VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM
VIỆN TOÁN HỌC

TẠ THỊ HUYỀN TRANG

MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN CHO HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CÓ TRỄ BIẾN THIÊN

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - 2017

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM
VIỆN TOÁN HỌC

MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN CHO HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CÓ TRỄ BIẾN THIÊN

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 9 46 01 12

Người hướng dẫn khoa học:
GS. TSKH. VŨ NGỌC PHÁT

Người thực hiện luận án:
TẠ THỊ HUYỀN TRANG

Hà Nội - 2017

TÓM TẮT

Luận án nghiên cứu một số bài toán điều khiển như bài toán đảm bảo giá trị điều khiển cho một số lớp hệ phương trình vi phân có trễ biến thiên và bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn. Luận án gồm ba chương.

Trong chương 1, chúng tôi giới thiệu một số kiến thức cơ sở về bài toán ổn định và bài toán ổn định hóa cho hệ phương trình vi phân thường và hệ phương trình vi phân có trễ. Bên cạnh đó chúng tôi cũng trình bày bài toán đảm bảo chi phí điều khiển và bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn. Ngoài ra, chúng tôi cũng nhắc lại một số bổ đề kỹ thuật bổ trợ được sử dụng trong chứng minh các kết quả chính của luận án ở các chương sau.

Trong chương 2, chúng tôi đưa ra điều kiện đủ để xây dựng điều khiển ngược thông qua thông tin phản hồi đầu ra cho lớp hệ phương trình vi phân có trễ biến thiên liên tục dạng khoảng. Đồng thời chúng tôi cũng nghiên cứu bài toán đảm bảo giá trị chi phí điều khiển cho hệ phương trình vi phân tuyến tính không chắc chắn có trễ biến thiên.

Trong chương 3, chúng tôi nghiên cứu bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn cho một lớp hệ phương trình vi phân phi tuyến có trễ biến thiên dạng khoảng thông qua thông tin phản hồi đầu ra. Dựa vào phương pháp hàm Lyapunov-Krasovskii, bất đẳng thức tích phân Jensen mở rộng, các điều kiện phụ thuộc vào độ trễ đối với sự tồn tại của các bộ điều khiển ngược thông qua thông tin phản hồi đầu ra được trình bày thông qua nghiệm của bất đẳng thức ma trận tuyến tính. Các điều kiện này cho phép chúng tôi xây dựng các bộ điều khiển ngược thông qua thông tin phản hồi đầu ra nhằm đảm bảo cho tính ổn định của hệ đóng trong thời gian hữu hạn. Ngoài ra, chúng tôi cũng đưa ra một áp dụng giải bài toán điều khiển H_∞ cho hệ phương trình vi phân tuyến tính không chắc chắn với trễ biến thiên.

ABSTRACT

The thesis studies some control problems of differential equations with time-varying delays as the guaranteed cost control via output feedback control and the robust finite-time H_∞ control via output feedback control. The thesis consists of three chapters.

In Chapter 1, we introduce some mathematical backgrounds of Lyapunov stability and stabilization of functional differential equations. We present two control problems: the guaranteed cost control via ouput feedback control and the finite-time H_∞ control via output feedback. Some technical lemmas needed for the proof of the main results are given.

In Chapter 2, we provide sufficient conditions for designing output feedback controllers of the nonlinear observed control system with time-varying delays. Simultaneously, we also study the guaranteed cost control problem for the linear uncertain system with time-varying delays.

In Chapter 3, we study the robust finite-time H_∞ control problem for a class of nonlinear systems with time-varying delays and disturbances via ouput feedback. Based on the Lyapunov function method and using a generalized Jensen integral inequality, we present delay-dependent conditions for designing output feedback controllers, which robustly stabilize the closed-loop system in the finite-time sense. The conditions are formulated in terms of linear matrix inequalities. An application to finite-time H_∞ control of linear uncertain systems with interval time-varying delays is given.

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi, được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của GS. TSKH. Vũ Ngọc Phát. Các kết quả viết chung với tác giả khác đã được sự nhất trí của đồng tác giả khi đưa vào luận án. Các kết quả nêu trong luận án là những kết quả trung thực và chưa từng được ai công bố trên bất kỳ công trình nào khác.

Tác giả luận án

Tạ Thị Huyền Trang

LỜI CẢM ƠN

Luận án được thực hiện và hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của GS.TSKH. Vũ Ngọc Phát, người đã tận tình hướng dẫn và giúp đỡ tôi trong suốt quá trình làm luận án. Tôi xin tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Giáo sư. Thầy đã dẫn dắt tôi từ những bước đầu tiên, như cách đặt vấn đề nghiên cứu, cách viết một bài báo khoa học, cách mở rộng vấn đề nghiên cứu. Nhờ sự chỉ bảo của thầy, tôi ngày càng tiến bộ hơn trong nghiên cứu khoa học. Bên cạnh đó, thầy luôn tạo điều kiện cho tôi được giao lưu, học hỏi với nhiều nhà toán học trong nước và quốc tế, giúp tôi trưởng thành hơn trong môi trường nghiên cứu. Đặc biệt, thầy luôn bên cạnh động viên tôi vượt qua mọi khó khăn trong cuộc sống và trong công tác làm khoa học, để tôi có động lực phấn đấu và vươn lên trong cuộc sống và học tập.

Tôi cũng chân thành cảm ơn các thầy cô, các bạn đồng nghiệp, các anh chị nghiên cứu sinh, các thành viên trong nhóm Xêmina Tối ưu và Điều khiển đã luôn quan tâm, giúp đỡ, trao đổi những ý kiến quý báu cho tôi trong thời gian làm nghiên cứu sinh.

Trong quá trình học tập và nghiên cứu, tôi đã nhận được nhiều sự giúp đỡ và tạo điều kiện thuận lợi từ Ban Lãnh đạo, Trung tâm Đào tạo sau Đại học của Viện Toán học. Tôi trân trọng cám ơn sự giúp đỡ của các thầy cô.

Tôi chân thành cảm ơn những người thân của tôi: bố, mẹ, chồng và các con của tôi. Họ luôn sát cánh bên tôi, chia sẻ và động viên, là động lực để tôi cố gắng và hoàn thành luận án.

Tác giả luận án

Tạ Thị Huyền Trang

Mục lục

DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU

$\mathbb{R}$ là tập các số thực
$\mathbb{R}^+$ là tập các số thực không âm
$\mathbb{R}^n$ là không gian véc tơ Euclide n chiều
$\mathbb{R}^{n\times r}$ là tập các ma trận thực kích thước $(n \times r)$
$(x, y) = x^\top y$ là tích vô hướng trên $\mathbb{R}^n$, $x^\top y = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$
$||x||$ là chuẩn Euclide của véc tơ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $||x|| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$
$\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}^n)$ là không gian các hàm liên tục trên $[a, b]$ nhận giá trị trong $\mathbb{R}^n$ với chuẩn $\|x\|_{\mathcal{C}} = \sup\limits_{a\le t\le b} \|x(t)\|$
$\mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ là không gian các hàm khả vi liên tục trên $[a, b]$ nhận giá trị trong $\mathbb{R}^n$ với chuẩn $\|x\|_{\mathcal{C}^1} = \sup\limits_{a\le t\le b} \|x(t)\| + \sup\limits_{a\le t\le b} \|\dot{x}(t)\|$
I_n là ma trận đơn vị kích thước $n \times n$
$*$ các phần tử dưới đường chéo chính của ma trận đối xứng
$A^\top$ là ma trận chuyển vị của ma trận A
$\lambda(A)$ là tập các giá trị riêng của ma trận A
$\lambda_{\max}(A) := \max\{Re\lambda : \lambda \in \lambda(A)\}$
$\lambda_{\min}(A) := \min\{Re\lambda : \lambda \in \lambda(A)\}$
$A \ge 0$ có nghĩa là ma trận A nửa xác định dương, tức là $x^\top Ax \ge 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n$
$A > 0$ có nghĩa là ma trận A xác định dương, tức là $x^\top Ax > 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
F^* là ma trận liên hợp của ma trận F
$\mathcal{K}$ là không gian các hàm liên tục không giảm $a(\cdot) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ a(0) = 0,\ a(s) > 0\ \forall s > 0$
$L^2([0, \infty), \mathbb{R}^n)$ là không gian các hàm bình phương khả tích trên $[0, \infty)$ lấy giá trị trong $\mathbb{R}^n$.
$PC([-r, 0), \mathbb{R}^n)$ là không gian các hàm liên tục từng khúc trên đoạn $[-r, 0]$

MỞ ĐẦU

Lý thuyết ổn định và ổn định hóa các hệ động lực là một trong những hướng nghiên cứu quan trọng, có nhiều ứng dụng trong lý thuyết điều khiển và ứng dụng, thu hút sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học trong và ngoài nước.

Lý thuyết ổn định Lyapunov được hình thành sau khi A.M. Lyapunov, nhà toán học người Nga, công bố và bảo vệ thành công luận án tiến sĩ có tiêu đề "Bài toán tổng quan về tính ổn định của chuyển động". A.M. Lyapunov đã nghiên cứu và xây dựng được những lý thuyết cơ sở, nền tảng cho lý thuyết ổn định, đặc biệt là đưa ra hai phương pháp nghiên cứu tính ổn định của các hệ phương trình vi phân thường. Đó là phương pháp số mũ Lyapunov và phương pháp hàm Lyapunov.

Để có ứng dụng nhiều hơn trong thực tế, người ta không chỉ quan tâm đến việc tìm ra các tiêu chuẩn ổn định của hệ mà còn phải tìm cách thiết kế được một hệ thống điều khiển đảm bảo một mức độ đầy đủ về hiệu suất (guarantees an adequate level of performance). Dựa trên nhu cầu thực tiễn như vậy, năm 1972, S.S.L. Chang và T.K.C. Peng [13] đã đưa ra bài toán đảm bảo giá trị điều khiển cho hệ thống. Trong bài toán này, ngoài việc thiết kế một bộ điều khiển để đảm bảo cho hệ thống điều khiển không những ổn định mà còn đảm bảo rằng một hàm chi phí toàn phương liên hệ với hệ động lực đó có giá trị hữu hạn và giá trị đó càng nhỏ càng tốt.

Năm 1994, I.R. Petersen và D.C. McFarlane [44] đã nghiên cứu bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ điều khiển được mô tả dưới dạng hệ phương trình vi phân thường có nhiễu cấu trúc:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [A + D_1\Delta(t)E_1]x(t) + [B + D_1\Delta(t)E_2]u(t), \quad t \geq 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là véc tơ điều khiển. Các ma trận A, B, D_1, E_1, E_2 là các ma trận thực cho trước có số chiều thích hợp. Còn

$\Delta(t)$ là ma trận thỏa mãn điều kiện $\Delta^\top(t)\Delta(t) \leq I, \forall t \geq 0$. Xét hàm chi phí toàn phương

$$J = \int_0^{+\infty} [x^\top(t)R_1x(t) + u^\top(t)R_2u(t)]dt, \tag{2}$$

trong đó $R_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}, R_2 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ là các ma trận thực đối xứng, xác định dương cho trước. Khi đó bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho lớp hệ (1) được phát biểu như sau: Xét hệ phương trình vi phân (1) với hàm chi phí toàn phương (2), nếu tồn tại một hàm điều khiển phản hồi trạng thái $u^*(t) = Kx(t)$ và một số dương J^* sao cho với mọi nhiễu $\Delta(t)$, hệ đóng

$$\dot{x}(t) = [A + D_1\Delta(t)E_1]x(t) + [B + D_1\Delta(t)E_2]Kx(t)$$

là ổn định tiệm cận và giá trị của hàm chi phí toàn phương thỏa mãn đánh giá $J(u^*) \leq J^*$, thì J^* được gọi là giá trị đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ (1) và $u^*(t)$ được gọi là hàm đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ (1).

I.R.Petersen và cộng sự [44] đã sử dụng phương trình Riccati đại số để đưa ra một tiêu chuẩn cho bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ (1).

Năm 1999, L.Yu và J. Chu [60] đã mở rộng bài toán trên cho lớp hệ phương trình vi phân không chắc chắn có trễ hằng:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [A + \Delta A]x(t) + [A_1 + \Delta A_1]x(t-d) + [B + \Delta B]u(t), \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-d; 0], \end{cases} \tag{3}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là véc tơ điều khiển. Các ma trận A, A_1, B là các ma trận thực hằng cho trước có số chiều thích hợp. Còn $\Delta A, \Delta A_1, \Delta B$ là các ma trận thỏa mãn điều kiện $[\Delta A \quad \Delta B \quad \Delta A_1] = DF(t)[E_1 \quad E_2 \quad E_d]$. Hàm chi phí toàn phương là hàm (2). Các tác giả đã sử dụng phương pháp hàm Lyapunov-Krasovskii và lý thuyết ma trận để đưa ra điều kiện đủ cho sự tồn tại một hàm điều khiển phản hồi trạng thái $u(t) = Kx(t)$ đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ.

