VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

VIỆN TOÁN HỌC

TẠ THỊ HUYỀN TRANG

MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN CHO HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CÓ TRỄ BIẾN THIÊN

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 9 46 01 12

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HÀ NỘI - 2017

Luận án được hoàn thành tại:
Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam

Người hướng dẫn khoa học:
GS. TSKH. Vũ Ngọc Phát

Phản biện 1:..

Phản biện 2:..

Phản biện 3:..

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm Luận án cấp Viện họp tại Viện Toán học - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam vào hồi ......giờ ngày ......tháng ......năm 2017.

Có thể tìm luận án tại:
- Thư viện Quốc gia Hà Nội
- Thư viện Viện Toán học

Lời mở đầu

Lý thuyết ổn định và ổn định hóa các hệ động lực là một trong những hướng nghiên cứu quan trọng, có nhiều ứng dụng trong lý thuyết điều khiển hệ thống lẫn ứng dụng và thực tế, thu hút sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học trong và ngoài nước. Lý thuyết ổn định Lyapunov được hình thành sau khi A.M. Lyapunov, nhà toán học người Nga, công bố và bảo vệ thành công luận án tiến sĩ có tiêu đề "Bài toán tổng quan về tính ổn định của chuyển động". A.M. Lyapunov đã nghiên cứu và xây dựng được những lý thuyết cơ sở, nền tảng cho lý thuyết ổn định, đặc biệt là đưa ra hai phương pháp nghiên cứu tính ổn định của các hệ phương trình vi phân thường. Đó là phương pháp số mũ Lyapunov và phương pháp hàm Lyapunov.

Để có ứng dụng nhiều hơn trong thực tế, người ta không chỉ quan tâm đến việc tìm ra các tiêu chuẩn ổn định của hệ mà còn phải tìm cách thiết kế được một hệ thống điều khiển đảm bảo một mức độ đầy đủ về hiệu suất (guarantees an adequate level of performance). Dựa trên nhu cầu thực tiễn như vậy, năm 1972, S.S.L. Chang và T.K.C. Peng đã đưa ra bài toán đảm bảo giá trị điều khiển cho hệ thống. Trong bài toán này, ngoài việc thiết kế một bộ điều khiển để đảm bảo cho hệ thống điều khiển không những ổn định mà còn đảm bảo rằng một hàm chi phí toàn phương liên hệ với hệ động lực đó có giá trị hữu hạn và giá trị đó càng nhỏ càng tốt. Năm 1974, I.R. Petersen và D.C. McFarlane đã nghiên cứu bài toán đảm bảo giá trị tối ưu cho hệ điều khiển được mô tả dưới dạng hệ phương trình vi phân thường có nhiễu cấu trúc. Trong nghiên cứu của mình, Petersen và các cộng sự đã sử dụng phương trình Riccati đại số để đưa ra một tiêu chuẩn cho bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ phương trình vi phân thường có nhiễu cấu trúc. Năm 1999, L.Yu và J. Chu đã mở rộng bài toán trên cho lớp hệ phương trình vi phân không chắc chắn có trễ hằng. Năm 2012, M.V. Thuan và V.N. Phat đã nghiên cứu bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho lớp hệ phương trình vi phân có trễ hỗn hợp trên cả biến trạng thái và biến điều khiển với độ trễ là các hàm liên tục nhưng không nhất thiết khả vi. Trong chương 2 của luận án này, chúng tôi nghiên cứu một số kết quả về bài toán đảm bảo giá trị tối ưu cho một số lớp hệ phương trình vi phân có trễ biến thiên liên tục dạng khoảng (tập giá trị của trễ là đoạn thẳng) và không khả vi thông qua thông tin phản hồi đầu ra: hệ phi tuyến, hệ không chắc chắn.

Lý thuyết ổn định trong thời gian hữu hạn được giới thiệu lần đầu tiên bởi Dorato vào năm 1961. Một hệ phương trình vi phân được gọi là ổn định trong thời gian hữu hạn nếu véc tơ trạng thái không vượt quá một mức cho trước trong khoảng thời gian hữu hạn. So sánh với tính ổn định Lyapunov, thì sự ổn định trong thời gian hữu hạn liên quan đến tính bị chặn của véc tơ trạng thái trong một khoảng thời gian cho trước. Do đó, một hệ có thể ổn định trong thời gian hữu hạn nhưng không ổn định Lyapunov, và ngược lại. Bên cạnh đó bài toán điều khiển H_∞ của hệ có trễ thu hút được nhiều sự quan tâm về mặt lí thuyết cũng như thực tiễn do trễ không những là một yếu tố không thể tránh khỏi trong nhiều quá trình thực tế mà còn là nguyên nhân cho sự không ổn định và hiệu suất kém. Mục đích khi nghiên cứu bài toán điều khiển H_∞ là thiết kế được một điều khiển làm cho hệ đóng (hệ không có nhiễu ω) là ổn định tiệm cận và đảm bảo hiệu suất ràng buộc của hệ thống là lớn nhất. Trong chương 3, chúng tôi nghiên cứu bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn của một lớp hệ điều khiển phi tuyến có trễ biến thiên liên tục dạng khoảng thông qua thông tin phản hồi đầu ra.

Ngoài phần mở đầu, kết luận, danh mục các kí hiệu, danh mục các công trình khoa học của tác giả, tài liệu tham khảo, luận án gồm 3 chương như sau:

Chương 1 là chương kiến thức chuẩn bị, gồm 3 mục. Mục 1.1 giới thiệu bài toán ổn định, bài toán ổn định hóa cho hệ phương trình vi phân có trễ. Mục 1.2 giới thiệu bài toán đảm bảo chi phí điều khiển. Mục 1.3 trình bày bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn. Mục 1.4 nhắc lại về bất đẳng thức ma trận tuyến tính. Mục 1.5 trình bày lại một số bổ đề sẽ được sử dụng trong các chương sau của luận án.

Chương 2 nghiên cứu bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ phương trình vi phân phi tuyến có trễ biến thiên. Mục 2.1 trình bày điều kiện đủ để xây dựng hàm điều khiển phản hồi đầu ra cho lớp hệ phương trình vi phân có trễ biến thiên liên tục dạng khoảng. Mục 2.2 xây dựng hàm điều khiển phản hồi đầu ra cho lớp hệ điều khiển tuyến tính không chắc chắn có trễ biến thiên.

Chương 3 nghiên cứu bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn cho một lớp hệ phương trình vi phân phi tuyến có trễ biến thiên dạng khoảng thông qua thông tin phản hồi đầu ra. Mục 3.1 trình bày các điều kiện đủ để xây dựng hàm điều khiển phản hồi đầu ra cho bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn. Mục 3.2 thiết lập hàm điều khiển phản hồi đầu ra của bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn cho hệ điều khiển tuyến tính không chắc chắn với trễ biến thiên.

Chương 1

Cơ sở toán học

Trong chương này, chúng tôi trích dẫn một số khái niệm và kết quả đã biết về tính ổn định và ổn định hoá được của hệ phương trình vi phân có trễ, bài toán đảm bảo chi phí điều khiển, bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn, và một số kiến thức bổ trợ trong luận án. Các khái niệm và kết quả này nhằm giúp việc trình bày một cách hệ thống và rõ ràng các kết quả trong các chương sau.

1.1 Bài toán ổn định và ổn định hóa hệ phương trình vi phân có trễ

1.1.1 Bài toán ổn định hệ phương trình vi phân có trễ

Như chúng ta đã biết hệ phương trình vi phân thường mô tả mối quan hệ giữa biến thời gian t, trạng thái $x(t)$ của hệ thống và tốc độ thay đổi của trạng thái $x(t)$ tại cùng một thời điểm t. Tuy nhiên, trong thực tế, các quá trình xảy ra trong tự nhiên thường có sự liên quan với quá khứ và ít nhiều mang tính di truyền. Vì vậy lớp hệ phương trình vi thường không miêu tả được hết các quá trình này. Do đó, để mô tả một cách chính xác các quá trình này, người ta thường miêu tả chúng bằng các phương trình vi phân có trễ.

