Mở đầu

Từ buổi sơ khai của lý thuyết phương trình đạo hàm riêng, người ta đã quan tâm tới tính chất định tính của nghiệm của phương trình hay hệ phương trình đạo hàm riêng, trong đó độ trơn và tính giải tích được nhiều nhà toán học quan tâm đặc biệt. Độ trơn của nghiệm được mô tả trong các lớp toán tử hypoelliptic. Lý thuyết các toán tử tuyến tính hypoelliptic được bắt đầu trong những công trình của H. Weyl [20], L. Schwartz [14], L. Hörmander [9]. Người ta đã thiết lập được điều kiện cần và đủ để toán tử vi phân với hệ số hằng $P(D)$ là hypoelliptic, nhưng vấn đề trở nên phức tạp nếu toán tử $P(x, D)$ có hệ số biến thiên. Hiện nay, mới chỉ có các điều kiện đủ để xác định tính hypoelliptic của một số các lớp toán tử đặc biệt, chẳng hạn như lớp toán tử với lực không đổi, lực biến thiên chậm, toán tử loại chính trong các công trình của Yu. V. Egorov [2], L. Hörmander [8]. Một trong những công trình có ảnh hưởng lớn tới hướng nghiên cứu này là của L. Hörmander [7]. Trong các công trình này, L. Hörmander đã đưa ra điều kiện đủ cho một lớp khá rộng các toán tử cấp hai là hypoelliptic. Kết quả của L. Hörmander đã được tổng quát lên trong các công trình của L. P. Rothschild và E. M. Stein [13], B. Helffer [6],...

Với vấn đề nghiên cứu tính giải tích của nghiệm: S. Bernstein là người đầu tiên giải được bài toán về tính giải tích của nghiệm của phương trình elliptic phi tuyến cấp hai với hàm hai biến số. Ông đã công bố công trình này vào năm 1904. Kết quả của S. Bernstein đã được nhiều nhà toán học khác quan tâm và phát triển. T. Rado, M. Gevrey, H. Lewy đã chứng minh kết quả này bằng các các khác nhau. Sau đó, vào năm 1932, kết quả của S. Bernstein được G. Giraud và E. Hopf chứng minh với phương trình elliptic phi tuyến cấp hai với số biến bất kỳ. Tiếp sau đó, I. Petrowski xét tới hệ phương trình elliptic với cấp và số biến bất kỳ cũng thu được kết quả về tính giải tích của nghiệm của hệ này (xem [3] và các trích dẫn trong đó). Đến năm 1958, trong bài báo [3], A. Friedman đã chứng minh kết quả về tính giải tích, tính chính qui Gevrey cho một hệ phương trình elliptic phi tuyến tổng quát với cấp, số ẩn hàm và số biến bất kỳ. Kết quả này của A. Friedman là kết quả tổng quát nhất về tính chính qui Gevrey của nghiệm của một hệ phương trình elliptic phi tuyến tổng quát. Như vậy các bài toán về độ trơn, tính giải tích của nghiệm đã được giải quyết trọn vẹn trong lớp các phương trình elliptic. Sau đó, các nhà toán học tiếp tục nghiên cứu các phương trình không elliptic. Do có phức tạp khi nghiên cứu các phương trình loại này nên mới đầu người ta nghiên cứu các phương trình không elliptic tuyến tính. Tuy các kết quả này chưa phải là trọn vẹn nhưng có nhiều kết quả tinh tế đã thu được, có thể kể đến các kết quả của V. V. Grushin, A. Gilioli và F. Treves, A. Menikoff, Nguyễn Minh Trí, ... Năm 1971, V. V. Grushin đã xét một lớp các toán tử elliptic suy biến mà dạng đơn giản nhất của nó là

$$G_{k,\lambda} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^{2k}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + i\lambda x^{k-1}\frac{\partial}{\partial y},$$

trong đó $(x, y) \in \Omega$ là miền trong $\mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{C}$, i là đơn vị ảo, k là số nguyên dương. Ông ta đã đưa ra điều kiện cần và đủ để toán tử $G_{k,\lambda}$ là hypoelliptic, giải tích hypoelliptic trong cả hai trường hợp k lẻ và k chẵn, điều kiện với hai trường hợp này là khác nhau. Toán tử $G_{k,\lambda}$ là trường hợp đặc biệt của toán tử

$$G_{k,c}^{a,b} = X_2 X_1 + icx^{k-1}\frac{\partial}{\partial y},$$

trong đó

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial x} - iax^k\frac{\partial}{\partial y}, X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - ibx^k\frac{\partial}{\partial y},$$

với $a = -1, b = 1$. Năm 1974, A. Gilioli và F. Treves trong [4] đã xét toán tử elliptic suy biến $G_{k,c}^{a,b}$ với a, b là các số thực thỏa mãn $ab < 0$. Họ đã đưa ra điều kiện để $G_{k,c}^{a,b}$ hypoelliptic nhưng chỉ với k là số nguyên dương lẻ. Hai năm sau, trường hợp k là số nguyên dương chẵn mới được A. Menikoff xét tới trong [12] (1976), ông cũng đã đưa ra điều kiện cần và đủ để $G_{k,c}^{a,b}$ là hypoelliptic. Trong [15] (1999), Nguyễn Minh Trí cũng xét toán tử $G_{k,\lambda}$ và đã xây dựng được công thức hiển cho nghiệm cơ bản tại gốc tọa độ và nghiệm không trơn tại các điểm suy biến của toán tử này. Dùng các nghiệm này Nguyễn Minh Trí đã đưa ra điều kiện cần để $G_{k,\lambda}$ là hypoelliptic như là kết quả của Grushin nhưng bằng cánh khác. Kết quả này được Nguyễn Minh Trí mở rộng cho toán tử $G_{k,c}^{a,b}$, trong đó a, b, c là số phức tùy ý với $\mathrm{Re(a)} < 0, \mathrm{Re(b)} > 0$ [16]. Sau đó, trong công trình [18] (2000), Nguyễn Minh Trí đã nghiên cứu phương trình phi tuyến elliptic suy biến sau đây:

$$G_{k,\lambda} f + \psi\Big(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, x^k \frac{\partial f}{\partial y}\Big) = 0,$$

với k là số nguyên dương lẻ.

Kết quả đạt được trong công trình này là:

Xây dựng được công thức hiển của nghiệm cơ bản đều tại mọi điểm của toán tử $G_{k,\lambda}$.

Chứng minh được điều kiện cần và đủ để toán tử $G_{k,\lambda}$ là hypoelliptic.

Chứng minh được tính khả vi vô hạn của một lớp các nghiệm của phương trình này với điều kiện chấp nhận được của các tham số và tính khả vi vô hạn của hàm ψ.

Chứng minh được tính chính qui Gevrey của nghiệm với điều kiện chấp nhận được của các tham số và điều kiện Gevrey của hàm ψ.