Năm 2012, M.V. Thuan và V.N. Phat [51] đã nghiên cứu bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho lớp hệ phương trình vi phân có trễ hỗn hợp trên cả biến trạng thái và biến điều khiển với độ trễ là các hàm liên tục nhưng không nhất thiết khả vi:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h_1(t)) + A_2\displaystyle\int_{t-k_1(t)}^t x(s)ds \\ \qquad\qquad +B_0u(t) + B_1u(t-h_2(t)) + B_2\displaystyle\int_{t-k_2(t)}^t u(s)ds, \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-d; 0], \end{cases} \tag{4}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là véc tơ điều khiển. Các ma trận $A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2$ là các ma trận thực hằng cho trước có số chiều thích hợp. Trong nghiên cứu của mình, các tác giả đã xây dựng hàm Lyapunov-Krasovskii mới trong đó có chứa tốc độ mũ α của hệ, kết hợp với công thức Newton-Leibniz, bất đẳng thức ma trận Cauchy, các tác giả đã tìm ra một điều kiện đủ cho sự tồn tại hàm điều khiển $u(t) = Kx(t)$ đảm bảo chi phí điều khiển cho lớp hệ có trễ hỗn hợp trên biến trạng thái và biến điều khiển với độ trễ biến thiên khác nhau.

Trong Chương 2, chúng tôi nghiên cứu bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho một số lớp hệ phương trình vi phân có trễ biến thiên liên tục dạng khoảng (tập giá trị của trễ là đoạn thẳng) và không khả vi thông qua thông tin phản hồi đầu ra: hệ phi tuyến, hệ không chắc chắn. Xét phương trình vi phân phi tuyến có trễ biến thiên trên biến trạng thái và biến quan sát

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A_1x(t) + A_2x(t-h(t)) + Bu(t) + f(t, x(t), x(t-h(t)), u(t)), \\ y(t) &= C_1x(t) + C_2x(t-h(t)), \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in [-h_2, 0], \end{cases} \tag{5}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái; $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là véc tơ điều khiển; $y(t) \in \mathbb{R}^p$ là véc tơ quan sát; $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}^{p\times n}$ là các ma trận thực cho trước với số chiều thích hợp; hàm trễ $h(t)$ là hàm liên tục thỏa mãn điều kiện

$$0 \le h_1 \le h(t) \le h_2.$$

Hàm nhiễu phi tuyến thỏa mãn điều kiện tăng trưởng dưới tuyến tính

$$f^\top(t, x, x_h, u) f(t, x, x_h, u) \le x^\top E_1^\top E_1 x + x_h^\top E_2^\top E_2 x_h + u^\top E_3^\top E_3 u, \tag{6}$$

với mọi $t \in \mathbb{R}^+, x, x_h \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$, E_1, E_2, E_3 là các ma trận thực với số chiều thích hợp, và E_3 là ma trận hạng cột đầy đủ. Ta xét hàm chi phí sau

$$J(u) = \int_0^\infty g(t, x(t), x(t-h(t)), u(t))dt, \tag{7}$$

với $g(t, x, y, u) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^+$ là hàm liên tục được cho bởi

$$|g(t, x, x_h, u)| \le x^\top Q_1 x + x_h^\top Q_2 x_h + u^\top R u, \tag{8}$$

trong đó $\forall t \in \mathbb{R}^+, x, x_h \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$, $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $R \in \mathbb{R}^{m\times m}$ là các ma trận thực, đối xứng, xác định dương cho trước.

Mục đích chính của phần này là ta sẽ thiết kế hàm điều khiển phản hồi đầu ra $u^*(t) = Fy(t), F \in \mathbb{R}^{m\times p}$, sao cho hệ đóng

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= (A_1 + BFC_1)x(t) + (A_2 + BFC_2)x(t-h(t)) \\ & \qquad +f(t, x(t), x(t-h(t))), \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in [-h_2, 0], \end{cases} \tag{9}$$

là ổn định hóa và đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ (5). Trong luận án, chúng tôi đưa ra điều kiện đủ để thiết kế điều khiển phản hồi đầu ra cho lớp hệ phương trình vi phân có trễ biến thiên liên tục dạng khoảng. Đồng thời chúng tôi cũng nghiên cứu bài toán đảm bảo giá trị điều khiển cho hệ điều khiển tuyến tính không chắc chắn trễ biến thiên:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= (A_1 + L_1M_1(t)H_1)\, x(t) + (A_2 + L_2M_2(t)H_2)\, x(t-h(t)) \\ & \qquad + (B + L_3M_3(t)H_3)\, u(t), \\ y(t) &= C_1x(t) + C_2x(t-h(t)), \\ u(t) &= Fy(t), \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in [-h_2, 0]. \end{cases} \tag{10}$$

Bên cạnh đó bài toán điều khiển H_∞ của hệ có trễ thu hút được nhiều sự quan tâm về mặt lí thuyết cũng như thực tiễn do trễ không những là một yếu tố không thể tránh khỏi trong nhiều quá trình thực tế mà còn là nguyên nhân cho sự không ổn định và hiệu suất kém. Mục đích khi nghiên cứu bài toán điều khiển H_∞ là thiết kế một điều khiển làm cho hệ đóng tương ứng là ổn định tiệm cận khi $\omega = 0$ và đảm bảo hiệu suất ràng buộc của hệ thống là lớn nhất. Đối với bài toán điều khiển H_∞, phương pháp thích hợp cho các hệ tuyến tính có trễ thường sử dụng các hàm Lyapunov, theo đó các điều kiện thu được thông qua việc giải các bất đẳng thức ma trận tuyến tính hoặc các phương trình vi phân Riccati đại số.

Năm 1990, Lihua Xie và Carlos E. de Souza nghiên cứu hệ

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1w(t) + (B_2 + \Delta B_2(t))u(t),$$
$$z(t) = C_1x(t) + D_1u(t),$$

với kết quả thu được là tính ổn định tiệm cận của hệ khi không có nhiễu và điều kiện H_∞ được thể hiện thông qua phương trình Riccati đại số.

Năm 2005, Xiefu Jiang và Qing-Long Han [25] lần đầu tiên nghiên cứu bài toán điều khiển H_∞ cho hệ tuyến tính có trễ biến thiên liên tục dạng khoảng không khả vi và không có trễ trong hàm quan sát

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= [A + \Delta A(t)]x(t) + [B + \Delta B(t)]u(t)\\ &\qquad + [A_1 + \Delta A_1(t)]x(t - h(t)) + B_\omega \omega(t),\\ z(t) &= Cx(t) + D_1 u(t),\end{aligned}$$

và kết quả thu được là tính ổn định tiệm cận.

Năm 2009, L. V. Hiện và V. N. Phát [24] nghiên cứu hệ với trễ khả vi và đạo hàm trễ bị chặn

$$\dot{x}(t) = [A_0 + \Delta A_0(t)]x(t) + [A_1 + \Delta A_1(t)]x(t - h(t)) + [B + \Delta B(t)]u(t),$$

và kết quả thu được là tính ổn định và ổn định hóa dạng mũ.

Như vậy, bài toán điều khiển H_∞ mới chỉ được nghiên cứu cho một số lớp hệ có cấu trúc đơn giản, độ trễ hoặc là hằng số hoặc là hàm khả vi. Ngoài ra, các tác giả chủ yếu nghiên cứu bài toán điều khiển H_∞ theo nghĩa Lyapunov-Krasovskii. Theo như hiểu biết của chúng tôi, chưa có kết quả nào về nghiên cứu bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ phi tuyến có trễ tổng quát là hàm liên tục nhưng không nhất thiết khả vi được công bố.

Trong Chương 3, chúng tôi nghiên cứu bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn của một lớp hệ điều khiển phi tuyến có trễ biến thiên liên tục dạng khoảng thông qua thông tin phản hồi đầu ra. Xét phương trình điều khiển phi tuyến có trễ biến thiên trên biến trạng thái

$$\begin{cases}\dot{x}(t) = A_1 x(t) + A_2 x(t - h(t)) + Bu(t) + Gw(t)\\ \qquad\qquad +f(t, x(t), x(t - h(t)), u(t), w(t)),\\ z(t) = C_1 x(t) + C_2 x(t - h(t)), \quad t \geq 0,\\ x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-h_2, 0],\end{cases} \tag{11}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, z(t) \in \mathbb{R}^p$ lần lượt là các hàm trạng thái, hàm điều khiển, và hàm quan sát đầu ra; $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, G \in \mathbb{R}^{n\times r}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}^{p\times n}$ là các ma trận thực cho trước với số chiều thích hợp.

Hàm trễ $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ là hàm liên tục và thỏa mãn

$$0 \leq h_1 \leq h(t) \leq h_2, \quad \forall t \geq 0,$$

trong đó h_1, h_2 là hai hằng số cho trước. Hàm điều kiện ban đầu $\varphi \in C^1([-h_2, 0], \mathbb{R}^n)$ và hàm nhiễu $w(t)$ là hàm liên tục thỏa mãn

$$\int_0^T w(t)^\top w(t) \mathrm{d}t \leq d. \tag{12}$$

Hàm phi tuyến $f(t, x, y, u, w)$ thỏa mãn điều kiện tăng trưởng dưới tuyến tính, tức là tồn tại các số thực không âm a_1, a_2, a_3, a_4 sao cho với mọi $x, y \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, w \in \mathbb{R}^r$, ta có

$$\|f\|^2 \leq a_1\|x\|^2 + a_2\|y\|^2 + a_3\|u\|^2 + a_4\|w\|^2. \tag{13}$$

Định nghĩa 0.0.1 (Ổn định trong thời gian hữu hạn)**.** Cho các số dương $T, c_1, c_2, c_2 > c_1$, và ma trận xác định dương R. Hệ phương trình (11) được gọi là ổn định trong thời gian hữu hạn (FTS) tương ứng với (c_1, c_2, T, R), nếu tồn tại một điều khiển ngược thông tin phản hồi đầu ra $u(t) = Fz(t)$ sao cho điều kiện sau thỏa mãn với mọi nhiễu thỏa mãn (12) với mọi $t \in [0, T]$

$$\max\left\{\sup_{-h_2 \leq s \leq 0} \varphi(s)^\top R\varphi(s), \sup_{-h_2 \leq s \leq 0} \dot{\varphi}(s)^\top R\dot{\varphi}(s)\right\} \leq c_1 \Longrightarrow x(t)^\top Rx(t) \leq c_2.$$

Định nghĩa 0.0.2 (Điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn)**.** Cho $T > 0, \gamma > 0$. Bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn cho hệ (11) có nghiệm nếu

(i) Hệ (11) là ổn định trong thời gian hữu hạn tương ứng với (c_1, c_2, T, R).

(ii) Tồn tại một số $c_0 > 0$ sao cho

$$\sup \frac{\int_0^T \|z(t)\|^2 \mathrm{d}t}{c_0\|\varphi\|^2 + \int_0^T \|w(t)\|^2 \mathrm{d}t} \leq \gamma,$$

với mọi $\varphi \in C^1([-h_2, 0], \mathbb{R}^n)$ và nhiễu $w(.)$ thỏa mãn (12).

Dựa vào phương pháp hàm Lyapunov, bất đẳng thức tích phân Jensen mở rộng và các bất đẳng thức ma trận tuyến tính, chúng tôi xây dựng được luật điều khiển ngược thông qua thông tin phản hồi đầu ra nhằm đảm bảo cho tính ổn định của hệ đóng trong thời gian hữu hạn.

Ngoài phần mở đầu, kết luận, danh mục các kí hiệu, danh mục các công trình khoa học của tác giả, tài liệu tham khảo, luận án gồm 3 chương như sau:

Chương 1. Cơ sở toán học.

Chương 2. Điều khiển đảm bảo giá trị tối ưu cho hệ phương trình vi phân có trễ thông qua thông tin phản hồi đầu ra.

Chương 3. Bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn thông qua thông tin phản hồi đầu ra.

