc chứng minh. □

Bổ đề sau chỉ ra đại số đường Leavitt của đồ thị chứa đỉnh cô lập luôn có tính UGN.

Bổ đề 3.2.13. *Cho E là một đồ thị hữu hạn có chứa đỉnh cô lập và K là một trường. Khi đó, $L_K(E)$ có tính UGN.*

Chứng minh. Giả sử rằng E chứa một đỉnh cô lập v. Khi đó, theo Mệnh đề 1.3.10 (4), ta thu được $L_K(E) \cong K \oplus L_K(E_{\setminus v})$. Do đó, tồn tại phép chiếu tự nhiên từ $L_K(E)$ lên K. Hiển nhiên, trường K có tính UGN. Vì thế, theo Bổ đề 3.2.3 ta được $L_K(E)$ cũng có tính UGN. □

Áp dụng các Định lí 2.2.14 và 3.2.12, chúng tôi cung cấp một tiêu chuẩn thuần tuý đồ thị trên E sao cho $L_K(E)$ có tính UGN.

Định lí 3.2.14. *Cho E là một đồ thị hữu hạn và K là một trường. Gọi*

$$E = E_0 \to E_1 \to \cdots \to E_i \to \cdots \to E_t = E_{sf}$$

là dãy các đồ thị được sinh ra trong quá trình từng bước khử đỉnh nguồn. Khi đó, $L_K(E)$ có tính UGN khi và chỉ khi tồn tại $0 \leq j \leq t$ để E_j chứa một đỉnh cô lập, hoặc E_{sf} chứa một chu trình nguồn.

Chứng minh. ($\Longrightarrow$) Giả sử rằng E_{sf} không chứa chu trình nguồn và E_i không chứa đỉnh cô lập với mọi $0 \leq j \leq t$. Khi đó, E_{sf} không là đồ thị tầm thường E_{triv}. Vì thế, theo Định lí 2.2.14 (1) và (3), tồn tại một đồ thị phi nguồn hữu hạn F sao cho

$$L_K(E) \cong L_K(E(E^0_{sf})) \cong L_K(F),$$

trong đó tồn tại một song ánh từ tập các chu trình nguồn của F đến tập các chu trình nguồn của E_{sf}. Vì F không chứa chu trình nguồn nên theo Định lí 3.2.12 ta được $L_K(F)$ không có tính UGN. Vì thế, $L_K(E)$ không có tính UGN.

($\Longleftarrow$) Giả sử tồn tại $0 \leq j \leq t$ để E_j chứa một đỉnh cô lập. Gọi k là số các đỉnh thu trong E nhưng không thuộc E^0_{sf} (gọi chúng là $v_1, \cdots, v_k$) và với mỗi $1 \leq i \leq k$, gọi m_i là số đường trong E kết thúc tại đỉnh thu v_i. Theo Định lí 2.2.14 (1), ta có

$$L_K(E) \cong M_{m_1+1}(K) \oplus \cdots \oplus M_{m_k+1}(K) \oplus L_K(E(E^0_{sf})).$$

Khi đó, tồn tại phép chiếu tự nhiên từ $L_K(E)$ lên $M_{m_k+1}(K)$. Theo Ví dụ 3.2.4 (3) ta có $M_{m_k+1}(K)$ có tính UGN. Vì thế, theo Bổ đề 3.2.3 ta được $L_K(E)$ có tính UGN.

Mặt khác, giả sử rằng E_i không chứa đỉnh cô lập với mọi $0 \leq j \leq t$. Khi đó, E_{sf} không là đồ thị tầm thường E_{triv} và E_{sf} chứa một chu trình nguồn. Vì thế, theo Định lí 2.2.14 (1) và (3), tồn tại một đồ thị phi nguồn hữu hạn F sao cho

$$L_K(E) \cong L_K(E(E^0_{sf})) \cong L_K(F),$$

trong đó tồn tại một song ánh từ tập các chu trình nguồn của F đến tập các chu trình nguồn của E_{sf}. Vì F là đồ thị phi nguồn và chứa một chu trình nguồn nên theo Định lí 3.2.12 ta được $L_K(F)$ có tính UGN. Vì thế, $L_K(E)$ có tính UGN. Ta kết thúc chứng minh. □

Trong chứng minh trên, chúng tôi sử dụng Định lí 2.2.14. Tuy nhiên, chúng tôi cũng có một cách chứng minh khác bằng cách sử dụng sự bảo toàn tương đương Morita của phép khử đỉnh nguồn như sau.