Giả sử h là một số thực không âm. Kí hiệu $\mathcal{C} = C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ là không gian Banach các hàm liên tục trên đoạn $[-h, 0]$, nhận giá trị trong không gian $\mathbb{R}^n$, và chuẩn của một phần tử $\varphi \in \mathcal{C}$ được cho bởi $\|\varphi\| = \sup\limits_{-h\leq\theta\leq 0} \|\varphi(\theta)\|$. Với $t_0 \in \mathbb{R}, \sigma \geq 0$ và $x \in C([t_0 - h, t_0 + \sigma], \mathbb{R}^n)$, hàm $x_t \in \mathcal{C}, t \in [t_0, t_0 + \sigma]$, được xác định bởi $x_t(s) := x(t + s), s \in [-h, 0]$. Như vậy, x_t là một quỹ đạo trên đoạn $[t - h, t]$ của hàm $x(.)$ với chuẩn trong $\mathcal{C}$. Nếu $D \subset \mathbb{R} \times \mathcal{C}$ là 1 tập mở và hàm $f : D \to \mathbb{R}^n$ là hàm cho trước thì một phương trình vi phân có trễ trên D là phương trình có dạng:

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \tag{1.1}$$

Một hàm $x(\cdot)$ được gọi là nghiệm của phương trình (1.1) nếu tồn tại $t_0 \in \mathbb{R}$ và $\sigma > 0$

sao cho $x(\cdot) \in C([t_0 - h, t_0 + \sigma), \mathbb{R}^n)$, $(t, x_t) \in D$ và $x(t)$ thỏa mãn (1.1) với mọi $t \in [t_0, t_0 + \sigma)$. Với $t_0 \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{C}$, ta nói $x(t_0, \varphi, f)$ là nghiệm của phương trình (1.1) với giá trị ban đầu $x_{t_0}(t_0, \varphi) = \varphi$. Chúng ta luôn giả thiết hàm f thỏa mãn điều kiện với mỗi điểm $(t_0, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C}$, hệ (1.1) có nghiệm duy nhất đi qua điểm (t_0, φ) và xác định trên $[t_0, \infty)$.

Trong luận án này, chúng tôi giả thiết rằng hàm $f(.)$ thỏa mãn điều kiện sao cho với mỗi điểm $(t_0, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C}$, hệ (1.1) có nghiệm duy nhất đi qua điểm (t_0, φ) và nghiệm xác định trên $[t_0, +\infty)$.

Định nghĩa 1.1. Giả sử $f(t, 0) = 0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$.

- Nghiệm $x = 0$ của phương trình (1.1) được gọi là ổn định nếu với bất kì $t_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$ sao cho nếu $||\varphi||_{\mathcal{C}} \leq \delta$ thì $||x_t(t_0, \varphi)||_{\mathcal{C}} \leq \varepsilon$ với $t \geq t_0$.
- Nghiệm $x = 0$ của phương trình (1.1) được gọi là ổn định tiệm cận nếu nó ổn định và tồn tại $b_0 = b_0(t_0) > 0$ sao cho nếu $||\varphi||_{\mathcal{C}} \leq b_0$ thì $\lim\limits_{t \to \infty} x(t_0, \varphi)(t) = 0$.

Nếu $y(t)$ là nghiệm bất kì của phương trình (1.1), thì y được nói là ổn định nếu nghiệm $z = 0$ của phương trình

$$\dot{z}(t) = f(t, z_t + y_t) - f(t, y_t)$$

là ổn định. Các khái niệm về ổn định khác được định nghĩa tương tự trường hợp $f(t, 0) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.2. Giả sử $f(t, 0) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$ và $\beta > 0$ cho trước. Khi đó, nghiệm $x = 0$ của phương trình (1.1) được gọi là $\beta-$ổn định mũ nếu tồn tại hằng số $M > 0$ sao cho mọi nghiệm $x(t_0, \varphi)$ của hệ (1.1) thỏa mãn

$$||x(t_0, \varphi)(t)|| \leq Me^{-\beta(t - t_0)}||\varphi||_{\mathcal{C}}, \ \forall t \geq t_0.$$

Năm 1892, A.M. Lyapunov là người đầu tiên đưa ra phương pháp hàm Lyapunov để nghiên cứu tính ổn định của lớp hệ phương trình vi phân thường. Năm 1963, N.N. Krasovskii trong công trình của mình đã mở rộng phương pháp thứ hai Lyapunov (hay còn gọi là phương pháp hàm Lyapunov) cho hệ phương trình vi phân có trễ và đã thu được rất nhiều kết quả có ý nghĩa. Tiếp theo, chúng tôi trình bày định nghĩa hàm Lyapunov-Krasovskii và một số điều kiện đủ cho tính ổn định của nghiệm $x = 0$ của phương trình (1.1). Trước khi đưa ra định nghĩa hàm Lyapunov-Krasovskii, chúng ta cần kí hiệu và giả thiết sau:

- $Q_H := \{\varphi \in \mathcal{C} : \ ||\varphi||_{\mathcal{C}} \leq H\}$ và giả sử với mỗi $H > 0$, hàm số $f : \mathbb{R} \times Q_H \to \mathbb{R}$ là liên tục, bị chặn, và thỏa mãn điều kiện Lipschitz địa phương theo biến thứ hai.

Định nghĩa 1.3. Nếu $V: \mathbb{R} \times Q_H \to \mathbb{R}$ liên tục và $x(\cdot)$ là nghiệm của phương trình (1.1), chúng ta định nghĩa

$$\dot{V}(t,\varphi) = \limsup_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \left[V(t+h, x_{t+h}(t,\varphi)) - V(t,\varphi) \right].$$

Hàm $\dot{V}(t,\varphi)$ là đạo hàm bên phải của $V(t,\varphi)$ dọc theo nghiệm của (1.1).

Định nghĩa 1.4. Hàm $V: \mathbb{R} \times Q_H \to \mathbb{R}$ liên tục và $V(t,0) \equiv 0$ được gọi là hàm Lyapunov-Krasovskii của hệ (1.1) nếu các điều kiện sau thỏa mãn

i) hàm $V(t,\varphi)$ xác định dương, tức là

$$\exists u \in \mathcal{K}: \ u(|\varphi(0)|) \leq V(t,\varphi), \ \forall \varphi \in Q_H, \ t \in \mathbb{R},$$

ii) $\dot{V}(t,\varphi) \leq 0, \ \forall \varphi \in Q_H.$

Định lí 1.1. *Giả sử $f(t,0) \equiv 0$. Khi đó, nếu hệ (1.1) có hàm Lyapunov-Krasovskii thì nghiệm $x = 0$ của hệ là ổn định.*

Định lí 1.2. *Nếu tồn tại hàm liên tục $V: \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:*

i) *tồn tại $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ sao cho $\lambda_1 ||\varphi(0)||^2 \leq V(t,\varphi) \leq \lambda_2 ||\varphi||_{\mathcal{C}}^2$,*

ii) $\dot{V}(t,\varphi) \leq 0$,

thì hệ (1.1) là ổn định và nghiệm của nó là bị chặn, tức là tồn tại $M > 0$ sao cho

$$||x(t_0,\varphi)(t)|| \leq M ||\varphi||_{\mathcal{C}}, \quad \forall (t_0,\varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C}, \ t \geq t_0.$$

Nếu thay điều kiện (ii) bằng điều kiện

iii) *tồn tại $\lambda_0 > 0$ sao cho $\dot{V}(t,\varphi) \leq -2\lambda_0 V(t,\varphi)$ với mọi $(t,\varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C}$,*

thì hệ (1.1) là ổn định mũ và nghiệm của hệ thỏa mãn

$$||x(t_0,\varphi)(t)|| \leq \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} e^{-\lambda_0(t-t_0)} ||\varphi||_{\mathcal{C}}, \ \forall t \geq t_0.$$

1.1.2 Bài toán ổn định hóa cho hệ điều khiển có trễ

Xét hệ điều khiển được mô tả bởi phương trình vi phân

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(t, x_t, u(t)), \qquad t \geq 0, \\ x(t) &= \varphi(t), \qquad t \in [-h, 0], \end{cases} \tag{1.2}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái, $u(t) \in L_2\left([0,+\infty), \mathbb{R}^m\right)$ là véc tơ điều khiển, $h \geq 0$ là hằng số trễ, $\varphi \in C\left([-h,0], \mathbb{R}^n\right)$ là hàm điều kiện ban đầu và hàm $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ thỏa mãn điều kiện $f(t,0,0) \equiv 0$.

Định nghĩa 1.5. Hệ điều khiển (1.2) gọi là ổn định hóa được nếu tồn tại hàm $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ g(0) = 0$, sao cho nghiệm $x = 0$ của hệ đóng

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t, g(x(t)))$$

là ổn định tiệm cận. Trong trường hợp này, hàm $u(.) = g(.)$ gọi là hàm điều khiển ngược.

Định nghĩa 1.6. Cho $\beta > 0$. Hệ điều khiển (1.2) được gọi là ổn định hóa được dạng mũ nếu tồn tại hàm $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ g(0) = 0$, sao cho nghiệm $x = 0$ của hệ đóng

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t, g(x(t)))$$

là $\beta-$ổn định mũ.

1.2 Bài toán đảm bảo chi phí điều khiển

Xét hệ điều khiển tuyến tính

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \geq 0, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \ \ u(t) \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \tag{1.3}$$

với hàm chi phí toàn phương (hay còn gọi là hàm mục tiêu dạng toàn phương)

$$J(u) = \int_0^{+\infty} \left[x^\top(t)Qx(t) + u^\top(t)Ru(t)\right] dt, \tag{1.4}$$

trong đó $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}, R \in \mathbb{R}^{m\times m}$ là các ma trận đối xứng, xác định dương cho trước. Điều khiển $u(t) \in L_2\left([0, \infty), \mathbb{R}^n\right)$. Bài toán điều khiển tối ưu cho hệ điều khiển tuyến tính (1.3) hay còn gọi là bài toán tối ưu toàn phương tuyến tính là tìm điều khiển chấp nhận được $u^*(.)$ sao cho với điều khiển này giá trị của hàm chi phí toàn phương đạt giá trị nhỏ nhất.