Các kết quả của luận án được hoàn thành dựa trên hai bài báo đăng trên các tạp chí chuyên ngành trong danh sách SCI-E và được báo cáo tại :

- Xêmina tại Phòng Tối ưu và Điều khiển, Viện Toán Học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.
- Hội nghị Toán học phối hợp Pháp Việt tại Đại học Huế, 20-24/08/2012.
- Hội thảo Khoa học cán bộ trẻ Viện Toán học - Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2, Phúc Yên, Vĩnh Phúc, 10 - 2014.
- Các hội nghị đánh giá Nghiên cứu sinh của Viện Toán học, tháng 10 - 2012, tháng 10 - 2013, và tháng 10 - 2014.

Chương 1

CƠ SỞ TOÁN HỌC

Trong chương này, chúng tôi trích dẫn một số khái niệm và kết quả đã biết về tính ổn định và ổn định hoá được của hệ phương trình vi phân có trễ, bài toán đảm bảo chi phí điều khiển, bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn, và một số kiến thức bổ trợ trong luận án. Các khái niệm và kết quả này nhằm giúp việc trình bày một cách hệ thống và rõ ràng các kết quả trong các chương sau. Kiến thức sử dụng trong chương này được chúng tôi tham khảo trong [1, 5, 6, 12, 22, 35, 59].

1.1 Bài toán ổn định và ổn định hóa hệ phương trình vi phân có trễ

1.1.1 Bài toán ổn định hệ phương trình vi phân có trễ

Như chúng ta đã biết hệ phương trình vi phân thường mô tả mối quan hệ giữa biến thời gian t, trạng thái $x(t)$ của hệ thống và tốc độ thay đổi của trạng thái $x(t)$ tại cùng một thời điểm t. Tuy nhiên, trong thực tế, các quá trình xảy ra trong tự nhiên thường có sự liên quan với quá khứ và ít nhiều mang tính di truyền. Vì vậy lớp hệ phương trình vi thường không miêu tả được hết các quá trình này. Do đó, để mô tả một cách chính xác các quá trình này, người ta thường miêu tả chúng bằng các phương trình vi phân có trễ.

Giả sử h là một số thực không âm. Kí hiệu $\mathcal{C} = C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ là không gian Banach các hàm liên tục trên đoạn $[-h, 0]$, nhận giá trị trong không gian $\mathbb{R}^n$, và chuẩn của một phần tử $\varphi \in \mathcal{C}$ được cho bởi $\|\varphi\| = \sup\limits_{-h\leq\theta\leq 0} \|\varphi(\theta)\|$. Với $t_0 \in \mathbb{R}, \sigma \geq 0$ và $x \in C([t_0 - h, t_0 + \sigma], \mathbb{R}^n)$, hàm $x_t \in \mathcal{C}, t \in [t_0, t_0 + \sigma]$, được xác định bởi $x_t(s) := x(t+s), s \in [-h, 0]$. Như vậy, x_t là một quỹ đạo trên đoạn $[t-h, t]$ của hàm $x(.)$ với chuẩn trong $\mathcal{C}$. Nếu $D \subset \mathbb{R} \times \mathcal{C}$ là 1 tập mở và hàm $f : D \to \mathbb{R}^n$ là hàm cho trước thì một phương trình vi phân có trễ trên D là phương trình có dạng:

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \tag{1.1}$$

Một hàm $x(\cdot)$ được gọi là nghiệm của phương trình (1.1) nếu tồn tại $t_0 \in \mathbb{R}$ và $\sigma > 0$ sao cho $x(\cdot) \in C([t_0 - h, t_0 + \sigma), \mathbb{R}^n)$, $(t, x_t) \in D$ và $x(t)$ thỏa mãn (1.1) với mọi $t \in [t_0, t_0 + \sigma)$. Với $t_0 \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{C}$, ta nói $x(t_0, \varphi, f)$ là nghiệm của phương trình (1.1) với giá trị ban đầu $x_{t_0}(t_0, \varphi) = \varphi$. Chúng ta luôn giả thiết hàm f thỏa mãn điều kiện với mỗi điểm $(t_0, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C}$, hệ (1.1) có nghiệm duy nhất đi qua điểm (t_0, φ) và xác định trên $[t_0, \infty)$. Sự tồn tại duy nhất nghiệm toàn cục, sự phụ thuộc liên tục của nghiệm vào dữ kiện ban đầu của hệ (1.1) có thể xem trong [22].

Định nghĩa 1.1.1. [22] Giả sử $f(t, 0) = 0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$.

- Nghiệm $x = 0$ của phương trình (1.1) được gọi là ổn định nếu với bất kì $t_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$ sao cho nếu $||\varphi||_{\mathcal{C}} \le \delta$ thì $||x_t(t_0, \varphi)||_{\mathcal{C}} \le \varepsilon$ với $t \ge t_0$. Nghiệm $x = 0$ của phương trình (1.1) được gọi là ổn định đều nếu tồn tại số δ theo định nghĩa ổn định không phụ thuộc vào t_0.

- Nghiệm $x = 0$ của phương trình (1.1) được gọi là ổn định tiệm cận nếu nó ổn định và tồn tại $b_0 = b_0(t_0) > 0$ sao cho nếu $||\varphi||_{\mathcal{C}} \le b_0$ thì $\lim\limits_{t\to\infty} x(t_0, \varphi)(t) = 0$.

Nếu $y(t)$ là nghiệm bất kì của phương trình (1.1), thì y được nói là ổn định nếu nghiệm $z = 0$ của phương trình

$$\dot{z}(t) = f(t, z_t + y_t) - f(t, y_t)$$

là ổn định. Các khái niệm về ổn định khác được định nghĩa tương tự trường hợp $f(t, 0) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.1.2. [27] Giả sử $f(t, 0) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$ và $\beta > 0$ cho trước. Khi đó, nghiệm $x = 0$ của phương trình (1.1) được gọi là $\beta-$ổn định mũ nếu tồn tại hằng số $M > 0$ sao cho mọi nghiệm $x(t_0, \varphi)$ của hệ (1.1) thỏa mãn

$$||x(t_0, \varphi)(t)|| \le M e^{-\beta(t-t_0)} ||\varphi||_{\mathcal{C}}, \ \forall t \ge t_0.$$

Năm 1892, A.M. Lyapunov là người đầu tiên đưa ra phương pháp hàm Lyapunov (hay còn gọi là phương pháp thứ hai Lyapunov) để nghiên cứu tính ổn định của lớp hệ phương trình vi phân thường. Năm 1963, N.N. Krasovskii trong công trình của mình trong [22, 28, 29, 30] mở rộng phương pháp hàm Lyapunov cho hệ phương trình vi phân có trễ và đã thu được rất nhiều kết quả có ý nghĩa. Tiếp theo, chúng tôi trình bày định nghĩa hàm Lyapunov-Krasovskii và một số điều kiện đủ cho tính ổn định của nghiệm $x = 0$ của phương trình (1.1). Trước khi đưa ra định nghĩa hàm Lyapunov-Krasovskii, chúng ta cần kí hiệu và giả thiết sau:

- $Q_H := \{\varphi \in \mathcal{C} : \ ||\varphi||_{\mathcal{C}} \leq H\}$ và giả sử với mỗi $H > 0$, hàm số $f : \mathbb{R} \times Q_H \to \mathbb{R}$ là liên tục, bị chặn, và thỏa mãn điều kiện Lipschitz địa phương theo biến thứ hai.

Định nghĩa 1.1.3. [22] Nếu $V : \ \mathbb{R} \times Q_H \to \mathbb{R}$ liên tục và $x(\cdot)$ là nghiệm của phương trình (1.1), chúng ta định nghĩa

$$\dot{V}(t, \varphi) = \limsup_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \left[V(t + h, x_{t+h}(t, \varphi)) - V(t, \varphi) \right].$$

Hàm $\dot{V}(t, \varphi)$ là đạo hàm bên phải của $V(t, \varphi)$ dọc theo nghiệm của (1.1).

Định nghĩa 1.1.4. [28] Hàm $V : \ \mathbb{R} \times Q_H \to \mathbb{R}$ liên tục và $V(t, 0) \equiv 0$ được gọi là hàm Lyapunov-Krasovskii của hệ (1.1) nếu các điều kiện sau thỏa mãn

i) hàm $V(t, \varphi)$ xác định dương, tức là

$$\exists u \in \mathcal{K} : \ u(|\varphi(0)|) \leq V(t, \varphi), \ \forall \varphi \in Q_H, \ t \in \mathbb{R},$$

ii) $\dot{V}(t, \varphi) \leq 0, \ \forall \varphi \in Q_H.$

Định lí 1.1.5. [28] *Giả sử $f(t, 0) \equiv 0$. Khi đó, nếu hệ (1.1) có hàm Lyapunov-Krasovskii thì nghiệm $x = 0$ của hệ là ổn định.*

Định lí 1.1.6. [27] *Nếu tồn tại hàm liên tục $V : \ \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:*

i) *tồn tại $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ sao cho $\lambda_1 ||\varphi(0)||^2 \leq V(t, \varphi) \leq \lambda_2 ||\varphi||^2_{\mathcal{C}}$,*

ii) $\dot{V}(t, \varphi) \leq 0$,

thì hệ (1.1) là ổn định và nghiệm của nó là bị chặn, tức là tồn tại $M > 0$ sao cho

$$||x(t_0, \varphi)(t)|| \leq M ||\varphi||_{\mathcal{C}}, \quad \forall (t_0, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C}, \ t \geq t_0.$$

Nếu thay điều kiện (ii) bằng điều kiện

iii) *tồn tại* $\lambda_0 > 0$ *sao cho* $\dot{V}(t,\varphi) \le -2\lambda_0 V(t,\varphi)$ *với mọi* $(t,\varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C}$,

thì hệ (1.1) *là ổn định mũ và nghiệm của hệ thỏa mãn*

$$||x(t_0,\varphi)(t)|| \le \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} e^{-\lambda_0(t-t_0)}||\varphi||_{\mathcal{C}}, \ \forall t \ge t_0.$$

1.1.2 Bài toán ổn định hóa cho hệ điều khiển có trễ

Xét hệ điều khiển được mô tả bởi phương trình vi phân

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(t, x_t, u(t)), \qquad t \ge 0, \\ x(t) &= \varphi(t), \qquad t \in [-h, 0], \end{cases} \tag{1.2}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái, $u(t) \in L_2([0,+\infty), \mathbb{R}^m)$ là véc tơ điều khiển, $h \ge 0$ là hằng số trễ, $\varphi \in C([-h,0], \mathbb{R}^n)$ là hàm điều kiện ban đầu và hàm $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ thỏa mãn điều kiện $f(t,0,0) \equiv 0$. Ta cũng giả thiết hệ điều khiển (1.2) tồn tại và duy nhất nghiệm trên $[0,+\infty)$ [14].

Định nghĩa 1.1.7. [1] Hệ điều khiển (1.2) gọi là ổn định hóa được nếu tồn tại hàm $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \ g(0) = 0$, sao cho nghiệm $x = 0$ của hệ đóng

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t, g(x(t)))$$

là ổn định tiệm cận. Trong trường hợp này, hàm $u(.) = g(.)$ gọi là hàm điều khiển ngược.

Định nghĩa 1.1.8. [1] Cho $\beta > 0$. Hệ điều khiển (1.2) được gọi là ổn định hóa được dạng mũ nếu tồn tại hàm $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \ g(0) = 0$, sao cho nghiệm $x = 0$ của hệ đóng

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t, g(x(t)))$$

là $\beta-$ổn định mũ.

1.2 Bài toán đảm bảo chi phí điều khiển

Xét hệ điều khiển tuyến tính

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \ge 0 \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \ \ u(t) \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \tag{1.3}$$

với hàm chi phí toàn phương (hay còn gọi là hàm mục tiêu dạng toàn phương)

$$J(u) = \int_0^{+\infty} \left[x^\top(t)Qx(t) + u^\top(t)Ru(t)\right] dt, \tag{1.4}$$

trong đó $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}, R \in \mathbb{R}^{m\times m}$ là các ma trận đối xứng, xác định dương cho trước. Điều khiển $u(t) \in L_2\left([0,\infty),\mathbb{R}^n\right)$. Bài toán điều khiển tối ưu cho hệ điều khiển tuyến tính (1.3) hay còn gọi là bài toán tối ưu toàn phương tuyến tính là tìm điều khiển chấp nhận được $u^*(.)$ sao cho với điều khiển này giá trị của hàm chi phí toàn phương đạt giá trị nhỏ nhất.