Nhận xét 3.2.15. Dưới đây chúng tôi đưa ra một chứng minh trực tiếp cho Định lí 3.2.14, không cần dùng cấu trúc của $L_K(E)$ trong Định lí 2.2.14.

($\Longrightarrow$) Giả sử rằng E_{sf} không chứa chu trình nguồn và E_i không chứa đỉnh cô lập với mọi $0 \leq j \leq t$. Theo Định lí 3.2.12 ta có $L_K(E_{sf})$ không có tính UGN. Áp dụng Bổ đề 2.1.3 trong từng bước của quá trình khử đỉnh nguồn ta thu được $L_K(E)$ tương đương Morita với $L_K(E_{sf})$. Vì thế, theo Định lí 3.2.8 ta được $L_K(E)$ không có tính UGN.

($\Longleftarrow$) Trong trường hợp tồn tại $0 \leq j \leq t$ để E_j chứa một đỉnh cô lập. Ký hiệu j là số nhỏ nhất trong các số nguyên dương i và v là đỉnh cố lập trong E_j. Khi đó, tại mỗi bước của quá trình khử đỉnh nguồn

$$E = E_0 \to E_1 \to \cdots \to E_j$$

mỗi đỉnh nguồn bị khử đều không là đỉnh cô lập (do tính nhỏ nhất của j). Theo Bổ đề 2.1.3, ta thu được rằng các đại số $L_K(E)$, $L_K(E_1)$, ... , $L_K(E_j)$ là tương đương Morita với nhau. Theo Bổ đề 3.2.13 ta có $L_K(E_j)$ có tính UGN. Do dó, theo Định lí 3.2.8 ta được $L_K(E)$ có tính UGN.

Mặt khác, giả sử rằng E_i không chứa đỉnh cô lập với mọi $0 \leq j \leq t$. Khi đó, E_{sf} không là đồ thị tầm thường E_{triv} và E_{sf} chứa một chu trình

nguồn. Theo Định lí 3.2.12 ta được $L_K(E_{sf})$ có tính UGN. Áp dụng Bổ đề 2.1.3 trong từng bước của quá trình khử đỉnh nguồn, ta thu được $L_K(E)$ tương đương Morita với $L_K(E_{sf})$. Theo Định lí 3.2.8 ta được $L_K(E)$ có tính UGN, kết thúc chứng minh.

Trong [40, Corollary 6.7], Koç và Özaydın đã chỉ ra rằng $L_K(E)$ có một thương hữu hạn chiều không tầm thường khi và chỉ khi E thoả mãn các điều kiện như trong Định lí 3.2.14. Như vậy, ta có một mối liên hệ như sau.

Hệ quả 3.2.16. *Cho E là một đồ thị hữu hạn và K là một trường. Khi đó, $L_K(E)$ có một môđun hữu hạn chiều không tầm thường khi và chỉ khi $L_K(E)$ có tính UGN.*

Từ Định lí 3.2.14, ta lập tức thu được một tiêu chuẩn để xác định các đại số đường Cohn của các đồ thị hữu hạn có tính UGN.

Hệ quả 3.2.17. *Cho $E = (E^0, E^1, s, r)$ là một đồ thị hữu hạn và K là một trường. Khi đó, đại số đường Cohn $C_K(E)$ có tính UGN khi và chỉ khi E thoả mãn một trong các điều kiện sau đây:*

(1) *E chứa một đỉnh nguồn;*

(2) *E chứa một chu trình nguồn.*

Chứng minh. ($\Longrightarrow$) Giả sử rằng E không thoả mãn cả hai điều kiện (1) và (2). Theo Định lí 1.3.9 ta có $C_K(E) \cong L_K(F(E))$, trong đó $F(E)$ cũng không thoả mãn cả hai điều kiện (1) và (2). Khi đó, theo Định lí 3.2.14 ta được $C_K(E) \cong L_K(F(E))$ không có tính UGN.