Trong các bài toán kĩ thuật, ngoài việc tìm cách thiết kế một hệ thống điều khiển làm cho hệ điều khiển không những ổn định mà còn đảm bảo một mức độ đầy đủ về hiệu suất (guarantees an adequate level of performance). Dựa trên ý tưởng đó, năm 1972, hai nhà toán học S.S.L. Chang và T.K.C.Peng đã đưa ra bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho các hệ động lực. Khác với bài toán tối ưu toàn phương tuyến tính, ngoài việc thiết kế một bộ điều khiển để đảm bảo cho hệ thống điều khiển không những ổn định mà còn đảm bảo rằng một hàm chi phí toàn phương liên hệ với hệ động lực đó có giá trị hữu hạn và giá trị đó càng nhỏ càng tốt. Bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ (1.3) có thể phát biểu như sau:

Định nghĩa 1.7. Xét hệ điều khiển tuyến tính (1.3) và hàm chi phí toàn phương (1.4), nếu tồn tại hàm điều khiển phản hồi trạng thái $u^*(t) = Kx(t), K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ và một số dương J^* sao cho hệ đóng

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [A + BK]\, x(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1.5}$$

là ổn định tiệm cận và giá trị của hàm chi phí toàn phương (1.4) thỏa mãn $J(u^*) \le J^*$, thì J^* được gọi là giá trị đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ (1.3) và $u^*(t)$ được gọi là hàm điều khiển phản hồi trạng thái đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ (1.3).

1.3 Bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn

Lý thuyết ổn định trong thời gian hữu hạn được giới thiệu lần đầu tiên bởi Dorato vào năm 1961. Một hệ phương trình vi phân được gọi là ổn định trong thời gian hữu hạn nếu véc tơ trạng thái không vượt quá một mức cho trước trong khoảng thời gian hữu hạn. So sánh với tính ổn định Lyapunov, thì sự ổn định trong thời gian hữu hạn liên quan đến tính bị chặn của véc tơ trạng thái trong một khoảng thời gian cho trước. Do đó, một hệ có thể ổn định trong thời gian hữu hạn nhưng không ổn định Lyapunov, và ngược lại. Bài toán ổn định trong thời gian hữu hạn có thể phát biểu như sau:

Định nghĩa 1.8 (*Bài toán ổn định trong thời gian hữu hạn*)**.** Cho $T > 0, c_2 > c_1 > 0, R$ là ma trận xác định dương. Hệ phương trình: $\dot{x}(t) = Ax(t)$ được gọi là ổn định trong thời gian hữu hạn (FTS) tương ứng với (c_1, c_2, T, R) nếu:

$$x^\top(0)Rx(0) < c_1 \Rightarrow x^\top(t)Rx(t) < c_2, \quad \forall t \in [0, T].$$

Định nghĩa 1.9 (*Bài toán bị chặn trong thời gian hữu hạn*)**.** Xét hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Gw(t), \quad t \in [0, T], \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1.6}$$

với hàm nhiễu thỏa mãn điều kiện

$$w^\top(t)w(t) \le d, \quad (d > 0). \tag{1.7}$$

Hệ (1.6) được gọi là bị chặn trong thời gian hữu hạn (FTB) tương ứng với (c_1, c_2, T, R, d), với $c_2 > c_1$ và $R > 0$ là ma trận xác định dương nếu

$$x^\top(0)Rx(0) < c_1 \Rightarrow x^\top(t)Rx(t) < c_2, \quad \forall t \in [0, T], \forall w : w^\top(t)w(t) \le d.$$

Tiếp theo chúng ta sẽ nhắc lại một bài toán quan trọng khác của lý thuyết điều khiển trong thời gian hữu hạn là bài toán ổn định hóa trong thời gian hữu hạn.

Định nghĩa 1.10 (*Bài toán ổn định hóa trong thời gian hữu hạn*)**.** Cho $T > 0, c_2 > c_1 > 0$ và R là ma trận xác định dương. Hệ điều khiển:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \in [0, T], \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1.8}$$

được gọi là ổn định hóa trong thời gian hữu hạn nếu tồn tại hàm điều khiển ngược $u(t) = Kx(t)$ sao cho hệ đóng $\dot{x}(t) = [A + BK]\,x(t)$ là ổn định trong thời gian hữu hạn (FTS) tương ứng với (c_1, c_2, T, R).

Tiếp theo chúng tôi giới thiệu về bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn. Xét hệ phương trình vi phân điều khiển tuyến tính

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Gw(t), \;\; t \in [0, T], \\ z(t) = Cx(t), \end{cases} \tag{1.9}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là véc tơ điều khiển, $z(t) \in \mathbb{R}^p$ là hàm quan sát, và $w(t) \in \mathbb{R}^r$ là hàm nhiễu.

Định nghĩa 1.11 (Bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn)**.** Cho $T > 0, \gamma > 0$. Bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn cho hệ (1.9) là bài toán tìm điều khiển ngược $u(t) = Fx(t)$ thỏa mãn các điều kiện sau:

- Với $w = 0$, hệ đóng: $\dot{x}(t) = [A + BF]x(t)$ là ổn định trong thời gian hữu hạn (FTS) tương ứng với (c_1, c_2, T, R).

- Tồn tại $c_0 > 0$ sao cho:

$$\sup \frac{\int_0^T \|z(t)\|^2 dt}{c_0\|\varphi\|^2_{C^1} + \int_0^T \|w(t)\|^2 dt} \leq \gamma, \tag{1.10}$$

  trong đó supremum chạy trên $\varphi \in C^1([-h_2, 0], \mathbb{R}^n)$ và nhiễu $w(.)$ thỏa mãn (1.7).

Chương 2

BÀI TOÁN ĐẢM BẢO CHI PHÍ ĐIỀU KHIỂN

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu một số kết quả về bài toán đảm bảo giá trị cho một số lớp hệ phương trình vi phân có trễ biến thiên liên tục dạng khoảng (tập giá trị của trễ là đoạn thẳng) và không khả vi thông qua thông tin phản hồi đầu ra: hệ phi tuyến, hệ không chắc chắn.

2.1 Hệ phương trình vi phân phi tuyến có trễ biến thiên

Xét phương trình vi phân phi tuyến có trễ biến thiên trên biến trạng thái và biến quan sát

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A_1x(t) + A_2x(t-h(t)) + Bu(t) + f(t, x(t), x(t-h(t)), u(t)), \\ y(t) &= C_1x(t) + C_2x(t-h(t)), \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in [-h_2, 0], \end{cases} \tag{2.1}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái; $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là véc tơ điều khiển; $y(t) \in \mathbb{R}^p$ là véc tơ quan sát; $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}^{p\times n}$ là các ma trận thực cho trước với số chiều thích hợp; hàm trễ $h(t)$ là hàm liên tục thỏa mãn điều kiện

$$0 \le h_1 \le h(t) \le h_2. \tag{2.2}$$

Hàm điều kiện ban đầu $\phi(t) \in C^1\left([-h_2, 0], \mathbb{R}^n\right)$ với chuẩn

$$\|\phi\|_{C^1} = \max\left\{\|\phi\|, \|\dot{\phi}\|\right\}.$$

Hàm nhiễu phi tuyến thỏa mãn điều kiện tăng trưởng dưới tuyến tính

$$f^\top(t, x, x_h, u)f(t, x, x_h, u) \le x^\top E_1^\top E_1 x + x_h^\top E_2^\top E_2 x_h + u^\top E_3^\top E_3 u, \tag{2.3}$$

với mọi $t \in \mathbb{R}^+, x, x_h \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$, E_1, E_2, E_3 là các ma trận thực với số chiều thích hợp, và E_3 là ma trận hạng cột đầy đủ.

Ta xét hàm chi phí sau

$$J(u) = \int_0^\infty g(t, x(t), x(t-h(t)), u(t))dt, \tag{2.4}$$

với $g(t,x,y,u) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^+$ là hàm liên tục được cho bởi

$$|g(t,x,x_h,u)| \leq x^\top Q_1 x + x_h^\top Q_2 x_h + u^\top R u, \tag{2.5}$$

trong đó $\forall t \in \mathbb{R}^+, x, x_h \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$, $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $R \in \mathbb{R}^{m\times m}$ là các ma trận thực, đối xứng, xác định dương cho trước.

Mục đích chính của mục này là ta sẽ tìm số J^* và phản hồi đầu ra $u(t) = Fy(t), F \in \mathbb{R}^{m\times p}$ sao cho hệ đóng

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= (A_1 + BFC_1)x(t) + (A_2 + BFC_2)x(t-h(t)) \\ &\qquad + f(t, x(t), x(t-h(t))), \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in [-h_2, 0], \end{cases} \tag{2.6}$$

là ổn định hóa và hàm chi phí (2.4) thỏa mãn điều kiện $J(u) \leq J^*$.

