# Giáo trình Toán rời rạc

## Tổ hợp và Đồ thị

Nguyễn Hoàng Thạch

# Mục lục

# Danh sách hình vẽ

# Danh sách bảng

# Lời nói đầu

# Phần I

# Tổ hợp đếm

# Chương 1

# Các quy tắc đếm cơ bản

Phần đầu của chương này được dành để giới thiệu về bài toán đếm cùng với một số ví dụ ứng dụng. Trong phần thứ hai, chúng ta sẽ làm quen với một số quy tắc đếm cơ bản. Các quy tắc này tuy đơn giản nhưng là nền tảng quan trọng để xây dựng những kỹ thuật phức tạp hơn được đề cập ở các chương tiếp theo.

## 1.1 Bài toán đếm

## 1.2 Các quy tắc đếm cơ bản

Chúng ta bắt đầu với hai quy tắc đếm cơ bản, có thể được coi là những "viên gạch" để xây dựng những kỹ thuật đếm phức tạp hơn.

### 1.2.1 Quy tắc nhân

*Quy tắc nhân* được áp dụng khi đếm số cách thực hiện một công việc gồm một số công đoạn *nối tiếp* nhau.

**Quy tắc 1.1** (Quy tắc nhân)**.** *Giả sử một công việc được chia thành $k$ công đoạn nối tiếp nhau. Nếu có $n_1$ cách thực hiện công đoạn 1, $n_2$ cách thực hiện công đoạn 2, ..., $n_k$ cách thực hiện công đoạn $k$, thì có $n_1 n_2 \cdots n_k$ cách thực hiện công việc đó.*

*Quy tắc nhân cũng có thể được phát biểu dạng tập hợp như sau. Nếu $S_1, S_2, \ldots, S_k$ là các tập hợp* hữu hạn *thì*

$$|S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_k| = |S_1| \times |S_2| \times \cdots \times |S_k|.$$

Dưới đây là một số ví dụ về bài toán đếm sử dụng quy tắc nhân.

**Ví dụ 1.1.** Một quán cà phê phục vụ 4 loại bánh ngọt và 6 loại đồ uống khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách gọi một đồ uống kèm với một chiếc bánh ngọt?

***Lời giải:*** "Công việc" gọi đồ có thể được chia thành 2 "công đoạn": chọn bánh và chọn đồ uống. Có 4 cách thực hiện "công đoạn 1" và 6 cách thực hiện "công đoạn 2". Theo quy tắc nhân, có $4 \cdot 6 = 24$ cách gọi một đồ uống kèm với một chiếc bánh ngọt. □

**Ví dụ 1.2.** Mã chỗ ngồi hạng phổ thông trên một chuyến bay có dạng $XYY$, trong đó $YY$ là số hàng từ 8 đến 30, còn $X$ là vị trí trong hàng (A, B, C, D, E, F). Hỏi chuyến bay đó có bao nhiêu chỗ ngồi hạng phổ thông?

***Lời giải:*** Một mã chỗ ngồi được tạo ra sau hai bước: chọn số hàng $YY$, rồi chọn vị trí $X$. Từ 8 đến 30 có 23 số nguyên, do đó có 23 cách chọn $YY$. Có 6 cách chọn $X$. Theo quy tắc nhân, số mã chỗ ngồi được tạo ra theo cách này là $23 \cdot 6 = 138$. Chuyến bay đó có 138 chỗ ngồi hạng phổ thông. □

**Ví dụ 1.3** (Từ nhị phân)**.** Một *từ nhị phân độ dài* $n$ ($n \geq 0$) là một dãy gồm $n$ ký tự, trong đó mỗi ký tự là 0 hoặc 1.

Có duy nhất 1 từ nhị phân có độ dài 0, được gọi là *từ trống*.

Với $n \geq 1$, xét quy trình xây dựng một từ nhị phân độ dài $n$ như sau: ta duyệt qua các vị trí lần lượt từ trái sang phải, ở mỗi vị trí chọn một ký tự 0 hoặc 1. Mỗi từ nhị phân độ dài $n$ tương ứng với một và chỉ một cách chọn như vậy. Có $n$ bước chọn, mỗi bước có 2 lựa chọn, do đó theo quy tắc nhân, có tất cả $2^n$ từ nhị phân độ dài $n$. □

**Ví dụ 1.4** (Vòng lặp lồng nhau)**.** Sau khi đoạn mã dưới đây được thực hiện, biến $v$ sẽ có giá trị bằng bao nhiêu?

```
v ← 0;
for i_1 := 1 to n_1 do
    for i_2 := 2 to n_2 do
        ⋮
        for i_k := 2 to n_k do
            v ← v + 1;
        end
    end
end
```

***Lời giải:*** Biến $v$ có giá trị ban đầu bằng 0, và sau mỗi lần đi qua tất cả các vòng lặp, giá trị của $v$ tăng thêm 1. Giá trị cuối cùng của $v$ sẽ bằng số cách đi qua tất cả các vòng lặp. Có $n_1$ cách đi qua vòng lặp thứ nhất, $n_2$ cách đi qua vòng lặp thứ hai, …, $n_k$ cách đi qua vòng lặp thứ $k$, do đó theo quy tắc nhân, có $n_1 n_2 \dots n_k$ cách đi qua tất cả các vòng lặp. Giá trị cuối cùng của $v$ là $n_1 n_2 \dots n_k$. □

### 1.2.2 Quy tắc cộng

*Quy tắc cộng* được phát biểu như sau:

**Quy tắc 1.2** (Quy tắc cộng)**.** *Giả sử một công việc có thể được thực hiện bằng một trong $k$ cách, trong đó cách thứ nhất lại có $n_1$ cách thực hiện chi tiết, cách thứ hai có $n_2$ cách thực hiện chi tiết, ..., cách thứ $k$ có $n_k$ cách thực hiện chi tiết, và tất cả các cách thực hiện chi tiết đều đôi một khác nhau. Khi đó có $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ cách thực hiện chi tiết công việc đó.*

*Quy tắc cộng có thể được phát biểu dưới dạng tập hợp như sau. Nếu $S_1, S_2, \ldots, S_k$ là các tập hợp* hữu hạn *và* đôi một rời nhau *thì*

$$|S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k| = |S_1| + |S_2| + \cdots + |S_k|.$$

Dưới đây là một số ví dụ về bài toán đếm sử dụng quy tắc cộng.

**Ví dụ 1.5.** Sinh viên của một lớp cần thực hiện một đồ án thuộc một trong hai danh sách cho trước. Danh sách thứ nhất có 10 chủ đề, danh sách thứ hai có 8 chủ đề, mỗi chủ đề chỉ xuất hiện trong một danh sách. Hỏi mỗi sinh viên có bao nhiêu lựa chọn chủ đề để làm đồ án?

***Lời giải:*** Vì mỗi chủ đề chỉ xuất hiện trong một danh sách nên theo quy tắc cộng, tổng số cách chọn một chủ đề là $10 + 8 = 18$. □

**Ví dụ 1.6.** Sau khi đoạn mã dưới đây được thực hiện, biến $v$ sẽ có giá trị bằng bao nhiêu?

$v \leftarrow 0$;
**for** $i_1 := 1$ *to* $n_1$ **do**
| $v \leftarrow v + 1$;
**end**
**for** $i_2 := 2$ *to* $n_2$ **do**
| $v \leftarrow v + 1$;
**end**
⋮
**for** $i_k := 2$ *to* $n_k$ **do**
| $v \leftarrow v + 1$;
**end**

***Lời giải:*** Biến $v$ có giá trị ban đầu bằng 0, và sau mỗi lần đi qua một vòng lặp, giá trị của nó tăng thêm 1. Có $n_i$ cách đi qua vòng lặp thứ $i$, và vì mỗi vòng lặp được đi qua đúng 1 lần, quy tắc cộng được áp dụng và số cách đi qua một trong các vòng lặp là $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$. Giá trị cuối cùng của $v$ là $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$. □

Quy tắc cộng cũng có thể được áp dụng để đếm một phần nếu biết tất cả và các phần còn lại.

**Ví dụ 1.7.** Có bao nhiêu từ nhị phân độ dài 8 chứa ít nhất một chữ số 0?

***Lời giải:*** Theo quy tắc cộng, số từ nhị phân độ dài 8 bằng tổng số từ nhị phân độ dài 8 chứa ít nhất một chữ số 0 và số từ nhị phân độ dài 8 không chứa chữ số 0 nào.

Chúng ta đã biết có $2^8 = 256$ từ nhị phân độ dài 8. Trong đó, từ nhị phân duy nhất không chứa chữ số 0 nào là 11111111. Do đó, số từ nhị phân độ dài 8 có chứa ít nhất một chữ số 0 là $256 - 1 = 255$. □

### 1.2.3 Một số ví dụ phức tạp hơn

Quy tắc cộng và quy tắc nhân mặc dù đơn giản nhưng khi kết hợp với nhau có thể giải quyết được những bài toán đếm phức tạp. Ý tưởng chung để giải quyết các bài toán đó là phân tích việc đếm thành các "công việc" nhỏ hơn và áp dụng các quy tắc đã biết cho từng công việc nhỏ đó.

**Ví dụ 1.8.** Một trang web quy định tên thành viên hợp lệ phải có từ 6 đến 8 ký tự, và chỉ chứa các chữ cái tiếng Anh (không phân biệt chữ thường và chữ hoa) hoặc chữ số. Có bao nhiêu tên thành viên hợp lệ cho trang web đó?

***Lời giải:*** Một tên thành viên hợp lệ có thể có 6, 7 hoặc 8 ký tự. Gọi $u_6, u_7, u_8$ lần lượt là số tên thành viên hợp lệ có 6, 7, 8 ký tự. Theo quy tắc cộng, số tên thành viên hợp lệ là $u_6 + u_7 + u_8$.

Chúng ta có thể đếm số tên thành viên có $n$ ký tự bằng quy tắc nhân, tương tự khi đếm số từ nhị phân độ dài $n$ (Ví dụ 1.2.1), có điều ở mỗi vị trí có $26 + 10 = 36$ thay vì 2 lựa chọn. Từ đó $u_6 = 36^6, u_7 = 36^7, u_8 = 36^8$.

Số tên thành viên hợp lệ là $36^6 + 36^7 + 36^8 = 2901650853888$ (khoảng 2900 tỷ!). □

**Ví dụ 1.9** (Số tập hợp con của một tập hợp)**.** Tìm số tập hợp con của một tập hợp $S$ gồm $n$ phần tử.

***Lời giải:*** Nếu $n = 0$, $S$ là tập hợp rỗng và có một tập hợp con duy nhất là chính nó.

Với $n \geq 1$, ta liệt kê các phần tử của $S$ thành một dãy $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Ta mã hóa mỗi tập hợp con $A$ của $S$ bằng một từ nhị phân $w$ độ dài $n$ như sau: ký tự ở vị trí thứ $i$ của $w$ bằng 1 nếu $x_i \in A$, bằng 0 nếu $x_i \notin A$. Ta có thể dễ dàng chứng minh rằng đây là một tương ứng 1-1 giữa tập hợp các tập hợp con của $S$ và tập hợp các từ nhị phân độ dài $n$. Từ đó, số tập hợp con của $S$ bằng số từ nhị phân độ dài $n$ và bằng $2^n$. □

**Ví dụ 1.10.** Nếu trang web ở Ví dụ 1.8 thêm yêu cầu tên thành viên không được bắt đầu bằng một chữ số, thì có bao nhiêu tên thành viên hợp lệ?

***Lời giải:*** Tương tự Ví dụ 1.7, ta tính số tên thành viên hợp lệ bằng cách trừ số tên thành viên không hợp lệ khỏi số tên thành viên có 6, 7 hoặc 8 ký tự đã được tính ở Vídụ 1.8.

Gọi $w_6, w7, w8$ lần lượt là số tên thành viên không hợp lệ trong số các tên thành viên đã tính ở Ví dụ 1.8. Trong mỗi tên thành viên không hợp lệ, ký tự đầu tiên phải là một chữ số nên có 10 lựa chọn, mỗi ký tự còn lại có 36 lựa chọn, do đó $w_6 = 10 \times 36^5, w_7 = 10 \times 36^6, w_8 = 10 \times 36^7$.

Số tên thành viên hợp lệ là $36^6 + 36^7 + 36^8 - 10 \times 36^5 - 10 \times 36^6 - 10 \times 36^7 = 2095636727808$. □

### 1.2.4 Quy tắc trừ

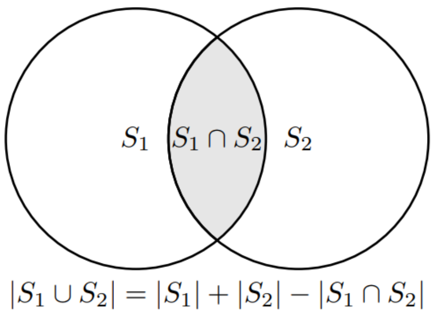
*Quy tắc trừ* được áp dụng khi một công việc có thể được thực hiện theo hai cách, nhưng hai cách này có một phần chung. Dạng tổng quát của quy tắc này, được gọi là *nguyên lý bù trừ*, sẽ được trình bày chi tiết trong Chương 4.

**Quy tắc 1.3** (Quy tắc trừ)**.** *Giả sử một công việc có thể được thực hiện bằng một trong hai cách, trong đó cách thứ nhất có $n_1$ cách thực hiện chi tiết, cách thứ hai có $n_2$ cách thực hiện chi tiết, và có $m$ cách thực hiện chi tiết chung cho cả hai cách. Khi đó có $n_1 + n_2 - m$ cách thực hiện công việc đó.*

*Dưới dạng tập hợp, nếu $S_1$ và $S_2$ là hai tập hợp hữu hạn thì*

$$|S_1 \cup S_2| = |S_1| + |S_2| - |S_1 \cap S_2|.$$

Quy tắc trừ cũng có thể được thể hiện bằng sơ đồ Venn như trong Hình 1.1.




Hình 1.1: Quy tắc trừ.

**Ví dụ 1.11.** Một cuộc điều tra cho thấy trong các sinh viên của một trường đại học, có 109 người thành thạo ngôn ngữ lập trình Python, 78 người thành thạo C++, và 15 người thành thạo cả hai ngôn ngữ. Hỏi có bao nhiêu người thành thạo ít nhất một trong hai ngôn ngữ?

***Lời giải:*** Theo quy tắc trừ, số sinh viên thành thạo ít nhất một trong hai ngôn ngữ lập trình là $109 + 78 - 15 = 172$. □

**Ví dụ 1.12.** Có bao nhiêu từ nhị phân độ dài 8 bắt đầu với 11 hoặc kết thúc với 00?

***Lời giải:*** Một từ nhị phân thỏa mãn điều kiện đã cho có dạng $11x_3 \dots x_8$ hoặc $x_1 \dots x_6 00$. Để tạo ra một từ nhị phân độ dài 8 có dạng $11x_3 \dots x_8$, chúng ta có 1 lựa chọn cho hai vị trí đầu tiên và 2 lựa chọn cho mỗi vị trí còn lại. Theo quy tắc nhân, có $2^6 = 64$ từ nhị phân như vậy. Tương tự, có 64 từ nhị phân độ dài 8 có dạng $x_1 \dots x_6 00$. Tuy nhiên, một số từ nhị phân đã được tính cho cả hai trường hợp: đó là các từ nhị phân có dạng $11x_3 \dots x_6 00$; có $2^4 = 16$ từ nhị phân như vậy. Áp dụng quy tắc trừ, có $64 + 64 - 16 = 112$ từ nhị phân bắt đầu với 11 hoặc kết thúc với 00. □

### 1.2.5 Quy tắc chia

**Quy tắc 1.4** (Quy tắc chia)**.** *Nếu một công việc có thể được thực hiện bằng n cách, nhưng mỗi cách trong đó được tính đúng k lần, thì số cách khác nhau để thực hiện công việc đó là $n/k$.*

*Dưới dạng tập hợp, nếu $S_1, S_2, \cdots, S_k$ là các tập hợp hữu hạn, đôi một rời nhau và $S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k$, thì*

$$|S_1| = |S_2| = \cdots = |S_k| = |S|/k\,.$$

**Ví dụ 1.13.** Một giải bóng bàn có 12 vận động viên thi đấu, mỗi người đấu đúng một trận với mỗi người còn lại. Hỏi giải đấu có tất cả bao nhiêu trận đấu?

***Lời giải:*** Mỗi vận động viên đấu 11 trận, do đó tổng số trận đấu của 12 vận động viên là $11 \times 12 = 132$. Nhưng mỗi trận đấu đã được tính 2 lần (1 lần cho mỗi đấu thủ), nên số trận đấu khác nhau của giải đấu là $132/2 = 66$. □

# Chương 2

# Hoán vị và tổ hợp

Các công thức về hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp thường được sử dụng trong các bài toán đếm mà đối tượng cần đếm là các cách sắp xếp, hoặc cách chọn ra một bộ sắp thứ tự hoặc không sắp thứ tự từ một tập hợp cho trước.

## 2.1 Hoán vị và tổ hợp

### 2.1.1 Hoán vị

**Ví dụ 2.1.** Năm vận động viên thi đấu chạy nước rút. Nếu không có hai vận động viên nào có thành tích giống hệt nhau thì có bao nhiêu kết quả xếp hạng có thể xảy ra?

***Lời giải:*** Mỗi kết quả xếp hạng có thể được xây dựng bằng cách lần lượt xác định người về đích đầu tiên, người về đích thứ hai, ..., người về đích thứ năm. Vận động viên về đích đầu tiên có thể là một trong 5 người. Sau khi đã xác định người về đích đầu tiên, người về đích thứ hai có thể là một trong 4 người còn lại. Cứ tiếp tục như thế và áp dụng quy tắc nhân, ta có $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ khả năng xếp hạng khác nhau. □

Trong Ví dụ 2.1, mỗi khả năng xếp hạng tương ứng với một cách sắp xếp các vận động viên thành một hàng dọc (chẳng hạn theo thứ tự về đích). Mỗi cách sắp xếp như vậy được gọi là một *hoán vị* của các vận động viên.

**Định nghĩa 2.1.** *Một* hoán vị *của một tập hợp hữu hạn là một* bộ sắp thứ tự *gồm các phần tử của tập hợp đó.*

Một hoán vị của $S$ có thể được đồng nhất với một song ánh từ $S$ vào chính nó. Khi đó, nếu $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ thì một hoán vị $\sigma$ của $S$ có thể được biểu diễn bằng dãy hữu hạn $(\sigma(x_1), \sigma(x_2), \ldots, \sigma(x_n))$.

**Ví dụ 2.2.** Các hoán vị của tập hợp $\{1, 2, 3\}$ là:

$$(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1)\,.$$

Số hoán vị của một tập hợp hữu hạn có thể được tính dễ dàng bằng quy tắc nhân.

**Mệnh đề 2.2.** *Số hoán vị của $n$ phần tử*[1] *là* $1 \times 2 \times \cdots \times n$.

Tích $1 \times 2 \times \cdots \times n$, ở đó $n$ là một số nguyên dương, được ký hiệu là $n!$, đọc là "*n giai thừa*". Đẳng thức sau đây hiển nhiên đúng với mọi số nguyên dương $n$:

$$(n+1)! = (n+1) \times n! \tag{2.1}$$

Ta quy ước $0! = 1$. Với quy ước này, (2.1) đúng với mọi số nguyên không âm $n$.

Trong trường hợp tổng quát, đối tượng cần đếm có thể là các bộ sắp thứ tự gồm chỉ một số phần tử chứ không phải toàn bộ tập hợp.

**Định nghĩa 2.3.** *Cho $S$ là một tập hợp hữu hạn có $n$ phần tử và $k$ là một số nguyên không âm. Một* chỉnh hợp chập $k$*, hay còn gọi là một* $k$-hoán vị*, của $S$ là một* bộ sắp thứ tự *gồm $k$ phần tử* khác nhau *của $S$.*

**Ví dụ 2.3.** Năm vận động viên thi đấu chạy nước rút. Một bộ ba huy chương vàng, bạc, đồng sẽ được trao cho ba người về đích đầu tiên, theo thứ tự đó. Nếu không có hai vận động viên nào có thành tích giống hệt nhau thì có bao nhiêu khả năng trao huy chương có thể xảy ra?

***Lời giải:*** Có 5 vận động viên có thể đạt huy chương vàng. Sau khi đã xác định được người đạt huy chương vàng, còn lại 4 vận động viên có thể đạt huy chương bạc, và sau đó còn 3 người có thể đạt huy chương đồng. Theo quy tắc nhân, có $5 \times 4 \times 3 = 60$ khả năng trao huy chương. □

Số chỉnh hợp chập $k$ của $n$ phần tử thường được ký hiệu là $P(n,k)$, $P_k^n$, v.v. ($P$ trong từ tiếng Anh "permutation"), hoặc $A(k,n)$, $A_n^k$ v.v. ($A$ trong từ tiếng Pháp "arrangement").

Từ định nghĩa, $P(n,k) = 0$ nếu $k > n$ và $P(n,0) = 1$. Với $1 \le k \le n$, sử dụng quy tắc nhân tương tự như trong Ví dụ 2.3, ta tính được $P(n,k) = n(n-1)\dots(n-k+1)$. Tổng hợp các trường hợp, ta thu được:

**Mệnh đề 2.4.** *Số chỉnh hợp chập $k$ của $n$ phần tử được cho bởi công thức:*

$$P(n,k) = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!} & \text{nếu } k \le n\,, \\ 0 & \text{nếu } k > n\,. \end{cases} \tag{2.2}$$

**Ví dụ 2.4.** Có bao nhiêu đơn ánh từ một tập hợp $S$ có $k$ phần tử vào một tập hợp $T$ có $n$ phần tử, ở đó $k$ và $n$ là các số nguyên dương?

[1] Trong phần còn lại của cuốn sách, khi ngữ cảnh đủ rõ ràng, chúng ta nói ngắn gọn là "$n$ phần tử" thay vì "một tập hợp gồm $n$ phần tử".

***Lời giải:*** Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $S = \{1, 2, \ldots, k\}$. Một ánh xạ $f : S \to T$ được xác định bởi các ảnh của các phần tử của nó, tức là bởi bộ sắp thứ tự $(f(1), f(2), \ldots, f(k))$. Hơn nữa, $f$ là đơn ánh nếu và chỉ nếu $k$ phần tử này đôi một khác nhau, nói cách khác, nếu bộ này là một chỉnh hợp chập $k$ của $T$. Vậy số đơn ánh từ $S$ vào $T$ là $P(n, k)$, và bằng:

$$\begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!} & \text{nếu } k \leq n\,, \\ 0 & \text{nếu } k > n\,. \end{cases}$$

□

### 2.1.2 Tổ hợp

Nếu như hoán vị và chỉnh hợp mô tả các cấu hình có phân biệt thứ tự, thì tổ hợp là khái niệm tương tự cho trường hợp không phân biệt thứ tự.

**Định nghĩa 2.5.** *Cho $S$ là một tập hợp hữu hạn có $n$ phần tử và $k$ là một số nguyên không âm. Một* tổ hợp chập $k$ *của $S$ là một* bộ không sắp thứ tự *gồm $k$ phần tử của $S$.*

Một cách tương đương, một tổ hợp chập $k$ của một tập hợp chính là một tập hợp con có $k$ phần tử của tập hợp đó.

Số tổ hợp chập $k$ của $n$ phần tử thường được ký hiệu là $C(n.k), C_n^k$ (xuất phát từ từ "combination") hoặc $\binom{n}{k}$. Ký hiệu cuối cùng còn được gọi là *hệ số nhị thức* và được đọc là "$n$ chọn $k$".

**Mệnh đề 2.6.** *Số tổ hợp chập $k$ của $n$ phần tử, ở đó $k$ và $n$ là các số nguyên không âm và $k \leq n$, được cho bởi công thức:*

$$C(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\,. \tag{2.3}$$

Công thức (2.3) là hệ quả trực tiếp của mối quan hệ sau giữa hai đại lượng $P(n, k)$ và $C(n, k)$:

**Bổ đề 2.7.** *Nếu $k$ và $n$ là các số nguyên không âm sao cho $k \leq n$, thì:*

$$P(n, k) = k!C(n, k)\,. \tag{2.4}$$

*Chứng minh.* Một chỉnh hợp chập $k$ của $n$ phần tử có thể được xây dựng bằng cách chọn đồng thời $k$ phần tử, sau đó mới sắp xếp chúng. Có $C(n, k)$ cách thực hiện bước đầu tiên, sau đó có $k!$ cách thực hiện bước thứ hai. Áp dụng quy tắc nhân, ta thu được (2.4). □

**Hệ quả 2.8.** *Với mọi cặp số nguyên không âm $n$ và $k$ sao cho $k \leq n$:*

$$C(n, k) = C(n, n-k)\,. \tag{2.5}$$

*Chứng minh.* Bạn đọc có thể dùng công thức (2.3) để khai triển hai vế rồi so sánh.

Ở đây chúng ta sẽ trình bày một cách chứng minh khác, bằng song ánh. Giả sử $S$ là một tập hợp có $n$ phần tử. Theo định nghĩa, $C(n,k)$ đếm số tập hợp con có $k$ phần tử, còn $C(n,n-k)$ đếm số tập hợp con có $n-k$ phần tử của $S$. Xét ánh xạ cho tương ứng mỗi tập hợp con có $k$ phần tử của $S$ với phần bù của nó. Bạn đọc có thể dễ dàng kiểm tra rằng đây là một song ánh từ các tập hợp con có $k$ phần tử ủa $S$ vào các tập hợp con có $n-k$ phần tử của $S$, từ đó số tập hợp con hai loại là bằng nhau. □

Công thức (2.3) còn có một hệ quả thú vị trong số học.

**Hệ quả 2.9.** *Với mọi số nguyên dương $k$, tích của $k$ số tự nhiên liên tiếp luôn chia hết cho $k$!.*

**Ví dụ 2.5.** Cho 8 điểm trên mặt phẳng, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Có tất cả bao nhiêu tam giác có các đỉnh nằm trong các điểm đó?

