VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

VIỆN TOÁN HỌC

NGUYỄN TUẤN LONG

QUAN HỆ GIỮA HỆ SỐ HILBERT HIỆU CHỈNH VÀ MÔĐUN COHEN-MACAULAY SUY RỘNG DÃY

Chuyên ngành: Đại số và Lý thuyết số
Mã số: 62 46 01 04

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HÀ NỘI - 2016

Luận án được hoàn thành tại:

Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam

Người hướng dẫn khoa học:

1. GS. TSKH. Nguyễn Tự Cường

2. GS. TS. Lê Thị Thanh Nhàn

Phản biện 1: ....

Phản biện 2: ....

Phản biện 3:...

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm Luận án cấp viện họp tại Viện Toán học - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam vào hồi ......giờ ngày ......tháng ......năm 2016.

Có thể tìm luận án tại:

- Thư viện Quốc gia Hà nội
- Thư viện Viện Toán học

Mở đầu

Cho $(R, \mathfrak{m})$ là một vành giao hoán địa phương Noether với iđêan cực đại duy nhất $\mathfrak{m}$ và M là một R-môđun hữu hạn sinh chiều d. Khi đó, với $\underline{x} = x_1, ..., x_d$ là một hệ tham số của M, luôn có $\ell(M/\underline{x}M) \geq e(\underline{x}; M)$, trong đó $\ell(\bullet)$ là hàm độ dài và $e(\underline{x}; M)$ là số bội của M đối với hệ tham số $\underline{x}$. Nếu với mọi (hoặc tồn tại) hệ tham số $\underline{x}$ sao cho $\ell(M/\underline{x}M) = e(\underline{x}; M)$ thì M được gọi là *môđun Cohen-Macaulay*. Lớp Môđun Cohen-Macaulay là đối tượng nghiên cứu trung tâm của Đại số giao hoán. Một trong những mở rộng đầu tiên của lớp môđun Cohen-Macaulay là khái niệm môđun Buchsbaum được đưa ra bởi J. Stückrad và W. Vogel. Môđun M được gọi là *Buchsbaum* nếu tồn tại một hằng số C sao cho $\ell(M/\underline{x}M) = e(\underline{x}; M) + C$ với mọi hệ tham số $\underline{x}$. Tiếp sau đó, N. T. Cường-P. Schenzel-N. V. Trung (1978) đã đưa một lớp môđun mà tồn tại hằng số C sao cho $\ell(M/\underline{x}M) \leq e(\underline{x}; M) + C$ với mọi hệ tham số $\underline{x}$, được gọi là *môđun Cohen-Macaulay suy rộng*. Hằng số C nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện trên được gọi là *hằng số Buchsbaum* và ký hiệu là $I(M)$.

Một cách tiếp cận khác tới cấu trúc môđun là thông qua các hệ số Hilbert. Và đây cũng là hướng nghiên cứu của luận án. Trước hết, cho I là một iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ của R. Khi đó, với n đủ lớn tồn tại các số nguyên $e_i(I; M)$ sao cho

$$\ell(M/I^{n+1}M) = \sum_{i=0}^{d}(-1)^i e_i(I; M)\binom{n+d-i}{d-i}.$$

Những số nguyên $e_i(I; M)$ được gọi là *hệ số Hilbert* của M đối với iđêan I. Hơn nữa, $e_0(I; M)$ chính là số bội của môđun M đối với iđêan I. Gần đây, L. Ghezzi-S. Goto-J.Y. Hong-K. Ozeki-T. T. Phuong-W. V. Vasconcelos (2010) đã đưa ra một đặc trưng cho môđun Cohen-Macaulay qua hệ số Hilbert. Cụ thể, cho M là một môđun không trộn lẫn (unmixed). Khi đó, môđun M là Cohen-Macaulay khi và chỉ khi $e_1(\mathfrak{q}; M) = 0$ với mọi (hoặc với một) iđêan tham số $\mathfrak{q}$ của M. Ngay sau đó, S. Goto-K.Ozeki (2011) đã chỉ ra M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng khi và chỉ khi tập các hệ số Hilbert $\wedge_i(M) = \{e_i(\mathfrak{q}; M)\}$, trong đó $\mathfrak{q}$ chạy trên tập các iđêan tham số của M với mọi $i = 1, ..., d$, là hữu hạn. Ký hiệu $U_M(0)$ là môđun con lớn nhất của M sao cho $\dim U_M(0) < \dim M$. Khi đó, môđun M trong hai kết quả trên thỏa mãn $\dim U_M(0) \leq 0$. Vậy một câu hỏi tự nhiên đặt ra là: Điều gì xảy ra khi $\dim U_M(0) > 0$? Trước khi trả lời cho câu hỏi này chúng ta cần một vài khái niệm sau. Cho I là một iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ của R. *Bậc số* *học* thứ i của M đối với iđêan I được định nghĩa như sau

$$\operatorname{adeg}_i(I;M) = \sum_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Ass}(M),\, \dim R/\mathfrak{p}=i} \ell(H^0_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}))(\mathfrak{p})e_0(I;R/\mathfrak{p}).$$

Một lọc $\mathcal{D}: M = D_0 \supset D_1 \supset \ldots \supset D_t = H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ của M được gọi là *lọc chiều* nếu D_{i+1} là môđun con lớn nhất của D_i sao cho $\dim D_{i+1} < \dim D_i$ với mọi $i = 0, ..., t-1$. Lưu ý, lọc chiều luôn tồn tại và xác định nhất. Khi đó, môđun M được gọi là *Cohen-Macaulay dãy* (tương ứng, *Cohen-Macaulay suy rộng dãy*) nếu các môđun D_i/D_{i+1} là Cohen-Macaulay (tương ứng, Cohen-Macaulay suy rộng) với mọi $i = 0, ..., t$. Một hệ tham số $x_1, ..., x_d$ được gọi là *hệ tham số tách biệt* (distinguished) của M nếu $(x_{\dim D_i+1}, ..., x_d)D_i = 0$ với mọi $i = 1, ..., t$ và iđêan tham số $\mathfrak{q}$ của M được gọi là *iđêan tham số tách biệt* nếu $\mathfrak{q}$ sinh bởi một hệ tham số tách biệt. N. T. Cường-S. Goto-H. L. Trường (2013) đã đưa ra đặc trưng cho môđun Cohen-Macaulay dãy thông qua hệ số Hilbert và bậc số học như sau: Giả sử R là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay địa phương. Khi đó, môđun M là một môđun Cohen-Macaulay dãy khi và chỉ khi $(-1)^i e_i(\mathfrak{q};M) = \operatorname{adeg}_{d-i}(\mathfrak{q};M)$ với mọi $i = 0, ..., d$ và với mọi (hoặc với một) iđêan tham số tách biệt $\mathfrak{q}$ của M. Kết quả này được xem như một mở rộng cho kết quả của L. Ghezzi-S. Goto-J.Y. Hong-K. Ozeki-T. T. Phuong-W. V. Vasconcelos (2010) khi bỏ điều kiện $U_M(0) = 0$. Phần trả lời còn lại, cụ thể là đặc trưng môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy qua hệ số Hilbert là mục tiêu chính của luận án.

Với gợi ý từ kết quả của N. T. Cường-S. Goto-H. L. Trường (2013), chúng tôi xét hiệu

$$H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) = \ell(M/\mathfrak{q}^{n+1}M) - \sum_{i=0}^{d} \operatorname{adeg}_i(\mathfrak{q};M)\binom{n+i}{i}$$

như một hàm số với biến n và được gọi là *hàm hiệu chỉnh Hilbert-Samuel* của M đối với iđêan $\mathfrak{q}$. Lưu ý, $\operatorname{adeg}_d(\mathfrak{q};M) = e_0(\mathfrak{q};M)$. Do đó, với n đủ lớn hàm số $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n)$ là một đa thức có dạng

$$P^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) = \sum_{i=1}^{d} \Big((-1)^i e_i(\mathfrak{q};M) - \operatorname{adeg}_{d-i}(\mathfrak{q};M)\Big)\binom{n+d-i}{d-i}.$$

Ký hiệu $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}(M)$ là tập tất cả các đa thức $P^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n)$, trong đó $\mathfrak{q}$ chạy trên tập các iđêan tham số tách biệt của M. Kết quả chính của N. T. Cường-S. Goto-H. L. Trường (2013) có thể được phát biểu lại như sau: Giả sử R là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay địa phương. Khi đó, môđun M là một môđun Cohen-Macaulay dãy khi và chỉ khi $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}(M) = \{0\}$. Định lý quan trọng nhất của luận án là một mở rộng của kết quả trên và được phát biểu như sau.