Trong các bài toán kĩ thuật, ngoài việc tìm cách thiết kế một hệ thống điều khiển làm cho hệ điều khiển không những ổn định mà còn đảm bảo một mức độ đầy đủ về hiệu suất (guarantees an adequate level of performance). Dựa trên ý tưởng đó, năm 1972, hai nhà toán học S.S.L. Chang và T.K.C.Peng đã đưa ra bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho các hệ động lực [13]. Khác với bài toán tối ưu toàn phương tuyến tính, ngoài việc thiết kế một bộ điều khiển để đảm bảo cho hệ thống điều khiển không những ổn định mà còn đảm bảo rằng một hàm chi phí toàn phương liên hệ với hệ động lực đó có giá trị hữu hạn và giá trị đó càng nhỏ càng tốt. Bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ (1.3) có thể phát biểu như sau:

Định nghĩa 1.2.1. Xét hệ điều khiển tuyến tính (1.3) và hàm chi phí toàn phương (1.4), nếu tồn tại hàm điều khiển phản hồi trạng thái $u^*(t) = Kx(t), K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ và một số dương J^* sao cho hệ đóng

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [A + BK]\, x(t), \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.5}$$

là ổn định tiệm cận và giá trị của hàm chi phí toàn phương (1.4) thỏa mãn $J(u^*) \le J^*$, thì J^* được gọi là giá trị đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ (1.3) và $u^*(t)$ được gọi là hàm điều khiển phản hồi trạng thái đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ (1.3).

Bằng cách chọn hàm Lyapunov $V(x(t)) = x^\top(t)P^{-1}x(t)$, với $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là một ma trận đối xứng, xác định dương, ta dễ dàng thu được kết quả sau:

Định lí 1.2.2. [13] *Cho $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}, R \in \mathbb{R}^{m\times m}$ là các ma trận đối xứng, xác định dương. Xét hệ điều khiển tuyến tính* (1.3) *với hàm chi phí toàn phương tương ứng* (1.4). *Giả sử tồn tại một ma trận đối xứng, xác định dương $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, một* *ma trận Y có số chiều thích hợp sao cho bất đẳng thức ma trận tuyến tính sau được thỏa mãn:*

$$\begin{bmatrix} AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top & PQ & Y^\top R \\ * & -Q & 0 \\ * & * & -R \end{bmatrix} < 0.$$

Khi đó $u(t) = YP^{-1}x(t)$ là hàm điều khiển phản hồi trạng thái đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ tuyến tính (1.3) *và giá trị đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ là $J^* = x_0^\top P^{-1} x_0$.*

Năm 1994, I.R. Petersen và D.C. McFarlance [44] đã giải quyết bài toán đảm bảo giá trị điều khiển cho hệ (1.3) khi ma trận A và ma trận B bị "nhiễu" thành $A + D_1\Delta(t)E_1$ và $B + D_1\Delta(t)E_1$, trong đó D_1, E_1 là các ma trận cho trước có số chiều thích hợp, $\Delta(t)$ là ma trận không biết trước nhưng thỏa mãn điều kiện $\Delta^\top(t)\Delta(t) \leq I$.

1.3 Bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn

1.3.1 Bài toán ổn định, ổn định hóa trong thời gian hữu hạn

Lý thuyết ổn định trong thời gian hữu hạn được giới thiệu lần đầu tiên bởi Dorato vào năm 1961. Một hệ phương trình vi phân được gọi là ổn định trong thời gian hữu hạn nếu véc tơ trạng thái không vượt quá một mức cho trước trong khoảng thời gian hữu hạn. So sánh với tính ổn định Lyapunov, thì sự ổn định trong thời gian hữu hạn liên quan đến tính bị chặn của véc tơ trạng thái trong một khoảng thời gian cho trước. Do đó, một hệ có thể ổn định trong thời gian hữu hạn nhưng không ổn định Lyapunov, và ngược lại. Bài toán ổn định trong thời gian hữu hạn có thể phát biểu như sau:

Định nghĩa 1.3.1. [4, 16] [*Bài toán ổn định trong thời gian hữu hạn*] Cho $T > 0, c_2 > c_1 > 0, R$ là ma trận xác định dương. Hệ phương trình: $\dot{x}(t) = Ax(t)$ được gọi là ổn định trong thời gian hữu hạn (FTS) tương ứng với (c_1, c_2, T, R) nếu:

$$x^\top(0)Rx(0) < c_1 \Rightarrow x^\top(t)Rx(t) < c_2, \quad \forall t \in [0, T].$$

Định nghĩa 1.3.2. [4][*Bài toán bị chặn trong thời gian hữu hạn*] Xét hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Gw(t), \quad t \in [0,T], \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1.6}$$

với hàm nhiễu thỏa mãn điều kiện

$$w^\top(t)w(t) \le d, \ \ (d > 0). \tag{1.7}$$

Hệ (1.6) được gọi là bị chặn trong thời gian hữu hạn (FTB) tương ứng với (c_1, c_2, T, R, d), với $c_2 > c_1$ và $R > 0$ là ma trận xác định dương nếu

$$x^\top(0)Rx(0) < c_1 \Rightarrow x^\top(t)Rx(t) < c_2, \quad \forall t \in [0,T], \forall w : w^\top(t)w(t) \le d.$$

Trong [4], bằng cách đặt hàm $V(x,w) = x^\top R^{\frac{1}{2}} Q_1^{-1} R^{\frac{1}{2}} x + w^\top Q_2^{-1} w$ các tác giả Amato F., Ariola M. và Dorato P. đã chứng minh được một điều kiện đủ để hệ (1.6) bị chặn trong thời gian hữu hạn như sau.

Định lí 1.3.3. [4] *Đặt $\widetilde{Q_1} = R^{\frac{-1}{2}} Q_1 R^{\frac{-1}{2}}$. Hệ (1.6) bị chặn trong thời gian hữu hạn tương ứng với (c_1, c_2, T, R, d) nếu tồn tại một hằng số dương α, và hai ma trận xác định dương đối xứng $Q_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ và $Q_2 \in \mathbb{R}^{l\times l}$ sao cho*

$$\begin{pmatrix} A\widetilde{Q_1} + \widetilde{Q_1}A^\top - \alpha\widetilde{Q_1} & GQ_2 \\ Q_2G^\top & -\alpha Q_2 \end{pmatrix} < 0,$$

$$\frac{c_1}{\lambda_{\min}(Q_1)} + \frac{d}{\lambda_{\min}(Q_2)} < \frac{c_2 e^{-\alpha T}}{\lambda_{\max}(Q_1)},$$

trong đó $\lambda_{\max}(.)$ và $\lambda_{\min}(.)$ lần lượt là các giá trị riêng lớn nhất, nhỏ nhất của các ma trận tương ứng.

Tiếp theo chúng ta sẽ nhắc lại một bài toán quan trọng khác của lý thuyết điều khiển trong thời gian hữu hạn là bài toán ổn định hóa trong thời gian hữu hạn.

Định nghĩa 1.3.4. [4, 5][*Bài toán ổn định hóa trong thời gian hữu hạn*] Cho $T > 0, c_2 > c_1 > 0$ và R là ma trận xác định dương. Hệ điều khiển:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \in [0,T], \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1.8}$$

được gọi là ổn định hóa được trong thời gian hữu hạn nếu tồn tại hàm điều khiển ngược $u(t) = Kx(t)$ sao cho hệ đóng $\dot{x}(t) = [A + BK]\, x(t)$ là ổn định trong thời gian hữu hạn (FTS) tương ứng với (c_1, c_2, T, R).

Định lí 1.3.5. [4, 5] *Xét hệ điều khiển tuyến tính* (1.8). *Giả sử tồn tại một hằng số không âm α, và ma trận xác định dương $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ và một ma trận $N \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sao cho*

$$\begin{aligned} &A\widetilde{Q} + \widetilde{Q}A^\top + BN + N^\top B^\top - \alpha\widetilde{Q} < 0,\\ &cond(Q) < \frac{c_2}{c_1}e^{-\alpha T}, \end{aligned}$$

thì hệ (1.8) *ổn định hóa được với điều khiển ngược $u(t) = Kx(t)$, với $K = N\widetilde{Q}^{-1}$.*

Trong đó $\widetilde{Q} = R^{\frac{-1}{2}}QR^{\frac{-1}{2}}$ và $cond(Q) = \dfrac{\lambda_{\max}(Q)}{\lambda_{\min}(Q)}$.

1.3.2 Bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn

Xét hệ phương trình vi phân điều khiển tuyến tính

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Gw(t), \quad t \in [0, T],\\ z(t) = Cx(t),\\ x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-h_2; 0], \end{cases} \tag{1.9}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là véc tơ điều khiển, $z(t) \in \mathbb{R}^p$ là hàm quan sát, và $w(t) \in \mathbb{R}^r$ là hàm nhiễu.

Định nghĩa 1.3.6 (Bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn)**.** Cho $T > 0, \gamma > 0$. Bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn cho hệ (1.9) là bài toán tìm điều khiển ngược $u(t) = Fx(t)$ thỏa mãn các điều kiện sau:

- Với $w = 0$, hệ đóng: $\dot{x}(t) = [A + BF]x(t)$ là ổn định trong thời gian hữu hạn (FTS) tương ứng với (c_1, c_2, T, R).
- Tồn tại $c_0 > 0$ sao cho:

$$\sup \frac{\int_0^T \|z(t)\|^2 dt}{c_0\|\varphi\|^2 + \int_0^T \|w(t)\|^2 dt} \le \gamma, \tag{1.10}$$

trong đó supremum chạy trên $\varphi \in C^1([-h_2, 0], \mathbb{R}^n)$ và nhiễu $w(.)$ thỏa mãn (1.7).

1.4 Bất đẳng thức ma trận tuyến tính

Vấn đề bất đẳng thức ma trận tuyến tính (LMI) trong phân tích các hệ thống động lực đã xuất hiện từ hơn 100 năm trước. Bắt đầu vào khoảng năm 1890, khi Lyapunov xuất bản các công trình về lí thuyết Lyapunov. Ông đã chỉ ra rằng hệ phương trình tuyến tính

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

là ổn định tiệm cận khi và chỉ khi tồn tại một ma trận P xác định dương sao cho:

$$A^\top P + PA < 0.$$

Bất đẳng thức trên là một dạng đặc biệt của LMI, và có thể giải một cách tường minh thông qua giải hệ các bất phương trình tuyến tính.

Định nghĩa 1.4.1 ([12])**.** Bất đẳng thức ma trận tuyến tính (LMI) là biểu thức bất đẳng thức ma trận có dạng:

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i A_i > 0,$$

trong đó $\lambda_i \in \mathbb{R}, A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là các ma trận đối xứng cho trước.

LMI xuất hiện đầu tiên năm 1890, khi Lyapunov xuất bản các công trình về lí thuyết Lyapunov.

Khoảng năm 1940, Lur'e, Postnikov và nhiều nhà khoa học Liên Xô khác lần đầu tiên áp dụng các phương pháp của Lyapunov cho một số bài toán thực tế trong điều khiển máy móc, đặc biệt, bài toán ổn định của hệ điều khiển với một nhiễu phi tuyến. Các kết quả về ổn định của họ có dạng bất đẳng thức ma trận tuyến tính và được giải "bằng tay". Tất nhiên, các kết quả này chỉ làm được với hệ có kích cỡ nhỏ (bậc 2 hoặc 3).

Năm 1960, Yakubovich, Popov, Kalman và nhiều nhà khoa học khác đưa ra một cách tiếp cận khác trong việc giải các LMI, phương pháp hình học. Kĩ thuật này cho phép giải các hệ có kích cỡ lớn hơn, tuy nhiên cũng chỉ làm được với hệ không có nhiều hơn một nhiễu phi tuyến. Cuối những năm 1960, các nhà khoa học nhận thấy các LMI tương tự có thể được giải thông qua phương trình vi phân Ricatti.

Vào đầu năm 1980, nhiều LMI có thể giải được bằng máy tính thông qua bài toán quy hoạch lồi.

Năm 1984, N. Karmarkar giới thiệu một thuật toán quy hoạch tuyến tính mới, thuật toán điểm trong, cho phép giải các bài toán tuyến tính với thời gian đa thức. Các công trình của ông chủ yếu cho các bài toán toàn phương (lồi) và tuyến tính.

Năm 1993, Gahinet và Nemirovskii đã phát triển một phần mềm LMI-Lab dựa trên code FORTRAN, cho phép người sử dụng miêu tả bài toán LMI dưới dạng kí hiệu. LMI-Lab giải quyết bài toán LMI này dựa trên thuật toán phép chiếu của Nemirovskii. Sau đó, năm 1994, El Ghaoui đã phát triển một phần khác, gọi là LMI-tool được sử dụng trong Matlab. Một phiên bản khác của LMI-tool được phát triển bởi Nikoukhah và Delebecque.

