ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
Tom 6, №1

SUR LA VITESSE D'ÉCOULEMENT PLAN EN RÉGIME D'OSEEN

LÊ VĂN THIÊM
Institut de Mathématiques, Hanoi

Dans un travail antérieur, pour l'écoulement plan en régime d'Oseen [1],

$$U\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\Delta u,$$
$$U\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\Delta v, \tag{1}$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} = 0,$$

où u, v sont les composantes de la vitesse de courant, U est la vitesse à l'infini, p la pression, ρ le coefficient de vicosité, ρ la densité du fluide, nous avons trouvé [4], [5] l'expression suivante de la vitesse du courant

$$u - iv = g(z) + ie^{\lambda x}\varphi(z, \bar{z}), \tag{2}$$

où $\lambda = \frac{U}{2\nu}$, $g(z)$ est une fonction analytique en tout point fini dans le domaine D du fluide en mouvement et φ est une solution de l'équation de Vekua [3]

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}} = \frac{\lambda}{2}\bar{\varphi} \tag{3}$$

Dans le cas où D est simplement connexe nous avons trouvé [4]

$$\varphi(z,\bar{z}) = f(z) + \lambda r\int_0^1 f[z(1-t^2)]\,J_1(\lambda rt)\,dt + \lambda\bar{z}\int_0^1 f[z(1-t^2)]I_0(\lambda rt)t\,dt \tag{4}$$

où I_n désigne la fonction de Bessel d'ordre n ($n = \ldots, 1, 0, 1, \ldots$) à argument imaginaire.

Pour résoudre certains cas concrets, nous avons développé la formule (4) en posant

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n \tag{5}$$

et écrit les fonctions sous la forme de série entière. Finalement, après un calcul compliqué, nous obtenons

$$\varphi(z, \bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n I_n(\lambda r) \frac{z^n}{r^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n I_{n+1}(\lambda r) \frac{\bar{z}^{n+1}}{r^{n+1}} \tag{6}$$

avec

$$a_n = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{2}{\lambda}\right)^n n! \, \alpha_n$$

Mais les fonctions I_n, et par suite ψ, croissent indéfiniment quand, tend vers l'infini, c'est pourquoi nous avons cherché une autre fonction, satisfaisant aussi (3) mais bornée à l' infini: Par tâtonnement nous avons trouvé la fonction demandée [5]:

$$\varphi(z, \bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n K_n(\lambda r) \frac{z^n}{r^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n K_{n+1}(\lambda r) \frac{\bar{z}^{n+1}}{r^{n+1}}, \tag{7}$$

Ici K_n est la fonction de Macdonald satisfaisant la même équation différentielle comme I_n. Cette solution nous a permis de résoudre complètement le problème d'écoulement à travers un cylindre dans régime d' Oséen.

***

Ici nous allons utiliser une méthode directe pour avoir la solution (7), à partir aussi d'une formule intégrale semblable à la formule (4). Démontrons qu'une solution de (3) répondant aux conditions exigées est:

$$\varphi(z, \bar{z}) = r \int_1^{\infty} f[z(t^2 - 1)] \, k_1(\lambda r t) dt - \bar{z} \int_1^{\infty} \overline{f[z(t^2 - 1)]} \, k_0(\lambda r t) t dt \tag{8}$$

Il est clair que cette solution est bornée, si l'ordre de la fonction entière (z) ne dépasse pas 1, car les fonctions $K_n(z)$ tendent vers O à l'infini comme $z^{-1}e^{-z}$. Pour plus de commodité nous posons

$$\varphi(z, \bar{z}) = A - B$$

où

$$A = r \int_1^{\infty} f[z(t^2 - 1)] \, k_1(\lambda r t) dt$$

$$B = \bar{z} \int_1^{\infty} f[z(t^2 - 1)] \, k_0(\lambda r t) \, t dt$$

Nous avons

$$\frac{\partial A}{\partial \bar{z}}' = \int_1^\infty f[z(t^2-1)] \frac{\partial}{\partial r}[rk_1(\lambda rt)] \frac{\partial r}{\partial \bar{z}}\, dt$$

$$= \int_1^\infty f[z(t^2-1)][\lambda rt\, k_1'(\lambda rt) + k_1(\lambda rt)] \frac{z}{2r}\, dt$$