Xét phương trình

$$G_{k,c}^{a,b} f + \psi\Big(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, x^k \frac{\partial f}{\partial y}\Big) = 0, \tag{1}$$

với $a = -1, b = 1, c = \lambda + k$ thì $G_{k,c}^{a,b} = G_{k,\lambda}$. Phương trình (1) đã được Nguyễn Minh Trí xét trong trường hợp đặc biệt $a = -1, b = 1$, k là số nguyên dương lẻ. Từ các công trình của V. V. Grushin, A. Gilioli và F. Treves, Menikoff đã cho thấy sự khác nhau của hai trường hợp k chẵn và k lẻ và trường hợp k chẵn phức tạp hơn k lẻ, và cũng từ những công trình của Nguyễn Minh Trí, A. Gilioli và F. Treves cho chúng ta thấy sự phức tạp hơn nhiều của trường hợp a, b là số phức bất kỳ so với $a = -1, b = 1$, đương nhiên là việc tìm nghiệm cơ bản đều tại mọi điểm khó khăn hơn tại một điểm, nghiên cứu tính giải tích của nghiệm của một phương trình phi tuyến thì khó khăn hơn phương trình tuyến tính. Vì vậy rất cần thiết phải mở rộng nghiên cứu phương trình (1) cho trường hợp a, b, c là số phức tùy ý, k là số nguyên dương cả lẻ và chẵn.

Bài toán đặt ra cho luận án này là nghiên cứu độ trơn, tính giải tích, tính chính qui Gevrey của nghiệm của phương trình đạo hàm riêng elliptic suy biến phi tuyến sau:

$$G_{k,c}^{a,b} f + \psi\Big(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, x^k \frac{\partial f}{\partial y}\Big) = 0,$$

ở đây a, b, c là các số phức tùy ý với $\mathrm{Re(a)} < 0, \mathrm{Re(b)} > 0$, k là số nguyên dương, $(x, y) \in \Omega$ là một miền trong $\mathbb{R}^2$.

Luận án gồm phần Mở đầu và 2 chương.

Phần Mở đầu, giới thiệu sơ lược lịch sử vấn đề nghiên cứu, phát biểu nội dung nghiên cứu của luận án và trình bày một số kiến thức cơ bản có liên quan.

Chương 1: Tính chính qui Gevrey của nghiệm của một lớp phương trình elliptic suy biến phi tuyến cấp hai với bậc suy biến lẻ.

Trong chương này chúng tôi đã xây dựng được nghiệm cơ bản của toán tử $G_{k,c}^{a,b}$, nhờ đó chứng minh được tính hypoelliptic yếu của toán tử này. Tiếp theo chứng minh được tính giải tích, tính chính qui Gevrey của nghiệm của phương trình nửa tuyến tính elliptic suy biến (1) trong trường hợp k là lẻ. Trong chương này chúng tôi sử dụng các kỹ thuật mà Nguyễn Minh Trí đã xét phương trình (1) cho trường hợp đặc biệt $a = -1, b = 1$, nhưng trường hợp tổng quát này phức tạp hơn nhiều do chính cấu trúc của nghiệm. Nội dung của Chương 1 được viết dựa trên bài báo [10].

Chương 2: Biến đổi Fourier và tính chính qui Gevrey của nghiệm của một lớp phương trình elliptic suy biến phi tuyến cấp hai với bậc suy biến chẵn.

Trong Chương 2, luận án trình bày các kết quả về tính giải tích, tính chính qui Gevrey của nghiệm của phương trình (1) với k là số tự nhiên chẵn. Do cấu trúc của nghiệm ở trường hợp k lẻ không còn dùng được trong trường hợp k chẵn, nên trong chương này, chúng tôi sử dụng biến đổi Fourier để tìm nghiệm cơ bản của toán tử $G_{k,c}^{a,b}$. Sau đó chúng tôi đánh giá được nghiệm cơ bản này và các đạo hàm cấp 1 của nó. Các đánh giá thu được cũng tương tự như các đánh giá của nghiệm cơ bản trong Chương 1. Nội dung của Chương 2 được viết dựa trên bài báo [11].

Chương 1

Tính chính quy Gevrey của nghiệm của một lớp phương trình elliptic suy biến phi tuyến cấp hai với bậc suy biến lẻ

Trong chương này chúng tôi giới thiệu các kết quả nghiên cứu về độ trơn, tính giải tích, tính chính qui Gevrey của nghiệm của phương trình

$$G_{k,c}^{a,b} f + \psi\Big(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, x^k \frac{\partial f}{\partial y}\Big) = 0, \tag{1}$$

với a, b, c là số phức, k là số tự nhiên lẻ.

1.1 Nghiệm cơ bản của toán tử $G_{k,c}^{a,b}$

Xét toán tử

$$G_{k,c}^{a,b} = X_2 X_1 + icx^{k-1}\frac{\partial}{\partial y},$$

ở đây: $(x, y) \in \mathbb{R}^2; a, b, c \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(a) < 0;\ \mathrm{Re}(b) > 0;\ i = \sqrt{-1},\ k$ là số nguyên dương,

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - ibx^k \frac{\partial}{\partial y}, X_2 = \frac{\partial}{\partial x} - iax^k \frac{\partial}{\partial y}.$$

Chúng ta xét trường hợp $\mathrm{Re}(a) < 0$, còn trường hợp $\mathrm{Re}(a) > 0$ ta có thể làm tương tự. Những biểu thức sau đây được dùng nhiều trong quá trình tính toán nên ta kí hiệu chúng như sau:

$A_+ = -ax^{k+1} + bu^{k+1} + i(k+1)(y - v),$

$A_- = \ bx^{k+1} - au^{k+1} - i(k+1)(y - v),$

$$R = A_+A_- = -ab(x^{2k+2} + u^{2k+2}) + (a^2+b^2)(x^{k+1}u^{k+1})$$
$$+ (k+1)^2(y-v)^2 + i(k+1)(y-v)(a+b)(x^{k+1} - u^{k+1}),$$
$$p = \begin{cases} (a-b)^2 x^{k+1}u^{k+1}R^{-1} & \text{nếu } xu \neq 0,\\ 0 & \text{nếu } xu = 0, \end{cases}$$
$$M = A_+^{-\frac{c}{(k+1)(b-a)}} A_-^{-\frac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)}}. \tag{1.1}$$

Chúng tôi chứng minh được Bổ đề sau đây. Tuy là một kết luận mang tính sơ cấp, nhưng nó có ý nghĩa rất quan trọng đối với sự xác định công thức nghiệm cơ bản của toán tử $G_{k,c}^{a,b}$.

Bổ đề 1.1.1 *Giả sử rằng k là số lẻ,* $\mathrm{Re}(a) < 0$ *và* $\mathrm{Re}(b) > 0$. *Khi đó*

i) $p \notin (1, +\infty)$.

ii) $p = 1 \Leftrightarrow y = v, x = \pm\, u$ *với* $u \neq 0$.