Ngày nay, với phần mềm Matlab cùng hộp công cụ LMI, chúng ta có thể giải được các bài toán LMI một cách dễ dàng.

1.5 Một số bổ đề bổ trợ

Bổ đề 1.5.1 (Bất đẳng thức Cauchy ma trận [63]). *Giả sử $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận đối xứng và xác định dương. Khi đó ta có*

$$2x^\top Qy - y^\top Sy \le x^\top QS^{-1}Q^\top x,$$

với mọi $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$. Đặc biệt, khi $Q = I$, ta có

$$2x^\top y - y^\top Sy \le x^\top S^{-1}x.$$

Bổ đề 1.5.2 (Bất đẳng thức ma trận tích phân [50]). *Cho $Z \in R^{n\times n}$ là ma trận đối xứng và xác định dương, các hằng số $0 < h < \overline{h}$ sao cho các tích phân sau xác định. Khi đó, ta có các đánh giá sau:*

i) $\int\limits_{t-h}^{t} x(s)^\top Zx(s)ds \ge \frac{1}{h}\left(\int\limits_{t-h}^{t} x(s)ds\right)^\top Z\left(\int\limits_{t-h}^{t} x(s)ds\right).$

ii) $\int\limits_{-\overline{h}}^{-h}\int\limits_{t+s}^{t} x(\tau)^\top Zx(\tau)d\tau ds \ge \frac{2}{\overline{h}^2-h^2}\left(\int\limits_{-\overline{h}}^{-h}\int\limits_{t+s}^{t} x(\tau)d\tau ds\right)^\top Z\left(\int\limits_{-\overline{h}}^{-h}\int\limits_{t+s}^{t} x(\tau)d\tau ds\right).$

Bổ đề 1.5.3 (Bất đẳng thức tích phân Jensen tổng quát [55]). *Cho $R \in R^{n\times n}$ là ma trận xác định dương, và hàm khả vi $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Khi đó, ta có đánh giá sau:*

$$\int_a^b \dot{\varphi}(u)R\dot{\varphi}(u)\mathrm{d}u \ge \frac{1}{b-a}(\varphi(b) - \varphi(a))^\top R(\varphi(b) - \varphi(a)) + \frac{12}{b-a}\Omega^\top R\Omega,$$

với $\Omega = \dfrac{\varphi(b)+\varphi(a)}{2} - \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b \varphi(u)\mathrm{d}u.$

Bổ đề 1.5.4 (Bổ đề Schur [12])**.** *Giả sử* $X_{11} = X_{11}^{\top},\ X_{22} = X_{22}^{\top},\ X_{21} = X_{12}^{\top}$ *là các ma trận có số chiều thích hợp. Khi đó các điều kiện sau là tương đương*

i) $\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & -X_{22} \end{bmatrix} < 0.$

ii) $X_{22} > 0,\ X_{11} + X_{12}X_{22}^{-1}X_{21} < 0.$

Chương 2

BÀI TOÁN ĐẢM BẢO CHI PHÍ ĐIỀU KHIỂN

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu một số kết quả về bài toán đảm bảo giá trị cho một số lớp hệ phương trình vi phân có trễ biến thiên liên tục dạng khoảng (tập giá trị của trễ là đoạn thẳng) và không khả vi thông qua thông tin phản hồi đầu ra: hệ phi tuyến, hệ không chắc chắn. Nội dung được trình bày trong chương này dựa vào bài báo [1] trong danh mục các công trình khoa học của tác giả.

2.1 Hệ phương trình vi phân phi tuyến có trễ biến thiên

Xét phương trình vi phân phi tuyến có trễ biến thiên trên biến trạng thái và biến quan sát

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A_1x(t) + A_2x(t-h(t)) + Bu(t) + f(t, x(t), x(t-h(t)), u(t)), \\ y(t) &= C_1x(t) + C_2x(t-h(t)), \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in [-h_2, 0], \end{cases} \tag{2.1}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái; $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là véc tơ điều khiển; $y(t) \in \mathbb{R}^p$ là véc tơ quan sát; $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}^{p\times n}$ là các ma trận thực cho trước với số chiều thích hợp; hàm trễ $h(t)$ là hàm liên tục thỏa mãn điều kiện

$$0 \le h_1 \le h(t) \le h_2. \tag{2.2}$$

Hàm điều kiện ban đầu $\phi(t) \in C^1([-h_2, 0], \mathbb{R}^n)$ với chuẩn

$$\|\phi\|_{C^1} = \max\left\{\|\phi\|, \|\dot{\phi}\|\right\}.$$

Hàm nhiễu phi tuyến thỏa mãn điều kiện tăng trưởng dưới tuyến tính

$$f^\top(t, x, x_h, u) f(t, x, x_h, u) \le x^\top E_1^\top E_1 x + x_h^\top E_2^\top E_2 x_h + u^\top E_3^\top E_3 u, \tag{2.3}$$

với mọi $t \in \mathbb{R}^+, x, x_h \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$, E_1, E_2, E_3 là các ma trận thực với số chiều thích hợp, và E_3 là ma trận hạng cột đầy đủ.

Ta xét hàm chi phí sau

$$J(u) = \int_0^\infty g(t, x(t), x(t-h(t)), u(t)) dt, \tag{2.4}$$

với $g(t, x, y, u) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^+$ là hàm liên tục được cho bởi

$$|g(t, x, x_h, u)| \le x^\top Q_1 x + x_h^\top Q_2 x_h + u^\top R u, \tag{2.5}$$

trong đó $\forall t \in \mathbb{R}^+, x, x_h \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$, $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $R \in \mathbb{R}^{m\times m}$ là các ma trận thực, đối xứng, xác định dương cho trước.

Mục đích chính của mục này là ta sẽ tìm số J^* và phản hồi đầu ra $u(t) = Fy(t), F \in \mathbb{R}^{m\times p}$ sao cho hệ đóng

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= (A_1 + BFC_1)x(t) + (A_2 + BFC_2)x(t-h(t)) \\ &\qquad + f(t, x(t), x(t-h(t)), u(t)), \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in [-h_2, 0], \end{cases} \tag{2.6}$$

là ổn định hóa và hàm chi phí (2.4) thỏa mãn điều kiện $J(u) \le J^*$.

Định nghĩa 2.1.1. Cho $\alpha > 0$. Nghiệm $x = 0$ của hệ (2.1), với $u(t) = 0$, được gọi là $\alpha-$ổn định mũ nếu tồn tại một hằng số $\beta > 0$ sao cho nghiệm bất kì $x(t, \phi)$ của hệ thỏa mãn điều kiện

$$\| x(t, \phi) \| \le \beta e^{-\alpha t} \|\phi\|_{C^1}, \quad \forall t \ge 0.$$

Định nghĩa 2.1.2. Hệ (2.1) được gọi là $\alpha-$ổn định hóa được dạng mũ thông qua thông tin phản hồi đầu ra nếu tồn tại một điều khiển ngược thông qua thông tin phản hồi đầu ra $u(t) = Fy(t)$ sao cho nghiệm bất kì $x(t, \phi)$ của hệ đóng (2.6) là $\alpha-$ổn định mũ.

Định nghĩa 2.1.3. Đối với hệ phi tuyến (2.1) và hàm chi phí (2.4), nếu tồn tại một điều khiển ngược thông tin phản hồi đầu ra $u^*(t)$ và một hằng số dương J^* sao cho hệ đóng (2.6) là $\alpha-$ổn định mũ và hàm chi phí (2.4) thỏa mãn $J(u^*) \leq J^*$, thì $u^*(t)$ được gọi là hàm điều khiển đảm bảo giá trị thông qua thông tin phản hồi đầu ra, và J^* được gọi là giá trị đảm bảo.

Cho số $\alpha > 0$, các ma trận đối xứng, xác định dương $P, U_1, U_2, S_1, S_2, S_3, X_1, X_2, X_3, N$, và ma trận tự do K. Trước khi đưa ra kết quả chính, ta cần một số kí hiệu sau:

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1 = e^{-2\alpha(h_1+h_2)},\ \lambda_2 = e^{-2\alpha h_1},\ \lambda_3 = e^{-2\alpha h_2},\ \lambda_4 = 2\lambda_3^2 \widehat{h}^{-1},\\
&\lambda_5 = 2\lambda_3^2 h_m^{-1}, \lambda_6 = 2\lambda_2^2 h_1^{-1}, \lambda_7 = 2\lambda_3^2 h_2^{-1},\\
&\lambda_8 = 2\lambda_2^2 (h_1^2)^{-1}, \lambda_9 = 2\lambda_3^2 (h_2^2)^{-1}, \bar{h} = h_1^2 + h_2^2,\\
&\underline{h} = (h_2 - h_1)^2,\ \ \widetilde{h} = \frac{h_2 - h_1}{h_2 + h_1},\ \ \widehat{h} = h_2^2 - h_1^2,\\
&h_m = h_1 + h_2, \lambda = \lambda_{\min}(P),\\
&\Lambda = \lambda_{\max}(P) + h_1 \lambda_{\max}(U_1) + h_2 \lambda_{\max}(U_2) + 0.5 h_1^3 \lambda_{\max}(S_1)\\
&\qquad + 0.5 h_2^3 \lambda_{\max}(S_2) + (h_2^2 - h_1^2)(h_2 - h_1)\lambda_{\max}(S_3)\\
&\qquad + 1/6 h_1^3 \lambda_{\max}(X_1) + \frac{1}{6} h_2^3 \lambda_{\max}(X_2) + \frac{1}{6}(h_2 - h_1)^3 \lambda_{\max}(X_3),\\
&\delta_1 = \lambda_{\min}(R^{-1}), \delta_2 = \lambda_{\min}((E_3^\top E_3)^{-1}),\\
&\Pi_{11} = PA_1 + A_1^\top P + U_1 + U_2 + Q_1 + 2\alpha P + 2E_1^\top E_1 - \lambda_2 S_1\\
&\qquad - \lambda_3 S_2 - 2\lambda_2^2 X_1 - 2\lambda_3^2 X_2 - 2\lambda_3^2 \widetilde{h} X_3 + BKC_1\\
&\qquad + C_1^\top K^\top B^\top - 0.5 BNB^\top,\\
&\Pi_{22} = -\lambda_2 U_1 - \lambda_2 S_1 - \lambda_3 S_3, \Pi_{33} = -\lambda_3 U_2 - \lambda_3 S_2 - \lambda_3 S_3,\\
&\Pi_{44} = h_1^2 S_1 + h_2^2 S_2 + (h_2 - h_1)^2 S_3 + 0.5 h_1^2 X_1 + 0.5 h_2^2 X_2\\
&\qquad + 0.5 \widehat{h} X_3 - 2P,\\
&\Pi_{55} = 2E_2^\top E_2 - 2\lambda_3 S_3 + Q_2, \Pi_{66} = -\lambda_8 X_1,\\
&\Pi_{77} = -\lambda_9 X_2, \Pi_{88} = -\lambda_4 X_3.
\end{aligned}
$$

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \lambda_2 S_1 & \lambda_3 S_2 & A_1^\top P & PA_2 & \lambda_6 X_1 & \lambda_7 X_2 & \lambda_5 X_3 \\ * & \Pi_{22} & 0 & 0 & \lambda_3 S_3 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Pi_{33} & 0 & \lambda_3 S_3 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Pi_{44} & PA_2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Pi_{55} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \Pi_{66} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \Pi_{77} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & \Pi_{88} \end{bmatrix},$$

$$\Pi_2^1 = \begin{bmatrix} PB & C_1^\top K^\top - 0.5BN & C_1^\top K^\top & C_1^\top K^\top & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & PB & P \end{bmatrix},$$

$$\Pi_2^2 = \begin{bmatrix} C_2^\top K^\top & C_2^\top K^\top & C_2^\top K^\top \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Pi_2 = \begin{bmatrix} \Pi_2^1 & 0 \\ 0 & \Pi_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\Pi_3 = \ \mathrm{diag}\Big(& -0.5N, -0.5N, -0.5\delta_2 aN + 0.25\delta_2 a^2 I, -\delta_1 aN + 0.5\delta_1 a^2 I, \\ & -I, -0.5N, -I, -0.5N, -0.5\delta_2 aN + 0.25\delta_2 a^2 I, -\delta_1 aN + 0.5\delta_1 a^2 I\Big).\end{aligned}$$

Định lí sau đây đưa ra một điều kiện đủ cho sự tồn tại của một điều khiển ngược thông qua thông tin phản hồi đầu ra $u(t) = Fy(t)$ đảm bảo cho hệ phương trình vi phân phi tuyến (2.1) là $\alpha-$ổn định hóa được dạng mũ và giá trị của hàm chi phí (2.4) thỏa mãn $J(u^*) \le J^*$.