Utilisant la formule [2]:

$$x K_1'(x) + K_1(x) = -xK_0(x), \tag{9}$$

nous aurons

$$\frac{\partial A}{\partial \bar{z}} = -\int_1^\infty f[z(t^2-1)]\, \lambda rt\, k_0(\lambda rt) \frac{z}{2r}\, dt = -\frac{\lambda z}{2}\int_1^\infty f[z(t^2-1)]\, k_0(\lambda rt)\, t dt$$

ce qui donne

$$\frac{\partial A}{\partial \bar{z}} = -\frac{\lambda}{2}\overline{B}$$

Grâce à la formule

$$K_0'(x) = -K_1(x) \tag{10}$$

nous avons:

$$\frac{\partial \overline{B}}{\partial z} = \int_1^\infty \frac{\partial}{\partial z}(zf[\ldots])\, k_0(\lambda rt)\, t dt - \int_1^\infty zf[\ldots]\lambda t k_1(\lambda rt)\frac{\bar{z}}{2r}\, t dt$$

$$= \int_1^\infty f[\ldots]\, k_0(\lambda rt)\, t dt + \int_1^\infty z \frac{\partial f[\ldots]}{\partial z} k_0(\lambda rt)\, t dt - \frac{\lambda z\bar{z}}{2r}\int_1^\infty f[\ldots]\, k_1(\lambda rt) t^2 dt$$

Mais nous avons

$$\frac{\partial f[z(t^2-1)]}{\partial z} = \frac{t^2-1}{2tz}\frac{\partial f[z(t^2-1)]}{\partial t},$$

de sorte que

$$\frac{\partial \overline{B}}{\partial z} = \int_1^\infty f[\ldots]\, k_0(\lambda rt)\, t dt + \int_1^\infty \frac{t^2-1}{2} k_0(\lambda rt)\, df[\ldots] - \frac{\lambda r}{2}\int_1^\infty f[\ldots]\, k_1(\lambda rt) t^2 dt \tag{11}$$

L'intégrale du milieu sera prise par partie:

$$\int_1^\infty \frac{t^2-1}{2} k_0(\lambda rt)\, df[\ldots] = \frac{t^2-1}{2} k_0(\lambda rt) f[\ldots]\Big|_1^\infty - \int_1^\infty f[\ldots]\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{t^2-1}{2}k_0(\lambda rt)\right] dt,$$

mais la partie intégrée s'annulle, par la raison donnée plus haut. Puis nous avons grâce à (10)

$$\int_1^{\infty} f[\ldots]\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{t^2-1}{2} k_0(\lambda rt)\right] dt = \int_1^{\infty} f[\ldots]\, k_0(\lambda rt)\, t dt - \lambda r \int_1^{\infty} f[\ldots]\frac{t^2-1}{2} k_1(\lambda rt) dt,$$

Si bien que finalement nous avons :

$$\frac{\partial B}{\partial z} = -\frac{\lambda}{2} A \text{ ou } \frac{\partial \overline{B}}{\partial z} = -\frac{\lambda}{2} \overline{A}$$

et par suite

$$\frac{\partial (A-B)}{\partial \overline{z}} = \frac{\lambda}{2}(\overline{A}-\overline{B}) \text{ ou } \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}} = \frac{\lambda}{2}\overline{\varphi}, \text{ c.q.f.d.}$$

***

Maintenant nous allons utiliser la formule (8) pour établir directement la formule (7).