***Lời giải:*** Vì không có ba điểm nào thẳng hàng, nên mỗi bộ ba điểm xác định duy nhất một tam giác. Số tam giác bằng số cách chọn ra ba điểm trong 8 điểm đã cho và bằng $C(8,3) = 56$. □

**Ví dụ 2.6.** Có bao nhiêu từ nhị phân độ dài 16 chứa đúng 6 ký tự 1?

***Lời giải:*** Ta có thể xây dựng một từ nhị phân như vậy bằng cách chọn 6 vị trí bất kỳ và điền vào mỗi vị trí đó một ký tự 1, sau đó điền ký tự 0 vào các vị trí còn lại. Ngược lại, mỗi cách chọn như vậy xác định duy nhất một từ nhị phân độ dài 16 có đúng 6 ký tự 1. Vậy số từ nhị phân độ dài 16 có đúng 6 ký tự 1 bằng số cách chọn 6 vị trí từ 16 vị trí và bằng $C(16,6) = 8008$. □

**Ví dụ 2.7.** Một giải bóng đá có 16 đội tham gia. Các đội được chia thành 4 bảng A, B, C, D, mỗi bảng 4 đội. Nếu việc bốc thăm chia bảng là ngẫu nhiên thì có bao nhiêu cách chia bảng?

***Lời giải:*** Việc chia bảng có thể được thực hiện bằng cách lần lượt chọn các đội bóng cho từng bảng. Có $C(16,4)$ cách chọn 4 đội từ 16 đội cho bảng A, $C(12,4)$ cách chọn 4 đội từ 12 đội còn lại cho bảng B, $C(8,4)$ cách chọn 4 đội từ 8 đội còn lại cho bảng C, và cuối cùng $C(4,4)$ cách chọn 4 đội cho bảng D. Tổng số cách chia bảng là:

$$\begin{aligned} C(16,4)\times C(12,4)\times C(8,4)\times C(4,4) &= \frac{16!12!8!4!}{(12!4!)(8!4!)(4!4!)(0!4!)} \\ &= \frac{16!}{0!(4!)^4} \\ &= 63063000\,. \end{aligned}$$

□

**Ví dụ 2.8.** Tìm xác suất để 5 quân bài được rút ngẫu nhiên từ một bộ bài 52 quân thông thường có cùng màu.

***Lời giải:*** Một bộ bài 52 quân có 26 quân đỏ và 26 quân đen.

Số bộ 5 quân bài ngẫu nhiên có thể được rút là $C(52,5)$, trong đó có $C(26,5)$ bộ gồm 5 quân đỏ và $C(26,5)$ bộ gồm 5 quân đen. Do đó, xác suất để 5 quân được rút ngẫu nhiên có cùng màu là:

$$\frac{C(26,5)+C(26,5)}{C(52,5)} \approx 5\% \,.$$

□

### 2.1.3 Một số đẳng thức tổ hợp

Trong mục này, chúng ta xem xét một số đẳng thức liên quan đến hệ số nhị thức $\binom{n}{k}$ và cách chứng minh tổ hợp của chúng. Đẳng thức đầu tiên là một kết quả quen thuộc.

**Định lý 2.10** (Công thức nhị thức[2])**.** *Khai triển của biểu thức $(x+y)^n$, ở đó $n$ là một số nguyên không âm, được cho bởi công thức sau:*

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i \\ &= \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} x + \ldots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n \,. \qquad (2.6)\end{aligned}$$

*Chứng minh.* Mỗi số hạng trong khai triển của $(x+y)^n$ được tạo thành bằng cách lấy $x$ hoặc $y$ trong mỗi thừa số $(x+y)$ rồi nhân với nhau. Như vậy, số cách tạo thành số hạng $x^{n-i}y^i$ bằng số cách chọn ra $n-i$ thừa số để lấy $x$ (và $i$ thừa số còn lại lấy $y$), và bằng $\binom{n}{n-i}$. □

Thay một số giá trị đặc biệt vào công thức nhị thức, ta thu được một số đẳng thức tổ hợp khác.

**Hệ quả 2.11.** *Với mọi số nguyên không âm $n$:*

1. $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$.

2. $\sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0$.

[2] Còn gọi là *công thức Newton* hoặc *khai triển nhị thức Newton*.

*Chứng minh.* Thay $x = y = 1$ vào công thức nhị thức, ta thu được đẳng thức thứ nhất. Thay $x = 1, y = -1$, ta thu được đẳng thức thứ hai. □

Đẳng thức đầu tiên của hệ quả trên còn có thể được chứng minh bằng cách đếm hai lần. Chứng minh chi tiết được dành cho bạn đọc như một bài tập.

Chứng minh của công thức nhị thức được đưa ra ở trên là một *chứng minh tổ hợp*. Công thức nhị thức còn có thể được chứng minh bằng quy nạp, sử dụng *đẳng thức Pascal* sau đây.

**Định lý 2.12.** *Giả sử $n$ và $k$ là các số nguyên dương và $n \geq k$. Khi đó:*

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}. \tag{2.7}$$

*Chứng minh.* Đặt $S = \{1, 2, \cdots, n+1\}$. Khi đó vế trái của (2.7) là số tập hợp con có $k$ phần tử của $S$.

Mặt khác, mỗi tập hợp con có $k$ phần tử của $S$ có thể được xây dựng bằng một trong hai cách:

1. Chọn một tập hợp con có $k$ phần tử của $\{1, 2, \cdots, n\}$; hoặc

2. Chọn một tập hợp con có $k-1$ phần tử của $\{1, 2, \cdots, n\}$ rồi thêm phần tử $n+1$ vào nó.

Có $\binom{n}{k}$ tập hợp được xây dựng theo cách thứ nhất, và $\binom{n}{k-1}$ tập hợp được xây dựng theo cách thứ hai. Theo quy tắc cộng, số tập hợp con có $k$ phần tử của $S$ là $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$, tức là vế phải của (2.7). □

Đẳng thức Pascal, cùng với nhận xét $\binom{n}{0} = \binom{n}{n}$, cho phép tính các hệ số nhị thức một cách truy hồi. Đẳng thức này còn cho ta một biểu diễn trực quan của các hệ số nhị thức, gọi là *tam giác Pascal*. Trong biểu diễn này, hàng thứ $n+1$ từ trên xuống gồm các hệ số $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \cdots, \binom{n}{n}$; mỗi hệ số ở hàng tiếp theo bằng tổng hai số ở ngay trên nó. Trong Hình 2.1 là tam giác Pascal cho $n \leq 10$.

**Định lý 2.13** (Đẳng thức Vandermonde)**.** *Giả sử $m, n, k$ là các số nguyên không âm và $k \leq m, k \leq n$. Khi đó:*

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}. \tag{2.8}$$

*Chứng minh.* Xét hai tập hợp rời nhau: $S$ có $m$ phần tử, $T$ có $n$ phần tử. Khi đó, vế trái của (2.8) là số tập hợp con có $k$ phần tử của $S \cup T$.

Ta cũng có thể xây dựng một tập hợp con có $k$ phần tử của $S \cup T$ bằng cách lấy hợp của một tập hợp con có $i$ phần tử của $S$ và một tập hợp con có

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Hình 2.1: Tam giác Pascal cho $n \leq 10$.

$k - i$ phần tử của $T$ $(0 \leq i \leq k)$. Với mỗi $i$, có $\binom{m}{i}$ cách chọn "nửa" trong $S$ và $\binom{n}{k-i}$ cách chọn "nửa" trong $T$, tức là có $\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$ tập hợp con của $S \cup T$ gồm $i$ phần tử trong $S$ và $k - i$ phần tử trong $T$. Tính tổng với $i = 0, 1, \cdots, k$, ta thu được vế phải của (2.8). $\square$

**Hệ quả 2.14.** *Với mọi số nguyên không âm $n$:*

$$\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2. \tag{2.9}$$

*Chứng minh.* Áp dụng đẳng thức Vandermonde với $m = n$ và chú ý rằng $\binom{n}{n-i} = \binom{n}{i}$. $\square$

Đẳng thức cuối cùng trong mục này cũng được chứng minh bằng cách đếm hai cách, nhưng đối tượng được đếm không phải các tập hợp con mà là các từ nhị phân.

**Định lý 2.15.** *Giả sử $n$ và $k$ là các số nguyên không âm và $n \geq k$. Khi đó:*

$$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k}. \tag{2.10}$$

*Chứng minh.* Theo Ví dụ 2.6, vế trái của (2.10) bằng số từ nhị phân độ dài $n+1$ có đúng $k+1$ chữ số 1.

Ta sẽ đếm số từ nhị phân này bằng một cách khác. Xét một từ nhị phân bất kỳ như vậy. Gọi $j$ là vị trí của chữ số 1 cuối cùng tính từ bên trái của từ đó. Khi đó $j \geq k+1$ và từ đó có thể được chia làm ba phần:

- Các vị trí $1, 2, \ldots, j-1$ là một từ nhị phân độ dài $j-1$ có $k$ chữ số 1;
- Vị trí $j$ là một chữ số 1;
- Các vị trí $j+1, \ldots, n+1$ gồm toàn các chữ số 0.

Phân tích này cho ta một quy trình xây dựng một từ nhị phân độ dài $n+1$ có $k+1$ chữ số 1:

1. Chọn $j \geq k+1$;
2. Chọn một từ nhị phân độ dài $j-1$ có $k$ chữ số 1: có $\binom{j-1}{k}$ cách chọn;
3. Chọn từ nhị phân độ dài $n+1-j$ gồm toàn chữ số 0: có 1 cách chọn.

Từ đó số từ nhị phân độ dài $n+1$ có $k+1$ chữ số 1 là:

$$\sum_{j=k+1}^{n} \binom{j-1}{k}.$$

Đổi biến $i = j-1$, ta thu được vế phải của (2.10). □

## 2.2 Hoán vị và tổ hợp với các phần tử lặp lại

Trong mục này, chúng ta đếm số các bộ, sắp thứ tự hoặc không sắp thứ tự, trong đó các phần tử không nhất thiết phải đôi một khác nhau.

### 2.2.1 Chỉnh hợp có lặp

**Định nghĩa 2.16.** *Cho $S$ là một tập hợp hữu hạn có $n$ phần tử và $k$ là một số nguyên không âm. Một* chỉnh hợp có lặp chập *$k$ của $S$ là một* bộ sắp thứ tự *gồm $k$ phần tử, mỗi phần tử đều thuộc $S$.*

Trong ngôn ngữ tập hợp, một chỉnh hợp có lặp chập $k$ của tập hợp $S$ chính là một phần tử của tích Descartes $S \times S \times \cdots \times S$ ($k$ lần). Từ đó, áp dụng quy tắc nhân, ta có:

**Mệnh đề 2.17.** *Số chỉnh hợp có lặp chập $k$ của một tập hợp $S$ có $n$ phần tử là $n^k$.*

**Ví dụ 2.9.** Mỗi từ nhị phân độ dài $n$ có thể được coi là một chỉnh hợp có lặp chập $n$ của tập hợp $\{0,1\}$. Do đó số từ nhị phân độ dài $n$ là $2^n$.

**Ví dụ 2.10.** Có bao nhiêu ánh xạ từ một tập hợp có $n$ phần tử vào một tập hợp có $m$ phần tử?

***Lời giải:*** Không mất tính tổng quát, giả sử tập hợp có $n$ phần tử là $A = \{1, 2, \cdots, n\}$ và tập hợp có $m$ phần tử là $B = \{1, 2, \cdots, m\}$. Mỗi ánh xạ $f : A \to B$ hoàn toàn được xác định bởi bộ sắp thứ tự $(f(1), f(2), \cdots, f(n))$. Điều này có nghĩa là số ánh xạ từ $A$ vào $B$ bằng số chỉnh hợp có lặp chập $n$ của $B$ và bằng $m^n$. □

### 2.2.2 Hoán vị có lặp

Xét ví dụ sau.

**Ví dụ 2.11.** Có bao nhiêu số có 6 chữ số gồm 3 chữ số 1, 2 chữ số 2, và 1 chữ số 3?

***Lời giải:*** Ta tạo ra một số có 6 chữ số như vậy bằng cách chọn vị trí cho 3 chữ số 1 trong 6 vị trí có thể, sau đó chọn vị trí cho 2 chữ số 2 trong 3 vị trí còn lại, rồi đặt chữ số 3 vào vị trí cuối cùng. Số các số có 6 chữ số có thể được tạo ra như vậy là

$$C(6,3)C(3,2)C(1,1) = \frac{6!}{3!3!}\frac{3!}{2!1!}\frac{1!}{1!0!} = \frac{6!}{3!2!1!} = 60\,.$$

□

Chúng ta cũng có thể giải thích công thức $6!/(3!2!1!)$ bằng một lập luận trực tiếp. Ta nhận thấy việc hoán vị các chữ số giống nhau của một số không làm thay đổi số đó, do đó mỗi số có 6 chữ số mà chúng ta cần đếm tương ứng với $3!2!1!$ hoán vị khác nhau của 6 chữ số (tương ứng với việc đổi chỗ các chữ số 1 cho nhau, đổi chỗ các chữ số 2 cho nhau). Áp dụng quy tắc chia, ta thu được kết luận.

**Định nghĩa 2.18.** *Một* hoán vị có lặp *của $k$ phần tử với các hệ số lặp $n_1, n_2, \cdots, n_k$ (các $n_i$ là các số nguyên không âm) là một bộ sắp thứ tự trong đó phần tử thứ nhất xuất hiện $n_1$ lần, phần tử thứ hai xuất hiện $n_2$ lần, ..., phần tử thứ $k$ xuất hiện $n_k$ lần.*

*Đặt $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$. Số hoán vị có lặp của $k$ phần tử với các hệ số lặp $n_1, n_2, n_k$ được ký hiệu là $\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_k}$ hoặc $C(n; n_1, n_2, \cdots, n_k)$.*

**Mệnh đề 2.19.** *Giả sử $n_1, n_2, \cdots, n_k$ là các số nguyên không âm. Đặt $n = n_1+n_2+\cdots+n_k$. Số hoán vị có lặp của $k$ phần tử với các hệ số lặp $n_1, n_2, \cdots, n_k$ được cho bởi công thức:*

$$\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}\,. \tag{2.11}$$

Công thức (2.11) có thể được chứng minh bằng cả hai cách đã được trình bày trong Ví dụ 2.11. Chứng minh chi tiết được dành cho bạn đọc như một bài tập.

Đại lượng $\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_k}$ còn xuất hiện trong *công thức Newton tổng quát* về khai triển một lũy thừa của một đa thức nhiều biến bậc nhất.

**Định lý 2.20** (Công thức Newton tổng quát)**.** *Với mọi số nguyên không âm $n$ và mọi số nguyên $k \geq 2$:*

$$(x_1 + x_2 + \cdots x_k)^n = \sum_{\substack{n_1,n_2,\cdots,n_k \in \mathbb{N} \\ n_1+n_2+\cdots+n_k=n}} \binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}\,. \tag{2.12}$$

Chứng minh của công thức này sử dụng lập luận tương tự chứng minh của Định lý 2.1.3. Chi tiết được dành cho bạn đọc như một bài tập.

### 2.2.3 Tổ hợp có lặp

**Định nghĩa 2.21.** *Cho $S$ là một tập hợp hữu hạn có $n$ phần tử và $k$ là một số nguyên không âm. Một* tổ hợp có lặp *chập $k$ của $S$ là một bộ không sắp thứ tự gồm $k$ phần tử, mỗi phần tử đều thuộc $S$.*

**Ví dụ 2.12.** Có bao nhiêu kết quả khác nhau có thể xảy ra khi gieo hai con xúc xắc sáu mặt, nếu thứ tự không quan trọng (tức là $1, 2$ và $2, 1$ được tính là cùng một kết quả)?

***Lời giải:*** Ta có thể liệt kê tất cả các khả năng:

$$\begin{aligned}
&\{1,1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{1,6\}, \\
&\{2,2\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{2,6\}, \\
&\{3,3\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \\
&\{4,4\}, \{4,5\}, \{4,6\}, \\
&\{5,5\}, \{5,6\}, \\
&\{6,6\}\,.
\end{aligned}$$

Có tất cả 21 khả năng. □

Tuy nhiên, trong hầu hết các trường hợp, số khả năng là quá lớn để có thể liệt kê hết một cách chính xác.

**Ví dụ 2.13.** Một cửa hàng kem bán bốn vị khác nhau. Có bao nhiêu cách chọn sáu viên kem, mỗi viên có một trong bốn vị đó?

***Lời giải:*** Chúng ta có thể giả sử 6 viên kem được xếp thành hàng trong một chiếc hộp, những viên vị giống nhau đặt cạnh nhau, và một vách ngăn được đặt giữa hai vị khác nhau. Như vậy, mỗi cách chọn vị kem có thể được biểu diễn bằng một dãy dấu sao ngăn cách bằng các vạch thẳng. Chẳng hạn, cách chọn $(2, 1, 1, 2)$ (hai viên vị thứ nhất, một viên vị thứ hai, một viên vị thứ ba, hai viên vị thứ tư) được biểu diễn như sau:

$$* \ * \ | \ * \ | \ * \ | \ * \ *$$

Mỗi biểu diễn như vậy sử dụng đúng 6 dấu sao và 3 dấu gạch, và mỗi cách sắp xếp 6 dấu sao và 3 vạch ngăn thành một hàng tương ứng với một và chỉ một cách chọn.

Vậy số cách chọn các vị kem bằng số cách chọn 3 vị trí cho các vạch ngăn và bằng $C(9, 3) = 84$. □

Lập luận trong ví dụ trên có thể được tổng quát hóa để tìm số tổ hợp lặp chập $k$ của $n$ phần tử.

**Mệnh đề 2.22.** *Số tổ hợp lặp chập $k$ của $n$ phần tử là $C(k + n - 1, n - 1)$.*

**Ví dụ 2.14.** Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm?

***Lời giải:*** Mỗi nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1+x_2+x_3 = 10$ tương ứng với một bộ 10 phần tử, mỗi phần tử thuộc một trong ba loại. Số bộ như vậy bằng số tổ hợp có lặp chập 10 của 3 phần tử và bằng $C(10 + 3 - 1, 3 - 1) = 66$. □

**Ví dụ 2.15.** Sau khi đoạn mã dưới đây được thực hiện, biến $v$ sẽ có giá trị bằng bao nhiêu?

```
v ← 0;
for i_1 := 1 to n do
    for i_2 := 1 to i_1 do
        ⋮
        for i_k := 1 to i_{k-1} do
            v ← v + 1;
        end
    end
end
```

***Lời giải:*** Mỗi lần đi qua vòng lặp tương ứng với một bộ số nguyên $i_1, i_2, \cdots, i_k$ thỏa mãn $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq n$. Mỗi bộ số nguyên như vậy chính là một tổ hợp có lặp chập $k$ của $\{1, 2, \cdots, n\}$. Do đó, số cách đi qua vòng lặp bằng $C(k + n - 1, k)$. Giá trị cuối cùng của $v$ là $C(k + n - 1, k)$. □

## 2.3 Xếp bóng vào hộp

Xét bài toán đếm số cách xếp một số quả bóng vào một số chiếc hộp. Trước khi bắt đầu đếm, chúng ta phải trả lời câu hỏi *"Thế nào là hai cách xếp khác nhau?"* Cụ thể, chúng ta muốn biết các quả bóng/hộp là *phân biệt* (hay *có dán nhãn*) hay *giống hệt nhau* (hay *không dán nhãn*).

### 2.3.1 Bóng và hộp đều dán nhãn

Giả sử ta cần xếp $n$ quả bóng khác nhau vào $k$ chiếc hộp khác nhau sao cho hộp thứ nhất có $n_1$ quả bóng, hộp thứ hai có $n_2$ quả bóng, $\ldots$, hộp thứ $k$ có $n_k$ quả bóng ($n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$). Việc xếp bóng vào hộp có thể được thực hiện bằng cách xếp tất cả các quả bóng thành một dãy, sau đó lần lượt chọn $n_1$ vị trí trong dãy tương ứng với hộp thứ nhất, $n_2$ vị trí cho hộp thứ hai, v.v. Với cách xây dựng này, mỗi cách xếp bóng chính là một hoán vị có lặp của $n$ phần tử với các hệ số lặp $n_1, n_2, \cdots, n_k$. Theo Mệnh đề 2.19, số cách xếp này bằng $n!/(n_1!n_2! \cdots n_k!)$.

**Ví dụ 2.16.** Có bao nhiêu cách chia bài từ một bộ bài 52 quân cho bốn người chơi, sao cho mỗi người có 8 quân bài?

***Lời giải:*** Chúng ta có 52 "quả bóng", là các quân bài, cần được xếp vào 4 "chiếc hộp" tương ứng với số quân bài của bốn người chơi và phần quân bài còn lại. Số "quả bóng" trong các "hộp" lần lượt là 8, 8, 8, 8, 20. Số cách chia bài là $52!/(8!8!8!8!20!) \approx 1,25 \times 10^{31}$. □

### 2.3.2 Bóng giống hệt nhau, hộp dán nhãn

Giả sử ta cần xếp $n$ quả bóng giống hệt nhau vào $k$ chiếc hộp khác nhau. Mỗi cách xếp chính là một tổ hợp có lặp chập $n$ của $k$ phần tử. Theo Mệnh đề 2.22, số cách xếp này bằng $C(n + k - 1, n)$.

**Ví dụ 2.17.** Có bao nhiêu cách lấy 20 tờ tiền với các mệnh giá 10000 đồng, 20000 đồng, 50000 đồng?

***Lời giải:*** Trong ví dụ này, chúng ta cần xếp 20 "quả bóng" giống hệt nhau vào 3 "chiếc hộp" có nhãn 10000, 20000, 50000. Số cách xếp là

$$C(20 + 3 - 1, 20) = 231\,.$$

□

### 2.3.3 Bóng dán nhãn, hộp giống hệt nhau

Xét bài toán đếm số cách xếp $n$ quả bóng khác nhau vào $k$ chiếc hộp giống hệt nhau.

**Ví dụ 2.18.** Có bao nhiêu cách sắp xếp 4 quả bóng khác màu nhau vào 3 chiếc hộp giống hệt nhau, nếu mỗi hộp có thể chứa một số quả bóng bất kỳ?

***Lời giải:*** Ta đánh số các quả bóng là 1, 2, 3, 4 và liệt kê tất cả các cách xếp. Việc liệt kê được thực hiện như sau: trước hết ta xác định số bóng trong mỗi hộp, sau đó ta xếp bóng vào hộp theo những số lượng đó. Vì những chiếc hộp giống hệt nhau, nên mỗi cách phân bố số bóng vào các hộp tương ứng với một bộ ba số nguyên không âm $a \geq b \geq c$ sao cho $a + b + c = 4$. Ta có các trường hợp sau:

- $(4, 0, 0)$: có duy nhất 1 cách xếp, là $\{\{1, 2, 3, 4\}, \emptyset, \emptyset\}$;
- $(3, 1, 0)$: có 4 cách xếp, là
  1. $\{\{1, 2, 3\}, \{4\}, \emptyset\}$,
  2. $\{\{1, 2, 4\}, \{3\}, \emptyset\}$,
  3. $\{\{1, 3, 4\}, \{2\}, \emptyset\}$,
  4. $\{\{2, 3, 4\}, \{1\}, \emptyset\}$.
- $(2, 2, 0)$: có 3 cách xếp, là
  1. $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \emptyset\}$,
  2. $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \emptyset\}$,
  3. $\{\{1, 4\}, \{2, 3\}, \emptyset\}$.
- $(2, 1, 1)$: có 6 cách xếp, là
  1. $\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}$,
  2. $\{\{1, 3\}, \{2\}, \{4\}\}$,
  3. $\{\{1, 4\}, \{2\}, \{3\}\}$,
  4. $\{\{2, 3\}, \{1\}, \{4\}\}$,
  5. $\{\{2, 4\}, \{1\}, \{3\}\}$,
  6. $\{\{3, 4\}, \{1\}, \{2\}\}$.

Vậy có tất cả $1 + 4 + 3 + 6 = 14$ cách xếp. □

Lưu ý rằng số cách sắp xếp ở trường hợp $(2, 2, 0)$ là 3 thay vì $4!/(2!2!0!) = 6$ như công thức trong mục 2.3.1. Sự khác nhau này xuất phát từ điều kiện những chiếc hộp giống hệt nhau, dẫn đến việc một số cách xếp được tính là khác nhau trong các điều kiện của mục 2.3.1 nhưng chỉ được coi là cùng một cách trong các điều kiện của mục này. Tương tự, trường hợp $(2,1,1)$ cũng chỉ có 6 cách xếp thay vì 12.

Một cách tổng quát, mỗi cách xếp $n$ quả bóng khác nhau vào $k$ hộp sao cho *không có hộp nào rỗng* tương đương với một cách *phân hoạch một tập hợp có n phần tử thành k khối khác rỗng* (không phân biệt thứ tự của các khối).

**Định nghĩa 2.23** (Số Stirling loại hai)**.** *Giả sử $n$ là một số nguyên không âm và $k$ là một số nguyên dương. Số cách phân hoạch một tập hợp có $n$ phần tử thành $k$ khối không rỗng được gọi là* số Stirling loại hai thứ $(n,k)$ *và được ký hiệu là $S(n,k)$.*

*Ta cũng quy ước là $S(n,0)=0$ với mọi $n$.*

Hiển nhiên, $S(n,k)=0$ nếu $k>n$. Với $k\le n$, $S(n,k)$ có thể được tính bằng công thức sau đây.

**Định lý 2.24.** *Giả sử $n,k$ là các số nguyên dương và $n\ge k$. Khi đó:*

$$S(n,k)=\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n\,. \tag{2.13}$$

Chứng minh của công thức này sử dụng *nguyên lý bù trừ* và sẽ được trình bày cụ thể trong chương 4.

Các số Stirling loại hai cũng có thể được tính một cách truy hồi, bằng cách sử dụng quan hệ truy hồi sau, kết hợp với các điều kiện $S(n,0)=0$, $S(n,1)=1$, $S(n,n)=1$.