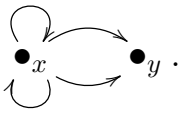
($\Longleftarrow$). Nếu E chứa một chu trình nguồn thì từ cách xây dựng $F(E)$ trong Định lí 1.3.9, đồ thị $F(E)$ phải chứa một chu trình như vậy và do đó $F(E)_{sf}$ cũng chứa một chu trình như vậy. Khi đó, theo Định lí 3.2.14 ta được $L_K(F(E))$ có tính UGN, do đó $C_K(E)$ cũng có tính UGN.

Tiếp theo ta xem xét trường hợp E chứa một số đỉnh nguồn $v \in E^0$. Nếu như v là một đỉnh thu thì v là một đỉnh cô lập trong $F(E)$. Ngược lại, vì v là một đỉnh nguồn trong E nên v' là một đỉnh cô lập trong $F(E)$.

Do đó, trong trường hợp này, $F(E)$ luôn chứa một đỉnh cô lập. Khi đó, theo Định lí 3.2.14 ta được $L_K(F(E))$ có tính UGN. Do đó, $C_K(E)$ cũng có tính UGN. □

Chúng ta đã biết tính UGN kéo theo tính IBN nhưng chiều ngược lại nói chung là không đúng (xem [43, Section 1A]). Sử dụng Định lí 3.1.6 và Định lí 3.2.14, chúng tôi thiết lập được nhiều ví dụ để chứng tỏ điều đó trong lớp các đại số đường Leavitt.

Ví dụ 3.2.18. Cho K là một trường và E là đồ thị sau:



Khi đó, theo Định lí 3.2.14 ta được $L_K(E)$ không có tính UGN.

Mặt khác, ta có

$$[A_E^t - J_E] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ và } [A_E^t - J_E \;\; b] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Điều này kéo theo

$$1 = \operatorname{rank}(A_E^t - J_E) < \operatorname{rank}([A_E^t - J_E \;\; b]) = 2.$$

Theo Định lí 3.1.6 ta thu được $L_K(E)$ có tính IBN.

Ví dụ 3.2.18 cho thấy tính UGN là thực sự mạnh hơn tính IBN ngay cả trong lớp các đại số đường Leavitt. Tuy nhiên, trong hệ quả sau đây, chúng tôi chứng minh rằng những tính chất này là tương đương với nhau trong lớp đại số đường Leavitt của các đồ thị Hopf hữu hạn.

Hệ quả 3.2.19. *Cho G là một nhóm hữu hạn với hàm phân nhánh $\mathfrak{r} = \sum_{C\in\mathcal{C}} \mathfrak{r}_C C$ và K là một trường. Khi đó, các khẳng định sau đây là tương đương:*

(1) *$L_K(\Gamma_{G,\mathfrak{r}})$ có tính UGN;*

(2) $L_K(\Gamma_{G,\mathfrak{r}})$ *có tính IBN;*

(3) $\sum_{C\in\mathcal{C}} \mathfrak{r}_C|C| \leq 1$.

Chứng minh. (1) $\Longrightarrow$ (2). Hiển nhiên.

(2) $\Longrightarrow$ (3). Giả sử rằng $L_K(\Gamma_{G,\mathfrak{r}})$ có tính IBN và $m := \sum_{C\in\mathcal{C}} \mathfrak{r}_C|C| \geq 2$. Ta viết

$$\text{supp}(\mathfrak{r}) = \{C_1, C_2, \cdots, C_k\} \text{ và } C_i = \{c_{i1}, c_{i2}, \cdots, c_{in_i}\}.$$

Khi đó, ta có $G = Gc_{ij}$ với mọi $1 \leq i \leq k$ và $1 \leq j \leq n_i$ (vì G là một nhóm hữu hạn) và mọi đỉnh g trong $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$ phát ra đúng $\mathfrak{r}_{C_i}$ cạnh đến đỉnh gc_{ij} với mọi $1 \leq i \leq k$ và $1 \leq j \leq n_i$ và g cũng chỉ phát ra các cạnh đến gc_{ij}. Điều này kéo theo

$$[g] = \sum_{j=1}^{n_1} \mathfrak{r}_{C_1}[gc_{1j}] + \sum_{j=1}^{n_2} \mathfrak{r}_{C_2}[gc_{2j}] + \cdots + \sum_{j=1}^{n_k} \mathfrak{r}_{C_k}[gc_{kj}] \text{ trong } M_{\Gamma_{G,\mathfrak{r}}}$$

và

$$[\sum_{g\in G} g] = \sum_{j=1}^{n_1} \mathfrak{r}_{C_1}[\sum_{g\in G} gc_{1j}] + \cdots + \sum_{j=1}^{n_k} \mathfrak{r}_{C_k}[\sum_{g\in G} gc_{kj}] \text{ trong } M_{\Gamma_{G,\mathfrak{r}}}.$$