Dans (8), remplaçons f par la série (5), nous aurons

$$\varphi(z,\overline{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} r\int_1^{\infty} \alpha^n z^n (t^2-1)^n K_1(\lambda rt) dt - \sum_{n=0}^{\infty} \overline{z}\int_1^{\infty} \overline{\alpha}_n \overline{z}^n (t^2-1) K_0(\lambda rt) t dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n r z^n \int_1^{\infty} (t^2-1)^n K_1(\lambda rt) dt - \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\alpha}_n \overline{z}^{n+1}\int_1^{\infty} (t^2-1)^n K_0(\lambda rt) t dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n r z^n Bn - \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\alpha}_n \overline{z}^{n+1} An,$$

où A_n et B_n sont les intégrales, avec $\lambda' = \lambda r$,

$$A_n = \int_1^{\infty} (t^2-1)^n K_0(\lambda' t) t dt, \quad Bn = \int_1^{\infty} (t^2-1)^n K_1(\lambda' t)\, dt \;\; n = 0, 1, \ldots$$

D'abord à cause de (1) et parce que $K_n\, z)$ tend vers 0 comme $z^{-1} e^{-z}$ par suite

$$An = \int_1^{\infty} (t^2-1)^n K_0(\lambda' t) t dt = \frac{1}{2}\int_1^{\infty} (t^2-1)^n K_0(\lambda' t) d(t^2-1) =$$

$$= \frac{1}{2(n+1)}\int_1^{\infty} K_0(\lambda' t) d(t^2-1)^{n+1} = \frac{1}{2(n+1)}(t^2-1)^{n+1} K_0(\lambda' t)\Big|_1^{\infty} +$$

$$+ \frac{\lambda'}{2(n+1)}\int_1^{\infty} (t^2-1)^{n+1} K_1(\lambda' t) dt.$$

la partie intégrée s'annule et finalement nous avons

$$A_n = \frac{\lambda'}{2(n+1)} B_{n+1} \tag{11}$$

Nous allons calculer B_n par induction. D'abord à cause de (10), nous avons

$$B_0 = \int_1^\infty K_1(\lambda' t)\, dt = -\frac{1}{\lambda'} \int_1^\infty dK_0(\lambda' t) = \frac{1}{\lambda'} K_0(\lambda') \tag{12}$$

Utilisant (9) nous avons:

$$A_0 = \int_1^\infty K_0(\lambda' t) t dt = -\int_1^\infty K_1'(\lambda' t) t dt - \frac{1}{\lambda'} \int_1^\infty K_1(\lambda' t) d\, t =$$

$$= -\frac{1}{\lambda'} \int_1^\infty t dK_1(\lambda' t) - \frac{1}{\lambda'} \int_1^\infty K_1(\lambda t) dt$$

Prenons la première intégrale partie, nous avons

$$-\int_1^\infty t dK_1(\lambda' t) = -tK_1(\lambda' t) \Big|_1^\infty + \int_1^\infty K_1(\lambda' t) dt = K_1(\lambda') t \int_1^\infty K_1(\lambda' t) dt$$

de sorte que pour A_0 nous avons

$$A_0 = \frac{1}{\lambda'} K_1(\lambda')$$

D'après (11) nous avons alors

$$B_1 = \int_1^\infty (t^2 - 1) K_1(\lambda' t) dt = \frac{2A_0}{\lambda'} = \frac{2}{\lambda'^2} K_1(\lambda) \tag{13}$$

Utilisant la formule (9), nous pouvons écrire, pour $n > 1$,

$$A_n = \int_1^\infty (t^2 - 1)^n K_0(\lambda' t) t dt = -\int_1^\infty (t^2-1)^n K_1'(\lambda' t) t dt - \frac{1}{\lambda'} \int_1^\infty (t^2-1)^n K_1(\lambda' t) dt$$