**Định lý 2.25.** *Giả sử $n,k$ là các số nguyên dương và $n\ge k$. Khi đó:*

$$S(n+1,k)=kS(n,k)+S(n,k-1)\,. \tag{2.14}$$

*Chứng minh.* Ta chứng minh bằng cách tổ hợp. Xét quy trình xây dựng một phân hoạch của $\{1,2,\cdots,n+1\}$ thành $k$ khối khác rỗng như sau:

- Nếu phân hoạch đó không chứa khối $\{n+1\}$, nó có thể được xây dựng bằng cách lấy một phân hoạch của $\{1,2,\cdots,n\}$ thành $k$ khối khác rỗng, chọn một trong $k$ khối và thêm phần tử $n+1$ vào khối đó. Có $kS(n,k)$ phân hoạch được xây dựng theo cách này.

- Nếu phân hoạch đó chứa khối $\{n+1\}$, nó có thể được xây dựng bằng cách lấy một phân hoạch của $\{1,2,\cdots,n\}$ thành $k-1$ khối khác rỗng và thêm vào khối $\{n+1\}$. Có $S(n,k-1)$ phân hoạch được xây dựng theo cách này.

Vậy $S(n+1,k)=kS(n,k)+S(n,k-1)$. □

Bạn đọc cũng có thể chứng minh đẳng thức (2.14) một cách trực tiếp bằng cách sử dụng công thức (2.13).

Số toàn ánh giữa hai tập hợp hữu hạn có thể được biểu diễn bằng các số Stirling loại hai.

**Định lý 2.26.** *Giả sử $m$, $n$ là các số nguyên dương. Khi đó có $m!S(n,m)$ toàn ánh từ một tập hợp $A$ có $n$ phần tử vào một tập hợp $B$ có $m$ phần tử.*

*Chứng minh.* Giả sử $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ và $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$.

Với mỗi ánh xạ $f : A \to B$, ký hiệu $f^{-1}(b_i)$ là nghịch ảnh của phần tử $b_i$. Do định nghĩa của ánh xạ, các nghịch ảnh $f^{-1}(b_i)$, $1 \leq i \leq m$, là các tập hợp con rời nhau của $A$ và có hợp bằng $A$. Ánh xạ $f$ là một toàn ánh nếu và chỉ nếu tất cả các nghịch ảnh $f^{-1}(b_i)$ khác rỗng, nghĩa là chúng tạo thành một phân hoạch của $A$ thành $m$ khối khác rỗng.

Lưu ý rằng tập hợp các nghịch ảnh *có phân biệt thứ tự*, do đó mỗi phân hoạch của $A$ thành $m$ khối khác rỗng xác định $m!$ bộ nghịch ảnh khác rỗng khác nhau, tương ứng với $m!$ toàn ánh khác nhau.

Vậy số toàn ánh từ $A$ vào $B$ bằng $m!$ lần số cách phân hoạch $A$ thành $m$ khối khác rỗng. □

Ta để ý rằng định lý trên đúng cho cả trường hợp $m > n$, vì khi đó $S(n,m) = 0$.

Giả sử $A$ là một tập hợp có $n$ phần tử và $B$ là một tập hợp có $m$ phần tử. Mỗi ánh xạ $f$ từ $A$ vào $B$ có thể được đồng nhất với một toàn ánh từ $A$ vào tập ảnh $f(A)$, là một tập hợp con của $B$. Từ đó, ta có một quy trình xây dựng một ánh xạ bất kỳ từ $A$ vào $B$ gồm các bước lần lượt sau:

1. Chọn một số nguyên dương $k \leq m$;

2. Chọn một tập hợp con $C$ của $B$ gồm $k$ phần tử;

3. Chọn một toàn ánh từ $A$ vào $C$.

Với mỗi $k = 1, 2, \cdots, m$, có $C(m,k)$ cách chọn tập hợp $C$, và sau đó với mỗi tập hợp $C$ như vậy, có $k!S(n,k)$ toàn ánh từ $A$ vào $C$. Kết hợp lại, ta được một công thức đếm số ánh xạ từ $A$ vào $B$:

$$\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} k! S(n,k) .$$

Mặt khác, ở Ví dụ 2.10, chúng ta đã đã tính được số ánh xạ từ $A$ vào $B$ bằng $m^n$. Do đó:

**Hệ quả 2.27.** *Giả sử $n$ và $m$ là các số nguyên dương. Khi đó:*

$$m^n = \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} k! S(n,k) . \tag{2.15}$$

Một toàn ánh từ một tập hợp $A$ có $n$ phần tử vào một tập hợp $B$ có $m$ phần tử, giả sử là $b_1, b_2, \cdots, b_m$, còn có thể được xây dựng như sau. Chọn các số nguyên dương $i_1, i_2, \cdots, i_m$ sao cho $i_1 + i_2 + \cdots + i_m = n$; sau đó chọn $i_1$ phần tử của $A$ có ảnh là $b_1$, $i_2$ phần tử có ảnh là $b_2$, ..., $i_m$ phần tử có ảnh là $b_m$. Cách xây dựng này cho ta một công thức khác để tính số toàn ánh từ $A$ vào $B$: $\sum_{i_j \geq 1, \sum_j i_j = n} C(n; i_1, i_2, \cdots, i_m)$. Ta có đẳng thức:

**Hệ quả 2.28.** *Giả sử $n$ và $m$ là các số nguyên dương. Khi đó:*

$$m!S(n,m) = \sum_{\substack{i_1, i_2, \cdots, i_m \geq 1 \\ i_1 + i_2 + \cdots + i_m = n}} \binom{n}{i_1, i_2, \cdots, i_m}. \tag{2.16}$$

Ta quay lại bài toán xếp $n$ quả bóng khác nhau vào $k$ chiếc hộp giống hệt nhau, nhưng một số hộp có thể rỗng. Số cách xếp như vậy bằng tổng các số cách xếp $n$ quả bóng vào $i$ chiếc hộp giống hệt nhau, với $i = 1, 2, \cdots, k$, sao cho không có hộp nào rỗng, tức là:

$$\sum_{i=1}^{k} S(n,i).$$

Khi $k = n$, số cách xếp bóng này chính bằng số cách phân hoạch một tập hợp có $n$ phần tử.

**Định nghĩa 2.29** (Số Bell)**.** *Số cách phân hoạch một tập hợp có $n$ phần tử được gọi là* số Bell, *ký hiệu là $B(n)$. Số Bell có thể được tính từ số Stirling loại hai nhờ công thức:*

$$B(n) = \sum_{i=1}^{n} S(n,i).$$

Số Bell thỏa mãn công thức truy hồi sau.

**Định lý 2.30.** *Với mọi số nguyên dương $n$:*

$$B(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B(k). \tag{2.17}$$

*Chứng minh.* Xét một phân hoạch của một tập hợp $A$ có $n+1$ phần tử. Giả sử $x$ là một phần tử của $A$ và $P$ là tập hợp con chứa $x$ trong phân hoạch. Khi đó, các tập hợp con khác của phân hoạch của $A$ tạo thành một phân hoạch của $A \setminus S$. Ta có quy trình sau để xây dựng một phân hoạch của $A$:

1. Chọn một số nguyên không âm $k \leq n$;
2. Chọn một tập hợp con $Q$ của $A \setminus \{x\}$ gồm $k$ phần tử;

3. Chọn một phân hoạch của $Q$;

4. Thêm $A \setminus Q$ vào phân hoạch vừa tìm được của $Q$.

Số phân hoạch của $A$ tạo được theo quy trình này là $\sum_k \leq nC(n,k)B(k)$. $\square$

### 2.3.4 Bóng giống hệt nhau, hộp giống hệt nhau

Mỗi cách xếp $n$ quả bóng giống hệt nhau vào những chiếc hộp giống hệt nhau tương ứng với một cách phân tích $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$, ở đó $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_k$ là các số nguyên dương. Một bộ số $n_1, n_2, \cdots, n_k$ như vậy được gọi là một *phân hoạch nguyên* của $n$ (thành $k$ thành phần).

**Ví dụ 2.19.** Có 7 phân hoạch nguyên của 5:

$$\begin{aligned}
5 &= 5 \\
&= 4 + 1 \\
&= 3 + 2 \\
&= 3 + 1 + 1 \\
&= 2 + 2 + 1 \\
&= 2 + 1 + 1 + 1 \\
&= 1 + 1 + 1 + 1 + 1\,.
\end{aligned}$$

Số phân hoạch nguyên của $n$ thành $k$ thành phân được ký hiệu là $p_k(n)$; số phân hoạch nguyên của $n$ được ký hiệu là $p(n)$: $p(n) = \sum_{1 \leq k \leq n} p_k(n)$. Chúng ta không biết công thức chính xác của $p(n)$, tuy nhiên có một số công thức xấp xỉ cho $p(n)$ khi $n \to \infty$.

# Chương 3

# Quan hệ truy hồi

Trong nhiều bài toán đếm, số lượng các đối tượng cần đếm phụ thuộc vào dữ liệu đầu vào, thường là một hàm của một số tự nhiên $n$. Khi đó, kết quả của bài toán đếm có thể được biểu diễn bằng một dãy số $(a_n)$. Chẳng hạn, số từ nhị phân có một độ dài xác định được biểu diễn bởi dãy $a_n = 2^n$, $n \geq 0$. Tuy nhiên, trừ những trường hợp đơn giản, việc tính trực tiếp công thức của số hạng tổng quát của một dãy như vậy bằng các kỹ thuật ở hai chương trước nói chung không khả thi. Trong chương này, chúng ta xem xét các cách tìm công thức của một số hạng dựa vào quan hệ của nó với các số hạng đứng trước nó. Một quan hệ như vậy được gọi là một *quan hệ truy hồi*.

## 3.1 Một số ví dụ về quan hệ truy hồi

Chúng ta bắt đầu với một ví dụ đơn giản.

**Ví dụ 3.1.** Với mọi số nguyên không âm $n$, gọi $S_n$ là tập hợp các từ nhị phân độ dài $n$, và $a_n$ là số phần tử của $S_n$. Gọi $T_n$ là tập hợp các từ của $S_n$ kết thúc bởi 0 và $U_n$ là tập hợp các từ của $S_n$ kết thúc bởi 1. Khi đó $S_n$ là hợp rời của $T_n$ và $U_n$, nên $a_n = |T_n| + |U_n|$. Mặt khác, với mọi $n \geq 1$, $T_n$ (tương ứng, $U_n$) gồm các từ được tạo thành bằng cách thêm chữ số 0 (tương ứng, 1) vào bên phải mỗi từ của $S_{n-1}$, do đó $|T_n| = |U_n| = a_{n-1}$. Suy ra

$$a_n = 2a_{n-1}\,, n \geq 1\,.$$

Một dãy $(a_n)$ thỏa mãn quan hệ truy hồi trên được xác định hoàn toàn khi chúng ta biết giá trị của số hạng đầu tiên $a_0$, gọi là *điều kiện ban đầu* của dãy.

Trong trường hợp cụ thể này, $a_0 = 1$, và $a_n = 2^n$ với mọi $n$. □

**Ví dụ 3.2** (Dãy Fibonacci)**.** Một cặp thỏ mới sinh (một đực một cái) được thả lên một hòn đảo. Giống thỏ này cần hai tháng để trưởng thành. Mỗi tháng, một cặp thỏ trưởng thành lại sinh ra một cặp thỏ khác. Gọi $f_n$ là số cặp thỏ

| Tháng ($n$) | Số cặp thỏ tháng trước ($f_{n-1}$) | Số cặp thỏ mới sinh ($f_{n-2}$) | Tổng ($f_n$) |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 1 | 0 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 2 |
| 4 | 2 | 1 | 3 |
| 5 | 3 | 2 | 5 |
| 6 | 5 | 3 | 8 |

Bảng 3.1: Một số giá trị đầu tiên của dãy Fibonacci.

trên đảo sau $n$ tháng. Chúng ta sẽ tìm một quan hệ truy hồi cho dãy $(f_n)$, giả sử không có cặp thỏ nào chết đi.

Một số giá trị đầu tiên của dãy được cho trong Bảng 3.1.

Một quan hệ truy hồi cho dãy $(f_n)$ được thiết lập dựa vào quan sát sau. Số thỏ tăng thêm ở mỗi tháng bằng số thỏ ít nhất 2 tháng tuổi tại thời điểm đó, tức là số thỏ đã có ở trên đảo 2 tháng trước đó, và bằng $f_{n-2}$. Do đó, dãy $(f_n)$ thỏa mãn quan hệ truy hồi:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}\,, n \geq 2\,. \tag{3.1}$$

Điều kiện ban đầu là $f_0 = 0, f_1 = 1$.

Dãy số thỏa mãn quan hệ truy hồi và điều kiện ban đầu trên được gọi là *dãy Fibonacci*. Số hạng $f_n$ được gọi là *số Fibonacci thứ n*. Dãy Fibonacci là một dãy số quan trọng trong tổ hợp cũng như trong Toán học nói chung. □

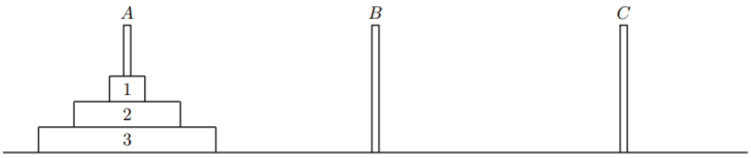
**Ví dụ 3.3** (Bài toán Tháp Hà Nội)**.** Trò chơi *Tháp Hà Nội* gồm có ba cọc gỗ và $n$ chiếc đĩa kích thước khác nhau có đục lỗ để lồng được vào các cọc gỗ (xem Hình 3.1). Luật chơi như sau:

- Ban đầu, tất cả đĩa được đặt ở cọc $A$, theo thứ tự đĩa to ở dưới, đĩa bé ở trên;
- Mỗi lượt chơi, người chơi chuyển *đĩa trên cùng* của một cọc sang một cọc khác;
- Trong toàn bộ các bước, không có đĩa nào được đặt trên một đĩa bé hơn.

Trò chơi kết thúc khi toàn bộ đĩa được chuyển sang cọc $C$. Gọi $h_n$ là số bước ít nhất để chuyển $n$ đĩa từ cọc $A$ sang cọc $C$. Chúng ta sẽ thiết lập một quan hệ truy hồi cho dãy $(h_n)$.

Ta đánh số các đĩa từ 1 đến $n$, theo kích thước tăng dần.

Để chuyển được chồng đĩa sang cột $C$, trước tiên ta phải chuyển $n-1$ đĩa trên cùng sang cột $B$ để có thể di chuyển được đĩa $n$ từ cột $A$ sang cột $C$.




Hình 3.1: Trò chơi Tháp Hà Nội, $n = 3$.

Việc chuyển $n-1$ đĩa trên cùng từ cột $A$ sang cột $B$ chính là trò chơi Tháp Hà Nội với $n-1$ đĩa (cột $B$ và cột $C$ có vai trò như nhau), do đó cần ít nhất $h_{n-1}$ bước.

Ta cần một bước để chuyển đĩa $n$ từ cột $A$ sang cột $C$.

Sau khi đĩa $n$ được chuyển sang cột $C$, ta cần chuyển chồng $n-1$ đĩa từ cột $B$ sang cột $C$. Việc này cũng cần $h_{n-1}$ bước.

Trò chơi kết thúc, và tổng số bước là $h_n = h_{n-1} + 1 + h_{n-1}$.

Vậy số bước ít nhất để kết thúc trò chơi thỏa mãn quan hệ truy hồi

$$h_n = 2h_{n-1} + 1\,, n \geq 2\,. \tag{3.2}$$

Điều kiện ban đầu là $h_1 = 1$.

Áp dụng liên tiếp (3.2), ta thu được:

$$\begin{aligned} h_n &= 2h_{n-1} + 1 = 4h_{n-2} + 2 + 1 = \dots \\ &= 2^{n-1}h_1 + 2^{n-2+\dots+2+1} \\ &= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2 + 1 \\ &= 2^n - 1\,. \end{aligned}$$

Bạn đọc cũng có thể chứng minh công thức $h_n = 2^n - 1$[1] bằng quy nạp theo $n$. □

Quan hệ truy hồi ở cả ba ví dụ đã xét đều là quan hệ truy hồi *tuyến tính*. Chúng ta kết thúc mục này với một ví dụ về quan hệ truy hồi không tuyến tính.

**Ví dụ 3.4** (Số Catalan)**.** Một cách đặt $n$ cặp dấu ngoặc hợp lệ là một cách sắp xếp $n$ dấu mở ngoặc "(" và $n$ dấu đóng ngoặc ")" sao cho mỗi dấu đóng ngoặc đều khớp với một dấu mở ngoặc *ở trước* (tức là bên trái) nó. Gọi $C_n$

[1]Một truyền thuyết kể rằng ở một tu viện huyền bí, các nhà sư thay nhau chuyển 64 chiếc đĩa vàng giữa ba chiếc cọc theo luật chơi của trò chơi Tháp Hà Nội. Ngày tận thế sẽ đến khi tất cả 64 chiếc đĩa được chuyển xong. Nếu các nhà sư mất trung bình một giây để chuyển một chiếc đĩa, và họ làm việc không ăn không ngủ, thì theo truyền thuyết này, thế giới sẽ bị hủy diệt sau $2^{64-1} \approx 18$ tỉ tỉ giây , tức là hơn 580 tỉ năm. Để dễ hình dung, tuổi thọ còn lại của Mặt Trời được ước tính cỡ 10 tỉ năm!

là số cách đặt $n$ cặp dấu ngoặc hợp lệ. Chẳng hạn, $C_2 = 2$ vì có hai cách đặt hai cặp dấu ngoặc hợp lệ, là "()()" và "(())".

Mỗi dãy $w$ gồm $n$ cặp dấu ngoặc có phân tích duy nhất dưới dạng $w = (u)v$, trong đó $u$ và $v$ cũng là các dãy dấu ngoặc (có thể là dãy trống). Hơn nữa, dãy $w$ là hợp lệ nếu và chỉ nếu cả hai dãy $u$ và $v$ là hợp lệ. Từ đó:

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}\,, n \geq 1\,. \tag{3.3}$$

Điều kiện ban đầu của dãy $(C_n)$ là $C_0 = C_1 = 1$.

Dãy $(C_n)$ được xác định bởi quan hệ truy hồi (3.3) và điều kiện ban đầu $C_0 = C_1 = 1$ được gọi là *dãy Catalan*. Đây là một dãy số xuất hiện nhiều trong các bài toán đếm. Công thức tổng quát của số Catalan $C_n$ được tính bằng phương pháp hàm sinh và sẽ được trình bày ở phần sau của chương này. □

## 3.2 Quan hệ truy hồi tuyến tính [2]

### 3.2.1 Quan hệ truy hồi tuyến tính thuần nhất

**Định nghĩa 3.1.** *Một* quan hệ truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc $k$ *là một quan hệ truy hồi có dạng*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}\,, \tag{3.4}$$

*ở đó $c_1, c_2, \ldots, c_k$ là các hằng số và $c_k \neq 0$.*

**Ví dụ 3.5.** Quan hệ truy hồi của dãy Fibonacci ở Ví dụ 3.1 là một quan hệ truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc 2. Quan hệ truy hồi của bài toán Tháp Hà Nội ở Ví dụ 3.1 là tuyến tính nhưng không thuần nhất vì có số hạng 1 ở vế phải. Quan hệ truy hồi của dãy Catalan ở Ví dụ 3.1 không phải là tuyến tính vì có các số hạng bậc 2.

Dễ thấy một dãy thỏa mãn một quan hệ truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc $k$ hoàn toàn được xác định bởi một bộ điều kiện ban đầu, tức là một bộ giá trị của $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$.

Khái niệm được định nghĩa tiếp theo có vai trò trung tâm trong việc giải các quan hệ truy hồi tuyến tính.

**Định nghĩa 3.2** (Phương trình đặc trưng)**.** Phương trình đặc trưng *của quan hệ truy hồi (3.4) là phương trình đa thức:*

$$x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \cdots - c_{k-1} x - c_k = 0\,. \tag{3.5}$$

[2]Đầy đủ là quan hệ truy hồi tuyến tính thuần nhất hệ số hằng. Tuy nhiên, vì ngữ cảnh ở đây đủ rõ ràng nên ta lược bỏ cụm từ "hệ số hằng" để tránh rườm rà.

*Các nghiệm của phương trình đặc trưng được gọi là các* nghiệm đặc trưng *của quan hệ truy hồi.*[3]

Chúng ta mô tả lời giải của quan hệ truy hồi tuyến tính bậc hai trước khi phát biểu cho bậc bất kỳ. Ta phân biệt hai trường hợp: phương trình đặc trưng có hai nghiệm phân biệt, và phương trình đặc trưng có nghiệm kép[4].

**Định lý 3.3.** *Giả sử phương trình $x^2 - c_1x - c_2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $r_1$ và $r_2$. Khi đó dãy $(a_n)$ thỏa mãn quan hệ truy hồi $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}\,, n \geq 2$ có số hạng tổng quát là*

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n\,, n \geq 0\,, \tag{3.6}$$

*ở đó $\alpha_1$ và $\alpha_2$ là các hằng số được xác định bởi các điều kiện ban đầu $a_0 = C_0, a_1 = C_1$.*

*Chứng minh.* Thay $a_{n-1} = \alpha_1 r_1^{n-1} + \alpha_2 r_2^{n-1}$ và $a_{n-2} = \alpha_1 r_1^{n-2} + \alpha_2 r_2^{n-2}$ và chú ý rằng $r_1^2 = c_1r_1 + c_2$ và $r_2^2 = c_1r_2 + c_2$, ta chứng minh được rằng $c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} = a_n$ với mọi $n \geq 2$.

Cho $n = 0$ và $n = 1$, ta có:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 & = C_0\,, \\ r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 & = C_1\,. \end{cases}$$

Với $r_1 \neq r_2$, hệ này luôn có nghiệm duy nhất:

$$\alpha_1 = \frac{C_1 - C_0r_2}{r_1 - r_2}\,, \alpha_2 = \frac{C_0r_1 - C_1}{r_1 - r_2}\,.$$

Vậy số hạng tổng quát của dãy $(a_n)$ là

$$a_n = \frac{C_1 - C_0r_2}{r_1 - r_2} r_1^n + \frac{C_0r_1 - C_1}{r_1 - r_2} r_2^n\,.$$

□

**Ví dụ 3.6.** Phương trình đặc trưng của dãy Fibonacci là $x^2 - x - 1 = 0$, có hai nghiệm phân biệt là $r_1 = (1 + \sqrt{5})/2$ và $r_2 = (1 - \sqrt{5})/2$. Do đó

$$f_n = \alpha_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \alpha_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n\,.$$

[3]Ý tưởng dẫn đến phương trình (3.5) là tìm kiếm một dãy thỏa mãn quan hệ truy hồi (3.4) có dạng cấp số nhân, tức là $a_n = r^n$, $r \neq 0$. Thay $a_n = r^n$ vào (3.4), chuyển vế và rút gọn, ta có $r$ là một nghiệm của (3.5).

[4]Các nghiệm có thể là số phức.

Các hằng số $\alpha_1$ và $\alpha_2$ thỏa mãn

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 & = f_0 = 0\,, \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\alpha_1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\alpha_2 & = f_1 = 1\,. \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm $\alpha_1 = 1/\sqrt{5}$, $\alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Vậy số hạng tổng quát của dãy Fibonacci là

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

□

**Định lý 3.4.** *Giả sử phương trình $x^2 - c_1x - c_2 = 0$ có nghiệm kép $r_0$. Khi đó dãy $(a_n)$ thỏa mãn quan hệ truy hồi $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}\,, n \geq 2$ có số hạng tổng quát là*

$$a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n\,, n \geq 0\,, \tag{3.7}$$

*ở đó $\alpha_1$ và $\alpha_2$ là các hằng số được xác định bởi các điều kiện ban đầu $a_0 = C_0, a_1 = C_1$.*

*Chứng minh.* Chứng minh của định lý này tương tự trường hợp có hai nghiệm đặc trưng phân biệt, và được dành cho bạn đọc như một bài tập. □

**Ví dụ 3.7.** Giải quan hệ truy hồi $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$, $n \geq 2$, với $a_0 = a_1 = 2$.

***Lời giải:*** Phương trình đặc trưng $x^2 - 4x + 4 = 0$ có nghiệm kép $r = 2$. Số hạng tổng quát của dãy có dạng $a_n = 2^n\alpha_1 + 2 \cdot 2^n\alpha_2$.

Các hệ số $\alpha_1$ và $\alpha_2$ thỏa mãn

$$\begin{cases} \alpha_1 & = a_0 = 2\,, \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 & = a_1 = 2\,. \end{cases}$$

Ta tính được $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = -1$.

Số hạng tổng quát của dãy là $a_n = 2^{n+1} - n2^n$. □

Tiếp theo, chúng ta trình bày cách giải quan hệ truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc $k$ bất kỳ. Định lý 3.5 có thể được coi là một trường hợp riêng của Định lý 3.6 với $k$ nghiệm bội 1. Chứng minh của các kết quả này tương tự các chứng minh cho trường hợp quan hệ bậc hai. Để chỉ ra sự tồn tại duy nhất của các hệ số với mọi bộ điều kiện ban đầu, bạn đọc có thể chỉ ra rằng hệ phương trình tuyến tính để xác định các hệ số đó có định thức khác 0.

**Định lý 3.5.** *Giả sử phương trình (3.5) có k nghiệm phân biệt $r_1, r_2, \ldots, r_k$. Khi đó, dãy $(a_n)$ thỏa mãn quan hệ truy hồi (3.4) có số hạng tổng quát là*

$$a_n = \sum_{1 \le i \le k} \alpha_i r_i^n \,, n \ge 0 \,, \tag{3.8}$$

*ở đó các $\alpha_i$ là các hằng số được xác định bởi các điều kiện ban đầu $a_0 = C_0, a_1 = C_1, \ldots, a_{k-1} = C_{k-1}$.*

**Định lý 3.6.** *Giả sử phương trình (3.5) có các nghiệm phân biệt $r_1, r_2, \ldots, r_t$ với bội lần lượt là $m_1, m_2, \ldots, m_t$ (tức là các số $m_i$ là các số nguyên dương và có tổng bằng k). Khi đó, dãy $(a_n)$ thỏa mãn quan hệ truy hồi (3.4) có số hạng tổng quát là*

$$a_n = \sum_{1 \le i \le t} p_i(n) r_i^n \,, n \ge 0 \,, \tag{3.9}$$

*ở đó mỗi $p_i$ là một đa thức bậc không quá $m_i - 1$, tức là*

$$p_i(n) = \sum_{j=0}^{m_i - 1} \alpha_{i,j} n^j \,.$$

*Các hệ số $\alpha_{i,j}$ là các hằng số được xác định bởi các điều kiện ban đầu $a_0 = C_0, a_1 = C_1, \ldots, a_{k-1} = C_{k-1}$.*

**Ví dụ 3.8.** Giải quan hệ truy hồi $a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$, với $a_0 = 1, a_1 = -2, a_2 = -1$.