Bây giờ chúng ta tìm $E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)$ là nghiệm cơ bản của $G_{k,c}^{a,b}$.
Ký hiệu:

$$M = M(x,y,u,v), F(p) = F_{k,c}^{a,b}(p(x,y,u,v)),$$
$$E_{k,c}^{a,b} = E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v) = MF(p).$$

Chúng ta tìm $E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)$ sao cho

$$G_{k,c}^{a,b}E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v) = \delta(x-u, y-v).$$

Trước hết ta tìm $E_{k,c}^{a,b}$ thoả mãn $G_{k,c}^{a,b}E_{k,c}^{a,b} = 0$.
Một cách hình thức $G_{k,c}^{a,b}E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v) = 0$ khi và chỉ khi $F(p)$ phải thoả mãn phương trình hypergeometric

$$p(1-p)F''(p) + \big(\gamma - (1+\alpha+\beta)p\big)F'(p) - \alpha\beta F(p) = 0, \tag{1.4}$$

trong đó: $\alpha = \dfrac{c}{(k+1)(b-a)}$, $\beta = \dfrac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)}$, $\gamma = \dfrac{k}{k+1}$.
Phương trình này đã được H. Bateman đưa ra công thức, tính chất và các khai triển

tiệm cận của nghiệm. Khi đó nghiệm của (1.4) là:

$$\begin{aligned} F(p) &= C_1 F\Big(\frac{c}{(k+1)(b-a)}, \frac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)}, \frac{k}{k+1}, p\Big) \\ &+ \ C_2\, p^{\frac{1}{k+1}} F\Big(\frac{c+b-a}{(k+1)(b-a)}, \frac{(k+1)(b-a)-c}{(k+1)(b-a)}, \frac{k+2}{k+1}, p\Big) \\ &:= C_1 F^{a,b}_{k,c;1}(p) + C_2 F^{a,b}_{k,c;2}(p), \end{aligned}$$

ở đây $F(\alpha, \beta, \gamma, p)$ là các hàm Gauss hypergeometric với C_1, C_2 là các hằng số phức. Chú ý rằng với k là số lẻ, $F^{a,b}_{k,c}(p)$ được xác định với $p \notin (1, +\infty)$. Dựa vào tính chất của các hàm Gauss hypergeometric chúng ta chọn

$$C_1 = -\frac{\Gamma(\frac{c}{(k+1)(b-a)})\Gamma(\frac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)})}{4(b-a)^{\frac{1}{k+1}}\pi\Gamma(\frac{1}{k+1})} := C^{a,b}_{k,c}\ ,$$

$$C_2 = -\frac{\Gamma(\frac{c+b-a}{(k+1)(b-a)})\Gamma(\frac{(k+1)(b-a)-c}{(k+1)(b-a)})}{4(b-a)^{\frac{1}{k+1}}\pi\Gamma(\frac{k+2}{k+1})} := D^{a,b}_{k,c}\ .$$

Chú ý rằng, với điều kiện:

$$c \neq \pm[N(k+1)(b-a)],\ c \neq \pm[N(k+1)+k](b-a), \tag{1.6}$$

ở đây N là số nguyên thì $|C^{a,b}_{k,c}|, |D^{a,b}_{k,c}| < \infty$.

Định nghĩa 1.1.1 *Giả sử rằng k là số lẻ. Khi đó a, b, c, k được gọi là chấp nhận được nếu chúng thoả mãn* (1.6).

Từ đó, nếu k là số lẻ và a, b, c, k là chấp nhận được chúng ta hy vọng rằng

$$\begin{aligned} E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v) &= M(C^{a,b}_{k,c}F^{a,b}_{k,c;1}(p) + D^{a,b}_{k,c}F^{a,b}_{k,c;2}(p)) \\ &= -\frac{\Gamma\big(\frac{c}{(k+1)(b-a)}\big)\Gamma\big(\frac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)}\big)F\big(\frac{c}{(k+1)(b-a)}, \frac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)}, \frac{k}{k+1}, p\big)}{4(b-a)^{\frac{1}{k+1}}\pi\Gamma(\frac{k}{k+1})A_+^{\frac{c}{(k+1)(b-a)}}A_-^{\frac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)}}} \\ &- \frac{xu\Gamma(\frac{c+b-a}{(k+1)(b-a)})\Gamma(\frac{(k+1)(b-a)-c}{(k+1)(b-a)})F(\frac{c+b-a}{(k+1)(b-a)}), \frac{(k+1)(b-a)-c}{(k+1)(b-a)}, \frac{k+2}{k+1}, p)}{4(b-a)^{-\frac{1}{k+1}}\pi\Gamma(\frac{k+2}{k+1})A_+^{\frac{c+b-a}{(k+1)(b-a)}}A_-^{\frac{(k+1)(b-a)-c}{(k+1)(b-a)}}} \end{aligned}$$

sẽ trở thành nghiệm cơ bản.

Định lí 1.1.1 *Giả sử rằng k là số lẻ. Nếu a, b, c, k là chấp nhận được, thì*

$$G^{a,b}_{k,c}E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v) = \delta(x-u, y-v).$$

Sau đây chúng tôi giới thiệu một hệ quả quan trọng của Định lý 1.1.1. Hệ quả này cho ta công thức biểu diễn tích phân một hàm bất kỳ thuộc $C^2(\overline{\Omega})$ qua nghiệm cơ bản $E^{a,b}_{k,c}$. Chúng ta sử dụng các ký hiệu sau:

$$\widetilde{X}_1 = \frac{\partial}{\partial u} - ibu^k \frac{\partial}{\partial v},\ \widetilde{X}_2 = \frac{\partial}{\partial u} - iau^k \frac{\partial}{\partial v}, \widetilde{G}^{a,b}_{k,c} = \widetilde{X}_2 \widetilde{X}_1 + icu^{k-1} \frac{\partial}{\partial v}.$$

Hệ quả 1.1.1 *Lấy k là số lẻ. Giả sử rằng, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ là một miền bị chặn cùng với biên trơn từng khúc, $f \in C^2(\overline{\Omega})$ và a, b, c, k chấp nhận được. Khi đó*

$$f(x,y) = \int\limits_{\partial\Omega} f(u,v) \widetilde{B}_2(E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v), a, b, c, k) \mathrm{d}s$$

$$- \int\limits_{\partial\Omega} E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v) \widetilde{B}_1(f(u,v), a, b, c, k) \mathrm{d}s + \int\limits_{\Omega} E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v) \widetilde{G}^{a,b}_{k,c} f(u,v) \mathrm{d}u\mathrm{d}v \quad (1.10)$$

với mỗi điểm (x,y) cố định thuộc Ω. Ở đây:

$$\widetilde{B}_1(f(u,v), a, b, c, k) = (\nu_1 - iau^k \nu_2) \widetilde{X}_1 f(u,v) + icu^{k-1} \nu_2 f(u,v),$$

$$\widetilde{B}_2(E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v), a, b, c, k) = (\nu_1 - ibu^k \nu_2) \widetilde{X}_2 E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)$$

và $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ là véc tơ pháp tuyến đơn vị ngoài trên $\partial\Omega$.

1.2 Tính khả vi vô cùng của nghiệm

Trong mục này chúng tôi muốn khảo sát tính khả vi vô cùng của nghiệm của phương trình (1), với các điều kiện nào đó của hàm ψ.