Định lý chính. *Giả sử R là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay địa phương. Khi đó, M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy khi và chỉ khi tập các đa thức $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}(M)$ là hữu hạn.*

Để chứng minh điều kiện cần của Định lý chính, trước hết chúng tôi xét tập $\vee_i(M) = \{(-1)^i e_i(\mathfrak{q}; M) - \mathrm{adeg}_{d-i}(\mathfrak{q}; M) \mid \mathfrak{q}$ hệ tham số tách biệt$\}$ và chú ý rằng $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}(M)$ hữu hạn khi và chỉ khi $\vee_i(M)$ hữu hạn với mọi $i = 1, ..., d$. Cho M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy. Khi đó, bằng quy nạp không quá khó để chỉ ra $\vee_i(M)$ hữu hạn với mọi $i = 1, ..., d-1$. Khó khăn ở đây là chỉ ra $\vee_d(M)$ là hữu hạn. Trước hết, với $\mathfrak{q}$ là iđêan tham số của M, gọi $\rho_{\mathfrak{q}}(M)$ là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $\ell(M/\mathfrak{q}^{n+1}M)$ là đa thức với mọi $n \geq \rho_{\mathfrak{q}}(M)$. Khi đó, với $n \geq \rho_{\mathfrak{q}}(M)$ chúng ta có công thức

$$\begin{aligned}&\mid (-1)^d e_d(\mathfrak{q}; M) - \mathrm{adeg}_0(\mathfrak{q}; M) \mid \\ &\qquad \leq \mid H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) \mid + \sum_{i=1}^{d-1} \mid (-1)^i e_i(\mathfrak{q}; M) - \mathrm{adeg}_{d-i}(\mathfrak{q}; M) \mid \binom{n+d-i}{d-i}. \quad (\dagger)\end{aligned}$$

Từ công thức (†), để chỉ ra $\vee_d(M)$ là hữu hạn chúng tôi cần giải quyết hai vấn đề sau.

Vấn đề 1: Cho M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy. Xác định chặn đều cho $\rho_{\mathfrak{q}}(M)$ với mọi iđêan tham số tách biệt $\mathfrak{q}$ của M.

Vấn đề 2: Cho M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy. Tìm một hằng số N sao cho $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) \geq 0$ với mọi $n \geq N$ và mọi iđêan tham số tách biệt $\mathfrak{q}$ của M.

Cho M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy. Khi hai vấn đề trên được giải quyết, gọi C là hằng số thỏa mãn $C \geq N$ và $C \geq \rho_{\mathfrak{q}}(M)$ với mọi iđêan tham số tách biệt $\mathfrak{q}$ của M. Lưu ý, do $\vee_i(M)$ là hữu hạn nên luôn tồn tại các hằng số C_i sao cho với mọi iđêan tham số tách biệt $\mathfrak{q}$ của M, ta luôn có $\mid (-1)^i e_i(\mathfrak{q}; M) - \mathrm{adeg}_{d-i}(\mathfrak{q}; M) \mid \leq C_i$ với mọi $i = 1, ..., d-1$. Hơn nữa, không khó để chỉ ra tồn tại một đa thức $g(n)$ có các hệ số không phụ thuộc vào iđêan tham số tách biệt $\mathfrak{q}$ sao cho $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) \leq g(n)$ (Bổ đề 4.2.1). Từ công thức (†), chọn $n = C$ ta có

$$\mid (-1)^d e_d(\mathfrak{q}; M) - \mathrm{adeg}_0(\mathfrak{q}; M) \mid \leq g(C) + \sum_{i=1}^{d-1} C_i \binom{C+d-i}{d-i},$$

với mọi iđêan tham số tách biệt $\mathfrak{q}$ của M. Do dó, $\vee_d(M)$ là hữu hạn.

Để chứng minh điều kiện đủ của Định lý chính, chúng tôi dựa vào kết quả của N. T. Cương - Đ. T. Cường (2007) về đặc trưng môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy qua các đối đồng điều địa phương.

Luận án được chia thành bốn chương. Chương 1 là chương chuẩn bị. Trong chương này, chúng tôi nhắc lại những khái niệm và tính chất cần sử dụng ở các chương sau. Các kết quả của luận án được trình bày trong Chương 2, Chương 3 và Chương 4. Mục tiêu của Chương 2 là giải quyết Vấn đề 1. Cụ thể, với M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy, chúng tôi đưa ra một chặn đều cho chỉ số chính quy của môđun phân bậc liên kết $G_{\mathfrak{q}}(M)$ với mọi iđêan tham số tách biệt $\mathfrak{q}$ của M. Mục tiêu của Chương 3 là đưa ra lời giải cho Vấn đề 2. Cụ thể, chúng tôi chỉ ra rằng nếu $\mathfrak{q}$ là một iđêan tham số tách biệt thì luôn tồn tại số nguyên dương n_0 đủ lớn sao cho hàm số $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n)$ tăng và nhận giá trị không âm với $n \geq n_0$. Hơn nữa, nếu M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy thì có thể chọn số nguyên n_0 độc lập với $\mathfrak{q}$. Với sự chuẩn bị của Chương 2 và Chương 3, Chương 4 được dành riêng để chứng minh Định lý chính. Cụ thể, với M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy, chúng tôi dùng kết quả về chặn đều chỉ số chính quy ở Chương 2 và tính không âm của hàm $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n)$ ở Chương 3 để chỉ ra tập $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}(M)$ là hữu hạn. Chiều còn lại, với tập $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}(M)$ là hữu hạn, chúng tôi xây dựng một tập các hệ tham số từ một hệ tham số cho trước và áp dụng quy nạp trên tập hệ tham số này để chỉ ra M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy.

Chương 1

Chuẩn bị

Trong chương này, chúng tôi nhắc lại những khái niệm và một số kết quả đã biết về lọc chiều, hệ tham số tốt, hệ tham số tách biệt, môđun Cohen-Macaulay dãy, chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford, phần tử lọc chính quy trong vành phân bậc, hệ số Hilbert, phần tử bề mặt. Trong toàn bộ luận án luôn xét $(R, \mathfrak{m})$ là một vành giao hoán có đơn vị, địa phương, Noether với iđêan cực đại duy nhất $\mathfrak{m}$ và M là R-môđun hữu hạn sinh chiều d.

1.1 Lọc chiều, hệ tham số tốt và hệ tham số tách biệt

Định nghĩa 1.1.1. (N. T. Cường-L. T. Nhàn, 2003; N. T. Cường-Đ. T. Cường, 2007)
(i) Một lọc hữu hạn các môđun con của M

$$\mathcal{F} : M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_s$$

được gọi là *thỏa mãn điều kiện chiều* nếu $\dim M_i > \dim M_{i+1}$ với mọi $i = 0, ..., s-1$. Khi đó, ta nói rằng lọc $\mathcal{F}$ có độ dài s.
(ii) Một lọc hữu hạn các môđun con $\mathcal{D} : M = D_0 \supset D_1 \supset ... \supset D_t = H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ của M được gọi là *lọc chiều* nếu đồng thời thỏa mãn hai điều kiện sau:

(1) $\mathcal{D}$ là lọc thỏa mãn điều kiện chiều,

(2) D_i là môđun con lớn nhất của D_{i-1} với mọi $i = 1, ..., t$.

Chú ý 1.1.2. (i) Vì M là môđun hữu hạn sinh trên vành địa phương Noether nên lọc chiều luôn tồn tại và là duy nhất. Hơn nữa, cho $0 = \bigcap_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Ass} M} N(\mathfrak{p})$ là một phân tích nguyên sơ tối tiểu của 0 trong M. Đặt $d_i = \dim D_i$. Khi đó, $D_i = \bigcap_{\dim(R/\mathfrak{p})\geqslant d_{i-1}} N(\mathfrak{p})$ với

mọi $i = 1, ..., t$.
(ii) Mọi lọc thỏa mãn điều kiện chiều luôn có độ dài nhỏ hơn hoặc bằng độ dài của lọc chiều.
(iii) Trong luận án này, luôn ký hiệu

$$\mathcal{D} : M = D_0 \supset D_1 \supset ... \supset D_t = H^0_{\mathfrak{m}}(M)$$

là lọc chiều, t là độ dài lọc chiều và $d_i = \dim D_i$ với mọi $i = 0, ..., t$. Lọc các môđun con của M luôn được hiểu là lọc các môđun con thỏa mãn điều kiện chiều.