Nous prenons la première intégrale à droite par partie, la partie intégrée va s'annuler pour les raisons plus haut,

$$-\int_1^\infty (t^2-1)^n K_1'(\lambda' t)\, t dt = \frac{1}{\lambda'} \int_1^\infty (t^2-1)^n\, t dK1(\lambda' t) = -\frac{1}{\lambda'} (t^2-1)^n\, tK_1(\lambda' t) \Big|_1^\infty +$$

$$+\frac{1}{\lambda'} \int_1^\infty K_1(\lambda' t) dt (t^2-1)^n = \frac{1}{\lambda'} \int_1^\infty K_1(\lambda' t)\, (t^2-1)^n\, dt + \frac{1}{\lambda'} \int_1^\infty K_1(\lambda' t) tn (t^2-1)^{n-1}\, 2tdt.$$

Donc,

$$A_n = \int_1^\infty (t^2-1)^n\, K_0(\lambda' t) dt = \frac{2n}{\lambda'} \int_1^\infty (t^2-1)^{n-1} K_1(\lambda' t) t^2 dt = \frac{2n}{\lambda'} \int_1^\infty (t^2-1)^{n-1}$$

$$(t^2 - t + 1) K(\lambda' t) dt = \frac{2n}{\lambda} \int_1^\infty (t^2-1)^n\, K_1(\lambda' t) dt + \frac{2n}{\lambda'} \int_1^\infty (t^2-1)^n\, K_1(\lambda' t) dt$$

ou bien

$$A_n = \frac{2n}{\lambda'}\, B_n = \frac{2n}{\lambda'} - B_{n-1}$$

Utilisant (10) nous aurons la formule de recurrence pour B_n

$$\frac{n}{2(n+1)} B_{n+1} + \frac{2n}{\lambda'} B_n + \frac{2n}{\lambda'} B_{n-1} \tag{14}$$

Si nous posons:

$$K_n = \frac{2}{n!} \left(\frac{\lambda'}{2}\right)^{n+1} B_n, \tag{15}$$

la formule (14) de vient:

$$K_{n+1} = K_{n-1} + \frac{2n}{\lambda'} K_n,$$

mais c'est là la formule de recurrence pour les fonctions $K_n(\lambda')$:

$$K_{n+1}(\lambda') = K_{n-1}(\lambda') + \frac{2n}{\lambda'} K_n(\lambda').$$

En outre de (11), (13) et (15) nous tirons:

$$K_0 = K_0(\lambda'), \ K_1 = K_1(\lambda).$$

Donc nous avons pour tout n

$$K_n = K_n(\lambda') = K_n(\lambda')$$

et

$$B_n = \frac{n!}{2} \left(\frac{2}{\lambda r}\right)^{n+1} K_n(\lambda r), \ A_n = \frac{n!}{2} \left(\frac{2}{\lambda r}\right)^{n+1} K_{n+1}(\lambda r)$$

En remplaçant ces valeurs dans (9) nous retrouvons bientôt la solution (17) que nous avons trouvé par tatonnement.

Il est à remarquer que la condition posée à $f(z)$ d'être d'ordre ne dépassant pas 1, est vérifié dans les exemples que nous avons traité [5] si λ c'est à dire la viscosité est assez petite. Pour le cylindre circulaire nous avons trouvé $|a_n| < n^{-n}$, ce que entraine que l'ordre de $f(z)$ est inférieur à 1.

Received on May 1981

BIBLIOGRAPHIE

1. N.V. Rose. I.A. Kibel, N.E. Kochin: *Hydrodynamique théorique,* Moscou 1937 (en russe)

2. G.N. Watson; *Theory of Bessel function.* Cambridge 1962.

3. I.N. Vekua: *System von Differenhal gluchungen erster Ordnung...,* Berlin 1956.

4. Le Van Thiem: *Mouvement d'un liquide visqueux dans le domaine extérieur d'un compact,* Toán học IV Hànội 1975.

5. Le Van Thiem, Hoang Đinh Dung: *Ecoulement plan des fluides visqueux en régime d'Oséen,* Acta Mathematica Vietnamica t.2 Hanoi 1977.