Định lí 1.2.1 *Giả sử rằng k là số lẻ. Khi đó toán tử vi phân $G^{a,b}_{k,c}$ là hypoelliptic yếu nếu và chỉ nếu a, b, c, k chấp nhận được.*

Chúng tôi xin giới thiệu không gian hàm quan trọng sau đây:

$$\mathbb{G}^m_{k,\mathrm{loc}}(\Omega) = \Big\{ f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega) : \sum_{(\alpha,\beta,\gamma)\in\Xi^m_k} ||{}_\gamma\partial_{\alpha,\beta} f||_{L^2(K)} < \infty \Big\},$$

ở đây, K là tập compact nào đó trong Ω , ${}_\gamma\partial_{\alpha,\beta} f := x^\gamma \dfrac{\partial^{\alpha+\beta} f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}$, và

$$\Xi^m_k = \left\{ (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{Z}^3_+ : \alpha + \beta \le m,\ km \ge \gamma \ge \alpha + (1+k)\beta - m \right\}.$$

Không gian này được Grushin đưa ra.

Định lí 1.2.2 *Cho ψ là một hàm thuộc C^∞ với các đối số của nó và $m \geq 2k+3$. Giả sử rằng, k là số lẻ và a, b, c, k là chấp nhận được. Khi đó mọi $\mathbb{G}^m_{k,loc}(\Omega)$- nghiệm của phương trình (1) thuộc $C^\infty(\Omega)$, và toán tử phi tuyến $\Psi^{a,b}_{k,c}$ là hypoelliptic.*

1.3 Tính chính qui Gevrey của nghiệm

Trong mục này, chúng tôi trình bày các kết quả về tính chính qui Gevrey của nghiệm của phương trình (1).

Với mỗi hàm $f(x,y)$ định nghĩa trên một miền Ω trong $\mathbb{R}^2$ ta ký hiệu $\dfrac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}, \dfrac{\partial^\beta f}{\partial y^\beta}$ là $\partial_1^\alpha f, \partial_2^\beta f$. Đặt $r_0 = 2k+2$, với mỗi $r \in \mathbb{Z}_+$, ký hiệu Γ_r là tập đa chỉ số (α, β) sao cho $\Gamma_r = \Gamma_r^1 \cup \Gamma_r^2$, ở đây: $\Gamma_r^1 = \{(\alpha,\beta) : \alpha \leq r_0, 2\alpha + \beta \leq r\}$,

$$\Gamma_r^2 = \{(\alpha,\beta) : \alpha \geq r_0, \alpha + \beta \leq r - r_0\}.$$

Đặt $|f,\Omega|_r = \max_{(\alpha,\beta)\in\Gamma_r} |\partial_1^\alpha \partial_2^\beta f, \Omega| + \max_{\substack{(\alpha,\beta)\in\Gamma_r \\ \alpha\geq 1, \beta\geq 1}} \max_{(x,y)\in\bar\Omega} |\partial_1^{\alpha+2}\partial_2^\beta f|$,

với $|f,\Omega| = \max_{(x,y)\in\bar\Omega}\left(|f| + \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right| + \left|x^k \dfrac{\partial f}{\partial y}\right|\right)$.

Định lí 1.3.1 *Cho k là số lẻ và các tham số a, b, c, k chấp nhận được. Khi đó:*

i) Nếu $\psi \in G^s$ $(s \geq 1)$, thì mọi $C^\infty(\Omega)$- nghiệm của phương trình (1) thuộc $G^s(\Omega)$; toán tử phi tuyến $\Psi^{a,b}_{k,c}$ là s-hypoelliptic mở rộng.

ii) Trường hợp đặc biệt, nếu ψ là giải tích, thì mọi $C^\infty(\Omega)$- nghiệm của phương trình (1) là hàm giải tích trên Ω; toán tử $\Psi^{a,b}_{k,c}$ là giải tích hypoelliptic mở rộng.

Để chứng minh đinh lý này chúng tôi phải phát biểu và chứng minh các Bổ đề 1.3.1, 1.3.2 và 1.3.3 và các Mệnh đề 1.3.2, 1.3.3, 1.3.4, 1.3.5 sau đây. Các Bổ đề này cho ta các đánh giá của $E^{a,b}_{k,c}$ trên hình vuông V^T, ở đây V^T là hình vuông tâm ở gốc tọa độ cạnh có độ dài $2T$, biên S. Còn các Mệnh đề cho ta các bước đánh giá đạo hàm của nghiệm của phương trình (1) trên hình vuông V^T , từ đó cho ta được chứng minh của Định lý chính 1.3.1 này.

Bổ đề 1.3.1 *Trên hình vuông V^T*

$$\left| x^\gamma \frac{\partial^{\alpha+\beta} E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} \right| \leq C R_1^{-\frac{1}{2}}, \quad \forall(\alpha,\beta,\gamma) \in \Xi^1_k. \tag{1.32}$$

Bổ đề 1.3.2 *Trên biên $S_{\sigma_N(x,y)}(x,y)$, nếu $|x| \leq \big(2\sigma_N(x,y)\big)^{\frac{1}{k+1}}$ thì*

$$\Big|{}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}\widetilde{X}_2 E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)\Big| \leq \frac{C}{\sigma_N^{\frac{k+2}{k+1}}(x,y)}\,. \tag{1.36}$$

Bổ đề 1.3.3 *Trên $S_{\sigma_N(x,y)}(x,y)$, nếu $|x| \geq \big(2\sigma_N(x,y)\big)^{\frac{1}{k+1}}$ thì*

$$\left|\frac{{}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}\widetilde{X}_2 E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v)}{u^k}\right| \leq \frac{C}{\sigma_N^2(x,y)}\;;\quad \forall(\alpha,\beta,\gamma)\in\Xi^1_k.$$

Trong đó V^T_δ là hình vuông tâm là gốc tọa độ mà khoảng cách giữa biên của nó và của V^T là δ , còn với mỗi $(x,y)\in V^T$ ký hiệu $\sigma_N(x,y) = \frac{1}{N}\rho\Big((x,y),S\Big)$.

Mệnh đề 1.3.2 Giả sử $(\alpha,\beta,\gamma)\in\Xi^1_k, (\alpha_1,\beta_1)\in\Gamma_{N+1}, \alpha_1\geq 1, \beta_1\geq 1$, tồn tại hằng số dương C_{61} sao cho

$$\max_{(x,y)\in V^T_\delta}\left|{}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\beta_1}f(x,y)\right|$$
$$\leq C_{61}\bigg(T^{\frac{1}{k+1}}|f,V^T_\delta|_{N+1} + H_0\Big(\frac{H_1}{\delta}\Big)^{N-r_0-1}(N-r_0-1)!^s\Big(T^{\frac{1}{k+1}}+\frac{1}{H_1}\Big)\bigg).$$

Mệnh đề 1.3.3 Giả sử rằng, $(\alpha,\beta,\gamma)\in\Xi^1_k$. Khi đó tồn tại một hằng số C_{73} sao cho

$$\max_{(x,y)\in V^T_\delta}\left|{}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}\partial_2^{N+1}f(x,y)\right| \leq C_{73}\bigg[T^{\frac{1}{k+1}}\left|f,V^T_{\delta"}\right|_{N+1} +$$
$$+H_0\Big(\frac{H_1}{\delta}\Big)^{N-r_0-1}((N-r_0-1)!)^s\left(T^{\frac{1}{k+1}}+\frac{1}{H_1}\right)\bigg].$$