Vì $G = Gc_{ij}$ với mọi $1 \leq i \leq k$ và $1 \leq j \leq n_i$ nên ta thu được rằng

$$\sum_{g\in G} g = \sum_{g\in G} gc_{ij} \text{ với mọi } 1 \leq i \leq k \text{ và } 1 \leq j \leq n_i,$$

vì thế,

$$[\sum_{g\in G} g] = \sum_{i=1}^{k} n_i \mathfrak{r}_{C_i}[\sum_{g\in G} g] = m[\sum_{g\in G} g] \text{ trong } M_{\Gamma_{G,\mathfrak{r}}},$$

theo Nhận xét 3.1.2 (2) ta được $L_K(\Gamma_{G,\mathfrak{r}})$ không có tính IBN, một mâu thuẫn. Do đó, ta phải có $\sum_{C\in\mathcal{C}} \mathfrak{r}_C|C| \leq 1$.

(3) $\Longrightarrow$ (1). Nếu $\mathfrak{r} = 0$ thì ta có $L_K(\Gamma_{G,\mathfrak{r}}) = K^{(G)}$. Vì thế, theo Ví dụ 3.2.4 (1) ta có $L_K(\Gamma_{G,\mathfrak{r}})$ có tính UGN.

Xét trường hợp $\sum_{C\in\mathcal{C}} \mathfrak{r}_C|C| = 1$. Dễ thấy rằng nếu G là một nhóm hữu hạn thì $S_{G,\mathfrak{r}}$ là một nhóm con của G. Theo Hệ quả 2.3.10 (2), ta thu được

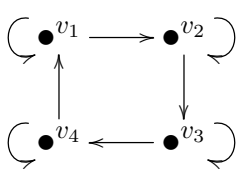
rằng $L_K(\Gamma_{G,\mathfrak{r}}) = (M_{|S_{G,\mathfrak{r}}|}(K[x,x^{-1}]))^{(G/S_{G,\mathfrak{r}})}$. Vì thế, theo Ví dụ 3.2.4 (3) ta có $L_K(\Gamma_{G,\mathfrak{r}})$ có tính UGN. □

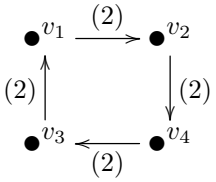
Gần đây, đại số đường Leavitt của các đồ thị Cayley được quan tâm khảo sát trong [9], [10] và [17]. Như một ứng dụng của các Định lí 3.1.6 và 3.2.14, trong phần còn lại của chương này, chúng tôi khảo sát tính IBN và UGN của các đại số đường Leavitt của các đồ thị Cayley liên kết với các nhóm hữu hạn.

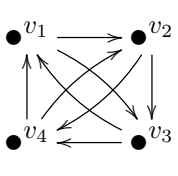
Định nghĩa 3.2.20. ([10, trang 1]) Cho G là một nhóm hữu hạn và S là một tập sinh của G. *Đồ thị Cayley của G ứng với tập sinh S* là đồ thị $E_{G,S}$ với tập đỉnh là $\{v_g \mid g \in G\}$ và ta nói có một cạnh từ v_g đến v_h trong trường hợp tồn tại $s \in S$ sao cho $h = gs$ trong G.

Nhận xét 3.2.21. Nếu G là một nhóm giao hoán và S là một tập sinh của G thì đồ thị Cayley $E_{G,S}$ của G ứng với tập sinh S chính là đồ thị Hopf $\Gamma_{G,\mathfrak{r}}$, trong đó $\mathfrak{r} = \sum_{s\in S} s$.