Định nghĩa 1.1.4. (N. T. Cường-Đ. T. Cường, 2007; P. Schenzel, 1999) Cho $x_1, ..., x_d$ là một hệ tham số của M và $\mathcal{F} : M = M_0 \supset M_1 \supset ... \supset M_s$ là một lọc các môđun con của M.
(i) Hệ tham số $x_1, ..., x_d$ của M được gọi là một *hệ tham số tốt đối với lọc* $\mathcal{F}$ nếu $(x_{\dim M_i+1}, ..., x_d)M \cap M_i = 0$ với mọi $i = 1, ..., s$. Một hệ tham số tốt của M đối với lọc chiều đơn giản được gọi là *hệ tham số tốt* của M.
(ii) Hệ tham số $x_1, ..., x_d$ của M được gọi là một *hệ tham số tách biệt đối với lọc* $\mathcal{F}$ nếu $(x_{\dim M_i+1}, ..., x_d)M_i = 0$ với mọi $i = 1, ..., s$. Một hệ tham số tách biệt của M đối với lọc chiều đơn giản được gọi là *hệ tham số tách biệt* của M. Dễ thấy, một hệ tham số tốt luôn là một hệ tham số tách biệt.
(iii) Iđêan tham số $\mathfrak{q}$ của M được gọi là *iđêan tham số tốt* (tương ứng, *iđêan tham số tách biệt*) đối với lọc $\mathcal{F}$ nếu nó sinh bởi một hệ tham số tốt (tương ứng, hệ tham số tách biệt) của M đối với lọc $\mathcal{F}$. Iđêan tham số tốt (tương ứng, iđêan tham số tách biệt) của M đối với lọc chiều được gọi đơn giản là *iđêan tham số tốt* (tương ứng, *iđêan tham số tách biệt*) của M.

Lưu ý rằng, khái niệm lọc chiều, hệ tham số tách biệt do P. Schenzel (1999) đưa ra. Hệ tham số tốt do N. T. Cường - Đ. T. Cường (2007) đưa ra, nhằm mục đích nghiên cứu lớp các môđun Cohen-Macaulay dãy và Cohen-Macaulay suy rộng dãy.

Chú ý 1.1.6. (i) Hệ tham số tốt và hệ tham số tách biệt luôn tồn tại. Hơn nữa, nếu $\dim M > 0$ tập các hệ tham số tốt và tập các hệ tham số tách biệt là vô hạn.
(ii) Một hệ tham số tốt (tương ứng, hệ tham số tách biệt) của M luôn là hệ tham số tốt (tương ứng, hệ tham số tách biệt) đối với mọi lọc các môđun con của M.

1.2 Môđun Cohen-Macaulay dãy

Định nghĩa 1.2.1. (N. T. Cường-L. T. Nhàn, 2003) Một lọc $\mathcal{F} : M = M_0 \supset M_1 \supset ... \supset M_s$ môđun con của M được gọi là *lọc Cohen-Macaulay* nếu $\ell(M_s) < \infty$ và M_i/M_{i+1} môđun Cohen-Macaulay với mọi $i = 0, .., s-1$. Môđun M được gọi là Cohen-Macaulay dãy nếu nó có lọc Cohen-Macaulay.

Chú ý 1.2.2. Cho M là môđun Cohen-Macaulay dãy. Khi đó, M có một lọc Cohen-Macaulay duy nhất chính là lọc chiều.

Bổ đề sau sẽ chỉ ra hệ tham tốt và hệ tham số tách biệt là trùng nhau khi M là môđun Cohen-Macaulay dãy.

Bổ đề 1.2.5. *Cho M là một môđun Cohen-Macaulay dãy và $\underline{x} = x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số của M. Khi đó các mệnh đề sau là tương đương:*

(i) *$\underline{x}$ là hệ tham số tốt của M.*

(ii) *$\underline{x}$ là hệ tham số tách biệt của M.*

1.3 Chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford

Định nghĩa 1.3.1. Cho $S = \bigoplus_{n \geq 0} S_n$ là vành Noether phân bậc chuẩn và $E = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} E_n$ là S-môđun phân bậc hữu hạn sinh. *Chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford* của E gọi ngắn gọn là *chỉ số chính quy* được ký hiệu và định nghĩa như sau

$$\mathrm{reg}(E) = \sup\{n + i \mid [H^i_{S_+}(E)]_n \neq 0, i \geq 0\},$$

trong đó $S_+ = \bigoplus_{n>0} S_n$. *Chỉ số chính quy hình học* g-reg(E) được xác định bởi

$$\text{g-reg}(E) = \sup\{n + i \mid [H^i_{S_+}(E)]_n \neq 0, i \geq 1\}.$$

Do đó, g-reg$(E) \leq \mathrm{reg}(E)$.

Cho S là một vành phân bậc Noether với S_0 là vành địa phương Artin và E là S-môđun phân bậc hữu hạn sinh chiều k. Ta có E_n là S_0-môđun có độ dài hữu hạn. Khi đó *hàm Hilbert* được xác định bởi $h_E(n) = \ell_{S_0}(E_n)$. Hơn nữa, khi n đủ lớn tồn tại đa thức $p_E(n)$ bậc $k-1$ với hệ số hữu tỷ được gọi là *đa thức Hilbert* sao cho $\ell_{S_0}(E_n) = p_E(n)$.

Bổ đề sau đưa ra một mối liên hệ giữa hàm Hilbert và đa thức Hilbert thông qua đối đồng điều địa phương phân bậc.

Bổ đề 1.3.3. *Với mọi số nguyên n,*

$$h_E(n) - p_E(n) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i \ell(H^i_{S_+}(E)_n). \qquad (*)$$

Lưu ý rằng, công thức (∗) trong Bổ đề 1.3.3 được gọi là công thức Serre.

Định nghĩa 1.3.4. Cho S là một vành phân bậc Noether và E là S-môđun phân bậc hữu hạn sinh. Phần tử thuần nhất $z \in S$ được gọi là phần tử *E-lọc chính quy* nếu $(0 :_E z)_n = 0$ với n đủ lớn.

Chú ý 1.3.5. Nếu $(S_0, \mathfrak{n}_0)$ là vành địa phương với trường thặng dư $S_0/\mathfrak{n}_0$ vô hạn khi đó luôn tồn tại phần tử E-lọc chính quy $z \in S_1$. Nếu S_0 có trường thặng dư hữu hạn ta xét $S_0[X]_{\mathfrak{n}_0 S_0[X]}$ là địa phương hóa của vành đa thức $S_0[X]$ tại iđêan nguyên tố $\mathfrak{n}_0 S_0[X]$. Khi đó $S_0' = S_0[X]_{\mathfrak{n}_0 S_0[X]}$ là vành địa phương có trường thặng dư vô hạn. Đặt $S' = S \otimes S_0'$ và $E' = E \otimes S_0'$. Chú ý rằng

$$H^i_{S_+}(E)_n \otimes_{S_0} S_0' \cong H^i_{S'_+}(E')_n.$$

Do đó $\operatorname{reg}(E) = \operatorname{reg}(E')$. Nói cách khác, không mất tính tổng quát ta luôn có thể giả sử S_0 là vành địa phương có trường thặng dư vô hạn.

1.4 Hệ số Hilbert

Cho I là một iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ của R. Hàm số $H_I(n) = \sum_{i=0}^{n} h_{G_I(M)}(i) = \ell(M/I^n M)$ được gọi là *hàm Hilbert-Samuel* của M đối với iđêan I. P. Samuel đã chỉ ra rằng tồn tại một đa thức $P_I(n)$ bậc d với hệ số hữu tỉ, được gọi là *đa thức Hilbert-Samuel* sao cho $\ell(M/I^{n+1}M) = P_I(n)$ với n đủ lớn. Khi đó tồn tại những số nguyên $e_i(I; M)$ sao cho

$$P_I(n) = \sum_{i=0}^{d}(-1)^i e_i(I; M)\binom{n+d-i}{d-i}.$$

Những số nguyên $e_i(I; M)$ được gọi là *hệ số Hilbert* của M đối với iđêan I. Số nguyên dương nhỏ nhất n_0 là để hàm Hilbert-Samuel $H_I(n)$ và đa thức Hilbert-Samuel $P_I(n)$

trùng nhau được gọi là *chỉ số Hilbert* (postulation number) của M ứng với iđêan I và được ký hiệu là $\rho_I(M)$.