Định nghĩa 2.1. Cho $\alpha > 0$. Nghiệm $x = 0$ của hệ (2.1), với $u(t) = 0$, được gọi là $\alpha-$ổn định mũ nếu tồn tại một hằng số $\beta > 0$ sao cho nghiệm bất kì $x(t,\phi)$ của hệ thỏa mãn điều kiện

$$\| x(t,\phi) \| \leq \beta e^{-\alpha t} \|\phi\|_{\mathcal{C}^1}, \quad \forall t \geq 0.$$

Định nghĩa 2.2. Hệ (2.1) được gọi là $\alpha-$ổn định hóa được dạng mũ thông qua thông tin phản hồi đầu ra nếu tồn tại một điều khiển ngược thông qua thông tin phản hồi đầu ra $u(t) = Fy(t)$ sao cho nghiệm bất kì $x(t,\phi)$ của hệ đóng (2.6) là $\alpha-$ổn định mũ.

Định nghĩa 2.3. Đối với hệ phi tuyến (2.1) và hàm chi phí (2.4), nếu tồn tại một điều khiển ngược thông tin phản hồi đầu ra $u^*(t)$ và một hằng số dương J^* sao cho hệ đóng (2.6) là $\alpha-$ổn định mũ và hàm chi phí (2.4) thỏa mãn $J(u^*) \leq J^*$, thì $u^*(t)$ được gọi là điều khiển đảm bảo giá trị tối ưu thông qua thông tin phản hồi đầu ra, và J^* được gọi là giá trị đảm bảo tối ưu.

Cho số $\alpha > 0$, các ma trận đối xứng, xác định dương $P, U_1, U_2, S_1, S_2, S_3, X_1, X_2, X_3, N$, và ma trận tự do K. Trước khi đưa ra kết quả chính, ta cần một số kí hiệu sau:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 = e^{-2\alpha(h_1+h_2)},\ \lambda_2 = e^{-2\alpha h_1},\ \lambda_3 = e^{-2\alpha h_2},\ \lambda_4 = 2\lambda_3^2 \widehat{h}^{-1}, \\
&\lambda_5 = 2\lambda_3^2 h_m^{-1}, \lambda_6 = 2\lambda_2^2 h_1^{-1}, \lambda_7 = 2\lambda_3^2 h_2^{-1}, \\
&\lambda_8 = 2\lambda_2^2 (h_1^2)^{-1}, \lambda_9 = 2\lambda_3^2 (h_2^2)^{-1}, \bar{h} = h_1^2 + h_2^2, \\
&\underline{h} = (h_2 - h_1)^2,\ \ \widetilde{h} = \frac{h_2 - h_1}{h_2 + h_1},\ \ \widehat{h} = h_2^2 - h_1^2, \\
&h_m = h_1 + h_2, \lambda = \lambda_{min}(P),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Lambda &= \lambda_{max}(P) + h_1\lambda_{max}(U_1) + h_2\lambda_{max}(U_2) + 0.5h_1^3\lambda_{max}(S_1) \\
&\quad + 0.5h_2^3\lambda_{max}(S_2) + (h_2^2 - h_1^2)(h_2 - h_1)\lambda_{max}(S_3) \\
&\quad + 1/6h_1^3\lambda_{max}(X_1) + \frac{1}{6}h_2^3\lambda_{max}(X_2) + \frac{1}{6}(h_2 - h_1)^3\lambda_{max}(X_3), \\
\delta_1 &= \lambda_{min}(R^{-1}), \delta_2 = \lambda_{min}((E_3^\top E_3)^{-1}), \\
\Pi_{11} &= PA_1 + A_1^\top P + U_1 + U_2 + Q_1 + 2\alpha P + 2E_1^\top E_1 - \lambda_2 S_1 \\
&\quad - \lambda_3 S_2 - 2\lambda_2^2 X_1 - 2\lambda_3^2 X_2 - 2\lambda_3^2\widetilde{h}X_3 + BKC_1 \\
&\quad + C_1^\top K^\top B^\top - 0.5BNB^\top, \\
\Pi_{22} &= -\lambda_2 U_1 - \lambda_2 S_1 - \lambda_3 S_3, \Pi_{33} = -\lambda_3 U_2 - \lambda_3 S_2 - \lambda_3 S_3, \\
\Pi_{44} &= h_1^2 S_1 + h_2^2 S_2 + (h_2 - h_1)^2 S_3 + 0.5h_1^2 X_1 + 0.5h_2^2 X_2 \\
&\quad + 0.5\widehat{h}X_3 - 2P, \\
\Pi_{55} &= 2E_2^\top E_2 - 2\lambda_3 S_3 + Q_2, \Pi_{66} = -\lambda_8 X_1, \\
\Pi_{77} &= -\lambda_9 X_2, \Pi_{88} = -\lambda_4 X_3.
\end{aligned}
$$

$$
\Pi_1 = \begin{bmatrix}
\Pi_{11} & \lambda_2 S_1 & \lambda_3 S_2 & A_1^\top P & PA_2 & \lambda_6 X_1 & \lambda_7 X_2 & \lambda_5 X_3 \\
* & \Pi_{22} & 0 & 0 & \lambda_3 S_3 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & \Pi_{33} & 0 & \lambda_3 S_3 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & \Pi_{44} & PA_2 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & \Pi_{55} & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & \Pi_{66} & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & \Pi_{77} & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & \Pi_{88}
\end{bmatrix},
$$

$$
\Pi_2^1 = \begin{bmatrix}
PB & C_1^\top K^\top - 0.5BN & C_1^\top K^\top & C_1^\top K^\top & P & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & PB & P
\end{bmatrix},
$$

$$
\Pi_2^2 = \begin{bmatrix}
C_2^\top K^\top & C_2^\top K^\top & C_2^\top K^\top \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0
\end{bmatrix},
$$

$$
\Pi_2 = \begin{bmatrix} \Pi_2^1 & 0 \\ 0 & \Pi_2^2 \end{bmatrix},
$$

$$
\begin{aligned}
\Pi_3 = diag\Big(& -0.5N, -0.5N, -0.5\delta_2 aN + 0.25\delta_2 a^2 I, -\delta_1 aN + 0.5\delta_1 a^2 I, \\
& -I, -0.5N, -I, -0.5N, -0.5\delta_2 aN + 0.25\delta_2 a^2 I, -\delta_1 aN + 0.5\delta_1 a^2 I\Big).
\end{aligned}
$$

Định lí sau đây đưa ra một điều kiện đủ cho sự tồn tại của một điều khiển ngược thông qua thông tin phản hồi đầu ra $u(t) = Fy(t)$ đảm bảo cho hệ phương trình vi phân phi tuyến (2.1) là $\alpha-$ổn định hóa được dạng mũ và giá trị của hàm chi phí (2.4) thỏa mãn $J(u^*) \leq J^*$.

Định lí 2.1. *Cho số $a > 0, \alpha > 0$. Xét hệ điều khiển phi tuyến có trễ biến thiên trên cả biến trạng thái và biến điều khiển* (2.1) *với hàm chi phí* (2.4)*. Giả sử các ma trận hệ số của hệ* (2.1) *thỏa mãn điều kiện: tồn tại các ma trận đối xứng xác định dương $P, U_1, U_2, S_1, S_2, S_3, X_1, X_2, X_3, N$ và ma trận K, sao cho bất đẳng thức ma trận tuyến tính sau được thỏa mãn*

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Pi_1 & \Pi_2 \\ * & \Pi_3 \end{bmatrix} < 0. \tag{2.7}$$

Khi đó $u(t) = N^{-1}Ky(t)$ là luật điều khiển đảm bảo chi phí điều khiển thông qua thông tin phản hồi đầu ra cho hệ (2.1)*, và giá trị đảm bảo tối ưu chi phí điều khiển cho hệ* (2.1) *là:*

$$J^* = \Lambda \|\phi\|^2_{C^1}.$$

Nhận xét 2.1. Phương pháp chứng minh Định lí 2.1:

- *Bước 1:* Xét hàm Lyapunov - Krasovskii cho hệ (2.1) như sau

$$V(t, x_t) = \sum_{i=1}^{6} V_i(t, x_t), \tag{2.8}$$

  trong đó

$$\begin{aligned}
V_1(t, x_t) =& x^\top(t)Px(t),\\
V_2(t, x_t) =& \int_{t-h_1}^{t} e^{2\alpha(s-t)}x^\top(s)U_1x(s)ds + \int_{t-h_2}^{t} e^{2\alpha(s-t)}x^\top(s)U_2x(s)ds,\\
V_3(t, x_t) =& h_1\int_{-h_1}^{0}\int_{t+s}^{t} e^{2\alpha(\tau-t)}\dot{x}^\top(\tau)S_1\dot{x}(\tau)d\tau ds\\
&+ h_2\int_{-h_2}^{0}\int_{t+s}^{t} e^{2\alpha(\tau-t)}\dot{x}^\top(\tau)S_2\dot{x}(\tau)d\tau ds,\\
V_4(t, x_t) =& (h_2 - h_1)\int_{-h_2}^{-h_1}\int_{t+s}^{t} e^{2\alpha(\tau-t)}\dot{x}^\top(\tau)S_3\dot{x}(\tau)d\tau ds,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_5(t, x_t) =& \int_{-h_1}^{0}\int_{\theta}^{0}\int_{t+s}^{t} e^{2\alpha(\tau+s-t)}\dot{x}^\top(\tau)X_1\dot{x}(\tau)d\tau ds d\theta\\
&+ \int_{-h_2}^{0}\int_{\theta}^{0}\int_{t+s}^{t} e^{2\alpha(\tau+s-t)}\dot{x}^\top(\tau)X_2\dot{x}(\tau)d\tau ds d\theta,\\
V_6(t, x_t) =& \int_{-h_2}^{-h_1}\int_{\theta}^{0}\int_{t+s}^{t} e^{2\alpha(\tau+s-t)}\dot{x}^\top(\tau)X_3\dot{x}(\tau)d\tau ds d\theta.
\end{aligned}$$