***Lời giải:*** Phương trình đặc trưng $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$ có một nghiệm bội 3 là $r = -1$. Số hạng tổng quát của dãy có dạng

$$a_n = \alpha_{1,0}(-1)^n + \alpha_{1,1} n(-1)^n + \alpha_{1,2} n^2 (-1)^n \,.$$

Các hệ số $\alpha_{1,0}, \alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} \alpha_{1,0} & = 1 \,, \\ -\alpha_{1,0} - \alpha_{1,1} - \alpha_{1,2} & = -2 \,, \\ \alpha_{1,0} + 2\alpha_{1,1} + 4\alpha_{1,2} & = -1 \,. \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm $\alpha_{1,0} = 1, \alpha_{1,1} = 3, \alpha_{1,2} = -2$.

Vậy $a_n = (1 + 3n - 2n^2)(-1)^n$, $n \ge 0$. □

### 3.2.2 Quan hệ truy hồi tuyến tính không thuần nhất

Trong mục này, chúng ta xét các quan hệ truy hồi tuyến tính bậc $k$ có dạng

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n)\,, \tag{3.10}$$

trong đó $c_k \neq 0$ và $F(n)$ là một hàm khác 0 của $n$.

Quan hệ truy hồi $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$ được gọi là *quan hệ truy hồi thuần nhất liên kết* với quan hệ truy hồi (3.10). Mối liên hệ giữa nghiệm của một quan hệ truy hồi không thuần nhất dạng (3.10) và quan hệ truy hồi thuần nhất liên kết với nó được cho bởi định lý sau đây.

**Định lý 3.7.** *Nếu $(a_n^{(p)})$ là một nghiệm đặc biệt của quan hệ truy hồi không thuần nhất (3.10), thì mọi nghiệm của (3.10) đều có dạng $(a_n^{(p)+a_n^{(h)}})$, ở đó $(a_n^{(h)})$ là một nghiệm của quan hệ truy hồi thuần nhất liên kết với (3.10).*

*Chứng minh.* Bạn đọc có thể dễ dàng kiểm tra hai khẳng định sau bằng việc cộng hay trừ hai vế của các quan hệ truy hồi:

1. Nếu $(a_n^{(p)})$ thỏa mãn (3.10) và $(a_n^{(h)})$ thỏa mãn (3.4), thì $(a_n^{(p)} + a_n^{(h)})$ thỏa mãn (3.10).

2. Nếu $(b_n)$ thỏa mãn (3.10), thì $(a_n^{(p)} - b_n)$ thỏa mãn (3.4).

□

Như vậy, một quan hệ truy hồi không thuần nhất dạng (3.10) sẽ được giải nếu ta biết một nghiệm đặc biệt $(a_n^{(p)})$ của nó. Định lý sau mô tả một nghiệm đặc biệt của quan hệ truy hồi (3.10) cho một lớp hàm $F(n)$. Chứng minh được dành cho bạn đọc như một bài tập.

**Định lý 3.8.** *Xét quan hệ truy hồi (3.10). Giả sử $F(n)$ có dạng $F(n) = Q(n)s^n$, với $Q$ là một đa thức bậc $t$ và $s$ là một hằng số khác 0.*

1. *Nếu $s$ không phải là nghiệm đặc trưng của quan hệ truy hồi thuần nhất liên kết, thì (3.10) có một nghiệm đặc biệt có dạng $a_n^{(p)} = q(n)s^n$, ở đó $q$ là một đa thức bậc không quá $t$.*

2. *Nếu $s$ là một nghiệm đặc trưng bội $m$ của quan hệ truy hồi thuần nhất liên kết, thì (3.10) có một nghiệm đặc biệt có dạng $a_n^{(p)} = n^m q(n)s^n$, ở đó $q$ là một đa thức bậc không quá $t$.*

Khi sử dụng Định lý 3.8, chúng ta cần lưu ý rằng nếu $F$ là một đa thức thì $s = 1$, mặc dù thừa số $1^n$ không xuất hiện.

**Ví dụ 3.9.** Tìm một công thức rút gọn của tổng $1 + 2 + \cdots + n$.

***Lời giải:*** Đặt $a_n = 1 + 2 + \cdots + n$. Dãy $(a_n)$ thỏa mãn quan hệ truy hồi tuyến tính không thuần nhất

$$a_n = a_{n-1} + n\,, n \geq 2\,,$$

với điều kiện ban đầu $a_1 = 1$.

Quan hệ truy hồi tuyến tính tương ứng, $a_n = a_{n-1}$, có nghiệm đặc trưng $r = 1$ và có lời giải $a_n^{(h)} = \alpha$, với $\alpha$ là một hằng số.

Quan hệ truy hồi không thuần nhất có $F(n) = n \cdot 1^n$. Do $s = 1$ là một nghiệm đặc trưng bội 1 của quan hệ thuần nhất liên kết, chúng ta sẽ tìm một nghiệm đặc biệt của quan hệ truy hồi không thuần nhất có dạng $a_n^{(p)} = n(\beta_1 n + \beta_0)1^n = \beta_1 n^2 + \beta_0 n$.

Thay vào đẳng thức $a_n^{(p)} = a_{n-1}^{(p)} + n$, ta thu được $(2\beta_1 - 1)n + (\beta_0 - \beta_1) = 0$. Do điều này đúng với mọi $n \geq 2$ nên $2\beta_1 - 1 = \beta_0 - \beta_1 = 0$, hay $\beta_0 = \beta_1 = 1/2$:

$$a_n^{(p)} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\,.$$

Như vậy, nghiệm tổng quát của quan hệ truy hồi $a_n = a_{n-1} + n$ có dạng

$$a_n^{(p)} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + c\,.$$

Sử dụng điều kiện ban đầu $a_1 = 1$, ta có $c = 0$.

Vậy $1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$. □

## 3.3 Hàm sinh và một số ứng dụng

Hàm sinh là công cụ rất mạnh trong tổ hợp. Trong mục này, chúng ta tìm hiểu cách sử dụng hàm sinh để giải quyết một số bài toán đếm, cũng như để giải các quan hệ truy hồi.

### 3.3.1 Hàm sinh – chuỗi lũy thừa hình thức

**Định nghĩa 3.9.** Hàm sinh (thường) *của dãy* $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ *là chuỗi vô hạn*

$$G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,. \tag{3.11}$$

Một dãy hữu hạn có thể được coi là một dãy vô hạn sao cho tất cả các số hạng từ một chỉ số nào đó trở đi đều bằng 0. Như vậy, hàm sinh của một dãy hữu hạn gồm $m$ phần tử là một đa thức bậc không quá $m$.

**Ví dụ 3.10.** Hàm sinh của dãy $a_n = 2$ là $G_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2x^n$.

Hàm sinh của dãy $b_n = n$ là $G_b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n$. □

**Ví dụ 3.11.** Hàm sinh của dãy $1, 1, 1, 1$ là $1 + x + x^2 + x^3 = (x^4 - 1)/(x - 1)$.

Với $m$ là một số nguyên dương, hàm sinh của dãy $\binom{m}{0}, \binom{m}{1}, \cdots, \binom{m}{m}$ là

$$G(x) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k = (1 + x)^m .$$

□

Cần nhấn mạnh rằng mặc dù được gọi là "hàm", nhưng hàm sinh không phải là một hàm số. Chuỗi lũy thừa trong định nghĩa của hàm sinh là **chuỗi lũy thừa hình thức**, nghĩa là chúng ta không xét đến các tính chất giải tích như sự hội tụ hay phân kỳ. Tuy nhiên, chúng ta áp dụng các quy tắc tính toán trên các chuỗi lũy thừa hình thức *như thể* chúng thỏa mãn đủ các điều kiện để thực hiện các phép toán đó.

**Định nghĩa 3.10.** *Cho chuỗi lũy thừa hình thức* $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *và* $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ *và số thực* $\lambda$. *Các phép toán* cộng hai chuỗi lũy thừa, nhân một chuỗi lũy thừa với vô hướng, nhân hai chuỗi lũy thừa, *và* lấy đạo hàm của một chuỗi lũy thừa *lần lượt được định nghĩa như sau:*

$$F(x) + G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n , \tag{3.12}$$

$$\lambda F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n) x^n , \tag{3.13}$$

$$F(x)G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} \right) x^n , \tag{3.14}$$

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1) a_{n+1} x^n . \tag{3.15}$$

Bạn đọc có thể dễ dàng kiểm tra rằng phép cộng và phép nhân hai chuỗi lũy thừa thỏa mãn các tính chất giao hoán, kết hợp và phân phối của phép nhân đối với phép cộng. Ngoài ra, nếu $a_0 \neq 0$ thì chuỗi lũy thừa $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ là *khả nghịch*, nghĩa là tồn tại duy nhất một chuỗi lũy thừa $G(x)$ sao cho $F(x)G(x) = 1$; ta nói rằng $G(x)$ là *nghịch đảo* của $F(x)$ và ký hiệu $G(x) = F(x)^{-1}$.

**Ví dụ 3.12** (Chuỗi Maclaurin)**.** Xét dãy $a_n = 1$ với mọi $n$. Hàm sinh của dãy, $F(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$, được gọi là *chuỗi Maclaurin*.

Ta có $F(x) = 1/(1 - x)$, vì $(1 - x)F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1$.

Lấy đạo hàm của $F(x)$, ta có:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n + 1) x^n = F'(x) = \left( \frac{1}{1 - x} \right)' = \frac{1}{(1 - x)^2} .$$

Suy ra hàm sinh của dãy $b_n = n + 1$ là $1/(1-x)^2$. □

Ta cũng có thể tìm được khai triển chuỗi lũy thừa của $1/(1-x)^2$ bằng cách tính $F(x)^2$ hoặc viết $1/(1-x)^2 = (1-x)^{-2}$ và sử dụng *Định lý nhị thức mở rộng* được giới thiệu sau đây.

Xét khai triển của $(1+x)^n$:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k .$$

Để ý rằng $\binom{n}{k} = 0$ với $k > n$, ta có thể viết lại khai triển trên dưới dạng chuỗi lũy thừa như sau:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k .$$

Như vậy, $(1+x)^n$ là hàm sinh của dãy $\binom{n}{k}, k \geq 0$. Điều này có thể được mở rộng điều này cho số mũ thực, nhưng trước hết ta cần định nghĩa *hệ số nhị thức mở rộng.*

**Định nghĩa 3.11.** Hệ số nhị thức mở rộng $\binom{\alpha}{k}$, *ở đó $\alpha$ là một số thực và $k$ là một số nguyên không âm, được định nghĩa bởi công thức:*

$$\binom{\alpha}{k} = \begin{cases} \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)/k! \text{ nếu } k > 0\,, \\ 1 \text{ nếu } k = 0\,. \end{cases} \tag{3.16}$$

**Ví dụ 3.13.** Cho $\alpha = 1/2$ trong (3.16), ta có, với $k \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\binom{1/2}{k} &= \frac{1/2\,(1/2-1)\,(1/2-2)\ldots(1/2-k+1)}{k!} \\
&= \frac{1}{2^k} \times \frac{1(-1)(-3)\ldots(-2k+3)}{k!} \\
&= \frac{(-1)^{k-1}}{2^k} \times \frac{1\cdot 3\ldots(2k-3)}{k!} \\
&= \frac{(-1)^{k-1}}{2^k} \times \frac{1\cdot 3\ldots(2k-3)\cdot 2\cdot 4\ldots(2k-2)}{k!2\cdot 4\ldots(2k-2)} \\
&= \frac{(-1)^{k-1}}{2^k} \times \frac{(2k-2)!}{k!2^{k-1}(k-1)!} \\
&= \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}k} \times \frac{(2k-2)!}{(k-1)!(k-1)!} \\
&= \frac{(-1)^{k-1}}{4^{k-1}(2k)} \binom{2k-2}{k-1}.
\end{aligned}$$

Vậy

$$\binom{1/2}{k} = \frac{(-1)^{k-1}}{4^{k-1}(2k)} \binom{2k-2}{k-1}. \quad \square$$

| Hàm sinh | Chuỗi lũy thừa | Số hạng tổng quát $a_n$ |
|---|---|---|
| $(1+x)^m$ | $\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}x^n$ | $\binom{m}{n}$ nếu $n \le m$; 0 nếu $n > m$ |
| $\frac{1}{1-x}$ | $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ | 1 |
| $e^x$ | $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$ | $\frac{1}{n!}$ |
| $\ln(1+x)$ | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$ | $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ nếu $n \ge 1$; $a_0 = 0$ |

Bảng 3.2: Một số hàm sinh cơ bản.

**Định lý 3.12** (Định lý nhị thức mở rộng)**.** *Với mọi số thực $\alpha$:*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k. \tag{3.17}$$

**Ví dụ 3.14.** Tìm khai triển chuỗi lũy thừa của $\sqrt{1+x}$.

***Lời giải:*** Viết $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$, sử dụng định lý nhị thức mở rộng và kết quả ở Ví dụ 3.13, ta thu được:

$$\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/2}{k}x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{4^{k-1}(2k)}\binom{2k-2}{k-1}x^k.$$

□

Khai triển chuỗi lũy thừa của một số hàm sinh cơ bản được cho trong bảng 3.2.

### 3.3.2 Một số ví dụ về đếm bằng hàm sinh

Hàm sinh là một công cụ mạnh để giải quyết nhiều bài toán đếm.

**Ví dụ 3.15.** Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1+x_2+x_3 = 10$ thỏa mãn $2 \le x_1 \le 4$, $3 \le x_2 \le 5$ và $x_3$ chia hết cho 3.

***Lời giải:*** Các giá trị có thể của $x_1$ là $2, 3, 4$, và hàm sinh tương ứng là $x^2 + x^3 + x^4$. Tương tự, hàm sinh tương ứng với $x_2$ là $x^3 + x^4 + x^5$, và của $x_3$ là $1 + x^3 + x^6 + \cdots$.

Xét

$$F(x) = (x^2 + x^3 + x^4)(x^3 + x^4 + x^5)(1 + x^3 + x^6 + \cdots)\,.$$

Mỗi nghiệm của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ thỏa mãn các điều kiện đã cho tương ứng với một cách chọn một số hạng trong mỗi tổng sao cho tích của chúng bằng 10. Như vậy, số nghiệm cần thỏa mãn các điều kiện chính bằng hệ số của $x^{10}$ trong khai triển chuỗi lũy thừa của $F(x)$.

Bạn đọc có thể kiểm tra rằng hệ số của $x^{10}$ trong khai triển chuỗi lũy thừa của $F(x)$ là 3. Vậy phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ có 3 nghiệm thỏa mãn các điều kiện đã cho. □

**Ví dụ 3.16.** Tìm số cách xếp $n$ quả bóng giống nhau vào $k$ cái hộp khác nhau sao cho không có hộp nào rỗng.

***Lời giải:*** Do mỗi hộp có ít nhất 1 quả bóng nên số bóng trong mỗi hộp được biểu diễn bởi hàm sinh $x + x^2 + x^3 + \cdots =$. Số cách xếp bóng sẽ là hệ số của $x^n$ trong khai triển của hàm sinh

$$F(x) = (x + x^2 + x^3 + \cdots)^k = \left(\frac{x}{1-x}\right)^k = x^k(1-x)^{-k}\,.$$

Áp dụng công thức nhị thức mở rộng, ta có:

$$(1-x)^{-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-k}{n}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k+n-1}{n} x^n\,.$$

(Ta đã sử dụng đẳng thức $\binom{-k}{n} = (-1)^n\binom{k+n-1}{n}$; việc chứng minh đẳng thức này được dành cho bạn đọc.)

Thay vào $F(x)$ và đổi chỉ số, ta được:

$$F(x) = \sum_{i=k}^{\infty} \binom{i-1}{i-k} x^i\,.$$

Vậy số cách xếp $n$ quả bóng giống nhau vào $k$ cái hộp khác nhau sao cho không hộp nào rỗng là $\binom{n-1}{n-k}$. □

### 3.3.3 Một số ví dụ về giải quan hệ truy hồi bằng hàm sinh

Chúng ta bắt đầu với một ví dụ quen thuộc, dãy Fibonacci.

**Ví dụ 3.17.** Nhắc lại rằng dãy Fibonacci được cho bởi quan hệ truy hồi $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ với $n \geq 2$ và $f_0 = 0, f_1 = 1$. Gọi $F(x)$ là hàm sinh của dãy:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \,.$$

Ta viết lại $F(x)$ sử dụng hệ thức truy hồi:

$$\begin{aligned} F(x) &= f_0 + f_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} (f_{n-1} + f_{n-2})\, x^n \\ &= x + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} x^n + \sum_{n=2} f_{n-2} x^n \\ &= x + \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^{n+2} \\ &= x + x\,(F(x) - f_0) + x^2 F(x)\,. \end{aligned}$$

Từ đó:

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}\,.$$

Để tìm khai triển của biểu thức này dưới dạng chuỗi lũy thừa, ta sẽ viết lại nó dưới dạng:

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{A}{x - r_1} + \frac{B}{x - r_2}\,,$$

ở đó $r_1 = (-1 + \sqrt{5})/2$ và $r_2 = (-1 - \sqrt{5})/2$ là các nghiệm của $1 - x - x^2$.

Đồng nhất hai vế, ta thu được hệ:

$$\begin{cases} A + B & = -1\,, \\ Ar_2 + Br_1 = 0\,. \end{cases}$$

Nghiệm của hệ này là:

$$A = \frac{-r_1}{r_1 - r_2}\,, \quad B = \frac{r_2}{r_1 - r_2}\,.$$

Từ đó suy ra:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{r_1 - r_2} \left( \frac{1}{1 - \frac{x}{r_1}} - \frac{1}{1 - \frac{x}{r_2}} \right) \\ &= \frac{1}{r_1 - r_2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \left(\frac{1}{r_1}\right)^n - \left(\frac{1}{r_2}\right)^n \right) x^n \,. \end{aligned}$$

Số Fibonacci thứ $n$ là:

$$f_n = \frac{1}{r_1 - r_2} \left( \left(\frac{1}{r_1}\right)^n - \left(\frac{1}{r_2}\right)^n \right)\,.$$

Thay các giá trị của $r_1, r_2$ vào, ta thu được:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n .$$

□

**Ví dụ 3.18.** Đặt $s_n = 1 + 2 + \cdots + n$, tổng của $n$ số nguyên dương đầu tiên. Ta sẽ dùng hàm sinh để tìm một công thức tổng quát của $s_n$.

Dãy $(s_n)$ thỏa mãn quan hệ truy hồi $s_n = s_{n-1} + n$ với $n \geq 1$, điều kiện ban đầu là $s_0 = 0$. Gọi $G(x)$ là hàm sinh của dãy. Ta có:

$$\begin{aligned} G(x) &= 0 + \sum_{n=1}^{\infty}(s_{n-1}+n)x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} s_{n-1}x^n + x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \\ &= xG(x) + \frac{x}{(1-x)^2} . \end{aligned}$$

(Ở dòng cuối, ta đã sử dụng kết quả trong Ví dụ 3.3.1.) Suy ra:

$$G(x) = \frac{x}{(1-x)^3} .$$

Để tìm khai triển của $1/(1-x)^3 = (1-x)^{-3}$, ta có thể dùng công thức nhị thức mở rộng, hoặc lấy đạo hàm của chuỗi $(1-x)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$. Việc hoàn thiện chi tiết được dành cho bạn đọc. Kết quả là

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} x^n . \quad \square$$

Chúng ta kết thúc với một ví dụ về quan hệ truy hồi *không tuyến tính*.

**Ví dụ 3.19.** Trong ví dụ này, chúng ta sẽ tìm công thức tổng quát của số Catalan. Nhắc lại rằng dãy Catalan $(C_n)$ thỏa mãn quan hệ truy hồi:

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k} \, , n \geq 1 \, ,$$

với điều kiện ban đầu $C_0 = 1$.

Đặt $C(x)$ là hàm sinh của dãy. Để ý rằng $\sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}$ chính là hệ số thứ $n-1$ trong khai triển của tích $C(x)C(x)$:

$$\begin{aligned} C(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k} \right) x^n \\ &= 1 + x \left( \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k} \right) x^{n-1} \right) \\ &= 1 + x \left( \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k} \right) x^n \right) \\ &= 1 + xC(x)^2 \end{aligned}$$

Suy ra $xC(x)^2 - C(x) + 1 = 0$. Coi đây là phương trình bậc 2 đối với $C(x)$, ta có:

$$C(x) = \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x} \text{ hoặc } C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Áp dụng công thức nhị thức mở rộng và Ví dụ 3.13, ta thu được:

$$\sqrt{1-4x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n} \binom{2n-2}{n-1} x^n .$$

Suy ra nghiệm thứ nhất, $(1+\sqrt{1-4x})/2x$, không phải là một chuỗi lũy thừa (tức là chỉ chứa các số hạng có số mũ nguyên không âm). Vậy:

$$\begin{aligned} C(x) &= \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} x^n . \end{aligned}$$

Công thức của số Catalan thứ $n$ là:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}. \quad \square$$

# Chương 4

# Một số kỹ thuật khác

Trong phần đầu chương này, chúng ta sẽ xem xét cách sử dụng nguyên lý Dirichlet (hay nguyên lý chuồng bồ câu, nguyên lý ngăn khéo, v.v.) để giải một số bài toán tồn tại. Trong phần thứ hai, chúng ta sẽ giới thiệu nguyên lý bù trừ và cách sử dụng để giải một số bài toán đếm.

## 4.1 Nguyên lý Dirichlet

**Định lý 4.1** (Nguyên lý Dirichlet)**.** *Nếu cho $n$ quả bóng vào $k$ chiếc hộp, thì có ít nhất một chiếc hộp chứa ít nhất $\lceil n/k \rceil$ quả bóng, ở đó $\lceil x \rceil$ là số nguyên nhỏ nhất không nhỏ hơn $x$.*

*Chứng minh.* Giả sử tất cả các hộp đều có không quá $\lceil n/k \rceil - 1$ quả bóng. Khi đó tổng số bóng không lớn hơn:

$$k\left(\lceil n/k \rceil - 1\right) < k\left((n/k + 1) - 1\right) = n\,,$$

mâu thuẫn! □

**Ví dụ 4.1.** Sau đây là một số ví dụ áp dụng trực tiếp nguyên lý Dirichlet:

- Trong một nhóm 30 người, chắc chắn có ít nhất 3 người sinh cùng tháng (vì có 12 tháng, và $30 = 2 \cdot 12 + 6$).
- Một ánh xạ từ một tập hợp có $m$ phần tử vào một tập hợp có $n$ phần tử với $m > n$ chắc chắn không phải là đơn ánh (vì có ít nhất 2 phần tử có cùng ảnh).
- Trong 3 quân bài được lấy ngẫu nhiên từ một bộ bài chuẩn 52 quân, chắc chắn có ít nhất 2 quân cùng màu (cùng đỏ hoặc cùng đen).

**Ví dụ 4.2.** Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 2$, trong $n + 1$ số nguyên bất kỳ, luôn tìm được ít nhất hai số có hiệu chia hết cho $n$.

***Lời giải:*** Ta nhận xét rằng hai số nguyên có hiệu chia hết cho $n$ nếu và chỉ nếu chúng có cùng số dư khi chia cho $n$. Ta sẽ chọn các "hộp" đại diện cho các số dư của một số nguyên khi chia cho $n$: có $n$ "hộp" tương ứng với các số dư $0, 1, \cdots, n-1$. Theo nguyên lý Dirichlet, có $n+1$ "quả bóng" được xếp vào $n$ "hộp", do đó có ít nhất hai "quả bóng" nằm trong cùng một "hộp", tức là có ít nhất hai số có cùng số dư khi chia cho $n$. □

Trong hầu hết các ứng dụng tinh tế hơn của nguyên lý Dirichlet, các tập hợp "bóng" và "hộp" không hiển nhiên mà cần được xác định, thậm chí cần được xây dựng.

**Ví dụ 4.3.** Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n$, tồn tại một bội số của $n$ được viết bởi toàn các chữ số 0 và 1.

***Lời giải:*** Xét tập hợp $S = \{1, 11, \cdots, 11\ldots1\ (n+1 \text{ chữ số } 1)\}$. Theo ví dụ trước, tồn tại hai số của $S$ có hiệu chia hết cho $n$. Hiệu của hai số này là một bội của $n$ gồm toàn các chữ số 0 và 1. □

**Ví dụ 4.4.** Chứng minh rằng trong một nhóm $n$ người bất kỳ, chắc chắn tìm được hai người có cùng số người quen trong nhóm.

***Lời giải:*** Ta xếp $n$ người này vào các nhóm nhỏ theo số người quen trong nhóm; có $n$ nhóm nhỏ: không quen ai, quen 1 người, quen 2 người, ..., quen tất cả. Có $n$ nhóm, bằng số người, nên ta chưa thể áp dụng nguyên lý Dirichlet. Tuy nhiên, để ý rằng do tính đối xứng của quan hệ "quen nhau", hai nhóm "không quen ai" và "quen tất cả" không thể đồng thời có người. Nói cách khác, chỉ có không quá $n-1$ nhóm không rỗng, do đó có ít nhất hai người thuộc cùng một nhóm, tức là có cùng số người quen. □

Chúng ta kết thúc mục này với một bài toán kinh điển.

**Ví dụ 4.5.** Chứng minh rằng trong một nhóm 6 người bất kỳ, luôn tìm được hoặc ba người đôi một quen nhau, hoặc ba người đôi một không quen nhau.