Bổ đề 1.4.1. $\rho_I(M) \leq \operatorname{reg}(G_I(M))$.

Định nghĩa 1.4.3. Cho I là iđêan của $\mathfrak{m}$-nguyên sơ của R. Một phần tử $x \in I \setminus I^2$ được gọi là *phần tử bề mặt (superficial)* của M đối với iđêan I nếu tồn tại hằng số không âm c sao cho $(I^{n+1}M : x) \cap I^c M = I^n M$ với mọi $n \geq c$.

Chú ý 1.4.4. (i) Lưu ý rằng, phần tử bề mặt ở Định nghĩa 1.4.3 không phải luôn tồn tại. Tuy nhiên, nếu R có trường thặng dư vô hạn thì nó luôn tồn tại. Để vượt qua hạn chế này, khi cần thiết, ta dùng mở rộng phẳng trung thành $R[X]_{\mathfrak{m}R[X]}$ ($R[X]$ là vành đa thức). Do đó, ta luôn có thể giả sử R có trường thặng dư vô hạn hay phần tử bề mặt là luôn tồn tại.
(ii) Cho I là iđêan của R và $x \in I \setminus I^2$, gọi x^* là ảnh của x trong $G_I(R)$. Khi đó, x là phần tử bề mặt của M đối với iđêan I khi và chỉ khi x^* là phần tử $G_I(M)$-lọc chính quy.
(iii) Nếu x là một phần tử bề mặt của M đối với iđêan I thì x là phần tử lọc chính quy của M.

Chương 2

Chặn đều chỉ số chính quy cho môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy

Chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford là bất biến quan trọng trong đại số giao hoán và hình học đại số. Nó cung cấp nhiều thông tin về các cấu trúc phân bậc phức tạp, đơn cử như bậc cao nhất không triệt tiêu của một đối đồng điều địa phương của môđun phân bậc .... Ngoài ra, việc đưa ra chặn trên chỉ số chính quy cho chúng ta chặn trên của kiểu quan hệ (relation type), chỉ số Hilbert. Mục tiêu của chương này là mở rộng kết quả của C. H. Linh-N. V. Trung (2006) về chặn đều chỉ số chính quy cho môđun Cohen-Macaulay suy rộng. Cụ thể, nếu M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng thì luôn tồn tại một hằng số C sao cho $\operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M)) \leq C$ với mọi iđêan tham số $\mathfrak{q}$ của M. Một câu hỏi tự nhiên là: Kết quả trên còn đúng khi M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy? I. M. Aberbach-L.Ghezzi-H. H. Tai (2006) đã xây dựng một vành R đầy đủ, đẳng chiều, Noether chiều 3, Cohen-Macaulay suy rộng dãy (xem Chú ý 2.2.10) mà kiểu quan hệ không bị chặn đều. Dẫn đến, không tồn tại chặn đều cho chỉ số chính quy cho mọi iđêan tham số. Do đó, một câu hỏi khác yếu hơn: Cho M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy. Có tồn tại một hằng số C sao cho $\operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M)) \leq C$ với mọi iđêan tham số tách biệt $\mathfrak{q}$ của M?

Câu trả lời đầy đủ cho câu hỏi này sẽ được trình bày ở tiết 2. Lưu ý, khái niệm môđun Cohen-Macaulay suy rộng do N.T. Cường-P. Schenzel-N. V. Trung (1978) đưa ra, khái niệm môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy do N.T. Cường-L. T. Nhàn (2003) đưa ra.

2.1 Môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy

Với iđêan tham số $\mathfrak{q}$ của M đặt $I(\mathfrak{q}; M) = \ell(M/\mathfrak{q}M) - e(\mathfrak{q}; M)$. Khi đó, M là *Cohen-Macaulay suy rộng*$\Leftrightarrow$ $I(M) = \sup\{I(\mathfrak{q}; M) | \mathfrak{q}$ là iđêan tham số của $M\} < \infty \Leftrightarrow$ Các môđun đối đồng điều địa phương $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ hữu hạn sinh với mọi $i < d$. Hằng số $I(M)$ được gọi là *hằng số Buchsbaum* của M và $I(M) = \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d-1}{i} \ell(H^i_{\mathfrak{m}}(M))$. Hơn nữa, $I(M) = 0$ khi và chỉ khi M là môđun Cohen-Macaulay.

Định nghĩa 2.1.1. (N. T. Cường - L. T. Nhàn, 2003) Một lọc $\mathcal{F} : M = M_0 \supset M_1 \supset ... \supset M_s$ môđun con của M được gọi là *lọc Cohen-Macaulay suy rộng* nếu $\ell(M_s) < \infty$ và M_i/M_{i+1} môđun Cohen-Macaulay suy rộng với mọi $i = 0, .., s-1$. Môđun M được gọi là Cohen-Macaulay suy rộng dãy nếu M có lọc Cohen-Macaulay suy rộng.

Chú ý 2.1.2. Cho M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy và $\mathcal{D} : M = D_0 \supset D_1 \supset ... \supset D_t = H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ là lọc chiều của M. Khi đó, $\mathcal{F} : M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_s$ là một lọc Cohen-Macaulay suy rộng khi và chỉ khi $s = t$ và $\ell(D_i/M_i) < \infty$ với mọi $i = 0, ..., t$.

Phần tiếp theo của tiết này, chúng tôi chỉ ra nếu M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy với lọc Cohen-Macaulay suy rộng $\mathcal{F} : M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_t$ và J là iđêan sinh bởi một phần hệ tham số tách biệt của M thì các môđun $M_i/J^nM_i + M_{i+1}$ là Cohen-Macaulay suy rộng. Hơn nữa, chúng tôi đưa ra một liên hệ giữa hằng số Buchsbaum của môđun này với môđun M_i/M_{i+1} với mọi $i = 0, ..., t-1$. Từ đó chúng tôi có kết quả sau.

Định lý 2.1.10. *Cho M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy với lọc Cohen-Macaulay suy rộng $\mathcal{F}$ và J là iđêan của R sinh bởi một phần hệ tham số tách biệt của M đối với lọc $\mathcal{F}$. Khi đó, M/J^nM là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy với mọi số nguyên dương n.*

Trong phần cuối của tiết này, từ Định lý 2.1.10 chúng tôi đưa ra một vài tính chất cơ bản của bất biến $I(\mathcal{F}, M) = \sum_{i=0}^{t-1} I(M_i/M_{i+1}) + \ell(M_t)$.

2.2 Chặn đều chỉ số chính quy cho môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy

Đầu tiên chúng tôi xét chỉ số chính quy trong trường hợp M là một môđun Cohen-Macaulay dãy.

Mệnh đề 2.2.5. *Cho M là một môđun Cohen-Macaulay dãy. Khi đó*

$$\operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M)) = 0$$

với mọi iđêan tham số tách biệt $\mathfrak{q}$ của M.

Theo Bổ đề 1.4.1, $\rho_{\mathfrak{q}}(M) \leq \operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M))$ với mọi iđêan tham số $\mathfrak{q}$ của M. Do đó, kết quả sau là lời giải cho Vấn đề 1.

Định lý 2.2.6. *Cho M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy và $\mathcal{F}$ là lọc Cohen-Macaulay suy rộng của M. Khi đó, tồn tại hằng số $C_{\mathcal{F}}$ sao cho*

$$\operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M)) \leq C_{\mathcal{F}}$$

với mọi iđêan tham số tách biệt $\mathfrak{q}$ của M đối với $\mathcal{F}$.

Cho M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng. Khi đó mọi hệ tham số của M đều là hệ tham số tách biệt đối với lọc Cohen-Macaulay suy rộng $\mathcal{F} : M \supset 0$. Do đó, kết quả chính của C. H. Linh-N. V. Trung (2006) được xem như hệ quả trực tiếp của Định lý 2.2.6.