- *Bước 2:* Ước lượng $\dot{V}(t, x_t)$ như sau:

$$\dot{V}(t, x_t) + 2\alpha V(t, x_t) \le \zeta^\top(t)\widetilde{W}\zeta(t) - |g(t, x(t), x(t-h(t)), u(t))|. \tag{2.9}$$

- *Bước 3:* Chúng ta chứng minh tính $\alpha-$ổn định mũ của nghiệm.

$$\|x(t,\phi)\| \leq \sqrt{\frac{\Lambda}{\lambda}} e^{-\alpha t}\|\phi\|_{\mathcal{C}^1}, \quad \forall t \geq 0,$$

- *Bước 4:* Tìm giá trị đảm bảo tối ưu chi phí điều khiển cho hệ (2.1) là:

$$\int_0^\infty |g(t,x(t),x(t-h(t)),u(t))|\, dt < V(0,x_0) = \Lambda\|\phi\|^2_{\mathcal{C}^1} = J^*.$$

Nhận xét 2.2. Định lí 2.1 cung cấp cho ta điều kiện đủ để thiết kế điều khiển ngược thông qua thông tin phản hồi đầu ra cho hệ (2.1) dưới dạng các bất đẳng thức ma trận tuyến tính (LMIs), để hệ đóng là $\alpha-$ổn định mũ. Chú ý rằng, hàm trễ biến thiên là không khả vi, do đó, các phương pháp sử dụng trong Li H., Niculescu S.L., Dugard L. and Diona J.M. (1998), Thuan M.V. and Phat V.N. (2012) và Wang Y., Wang Q., Zhou P. and Duan D. (2012) là không sử dụng được cho hệ (2.1). Tính tương thích của điều kiện dạng LMIs có thể kiểm tra bằng hộp công cụ LMIs Toolbox trong Matlab (xem Gahinet P., Nemirovskii A., Laub A.J., and Chilali M. (1995)).

2.2 Hệ phương trình vi phân tuyến tính không chắc chắn

Xét hệ phương trình điều khiển tuyến tính không chắc chắn có trễ biến thiên

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= (A_1 + L_1M_1(t)H_1)\, x(t) + (A_2 + L_2M_2(t)H_2)\, x(t-h(t)) \\ & \qquad + (B + L_3M_3(t)H_3)\, u(t), \\ y(t) &= C_1x(t) + C_2x(t-h(t)), \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in [-h_2, 0], \end{cases} \tag{2.10}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái; $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là véc tơ điều khiển; $y(t) \in \mathbb{R}^p$ là véc tơ quan sát; $A_1, A_2, L_1, L_2, L_3, H_1, H_2, \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B, H_3 \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^{p\times n}$ là các ma trận thực cho trước với số chiều thích hợp; H_3 là ma trận hạng cột đầy đủ, và $M_1(t), M_2(t), M_3(t)$ là các ma trận phụ thuộc thời gian thỏa mãn

$$M_i^\top(t)M_i(t) \leq I, \quad i = 1,2,3. \tag{2.11}$$

hàm trễ $h(t)$ là hàm liên tục thỏa mãn điều kiện (2.2).

Ta xét hàm chi phí sau

$$J(u) = \int_0^\infty g(t,x(t),x(t-h(t)),u(t))dt, \tag{2.12}$$

với $g(t,x,y,u) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^+$ là hàm liên tục được cho bởi

$$|g(t,x,x_h,u)| \leq x^\top Q_1 x + x_h^\top Q_2 x_h + u^\top Ru, \tag{2.13}$$

trong đó $\forall t \in \mathbb{R}^+, x, x_h \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$, $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $R \in \mathbb{R}^{m\times m}$ là các ma trận thực, đối xứng, xác định dương cho trước.

Mục đích chính của mục này là ta sẽ tìm số J^* và phản hồi đầu ra $u(t) = Fy(t)$, $F \in \mathbb{R}^{m\times p}$ sao cho hệ đóng

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= (A_1 + L_1M_1(t)H_1 + BFC_1 + L_3M_3(t)H_3FC_1)\,x(t) \\ &\qquad + (A_2 + L_2M_2(t)H_2 + BFC_2 + L_3M_3(t)H_3FC_1)\,x(t-h(t)), \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in [-h_2, 0], \end{cases} \tag{2.14}$$

là ổn định hóa và hàm chi phí (2.4) thỏa mãn điều kiện $J(u) \le J^*$.

Xét hệ điều khiển (2.1) với nhiễu phi tuyến $f(t, x(t), x(t-h(t)), u(t))$ chứa các tham số không chắc chắn có dạng

$$f(t, x(t), x(t-h(t)), u(t)) = \Delta A_1(t)x(t) + \Delta A_2(t)x(t-h(t)) + \Delta B(t)u(t), \tag{2.15}$$

với $\Delta A_1(t) = L_1M_1(t)H_1$, $\Delta A_2(t) = L_2M_2(t)H_2$, $\Delta B(t) = L_3M_3(t)H_3$, và L_1, L_2, L_3, H_1, H_2, H_3 là các ma trận thực cho trước với số chiều thích hợp, H_3 là ma trận hạng cột đầy đủ, và $M_1(t), M_2(t), M_3(t)$ là các ma trận phụ thuộc thời gian thỏa mãn (2.11). Chúng ta biến đổi hệ điều khiển (2.1) về hệ (2.10). Sau đó chúng ta sử dụng phương pháp hàm Lyapunov-Krasovskii như trong Định lí 2.1, chúng ta thu được điều kiện ổn định mũ cho hệ điều khiển không chắc chắn (2.10) thông qua thông tin phản hồi đầu ra như trong Hệ quả 2.2.

Cho số $\alpha > 0$, các ma trận đối xứng, xác định dương $P, U_1, U_2, S_1, S_2, S_3, X_1$, X_2, X_3, N, và ma trận tự do K. Trước khi đưa ra kết quả chính, ta cần một số kí hiệu sau:

$$\begin{aligned}
&\delta_3 = \lambda_{min}((H_3^\top H_3)^{-1}),\\
&\Gamma_{11} = PA_1 + A_1^\top P + U_1 + U_2 + Q_1 + 2\alpha P + 2H_1^\top H_1 - \lambda_2 S_1 - \lambda_3 S_2\\
&\quad - 2\lambda_2^2 X_1 - 2\lambda_3^2 X_2 - 2\lambda_3^2 \widetilde{h} X_3 + BKC_1 + C_1^\top K^\top B^\top - 0.5BNB^\top,\\
&\Gamma_{22} = -\lambda_2 U_1 - \lambda_2 S_1 - \lambda_3 S_3, \Gamma_{33} = -\lambda_3 U_2 - \lambda_3 S_2 - \lambda_3 S_3,\\
&\Gamma_{44} = h_1^2 S_1 + h_2^2 S_2 + (h_2 - h_1)^2 S_3 + 0.5h_1^2 X_1 + 0.5h_2^2 X_2 + 0.5\widehat{h} X_3 - 2P,\\
&\Gamma_{55} = 2H_2^\top H_2 - 2\lambda_3 S_3 + Q_2, \Gamma_{66} = -\lambda_8 X_1, \Gamma_{77} = -\lambda_9 X_2,\\
&\Gamma_{88} = -\lambda_4 X_3, \Gamma_{1,10} = C_1^\top K^\top - 0.5BN.
\end{aligned}$$

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \lambda_2 S_1 & \lambda_3 S_2 & A_1^\top P & PA_2 & \lambda_6 X_1 & \lambda_7 X_2 & \lambda_5 X_3 \\ * & \Gamma_{22} & 0 & 0 & \lambda_3 S_3 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Gamma_{33} & 0 & \lambda_3 S_3 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Gamma_{44} & PA_2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Gamma_{55} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \Gamma_{66} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \Gamma_{77} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & \Gamma_{88} \end{bmatrix},$$