***Lời giải:*** Gọi $P_1$ là một người bất kỳ trong 6 người. Trong 5 người còn lại, hoặc có ít nhất 3 người cùng quen $P_1$, hoặc có ít nhất 3 người cùng không quen $P_1$. Không mất tính tổng quát, giả sử xảy ra trường hợp thứ nhất, và gọi $P_2, P_3, P_4$ là 3 người cùng quen $P_1$. Nếu trong $P_2, P_3, P_4$ có hai người quen nhau, thì hai người này cùng với $P_1$ tạo thành một bộ ba đôi một quen nhau; nếu không thì $P_2, P_3, P_4$ là một bộ ba đôi một không quen nhau. □

## 4.2 Nguyên lý bù trừ

Ở chương 1, chúng ta đã giới thiệu quy tắc trừ, được áp dụng để tính số phần tử của hợp của hai tập hợp. Trong chương này, chúng ta xét quy tắc tổng quát cho một số hữu hạn bất kỳ các tập hợp.

**Định lý 4.2.** *Giả sử $S_1, S_2, \cdots, S_n$ là các tập hợp hữu hạn. Khi đó:*

$$\begin{aligned}|S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n| = \sum_{i=1}^{n} |S_i| - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} |S_{i_1} \cap S_{i_2}| + \cdots \\ + (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} |S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \cdots \cap S_{i_k}| + \cdots \\ + (-1)^{n+1} |S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n| \,. \end{aligned} \qquad (4.1)$$

*Chứng minh.* Ta chứng minh đẳng thức (4.1) bằng một lập luận tổ hợp. Ta sẽ chỉ ra rằng mỗi phần tử $x$ của $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$ được đếm đúng một lần ở vế phải.

Giả sử $x$ thuộc vào $m$ tập hợp trong các tập hợp $S_i$. Nhận xét rằng $x$ được đếm trong số hạng $|S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \cdots \cap S_{i_k}|$ nếu và chỉ nếu cả $k$ tập hợp này chứa $x$. Có $C(m,k)$ cách chọn một bộ $k$ tập hợp như vậy từ $m$ tập hợp chứa $x$, do đó $x$ đóng góp $(-1)^{k+1}C(m,k)$ vào tổng $(-1)^{k+1} \sum\limits_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} |S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \cdots \cap S_{i_k}|$.

Cho $k$ chạy từ 1 đến $n$, ta có tổng số lần $x$ được đếm ở vế phải của (4.1) là:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{m}{k} = 1 - \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k = 1 - (1-1)^m = 1 \,.$$

□

Công thức (4.1) cũng có thể được chứng minh bằng cách quy nạp theo $n$, chi tiết được dành cho bạn đọc như một bài tập.

**Ví dụ 4.6.** Có bao nhiêu số nguyên dương không quá 1000 chia hết cho 3, 5 hoặc 7?

***Lời giải:*** Gọi $A, B, C$ lần lượt là các tập hợp các số nguyên dương không quá 1000 chia hết cho 3, 5, 7. Ta áp dụng nguyên lý bù trừ để tính $|A \cup B \cup C|$.

Ta có: $|A| = \lfloor 1000/3 \rfloor = 333, |B| = \lfloor 1000/5 \rfloor = 200, |C| = \lfloor 1000/7 \rfloor = 142$.

Vì 3, 5, 7 nguyên tố cùng nhau đôi một nên $A \cap B$, $B \cap C$, $C \cap A$ lần lượt là các tập hợp các số nguyên dương không quá 1000 chia hết cho 15, 35 và 21:

$$|A \cap B| = \lfloor 1000/15 \rfloor = 66, |B \cap C| = \lfloor 1000/35 \rfloor = 28, |C \cap A| = \lfloor 1000/21 \rfloor = 47 \,.$$

Cuối cùng, $|A \cap B \cap C| = \lfloor 1000/105 \rfloor = 9$, và

$$|A \cup B \cup C| = 333 + 200 + 142 - 66 - 28 - 47 + 9 = 543 \,.$$

□

Trong nhiều bài toán đếm, ta thường sử dụng dạng phủ định của nguyên lý bù trừ. Cụ thể, nếu $S$ là một tập hợp hữu hạn và $S_1, S_2, \cdots, S_n$ là các tập hợp con của $S$, thì

$$\begin{aligned}|\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \cdots \cap \overline{S_n}| = |S| - \sum_{i=1}^{n} |S_i| + \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} |S_{i_1} \cap S_{i_2}| + \cdots \\ + (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} |S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \cdots \cap S_{i_k}| + \cdots \\ + (-1)^n |S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n| \,.\end{aligned}$$

**Ví dụ 4.7.** Có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ thỏa mãn $x_1 \le 3, x_2 \le 4, x_3 \le 5$?

***Lời giải:*** Gọi $S$ là tập hợp các nghiệm nguyên không âm và $S_1, S_2, S_3$ lần lượt là các tập hợp các nghiệm nguyên không âm thỏa mãn $x_1 \ge 4$, $x_2 \ge 5$, $x_3 \ge 6$ của phương trình đang xét.

Ta có $|S| = C(3 + 10 - 1, 10) = 66$, $|S_1| = C(3 + 6 - 1, 6) = 28$, $|S_2| = C(3+5-1, 5) = 21$, $|S_3| = C(3+4-1, 4) = 15$, $|S_1 \cap S_2| = C(3+1-1, 1) = 3$, $|S_3 \cap S_1| = C(3 + 0 - 1, 0) = 1$, $|S_2 \cap S_3| = 0$, và $|S_1 \cap S_2 \cap S_3| = 0$.

Số nghiệm trong $S$ thỏa mãn $x_1 \le 2, x_2 \le 3, x_3 \le 4$ là:

$$66 - 28 - 21 - 15 + 3 + 1 + 0 - 0 = 6\,.$$

□

### 4.2.1 Số toàn ánh và số Stirling loại hai

**Định lý 4.3.** *Giả sử $A$ là một tập hợp có $n$ phần tử và $B$ là một tập hợp có $k$ phần tử, với $n \ge k > 0$. Số toàn ánh từ $A$ vào $B$ được cho bởi công thức:*

$$k^n - \binom{k}{1}(k-1)^n + \binom{k}{2}(k-2)^n - \cdots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k-1} \cdot 1^n\,. \tag{4.2}$$

*Chứng minh.* Giả sử $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_k\}$.

Ta áp dụng dạng phủ định của nguyên lý bù trừ với $S$ là tập hợp tất cả các ánh xạ từ $A$ vào $B$, $S_i$, $1 \le i \le k$, là tập hợp các ánh xạ *không chứa* $b_i$. Việc hoàn thành chứng minh chi tiết được dành cho bạn đọc. □

Công thức của số Stirling loại hai $S(n, k)$ được cho ở Định lý 2.25 là một hệ quả của Định lý 4.3 trên và Định lý 2.26.

### 4.2.2 Hoán vị mất thứ tự

**Định nghĩa 4.4.** *Một* hoán vị mất thứ tự của $n$ phần tử *là một hoán vị* $\sigma$ *của* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *thỏa mãn* $\sigma(i) \neq i$ *với mọi* $i = 1, 2, \ldots, n$.

*Số hoán vị mất thứ tự của n phần tử được ký hiệu là* $D_n$.

Số hoán vị mất thứ tự $D_n$ có thể được tính bằng nguyên lý bù trừ.

**Định lý 4.5.** *Số hoán vị mất thứ tự của n phần tử được cho bởi công thức sau:*

$$D_n = n! + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\,. \tag{4.3}$$

*Chứng minh.* Ta áp dụng nguyên lý bù trừ dạng phủ định, với $S$ là tập hợp tất cả các hoán vị của $\{1, 2, \ldots, n\}$, và $S_i$, $1 \leq i \leq n$, là tập hợp các hoán vị giữ nguyên vị trí của $i$. Bạn đọc có thể dễ dàng kiểm tra rằng:

$$D_n = n! + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (n-k)!\,.$$

Thay công thức hệ số nhị thức vào và rút gọn, ta thu được (4.3). □

Từ công thức trên, xác suất để một hoán vị được chọn ngẫu nhiên là mất thứ tự là

$$\frac{D_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\,.$$

Xác suất này tiến tới $e^{-1} \approx 0{,}37$ khi $n \to \infty$.

# Phần II

# Đồ thị

# Chương 5

# Các khái niệm cơ bản về đồ thị

Đồ thị là một mô hình toán học được sử dụng rộng rãi để biểu diễn các mối quan hệ trong các cấu trúc rời rạc. Lý thuyết đồ thị đặc biệt phát triển từ thế kỷ 20, với những ứng dụng trong viễn thông, khoa học máy tính, và gần đây là các mạng xã hội, v.v. Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những khái niệm cơ bản, cũng như một số bài toán cổ điển trong lý thuyết đồ thị.

## 5.1 Những khái niệm cơ bản

**Định nghĩa 5.1** (Đồ thị vô hướng)**.** *Một* đồ thị (vô hướng) $G = (V, E)$ *được cho bởi:*

- *một tập hợp $V$ khác rỗng gồm các* đỉnh*,*
- *một tập hợp $E$ gồm các* cạnh*, mỗi cạnh* nối *một cặp đỉnh với nhau.*

**Chú ý:** Trong khuôn khổ tài liệu này, chúng ta chỉ xét các đồ thị *hữu hạn*, tức là các đồ thị có tập hợp đỉnh $V$ hữu hạn.

Xét một đồ thị $G = (V, E)$. Nếu giữa hai đỉnh bất kỳ có không quá một cạnh, thì ta nói $G$ là một *đồ thị đơn*. Khi đó $E$ có thể được đồng nhất với một tập hợp các cặp đỉnh không sắp thứ tự. Một cách tương đương, $E$ có thể được đồng nhất với một ánh xạ từ $V \times V$ vào $\{0, 1\}$ sao cho với mọi $u, v \in V$:

$$E(u, v) = E(v, u) = \begin{cases} 1 \text{ nếu có một cạnh nối } u \text{ và } v\,, \\ 0 \text{ nếu không.} \end{cases}$$

Nếu giữa hai đỉnh có thể có nhiều hơn một cạnh thì $G$ được gọi là một *đa đồ thị*. Khi đó $E$ có thể được đồng nhất với một ánh xạ từ $V \times V$ vào $\mathbb{N}$ sao cho với mọi $u, v \in V$:

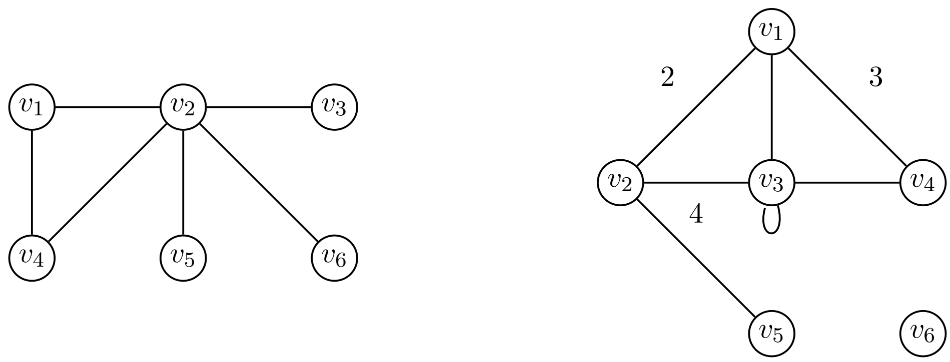
$$E(u, v) = E(v, u) = \text{ số cạnh nối } u \text{ và } v\,.$$

Một cạnh của đồ thị có hai đầu trùng nhau được gọi là một *khuyên*. Sau đây chúng ta quy ước rằng nếu không nói gì thêm thì đồ thị được xét là đồ thị đơn và không có khuyên.

Đồ thị có thể được biểu diễn trực quan bằng hình vẽ: mỗi đỉnh thường được biểu diễn bởi một dấu chấm hoặc một hình tròn, các cạnh là các đường nối các đỉnh. Với đa đồ thị, để tránh làm rối hình vẽ, thay vì vẽ tất cả các cạnh bội, ta thường biểu diễn chung các cạnh bội bởi một đường và ghi số bội ở bên cạnh (nếu không có số tức là cạnh đơn).

**Ví dụ 5.1.** Đồ thị bên trái trong Hình 5.1 là một đồ thị đơn với 6 đỉnh và 6 cạnh.

Đồ thị bên phải trong Hình 5.1 là một đa đồ thị với 6 đỉnh và 13 cạnh, trong đó có một khuyên.




Hình 5.1: Một đồ thị đơn (trái) và một đa đồ thị có khuyên (phải).

Đồ thị có hướng được định nghĩa tương tự, chỉ khác là các cạnh có phân biệt điểm đầu và điểm cuối.

**Định nghĩa 5.2** (Đồ thị có hướng)**.** *Một* đồ thị có hướng $G = (V, E)$ *được cho bởi:*

- *một tập hợp $V$ khác rỗng gồm các* đỉnh*,*
- *một tập hợp $E$ gồm các* cạnh có hướng *(hay* cung*), mỗi cạnh đi từ một* đỉnh đầu *tới một* đỉnh cuối*.*

Các khái niệm *đơn đồ thị có hướng*, *đa đồ thị có hướng* và *cạnh khuyên* cũng được định nghĩa tương tự như trong trường hợp vô hướng.

Với đơn đồ thị có hướng, tập hợp cạnh $E$ có thể được coi là một tập hợp các cặp có tính thứ tự của các đỉnh. Một cách tương đương, $E$ có thể được đồng nhất với một ánh xạ từ $V \times V$ vào $\{0, 1\}$ sao cho với mọi $u, v \in V$:

$$E(u, v) = \begin{cases} 1 \text{ nếu có một cạnh từ } u \text{ tới } v\,, \\ 0 \text{ nếu không.} \end{cases}$$

Đối với đa đồ thị có hướng, $E$ có thể được đồng nhất với một ánh xạ từ $V \times V$ vào $\mathbb{N}$ sao cho với mọi $u, v \in V$:

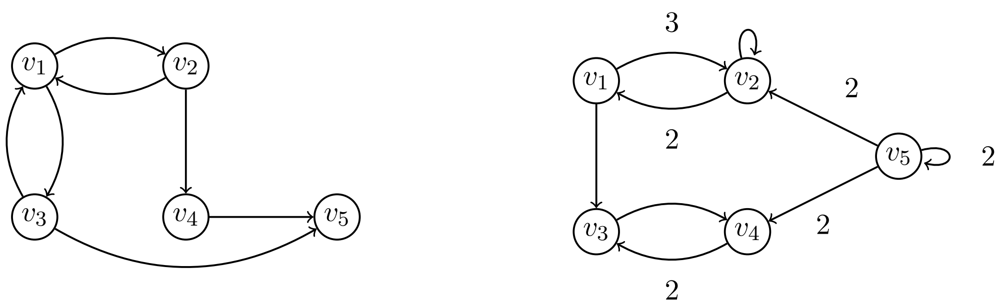
$$E(u,v) = \text{ số cạnh từ } u \text{ tới } v\,.$$

**Chú ý:**

- Một đồ thị vô hướng có thể được coi là một đồ thị có hướng, trong đó mỗi cạnh vô hướng nối hai đỉnh $u$ và $v$ tương ứng với một cặp cạnh có hướng: một cạnh từ $u$ tới $v$ và một cạnh từ $v$ tới $u$.
- Ta quy ước rằng nếu nói đến đồ thị mà không chú thích gì thêm, thì đó là một đơn đồ thị vô hướng (và không có khuyên).
- Trong biểu diễn bằng hình vẽ của đồ thị có hướng, các cạnh thường có mũi tên hướng từ đỉnh đầu đến đỉnh cuối của cạnh.

**Ví dụ 5.2.** Đồ thị bên trái của Hình 5.2 là một đồ thị có hướng gồm 5 đỉnh và 7 cạnh.

Đồ thị bên phải của Hình 5.2 là một đa đồ thị có hướng gồm 15 cạnh, trong đó có 3 khuyên.




Hình 5.2: Một đơn đồ thị có hướng (trái) và một đa đồ thị có hướng (phải).

## 5.1.1 Bậc của đỉnh

Trước tiên, ta xét trường hợp vô hướng. Giả sử $G = (V, E)$ là một đa đồ thị, có thể có khuyên.

**Định nghĩa 5.3.** *Nếu hai đỉnh $u, v$ được nối bởi một cạnh $e$ thì ta nói $u, v$ là hai đỉnh* kề nhau *và cạnh $e$* kề *với các đỉnh $u, v$.*

Lân cận *$N(v)$ của một đỉnh $v$ là tập hợp tất cả các đỉnh kề với nó.* Lân cận *của một tập hợp các đỉnh $W \subset V$ là $N(W) = \bigcup_{v \in W} N(v)$.*

Bậc *của một đỉnh $v$, ký hiệu là $\deg(v)$ là số cạnh kề với nó.*

**Chú ý:**

- Trong tài liệu này, ta quy ước khuyên được tính hai lần trong bậc của đỉnh kề với nó.
- Một đỉnh bậc 0 được gọi là một *đỉnh cô lập*, một đỉnh bậc 1 được gọi là một *đỉnh treo.*

**Ví dụ 5.3.** Trong đồ thị bên phải trong Hình 5.1, $N(v_3) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $\deg(v_1) = 6$, $\deg(v_3) = 8$. Đỉnh $v_6$ là một đỉnh cô lập, đỉnh $v_5$ là một đỉnh treo.

Kết quả sau cho ta một quan hệ giữa bậc của các đỉnh và số cạnh của một đồ thị.

**Định lý 5.4** (Bổ đề bắt tay)**.** *Giả sử $G = (V, E)$ là một đa đồ thị vô hướng. Khi đó:*

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|\,. \tag{5.1}$$

*Chứng minh.* Theo định nghĩa của bậc, vế trái chính là tổng số cạnh kề với tất cả các đỉnh của $G$. Do mỗi cạnh được tính đúng hai lần (một lần cho mỗi đầu), tổng này đúng bằng hai lần số cạnh của đồ thị. □

Từ bổ đề bắt tay, có thể dễ dàng suy ra kết quả sau.

**Hệ quả 5.5.** *Giả sử $G$ là một đa đồ thị vô hướng. Khi đó:*

1. *Số đỉnh bậc lẻ của $G$ là một số chẵn.*
2. *Nếu số đỉnh của $G$ là lẻ thì $G$ phải có ít nhất một đỉnh bậc chẵn.*

Đối với đồ thị có hướng, ta phân biệt hai loại bậc theo hướng của cạnh. Giả sử $G = (V, E)$ là một đa đồ thị có hướng, có thể có khuyên.

**Định nghĩa 5.6.** *Nếu có một cạnh $a$ đi từ đỉnh $u$ tới đỉnh $v$ thì ta nói $v$ là một đỉnh* kế tiếp *của $u$, $u$ là một đỉnh* liền trước *của $v$, $a$ là một cạnh* đi ra *của $u$ và là một cạnh* đi vào *của $v$.*

Lân cận *$N(v)$ của một đỉnh $v$ là tập hợp tất cả các đỉnh kế tiếp của nó. Lân cận của một tập hợp các đỉnh $W \subset V$ là $N(W) = \bigcup_{v \in W} N(v)$.*

Bậc đi ra *của một đỉnh $v$, ký hiệu là* $\deg^+(v)$ *hoặc $d^+(v)$, là số cạnh đi ra từ $v$.* Bậc đi vào *của một đỉnh $v$, ký hiệu là* $\deg^-(v)$ *hoặc $d^-(v)$, là số cạnh đi vào $v$.*

**Ví dụ 5.4.** Trong đồ thị bên phải của Hình 5.2, $N(v_5) = \{v_2, v_4, v_5\}$, $N(v_3) = \{v_4\}$, $d^+(v_2) = 3$, $d^-(v_2) = 5$.

Ta có phiên bản có hướng của bổ đề bắt tay:

**Định lý 5.7.** *Giả sử $G = (V, E)$ là một đa đồ thị có hướng và có thể có khuyên. Ta có:*

$$\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v) = |E|. \tag{5.2}$$

Chứng minh được dành cho bạn đọc như một bài tập.

## 5.1.2 Biểu diễn đồ thị

Ngoài cách biểu diễn trực quan bằng hình vẽ, ta còn cần các cách biểu diễn khác thuận tiện hơn cho việc lưu trữ và tính toán.

### Danh sách kề

Một cách biểu diễn đồ thị được dùng nhiều trong tin học vì tính gọn nhẹ và tiện sử dụng của nó là cách biểu diễn bằng *danh sách kề*. Trong cách biểu diễn này, mỗi đồ thị tương ứng với một danh sách các đỉnh của nó, mỗi đỉnh lại tương ứng với một danh sách các đỉnh kề với nó.

**Ví dụ 5.5.** Danh sách kề sau đây biểu diễn đồ thị bên trái trong Hình 5.1:

- $v_1$: $v_2, v_4$;
- $v_2$: $v_1, v_3, v_4, v_5, v_6$;
- $v_3$: $v_2$;
- $v_4$: $v_1, v_2$;
- $v_5$: $v_2$;
- $v_6$: $v_2$;

Danh sách kề sau đây biểu diễn đồ thị có hướng bên trái trong Hình 5.2:

- $v_1$: $v_2, v_3$;
- $v_2$: $v_1, v_4$;
- $v_3$: $v_1, v_5$;
- $v_4$: $v_5$;
- $v_5$: [danh sách rỗng];

Các tính chất đại số và tổ hợp của đồ thị được thể hiện rõ hơn trong các biểu diễn bằng ma trận.

### Ma trận kề

**Định nghĩa 5.8.** Ma trận kề *của một đa đồ thị vô hướng (có thể có khuyên)* $G = (V, E)$ *là một ma trận* $A \in \mathbb{N}^{V \times V}$*, trong đó:*

$$A(u, v) = \begin{cases} \textit{số cạnh nối } u \textit{ và } v \textit{ nếu } u \neq v\,, \\ \textit{số khuyên tại } u \textit{ nếu } u = v\,. \end{cases}$$

Tính chất sau dễ dàng được suy ra từ định nghĩa của ma trận kề.

**Mệnh đề 5.9.** *Ma trận kề của một đa đồ thị vô hướng là một ma trận đối xứng. Tổng các phần tử trên mỗi hàng hoặc cột bằng bậc của đỉnh tương ứng.*

**Hệ quả 5.10.** *Tổng các phần tử của ma trận kề của một đa đồ thị vô hướng bằng hai lần số cạnh của đồ thị đó.*

Ma trận kề của một đa đồ thị có hướng được định nghĩa tương tự.

**Định nghĩa 5.11.** Ma trận kề *của một đa đồ thị có hướng (có thể có khuyên)* $G = (V, E)$ *là một ma trận* $A \in \mathbb{N}^{V \times V}$*, trong đó:*

$$A(u, v) = \textit{ số cạnh từ } u \textit{ tới } v\,.$$

**Mệnh đề 5.12.** *Giả sử* $A$ *là ma trận kề của một đa đồ thị có hướng* $G$*. Tổng các phần tử trên hàng* $v$ *của* $A$ *bằng* $d^+(v)$*. Tổng các phần tử trên cột* $v$ *bằng* $d^-(v)$*. Tổng các phần tử của* $A$ *bằng số cạnh của* $G$*.*

Một biểu diễn khác bằng ma trận là biểu diễn bằng *ma trận liên thuộc*.

### Ma trận liên thuộc

**Định nghĩa 5.13.** *Giả sử* $G = (V, E)$ *là một đa đồ thị vô hướng.* Ma trận liên thuộc *của* $G$ *là ma trận* $M \in \mathbb{N}^{V \times E}$ *được cho bởi:*

$$M(v, e) = \begin{cases} 1 \textit{ nếu } e \textit{ kề với } v, \\ 0 \textit{ nếu không.} \end{cases}$$

Từ định nghĩa trên, dễ thấy:

**Mệnh đề 5.14.** *Giả sử* $M$ *là ma trận liên thuộc của đa đồ thị vô hướng* $G$*. Tổng các phần tử trên mỗi cột* $e$ *bằng 2 nếu* $e$ *không phải là khuyên, và bằng 1 nếu* $e$ *là khuyên. Tổng các phần tử trên hàng* $v$ *bằng* $\deg(v)$ *trừ đi số khuyên tại* $v$*.*

Trong trường hợp có hướng, ma trận liên thuộc được định nghĩa như sau.

**Định nghĩa 5.15.** *Giả sử* $G = (V, E)$ *là một đa đồ thị có hướng* không có khuyên. Ma trận liên thuộc *của* $G$ *là ma trận* $M \in \mathbb{N}^{V \times E}$ *được cho bởi:*

$$M(v, e) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } e \text{ là một cạnh đi ra từ } v, \\ -1 \text{ nếu } e \text{ là một cạnh đi vào } v, \\ 0 \text{ nếu không.} \end{cases}$$

### 5.1.3 Một số dạng đồ thị đặc biệt

Trong mục này, chúng ta giới thiệu một số dạng đồ thị đơn vô hướng cơ bản.

**Đường đi:** $P_n$, $n \geq 1$, có $n$ đỉnh $v_1, v_2, \ldots, v_n$ và $n - 1$ cạnh $v_i v_{i+1}$, $1 \leq i \leq n - 1$. Hai *đầu* $v_1$ và $v_n$ có bậc 1, tất cả các đỉnh khác có bậc 2.

**Chu trình:** $C_n$, $n \geq 3$, có $n$ đỉnh $v_1, v_2, \ldots, v_n$ và $n$ cạnh $v_i v_{i+1}$, $1 \leq i \leq n$ (quy ước $v_{n+1} = v_1$). Tất cả các đỉnh của chu trình đều có bậc 2.

**Đồ thị đầy đủ:** $K_n$, $n \geq 1$, có $n$ đỉnh $v_1, v_2, \ldots, v_n$ và $n(n - 1)/2$ cạnh nối tất cả các cặp đỉnh $v_i v_j$, $i \neq j$. Tất cả các đỉnh của $K_n$ đều có bậc $n - 1$.

**Đồ thị bánh xe:** $W_n$, $n \geq 3$, có $n + 1$ đỉnh $s, v_1, v_2, \ldots, v_n$ và $2n$ cạnh $sv_i$ và $v_i v_{i+1}$, $1 \leq i \leq n$ (quy ước $v_{n+1} = v_1$). Đỉnh $s$ có bậc $n$, tất cả các đỉnh còn lại có bậc 3.