Hệ quả 2.2.7. *Cho M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng. Khi đó tồn tại hằng số C sao cho* $\operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M)) \leq C$ *với mọi iđêan tham số $\mathfrak{q}$ của M.*

Cho $I = (x_1, .., x_s)$ là một iđêan của R. Đại số Rees $R[It] = \bigoplus_{n\geq 0} I^n t^n$ của I là một vành thương của vành đa thức s biến trên R. Khi đó, tồn tại một toàn cấu $\phi : R[T_1, ..., T_s] \longrightarrow R[It]$ xác định bởi $T_i \mapsto x_i t$. Hạt nhân J của ϕ là một iđêan thuần nhất trong $R[T_1, ..., T_s]$, gọi $f_1, \ldots, f_m$ là hệ sinh tối tiểu thuần nhất của J. Khi đó *kiểu quan hệ* của I được định nghĩa và ký hiệu như sau

$$\operatorname{reltype}(I) = \max\{\deg f_1, \ldots, \deg f_m\}.$$

Từ một kết quả của N. V. Trung (1987) và A. Ooishi (1987), ta có $\operatorname{reltype}(I) \leq \operatorname{reg}(G_I(R)) + 1$. Khi đó kết quả sau là hệ quả trực tiếp của Định lý 2.2.6.

Hệ quả 2.2.9. *Cho R là một vành Cohen-Macaulay suy rộng dãy chiều d và $\mathcal{F} : R = I_0 \supset I_1 \supset \ldots \supset I_t$ là một lọc suy rộng của R. Khi đó tồn tại hằng số C sao cho* $\operatorname{reltype}(x_1, ..., x_d) \leq C$ *với mọi hệ tham số tách biệt $x_1, ..., x_d$ của R đối với lọc $\mathcal{F}$.*

Lưu ý, kết quả chính của H. J. Wang (1997) về chặn đều kiểu quan hệ cho iđêan tham số của một vành Cohen-Macaulay suy rộng được xem như một trường hợp của Hệ quả 2.2.9.

Chú ý 2.2.10. Lưu ý rằng trong trường hợp tổng quát, tập các hệ tham số thực sự lớn hơn các tập hệ tham số tách biệt, ngay cả trong các môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy. Vì vậy, tồn tại các vành Cohen-Macaulay suy rộng dãy mà chỉ số chính quy không bị chặn với mọi hệ tham số như ví dụ sau đây: Xét vàn địa phương $R = k[[X, Y, Z, W]]/(W^2, WZ)$ được đưa ra bởi I. M. Aberbach-L.Ghezzi-H. H. Tai (2006), với k là một trường. Khi đó dễ dàng kiểm tra dãy lọc các iđêan

$$R = R_0 \supset (W)/(W^2, Z) \cap (W) = R_1 \supset 0$$

là lọc chiều của R, hơn thế $R/R_1 \cong k[[X, Y, Z]]$ là Cohen-Macaulay và R_1 là một R-môđun Cohen-Macaulay suy rộng chiều 2. Vì vậy R là một vành Cohen-Macaulay suy rộng dãy. Ký hiệu x, y, z, w là các ảnh của X, Y, Z, W trong R và đặt $a_{1,n} = x^{n-1}y + z^n$, $a_{2,n} = x^n$, $a_{3,n} = y^n$. I. M. Aberbach-L.Ghezzi-H. H. Tai đã chỉ ra rằng $Q_n = (a_{1,n}, a_{2,n}, a_{3,n})$ có kiểu đa thức tối thiểu là n, nói cách khác có chỉ số chính quy tối thiểu là $n - 1$. Lưu ý rằng, với mọi $n \geq 2$ iđêans Q_n không là iđêan tham số tách đối với bất kỳ lọc Cohen-Macaulay suy rộng. Thật vậy giả sử u_1, u_2, u_3 là một hệ tham số tách của R đối với lọc Cohen-Macaulay suy rộng $\mathcal{F} : M = M_0 \supset M_1 \supset 0$ sao cho $Q_n = (u_1, u_2, u_3)$. Khi đó luôn có ma trận $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ để $B \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ a_{3,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ sao cho $\det(B)$ khả nghịch. Không mất tổng quát có thể giả sử $u_1 M = 0$. Do $\ell(R_1/M_1) < \infty$ nên tồn tại số nguyên m đủ lớn sao cho $u_1^m R_1 = 0$. Lưu ý, $R_1 = (W)/(W^2, WZ)$, cho nên $u_1^m \in (W^2, WZ) : W = (W, Z)$. Vì vậy, $u_1 = b_{11}a_{1,n} + b_{12}a_{2,n} + b_{13}a_{3,n} \in (W, Z)$ Dẫn đến $b_{11}(X^{n-1}Y + Z^n) + b_{12}X^n + b_{13}Y^n \in (W, Z)$. Từ đó, ta có $b_{12} \in (Y, Z, W)$, $b_{13} \in (X, Z, W)$ và $b_{11} \in (X^n, Y^n, Z, W) : X^{n-1}Y \subseteq (X, Y, Z, W)$ với mọi $n \geq 2$. Do đó, $\det(B)$ không khả nghịch. Vì vậy, Q_n không là iđêan tham số tách với bất kỳ lọc Cohen-Macaulay suy rộng.

Chương 3

Về một hiệu chỉnh của hàm Hilbert-Samuel

Cho $\mathfrak{q}$ là một iđêan tham số của M. Xét hàm (biến n)

$$H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) = \ell(M/\mathfrak{q}^{n+1}M) - \sum_{i=0}^{d} \operatorname{adeg}_i(\mathfrak{q}; M)\binom{n+i}{i},$$

trong đó $\operatorname{adeg}_i(\mathfrak{q}; M)$ là bậc số học thứ i của M đối với iđêan tham số $\mathfrak{q}$, được gọi là *hàm hiệu chỉnh Hilbert-Samuel* của M đối với iđêan $\mathfrak{q}$. Trong chương này, chúng tôi chỉ ra rằng nếu $\mathfrak{q}$ là một iđêan tham số tách biệt thì luôn tồn tại số nguyên dương n_0 đủ lớn sao cho hàm số $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n)$ tăng và nhận giá trị không âm với $n \geq n_0$. Hơn nữa, nếu M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy, số nguyên n_0 tồn tại độc lập với iđêan hệ tham số tách biệt $\mathfrak{q}$.

3.1 Bậc số học

Trước tiên, chúng tôi cần mở rộng khái niệm lọc chiều như sau.

Ký hiệu 3.3.1. Cho $\mathcal{D} : M = D_0 \supset D_1 \supset ... \supset D_t = H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ là lọc chiều của M. Tập các lọc $\mathcal{F} : M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_t$ các môđun con của M có cùng độ dài với lọc chiều sao cho $\ell(D_i/M_i) < \infty$ với mọi $i = 0, ..., t$ được ký hiệu là $\mathcal{F}(M)$. Dễ thấy, nếu $\mathcal{F} : M = M_0 \supset M_1 \supset ... \supset M_t$ là một lọc của $\mathcal{F}(M)$ thì $\dim M_i = \dim D_i = d_i$ với mọi $i = 0, ..., t-1$.

Việc mở rộng khái niệm lọc chiều trên là cần thiết. Vì trong kỹ thuật chứng minh chúng tôi thường xét trên môđun M/xM với x là một phần tử bề mặt cho nên cần mối liên hệ giữa các lọc $\mathcal{F} : M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_s$ của M và

$$\mathcal{F}/xM : M/xM \supset (M_1 + xM)/xM \supset ... \supset (M_{k-1} + xM)/xM \supset 0$$

của M/xM, trong đó $k = s - 1$ nếu $\dim M_{s-1} = 1$ và $k = s$ trong các trường hợp còn lại. Thực tế, với $\mathcal{D}$ là lọc chiều của M thì nói chung không thể chọn x để $\mathcal{D}/xM$ là lọc chiều của M/xM. Trong khi đó, với mọi lọc $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(M)$ luôn chọn được phần tử x sao cho $\mathcal{F}/xM \in \mathcal{F}(M/xM)$.

Chú ý 3.1.2. Nếu M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy thì $\mathcal{F}(M)$ chính là tập tất cả các lọc Cohen-Macaulay suy rộng của M.

Định nghĩa 3.1.5. Cho I là một iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ của R. *Bậc số học thứ i* của M đối với iđêan I được định nghĩa như sau

$$\operatorname{adeg}_i(I; M) = \sum_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Ass}(M),\, \dim R/\mathfrak{p}=i} \operatorname{mult}_M(\mathfrak{p}) e_0(I; R/\mathfrak{p}),$$

trong đó $\operatorname{mult}_M(\mathfrak{p})$ là độ dài của $R_\mathfrak{p}$-môđun $H^0_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$ và được gọi là *độ dài bội* của M tại iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$.