$\Gamma_2 = [\Gamma_1^1, \Gamma_2^2]$, với

$$\Gamma_1^1 = \begin{bmatrix} PB & \Gamma_{1,10} & C_1^\top K^\top & C_1^\top K^\top & PL_1 & PL_2 & PL_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_2^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ PB & PL_1 & PL_2 & PL_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_2^\top K^\top & C_2^\top K^\top & C_2^\top K^\top \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \Gamma_3 = diag\Big(& -0.5N, -0.5N, -\delta_3 aN + 0.5\delta_3 a^2 I, -\delta_1 aN + 0.5\delta_1 a^2 I, \\ & -I, -I, -0.5I, -0.5N, -I, -I, -0.5I, -0.5N, -\delta_3 aN \\ & + 0.5\delta_3 a^2 I, -\delta_1 aN + 0.5\delta_1 a^2 I\Big). \end{aligned}$$

Hệ quả 2.2. *Cho số $a > 0, \alpha > 0$. Xét hệ điều khiển tuyến tính không chắc chắn (2.10) với hàm chi phí (2.4). Giả sử các ma trận hệ số của hệ (2.10) thỏa mãn điều kiện: tồn tại các ma trận đối xứng xác định dương $P, U_1, U_2, S_1, S_2, S_3, X_1, X_2, X_3, N$ và ma trận K, sao cho bất đẳng thức ma trận tuyến tính sau được thỏa mãn*

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ * & \Gamma_3 \end{bmatrix} < 0. \tag{2.16}$$

Khi đó $u(t) = N^{-1}Ky(t)$ là hàm điều khiển đảm bảo chi phí thông qua thông tin phản hồi đầu ra cho hệ (2.10), và giá trị đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ (2.10) là

$$J^* = \Lambda \|\phi\|^2_{C^1}.$$

Chương 3

Bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn của một lớp hệ điều khiển phi tuyến có nhiễu bị chặn và trễ biến thiên liên tục dạng khoảng thông qua thông tin phản hồi đầu ra. Dựa vào phương pháp hàm Lyapunov, bất đẳng thức tích phân Jensen mở rộng và các bất đẳng thức ma trận tuyến tính, chúng tôi xây dựng được luật điều khiển ngược thông qua thông tin phản hồi đầu ra nhằm đảm bảo cho tính ổn định của hệ đóng trong thời gian hữu hạn. Các kết quả chính trong chương này dựa vào bài báo [2] trong danh mục các công trình khoa học của tác giả.

3.1 Hệ phương trình vi phân phi tuyến có nhiễu bị chặn và trễ biến thiên

Xét phương trình điều khiển phi tuyến có trễ biến thiên trên biến trạng thái

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_1x(t) + A_2x(t-h(t)) + Bu(t) + Gw(t) \\ \qquad\qquad +f(t, x(t), x(t-h(t)), u(t), w(t)), \\ z(t) = C_1x(t) + C_2x(t-h(t)), \quad t \geq 0, \\ x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-h_2, 0], \end{cases} \tag{3.1}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, z(t) \in \mathbb{R}^p$ lần lượt là các véc tơ trạng thái, véc tơ điều khiển, và véc tơ quan sát đầu ra; $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, G \in \mathbb{R}^{n\times r}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}^{p\times n}$ là các ma trận thực cho trước với số chiều thích hợp.

Hàm trễ $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ là hàm liên tục và thỏa mãn

$$0 \leq h_1 \leq h(t) \leq h_2, \quad \forall t \geq 0. \tag{3.2}$$

và h_1, h_2 là hai hằng số cho trước. Hàm điều kiện ban đầu $\varphi \in C^1([-h_2, 0], \mathbb{R}^n)$ và hàm nhiễu $w(t)$ là hàm liên tục thỏa mãn

$$\int_0^T w(t)^\top w(t)\mathrm{d}t \leq d. \tag{3.3}$$

Hàm phi tuyến $f(t, x, y, u, w)$ thỏa mãn điều kiện tăng trưởng dưới tuyến tính, tức là tồn tại các số thực không âm a_1, a_2, a_3, a_4 sao cho với mọi $x, y \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, w \in \mathbb{R}^r$, ta có

$$\|f\|^2 \leq a_1\|x\|^2 + a_2\|y\|^2 + a_3\|u\|^2 + a_4\|w\|^2. \tag{3.4}$$

Ngoài ra, hàm $f(t, x, y, u, w)$ là liên tục theo t và Lipschitz địa phương theo (x, y, u, w). Dưới giả thiết về hàm trễ $h(\cdot), f(\cdot)$ và hàm giá trị ban đầu $\varphi(t)$, hệ (2.1) tồn tại và duy nhất nghiệm xác định trên $[0, +\infty)$.

Định nghĩa 3.1 (Ổn định trong thời gian hữu hạn)**.** Cho các số dương $T, c_1, c_2, c_2 > c_1$, và ma trận xác định dương R. Hệ phương trình (3.1) được gọi là ổn định trong thời gian hữu hạn (FTS) tương ứng với (c_1, c_2, T, R), nếu tồn tại một điều khiển ngược thông tin phản hồi đầu ra $u(t) = Fz(t)$ sao cho điều kiện sau thỏa mãn với mọi nhiễu thỏa mãn (3.3) với mọi $t \in [0, T]$

$$\max\left\{\sup_{-h_2\leq s\leq 0}\varphi(s)^\top R\varphi(s), \sup_{-h_2\leq s\leq 0}\dot{\varphi}(s)^\top R\dot{\varphi}(s)\right\} \leq c_1 \Longrightarrow x(t)^\top Rx(t) \leq c_2.$$

Định nghĩa 3.2 (Điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn)**.** Cho $T > 0, \gamma > 0$. Bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn cho hệ (3.1) có nghiệm nếu

(i) Hệ (3.1) là ổn định trong thời gian hữu hạn tương ứng với (c_1, c_2, T, R).

(ii) Tồn tại một số $c_0 > 0$ sao cho

$$\sup \frac{\int_0^T \|z(t)\|^2 \mathrm{d}t}{c_0\|\varphi\|^2_{C^1} + \int_0^T \|w(t)\|^2 \mathrm{d}t} \leq \gamma, \tag{3.5}$$

trong đó supremum chạy trên $\varphi \in C^1([-h_2, 0], \mathbb{R}^n)$ và nhiễu $w(.)$ thỏa mãn (3.3).

Trước khi giới thiệu một điều kiện đủ cho sự tồn tại của điều khiển H_∞ cho hệ (3.1), chúng tôi sử dụng một số kí hiệu sau

$$\begin{aligned}
&\overline{P} = R^{1/2}PR^{1/2}, \overline{U_1} = R^{1/2}U_1R^{1/2}, \overline{U_2} = R^{1/2}U_2R^{1/2}, \overline{X_1} = R^{1/2}X_1R^{1/2},\\
&\quad \overline{X_2} = R^{1/2}X_2R^{1/2}, \overline{S} = R^{1/2}SR^{1/2},\\
&\alpha_1 = \lambda_{\min}(P), \ \ \alpha_2 = \lambda_{\max}(P) + h_1\lambda_{\max}(U_1) + h_2\lambda_{\max}(U_2) + 0.5h_1^3\lambda_{\max}(X_1)\\
&\quad + 0.5h_2^3\lambda_{\max}(X_2) + 0.5(h_2-h_1)^2(h_2+h_1)\lambda_{\max}(S),\\
&\alpha_3 = \lambda_{\max}(\overline{P}) + h_1\lambda_{\max}(\overline{U_1}) + h_2\lambda_{\max}(\overline{U_2}) + 0.5h_1^3\lambda_{\max}(\overline{X_1}) + 0.5h_2^3\lambda_{\max}(\overline{X_2})\\
&\quad + 0.5(h_2-h_1)^2(h_2+h_1)\lambda_{\max}(\overline{S_2}), \ \ \Psi^1 = (\Psi^1_{ij})_{11\times 11}, \ \ \Psi^2 = (\Psi^2_{ij})_{6\times 11},\\
&\Psi^3 = diag\left(-0.5N, -0.5N, -\frac{1}{a_3}N + \frac{1}{2a_3}I, -\frac{1}{a_3}N + \frac{1}{2a_3}I, -0.5N, -0.5N\right),\\
&\Psi^1_{11} = \overline{P}A_1 + A_1^\top\overline{P} + \overline{U_1} + \overline{U_2} + a_1I + \eta C_1^\top C_1 - 4\overline{X_1} - 4\overline{X_2} + BKC_1\\
&\quad + C_1^\top K^\top B^\top - 0.5BNB^\top,\\
&\Psi^1_{22} = -\overline{U_1} - 4\overline{X_1} - 4\overline{S}, \Psi^1_{33} = -\overline{U_2} - 4\overline{X_2} - 4\overline{S},\\
&\Psi^1_{44} = -8\overline{S} + a_2I + \eta C_2^\top C_2, \Psi^1_{55} = h_1^2\overline{X_1} + h_2^2\overline{X_2} + (h_2-h_1)^2\overline{S} - 2Q,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Psi^1_{66} = a_4I - \gamma\eta I, \Psi^1_{77} = -I, \Psi^1_{88} = -12\overline{X_1},\\
&\Psi^1_{99} = -12\overline{X_2}, \Psi^1_{10,10} = \Psi^1_{11,11} = -12\overline{S},\\
&\Psi^1_{12} = -2\overline{X_1}, \Psi^1_{13} = -2\overline{X_2}, \Psi^1_{14} = \overline{P}A_2 + \eta C_1^\top C_2, \Psi^1_{15} = A_1^\top Q,\\
&\Psi^1_{16} = \overline{P}G, \Psi^1_{17} = \overline{P}, \Psi^1_{18} = \Psi^1_{28} = 6\overline{X_1}, \Psi^1_{19} = \Psi^1_{39} = 6\overline{X_2},\\
&\Psi^1_{24} = \Psi^1_{34} = -2\overline{S}, \Psi^1_{45} = A_2^\top Q, \Psi^1_{56} = QG,\\
&\Psi^1_{2,11} = \Psi^1_{3,10} = \Psi^1_{4,10} = \Psi^1_{4,11} = 6\overline{S}, \Psi^1_{57} = Q,\\
&\text{và } \Psi^1_{ij} = 0 \text{ trong trường hợp còn lại},\\
&\Psi^2_{11} = \overline{P}B, \ \Psi^2_{12} = C_1^\top K^\top - 0.5BN, \ \Psi^2_{13} = C_1^\top K^\top, \ \Psi^2_{44} = \Psi^2_{45} = C_2^\top K^\top,\\
&\Psi^2_{56} = QB, \quad \Psi^2_{ij} = 0 \text{ trong trường hợp còn lại}.
\end{aligned}$$