Mệnh đề 1.3.4 Giả sử rằng, $(\alpha,\beta,\gamma)\in\Xi^1_k$. Khi đó tồn tại một hằng số C_{98} sao cho

$$\max_{(x,y)\in V^T_\delta}\left|{}_\gamma\partial_{\alpha,\beta}\partial_1^{N-r_0+1}f(x,y)\right| \leq C_{98}\bigg[T^{\frac{1}{k+1}}\left|f,V^T_{\delta'}\right|_{N+1} +$$
$$+H_0\Big(\frac{H_1}{\delta}\Big)^{N-r_0-1}((N-r_0-1)!)^s\Big(T^{\frac{1}{k+1}}+\frac{1}{H_1}\Big)\bigg].$$

Mệnh đề 1.3.5 Giả sử $(\alpha_1,\beta_1)\in\Gamma_{N+1}\setminus\Gamma_N$, $\alpha_1\geq 1, \beta_1\geq 1$. Khi đó tồn tại một hằng số C_{117} sao cho

$$\max_{(x,y)\in V^T_\delta}\left|\partial_1^{\alpha_1+2}\partial_2^{\beta_1}f(x,y)\right| \leq C_{117}\bigg[T^{\frac{1}{k+1}}\left|f,V^T_{\delta''}\right|_{N+1}$$
$$+H_0\Big(\frac{H_1}{\delta}\Big)^{N-r_0-1}\Big((N-r_0-1)!\Big)^s\Big(T^{\frac{1}{k+1}}+\frac{1}{H_1}\Big)\bigg].$$

Kết hợp Định lý 1.2.2 và Định lý 1.3.1 chúng ta có Định lý 1.3.2 sau đây:

Định lí 1.3.2 *Giả sử rằng, k là số lẻ, các tham số a, b, c, k là chấp nhận được và $m \geq 2k + 3$. Khi đó*

i) Nếu $\psi \in G^s(s \geq 1)$ thì mọi $G^m_{k,loc}(\Omega)$ - nghiệm của phương trình (1) là thuộc $G^s(\Omega)$; toán tử phi tuyến $\Psi^{a,b}_{k,c}$ là s- hypoelliptic.

ii) Trong trường hợp đặc biệt, nếu ψ là hàm giải tích thì mọi $C^m(\Omega)$- nghiệm của phương trình (1) cũng là giải tích trên Ω; toán tử phi tuyến $\Psi^{a,b}_{k,c}$ là giải tích hypoelliptic.

Chương 2

Biến đổi Fourier và tính chính qui Gevrey của nghiệm của một lớp phương trình elliptic suy biến phi tuyến cấp hai với bậc suy biến chẵn

2.1 Nghiệm cơ bản của toán tử $G_{k,c}^{a,b}$

Mục này giới thiệu sơ bộ việc tìm nghiệm cơ bản của toán tử $G_{k,c}^{a,b}$.

2.1.1 Nghiệm cơ bản của toán tử $G_{k,c}^{a,b}$ khi k chẵn

Ta đã có nghiệm cơ bản của toán tử $G_{k,c}^{a,b}$ khi k là số tự nhiên lẻ. Bây giờ ta tìm nghiệm cơ bản của $G_{k,c}^{a,b}$ khi k là số tự nhiên chẵn, tức là tìm $E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v)$ sao cho

$$G_{k,c}^{a,b}E_{k,c}^{a,b}(x,y,u,v) = \delta(x-u, y-v) = \delta(x-u)\times\delta(y-v) \tag{2.1}$$

Lấy Fourier theo biến y, phương trình (2.1) trở thành

$$\begin{aligned}&\widetilde{E}_{xx}(x,\xi,u,v) + (a+b)x^k\xi\widetilde{E}_x(x,\xi,u,v)\\&+\big(abx^{2k}\xi^2 + (kb-c)x^{k-1}\xi\big)\widetilde{E}(x,\xi,u,v) = \delta(x-u)e^{-i\xi v}.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Trước hết ta giải phương trình

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{xx}(x,\xi,u,v) &+ (a+b)x^k\xi\tilde{E}_x(x,\xi,u,v)\\&+\Big(abx^{2k}\xi^2 + (kb-c)x^{k-1}\xi\Big)\tilde{E}(x,\xi,u,v) = 0.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Khi k là chẵn, $\xi > 0$ ta có 1 nghiệm của (2.4) là

$$\tilde{E}(x,\xi,u,v)=\begin{cases} e^{-i\xi v}\ e^{\frac{b\xi(u^{k+1}-x^{k+1})}{k+1}}\ \left(\ \frac{\xi(b-a)}{k+1}\ \right)^{\frac{-1}{k+1}}\ (A(a,b,k,c))^{-1} \\ \times\Big[\frac{\Gamma(\frac{1}{k+1})}{\Gamma(\frac{c+b-a}{(k+1)(b-a)})}\Phi(\frac{c}{(k+1)(b-a)}\ ,\frac{k}{(k+1)}\ ,\frac{(b-a)x^{k+1}\xi}{k+1}) \\ +x\frac{\Gamma(\frac{-1}{k+1})}{\Gamma(\frac{c}{(k+1)(b-a)})}\ \left(\frac{\xi(b-a)}{k+1}\right)^{\frac{1}{k+1}}\Phi(\frac{b+c-a}{(k+1)}\ ,\frac{k+2}{(k+1)}\ ,\frac{(b-a)x^{k+1}\xi}{k+1})\Big] \\ \times\Big[\frac{\Gamma(\frac{1}{k+1})}{\Gamma(\frac{(k+1)(b-a)-c}{(k+1)(b-a)})}\Phi(\frac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)}\ ,\frac{k}{(k+1)}\ ,\frac{(a-b)u^{k+1}\xi}{k+1}) \\ -u\ \frac{\Gamma(\frac{-1}{k+1})}{\Gamma(\frac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)})}\ \left(\frac{\xi(b-a)}{k+1}\right)^{\frac{1}{k+1}}\Phi(\frac{(k+1)(b-a)-c}{(k+1)(b-a)}\ ,\frac{k+2}{(k+1)}\ ,\frac{(a-b)u^{k+1}\xi}{k+1})\Big] \\ \hfill \text{nếu } x\geq u, \\ e^{-i\xi v}e^{\frac{a\xi(u^{k+1}-x^{k+1})}{k+1}}\ \left(\ \frac{\xi(b-a)}{k+1}\ \right)^{\frac{-1}{k+1}}\ (A(a,b,k,c))^{-1} \\ \times\Big[\frac{\Gamma(\frac{1}{k+1})}{\Gamma(\frac{c+b-a}{(k+1)(b-a)})}\Phi(\frac{c}{(k+1)(b-a)}\ ,\frac{k}{(k+1)}\ ,\frac{(b-a)u^{k+1}\xi}{k+1}) \\ +u\frac{\Gamma(\frac{-1}{k+1})}{\Gamma(\frac{c}{(k+1)(b-a)})}\ \left(\frac{\xi(b-a)}{k+1}\right)^{\frac{1}{k+1}}\Phi(\frac{b+c-a}{(k+1)}\ ,\frac{k+2}{(k+1)}\ ,\frac{(b-a)u^{k+1}\xi}{k+1})\Big] \\ \times\Big[\frac{\Gamma(\frac{1}{k+1})}{\Gamma(\frac{(k+1)(b-a)-c}{(k+1)(b-a)})}\Phi(\frac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)}\ ,\frac{k}{(k+1)}\ ,\frac{(a-b)x^{k+1}\xi}{k+1}) \\ -x\frac{\Gamma(\frac{-1}{k+1})}{\Gamma(\frac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)})}\ \left(\frac{\xi(b-a)}{k+1}\right)^{\frac{1}{k+1}}\Phi(\frac{(k+1)(b-a)-c}{(k+1)(b-a)}\ ,\frac{k+2}{(k+1)}\ ,\frac{(a-b)x^{k+1}\xi}{k+1})\Big] \\ \hfill \text{nếu } x\leq u. \end{cases}$$