Phần còn lại của tiết này, chúng tôi đưa ra một vài tính chất cơ bản của các lọc trong $\mathcal{F}(M)$ và mối liên hệ với bậc số học.

3.2 Hàm hiệu chỉnh Hilbert-Samuel

Từ Vấn đề 2, một câu hỏi tự nhiên đặt ra là: Hàm $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) \geq 0$ trong trường hợp tổng quát không? Trong tiết này, chúng tôi đưa ra một phần trả lời cho câu hỏi này với kết quả sau.

Định lý 3.2.3. *Giả sử R là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay địa phương. Cho $\mathcal{F}$ là một lọc của $\mathcal{F}(M)$ và $\mathfrak{q}$ là một iđêan tham số tách biệt của M đối với lọc $\mathcal{F}$. Khi đó tồn tại số n_0 đủ lớn sao cho hàm số*

$$H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) = \ell(M/\mathfrak{q}^{n+1}M) - \sum_{i=0}^{d} \operatorname{adeg}_i(\mathfrak{q}; M)\binom{n+i}{i}$$

tăng và nhận giá trị không âm với mọi $n \geq n_0$.

Lưu ý, số $n_0 = n_0(\mathfrak{q})$ trong Định lý 3.2.3 phụ thuộc vào iđêan tham số $\mathfrak{q}$. Vì vậy, kết quả này chưa đủ để giải quyết Vấn đề 2. Dưới đây, chúng tôi chỉ ra hàm $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n)$ nhận giá trị âm với mọi $n \geq 0$, nếu $\mathfrak{q}$ không là iđêan tách biệt với bất kỳ lọc $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(M)$. Nói cách khác điều kiện $\mathfrak{q}$ là hệ tham số tách biệt của M đối với lọc $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(M)$ trong Định lý 3.2.3 là cần thiết.

Ví dụ 3.2.5. Cho $R = k[[X, Y]]$ là vành các chuỗi lũy thừa hình thức trên trường k. Xét R-môđun

$$M = k[[X, Y]] \oplus (k[[X, Y]]/(Y^2)).$$

Đặt $D_1 = k[[X, Y]]/(Y^2)$. Chúng ta thấy M là một môđun Cohen-Macaulay dãy chiều 2 và $M \supset D_1 \supset 0$ là lọc chiều của nó. Lấy $\mathfrak{q} = (X, Y)$. Dễ thấy, $\mathfrak{q}$ là một iđêan tham số của M. Do M/D_1 là một môđun Cohen-Macaulay nên ta có

$$\begin{aligned} H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) &= \ell(M/\mathfrak{q}^{n+1}M) - e_0(\mathfrak{q}; M)\binom{n+2}{2} - e_0(\mathfrak{q}; D_1)\binom{n+1}{1} \\ &= \ell(M/(\mathfrak{q}^{n+1}M + D_1) + \ell(D_1/\mathfrak{q}^{n+1}D_1) - e_0(\mathfrak{q}; M/D_1)\binom{n+2}{2} - e_0(\mathfrak{q}; D_1)(n+1) \\ &= \ell(D_1/\mathfrak{q}^{n+1}D_1) - e_0(\mathfrak{q}; D_1)(n+1). \end{aligned}$$

Hơn nữa, $e_0(\mathfrak{q}; D_1) = 2$ và $\ell(D_1/\mathfrak{q}^{n+1}D_1) = 2n + 1$. Do đó, $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) = -1$ với mọi $n \geq 0$. Mặt khác, nếu $\mathfrak{q} = (u, v)$ với u, v là hệ tham số tách biệt của lọc $\mathcal{F} : M \supset M_1 \supset 0$ sao cho $\ell(D_1/M_1) < \infty$ thì luôn tồn ta ma trận cấp 2 sao cho

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

và $ac - bd$ khả nghịch. Giả sử $uM_1 = 0$. Từ $\ell(D_1/M_1) < \infty$ nên tồn tại số nguyên n sao cho $u^n D_1 = 0$. Kéo theo $u^n \in (Y^2)$ hay $u = aX + bY \in (Y)$. Do đó, $a \in (Y)$ hay $u = kY$ với $k = a_1X + b$. Hơn nữa, từ $u.M_1 \subseteq (Y^2)$, ta có $kYm_1 = hY^2$ với $m_1 \in M_1$. Suy ra $km_1 \in (Y)$, nếu $k \notin (Y)$ thì $m_1 \in (Y)$. Khi đó, $M_1 \subseteq YR/(Y^2) \subseteq D_1$ mà $\dim D_1/(YR/(Y^2)) = 1$ mâu thuẫn với $\ell(D_1/M_1) < \infty$. Vì vậy, $k = a_1X + b \in (Y)$, kéo theo $b \in (X, Y)$. Khi đó, $ad - bc \in (X, Y)$ không khả nghịch, vô lý. Do đó $\mathfrak{q}$ không là iđêan tham số tách biệt với bất kỳ lọc $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(M)$.

3.3 Tính không âm của hàm hiệu chỉnh Hilbert-Samuel trong môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy

Trong tiết này, đầu tiên chúng tôi nhìn lại kết quả của N. T. Cường- S. Goto-H. L. Trường (2013) như sau. Với $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(M)$, môđun M là Cohen-Macaulay dãy khi và chỉ khi $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) = 0$ với n đủ lớn và với mọi iđêan tham số tách $\mathfrak{q}$ biệt của M đối với lọc $\mathcal{F}$. Bằng cách tính toán lại số n, chúng tôi có kết quả sau.

Mệnh đề 3.3.2. *Giả sử R là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay địa phương. Cho $\mathcal{F} : M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_t$ là một lọc của $\mathcal{F}(M)$ và $\mathfrak{q}$ là iđêan tham số tách biệt của M đối với lọc $\mathcal{F}$. Gọi $\mathcal{D} : M = D_0 \supset D_1 \supset \ldots \supset D_t = H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ là lọc chiều của M. Khi đó, M là môđun Cohen-Macaulay dãy khi và chỉ khi $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) = 0$ với mọi $n \geq n_0 = \max_{i=0,\ldots,t} \ell(D_i/M_i)$.*

Khác với Định lý 3.2.3, kết quả sau đây cho ta một giá trị cụ thể của n_0 được xác định theo $r = \mathrm{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M))$ và $I(\mathcal{F}, M)$.

Định lý 3.3.5. *Cho M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy, $\mathcal{F}$ là lọc Cohen-Macaulay suy rộng của M và $\mathfrak{q}$ là một iđêan tham số tách biệt của M đối với lọc $\mathcal{F}$. Đặt $r = \mathrm{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M))$. Khi đó,*

$$H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) = \ell(M/\mathfrak{q}^n M) - \sum_{i=0}^{d} \binom{n+i}{i} \mathrm{adeg}_i(\mathfrak{q}; M) \geq 0$$

với mọi $n \geq r + \binom{r+d-1}{d-1} I(\mathcal{F}, M) + d$.

Từ Định lý 3.3.5 và Định lý 2.2.6, với M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy, chúng tôi đưa ra một chặn đều cho số $n_0 = n_0(\mathfrak{q})$ trong Định lý 3.2.3. Và đó chính là lời giải cho Vấn đề 2.

Định lý 3.3.6. *Cho M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy và $\mathcal{F}$ là một lọc Cohen-Macaulay suy rộng của M. Khi đó, tồn tại hằng số N chỉ phụ thuộc vào $\mathcal{F}$ và M sao cho $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) \geq 0$ với mọi iđêan tham số tách biệt $\mathfrak{q}$ của M đối với lọc $\mathcal{F}$ và mọi số nguyên $n \geq N$.*

Chương 4
Hệ số Hilbert và môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy

Chương 4 được chia làm 3 tiết. Tiết đầu tiên, chúng tôi đưa ra khái niệm đa thức hiệu chỉnh Hilbert-Samuel $P^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n)$ và xét tập các đa thức hiệu chỉnh $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(M)$, là tập tất cả các đa thức hiệu chỉnh Hilbert-Samuel, trong đó $\mathfrak{q}$ chạy trên tập các iđêan tham số tách biệt của M đối với một lọc $\mathcal{F}$. Tiếp theo, chúng tôi đưa ra một vài tính chất cơ bản của đa thức hiệu chỉnh Hilbert-Samuel và phát biểu lại các kết quả đã biết, cần thiết cho 2 tiết sau, thông qua đa thức này. Tiết 2 và 3 dành riêng để chứng minh kết quả chính quan trọng nhất sau đây của luận án.