Định lí sau cho ta một điều kiện đủ cho sự tồn tại một bộ điều khiển thông qua thông tin phản hồi đầu ra của hệ điều khiển (3.1) với trễ biến thiên.

Định lí 3.1. *Cho $T, c_1, c_2 > 0$ và ma trận xác định dương R. Bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn thông qua thông tin phản hồi đầu ra cho hệ (3.1) có nghiệm nếu tồn tại số dương η, và các ma trận đối xứng xác định dương $P, U_1, U_2, X_1, X_2, S, N$ và các ma trận Q, K sao cho bất đẳng thức ma trận tuyến tính sau thỏa mãn*

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi^1 & \Psi^2 \\ * & \Psi^3 \end{bmatrix} < 0, \tag{3.6}$$

$$\alpha_2 c_1 + \gamma\eta d \leq \alpha_1 c_2 e^{-\eta T}. \tag{3.7}$$

Khi đó hàm điều khiển ngược thông qua thông tin phản hồi đầu ra được xác định: $u(t) = N^{-1}Kz(t)$, $t \geq 0$.

Nhận xét 3.1. Phương pháp chứng minh Định lí 3.1:

- *Bước 1:* Xét hàm Lyapunov - Krasovskii cho hệ (3.1) như sau

$$V(t, x_t) = \sum_{i=1}^{4} V_i(t, x_t),$$

trong đó

$$\begin{aligned} V_1(t, x_t) =& e^{\eta t} x(t)^\top \overline{P} x(t), \\ V_2(t, x_t) =& \sum_{i=1}^{2} e^{\eta t} \int_{t-h_i}^{t} x(s)^\top \overline{U}_i x(s) \mathrm{d}s, \\ V_3(t, x_t) =& \sum_{i=1}^{2} h_i e^{\eta t} \int_{-h_i}^{0} \int_{t+s}^{t} \dot{x}(\tau)^\top \overline{X}_i \dot{x}(\tau) \mathrm{d}\tau \mathrm{d}s, \\ V_4(t, x_t) =& (h_2 - h_1) e^{\eta t} \int_{-h_2}^{-h_1} \int_{t+s}^{t} \dot{x}(\tau)^\top \overline{S} \dot{x}(\tau) \mathrm{d}\tau \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

- *Bước 2:* Ước lượng $\dot{V}(t, x_t)$ như sau:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{-\eta t} V(t, x_t)\right) \leq \xi(t)^\top W \xi(t) + \gamma\eta w(t)^\top w(t) - \eta z(t)^\top z(t).$$

- *Bước 3:* Chúng ta chứng minh hệ (3.1) là ổn định trong thời gian hữu hạn tương ứng với (c_1, c_2, T, R)

$$x(t)^\top R x(t) \leq \frac{e^{\eta T}(\alpha_2 c_1 + \gamma\eta d)}{\alpha_1} \leq c_2, \quad \forall t \in [0, T],$$

- *Bước 4:* Chúng ta chỉ ra điều kiện $\gamma-$ tối ưu (3.5):

$$\sup \frac{\int_0^T \|z(t)\|^2 \mathrm{d}t}{c_0\|\varphi\|^2 + \int_0^T \|w(t)\|^2 \mathrm{d}t} \leq \gamma.$$

Nhận xét 3.2. Chúng ta để ý rằng điều kiện (3.7) không phải là một bất đẳng thức ma trận tuyến tính theo η, do η xuất hiện trong thành phần phi tuyến. Tuy nhiên, điều kiện (3.6) là một bất đẳng thức ma trận tuyến tính, do đó ta có thể tìm η từ điều kiện (3.6), rồi sau đó kiểm tra lại điều kiện (3.7). Nếu điều kiện của định lí được thỏa mãn, thì hàm điều khiển ngược thông qua thông tin phản hồi đầu ra $u(t) = N^{-1}Kz(t)$ giải quyết bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn thông qua thông tin phản hồi đầu ra.

3.2 Hệ phương trình vi phân tuyến tính không chắc chắn có nhiễu bị chặn và trễ biến thiên

Tiếp theo, chúng tôi nghiên cứu bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn thông qua thông tin phản hồi đầu ra cho hệ tuyến tính không chắc chắn với trễ biến thiên. Xét hệ tuyến tính không chắc chắn với thời gian biến thiên

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [A_1 + \Delta A_1(t)]x(t) + [A_2 + \Delta A_2(t)]x(t-h(t)) \\ \qquad\qquad +[B + \Delta B(t)]u(t) + [G + \Delta G(t)]w(t), \quad t \geq 0, \\ z(t) = C_1 x(t) + C_2 x(t-h(t)), \\ x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-h_2, 0], \end{cases} \tag{3.8}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, z(t) \in \mathbb{R}^p$ lần lượt là các hàm trạng thái, hàm điều khiển, và hàm quan sát đầu ra; $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}, G \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^{p\times n}$ là các ma trận thực cho trước với số chiều thích hợp. Hàm trễ $h(t)$ thỏa mãn điều kiện (3.2), hàm nhiễu $w(t)$ là hàm liên tục thỏa mãn (3.3), và các nhiễu $\Delta A_1(t), \Delta A_2(t)$, $\Delta B(t), \Delta G(t)$ được cho bởi

$$[\Delta A_1(t) \ \ \Delta A_2(t) \ \ \Delta B(t) \ \ \Delta G(t)] = DE(t)[M_{a_1} \ \ M_{a_2} \ \ M_b \ \ M_g],$$

với $D, M_{a_1}, M_{a_2}, M_b, M_g$ là các ma trận thực cho trước với số chiều thích hợp, và $E(t)$ là ma trận phụ thuộc thời gian thỏa mãn

$$E(t)^\top E(t) \leq I, \quad \forall t \geq 0. \tag{3.9}$$

Xét hệ điều khiển (3.1) với nhiễu phi tuyến $f(t, x(t), x(t-h(t)), u(t))$ thỏa mãn

$$f(t, x, x(t-h(t)), u(t), \omega(t)) = \Delta A_1(t)x(t) + \Delta A_2(t)x(t-h(t)) + \Delta B(t)u(t)$$

với $D, M_{a_1}, M_{a_2}, M_b, M_g$ là các ma trận thực cho trước với số chiều thích hợp, và $E(t)$ là ma trận phụ thuộc thời gian thỏa mãn (3.9). Chúng ta biến đổi hệ điều khiển (3.1) về hệ (3.8). Đặt:

$$\begin{aligned} &\lambda_d = \lambda_{\max}(D^\top D), \quad \lambda_{m_1} = \lambda_{\max}(M_{a_1}^\top M_{a_1}), \quad \lambda_{m_2} = \lambda_{\max}(M_{a_2}^\top M_{a_2}), \\ &\lambda_{m_b} = \lambda_{\max}(M_b^\top M_b), \quad \lambda_{m_g} = \lambda_{\max}(M_g^\top M_g). \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &\leq 4\|\Delta A_1 x\|^2 + 4\|\Delta A_2 x_h\|^2 + 4\|\Delta B u\|^2 + 4\|\Delta G \omega\|^2 \\ &\leq 4\lambda_d\lambda_{m_1}\|x\|^2 + 4\lambda_d\lambda_{m_2}\|x_h\|^2 + 4\lambda_d\lambda_{m_b}\|u\|^2 + 4\lambda_d\lambda_{m_g}\|\omega\|^2. \end{aligned}$$

Chúng ta sử dụng các kí hiệu trong Định lí 3.1 với

$$a_1 = 4\lambda_d\lambda_{m_1}, \quad a_2 = 4\lambda_d\lambda_{m_2}, \quad a_3 = 4\lambda_d\lambda_{m_b}, \quad a_4 = 4\lambda_d\lambda_{m_g}.$$

Sử dụng phương pháp hàm Lyapunov-Krasovskii như trong Định lí 3.1, chúng ta thu được điều kiện ổn định mũ cho hệ điều khiển không chắc chắn (3.8) thông qua thông tin phản hồi đầu ra như trong Hệ quả 3.2. Hệ quả 3.2 thiết lập một điều kiện đủ cho sự tồn tại hàm điều khiển phản hồi đầu ra của bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn của hệ điều khiển tuyến tính không chắc chắn với trễ biến thiên.