**Đồ thị ngôi sao:** $S_n$, $n \geq 1$, có $n + 1$ đỉnh $s, v_1, v_2, \ldots, v_n$ và $n$ cạnh $sv_i$, $1 \leq i \leq n$. Đỉnh $s$ có bậc $n$, tất cả các đỉnh còn lại đều là đỉnh treo.

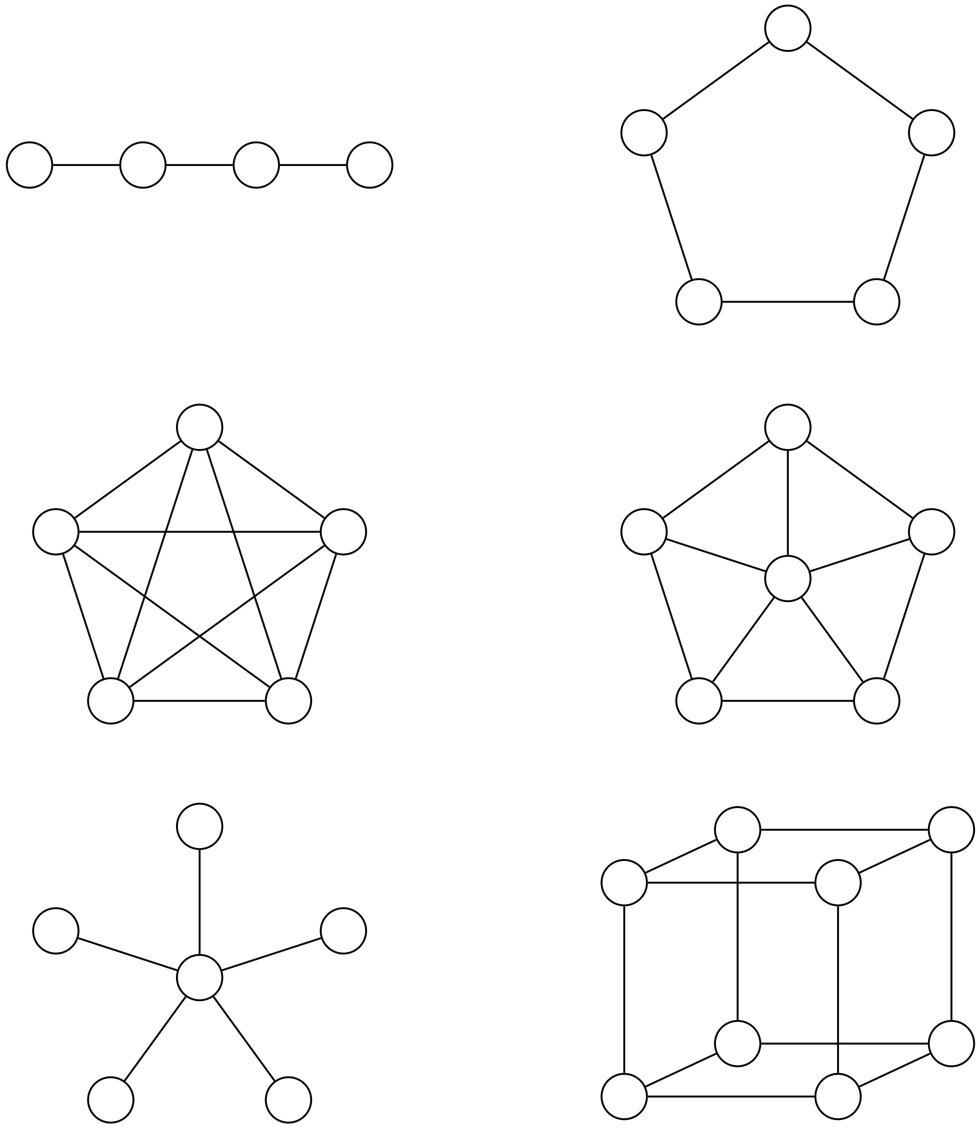
**Siêu khối:** $Q_n$, $n \geq 1$, có $2^n$ đỉnh tương ứng với các từ nhị phân độ dài $n$, $n2^{n-1}$ cạnh nối các cặp đỉnh khác nhau đúng một ký tự. Tất cả các đỉnh đều có bậc $n - 1$.

Một số ví dụ về các đồ thị đặc biệt này được cho trong Hình 5.3.

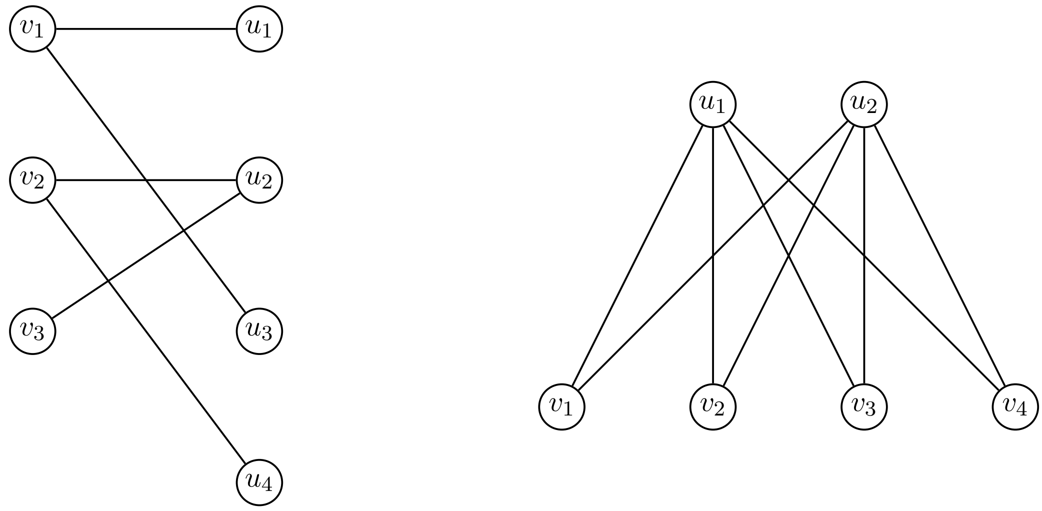
### 5.1.4 Đồ thị hai phần và bài toán ghép cặp

**Định nghĩa 5.16.** *Một đồ thị* $G = (V, E)$ *là một* đồ thị hai phần *nếu tồn tại một phân hoạch của* $V$, $V = V_1 \sqcup V_2$, *sao cho tất cả các cạnh có một đầu trong* $V_1$ *và một đầu trong* $V_2$.

*Đồ thị hai phần đầy đủ* $K_{m,n}$ là một đồ thị đầy đủ mà tập hợp đỉnh của nó có thể được phân hoạch thành một tập hợp $m$ đỉnh và một tập hợp $n$ đỉnh, sao cho mỗi đỉnh trong tập hợp thứ nhất đều kề với mọi đỉnh trong tập hợp thứ hai.



Hình 5.3: Từ trái sang phải, từ trên xuống dưới: $P_4$, $C_5$, $K_5$, $W_5$, $S_5$, $Q_3$.




Hình 5.4: Một đồ thị hai phần và một đồ thị hai phần đầy đủ.

**Ví dụ 5.6.** Đồ thị bên trái trong Hình 5.4 là một đồ thị hai phần với phân hoạch đỉnh $\{v_1, v_2, v_3\} \sqcup \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$.

Đồ thị bên phải trong Hình 5.4 là đồ thị hai phần đầy đủ $K_{2,4}$.

Không phải biểu diễn nào của một đồ thị cũng cho thấy rõ phân hoạch thành hai phần như trong Hình 5.4. Tuy nhiên, có thể dễ dàng xác định một đồ thị bất kỳ có phải là hai phần hay không nhờ tính chất sau đây.

**Định lý 5.17.** *Một đồ thị là hai phần khi và chỉ khi các đỉnh của nó có thể được tô bằng hai màu sao cho không có hai đỉnh cùng màu nào kề nhau.*

**Hệ quả 5.18.** *Một đồ thị là hai phần khi và chỉ khi nó không chứa ba đỉnh đôi một kề nhau.*

**Ví dụ 5.7.** Đồ thị ngôi sao $S_n$ là một đồ thị hai phần: ta tô đỉnh $s$ bằng một màu và tất cả các đỉnh còn lại bằng màu thứ hai.

Chu trình $C_n$ với $n$ chẵn là một đồ thị hai phần: các đỉnh $v_i$ với $i$ chẵn được tô một màu, các đỉnh $v_i$ với $i$ lẻ được tô màu còn lại.

Chu trình $C_n$ với $n$ lẻ không phải là một đồ thị hai phần (vì sao?).

Đồ thị đầy đủ $K_n$ với $n \geq 3$ không phải là một đồ thị hai phần.

### Ghép cặp trên đồ thị hai phần

Xét một đồ thị hai phần $G = (V_1 \bigsqcup V_2, E)$.

**Định nghĩa 5.19.** *Một* cách ghép cặp *trên $G$ là một tập hợp con của $E$ gồm các cạnh đôi một không có điểm chung. Một* cách ghép cặp đầy đủ *từ $V_1$ tới $V_2$ là một cách ghép cặp có $|V_1|$ cạnh.*

Một điều kiện cần và đủ để một đồ thị hai phần có một cách ghép cặp đầy đủ được nhà toán học người Anh Philip Hall đưa ra vào đầu thế kỷ 20.

**Định lý 5.20** (Định lý Hall)**.** *Tồn tại một cách ghép cặp đầy đủ từ $V_1$ tới $V_2$ nếu và chỉ nếu với mọi tập hợp con $S$ của $V_1$, ta có $|N(S)| \geq |S|$.*

*Chứng minh.* Chiều "chỉ nếu" là hiển nhiên, do định nghĩa của cách ghép cặp đầy đủ từ $V_1$ tới $V_2$.

Ta chứng minh chiều "nếu" bằng quy nạp theo $|V_1| \geq 1$.

**$|V_1| = 1$:** Hiển nhiên.

**Từ $k$ tới $k + 1$:** Ta xét hai trường hợp:

- Nếu với mọi tập hợp con không tầm thường $S$ của $V_1$, $|N(S)| \geq |S| + 1$, ta bỏ ra một cạnh $vw$ bất kỳ ($v \in V_1 , w \in V_2$). Đồ thị còn lại sau khi xóa $v$ và $w$ thỏa mãn giả thiết quy nạp nên có một cách ghép cặp đầy đủ từ $V_1 \setminus \{v\}$ vào $V_2 \setminus \{w\}$. Thêm cạnh $vw$ vào cách ghép cặp này tạo thành một cách ghép cặp đầy đủ từ $V_1$ vào $V_2$ trong $G$.
- Nếu có một tập hợp con không tầm thường $S$ của $V_1$ sao cho $|N(S)| = |S|$, ta xét hai đồ thị hai phần: $G_1$ gồm $S$, $N(S)$ và các cạnh giữa chúng, $G_2$ gồm $V_1 \setminus S$, $V_2 \setminus N(S)$ và các cạnh giữa chúng. Có thể chứng minh rằng hai đồ thị này thỏa mãn giả thiết quy nạp, do đó mỗi đồ thị có một cách ghép cặp đầy đủ (đối với $S$ và đối với $V_1 \setminus S$). Hợp của hai cách ghép cặp này là một cách ghép cặp đầy đủ từ $V_1$ tới $V_2$ trong $G$.

□

### 5.1.5 Đồ thị con - Một số phép toán trên đồ thị

Xét một đồ thị $G = (V, E)$.

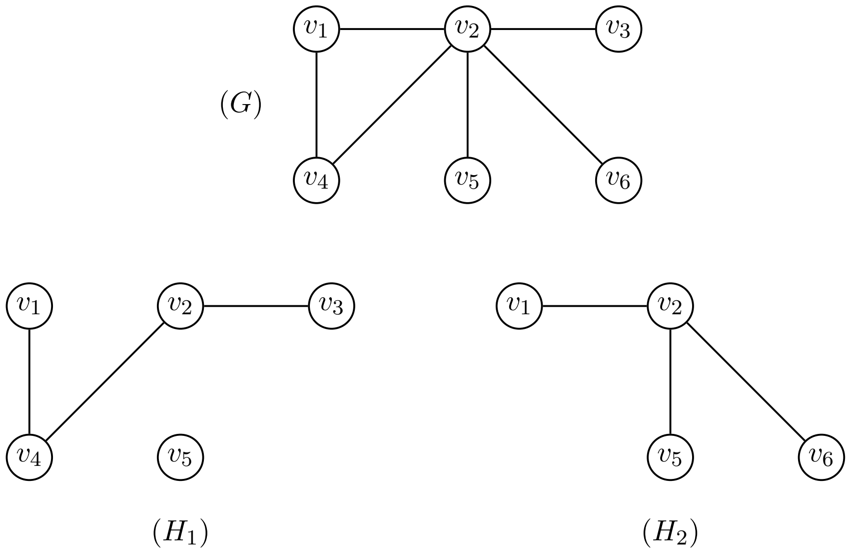
**Định nghĩa 5.21.** *Một* đồ thị con *của $G$ là một đồ thị $H = (W, F)$ sao cho $W \subset V$, $F \subset E$.*

*Một đồ thị con của $G$* cảm sinh bởi một tập hợp $S \subset V$ *là đồ thị con của $G$ có các đỉnh là $S$ và các cạnh là tất cả các cạnh của $G$ nối hai đỉnh thuộc $S$.*

**Chú ý:** Mọi đồ thị luôn có hai đồ thị con là đồ thị rỗng và chính nó.

**Ví dụ 5.8.** Trong Hình 5.5, các đồ thị $H_1$ và $H_2$ là các đồ thị con của đồ thị $G$.

Đồ thị $H_1$ không phải là đồ thị con cảm sinh của $G$ (cạnh $v_1v_2$ có trong $G$ nhưng không có trong $H_1$). Đồ thị $H_2$ là đồ thị con cảm sinh bởi tập hợp các đỉnh $\{v_1, v_2, v_5, v_6\}$.




Hình 5.5: Một đồ thị $G$ và hai đồ thị con $H_1$, $H_2$.

Tiếp theo, chúng ta xét một số phép biến đổi một đồ thị thành một đồ thị mới.

**Định nghĩa 5.22.** *Giả sử $G = (V, E)$. Ta định nghĩa các phép toán sau trên $G$.*

**Phép xóa một cạnh $e$:** *Đồ thị mới là $G - e = (V, E')$, với $E' = E \setminus \{e\}$.*

**Phép thêm một cạnh $e$:** *Đồ thị mới là $G + e = (V, E')$, với $E' = E \cup \{e\}$.*

**Phép xóa một đỉnh $v$:** *Đồ thị mới là $G - v = (V', E')$, với $V' = V \setminus \{v\}$, $E' = E \setminus \big\{e | e \text{ kề với } v\big\}$.*

**Phép thêm một đỉnh $v$:** *Đồ thị mới là $G + v = (V', E)$, với $V' = V \cup \{v\}$.*

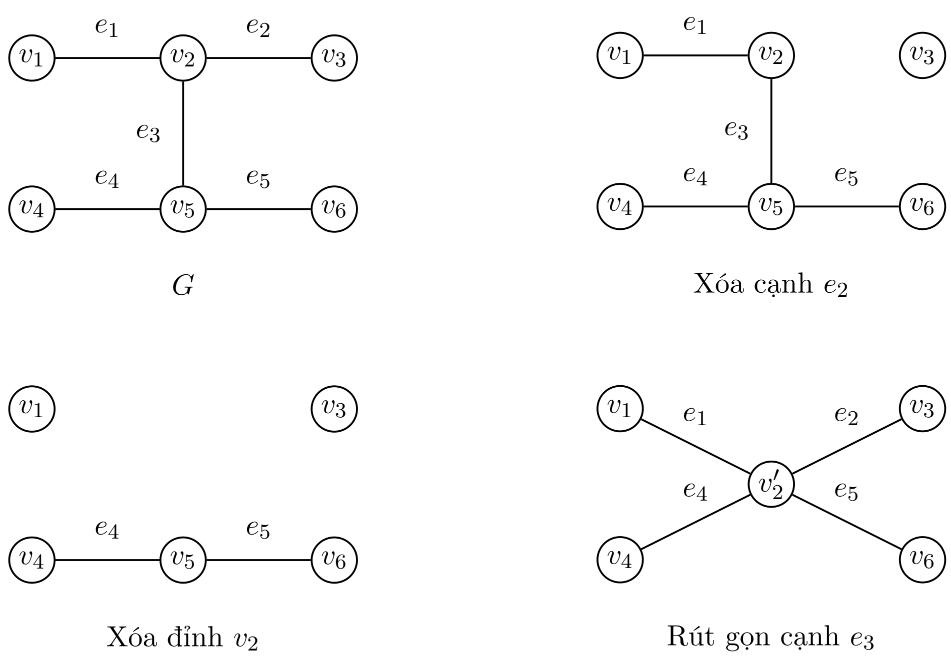
**Phép rút gọn một cạnh $e = uv$:** *Đồ thị mới $G'$ được tạo ra bằng cách thực hiện liên tiếp các phép toán sau:*

- *Thêm một đỉnh mới $w$;*
- *Thêm các cạnh nối $w$ với các đỉnh kề với $u$ hoặc $v$;*

- *Xóa u và v.*

Bạn đọc có thể dễ dàng kiểm tra rằng kết quả của phép xóa cạnh và phép xóa đỉnh là đồ thị con của $G$, trong khi kết quả của phép rút gọn cạnh nói chung không phải là một đồ thị con.

**Ví dụ 5.9.** Trong Hình 5.6 là một đồ thị $G$ và các đồ thị nhận được từ $G$ bằng cách xóa một cạnh, xóa một đỉnh và rút gọn một đỉnh.




Hình 5.6: Minh họa các phép toán xóa cạnh, xóa đỉnh, rút gọn cạnh.

**Định nghĩa 5.23.** Đồ thị hợp *của hai đồ thị* $G_1 = (V_1, E_1)$ *và* $G_2 = (V_2, E_2)$ *là đồ thị* $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$.

Đồ thị bù *của đồ thị* $G$ *là đồ thị* $\overline{G} = (V, \overline{E})$ *sao cho với mọi cặp đỉnh* $u, v$, *chúng kề nhau trong* $\overline{G}$ *khi và chỉ khi chúng không kề nhau trong* $G$.

Dễ thấy mọi đồ thị $G$ và đồ thị bù $\overline{G}$ của nó không có cạnh chung. Hơn nữa, nếu $G$ có $n$ đỉnh thì hợp của $G$ và $\overline{G}$ là đồ thị đầy đủ $K_n$.

### 5.1.6 Đẳng cấu đồ thị

Trong mục 5.1.2, chúng ta đã giới thiệu một số cách biểu diễn đồ thị. Ta nhận xét rằng các cánh biểu diễn này không phải duy nhất, chẳng hạn chỉ cần thay đổi thứ tự các đỉnh, ta sẽ thu được một ma trận kề mới. Câu hỏi đặt ra là cho hai biểu diễn của hai đồ thị, liệu có thể trả lời rằng đó là hai biểu diễn của cùng một đồ thị hay không.

**Định nghĩa 5.24.** *Hai đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ được gọi là* đẳng cấu *với nhau nếu tồn tại một song ánh $f : V_1 \to V_2$ sao cho với mọi cặp đỉnh $u, v \in V_1$, $u$ kề với $v$ trong $G_1$ khi và chỉ khi $f(u)$ kề với $f(v)$ trong $G_2$.*

*Bài toán đẳng cấu đồ thị*, tức là kiểm tra xem hai đồ thị cho trước bất kỳ có đẳng cấu với nhau hay không, là một bài toán khó và hiện tại vẫn chưa có thuật toán giải hiệu quả.

Trong một số trường hợp đơn giản, ta có thể so sánh các đặc trưng bất biến của hai đồ thị, như số đỉnh, số cạnh, bậc của các đỉnh, ... Nếu hai đồ thị có các tính chất bất biến khác nhau, thì chúng không đẳng cấu với nhau. Tuy nhiên, nếu các bất biến giống nhau, ta chưa kết luận được gì.

## 5.2 Đường đi và tính liên thông

### 5.2.1 Đường đi và tính liên thông trong đồ thị vô hướng

Trước hết, ta xét trường hợp (đa) đồ thị vô hướng.

**Định nghĩa 5.25.** *Một* đường đi *độ dài $\ell$ từ đỉnh $u$ tới đỉnh $v$ là một dãy $\ell$ cạnh $e_1, e_2, \ldots, e_\ell$ sao cho tồn tại các đỉnh $u = x_0, x_1, \ldots, x_{\ell-1}, x_\ell = v$ sao cho $e_i$ kề với $x_{i-1}$ và $x_i$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, \ell - 1$. Ta nói $u$ là điểm đầu, $v$ là điểm cuối của đường đi. Một* chu trình *là một đường đi có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau. Một* đường đi đơn (tương tự, chu trình đơn) *là một đường đi (chu trình) không đi qua cạnh nào quá một lần.*

**Chú ý:** Để ký hiệu được ngắn gọn, khi không sợ nhầm lẫn, ta có thể đồng nhất một đường đi với dãy các đỉnh nó đi qua.

**Ví dụ 5.10.** Trong đồ thị bên trái trong Hình 5.1, $v_1v_2v_5v_2v_6$ là một đường đi độ dài 4 từ $v_1$ tới $v_6$, $v_3v_2v_1v_4v_2v_5$ là một đường đi đơn độ dài 5 từ $v_3$ tới $v_5$, $v_1v_2v_4$ là một chu trình độ dài 3.

**Mệnh đề 5.26.** *Nếu tồn tại một đường đi từ đỉnh $u$ tới đỉnh $v$ thì tồn tại một đường đi đơn từ $u$ tới $v$,*

*Chứng minh.* Ta có thể chứng minh khẳng định mạnh hơn: nếu tồn tại một đường đi từ $u$ tới $v$ thì tồn tại một đường đi từ $u$ tới $v$ không đi qua đỉnh nào quá một lần.

Vì các đường đi có độ dài là các số nguyên dương nên tồn tại một đường đi $p$ từ $u$ tới $v$ có độ dài ngắn nhất. Giả sử $p$ đi qua một đỉnh $w$ nào đó ít nhất hai lần. Khi đó, $p$ là hợp của ba đường đi: $p_1$ từ $u$ tới $w$, $p_2$ từ $w$ tới $w$,

$p_3$ từ $w$ tới $v$. Hợp của $p_1$ và $p_3$ là một đường đi từ $u$ tới $v$ có độ dài nhỏ hơn $p$, mâu thuẫn với cách chọn $p$. □

**Định nghĩa 5.27.** *Đồ thị $G$ là* liên thông *nếu giữa hai đỉnh bất kỳ có một đường đi.*

**Định lý 5.28.** *Giả sử $G$ là một đồ thị có $n$ đỉnh. Nếu $G$ liên thông thì nó có ít nhất $n-1$ cạnh.*

*Chứng minh.* Ta chứng minh bằng quy nạp theo $n$.

Với $n = 1$, khẳng định đúng.

Giả sử khẳng định đúng đến $n-1$. Giả sử $G$ là một đồ thị liên thông có $n$ đỉnh và $m$ cạnh. Xét hai trường hợp:

1. Nếu mọi đỉnh của $G$ có bậc ít nhất bằng 2, theo bổ đề bắt tay:
$$m = \frac{1}{2}\sum \deg(v) \geq \frac{1}{2}(2n) = n > n-1\,.$$
2. Nếu có một đỉnh $v$ nào đó có bậc 1, xét đồ thị $G - v$. Vì $v$ có bậc 1 nên nó không thể nằm trên bất kỳ đường đi nào nối hai đỉnh khác, do đó việc xóa $v$ không ảnh hưởng tới các đường đi giữa các đỉnh còn lại. Suy ra $G - v$ liên thông, và theo giả thiết quy nạp có ít nhất $n-2$ cạnh. Vì $G$ có nhiều hơn $G - v$ đúng một cạnh (là cạnh kề với $v$), nên $G$ có ít nhất $n-1$ cạnh.

□

Một đồ thị tổng quát nói chung không liên thông, nhưng có thể được phân tích thành hợp của các đồ thị con liên thông. Các đồ thị con liên thông đó được gọi là các *thành phần liên thông*, định nghĩa chặt chẽ như sau.

**Định nghĩa 5.29.** *Giả sử $G$ là một đồ thị. Một* thành phần liên thông *của $G$ là một đồ thị con liên thông cực đại theo nghĩa bao hàm.*

Giả sử $G$ là một đồ thị. Xét quan hệ hai ngôi sau giữa các đỉnh của $G$: $u \equiv v$ nếu có một đường đi từ $u$ tới $v$. Dễ thấy đây là một quan hệ tương đương, và các lớp tương đương của nó chính là các thành phần liên thông của $G$. Từ đó, ta có kết quả sau.

**Mệnh đề 5.30.** *Giả sử $G$ là một đồ thị và $u, v$ là hai đỉnh khác nhau của $G$. Khi đó, các thành phần liên thông chứa $u$ và chứa $v$ hoặc trùng nhau, hoặc rời nhau. Chúng trùng nhau khi và chỉ khi $u$ và $v$ được nối với nhau bởi một đường đi.*

Cho hai đồ thị liên thông, liệu ta có thể so sánh xem đồ thị này có "liên thông hơn" đồ thị kia hay không? Để trả lời câu hỏi này, chúng ta cần khái niệm *độ liên thông*.

Trước hết, ta định nghĩa khái niệm tập hợp cắt.

**Định nghĩa 5.31.** *Giả sử $G$ là một đồ thị. Một đỉnh $v$ được gọi là một* đỉnh cắt*, hay*đỉnh khớp*, của $G$ nếu $G - v$ có nhiều thành phần liên thông hơn $G$. Một cạnh $e$ được gọi là một* cạnh cắt*, hay* cạnh cầu*, của $G$ nếu $G - e$ có nhiều thành phần liên thông hơn $G$. Đồ thị $G$ gọi là* song liên thông *nếu nó không có đỉnh nối.*

**Định nghĩa 5.32.** *Giả sử $G$ là một đồ thị liên thông. Một tập hợp đỉnh $W \subset V$ là một* lát cắt đỉnh *nếu $G - W$ không liên thông. Số đỉnh trong lát cắt đỉnh bé nhất được gọi là* độ liên thông đỉnh *của $G$, ký hiệu là $\kappa(G)$:*

$$\kappa(G) = \min\left\{|W| \mid W \text{ lát cắt đỉnh của } G\right\} .$$

*Ta nói đồ thị $G$ là $k$-liên thông nếu $\kappa(G) \geq k$.*
*Ta quy ước $\kappa(K_n) = n - 1$.*

Kết quả sau khẳng định định nghĩa của độ liên thông đỉnh là có nghĩa.