Ví dụ 3.2.22. Đồ thị Cayley $E_{G,S}$ của các nhóm xyclic $G = \mathbb{Z}_n$ $(n \geq 3)$ ứng với tập sinh $S = \{1, j\}$ $(0 \leq j \leq n-1)$, ký hiệu bởi C_n^j, là các đồ thị bao gồm n đỉnh $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ và $2n$ cạnh $\{e_1, e_2, \cdots, e_n, f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ sao cho $s(e_i) = v_i$, $r(e_i) = v_{i+1}$, $s(f_i) = v_i$ và $r(f_i) = v_{i+j}$. Để rõ hơn, chúng tôi vẽ hình ba đồ thị C_4^0, C_4^1 và C_4^2 dưới đây.

$C_4^0 =$ 

$C_4^1 =$ 

$C_4^2 =$ 

Chúng tôi kết thúc mục này bằng việc chứng minh rằng tính UGN và tính IBN của đại số đường Leavitt của đồ thị Cayley của nhóm hữu hạn là tương đương.

Hệ quả 3.2.23. *Cho G là một nhóm hữu hạn với S là tập sinh và K là một trường. Khi đó, các điều kiện sau đây là tương đương:*

(1) *$L_K(E_{G,S})$ có tính UGN;*

(2) *$L_K(E_{G,S})$ có tính IBN;*

(3) *S chứa duy nhất một phần tử;*

(4) *$E_{G,S}$ là đồ thị bao gồm một chu trình cô lập với $|G|$ đỉnh;*

(5) $L_K(E_{G,S}) \cong M_{|G|}(K[x, x^{-1}])$.

Chứng minh. (1) $\Longrightarrow$ (2). Hiển nhiên.

(2) $\Longrightarrow$ (3). Giả sử rằng $L_K(E_{G,S})$ có tính IBN và S chứa ít nhất hai phần tử. Ta viết $S = \{g_1, g_2, \cdots, g_k\}$ $(k \geq 2)$. Khi đó, với mỗi $1 \leq i \leq k$, ta lập tức có được

$$G = \{gg_i \mid g \in G\} =: Gg_i,$$

vì G là một nhóm hữu hạn.

Dễ thấy rằng mỗi đỉnh v_g $(g \in G)$ của $E_{G,S}$ đều phát ra đúng một cạnh đến đỉnh v_{gg_i} với mọi $i = 1, \cdots, k$; và đỉnh v_g cũng chỉ phát ra các cạnh đến các đỉnh v_{gg_i}. Điều đó suy ra

$$[v_g] = [v_{gg_1}] + [v_{gg_2}] + \cdots + [v_{gg_k}] \text{ trong } M_{E_{G,S}},$$

và do đó,

$$[\textstyle\sum_{g\in G} v_g] = [\sum_{g\in G} v_{gg_1}] + [\sum_{g\in G} v_{gg_2}] + \cdots + [\sum_{g\in G} v_{gg_k}] \text{ trong } M_{E_{G,S}}.$$

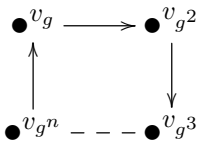
Ngoài ra, với mỗi $1 \leq i \leq k$, do $G = Gg_i$ nên ta phải có $[\sum_{g\in G} v_g] = [\sum_{g\in G} v_{gg_i}]$ trong $M_{E_{G,S}}$. Từ các lập luận trên, ta lập tức thu được rằng

$$[\textstyle\sum_{g\in G} v_g] = \sum_{i=1}^{k} [\sum_{g\in G} v_{gg_i}] = k[\sum_{g\in G} v_g] \text{ trong } M_{E_{G,S}},$$

theo Nhận xét 3.1.2 (2) ta được $L_K(E_{G,S})$ không có tính IBN.

(3) $\Longrightarrow$ (4). Nếu $S = \{g\}$ $(g \in G)$ thì G là một nhóm xyclic sinh bởi g và do đó, mỗi đỉnh v_{g^i} $(0 \leq i \leq |G|)$ phát ra duy nhất một cạnh đến đỉnh

$v_{g^{i+1}}$, nghĩa là, đồ thị $E_{G,S}$ có dạng



Như vậy, $E_{G,S}$ là đồ thị bao gồm một chu trình cô lập với $|G|$ đỉnh.

(4) $\Longrightarrow$ (5). $E_{G,S}$ bao gồm một chu trình không có lối ra với $E^0_{G,S} = G$ và do đó, theo Hệ quả 2.2.16 ta có $L_K(E_{G,S}) \cong M_{|G|}(K[x, x^{-1}])$.