Khi k chẵn, $\xi<0$ ta có 1 nghiệm của (2.4) là

$$\tilde{E}(x,\xi,u,v)=\begin{cases} e^{-i\xi v}e^{\frac{a\xi(u^{k+1}-x^{k+1})}{k+1}}\left(\frac{\xi(a-b)}{k+1}\right)^{\frac{-1}{k+1}}\big(A(a,b,k,c)\big)^{-1} \\ \times\Big[\frac{\Gamma(\frac{1}{k+1})}{\Gamma(\frac{(k+1)(b-a)-c}{(k+1)(b-a)})}\Phi(\frac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)}\ ,\frac{k}{(k+1)}\ ,\frac{(a-b)x^{k+1}\xi}{k+1}) \\ +\ x\frac{\Gamma(\frac{-1}{k+1})}{\Gamma(\frac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)})}\ \left(\frac{\xi(a-b)}{k+1}\right)^{\frac{1}{k+1}}\Phi(\frac{(k+1)(b-a)-c}{(k+1)(b-a)},\frac{k+2}{(k+1)},\frac{(a-b)x^{k+1}\xi}{k+1})\Big] \\ \times\Big[\frac{\Gamma(\frac{1}{k+1})}{\Gamma(\frac{c+b-a}{(k+1)(b-a)})}\Phi(\frac{c}{(k+1)(b-a)}\ ,\frac{k}{(k+1)}\ ,\frac{(b-a)u^{k+1}\xi}{k+1}) \\ -\ u\frac{\Gamma(\frac{-1}{k+1})}{\Gamma(\frac{c}{(k+1)(b-a)})}\ \left(\frac{\xi(a-b)}{k+1}\right)^{\frac{1}{k+1}}\Phi(\frac{b+c-a}{(k+1)},\frac{k+2}{(k+1)},\frac{(b-a)u^{k+1}\xi}{k+1})\Big] \\ \hfill \text{nếu } x\geq u, \\ e^{-i\xi v}e^{\frac{b\xi(u^{k+1}-x^{k+1})}{k+1}}\left(\frac{\xi(a-b)}{k+1}\right)^{\frac{-1}{k+1}}(A(a,b,k,c))^{-1} \\ \times\Big[\frac{\Gamma(\frac{1}{k+1})}{\Gamma(\frac{(k+1)(b-a)-c}{(k+1)(b-a)})}\Phi(\frac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)}\ ,\frac{k}{(k+1)}\ ,\frac{(a-b)u^{k+1}\xi}{k+1}) \\ +\ u\frac{\Gamma(\frac{-1}{k+1})}{\Gamma(\frac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)})}\left(\frac{\xi(a-b)}{k+1}\right)^{\frac{1}{k+1}}\Phi(\frac{(k+1)(b-a)-c}{(k+1)(b-a)},\frac{k+2}{(k+1)},\frac{(a-b)u^{k+1}\xi}{k+1})\Big] \\ \times\Big[\frac{\Gamma(\frac{1}{k+1})}{\Gamma(\frac{c+b-a}{(k+1)(b-a)})}\Phi(\frac{c}{(k+1)(b-a)}\ ,\frac{k}{(k+1)}\ ,\frac{(b-a)x^{k+1}\xi}{k+1}) \\ -\ x\frac{\Gamma(\frac{-1}{k+1})}{\Gamma(\frac{c}{(k+1)(b-a)})}\ \left(\frac{\xi(a-b)}{k+1}\right)^{\frac{1}{k+1}}\Phi(\frac{b+c-a}{(k+1)}\ ,\frac{k+2}{(k+1)}\ ,\frac{(b-a)x^{k+1}\xi}{k+1})\Big] \\ \hfill \text{nếu } x\leq u. \end{cases}$$

Dùng biến đổi Fourier ngược, chúng ta hy vọng rằng

$$E(x, y, u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iy\xi} \tilde{E}(x, \xi, u, v) \mathrm{d}\xi,$$

sẽ trở thành nghiệm cơ bản của $G^{a,b}_{k,c}$.

2.1.2 Nghiệm cơ bản của toán tử $G^{a,b}_{k,c}$ khi k lẻ.

Khi k là số tự nhiên lẻ, chúng ta đã tìm được nghiệm của toán tử $G^{a,b}_{k,c}$ ở Chương 1 bằng cách chỉ ra cấu trúc của công thức nghiệm. Nhưng bằng cách đó, chúng tôi không tìm được nghiệm cơ bản của $G^{a,b}_{k,c}$ trong trường hợp k chẵn. Để vượt qua khó khăn này chúng tôi phải dùng phương pháp biến đổi Fourier để tìm nghiệm cơ bản của toán tử $G^{a,b}_{k,c}$. Sau khi tìm nghiệm cơ bản của $G^{a,b}_{k,c}$ trong trường hợp k chẵn bằng biến đổi Fourier như mục trên, chúng tôi cũng tìm được nghiệm cơ bản của $G^{a,b}_{k,c}$ trong trường hợp k lẻ bằng cách tương tự. Vì công thức nghiệm cũng có dạng như k chẵn nên chúng tôi không viết công thức nghiệm ở đây.

2.2 Các đánh giá đối với nghiệm cơ bản

Các tham số a, b, k, c gọi là chấp nhận được nếu $A(a, b, k, c) \neq 0$ khi k chẵn và $B_1(a, b, c, k) \neq 0$, $B_2(a, b, k, c) \neq 0$ khi k là lẻ. Bây giờ với a, b, k, c là chấp nhận được, với mỗi $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ chúng ta xây dựng ánh xạ:

$$E(u, v) : C_0^\infty(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{C}$$

như sau:

$$E(u, v) : \varphi(x, y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \widetilde{E}(x, \xi, u, v) \widehat{\varphi}(x, \xi) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}x \in \mathbb{C}.$$

Ở đây $\quad \widehat{\varphi}(x, \xi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi y} \varphi(x, y) \mathrm{d}y.$

Chúng ta thấy rằng $E(u, v)$ là một phân bố Schwartz. Định lý sau kết luận nghiệm tìm được là nghiệm cơ bản.