Định lý chính. *Giả sử R là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay địa phương. Khi đó, M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy khi và chỉ khi tập các đa thức $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}(M)$ là hữu hạn.*

Cụ thể, tiết 2 với M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy chúng tôi đưa ra một chặn đều các hệ số của đa thức hiệu chỉnh Hilbert-Samuel $P^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n)$ bằng cách dựa vào kết quả chặn đều chỉ số chính quy đã chứng minh ở Chương 2 và tính không âm của hàm hiệu chỉnh Hilbert-Samuel $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n)$ đã có ở Chương 3. Tiết cuối dành riêng để chứng minh điều kiện đủ của Định lý chính, với việc xây dựng một tập hợp các hệ tham số từ một hệ tham số cho trước.

4.1 Đa thức hiệu chỉnh Hilbert-Samuel

Cho $\mathfrak{q}$ là một iđêan tham số của M. Hàm hiệu chỉnh Hilbert-Samuel $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n)$ là một đa thức $P^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n)$ với $n \gg 0$, được gọi là *đa thức hiệu chỉnh Hilbert-Samuel*, có dạng

$$P^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) = \sum_{i=0}^{d}((-1)^i e_i(\mathfrak{q}; M) - \mathrm{adeg}_{d-i}(\mathfrak{q}; M))\binom{n+d-i}{d-i}.$$

Với quy ước bậc của đa thức 0 là -1. Bậc của đa thức này được xác định như sau.

Mệnh đề 4.1.1. *Cho $\mathcal{F}$ là một lọc của $\mathcal{F}(M)$ và $\mathfrak{q}$ là một iđêan tham số tách biệt của M đối với lọc $\mathcal{F}$. Khi đó*

$$\deg(P^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n)) = \max\{-1, d_{i-1} - 1 \mid D_{i-1}/D_i \textit{ không là môđun Cohen-Macaulay với } i = 1, ..., t\},$$

trong đó $\mathcal{D} : M = D_0 \supset D_1 \supset ... \supset D_t = H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ là lọc chiều của M và $d_i = \dim D_i$ với mọi $i = 0, ..., t$.

Ký hiệu 4.1.2. Cho $\mathcal{F}$ là một lọc của M. Khi đó, tập tất cả các đa thức hiệu chỉnh Hilbert-Samuel $P^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n)$, trong đó $\mathfrak{q}$ chạy toàn bộ iđêan tham số tách biệt của M đối với lọc $\mathcal{F}$, được ký hiệu là $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(M)$.

Chú ý 4.1.3. (i) $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}(M) \subseteq \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(M)$ với mọi lọc $\mathcal{F}$ của M.
(ii) Tập các đa thức $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(M)$ hữu hạn khi và chỉ khi các hệ số của đa thức $P^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n)$ bị chặn đều với mọi iđêan tham số tách biệt $\mathfrak{q}$ của M đối với lọc $\mathcal{F}$.

Ví dụ dưới đây chỉ ra tập các đa thức $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(M)$ có thể là vô hạn.

Ví dụ 4.1.6. Cho $R = k[[X, Y, Z]]$ là vành các chuỗi lũy thừa hình thức trên trường k. Xét R-môđun

$$M = k[[X, Y, Z]] \oplus (k[[X, Y, Z]]/(Z^2)).$$

Đặt $D_1 = k[[X, Y, Z]]/(Z^2)$, ta có $\dim M = 3, \dim D_1 = 2$ và lọc chiều của M có dạng $M \supset D_1 \supset 0$. Dễ dàng kiểm tra M/D_1 và D_1 là các môđun Cohen-Macaulay. Do đó, M là môđun Cohen-Macaulay dãy. Với m là số nguyên dương, dễ thấy $\mathfrak{q} = (X^m, Y^m, Z)$ là iđêan tham số của M. Do M/D_1 là môđun Cohen-Macaulay, ta có

$$\begin{aligned}
P^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) &= \ell(M/\mathfrak{q}^{n+1}M) - e_0(\mathfrak{q};M)\binom{n+3}{3} - e_0(\mathfrak{q};D_1)\binom{n+2}{2} \\
&= \ell(M/(\mathfrak{q}^{n+1}M + D_1)) + \ell(D_1/\mathfrak{q}^{n+1}D_1) - e_0(\mathfrak{q};M/D_1)\binom{n+3}{3} - e_0(\mathfrak{q};D_1)\binom{n+2}{2} \\
&= \ell(D_1/\mathfrak{q}^{n+1}D_1) - e_0(\mathfrak{q};D_1)\binom{n+2}{2}.
\end{aligned}$$

Thực tế $e_0(\mathfrak{q};D_1) = 2m^2$ và $\ell(D_1/\mathfrak{q}^{n+1}D_1) = m^2(n+1)^2$. Cho nên $P^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) = -m^2(n+1)$. Thêm vào đó, $0 = e_1(\mathfrak{q};M/D_1) = (-1)e_1(\mathfrak{q};M) - e_0(\mathfrak{q};D_1)$ theo kết quả chính của L. Ghezzi-S. Goto-J.Y. Hong-K. Ozeki-T. T. Phuong-W. V. Vasconcelos (2010). Do đó

$$P^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) = e_2(\mathfrak{q};M)\binom{n+1}{1} - e_3(\mathfrak{q};M)$$

với mọi n đủ lớn. Hơn nữa, hệ số $e_2(\mathfrak{q};M) = -m^2$. Lưu ý, $\mathfrak{q}$ không là hệ tham số tách biệt của M (đối với lọc chiều $\mathcal{D}$). Tuy nhiên, $\mathfrak{q}$ là iđêan tham số tách biệt của M đối với lọc $\mathcal{F} : M = M_0 \supset 0$. Do đó, tập các đa thức $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(M)$ là vô hạn.

4.2 Tính hữu hạn của tập đa thức hiệu chỉnh Hilbert-Samuel trong môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy

Phần đầu của tiết này, chúng tôi đưa ra một chặn trên cho hàm $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n)$ như sau.

Bổ đề 4.2.1. *Cho M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy với lọc Cohen-Macaulay suy rộng $\mathcal{F} : M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_t$ và $\mathfrak{q}$ là iđêan tham số tách biệt của M đối với lọc $\mathcal{F}$. Khi đó*

$$H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) \leq \sum_{i=0}^{t-1} \binom{n+d_i-1}{d_i-1} I(M_i/M_{i+1}) + \ell(M_t) - \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(M))$$

với mọi $n \geq 0$.

Lưu ý rằng $|\ (-1)^d e_d(\mathfrak{q};M) - \mathrm{adeg}_0(\mathfrak{q};M)\ | \leq |\ e_d(\mathfrak{q};M))\ |\ + \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(M))$. Khi đó, kết quả sau đưa ra một chặn đều cho các hệ số của đa thức $P^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n)$ thông qua hằng số $C = C_{\mathcal{F}}$ trong Định lý 2.2.6 và bất biến $I(\mathcal{F}, M)$.

Định lý 4.2.3. *Cho M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy chiều $d \geq 2$, $\mathcal{F}$ là một lọc Cohen-Macaulay suy rộng của M và* $\mathfrak{q}$ *là hệ tham số tách biệt của M đối với lọc* $\mathcal{F}$*. Khi đó,*
(1) $| e_1(\mathfrak{q}; M) + \operatorname{adeg}_{d-1}(\mathfrak{q}; M) | \leq I(M/M_1)$;
(2) $| (-1)^i e_i(\mathfrak{q}; M) - \operatorname{adeg}_{d-i}(\mathfrak{q}; M) | \leq 2^{i-1}\left((C+1)^{d-1} I(\mathcal{F}, M) + d + C + 2\right)^{i-1} I(\mathcal{F}, M)$ *với* $2 \leq i \leq d-1$;
(3) $| e_d(\mathfrak{q}; M) | \leq 2^{d-1}\left((C+1)^{d-1} I(\mathcal{F}, M) + d + C + 2\right)^{d-1} I(\mathcal{F}, M)$.

Do đó, chúng tôi có kết quả sau.