(5) $\Longrightarrow$ (1). Lập tức được suy ra từ Nhận xét 3.2.4 (3). $\square$

KẾT LUẬN

Cho E là một đồ thị hữu hạn, K là một trường và E_{sf} là đồ thị không có đỉnh nguồn có được qua quá trình từng bước khử đỉnh nguồn từ E. Trong luận án này, chúng tôi đạt được những kết quả sau đây:

(1) Chỉ ra rằng $L_K(E)$ tương đương Morita với tổng trực tiếp của $L_K(E_{sf})$ và một số bản sao của K, đồng thời $L_K(E)$ đẳng cấu với tổng trực tiếp của một số đại số ma trận trên K và $L_K(F)$, trong đó F được xây dựng tường minh từ E_{sf}. Như một hệ quả, chúng tôi nhận lại kết quả của Abrams, Pino, Molina [11] về cấu trúc của đại số đường Leavitt của đồ thị hữu hạn không có lối ra.

(2) Chỉ ra rằng đại số đường Leavitt của đồ thị Hopf đẳng cấu với một số bản sao của đại số đường Leavitt của một thành phần liên thông trong đồ thị Hopf đã cho. Áp dụng kết quả này, chúng tôi chứng minh Giả thuyết Abrams-Tomforde đúng cho một số lớp đồ thị Hopf.

(3) Đưa ra các tiêu chuẩn trên ma trận kề của E và E_{sf} để $L_K(E)$ có tính IBN. Sử dụng tiêu chuẩn này, chúng tôi nhận lại được kết quả của Abrams, Kanuni [13] về tính IBN của đại số đường Cohn.

(4) Cung cấp một tiêu chuẩn thuần tuý đồ thị trên E sao cho $L_K(E)$ có tính UGN. Từ đó, chúng tôi chỉ ra rằng tính UGN và tính IBN là tương đương trên các lớp đại số đường Leavitt của đồ thị Hopf và đồ thị Cayley.

CÁC CÔNG TRÌNH LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

1. G. Abrams, T. G. Nam and N. T. Phuc (2017), "Leavitt path algebras having Unbounded Generating Number", *Journal of Pure and Applied Algebra*, 6 (221), 1322–1343.

2. T. G. Nam and N. T. Phuc (2019), "The structure of Leavitt path algebras và the Invariant Basis Number property", *Journal of Pure and Applied Algebra*, 11 (223), 4827–4856.

3. T. G. Nam and N. T. Phuc (2023), "On Leavitt path algebras of Hopf graphs", *Acta Mathematica Vietnamica*, (48), 533–549.

CÁC KẾT QUẢ TRONG LUẬN ÁN ĐÃ ĐƯỢC BÁO CÁO VÀ THẢO LUẬN TẠI

- Xêmina liên phòng Đại số và Lý thuyết số, Viện Toán học: 5/2024;

- Hội nghị nghiên cứu sinh, Viện Toán học: 11/2019, 11/2021, 11/2022, 11/2023;

- Hội nghị "Đại số - Hình học - Tôpô " (DAHITO, Bà Rịa - Vũng Tàu), 4-6/12/2019;

- Hội nghị "Đại số - Hình học - Tôpô " (DAHITO, Thái Nguyên), 21-23/10/2021;

- Hội nghị Toán học Việt Nam lần thứ 10 (Đà Nẵng), 8-12/8/2023.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

TIẾNG VIỆT

[1] Ngô Đắc Tân (2003), *Lý thuyết tổ hợp và đồ thị*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.

TIẾNG ANH

[2] G. Abrams (1983), "Morita equivalence for rings with local units", *Communications in Algebra*, 8 (11), 801–837.

[3] G. Abrams (2015), "Leavitt path algebras: the first decade", *Bulletin of Mathematical Sciences*, (5), 59–120.

[4] G. Abrams, P. N. Ánh, A. Louly and E. Pardo (2008), "The classification question for Leavitt path algebras", *Journal of Algebra*, 5 (320), 1983–2026.

[5] G. Abrams, P. N. Ánh and E. Pardo (2008), "Isomorphisms between Leavitt algebras and their matrix rings", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, (624), 103–132.

[6] G. Abrams and G. Aranda Pino (2005), "The Leavitt path algebra of a graph", *Journal of Algebra*, 2 (293), 319–334.