Hệ quả 3.2. *Bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn thông qua thông tin phản hồi đầu ra cho hệ (3.8) có nghiệm nếu tồn tại số dương η, và các ma trận đối xứng xác định dương $P, U_1, U_2, X_1, X_2, S, N$, và các ma trận Q, K sao cho bất đẳng thức ma trận tuyến tính sau thỏa mãn*

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi^1 & \Psi^2 \\ * & \Psi^3 \end{bmatrix} < 0, \tag{3.10}$$

$$\alpha_2 c_1 + \gamma\eta d \leq \alpha_1 c_2 e^{-\eta T}. \tag{3.11}$$

Khi đó hàm điều khiển ngược thông qua thông tin phản hồi đầu ra được xác định $u(t) = N^{-1}Kz(t), \quad \forall t \geq 0.$

Nhận xét 3.3. Bộ điều khiển ngược thông qua thông tin phản hồi đầu ra vừa đảm bảo sự ổn định bền vững trong thời gian hữu hạn của hệ đóng và vừa đảm bảo được điều kiện $\gamma-$tối ưu được biểu diễn dưới dạng bất đẳng thức ma trận tuyến tính. Kết quả nghiên cứu này đã phát triển kết quả tìm điều khiển H_∞ trong Fridman E. and Shaked U. (2003), Xiang Z., Sun Y.N. and Mahmoud M.S. (2012) và Xiang W. and Xiao J. (2011) mà ở đó các trễ được nghiên cứu dưới dạng hằng số. Hơn nữa, ta xây dựng các hàm Lyapunov khác so với các nghiên cứu Liu H., Shen Y. and Zhao X. (2012), Xiang Z., Sun Y.N. and Mahmoud M.S. (2012) và Xiang W. and Xiao J. (2011), và đánh giá các đạo hàm của $V(\cdot)$ dưới dạng tích phân tổng quát, nó đưa đến các điều kiện bất đẳng thức ma trận tuyến tính tốt hơn và đưa các ví dụ số tốt hơn.

Kết luận

Luận án nghiên cứu một số bài toán điều khiển như bài toán đảm bảo giá trị điều khiển và bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn của hệ phương trình vi phân phi tuyến có trễ biến thiên thông qua thông tin phản hồi đầu ra.

Những kết quả đã được chứng minh trong luận án:

- Chứng minh điều kiện đủ để thiết kế hàm điều khiển phản hồi đầu ra cho bài toán đảm bảo giá trị điều khiển của lớp hệ phương trình vi phân phi tuyến có trễ biến thiên liên tục dạng khoảng (Định lí 2.1). Áp dụng giải bài toán đảm bảo giá trị điều khiển cho lớp hệ điều khiển tuyến tính không chắc chắn có trễ biến thiên (Hệ quả 2.2).
- Chứng minh điều kiện đủ để xây dựng hàm điều khiển phản hồi đầu ra cho bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn của một lớp hệ điều khiển phi tuyến có trễ biến thiên liên tục dạng khoảng (Định lí 3.1). Áp dụng giải bài toán H_∞ trong thời gian hữu hạn cho hệ điều khiển tuyến tính không chắc chắn với trễ biến thiên (Hệ quả 3.2).

Điểm mới của luận án so với các kết quả đã có:

- Hàm trễ không đòi hỏi tính khả vi và cận dưới của trễ có thể khác 0.
- Thiết kế hàm điều khiển phản hồi đầu ra cho bài toán đảm bảo giá trị điều khiển của lớp hệ phương trình vi phân phi tuyến có trễ biến thiên liên tục dạng khoảng.
- Thiết kế hàm điều khiển phản hồi đầu ra cho bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn.

Luận án mở ra một số vấn đề có thể tiếp tục nghiên cứu:

- Nghiên cứu bài toán đảm bảo giá trị điều khiển của lớp hệ phương trình vi phân phi tuyến nhưng ôtônôm với trễ biến thiên.
- Nghiên cứu bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn của các hệ phương trình vi phân không ôtônôm với trễ biến thiên.

Công trình liên quan đến luận án

[1]. S. Adly, Ta T.H. Trang and Vu N. Phat, Guaranteed quadratic cost control of nonlinear time-varying delay systems via output feedback stabilization, *Pacific Journal of Optimization*, **12**(3) (2016), pp. 649-667. (SCIE)

[2]. Ta T.H. Trang, Vu N. Phat and S. Adly, Robust finite-time H_∞ control of nonlinear time-varying delay systems, *Journal of Industrial and Management Optimization*, **12**(1) (2016), pp. 303 - 315. (SCIE)

Các kết quả liên quan đến luận án đã được tác giả báo cáo tại

1. Xêmina tại Phòng Tối ưu và Điều khiển, Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.

2. Hội nghị nghiên cứu sinh hằng năm của Viện Toán học (10/2012, 10/2013, 10/2014).
3. Hội nghị Toán học phối hợp Pháp Việt tại Đại học Huế, 20-24/08/2012.
4. Hội thảo Khoa học cán bộ trẻ Viện Toán học - Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2, Phúc Yên, Vĩnh Phúc, 10 - 2014.

Tài liệu tham khảo

[1] Amato F., Ariola M. and Dorato P., Finite-time control of linear systems subject to parametric uncertainties and disturbances, *Automatica*, **37** (2001), 1459 - 1463.

[2] Amato F., Ariola M. and Cosentino C., Finite-time stabilization via dynamic output feedback, *Automatica*, **42** (2006), 337 - 342.

[3] Amato F., Tommasi G. De and Pironti A., Necessary and sufficient conditions for finite-time stability of impulsive dynamical linear systems, *Automatica*, **49** (2013), 2546 - 2550.

[4] Chang S.S.L. and Peng T.K.C., Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameters, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **17 (4)** (1972), 474 - 483.

[5] Dorato P., Short time stability in linear time-varying systems, *In Proc IRE Int Convention Record*, **4** (1961), 83 - 87.

[6] Fridman E. and Shaked U., Delay-dependent stability and H_∞control: constant and time-varying delays, *International Journal of Control*, **76** (2003), 48 - 60.

[7] Gahinet P., Nemirovskii A., Laub A.J., and Chilali M., *LMI Control Toolbox For use with MATLAB*, The MathWorks, Inc (1995).

[8] Garcia G., Tarbouriech S. and Bernussou J., Finite-time stabilization of linear time-varying continuous systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **54** (2009), 364 - 369.

[9] Hale J.K. and Verduyn Lunel S.M., *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York (1993).

[10] Jiang X. and Han Q.L., On H_∞ control for linear systems with interval time-varying delay, *Automatica*, **41** (2005), 2099 - 2106.

[11] Li H., Niculescu S.L., Dugard L. and Diona J.M., Robust guaranteed cost control of uncertain linear time-delay systems using dynamic output feedback, *Mathematics, Computers in Simulation*, **45** (1998), 349 - 358.

[12] Liu H., Shen Y. and Zhao X., Delay-dependent observer-based H_∞ finite-time control for switched systems with time-varying delay, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, **6** (2012), 885 - 898.

[13] Mai Viết Thuận, *Tính ổn định của một số lớp hệ phương trình vi phân hàm và ứng dụng trong lí thuyết điều khiển*, Luận án tiến sĩ toán học, Viện Hàn Lâm Khoa Học và Công nghệ Việt Nam, Viện Toán Học (2014).

[14] Meng Q.Y. and Shen Y. J, Finite-time H_∞ control for linear continuous system with norm-bounded disturbance, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation,* **14** (2009), 1043 - 1049.

[15] Nguyễn Trường Thanh, *Điều khiển H_∞ các hệ phương trình vi phân có trễ biến thiên*, Luận án tiến sĩ toán học, Đại học Quốc Gia Hà Nội, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên (2015).

[16] Petersen I.R. and Macfarlane D.C., Optimal guaranteed cost control and filtering uncertain linear systems, *Transactions on Automatic Control*, **39** (1994), 1971 - 1977.

[17] Thuan M.V. and Phat V.N., Optimal guaranteed cost control of linear systems with mixed interval time-varying delayed state and control, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **152** (2012), 394 - 412.

[18] Vũ Ngọc Phát, *Nhập Môn Lý Thuyết Điều Khiển Toán Học*, NXB Đại Học Quốc Gia Hà Nội (2001).

[19] Xiang Z., Sun Y.N. and Mahmoud M.S., Robust finite-time H_∞ control for a class of uncertain switched neutral systems, *Communications in Nonlinear Science Numerical Simulations*, **17** (2012), 1766 - 1778.