Định lí 2.2.1 *Giả sử rằng a, b, k, c là chấp nhận được. Khi đó với mọi $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ thì $E(u, v) \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus (u, v))$ và $G^{a,b}_{k,c} E(x, y, u, v) = \delta(x - u, y - v)$.*

Bổ đề 2.2.1 *Giả sử rằng a, b, k, c là chấp nhận được. Khi đó*

$$|E(x, y, u, v)| \leq C\big(|x^{k+1} - u^{k+1}|^2 + |y - v|^2\big)^{-\frac{k}{2k+2}} \tag{2.13}$$

với mọi (x, y, u, v) thuộc một tập compac trong $\mathbb{R}^4$. Hơn thế nữa $E(u, v)$ đồng nhất với $E(x, y, u, v) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2(x, y))$ theo nghĩa phân bố.

Bổ đề 2.2.2 *Giả sử rằng a, b, k, c là chấp nhận được. Khi đó với mọi (x, y, u, v) nằm trong một tập compac của $\mathbb{R}^4, (x, y) \neq (u, v)$ và với mọi (α, β) sao cho $0 \leq \alpha + \beta \leq 1$, ta có*

$$\begin{aligned}
&\max\Big\{\Big|x^{k\beta}\frac{\partial^{\alpha+\beta}E(x, y, u, v)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}\Big|, \Big|u^{k\beta}\frac{\partial^{\alpha+\beta}E(x, y, u, v)}{\partial u^\alpha \partial v^\beta}\Big|, \Big|\frac{\partial^{\alpha+\beta}E(x, y, u, v)}{\partial x^\alpha \partial u^\beta}\Big|,\\
&\Big|x^{k\beta}\frac{\partial^{\alpha+\beta}E(x, y, u, v)}{\partial u^\alpha \partial y^\beta}\Big|, \Big|u^{k\beta}\frac{\partial^{\alpha+\beta}E(x, y, u, v)}{\partial x^\alpha \partial v^\beta}\Big|, \Big|(xu)^{k\beta}\frac{\partial^{\alpha+\beta}E(x, y, u, v)}{\partial y^\alpha \partial v^\beta}\Big|\Big\}\\
&\leq C_{\alpha,\beta}\big(|x^{k+1} - u^{k+1}| + |y - v|\big)^{-\frac{k+\alpha+\beta}{k+1}}.
\end{aligned}$$

2.3 Tính chính quy Gevrey của nghiệm

Do phương pháp tìm nghiệm cơ bản trong Chương 1 (với k lẻ) và Chương 2 (với k chẵn) là khác nhau, nên vấn đề đặt ra là các kết quả về tính chính quy Gevrey của nghiệm của phương trình (1) với k lẻ và k chẵn có khác nhau hay không? Nhưng chúng tôi đã chứng minh được, các đánh giá đối với nghiệm cơ bản của $G^{a,b}_{k,c}$ với k chẵn trên V^T (sau đây sẽ được trình bày trong các Bổ đề 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3) cũng giống như trường hợp k lẻ (trong các Bổ đề 1.3.1, 1.3.2, 1.3.3) song với kỹ thuật dùng các đánh giá tích phân của I. M. Gelfand . Khi thu được các kết quả này thì việc chứng minh Định lý 2.3.1 là hoàn toàn giống chứng minh của Định lý 1.3.1 trong Chương 1. Vì vậy, các kết quả thu được trong trường hợp k chẵn cũng đạt được như trong trường hợp k lẻ.

Bổ đề 2.3.1 *Trong hình vuông V^T với a, b, k, c là chấp nhận được, k là số nguyên dương chẵn, chúng ta có*

$$\Big|x^{\gamma}\frac{\partial^{\alpha+\beta}E(x,y,u,v)}{\partial x^{\alpha}\partial y^{\beta}}\Big| \leq C\Big[|x^{k+1}-u^{k+1}|^2+(k+1)^2(y-v)^2\Big]^{-\frac{1}{2}}$$

với mọi $(\alpha,\beta,\gamma)\in\Xi_k^1$.

Bổ đề 2.3.2 *Trên $S_{\sigma_N(x,y)}(x,y)$ nếu $|x|\leq\big(2\sigma_N(x,y)\big)^{\frac{1}{k+1}}$ thì $|u|\leq 3\big(\sigma_N(x,y)\big)^{\frac{1}{k+1}}$ và*

$$\Big|x^{\gamma}\frac{\partial^{\alpha+\beta}\widetilde{X}_2E(x,y,u,v)}{\partial x^{\alpha}\partial y^{\beta}}\Big| \leq \frac{C}{\sigma_N^{\frac{k+2}{k+1}}(x,y)} \quad \forall(\alpha,\beta,\gamma)\in\Xi_k^1.$$

Bổ đề 2.3.3 *Trên biên $S_{\sigma_N(x,y)}(x,y)$ nếu $|x|\leq(2\sigma_N(x,y))^{\frac{1}{k+1}}$ thì*

$$\Big|\frac{x^{\gamma}}{|u|^k}\frac{\partial^{\alpha+\beta}\widetilde{X}_2E(x,y,u,v)}{\partial x^{\alpha}\partial y^{\beta}}\Big|_{S_{\sigma_N(x,y)}(x,y)} \leq \frac{C}{\sigma_N^2(x,y)} \quad \forall(\alpha,\beta,\gamma)\in\Xi_k^1.$$

Định lí 2.3.1 *Cho k là số chẵn và các tham số a, b, c, k chấp nhận được. Khi đó:*

i) Nếu $\psi\in G^s$ $(s\geq 1)$, thì mọi $C^{\infty}(\Omega)$- nghiệm của phương trình (1) thuộc $G^s(\Omega)$; toán tử phi tuyến $\Psi_{k,c}^{a,b}$ là s-hypoelliptic mở rộng.

ii) Trường hợp đặc biệt, nếu ψ là giải tích , thì mọi $C^{\infty}(\Omega)$- nghiệm của phương trình (1) cũng là hàm giải tích trên Ω; toán tử $\Psi_{k,c}^{a,b}$ là giải tích hypoelliptic mở rộng.

Định lí 2.3.2 *Giả sử rằng, k là số chẵn, các tham số a, b, c, k là chấp nhận được và $m\geq 2k+3$. Khi đó*

i) Nếu $\psi\in G^s(s\geq 1)$ thì mọi $G_{k,loc}^m(\Omega)$ - nghiệm của phương trình (1) là thuộc $G^s(\Omega)$; toán tử phi tuyến $\Psi_{k,c}^{a,b}$ là s- hypoelliptic.

ii) Trong trường hợp đặc biệt, nếu ψ là hàm giải tích thì mọi $C^m(\Omega)$- nghiệm của phương trình (1) cũng là giải tích trên Ω; toán tử phi tuyến $\Psi_{k,c}^{a,b}$ là giải tích hypoelliptic.