[7] G. Abrams and G. Aranda Pino (2006), "Purely infinite simple Leavitt path algebras", *Journal of Pure and Applied Algebra*, 3 (207), 553–563.

[8] G. Abrams and G. Aranda Pino (2008), "The Leavitt path algebras of arbitrary graphs", *Houston Journal of Math*, 2 (34), 423–442.

[9] G. Abrams and G. Aranda Pino (2016), "The Leavitt path algebras of generalized Cayley graphs", *Mediterranean Journal of Mathematics*, (13), 1–27.

[10] G. Abrams, S. Erickson and C. Canto (2018), "The Leavitt path algebras of Cayley graphs C_n^j", *Mediterranean Journal of Mathematics*, 5 (15), 23 pages.

[11] G. Abrams, G. Aranda Pino and M. Siles Molina (2008), "Locally finite Leavitt path algebras", *Israel Journal of Mathematics*, (165), 329-348.

[12] G. Abrams, P. Ara, and M. Siles Molina (2017), *Leavitt path algebras*, Lecture Notes in Mathematics series, Springer-Verlag Inc.

[13] G. Abrams and M. Kanuni (2016), "Cohn path algebras have invariant basic number", *Communications in Algebra*, 1 (44), 371 – 380.

[14] G. Abrams, A. Louly, E. Pardo and C. Smith (2011), "Flow invariants in the classification of Leavitt path algebras", *Journal of Algebra*, 1 (333), 202–231.

[15] G. Abrams and T. G. Nam (2020), "Corners of Leavitt path algebras of finite graphs are Leavitt path algebras", *Journal of Algebra*, (547), 494–518.

[16] G. Abrams, T. G. Nam and N. T. Phuc (2017), "Leavitt path algebras having Unbounded Generating Number", *Journal of Pure and Applied Algebra*, 6 (221), 1322–1343.

[17] G. Abrams and B. Schoonmaker (2015), "Leavitt path algebras of Cayley graphs arising from cyclic groups", *Noncommutative rings and their applications*, (634), 1–10.

[18] G. Abrams and M. Tomforde (2011), "Isomomorphism and Morita equivalence of graph algebras", *Transactions of the American Mathematical Society*, 7 (363), 3733–3767.

[19] A. Alahmadi, H. Alsulami, S. K. Jain and E. I. Zelmanov (2012), "Leavitt path algebras of finite Gelfand-Kirillov dimension", *Journal of Algebra and Its Applications*, 6 (11), 6 pages.

[20] F. W. Anderson and K. R. Fuller (1992), *Rings and Categories of Modules*, Springer-Verlag, New York.

[21] P. N. Ánh and L. Márki (1987), "Morita equivalence for rings without identity", *Tsukuba Journal of Mathematics*, 1 (11), 1–16.

[22] P. Ara and K. Goodearl (2012), "Leavitt path algebras of separated graphs", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, (669), 165–224.

[23] P. Ara, M. A. Moreno and E. Pardo (2007), "Nonstable K-theory for graph algebras", *Algebras and Representation Theory*, (10), 157–178.

[24] P. Ara and K.M. Rangaswamy (2014), "Finitely presented simple modules over Leavitt path algebras", *Journal of Algebra*, (417), 333–352.

[25] S. E. Arklint and E. Ruiz (2015), "Corners of Cuntz-Krieger algebras", *Transactions of the American Mathematical Society*, 11 (367), 7595-7612.

[26] C. Cibils and M. Rosso (2002), "Hopf quivers", *Journal of Algebra*, (254), 241–251.

[27] A. H. Clifford and G. B. Preston (1961), *The algebraic theory of semigroups, vol. 1*, AMS surveys.

[28] P. M. Cohn (1966), "Some remarks on the invariant basic property", *Topology*, 3 (5), 215–228.

[29] P. M. Cohn (1990), "Rank functions on rings", *Journal of Algebra*, 2 (133), 373–385.

[30] P. M. Cohn (2006), *Free ideal rings and localization in general rings*, Cambridge University Press, New York.

[31] D. Drinen and M. Tomforde (2005), "The C^*-algebras of arbitrary graphs", *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 1 (35), 105–135.

[32] S. Eilers, G. Restorff, E. Ruiz and P. W. Sørensen (2021), "The complete classification of unital graph C^*-algebras: Geometric and strong", *Duke Mathematical Journal*, 11 (170), 2421 – 2517.