Định lý 4.2.4. *Cho M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy và* $\mathcal{F}$ *là một lọc Cohen-Macaulay suy rộng của M. Khi đó, tập các đa thức* $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(M)$ *là hữu hạn.*

4.3 Đặc trưng môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy qua hệ số Hilbert

Trước hết chúng tôi xét tập các hệ tham số sau.

Ký hiệu 4.3.1. Cho $\underline{x} = x_1, ..., x_d$ là hệ tham số tách biệt của M. Ký hiệu

$$\mathcal{S}(\underline{x}; M) = \{\{x_1^{n_1}, ..., x_d^{n_d}\} \mid n_i > 0 \text{ và } x_i^{n_i}, ..., x_d^{n_d} \text{ là hệ tham số tách biệt của } M/(x_1^{n_1}, ..., x_{i-1}^{n_{i-1}})M \text{ với mọi } i = 1, ..., d\},$$

với quy ước $x_0 = 0$.

Giả sử $d \geq 2$. Khi đó, nếu $\{x_1^{n_1}, ..., x_{d-1}^{n_{d-1}}, x_d^{n_d}\} \in \mathcal{S}(\underline{x}; M)$ thì $\{x_1^{n_1}, ..., x_{d-1}^{n_{d-1}}, x_d^{n_d+k}\} \in \mathcal{S}(\underline{x}; M)$ với mọi số nguyên dương k. Do đó, nếu $\mathcal{S}(\underline{x}; M) \neq \emptyset$ thì $\mathcal{S}(\underline{x}; M)$ là tập có vô hạn phần tử.

Bổ đề 4.3.2. *Giả sử* $d = \dim M \geq 2$ *và* $\underline{x} = x_1, ..., x_d$ *là hệ tham số tách biệt của M sao cho* $\mathcal{S}(\underline{x}; M) \neq \emptyset$*. Lấy* $\{y_1, ..., y_d\} \in \mathcal{S}(\underline{x}; M)$*. Khi đó, những phát biểu sau là đúng.*
(*i*) $y_1, ..., y_d$ *là một d-dãy trên M.*
(*ii*) *Nếu* $\{z_2, ..., z_d\} \in \mathcal{S}(y_2, ..., y_d; M/y_1M)$ *thì* $\{y_1, z_2, ..., z_d\} \in \mathcal{S}(\underline{x}; M)$.
(*iii*) *Nếu M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy thì* $\mathcal{S}(\underline{x}; M)$ *luôn chứa một dd-dãy trên M.*

Cho $\mathcal{F}: M = M_0 \supset M_1 \supset ... \supset M_t$ là một lọc trong $\mathcal{F}(M)$ và $x_1, ..., x_d$ là hệ tham số tách biệt của M đối với lọc $\mathcal{F}$. Với $d_j \le k < d_{j-1}$, đặt $\overline{M}_i = (M_i + (x_1, ..., x_k)M)/(x_1, ..., x_k)M$ với mọi $i = 0, ..., t$. Ký hiệu

$$\mathcal{F}/(x_1, ..., x_k)M : \overline{M} = \overline{M}_0 \supset \overline{M}_1 \supset ... \supset \overline{M}_s = 0$$

là một lọc của $\overline{M}$, trong đó $s = j$ nếu $k = d_j$ và $s = j + 1$ trong các trường hợp còn lại. Hơn nữa, $x_{k+1}, ..., x_d$ là một hệ tham số tách biệt của $\overline{M}$ đối với lọc $\mathcal{F}/(x_1, ..., x_k)M$. Bổ đề sau chỉ ra một hệ tham số $x_1, ..., x_d$ sao cho $\mathcal{F}/(x_1, ..., x_k)M \in \mathcal{F}(\overline{M})$.

Bổ đề 4.3.3. *Giả sử R là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay địa phương. Khi đó tồn tại một hệ tham số tách biệt* $\underline{x} = x_1, ..., x_d$ *của M sao cho* $\mathcal{F}/(x_1, ..., x_i)M \in \mathcal{F}(M/(x_1, ..., x_i)M)$ *với mọi* $i = 0, ..., d-1$ *và mọi lọc* $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(M)$. *Hơn nữa,* $\mathcal{S}(\underline{x}; M) \neq \emptyset$.

Với $\underline{x} = x_1, ..., x_d$ như trong Bổ đề 4.3.3, ta ký hiệu

$$\wedge_{\underline{x}}(M) = \bigcup_{\underline{y} \in \mathcal{S}(\underline{x}; M)} \wedge(\underline{y}; M),$$

trong đó $\wedge(\underline{y}; M) = \{| (-1)^i e_i(\underline{y}; M) - \operatorname{adeg}_{d-i}(\underline{y}; M) | \mid \text{với mọi } i = 1, ..., d-1\}$.

Định lý 4.3.6. *Giả sử R là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay địa phương và* $d \ge 2$. *Cho* $\mathcal{D} : M = D_0 \supset D_1 \supset ... \supset D_t = H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ *là lọc chiều của M và* $\underline{x} = x_1, ..., x_d$ *như trong Bổ đề 4.3.3. Khi đó, nếu* $\wedge_{\underline{x}}(M)$ *là tập hữu hạn thì*

$$\mathfrak{m}^{\ell} H^j_{\mathfrak{m}}(M/D_{i+1}) = 0$$

với mọi $j = 1, ..., d_i - 1, d_i \ge 2$ *và* $i = 0, ..., t-1$, *trong đó* $\ell = \max \wedge_{\underline{x}}(M)$.

Từ Định lý 4.3.6, kết hợp với kết quả của N. T. Cường -Đ. T. Cường (2007) về đặc trưng môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy qua đối đồng điều địa phương, suy ra M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy. Kết quả sau hoàn toàn chứa Định lý chính của luận án.

Định lý 4.3.7. *Giả sử R là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay địa phương. Khi đó, các mệnh đề sau là tương đương:*

(*i*) *M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy.*

(*ii*) *Với mọi* $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(M)$, *tập các đa thức* $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(M)$ *là hữu hạn.*

(*iii*) *Tồn tại* $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(M)$, *tập các đa thức* $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(M)$ *là hữu hạn.*

(*iv*) *Tập các đa thức* $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}(M)$ *là hữu hạn.*

Kết luận của luận án

Kết quả chính quan trọng nhất của luận án là chứng minh định lý sau.

Định lý chính. *Giả sử R là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay địa phương. Khi đó, M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy khi và chỉ khi tập các đa thức $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}(M)$ là hữu hạn.*

Để chứng minh được kết quả trên chúng tôi cần thực hiện hai bước sau.

1. Với M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy và $\mathcal{F}$ là một lọc Cohen-Macaulay suy rộng của M, đưa ra một chặn đều chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford cho môđun phân bậc liên kết $G_{\mathfrak{q}}(M)$ với mọi iđêan tham số tách biệt của M đối với lọc $\mathcal{F}$.

2. Với $\mathfrak{q}$ là iđêan tham số tách biệt của M thì luôn tồn tại số n_0 sao cho hàm hiệu chỉnh Hilbert-Samuel $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) \geq 0$ với mọi $n \geq n_0$. Hơn nữa, nếu M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy thì số n_0 độc lập với cách chọn hệ tham số $\mathfrak{q}$.

Danh mục công trình của tác giả liên quan đến luận án

1. N. T. Cuong, N. T. Long and H. L. Truong (2015), "Uniform bounds in Sequentially generalized Cohen - Macaulay Modules", Vietnam J. Math. **43**, 343-356.
2. N. T. Long (2015), "On adjusted Hilbert-Samuel function", Acta Math. Vietnamica. **40**, 463-477.
3. N. T. Cuong, N. T. Long and H. L. Truong, "Hilbert coefficients in sequentially generalized Cohen-Macaulay module", preprint, 19 pp.

Các kết quả trong luận án được báo cáo và thảo luận tại

- Xêmina Đại số và Lý thuyết số-Viện Toán học.
- Hội nghị nghiên cứu sinh của Viện Toán học, 10/2009; 10/2010; 10/2011; 10/2012.
- Hội nghị Hình học - Đại số - Tô pô, Thái nguyên, 11/2011.
- Hội thảo liên kết Nhật Bản - Việt Nam lần thứ 7, Quy Nhơn, 12/2011.
- Hội thảo liên kết Nhật Bản - Việt Nam lần thứ 8, Tuần Châu, 3/2016.