**Mệnh đề 5.33.** *Mọi đồ thị liên thông không đầy đủ đều có một lát cắt đỉnh.*

Một cách đối xứng, chúng ta có khái niệm độ liên thông cạnh.

**Định nghĩa 5.34.** *Giả sử $G$ là một đồ thị liên thông. Một tập hợp các cạnh $F \subset E$ là một* lát cắt cạnh *nếu $G - F$ không liên thông. Lực lượng của lát cắt cạnh bé nhất được gọi là* độ liên thông cạnh *của đồ thị:*

$$\lambda(G) = \min\left\{|F| \mid F \text{ lát cắt cạnh của } G\right\} .$$

*Chúng ta quy ước độ liên thông cạnh của một đồ thị không liên thông hoặc một đồ thị chỉ gồm một đỉnh cô lập là 0.*

Ta có mối liên hệ sau giữa độ liên thông đỉnh và độ liên thông cạnh.

**Định lý 5.35.** *Với mọi đồ thị $G$, $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \min_{v \in V} \deg(v)$.*

### 5.2.2 Đường đi và tính liên thông trong đồ thị có hướng

**Định nghĩa 5.36.** *Xét một đa đồ thị có hướng $G = (V, E)$.*

*Một* đường đi *độ dài $\ell$ từ đỉnh $u$ tới đỉnh $v$ là một dãy $\ell$ cạnh $e_1, e_2, \ldots, e_\ell$ sao cho tồn tại các đỉnh $u = x_0, x_1, \ldots, x_{\ell-1}, x_\ell = v$ sao cho $e_i$ có điểm đầu là $x_{i-1}$, điểm cuối là $x_i$, với mọi $i = 1, 2, \ldots, \ell - 1$. Ta nói $u$ là điểm đầu, $v$ là điểm cuối của đường đi. Một* chu trình *là một đường đi có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau. Một* đường đi đơn (tương tự, chu trình đơn) *là một đường đi (chu trình) không đi qua cạnh nào quá một lần.*

Ta có kết quả sau, tương tự trường hợp đồ thị vô hướng.

**Mệnh đề 5.37.** *Nếu tồn tại một đường đi từ đỉnh $u$ tới đỉnh $v$ thì tồn tại một đường đi đơn từ $u$ tới $v$,*

**Định nghĩa 5.38.** *Đồ thị $G$ được gọi là* liên thông mạnh *nếu với mọi cặp đỉnh phân biệt $u, v$, tồn tại một đường đi từ $u$ tới $v$ và một đường đi từ $v$ tới $u$.*

*Đồ thị $G$ được gọi là* liên thông (yếu) *nếu đồ thị vô hướng thu được từ $G$ bằng cách không xét chiều các cạnh liên thông.*

Dễ thấy một đồ thị liên thông mạnh thì liên thông yếu, nhưng điều ngược lại nói chung không đúng.

**Định nghĩa 5.39.** *Một* thành phần liên thông mạnh *của $G$ là một đồ thị con liên thông mạnh cực đại của $G$.*

Cần lưu ý rằng khác với trường hợp vô hướng, hợp của các thành phần liên thông mạnh của cùng một đồ thị có thể *không* phải là đồ thị đó.

## 5.3 Chu trình Euler, chu trình Hamilton

### 5.3.1 Chu trình và đường đi Euler

#### Chu trình và đường đi Euler trong đồ thị vô hướng

Giả sử $G = (V, E)$ là một đa đồ thị vô hướng, có thể có khuyên.

**Định nghĩa 5.40.** *Một chu trình trong $G$ được gọi là một* chu trình Euler *nếu nó đi qua mỗi cạnh của $G$ đúng một lần.*

*Một đường đi (không đóng) trong $G$ được gọi là một* đường đi Euler *nếu nó đi qua mỗi cạnh của $G$ đúng một lần.*

*Nếu $G$ có một chu trình Euler thì ta nói $G$ là một* đồ thị Euler.

Các đồ thị Euler có một dấu hiệu nhận biết dễ dàng kiểm tra được.

**Định lý 5.41.** *Giả sử $G$ là một đa đồ thị vô hướng* liên thông. *Khi đó:*

1. *Đồ thị $G$ có một chu trình Euler nếu và chỉ nếu tất cả các đỉnh của nó đều có bậc chẵn.*

2. *Đồ thị $G$ có một đường đi Euler nếu và chỉ nếu nó có đúng hai đỉnh bậc lẻ, tất cả các đỉnh còn lại đều có bậc chẵn. Khi đó, mọi đường đi Euler trong $G$ bắt đầu từ một đỉnh bậc lẻ và kết thúc ở đỉnh bậc lẻ còn lại.*

*Chứng minh.* Ta chứng minh ý thứ nhất bằng quy nạp theo số cạnh của đồ thị.

Ta có thể dễ dàng kiểm tra rằng khẳng định đúng với đồ thị có 2 cạnh.

Giả sử khẳng định đúng với mọi đồ thị có không quá $m-1$ cạnh. Xét một đồ thị $G$ bất kỳ có $m$ cạnh. Bắt đầu từ một đỉnh bất kỳ $v$, ta lặp lại quá trình sau: nếu đỉnh hiện tại còn cạnh chưa được sử dụng, chọn cạnh đó và đi tới điểm cuối của cạnh đó. Quá trình này lần lượt xây dựng một đường đi $\gamma$ bắt đầu từ $v$. Mỗi lần đường đi $\gamma$ đi tới rồi rời khỏi một đỉnh, nó sử dụng hai cạnh kề với đỉnh đó. Do đó, mỗi lần đường đi đi tới một đỉnh $u \neq v$, số cạnh chưa sử dụng của $u$ đang là số lẻ, tức là $\gamma$ có thể tiếp tục rời khỏi $u$. Vậy đỉnh cuối cùng được gặp trong quá trình này chỉ có thể là $v$, tức là $\gamma$ là một chu trình.

Giả sử $G-\gamma$ gồm các thành phần liên thông $H_1, H_2, \cdots, H_k$. Mỗi đồ thị này liên thông, có tất cả các đỉnh có bậc chẵn, và có ít hơn $m$ cạnh, vì vậy theo giả thiết quy nạp, mỗi $H_i$ có một chu trình Euler $\gamma_i$.

Vì $G$ liên thông nên $\gamma$ phải có điểm chung với mỗi $H_i$ (bạn đọc giải thích cụ thể như một bài tập), tức là $\gamma$ có điểm chung với mỗi $\gamma_i$. Hợp của $\gamma$ và các $\gamma_i$ là một chu trình Euler của $G$. Giả thiết quy nạp cũng đúng với $m$.

Ý thứ hai là một hệ quả của ý thứ nhất. Thật vậy, giả sử hai đỉnh bậc lẻ là $u$ và $v$. Đồ thị $G$ thêm một cạnh $uv$ có tất cả các đỉnh có bậc chẵn, do đó có một chu trình Euler. Chu trình này phải chứa cạnh mới thêm vào, nếu không thì nó cũng là một chu trình Euler của $G$, mâu thuẫn. Xóa cạnh này khỏi chu trình, ta được một đường đi Euler của $G$. □

**Nhận xét:** Chứng minh trên là một chứng minh mang tính xây dựng. Dựa vào ý tưởng của nó, bạn đọc có thể đưa ra một thuật toán tìm chu trình và/hoặc đường đi Euler cho một đồ thị vô hướng.

### Chu trình và đường đi Euler trong đồ thị có hướng

Định nghĩa của chu trình Euler và đường đi Euler cho đồ thị có hướng giống hệt cho đồ thị vô hướng nhưng có tính đến hướng của các cạnh. Dấu hiệu nhận biết sự tồn tại của chu trình hoặc đường đi Euler hơi khác trường hợp vô hướng một chút, nhưng ý tưởng chứng minh không thay đổi so với trường hợp vô hướng. Ta phát biểu định lý, phần chứng minh được dành cho bạn đọc như một bài tập.

**Định lý 5.42.** *Giả sử G là một đa đồ thị có hướng.*

*i) Đồ thị G có một chu trình Euler nếu và chỉ nếu nó liên thông yếu và mọi đỉnh có bậc đi vào bằng với bậc đi ra.*

*ii) Đồ thị G có một đường đi Euler nhưng không có chu trình Euler nếu và chỉ nếu nó liên thông yếu và mọi đỉnh có bậc đi vào bằng bậc đi ra, ngoại trừ một đỉnh có một bậc đi vào nhiều hơn so với bậc đi ra và một* *đỉnh có một bậc đi ra nhiều hơn so với bậc đi vào. Khi đó mọi đường đi Euler của G xuất phát từ đỉnh có nhiều hơn một bậc đi ra và kết thúc tại đỉnh có nhiều hơn một bậc đi vào.*

### 5.3.2 Chu trình và đường đi Hamilton

Với chu trình và đường đi Hamilton, ta giới hạn trong đơn đồ thị vô hướng.

**Định nghĩa 5.43.** *Giả sử $G$ là một đồ thị có hướng.*

*Một* chu trình Hamilton *là một chu trình đi qua mỗi đỉnh của $G$ đúng một lần. Một* đường đi Hamilton *là một đường đi (không đóng) đi qua mỗi đỉnh của $G$ đúng một lần.*

Mặc dù khái niệm chu trình và đường đi Hamilton khá giống với chu trình và đường đi Euler, chỉ khác là thay cạnh bằng đỉnh, nhưng hai bài toán lại có bản chất cực kỳ khác nhau. Bài toán xác định sự tồn tại của một đường đi hoặc chu trình Hamilton trên một (đa) đồ thị tổng quát là một bài toán khó. Chúng ta không có những điều kiện cần và đủ, cũng như những thuật toán đơn giản để tìm đường đi hoặc chu trình Hamilton như đối với đường đi hoặc chu trình Euler. Hai kết quả dưới đây cho chúng ta hai điều kiện đủ về sự tồn tại của một chu trình Hamilton trong một đồ thị đơn vô hướng. Ý tưởng của chúng là nếu một đồ thị có "đủ nhiều" cạnh thì nó có một chu trình Hamilton. Tuy nhiên, chứng minh của hai định lý này không phải là các chứng minh xây dựng, có nghĩa là chúng ta biết sự tồn tại của một chu trình Hamilton nhưng không biết cách tìm ra một chu trình như thế.

**Định lý 5.44** (Dirac)**.** *Xét một đồ thị đơn $G$ với $n \geq 3$ đỉnh. Nếu mọi đỉnh của $G$ đều có bậc không bé hơn $n/2$ thì $G$ có một chu trình Hamilton.*

**Định lý 5.45** (Ore)**.** *Xét một đồ thị đơn $G$ với $n \geq 3$ đỉnh. Nếu với mọi cặp đỉnh không kề nhau $u, v$, ta có $\deg(u) + \deg(v) \geq n$ thì $G$ có một chu trình Hamilton.*

Chúng ta chỉ đưa ra một gợi ý chứng minh cho định lý Ore. Định lý Dirac có thể coi như một hệ quả của định lý Ore.

*Chứng minh.* Chúng ta chứng minh định lý Ore bằng phản chứng. Các bước như sau:

1. Giả sử $G$ không có chu trình Hamilton, khi đó chúng ta có thể thêm dần các cạnh vào $G$ để nhận được một đồ thị có chu trình Hamilton. Gọi $H$ là một đồ thị nhận được bằng cách thêm dần các cạnh vào $G$ sao cho $H$ không có chu trình Hamilton nhưng nếu thêm một cạnh vào $H$ thì sẽ tạo ra một đồ thị có chu trình Hamilton.

2. Một đồ thị $H$ như vậy phải có một đường đi Hamilton $v_1v_2\dots v_n$.

3. Vì $v_1$ và $v_n$ không kề nhau (trong $H$ và trong $G$) nên $\deg(v_1)+\deg(v_n) \geq n$.

4. Giả sử các đỉnh kề với $v_1$ là $v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$. Gọi $S$ là tập hợp các đỉnh $v_{i_1-1}, \dots, v_{i_k-1}$. Khi đó $v_n \notin S$ và $|S| + \deg(v_n) \geq n$.

5. Từ đó suy ra $S$ chứa một đỉnh $v_j$ kề với $v_n$ và $v_1, v_2, \dots, v_{j-1}, v_n, v_{n-1}, \dots, v_{j+1}$ là một chu trình Hamilton trong $H$, mâu thuẫn!

□

## 5.4 Đồ thị phẳng

Một vấn đề được quan tâm nhiều trong lý thuyết đồ thị và có ý nghĩa trong kỹ thuật (ví dụ: thiết kế vi mạch) là làm thế nào vẽ được một đồ thị trên một mặt phẳng sao không có hai cạnh nào cắt nhau (không tính các đỉnh chung).

**Định nghĩa 5.46.** *Một* biểu diễn phẳng *của một đồ thị là một cách vẽ đồ thị trong mặt phẳng sao cho không có hai cạnh nào cắt nhau (nghĩa là có điểm chung khác với hai đầu của cạnh). Một đồ thị được gọi là một* đồ thị phẳng *nếu nó có một cách biểu diễn phẳng.*

Giả sử $G$ là một đồ thị phẳng. Một biểu diễn phẳng của $G$ chia mặt phẳng thành các *miền* (hay *mặt*) giới hạn bởi các cạnh của $G$. Công thức liên hệ số miền này với số cạnh, số đỉnh của đồ thị được mang tên nhà toán học tìm ra và chứng minh nó.

**Định lý 5.47.** *Xét một đồ thị phẳng liên thông $G$ với $v$ đỉnh, $e$ cạnh. Gọi $r$ là số miền của mặt phẳng được giới hạn bởi các cạnh của $G$ trong một biểu diễn phẳng của nó. Khi đó:*

$$r = e - v + 2\,. \tag{5.3}$$

*Chứng minh.* Ta chứng minh bằng quy nạp theo số cạnh của đồ thị.

Nếu $e = 1$ thì $v = 2, r = 1$, khẳng định đúng.

Giả sử (5.3) đúng với mọi đồ thị phẳng liên thông có không quá $e-1$ cạnh. Xét hai trường hợp:

1. Đồ thị $G$ có một đỉnh treo $x$. Khi đó cạnh duy nhất kề với $x$ không phải là biên của miền nào cả. Xóa cạnh này và $x$, ta thu được một đồ thị phẳng với $e-1$ cạnh, $v-1$ đỉnh và $r$ miền. Theo giả thiết quy nạp, $r = (e-1) - (v-1) + 2 = e - v + 2$.

2. Mọi đỉnh của $G$ có bậc không bé hơn 2. Khi đó, áp dụng lập luận trong chứng minh của Định lý 5.41, ta có thể chỉ ra rằng $G$ có ít nhất một chu trình. Mỗi cạnh trên chu trình này là cạnh biên của một miền nào đó, do đó xóa đi một cạnh trên chu trình này làm số miền giảm đi 1. Đồ thị mới là một đồ thị phẳng, liên thông, có $e-1$ cạnh, $v$ đỉnh, $r-1$ miền. Theo giả thiết quy nạp, $r-1=(e-1)-v+2$, suy ra $r=e-v+2$.

□

Công thức (5.3) cho ta một số tiêu chuẩn đơn giản để chỉ ra một đồ thị là *không* phẳng.

**Hệ quả 5.48.** *Nếu $G$ là một đồ thị đơn, phẳng, liên thông với $v \geq 3$ đỉnh và $e$ cạnh, thì $e \geq 3v-6$.*

*Chứng minh.* Ta nhận xét rằng trong một biểu diễn phẳng của một đồ thị đơn, mỗi miền có ít nhất 3 cạnh biên, và mỗi cạnh là biên của đúng hai miền (có thể trùng nhau). Từ đó $2e \geq 3r = 3e-3v+6$, hay $3v-6 \geq e$. □

**Hệ quả 5.49.** *Nếu $G$ là một đồ thị đơn, phẳng, liên thông thì nó có ít nhất một đỉnh có bậc không quá 5.*

*Chứng minh.* Từ hệ quả trước và từ bổ đề bắt tay:

$$\sum \deg(u) = 2e \leq 6v-12\,.$$

Suy ra tồn tại một đỉnh có bậc không quá $\lfloor \frac{6v-12}{v} \rfloor \leq 5$. □

**Ví dụ 5.11.** Đồ thị đầy đủ $K_5$ có $e=10, v=5$, không thỏa mãn $e \leq 3v-6$, nên $K_5$ không phải là một đồ thị phẳng.

Lập luận trong chứng minh của Hệ quả 5.48 có thể được tổng quát hóa để thu được bất đẳng thức sau đây.

**Định lý 5.50** (Bất đẳng thức cạnh – đỉnh)**.** *Giả sử $G$ là một đồ thị phẳng, liên thông với $v$ cạnh, $e$ đỉnh. Gọi $g$ là độ dài chu trình ngắn nhất của $G$ và giả sử $3 \leq g < \infty$. Khi đó:*

$$e \leq \frac{g}{g-2}(v-2)\,. \tag{5.4}$$

**Ví dụ 5.12.** Đồ thị hai phần đầy đủ $K_{3,3}$ có $e=9, v=6$. Vì mọi chu trình trong đồ thị hai phần phải có độ dài chẵn nên $g \geq 4$. Thay vào ta thấy không thỏa mãn bất đẳng thức cạnh – đỉnh. Vậy $K_{3,3}$ không phải là một đồ thị phẳng.

Hai đồ thị $K_5$ và $K_{3,3}$ trong các ví dụ ở trên có vai trò quan trọng trong điều kiện cần và đủ để một đồ thị là phẳng do nhà toán học người Ba Lan Kuratowski đưa ra vào những năm 30 của thế kỷ 20.

Trước khi phát biểu định lý Kuratowski, chúng ta cần chuẩn bị một số khái niệm.

**Định nghĩa 5.51.** Phép chia cạnh *là một phép toán trên đồ thị, ở đó ta thêm một đỉnh mới w và thay thế cạnh uv bằng hai cạnh mới uw và wv.*

*Ta nói hai đồ thị là* đồng phôi *với nhau nếu chúng có thể được tạo ra từ cùng một đồ thị bằng các phép chia cạnh.*

**Định lý 5.52** (Kuratowski)**.** *Một đồ thị là không phẳng khi và chỉ khi nó có một đồ thị con đồng phôi với $K_5$ hoặc $K_{3,3}$.*

Chứng minh của định lý này vượt quá khuôn khổ của cuốn sách và không được trình bày ở đây.

## 5.5 Tô màu đồ thị

Trong mục này, chúng ta giới thiệu về tô màu đồ thị, mối liên hệ giữa bản đồ và đồ thị phẳng, và bài toán bốn màu nổi tiếng.

**Định nghĩa 5.53.** *Một cách* tô màu *một đồ thị đơn bằng k màu là một cách gán cho mỗi đỉnh của đồ thị một trong k màu, sao cho hai đỉnh kề nhau bất kỳ có màu khác nhau.*

Sắc số *của một đồ thị là số màu ít nhất cần dùng để tô màu đồ thị đó. Sắc số của một đồ thị G được ký hiệu bởi $\chi(G)$.*

**Ví dụ 5.13.** Trong đồ thị đầy đủ $K_n$, hai đỉnh bất kỳ luôn kề nhau nên cần được tô màu khác nhau. Do đó, để tô màu $K_n$ cần số màu bằng số đỉnh, tức là $\chi(K_n) = n$.

Ta đã biết mọi đồ thị hai phần có thể được tô bằng hai màu. Mặt khác, nếu một đồ thị hai phần có ít nhất một cạnh thì nó cần ít nhất hai màu để tô. Vậy sắc số của một đồ thị hai phần bất kỳ có ít nhất một cạnh bằng 2.

Chu trình $C_n$, $n \geq 3$, có $\chi(C_n) = 2$ nếu $n$ chẵn, $\chi(C_n) = 3$ nếu $n$ lẻ (vì sao?).

*Bài toán bốn màu* là một giả thuyết nổi tiếng được đưa ra từ thế kỷ 19. Nó phát biểu rằng mọi bản đồ có thể được tô bằng bốn màu, sao cho hai miền[1] (quốc gia, tỉnh, v.v.) có chung đường biên thì được tô bằng hai màu khác nhau. Việc tô màu bản đồ tương đương với tô màu đồ thị phẳng, nhờ khái niệm *đồ thị đối ngẫu* sau:

[1] Chúng ta chỉ tính các miền liên thông.

- Mỗi miền của bản đồ tương ứng với một đỉnh của đồ thị đối ngẫu;
- Hai đỉnh kề nhau nếu hai miền tương ứng có chung một phần đường biên (trường hợp chỉ có chung một điểm không tính là chung đường biên).

Khi đó mỗi bản đồ tương ứng với một đồ thị phẳng và ngược lại. Đồng thời, một cách tô màu bản đồ cũng tương ứng với một cách tô màu đồ thị phẳng đối ngẫu.

Bài toán bốn màu được giải quyết vào cuối thế kỷ 20, câu trả lời là khẳng định. Đây là một chứng minh nổi tiếng và gây tranh cãi, vì nó cần đến sự trợ giúp của máy tính để kiểm tra một số lượng lớn các phản ví dụ tiềm năng.

**Định lý 5.54** (Định lý Bốn màu)**.** *Mọi đồ thị phẳng có sắc số không lớn hơn 4.*

# Chương 6

# Cây

Trong chương này, chúng ta tìm hiểu về cây, một lớp đồ thị đơn giản nhưng đặc biệt quan trọng vì những tính chất và ứng dụng của chúng.

## 6.1 Những khái niệm cơ bản

**Định nghĩa 6.1.** *Một* cây *là một đồ thị vô hướng, liên thông, không có chu trình.*

**Nhận xét:** Từ điều kiện không có chu trình, ta có thể thấy một cây là một đồ thị đơn.

Định lý sau đây nêu ra một số tính chất quan trọng của cây, mỗi tính chất có thể được sử dụng như một định nghĩa tương đương của cây.

**Định lý 6.2.** *Giả sử $G$ là một đồ thị vô hướng có $n$ đỉnh. Các khẳng định sau là tương đương:*

*i) $G$ là một cây.*

*ii) $G$ liên thông và có $n-1$ cạnh.*

*iii) $G$ có $n-1$ cạnh và không có chu trình.*

*iv) $G$ liên thông và mọi cạnh đều là cạnh cầu.*

*v) Giữa hai đỉnh khác nhau bất kỳ của $G$ có đúng một đường đi.*

*vi) $G$ không có chu trình nhưng thêm một cạnh nối hai đỉnh không kề nhau bất kỳ tạo ra một đồ thị có đúng một chu trình đơn.*

*Chứng minh.* Ta sẽ chứng minh $i \Rightarrow ii \Rightarrow iii \Rightarrow iv \Rightarrow v \Rightarrow vi \Rightarrow i$.
**i ⇒ ii**: Theo định nghĩa cây, $G$ liên thông. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo $n$ rằng số cạnh của $G$ là $n-1$.

Bạn đọc có thể dễ dàng kiểm tra giả thiết quy nạp với $n = 1$. Giả sử nó đúng đến $n-1$, và giả sử $G$ là một cây có $n$ đỉnh.

Ta khẳng định rằng $G$ có một đỉnh bậc 1. Thật vậy, nếu tất cả các đỉnh đều có bậc không bé hơn 2, thì sử dụng lập luận trong chứng minh của Định lý 5.41, ta có thể chỉ ra sự tồn tại của một chu trình trong $G$, mâu thuẫn.

Gọi $v$ là một đỉnh bậc 1 của $G$. Khi đó $G - v$ là một đồ thị liên thông, không có chu trình, tức là một cây. Hơn nữa, nó có $n-1$ đỉnh nên theo giả thiết quy nạp có $n-2$ cạnh. Suy ra $G$ có $n-1$ cạnh (là $n-2$ cạnh của $G-v$ và cạnh kề với $v$).

**ii** $\Rightarrow$ **iii**: Ta chỉ cần chứng minh $G$ không có chu trình. Giả sử ngược lại rằng $G$ có một chu trình $\gamma$. Đồ thị nhận được từ $G$ bằng cách xóa đi một cạnh trong $\gamma$ là một đồ thị liên thông có $n$ đỉnh và $n-2$ cạnh, mâu thuẫn với Định lý 5.28.

**iii** $\Rightarrow$ **iv**: Ta chỉ cần chứng minh rằng mọi cạnh của $G$ đều là cạnh cầu. Giả sử ngược lại, có một cạnh $e = uv$ không phải là cạnh cầu. Khi đó, trong $G - e$ có một đường đi $p$ từ $u$ đến $v$. Đây cũng là một đường đi trong $G$ và nó hợp với $e$ tạo thành một chu trình trong $G$, mâu thuẫn.

**iv** $\Rightarrow$ **v**: Sự tồn tại của đường đi giữa hai đỉnh bất kỳ được suy ra từ định nghĩa của tính liên thông. Nếu giữa hai đỉnh nào đó có hai đường đi khác nhau thì mọi cạnh trên hai đường đi này không phải là cạnh cầu.

**v** $\Rightarrow$ **vi**: Tính chất không có chu trình hệ quả hiển nhiên của tính duy nhất của đường đi giữa hai đỉnh bất kỳ. Xét hai đỉnh không kề nhau $u, v$ và xét đồ thị $G'$ nhận được từ $G$ bằng cách thêm cạnh $e = uv$. Cạnh này cùng với đường đi sẵn có giữa $u$ và $v$ tạo thành một chu trình trong $G'$. Giả sử $G'$ có hai chu trình đơn. Khi đó cả hai chu trình này đều phải chứa cạnh $e$ (vì chúng chưa tồn tại trước khi $e$ được thêm vào), tức là chúng có dạng $p_1e$ và $p_2e$, ở đó $p_1$ và $p_2$ là các đường đi trong $G'$ giữa $u$ và $v$. Nhưng như vậy thì $p_1$ và $p_2$ cũng là các đường đi trong $G$, mâu thuẫn.