Định lí 2.1.4. *Cho số $a > 0, \alpha > 0$. Xét hệ điều khiển phi tuyến có trễ biến thiên trên cả biến trạng thái và biến điều khiển* (2.1) *với hàm chi phí* (2.4)*. Giả sử các ma trận hệ số của hệ* (2.1) *thỏa mãn điều kiện: tồn tại các ma trận đối* *xứng xác định dương $P, U_1, U_2, S_1, S_2, S_3, X_1, X_2, X_3, N$ và ma trận K, sao cho bất đẳng thức ma trận tuyến tính sau được thỏa mãn*

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Pi_1 & \Pi_2 \\ * & \Pi_3 \end{bmatrix} < 0. \tag{2.7}$$

Khi đó $u(t) = N^{-1}Ky(t)$ là hàm điều khiển đảm bảo chi phí thông qua thông tin phản hồi đầu ra cho hệ (2.1), và giá trị đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ (2.1) là:

$$J^* = \Lambda\|\phi\|^2_{C^1}.$$

Chứng minh. Xét hàm Lyapunov - Krasovskii cho hệ (2.1) như sau

$$V(t, x_t) = \sum_{i=1}^{6} V_i(t, x_t), \tag{2.8}$$

trong đó

$$\begin{aligned}
V_1(t, x_t) =& x^\top(t)Px(t),\\
V_2(t, x_t) =& \int_{t-h_1}^{t} e^{2\alpha(s-t)}x^\top(s)U_1x(s)ds + \int_{t-h_2}^{t} e^{2\alpha(s-t)}x^\top(s)U_2x(s)ds,\\
V_3(t, x_t) =& h_1\int_{-h_1}^{0}\int_{t+s}^{t} e^{2\alpha(\tau-t)}\dot{x}^\top(\tau)S_1\dot{x}(\tau)d\tau ds\\
&+ h_2\int_{-h_2}^{0}\int_{t+s}^{t} e^{2\alpha(\tau-t)}\dot{x}^\top(\tau)S_2\dot{x}(\tau)d\tau ds,\\
V_4(t, x_t) =& (h_2 - h_1)\int_{-h_2}^{-h_1}\int_{t+s}^{t} e^{2\alpha(\tau-t)}\dot{x}^\top(\tau)S_3\dot{x}(\tau)d\tau ds,\\
V_5(t, x_t) =& \int_{-h_1}^{0}\int_{\theta}^{0}\int_{t+s}^{t} e^{2\alpha(\tau+s-t)}\dot{x}^\top(\tau)X_1\dot{x}(\tau)d\tau ds d\theta\\
&+ \int_{-h_2}^{0}\int_{\theta}^{0}\int_{t+s}^{t} e^{2\alpha(\tau+s-t)}\dot{x}^\top(\tau)X_2\dot{x}(\tau)d\tau ds d\theta,\\
V_6(t, x_t) =& \int_{-h_2}^{-h_1}\int_{\theta}^{0}\int_{t+s}^{t} e^{2\alpha(\tau+s-t)}\dot{x}^\top(\tau)X_3\dot{x}(\tau)d\tau ds d\theta.
\end{aligned}$$

Ta dễ dàng chứng minh được

$$\lambda\|x(t)\|^2 \le V(t, x_t) \le \Lambda\|x_t\|^2, \quad t \in \mathbb{R}^+. \tag{2.9}$$

Lấy đạo hàm của $V_i(t, x_t),\ i = 1, \dots, 6$ theo t dọc theo nghiệm của hệ đóng (2.6), ta được

$$\begin{aligned}
\dot V_1(t, x_t) &= 2\dot x^\top(t)Px(t)\\
&= 2x^\top(t)(A_1^\top + C_1^\top F^\top B^\top)Px(t)\\
&\quad + 2x^\top(t-h(t))(A_2^\top + C_2^\top F^\top B^\top)Px(t) + 2f^\top(t, x, x_h, u)Px(t)\\
&\le x^\top(t)(PA_1 + A_1^\top P)x(t) + x^\top(t)PBN^{-1}B^\top Px(t)\\
&\quad + x^\top(t)C_1^\top F^\top NFC_1x(t) + 2x^\top(t)PA_2x(t-h(t))\\
&\quad + x^\top(t)PBN^{-1}B^\top Px(t) + x^\top(t-h(t))C_2^\top F^\top NFC_2x(t-h(t))\\
&\quad + x^\top(t)PPx(t) + f^\top(t, x, x_h, u)f(t, x, x_h, u)\\
&\le x^\top(t)\Big(PA_1 + A_1^\top P + 2PBN^{-1}B^\top P + C_1^\top F^\top NFC_1 + PP\\
&\quad + E_1^\top E_1 + 2C_1^\top F^\top E_3^\top E_3FC_1\Big)x(t)\\
&\quad + 2x^\top(t)PA_2x(t-h(t))\\
&\quad + x^\top(t-h(t))\Big(C_2^\top F^\top NFC_2 + E_2^\top E_2\\
&\quad + 2C_2^\top F^\top E_3^\top E_3FC_2\Big)x(t-h(t)),\\
\dot V_2(t, x_t) &= x^\top(t)(U_1 + U_2)x(t) - e^{-2\alpha h_1}x^\top(t-h_1)U_1x(t-h_1)\\
&\qquad - e^{-2\alpha h_2}x^\top(t-h_2)U_2x(t-h_2) - 2\alpha V_2,\\
\dot V_3(t, x_t) &= h_1^2\dot x^\top(t)S_1\dot x(t) + h_2^2\dot x^\top(t)S_2\dot x(t)\\
&\quad - h_1\int_{-h_1}^0 e^{2\alpha s}\dot x^\top(t+s)S_1\dot x(t+s)ds\\
&\quad - h_2\int_{-h_2}^0 e^{2\alpha s}\dot x^\top(t+s)S_2\dot x(t+s)ds - 2\alpha V_3\\
&\le \dot x^\top(t)\left(h_1^2S_1 + h_2^2S_2\right)\dot x(t) - x^\top(t)\left(\lambda_2S_1 + \lambda_3S_2\right)x(t)\\
&\quad + 2\lambda_2x^\top(t)S_1x(t-h_1) - \lambda_2x^\top(t-h_1)S_1x(t-h_1)\\
&\quad + 2\lambda_3x^\top(t)S_2x(t-h_2) - \lambda_3x^\top(t-h_2)S_2x(t-h_2) - 2\alpha V_3,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{V}_4(t,x_t) &= (h_2-h_1)^2\dot{x}^\top(t)S_3\dot{x}(t) - 2\alpha V_4 \\
&\quad - (h_2-h_1)\int_{-h_2}^{-h_1} e^{2\alpha s}\dot{x}^\top(t+s)S_3\dot{x}(t+s)ds \\
&\le (h_2-h_1)^2\dot{x}^\top(t)S_3\dot{x}(t) - 2\alpha V_4 \\
&\quad - (h_2-h_1)e^{-2\alpha h_2}\int_{t-h_2}^{t-h_1} \dot{x}^\top(s)S_3\dot{x}(s)ds \\
&\le (h_2-h_1)^2\dot{x}^\top(t)S_3\dot{x}(t) - 2\alpha V_4 \\
&\quad - (h_2-h_1)e^{-2\alpha h_2}\int_{t-h_2}^{t-h(t)} \dot{x}^\top(s)S_3\dot{x}(s)ds \\
&\quad - (h_2-h_1)e^{-2\alpha h_2}\int_{t-h(t)}^{t-h_1} \dot{x}^\top(s)S_3\dot{x}(s)ds \\
&\le (h_2-h_1)^2\dot{x}^\top(t)S_3\dot{x}(t) - 2e^{-2\alpha h_2}x^\top(t-h(t))S_3x(t-h(t)) \\
&\quad - e^{-2\alpha h_2}x^\top(t-h_1)S_3x(t-h_1) \\
&\quad - e^{-2\alpha h_2}x^\top(t-h_2)S_3x(t-h_2) \\
&\quad + 2e^{-2\alpha h_2}x^\top(t-h(t))S_3x(t-h_1) \\
&\quad + 2e^{-2\alpha h_2}x^\top(t-h(t))S_3x(t-h_2) - 2\alpha V_4, \\
\dot{V}_5(t,x_t) &= 0.5\dot{x}^\top(t)h_1^2X_1\dot{x}(t)\int_{-h_1}^{0}\int_{\theta}^{0} e^{2\alpha s}\dot{x}^\top(t)X_1\dot{x}(t)dsd\theta \\
&\quad + 0.5\dot{x}^\top(t)h_2^2X_2\dot{x}(t) - 2\alpha V_5 \\
&\quad - \int_{-h_2}^{0}\int_{\theta}^{0} e^{4\alpha s}\dot{x}^\top(t+s)X_2\dot{x}(t+s)dsd\theta \\
&\le \dot{x}^\top(t)\left(0.5h_1^2X_1 + 0.5h_2^2X_2\right)\dot{x}(t) - 2\alpha V_5 \\
&\quad - e^{-4\alpha h_1}\int_{-h_1}^{0}\int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^\top(s)X_1\dot{x}(s)dsd\theta \\
&\quad - e^{-4\alpha h_2}\int_{-h_2}^{0}\int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^\top(s)X_2\dot{x}(s)dsd\theta \\
&\le \dot{x}^\top(t)\left(0.5h_1^2X_1 + 0.5h_2^2X_2\right)\dot{x}(t) - 2\alpha V_5 \\
&\quad - \frac{2\lambda_2^2}{h_1^2}\left(\int_{-h_1}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}(s)dsd\theta\right)^\top X_1\int_{-h_1}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}(s)dsd\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{2\lambda_3^2}{h_2^2}\left(\int_{-h_2}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}(s)dsd\theta\right)^{\top} X_2 \int_{-h_2}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}(s)dsd\theta \\
&\leq \dot{x}^{\top}(t)\left(0.5h_1^2X_1 + 0.5h_2^2X_2\right)\dot{x}(t) - 2\alpha V_5 \\
&- x^{\top}(t)\left(2\lambda_2^2X_1 + 2\lambda_3^2X_2\right)x(t) \\
&- \frac{2\lambda_2^2}{h_1^2}\left(\int_{t-h_1}^{t}x(\theta)d\theta\right)^{\top} X_1 \int_{t-h_1}^{t}x(\theta)d\theta \\
&+ \frac{4\lambda_2^2}{h_1}x^{\top}(t)X_1\int_{t-h_1}^{t}x^{\top}(\theta)d\theta \\
&- \frac{2\lambda_3^2}{h_2^2}\left(\int_{t-h_2}^{t}x(\theta)d\theta\right)^{\top} X_2 \int_{t-h_2}^{t}x(\theta)d\theta \\
&+ \frac{4\lambda_3^2}{h_2}x^{\top}(t)X_2\int_{t-h_2}^{t}x^{\top}(\theta)d\theta,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{V}_6(t,x_t) &= \int_{-h_2}^{-h_1}\int_{\theta}^{0}e^{2\alpha s}\dot{x}^{\top}(t)X_3\dot{x}(t)dsd\theta \\
&- \int_{-h_2}^{-h_1}\int_{\theta}^{0}e^{4\alpha s}\dot{x}^{\top}(t+s)X_3\dot{x}(t+s)dsd\theta - 2\alpha V_6 \\
&\leq \frac{h_2^2-h_1^2}{2}\dot{x}^{\top}(t)X_3\dot{x}(t) - 2\alpha V_6 \\
&- e^{-4\alpha h_2}\int_{-h_2}^{-h_1}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}^{\top}(s)X_3\dot{x}(s)dsd\theta \\
&\leq 0.5\widehat{h}\dot{x}^{\top}(t)X_3\dot{x}(t) - 2\alpha V_6 \\
&- 2\lambda_3^2\widehat{h}^{-1}\left(\int_{-h_2}^{-h_1}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}(s)dsd\theta\right)^{\top} X_3 \int_{-h_2}^{-h_1}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}(s)dsd\theta \\
&\leq 0.5\widehat{h}\dot{x}^{\top}(t)X_3\dot{x}(t) - 2\lambda_3^2\widetilde{h}x^{\top}(t)X_3x(t) - 2\alpha V_6 \\
&+ 4\lambda_3^2h_m^{-1}x^{\top}(t)X_3\int_{t-h_2}^{t-h_1}x^{\top}(\theta)d\theta \\
&- 2\lambda_3^2\widehat{h}^{-1}\left(\int_{t-h_2}^{t-h_1}x(\theta)d\theta\right)^{\top} X_3 \int_{t-h_2}^{t-h_1}x(\theta)d\theta.
\end{aligned}
$$