[33] J. Franks (1984), "Flow equivalence of subshifts of finite type", *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 4 (1), 53–66.

[34] K.R. Goodearl (1979), *von Neumann Regular Rings*, Pitman, London.

[35] K. R. Goodearl (2009), "Leavitt path algebras and direct limits", *Contemporary Mathematics series*, (480), 165–187.

[36] A. Haghany and K. Varadarajan (2002), "IBN and related properties for rings", *Acta Mathematica Hungarica*, 3 (94), 251 – 261.

[37] M. Kanuni, D. M. Barquero, C. M. González and M. Siles Molina (2019), "Classification of Leavitt path algebras with two vertices", *Moscow Mathematical Journal*, 3 (19), 523—548.

[38] M. Kanuni and M. Özaydin (2019), "Cohn-Leavitt path algebras and the invariant basic number property", *Journal of Algebra and Its Applications*, 5 (18), 14 pages.

[39] A.V. Kelarev and S.J. Quinn (2002), "Directed graph and combinatorial properties of semigroups", *Journal of Algebra*, 1 (251), 16 - 26.

[40] A. Koç and M. Özaydın (2020), "Representations of Leavitt path algebras", *Journal of Pure and Applied Algebra*, 3 (224), 1297–1319.

[41] A. Kumjian, D. Pask and I. Raeburn (1998), "Cuntz–Krieger algebras of directed graphs", *Pacific Journal of Mathematics*, 1 (184), 161-174.

[42] G. R. Krause and T. H. Lenagan (2000), *Growth of Algebras and Gelfand-Kirillov Dimension*, Graduate studies in Mathematics Vol. 22. Providence, RI: AMS.

[43] T. Y. Lam (1999), *Lectures on modules and rings*, Springer-Verlag, New York-Berlin.

[44] T. Y. Lam (1991), *A first course in noncommutative rings*, Springer-Verlag, Heidelberg.

[45] W. G. Leavitt (1962), "The module type of a ring", *Transactions of the American Mathematical Society*, (42), 113–130.

[46] D. Lind and B. Marcus (1995), *An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding*, Cambridge University Press, Cambridge.

[47] J. M. Moreno-Fernández and M. Siles Molina (2018), "Graph algebras and the Gelfand-Kirillov dimension", *Journal of Algebra and Its Applications*, 5 (17), 15 pages.

[48] T. G. Nam and N. T. Phuc (2019), "The structure of Leavitt path algebras and the Invariant Basis Number property", *Journal of Pure and Applied Algebra*, 11 (223), 4827–4856.

[49] T. G. Nam and N. T. Phuc (2023), "On Leavitt path algebras of Hopf graphs", *Acta Mathematica Vietnamica*, (48), 533–549.

[50] M. Rieffel (1982), "Morita equivalence for operator algebras", *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, (38), Part1, pp. 285–298.

[51] J. Rosenberg (1994), *Algebraic K-Theory and Its Applications*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag New York.

[52] E. Ruiz and M. Tomforde (2013), "Classification of unital simple Leavitt path algebras of infinite graphs", *Journal of Algebra*, (384), 45–83.

[53] M. Tomforde (2007), "Uniqueness theorems and ideal structure for Leavitt path algebras", *Journal of Algebra*, 1 (318), 270–299.

CHỈ MỤC

C^*-đại số đồ thị, 62
Chu trình nguồn, 17
Chu trình cô lập, 17
Đơn vị địa phương, 11
Đại số Jacobson, 23
Đại số Leavitt, 23
Đại số đường Cohn, 23
Đại số đường Leavitt, 21
Đẳng cấu đồ thị, 19
Đồ thị (có hướng), 16
Đồ thị Cayley, 112
Đồ thị Hopf, 49
Đồ thị khử đỉnh nguồn, 28
Đồ thị liên thông mạnh, 19
Đồ thị luỹ thừa, 85
Đồ thị mở rộng, 18
Đồ thị phi nguồn, 16
Hàm phân nhánh, 6
Ma trận kề, 17
Thành phần liên thông mạnh, 54
Tính IBN, 70
Tính UGN, 94
Tương đương Morita, 12
Unita, 12
Vị nhóm đồ thị, 19