**vi** $\Rightarrow$ **i**: Mỗi chu trình đơn được tạo ra bằng cách nối hai đỉnh không kề nhau gồm cạnh mới thêm và một đường đi có sẵn trong $G$. Nói cách khác, giữa hai đỉnh bất kỳ trong $G$ có một đường đi, tức là $G$ liên thông. □

Trong những mô hình sử dụng cây trong đó *thứ tự* của các đỉnh là quan trọng, ta sử dụng *cây có gốc*.

**Định nghĩa 6.3.** *Một* cây có gốc *là một đồ thị có hướng, trong đó:*

- *Đồ thị vô hướng tương ứng là một cây.*
- *Một đỉnh được chọn làm* gốc*, các cạnh của cây hướng xa khỏi gốc.*

*Trong một cây có gốc, nếu $uv$ là một cạnh hướng từ $u$ tới $v$ thì ta nói $u$ là đỉnh* cha *của $v$, $v$ là một đỉnh* con *của $u$. Nếu $u$ nằm trên đường đi từ gốc tới $v$ thì ta nói $u$ là một* tổ tiên *của $v$, $v$ là một* hậu duệ *của $u$.*

*Một đỉnh không có con được gọi là một* lá. *Các đỉnh không phải lá được gọi là các* đỉnh trong.

Tầng *của đỉnh* $u$ *là khoảng cách từ* $u$ *tới gốc. Tầng lớn nhất của một đỉnh được gọi là* chiều cao *của cây.*

Cây con có gốc tại $u$ *là đồ thị con cảm sinh bởi* $u$ *và các hậu duệ của nó.*

**Chú ý:**

- Khác với "cây" trong tự nhiên, khi vẽ các đồ thị cây có gốc, ta thường vẽ cây quay xuống dưới, gốc ở trên cùng.

- Mỗi đỉnh khác gốc có duy nhất một đỉnh cha. Mỗi đỉnh trong có ít nhất một con.

**Định nghĩa 6.4.** *Một* cây $m$-phân *($m \geq 2$) là một cây mà mỗi đỉnh có không quá* $m$ *con. Khi* $m = 2$*, cây được gọi là một cây* nhị phân.

*Một cây* $m$*-phân* đầy *là một cây* $m$*-phân mà mỗi đỉnh trong có đúng* $m$ *con. Một cây* $m$*-phân có chiều cao* $h$ *là* cân bằng *nếu mọi lá của nó nằm ở tầng* $h$ *hoặc* $h - 1$.

Mối liên hệ giữa số đỉnh trong và số đỉnh của một cây $m$-phân đầy được cho bởi định lý sau.

**Định lý 6.5.** *Một cây* $m$*-phân đầy với* $i$ *đỉnh trong có* $n = mi + 1$ *đỉnh.*

*Chứng minh.* Ta sử dụng một chứng minh tổ hợp. Vì mỗi đỉnh khác gốc đều là con của một đỉnh trong, nên số đỉnh của cây bằng tổng số con của các đỉnh trong cộng 1. Vì cây là đầy nên tổng số con của các đỉnh trong bằng $mi$. Vậy $n - 1 = mi$. □

**Hệ quả 6.6.** *Xét một cây* $m$*-phân đầy với* $n$ *đỉnh trong đó có* $i$ *đỉnh trong và* $\ell$ *lá. Ta có:*

*i)* $i = (n-1)/m\,, \ell = n - (n-1)/m\,;$

*ii)* $n = mi + 1\,, \ell = (m-1)i + 1\,;$

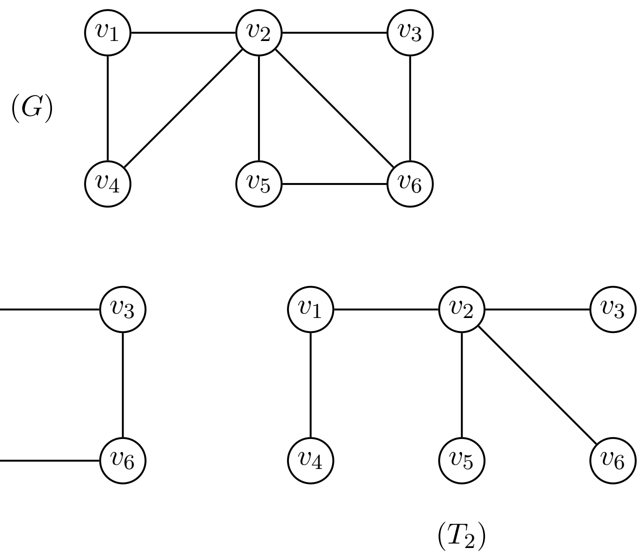
*iii)* $n = (m\ell - 1)/(m-1)\,, i = (\ell - 1)/(m-1)\,.$

## 6.2 Cây bao trùm của đồ thị

Giả sử $G$ là một đa đồ thị vô hướng liên thông.

**Định nghĩa 6.7.** *Một đồ thị con $T$ của $G$ là một* cây bao trùm *của $G$ nếu nó là một cây và chứa tất cả các đỉnh của $G$.*

**Ví dụ 6.1.** Trong Hình 6.1 là một đồ thị $G$ và hai cây bao trùm $T_1$, $T_2$ của nó. Cả hai cây bao trùm này đều chứa tất cả 6 đỉnh của $G$ và có 5 cạnh.




Hình 6.1: Một đồ thị $G$ và hai cây bao trùm của nó.

Định lý sau khẳng định sự tồn tại của cây bao trùm.

**Định lý 6.8.** *Một đồ thị $G$ có một cây bao trùm nếu và chỉ nếu nó liên thông.*

*Chứng minh.* Vì cây bao trùm là một đồ thị con liên thông nên một đồ thị có cây bao trùm phải liên thông.

Chiều ngược lại có thể được chứng minh bằng quy nạp theo số cạnh $m$ của $G$. Trường hợp $m = 1$ là hiển nhiên. Giả sử khẳng định đúng đến $m - 1$. Giả sử $G$ liên thông, có $m$ cạnh. Nếu $G$ không có chu trình thì nó là một cây bao trùm của chính nó. Nếu $G$ có chu trình thì đồ thị con thu được từ $G$ bằng cách xóa đi một cạnh $e$ trong chu trình là một đồ thị liên thông có $m - 1$ cạnh, do đó có một cây bao trùm. Hiển nhiên, cây bao trùm này của $G - e$ cũng chứa tất cả các đỉnh của $G$. $\square$

Một cách tổng quát, với đồ thị bất kỳ, không nhất thiết liên thông, ta có khái niệm *rừng bao trùm*, là một tập hợp các cây rời nhau chứa tất cả các đỉnh của đồ thị. Một hệ quả trực tiếp của định lý trên là sự tồn tại của rừng bao trùm của một đồ thị bất kỳ.

**Hệ quả 6.9.** *Nếu đồ thị $G$ có $k$ thành phần liên thông thì nó có một rừng bao trùm gồm $k$ cây, mỗi cây là một cây bao trùm của một thành phần liên thông.*

Một đồ thị liên thông nói chung có nhiều cây bao trùm. Để đưa ra công thức tính số cây bao trùm của một đồ thị, ta cần khái niệm sau.

**Định nghĩa 6.10.** Ma trận Laplace *của một đồ thị $G = (V, E)$ là một ma trận $L \in \mathbb{Z}^{V\times V}$, sao cho với mọi $u, v \in V$:*

$$L(u,v) = \begin{cases} \deg(u) \text{ nếu } u = v\,, \\ -e(u,v) \text{ nếu } u \neq v\,. \end{cases}$$

*Ở đó $e(u, v)$ là số cạnh nối $u$ với $v$.*

**Định lý 6.11** (Định lý Kirchhoff, hay định lý Cây – ma trận)**.** *Số cây bao trùm của một đồ thị $G$ bằng $\det(L_v)$, ở đó $L_v$ là ma trận Laplace của $G$ xóa đi hàng $v$ và cột $v$.*

Ta thừa nhận định lý Kirchhoff. Lưu ý rằng định lý này không phụ thuộc vào cách chọn đỉnh $v$.

**Ví dụ 6.2.** Quay trở lại với đồ thị trong Hình 6.1, ta có ma trận Laplace (với thứ tự đỉnh $v_1, v_2, \ldots, v_6$) là:

$$L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Theo định lý Kirchhoff, số cây bao trùm của $G$ là $\det(L_{v_6}) = 24$.

Bạn đọc có thể kiểm tra bằng cách liệt kê tất cả các cây bao trùm của $G$, và/hoặc áp dụng định lý Kirchhoff với một đỉnh khác.

Trong chứng minh của định lý 6.8, ta đã chỉ ra sự tồn tại của một cây bao trùm bằng một lập luận quy nạp. Ta sẽ kết thúc mục này bằng việc chỉ ra rằng có thể làm tốt hơn thế: ta có những thuật toán để tính một cây bao trùm cụ thể của một đồ thị liên thông. Trong chương này, chúng ta giới thiệu *thuật toán tìm kiếm theo chiều sâu*, hay DFS, và *thuật toán tìm kiếm theo chiều rộng*, hay *BFS*[1]. Do giới hạn về phạm vi của cuốn sách, ta sẽ không đi sâu vào phân tích cấu trúc dữ liệu hay độ phức tạp của các thuật toán.

Ý tưởng của thuật toán DFS, như tên gọi của nó, là khám phá một cách "tham lam", ưu tiên đi càng xa càng tốt, đến khi nào không đi được tiếp thì quay lại điểm gần nhất có một nhánh chưa khám phá và đi vào nhánh đó. Thuật toán được mô tả trong Bảng 6.1.

**Định lý 6.12** (Tính đúng đắn của thuật toán DFS)**.** *Nếu đồ thị $G$ liên thông thì thuật toán* DFS *cho kết quả là một cây bao trùm của $G$.*

*Chứng minh.* Ta có thể dễ dàng chứng minh các nhận xét sau:

- Tại mọi thời điểm trong quá trình thực hiện thuật toán, $T$ là một đồ thị liên thông.
- Thủ tục VISIT được gọi với mỗi đỉnh không quá một lần.
- Sau khi thủ tục VISIT($w$) kết thúc, tất cả các đỉnh kề với $w$ đã được thêm vào $T$.

Nhận xét thứ hai chứng tỏ $T$ không có chu trình. Nhận xét thứ ba, kết hợp với giả thiết $G$ liên thông, chứng tỏ $T$ chứa tất cả các đỉnh của $G$.

Việc hoàn thiện chứng minh chi tiết được dành cho bạn đọc như một bài tập. □

Nếu như thuật toán DFS khám phá một cách "tham lam", thì thuật toán BFS khám phá hết từng tầng trước khi tiếp tục với tầng tiếp theo. Để đảm bảo các đỉnh được thêm vào cây theo đúng thứ tự, một *hàng đợi $Q$* được sử dụng. Thuật toán BFS được trình bày trong Bảng 6.2.

**Định lý 6.13** (Tính đúng đắn của thuật toán BFS)**.** *Nếu đồ thị $G$ liên thông thì thuật toán* BFS *cho kết quả là một cây bao trùm của $G$.*

Chứng minh của định lý này tương tự chứng minh tính đúng đắn của thuật toán DFS và được dành cho bạn đọc như một bài tập.

**Định lý 6.14** (Tính chất của cây BFS)**.** *Giả sử $v$ là gốc của một cây bao trùm BFS của đồ thị $G$. Khi đó với mọi đỉnh $u$, số tầng của $u$ trong cây bằng khoảng cách giữa $u$ và $v$ trong $G$, tức là độ dài đường đi ngắn nhất giữa $u$ và $v$ trong $G$.*

[1] Tiếng Anh: Depth-first search, Breadth-first search

*Chứng minh.* Giả sử khoảng cách giữa $u$ và $v$ là $d$ và $u$ nằm ở tầng $k$ của cây. Do $k$ là độ dài đường đi từ $v$ đến $u$ trong cây nên $k \geq d$.

Ta chứng minh bằng quy nạp theo $d$ rằng $k \leq d$. Theo thuật toán, mọi đỉnh kề với $v$ đều nằm ở tầng 1, do đó khẳng định đúng với $d = 1$. Giả sử khẳng định đúng đến $d - 1$. Gọi $w$ là đỉnh liền trước $u$ trong một đường đi ngắn nhất từ $v$ đến $u$. Khoảng cách từ $w$ đến $u$ không vượt quá $d - 1$ nên theo giả thiết quy nạp, $w$ nằm ở tầng $j$ với $j \leq d - 1$. Theo cách xây dựng thuật toán, $k \leq j + 1 \leq d$. □

**Nhận xét:** Các thuật toán DFS và BFS có thể được sử dụng để kiểm tra tính liên thông của một đồ thị hoặc để tìm một rừng bao trùm cho một đồ thị bất kỳ.

```
Input: G liên thông với các đỉnh v1, v2, ..., vn.
Output: Một cây bao trùm T.
begin
    T := cây gồm duy nhất đỉnh v1
    VISIT(v1, T)
    return T
end

Function VISIT(v, T)
    for u kề với v và chưa có trong T do
        Thêm u và cạnh vu vào T
        VISIT(u, T)
    end
return
```

Bảng 6.1: Thuật toán DFS.

```
Input: G liên thông với các đỉnh v1, v2, ..., vn.
Output: Một cây bao trùm T.
begin
    T := cây gồm duy nhất đỉnh v1
    Q := hàng đợi gồm v1
    while Q khác rỗng do
        v := đỉnh đầu tiên trong Q
        Bỏ v khỏi Q
        for u kề với v do
            if u chưa có trong cả Q và T then
                Thêm u vào cuối Q
                Thêm u và cạnh vu vào T
            end
        end
    end
    return T
end
```

Bảng 6.2: Thuật toán BFS.

# Chương 7

# Một số bài toán tối ưu trên đồ thị

Trong chương này, chúng ta giới thiệu một số bài toán tối ưu cổ điển trên đồ thị có trọng số.

**Định nghĩa 7.1.** *Giả sử $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng hoặc có hướng. Một* hàm trọng số *trên $G$ là một hàm $w : E \to (0, \infty)$. Với mỗi $e \in E$, $w(e)$ được gọi là* trọng số *của cạnh $e$.*

*Một* đồ thị có trọng số *là một cặp gồm một đồ thị và một hàm trọng số trên nó.*

*Nếu $u$ và $v$ là hai đỉnh của $G$, một* đường đi ngắn nhất từ $u$ tới $v$ *là một đường đi có trọng số nhỏ nhất trong các đường đi từ $u$ tới $v$.*

## 7.1 Bài toán tìm đường ngắn nhất

Giả sử $G = (V, E)$ là một đồ thị liên thông với trọng số $w$. Xét hai đỉnh $s, t \in V$. Ta muốn tìm một đường đi ngắn nhất $p$ từ $s$ tới $t$.

Có nhiều thuật toán tìm đường ngắn nhất giữa hai đỉnh của một đồ thị liên thông. Chúng ta giới thiệu *thuật toán Dijkstra* và *thuật toán Bellman–Ford*. Các thuật toán này là các ví dụ về *thuật toán quy hoạch động*. Chúng sử dụng tính chất hiển nhiên sau của đường đi ngắn nhất.

**Mệnh đề 7.2.** *Nếu $p$ là một đường đi ngắn nhất từ $u$ đến $v$ và $z$ là một đỉnh trên $p$ thì đường đi con của $p$ đoạn từ $u$ tới $z$ là một đường đi ngắn nhất từ $u$ tới $z$.*

### 7.1.1 Thuật toán Dijkstra

Thuật toán Dijkstra tìm đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh được mô tả trong Bảng 7.1. Thuật toán bắt đầu từ đỉnh nguồn $s$ và một đường đi độ dài 0 xuất phát từ $s$. Tại mỗi bước, với mỗi đỉnh $v$ của đồ thị, thuật toán cập nhật $dist(v)$, độ dài một đường đi ngắn nhất từ $s$ tới $v$ *chỉ đi qua các đỉnh đã có trong đường đi* và thêm đỉnh có độ dài (tạm thời) nhỏ nhất đó vào đường đi. Biến $prev(v)$ lưu lại đỉnh liền trước $v$ trên đường đi và được dùng để xây dựng lại đường đi khi thuật toán kết thúc.

**Định lý 7.3.** *Nếu $G$ là liên thông thì thuật toán Dijkstra cho kết quả là một đường đi ngắn nhất từ $s$ tới $t$.*

*Chứng minh.* Ta sử dụng các ký hiệu của thuật toán trong Bảng 7.1 kèm theo chỉ số của bước lặp. Ngoài ra, gọi $S_i$ là tập hợp các đỉnh đã xử lý tại bước $i$.

Ta chứng minh bằng quy nạp theo số bước lặp $i$ rằng:

(a) Nếu $v \in S_i$ thì $dist_i(v)$ là độ dài một đường đi ngắn nhất từ $s$ tới $v$.

(b) Nếu $v \notin S_i$ thì $dist_i(v)$ là độ dài một đường đi ngắn nhất từ $s$ tới $v$ và chỉ đi qua các đỉnh đã có trong $S_i$.

Với $i = 0$, khẳng định đúng.

Giả sử khẳng định đã đúng đến $i - 1$.

Gọi $v$ là đỉnh được thêm vào $S_i$ ở bước $i$.

Giả sử có một đường đi $p$ từ $s$ tới $v$ sao cho $w(p) < dist_i(v)$. Gọi $u$ là đỉnh đầu tiên (tính từ $s$) mà tại đó $p$ ra khỏi $S_{i-1}$ và $p'$ là đường đi con của $p$ tính từ $s$ đến $u$. Khi đó, theo giả thiết quy nạp $(b)$:

$$dist_{i-1}(u) \leq w(p') < w(p) < dist_i(v) = dist_{i-1}(v)\,,$$

mâu thuẫn với cách chọn $v$. Vậy $(a)$ đúng với $i$.

Xét $u \notin S_i$. Gọi $p$ là một đường đi ngắn nhất từ $s$ tới $u$ chỉ đi qua các đỉnh trong $S_i$. Ta phải chứng minh $w(p) \geq dist_i(u)$. Ta có hai trường hợp:

1. Đỉnh liền trước $u$ trong $p$ là $v$. Khi đó, đường đi con của $p$ từ $s$ tới $v$ là một đường ngắn nhất từ $s$ tới $v$ chỉ đi qua các đỉnh trong $S_i$, do đó có độ dài $dist_{i-1}(v)$. Suy ra $w(p) = dist_{i-1}(v) + w(v, u) \geq dist_i(u)$.

2. Đỉnh liền trước $u$ trong $p$ là $z \neq v$, được thêm vào ở bước $j < i$. Gọi $p_1$ là đường đi con của $p$ từ $s$ tới $z$. Vì $p_1$ cũng là một đường đi ngắn nhất từ $s$ tới $z$ chỉ đi qua các đỉnh trong $S_i$ nên $w(p_1) = dist_i(z) = dist_j(z)$, và $w(p) = w(p_1) + w(z, u) = dist_j(z) + w(z, u) \geq dist_j(u) \geq dist_i(u)$.

Vậy $(b)$ đúng với $i$.

Vì $G$ là liên thông nên đỉnh $t$ sẽ được thêm vào $S$ tại một bước $i$ nào đó. Theo $(a)$, $dist(t)$ là độ dài một đường đi ngắn nhất từ $s$ tới $t$. □

**Nhận xét:** Nếu đồ thị có cạnh trọng số âm và có một chu trình có tổng trọng số là âm thì bằng cách lặp đi lặp lại chu trình này, ta thu được một đường đi có trọng số bé tùy ý. Thuật toán Dijkstra không cho phép phát hiện chu trình âm. Thuật toán Bellman – Ford được giới thiệu trong mục sau có thể phát hiện sự tồn tại của chu trình ấm.

### 7.1.2 Thuật toán Bellman – Ford

Thuật toán Bellman – Ford sử dụng phép cập nhật giống như trong thuật toán Dijkstra, nhưng tại mỗi bước lặp, sự cập nhật được thực hiện một loại trên tất cả các đỉnh của đồ thị. Thuật toán Bellman – Ford được mô tả trong Bảng 7.2.

**Định lý 7.4.** *Nếu $G$ là liên thông thì thuật toán Bellman – Ford cho kết quả là một đường đi ngắn nhất từ $s$ tới $t$.*

*Chứng minh.* Bạn đọc có thể chứng minh rằng sau vòng lặp thứ $i$, $dist(v)$ là độ dài một đường đi ngắn nhất từ $s$ tới $v$ chứa không quá $i$ cạnh. Do mọi đường đi ngắn nhất trong một đồ thị liên thông có không quá $|V| - 1$ cạnh, sau khi thuật toán kết thúc, $dist(v)$ là độ dài một đường đi ngắn nhất từ $s$ tới $v$. □

**Nhận xét:** Nếu đồ thị không có chu trình âm, sau tối đa $|V| - 1$ bước lặp, các giá trị $dist(v)$ sẽ không được cập nhật nữa. Do đó, để kiểm tra sự tồn tại của chu trình âm, ta chỉ cần gọi thêm một vòng lặp thứ $|V|$: nếu vẫn có đỉnh được cập nhật thì đồ thị có chứa chu trình âm.

## 7.2 Bài toán tìm cây bao trùm nhỏ nhất

Giả sử $G = (V, E)$ là một đồ thị liên thông với trọng số $w$. Ta muốn tìm một cây bao trùm $T$ của $G$ sao cho $w(T)$ nhỏ nhất. Hai thuật toán cổ điển để giải quyết bài toán này là *thuật toán Prim* và *thuật toán Kruskal*. Đây là hai ví dụ cơ bản về *thuật toán tham lam*.

### 7.2.1 Thuật toán Prim

Trong thuật toán Prim, ta bắt đầu tại một đỉnh bất kỳ và cho cây "mọc" thêm cạnh nhỏ nhất có thể. Tại mỗi bước, đồ thị trung gian luôn là một cây.

**Định lý 7.5.** *Nếu $G$ là liên thông thì thuật toán Prim cho kết quả là một cây bao trùm nhỏ nhất.*

*Chứng minh.* Giả sử các cạnh được thêm vào ở các bước của thuật toán lần lượt là $e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}$. Gọi $k$ là chỉ số lớn nhất sao cho tồn tại một cây bao

```
Input: G, w, s, t
Output: Một đường đi ngắn nhất từ s tới t
Q := ∅
for v ∈ V do
|   dist(v) := ∞; prev(v) := null; Thêm v vào Q
end
dist(s) := 0
while Q ≠ ∅ do
|   v := đỉnh trong Q sao cho dist(v) nhỏ nhất
|   if v == t then
|   |   return dist, prev
|   end
|   else
|   |   Bỏ v ra khỏi Q
|   |   for u ∈ Q kề với v do
|   |   |   if dist(v) + w(v, u) < dist(u) then
|   |   |   |   dist(u) := dist(v) + w(v, u)
|   |   |   |   prev(u) := v
|   |   |   end
|   |   end
|   end
end
```

Bảng 7.1: Thuật toán Dijkstra

```
Input: G = (V, E), s, t
Output: Một đường đi ngắn nhất từ s tới t
for v ∈ V do
|   dist(v) := ∞; prev(v) := null;
end
dist(s) := 0
for i = 1 to |V| − 1 do
|   for (u, v) ∈ E do
|   |   if dist(u) + d(u, v) < dist(v) then
|   |   |   dist(v) := dist(u) + d(u, v)
|   |   |   prev(v) := u
|   |   end
|   end
end
return dist, prev
```

Bảng 7.2: Thuật toán Bellman – Ford.

trùm nhỏ nhất chứa các cạnh $e_1, e_2, \cdots, e_k$. Ta sẽ chứng minh bằng phản chứng rằng $k = n - 1$.

Giả sử $k < n-1$. Gọi $T$ là một cây bao trùm nhỏ nhất chứa $e_1, e_2, \cdots, e_k$. Theo tính chất của cây, $T + e_{k+1}$ có đúng một chu trình đơn $\gamma$ và chu trình này chứa $e_{k+1}$.

Trên $\gamma$, bắt đầu từ $e_{k+1}$, ta đi dọc theo các cạnh cho đến khi gặp cạnh đầu tiên khác với $e_1, e_2, \cdots, e_{k+1}$ (cạnh này tồn tại vì $k+1$ cạnh này tạo thành một cây, không có chu trình). Gọi cạnh này là $e$, ta có $e$ là một cạnh ứng cử viên ở bước $k$ nên $w(e) \geq w(e_{k+1})$.

Trong $T$, thay $e$ bởi $e_{k+1}$, ta được một cây bao trùm $T'$ với $w(T') \leq w(T)$, tức là $T'$ là một cây bao trùm nhỏ nhất chứa $e_1, e_2, \cdots, e_{k+1}$, mâu thuẫn với cách chọn $T$.

Vậy $k = n - 1$. □

### 7.2.2 Thuật toán Kruskal

Thuật toán Kruskal được trình bày ở Bảng 7.4 cũng sử dụng $|V| - 1$ bước lặp như thuật toán Prim, nhưng cạnh được thêm vào ở mỗi bước không nhất thiết phải kề với các cạnh đã chọn trước đó. Vì vậy, nói chung các đồ thị trung gian trong thuật toán Kruskal không phải là cây.

**Định lý 7.6.** *Nếu $G$ là liên thông thì thuật toán Kruskal cho kết quả là một cây bao trùm nhỏ nhất.*

Chứng minh được dành cho bạn đọc như một bài tập.

**Input:** $G$ liên thông, $w$
**Output:** Một cây bao trùm nhỏ nhất
$T :=$ một cạnh có trọng số nhỏ nhất
**for** $i = 1$ **to** $|V| - 2$ **do**
    $e :=$ một cạnh nhỏ nhất có đúng một đầu đã nằm trong $T$ và không cùng các cạnh của $T$ tạo thành chu trình
    $T := T \cup \{e\}$
**end**
**return** $T$

Bảng 7.3: Thuật toán Prim.

**Input:** $G$ liên thông, $w$
**Output:** Một cây bao trùm nhỏ nhất
$T := \emptyset$
**for** $i = 1$ **to** $|V| - 1$ **do**
    $e :=$ một cạnh nhỏ nhất mà thêm vào $T$ không tạo ra chu trình
    $T := T \cup \{e\}$
**end**
**return** $T$

Bảng 7.4: Thuật toán Kruskal.

# Chỉ mục