Nhân cả hai vế của phương trình (2.1) với $2\dot{x}^\top(t)P$, ta có

$$\begin{aligned}
&-2\dot{x}^\top(t)P\dot{x}(t) + 2\dot{x}^\top(t)P(A_1 + BFC_1)x(t)\\
&\quad + 2\dot{x}^\top(t)P(A_2 + BFC_2)x(t-h(t))\\
&\quad + 2\dot{x}^\top(t)Pf(t,x,x_h,u) = 0
\end{aligned}$$

do đó

$$\begin{aligned}
0 \le\ & \dot{x}^\top(t)\left(-2P + 2PBN^{-1}B^\top P + PP\right)\dot{x}(t)\\
&+ 2\dot{x}^\top(t)PA_1x(t) + 2\dot{x}^\top(t)PA_2x(t-h(t))\\
&+ x^\top(t)\left(C_1^\top F^\top NFC_1 + E_1^\top E_1 + 2C_1^\top F^\top E_3^\top E_3FC_1\right)x(t)\\
&+ x^\top(t-h(t))\Big(C_2^\top F^\top NFC_2 + E_2^\top E_2\\
&+ 2C_2^\top F^\top E_3^\top E_3FC_2\Big)x(t-h(t)).
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Từ bất đẳng thức (2.10) và sử dụng điều kiện (2.5), ta có

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t,x_t) + 2\alpha V(t,x_t) \le\ & x^\top(t)\Big(PA_1 + A_1^\top P + U_1 + U_2 + Q_1 + 2\alpha P\\
&+ 2E_1^\top E_1 - \lambda_2S_1 - \lambda_3S_2 - 2\lambda_2^2X_1 - 2\lambda_3^2X_2 - 2\lambda_3^2\widetilde{h}X_3\\
&+ 2PBN^{-1}B^\top P + 2C_1^\top F^\top NFC_1 + 4C_1^\top F^\top E_3^\top E_3FC_1\\
&+ 2C_1^\top F^\top RFC_1 + PP\Big)x(t)\\
&+ x^\top(t-h_1)\left(-\lambda_2U_1 - \lambda_2S_1 - \lambda_3S_3\right)x(t-h_1)\\
&+ x^\top(t-h_2)\left(-\lambda_3U_2 - \lambda_3S_2 - \lambda_3S_3\right)x(t-h_2)\\
&+ \dot{x}^\top(t)\Big(h_1^2S_1 + h_2^2S_2 + (h_2-h_1)^2S_3 + 0.5h_1^2X_1 + 0.5h_2^2X_2\\
&\quad + 0.5\widehat{h}X_3 - 2P + 2PBN^{-1}B^\top P + PP\Big)\dot{x}(t)\\
&+ x^\top(t-h(t))\Big(2E_2^\top E_2 - 2\lambda_3S_3 + Q_2 + 2C_2^\top F^\top NFC_2\\
&\quad + 4C_2^\top F^\top E_3^\top E_3FC_2 + 2C_2^\top F^\top RFC_2\Big)x(t-h(t))\\
&- \lambda_8\left(\int_{t-h_1}^t x(\theta)d\theta\right)^\top X_1\int_{t-h_1}^t x(\theta)d\theta
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \lambda_9 \left(\int_{t-h_2}^{t} x(\theta) d\theta \right)^{\top} X_2 \int_{t-h_2}^{t} x(\theta) d\theta \\
&- \lambda_4 \left(\int_{t-h_2}^{t-h_1} x(\theta) d\theta \right)^{\top} X_3 \int_{t-h_2}^{t-h_1} x(\theta) d\theta \\
&+ 2x^{\top}(t) P A_2 x(t-h(t)) + 2\lambda_2 x^{\top}(t) S_1 x(t-h_1) \\
&+ 2\lambda_3 x^{\top}(t) S_2 x(t-h_2) + 2\lambda_3 x^{\top}(t-h(t)) S_3 x(t-h_1) \\
&+ 2\lambda_3 x^{\top}(t-h(t)) S_3 x(t-h_2) + 2\lambda_6 x^{\top}(t) X_1 \int_{t-h_1}^{t} x(\theta) d\theta \\
&+ 2\lambda_7 x^{\top}(t) X_2 \int_{t-h_2}^{t} x(\theta) d\theta \\
&+ 2\lambda_5 x^{\top}(t) X_3 \int_{t-h_2}^{t-h_1} x(\theta) d\theta \\
&+ 2\dot{x}^{\top}(t) P A_1 x(t) + 2\dot{x}^{\top}(t) P A_2 x(t-h(t)) \\
&- \left| g(t, x(t), x(t-h(t)), u(t)) \right| .
\end{aligned}
$$

Đặt $\zeta^{\top}(t) = \Big[x^{\top}(t), x^{\top}(t-h_1), x^{\top}(t-h_2), \dot{x}^{\top}(t), x^{\top}(t-h(t)),$

$$
\int_{t-h_1}^{t} x^{\top}(\theta) d\theta, \int_{t-h_2}^{t} x^{\top}(\theta) d\theta, \int_{t-h_2}^{t-h_1} x^{\top}(\theta) d\theta \Big],
$$

$$
\widetilde{W} = \begin{bmatrix}
\widetilde{W}_{11} & \lambda_2 S_1 & \lambda_3 S_2 & A_1^{\top} P & P A_2 & \lambda_6 X_1 & \lambda_7 X_2 & \lambda_5 X_3 \\
* & \widetilde{W}_{22} & 0 & 0 & \lambda_3 S_3 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & \widetilde{W}_{33} & 0 & \lambda_3 S_3 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & \widetilde{W}_{44} & P A_2 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & \widetilde{W}_{55} & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & \widetilde{W}_{66} & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & \widetilde{W}_{77} & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & \widetilde{W}_{88}
\end{bmatrix},
$$

với

$$\begin{aligned}
\widetilde{W}_{11} &= PA_1 + A_1^\top P + U_1 + U_2 + Q_1 + 2\alpha P + 2E_1^\top E_1 - \lambda_2 S_1 \\
&\quad - \lambda_3 S_2 - 2\lambda_2^2 X_1 - 2\lambda_3^2 X_2 - 2\lambda_3^2 \widetilde{h} X_3 \\
&\quad + 2PBN^{-1}B^\top P + 2C_1^\top F^\top NFC_1 \\
&\quad + 4C_1^\top F^\top E_3^\top E_3 FC_1 + 2C_1^\top F^\top RFC_1 + PP, \\
\widetilde{W}_{22} &= -\lambda_2 U_1 - \lambda_2 S_1 - \lambda_3 S_3, \widetilde{W}_{33} = -\lambda_3 U_2 - \lambda_3 S_2 - \lambda_3 S_3, \\
\widetilde{W}_{44} &= h_1^2 S_1 + h_2^2 S_2 + (h_2 - h_1)^2 S_3 + 0.5h_1^2 X_1 + 0.5h_2^2 X_2 \\
&\quad + 0.5\widehat{h} X_3 - 2P + 2PBN^{-1}B^\top P + PP, \\
\widetilde{W}_{55} &= 2E_2^\top E_2 - 2\lambda_3 S_3 + Q_2 + 2C_2^\top F^\top NFC_2 \\
&\quad + 4C_2^\top F^\top E_3^\top E_3 FC_2 + 2C_2^\top F^\top RFC_2, \\
\widetilde{W}_{66} &= -\lambda_8 X_1, \widetilde{W}_{77} = -\lambda_9 X_2, \widetilde{W}_{88} = -\lambda_4 X_3.
\end{aligned}$$

Ta thu được

$$\dot{V}(t, x_t) + 2\alpha V(t, x_t) \le \zeta^\top(t) \widetilde{W} \zeta(t) - |g(t, x(t), x(t-h(t)), u(t))| \,. \tag{2.11}$$

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức ma trận $\widetilde{W} < 0$ tương đương với điều kiện (2.7) được thỏa mãn. Bằng cách sử dụng Bổ đề Schur cho các thành phần phi tuyến $\widetilde{W_{11}}, \widetilde{W_{44}}, \widetilde{W_{55}}$, khi đó điều kiện $\widetilde{W} < 0$ tương đương với điều kiện

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ * & W_3 \end{bmatrix} < 0,$$

trong đó

$$W_1 = \begin{bmatrix}
W_{11} & \lambda_2 S_1 & \lambda_3 S_2 & A_1^\top P & PA_2 & \lambda_6 X_1 & \lambda_7 X_2 & \lambda_5 X_3 \\
* & \widetilde{W}_{22} & 0 & 0 & \lambda_3 S_3 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & \widetilde{W}_{33} & 0 & \lambda_3 S_3 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & W_{44} & PA_2 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & W_{55} & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & \widetilde{W}_{66} & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & \widetilde{W}_{77} & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & \widetilde{W}_{88}
\end{bmatrix},$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} W_2^1 & 0 \\ 0 & W_2^2 \end{bmatrix}, \qquad W_2^2 = \begin{bmatrix} C_2^\top F^\top & C_2^\top F^\top & C_2^\top F^\top \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$W_2^1 = \begin{bmatrix} PB & C_1^\top F^\top & C_1^\top F^\top & C_1^\top F^\top & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & PB & P \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} W_3 = \operatorname{diag}\Big(& -0.5N, -0.5N^{-1}, -0.25(E_3^\top E_3)^{-1}, -0.5R^{-1}, -I, \\ & -0.5N, -I, -0.5N^{-1}, -0.25(E_3^\top E_3)^{-1}, -0.5R^{-1}\Big), \end{aligned}$$

với

$$\begin{aligned} W_{11} &= PA_1 + A_1^\top P + U_1 + U_2 + Q_1 + 2\alpha P + 2E_1^\top E_1 - \lambda_2 S_1 - \lambda_3 S_2 \\ &\quad - 2\lambda_2^2 X_1 - 2\lambda_3^2 X_2 - 2\lambda_3^2 \widetilde{h} X_3, \\ W_{44} &= h_1^2 S_1 + h_2^2 S_2 + (h_2 - h_1)^2 S_3 + 0.5h_1^2 X_1 + 0.5h_2^2 X_2 + 0.5\widehat{h} X_3 - 2P, \\ W_{55} &= 2E_2^\top E_2 - 2\lambda_3 S_3 + Q_2. \end{aligned}$$

Xác định ma trận Δ như sau

$$\Delta = \begin{bmatrix} I_n & 0 & BN & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{7n+m} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{2n+m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N \end{bmatrix}.$$

Do ma trận Δ là chính quy, ta có $\Omega = \Delta W \Delta^\top < 0$, với

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 \\ * & \Omega_3 \end{bmatrix} < 0,$$

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \lambda_2 S_1 & \lambda_3 S_2 & A_1^\top P & PA_2 & \lambda_6 X_1 & \lambda_7 X_2 & \lambda_5 X_3 \\ * & \widetilde{W}_{22} & 0 & 0 & \lambda_3 S_3 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \widetilde{W}_{33} & 0 & \lambda_3 S_3 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & W_{44} & PA_2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & W_{55} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \widetilde{W}_{66} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \widetilde{W}_{77} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & \widetilde{W}_{88} \end{bmatrix},$$

$$\Omega_2 = \begin{bmatrix} \Omega_2^1 & 0 \\ 0 & \Omega_2^2 \end{bmatrix},$$

$$\Omega_2^1 = \begin{bmatrix} PB & C_1^\top F^\top N - 0.5BN & C_1^\top F^\top N & C_1^\top F^\top N & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & PB & P \end{bmatrix},$$

$$\Omega_2^2 = \begin{bmatrix} C_2^\top F^\top N & C_2^\top F^\top N & C_2^\top F^\top N \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \Omega_3 = {} & \operatorname{diag}\Big(-0.5N, -0.5N, -0.25N(E_3^\top E_3)^{-1}N, -0.5NR^{-1}N, -I, \\ & -0.5N, -I, -0.5N, -0.25N(E_3^\top E_3)^{-1}N, -0.5NR^{-1}N \Big), \\ \Omega_{11} = {} & PA_1 + A_1^\top P + U_1 + U_2 + Q_1 + 2\alpha P + 2E_1^\top E_1 - \lambda_2 S_1 - \lambda_3 S_2 \\ & - 2\lambda_2^2 X_1 - 2\lambda_3^2 X_2 - 2\lambda_3^2 \widetilde{h} X_3 \\ & + BNFC_1 + C_1^\top F^\top N B^\top - 0.5BNB^\top. \end{aligned}$$