Kết luận và kiến nghị

Những kết quả chính của luận án

1. Tìm được nghiệm cơ bản của toán tử elliptic suy biến

$$G_{k,c}^{a,b} = \Big(\frac{\partial}{\partial x} - iax^k\frac{\partial}{\partial y}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x} - ibx^k\frac{\partial}{\partial y}\Big) + icx^{k-1}\frac{\partial}{\partial y},$$

với a, b, c là số phức bất kỳ mà $Re(a) < 0, Re(b) > 0$, k là số nguyên dương cả lẻ và chẵn.

2. Đánh giá được tính trơn của nghiệm của phương trình nửa tuyến tính elliptic suy biến

$$\Psi_{k,c}^{a,b} f = G_{k,c}^{a,b} f + \psi\Big(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, x^k\frac{\partial f}{\partial y}\Big) = 0. \qquad (1)$$

3. Chứng minh được tính giải tích, tính chính quy Gevrey của nghiệm của phương trình (1).

4. Chứng minh được tính hypoelliptic, giải tích hypoelliptic, s-hypoelliptic của toán tử phi tuyến $\Psi_{k,c}^{a,b}$.

Những vấn đề cần tiếp tục nghiên cứu

Nghiên cứu tính chính quy Gevrey cho các phương trình nửa tuyến tính elliptic với bậc suy biến cấp vô hạn.

Tài liệu tham khảo

Tiếng Anh

[1] Bateman H. (1953), *Higher Transcendental Function*, Vol. I, Mc Graw-Hill, New York, pp. 302.

[2] Egorov Yu. V. (1975), "On subelliptic operators", *Uspechi Mat. Nayk.*, (2), pp. 57-114.

[3] Friedman A. (1958), "On the regularity of the solution of nonlinear elliptic and parabolic system of parial differential equations", *J. Math. Mech.*, (7), pp. 43-59.

[4] Gilioli A. and Treves F. (1974), "An example in the solvability theory of linear FDE's", *Amer. J. Math.*, (96), pp. 367-385.

[5] Grushin V. V. (1971), "On a class of elliptic pseudo differential operators degenerate on a submanifold", *Math. USSR. Sbornik*, (13), pp. 155-183.

[6] Helffer B. (1982), "Necessary conditions of hypoanlyticity for homogeneous left - invariant operator on a grade nilpotent group ", *J. Differential Equations* 44, (3), pp. 460-481.

[7] Hörmander L. (1967), "Hypoelliptic second - order differential operators", *Acta Math.*, (119), pp. 147-171.

[8] Hörmander L. (1979), "Subelliptic operators", Seminar on Singularities of Solutions of Linear Partial Differential Equations", *Ann. Math. Studies*, (91), pp. 127-207, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

[9] Hörmander L. (1995), "On the theory of general partial differential equations", *Acta Math.*, (94), pp. 161-248.

[10] V. T. T. Hien, N. M. Tri (2008), "Analiticity of solutions of semi-linear equations with double characteristics", *J. Math. Anal. Appl.*, (337), pp. 1249-1260.

[11] V. T. T. Hien, N. M. Tri (2010), "Fourier transform and smoothness of solutions of a class of semilinear elliptic degenerate equations with double characteristics", *Russian Journal of Mathematical Physics*, Vol. 17, No. 2, pp. 162-178.

[12] Menikoff A. (1976), "Some example of hypoelliptic partial differentical equation", *Math. Ann.*, (221), pp. 176-181.

[13] Roth Child L. P., Stein E. M. (1976), "Hypoelliptic differential operators and sulpotent groups", *Acta Math.*, (137), pp. 247-320.

[14] Schwartz L. (1950, 1951), *Thérie des Distributions*, Vol. I, II, Hermann.

[15] N. M. Tri (1999), "Remark on non-uniform fundamental solutions and non-smooth solutions of some classes of differential operators with double characteristics", *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, (6), pp. 437-452.

[16] N. M. Tri (2000), "A note on necessary conditions of hypoelliticity for some classes of differential operators with double characteristics", *Kodai Math. J.*, (23), pp. 281-297.

[17] N. M. Tri (1999), "On the Gevrey analyticity of solutions of semilinear perturbations of powers of the Mizohata operator", *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino*, (57), pp. 37-57.

[18] N. M. Tri (2002), "On the Gevrey regularity of solutions of a class of semilinear elliptic degenerate equations on the plane", *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, (9), pp. 217-255.

[19] N. M. Tri (2004), "On the Gevrey analyticity of solutions of semilinear Kohn-Laplacian on the Heisenberg group", *Abstract and Applied Analysis, World Sci. Publ.*, pp. 335-353.

[20] Weyl H. (1940), "The method of orthogonal projection in potential theory", *Duke Math. J.*, (7), pp. 411-444.

Lời cảm ơn

Luận án được thực hiện và hoàn thành tại Viện Toán học thuộc Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam, dưới sự hướng dẫn tận tình và nghiêm túc của PGS.TSKH Nguyễn Minh Trí. Thầy đã hướng dẫn và truyền thụ cho tác giả những kinh nghiệm trong học tập, nghiên cứu khoa học. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc đối với Thầy.

Trong quá trình học tập và nghiên cứu, tác giả cũng luôn nhận được sự góp ý, động viên của GS.TSKH Nguyễn Minh Chương, GS.TSKH Nguyễn Tự Cường, GS.TSKH Đinh Nho Hào, PGS.TS Hà Tiến Ngoạn, TS Nguyễn Văn Ngọc. Tác giả xin chân thành cảm ơn sự quan tâm giúp đỡ của các thầy.

Tác giả xin chân thành cảm ơn các thầy, cô giáo cùng các anh chị em NCS, Cao học trong seminar Phòng Phương trình vi phân đã luôn giúp đỡ, động viên tác giả trong nghiên cứu khoa học và cuộc sống.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban lãnh đạo Viện Toán học, Trung tâm Đào tạo Sau đại học cùng toàn thể cán bộ, công nhân viên Viện Toán học - Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam đã tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tác giả trong quá trình thực hiện luận án.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn Binh chủng Tăng Thiết giáp, Trường Sĩ quan Tăng Thiết giáp, Đoàn Quản lý học viên 871- Bộ Quốc phòng, đã tạo mọi điều kiện giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập và nghiên cứu.

Tác giả xin chân thành cảm ơn bạn bè đồng nghiệp, đặc biệt là chồng, các con cùng những người thân trong gia đình đã giúp đỡ, động viên tác giả trong công tác và cuộc sống.

Các kết quả của luận án này đã được báo cáo tại

- Xemina Phòng Phương trình vi phân - Viện Toán học.
- Xemina Bộ môn Giải tích, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội I.
- Hội nghị Nghiên cứu sinh các năm 2007, 2008, 2009 của Viện Toán học.

Danh mục công trình công bố của tác giả

1. V. T. T. Hien, N. M. Tri (2008), "Analiticity of solutions of semi-linear equations with double characteristics", *J. Math. Anal. Appl.*, (337), pp. 1249-1260.

2. V. T. T. Hien, N. M. Tri (2010), "Fourier transform and smoothness of solutions of a class of semilinear elliptic degenerate equations with double characteristics", *Russian Journal of Mathematical Physics*, Vol. 17, No. 2, pp. 162-178.