Đặt $F^\top N = K^\top$, do đó $F = N^{-1}K$. Từ $-(N-aI)^2 \leq 0$, ta có

$$-N^2 \leq -2aN + a^2 I.$$

Mặt khác, ta có

$$NR^{-1}N \geq \lambda_{\min}(R^{-1})N^2 \text{ và } N(E_3^\top E_3)^{-1}N \geq \lambda_{\min}((E_3^\top E_3)^{-1})N^2.$$

Do đó, ta thu được

$$-0.5NR^{-1}N \leq -\delta_1 aN + 0.5\delta_1 a^2 I,$$

và

$$-0.25N(E_3^\top E_3)^{-1}N \leq -0.5\delta_2 aN + 0.25\delta_2 a^2 I,$$

với $\delta_1 = \lambda_{\min}(R^{-1}),\ \delta_2 = \lambda_{\min}((E_3^\top E_3)^{-1})$. Do đó điều kiện $\Omega < 0$ tương đương với

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Pi_1 & \Pi_2 \\ * & \Pi_3 \end{bmatrix} < 0.$$

Chính vì vậy, nếu bất đẳng thức ma trận tuyến tính (2.7) thỏa mãn, hay $\Pi < 0$, thì $\widetilde{W} < 0$ và từ bất đẳng thức (2.11) ta thu được

$$\dot{V}(t, x(t)) + 2\alpha V(t, x(t)) < 0,$$

hay tương đương

$$V(t, x(t)) \leq V(0, x(0))e^{-2\alpha t},\ \ \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

Kết hợp với điều kiện (2.9), ta có

$$\lambda\|x(t,\phi)\|^2 \leq V(t, x(t)) \leq V(0, x(0))e^{-2\alpha t} \leq \Lambda e^{-2\alpha t}\|\phi\|_{C^1}^2,$$

do đó nghiệm $x(t,\phi)$ bất kì của hệ (2.1) thỏa mãn đánh giá

$$\|x(t,\phi)\| \leq \sqrt{\frac{\Lambda}{\lambda}} e^{-\alpha t}\|\phi\|_{C^1},\ \ \forall t \geq 0,$$

điều này chứng tỏ hệ đóng là $\alpha-$ổn định. Mặt khác, từ (2.11) ta thu được

$$\dot{V}(t, x_t) < -\left|g(t, x(t), x(t-h(t)), u(t))\right|.$$

Lấy tích phân hai vế của bất đẳng thức trên từ 0 đến s, và cho $s \to \infty$ ta có

$$\int_0^\infty |g(t, x(t), x(t-h(t)), u(t))|\, dt < V(0, x_0) = \Lambda\|\phi\|_{C^1}^2 = J^*.$$

Định lí được chứng minh hoàn toàn. □

Nhận xét 2.1.5. Định lí 2.1.4 cung cấp cho ta điều kiện đủ để thiết kế điều khiển ngược thông qua thông tin phản hồi đầu ra cho hệ (2.1) dưới dạng các bất đẳng thức ma trận tuyến tính (LMIs), để hệ đóng là $\alpha-$ổn định mũ. Chú ý rằng, hàm trễ biến thiên là không khả vi, do đó, các phương pháp sử dụng trong [34, 36, 51, 52] là không sử dụng được cho hệ (2.1). Tính tương thích của điều kiện dạng LMIs có thể kiểm tra bằng hộp công cụ LMIs Toolbox trong Matlab (xem [18]).

Nhận xét 2.1.6. Theo hiểu biết của chúng tôi thì các nghiên cứu về bài toán đảm bảo giá trị điều khiển mới chỉ nghiên cứu cho hệ tuyến tính có trễ hằng, hệ tuyến tính trễ biến thiên (trễ hỗn hợp), và có rất ít các nghiên cứu về bài toán đảm bảo giá trị điều khiển cho hệ phi tuyến với trễ biến thiên xuất hiện trên cả hàm trạng thái và hàm quan sát.

Các khó khăn khi nghiên cứu bài toán là:

- Hàm trễ dạng khoảng, không khả vi, và hàm trễ xuất hiện ở cả hàm trạng thái và hàm quan sát.
- Hệ điều khiển phi tuyến.
- Xét bài toán đảm bảo giá trị điều khiển cho hệ điều khiển thông qua thông tin phản hồi đầu ra.

Sau đây chúng tôi đưa ra một ví dụ số minh họa cho Định lí 2.1.4.

Ví dụ 2.1.7. Xét hệ điều khiển có trễ biến thiên trên biến trạng thái và biến quan sát (2.1), trong đó

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.2 & -2.6 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} -1.8 & 0.5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0.1 & -1.2 \\ 2 & 1.5 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.5 \end{bmatrix}^\top,\ C_2 = \begin{bmatrix} -0.01 \\ 0.03 \end{bmatrix}^\top,\ E_1 = \begin{bmatrix} 0.00001 & 0 \\ 0 & 0.00005 \end{bmatrix},$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0.00002 & 0 \\ 0 & 0.00003 \end{bmatrix},\ E_3 = \begin{bmatrix} 0.00001 & 0 \\ 0 & 0.00002 \end{bmatrix}.$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0.05 & 1 \\ 1 & 0.0001 \end{bmatrix},\quad Q_2 = \begin{bmatrix} 0.001 & 0.1 \\ 0.1 & 0.0004 \end{bmatrix},\quad R = \begin{bmatrix} 0.0005 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{bmatrix}.$$

với

$$h(t) = \begin{cases} 0.1 + 0.3\sin^2(t), & t \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} (2k\pi, (2k+1)\pi) \\ 0.1, & t \notin \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} (2k\pi, (2k+1)\pi) \end{cases}$$

Chú ý rằng hàm trễ $h(t)$ là hàm không khả vi, do đó, các tiêu chuẩn được đề xuất trong các công trình [34, 36, 51, 52] là không áp dụng được cho lớp hệ xét trong công trình này. Cho $\alpha = 0.2,\ a = 10^{-6}$ và $h_1 = 0.1, h_2 = 0.4$, sử dụng hộp công cụ bất đẳng thức ma trận tuyến tính trong MATLAB, ta tìm được một nghiệm của bất đẳng thức ma trận (2.7) trong Định lí 2.1.4 là

$$P = \begin{bmatrix} 0.2347 & -0.0094 \\ -0.0094 & 0.1183 \end{bmatrix},\ U_1 = \begin{bmatrix} 0.7960 & -0.0444 \\ -0.0444 & 0.2523 \end{bmatrix},$$

$$U_2 = \begin{bmatrix} 2.1737 & -0.2410 \\ -0.2410 & 1.0626 \end{bmatrix},\ S_1 = \begin{bmatrix} 3.4701 & -0.3213 \\ -0.3213 & 1.5690 \end{bmatrix},$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} 0.0533 & -0.0021 \\ -0.0021 & 0.0169 \end{bmatrix},\ S_3 = \begin{bmatrix} 1.2527 & -0.1105 \\ -0.1105 & 0.6195 \end{bmatrix},$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 11.2057 & 1.6228 \\ 1.6228 & 4.8976 \end{bmatrix},\ X_2 = \begin{bmatrix} 0.1667 & -0.0077 \\ -0.0077 & 0.0495 \end{bmatrix},$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 0.1777 & -0.0082 \\ -0.0082 & 0.0528 \end{bmatrix},\ N = \begin{bmatrix} 5.8793 & 1.8706 \\ 1.8706 & 6.2676 \end{bmatrix},$$

$$K = 10^{-3} * \begin{bmatrix} -0.8202 \\ -0.4877 \end{bmatrix},\ F = 10^{-3} * \begin{bmatrix} -0.1268 \\ -0.0400 \end{bmatrix}.$$

Do đó, hệ điều khiển (2.1) là 0.2−ổn định hóa được dạng mũ dưới sự tác động của bộ điều khiển thông tin phản hồi đầu ra cho hệ được xác định bởi công thức

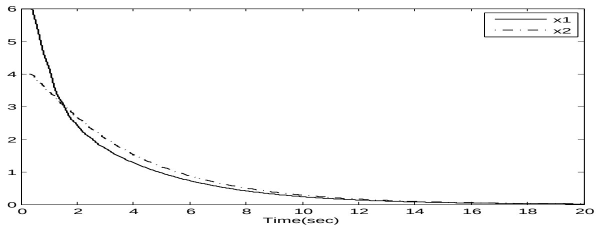
$$u(t) = 10^{-4} \begin{bmatrix} -0.1268 & 0.6339 \\ -0.0400 & 0.1999 \end{bmatrix} x(t) + 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.1268 & -0.3803 \\ 0.0400 & -0.1199 \end{bmatrix} x(t - h(t)).$$

Ngoài ra, ta có nghiệm bất kì $x(t,\phi)$ của hệ đóng thỏa mãn đánh giá sau

$$\|x(t,\phi)\| \le 3.2868 e^{-0.2t} \|\phi\|_{C^1},\ \ \forall t \ge 0,$$

và giá trị đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ điều khiển (2.1) là:

$$J^* = 1.2701 \|\phi\|^2_{C^1}.$$



Hình 2.1: Quỹ đạo của $x_1(t)$ và $x_2(t)$

2.2 Hệ phương trình vi phân tuyến tính không chắc chắn

Xét hệ phương trình điều khiển tuyến tính không chắc chắn có trễ biến thiên

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= (A_1 + L_1 M_1(t) H_1)\, x(t) + (A_2 + L_2 M_2(t) H_2)\, x(t-h(t)) \\ & \qquad + (B + L_3 M_3(t) H_3)\, u(t), \\ y(t) &= C_1 x(t) + C_2 x(t-h(t)), \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in [-h_2, 0], \end{cases} \tag{2.12}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái; $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là véc tơ điều khiển; $y(t) \in \mathbb{R}^p$ là véc tơ quan sát; $A_1, A_2, L_1, L_2, L_3, H_1, H_2, \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B, H_3 \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^{p\times n}$ là các ma trận thực cho trước với số chiều thích hợp; H_3 là ma trận hạng cột đầy đủ, và $M_1(t), M_2(t), M_3(t)$ là các ma trận phụ thuộc thời gian thỏa mãn

$$M_i^\top(t) M_i(t) \le I, \quad i = 1, 2, 3. \tag{2.13}$$

hàm trễ $h(t)$ là hàm liên tục thỏa mãn điều kiện (2.2).

Ta xét hàm chi phí sau

$$J(u) = \int_0^\infty g(t, x(t), x(t-h(t)), u(t))dt, \tag{2.14}$$

với $g(t,x,y,u) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^+$ là hàm liên tục được cho bởi

$$|g(t,x,x_h,u)| \leq x^\top Q_1 x + x_h^\top Q_2 x_h + u^\top R u, \tag{2.15}$$

trong đó $\forall t \in \mathbb{R}^+, x, x_h \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$, $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $R \in \mathbb{R}^{m\times m}$ là các ma trận thực, đối xứng, xác định dương cho trước.

Mục đích chính của mục này là ta sẽ tìm số J^* và phản hồi đầu ra $u(t) = Fy(t)$, $F \in \mathbb{R}^{m\times p}$ sao cho hệ đóng

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= (A_1 + L_1M_1(t)H_1 + BFC_1 + L_3M_3(t)H_3FC_1)\,x(t) \\ &\qquad + (A_2 + L_2M_2(t)H_2 + BFC_2 + L_3M_3(t)H_3FC_1)\,x(t-h(t)), \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in [-h_2, 0], \end{cases} \tag{2.16}$$

là ổn định hóa và hàm chi phí (2.4) thỏa mãn điều kiện $J(u) \leq J^*$.

Xét hệ điều khiển (2.1) với nhiễu phi tuyến $f(t, x(t), x(t-h(t)), u(t))$ chứa các tham số không chắc chắn có dạng

$$f(t, x(t), x(t-h(t)), u(t)) = \Delta A_1(t)x(t) + \Delta A_2(t)x(t-h(t)) + \Delta B(t)u(t), \tag{2.17}$$

với $\Delta A_1(t) = L_1M_1(t)H_1$, $\Delta A_2(t) = L_2M_2(t)H_2$, $\Delta B(t) = L_3M_3(t)H_3$, và $L_1, L_2, L_3, H_1, H_2, H_3$ là các ma trận thực cho trước với số chiều thích hợp, H_3 là ma trận hạng cột đầy đủ, và $M_1(t), M_2(t), M_3(t)$ là các ma trận phụ thuộc thời gian thỏa mãn (3.8). Chúng ta biến đổi hệ điều khiển (2.1) về hệ (2.12). Sau đó chúng ta sử dụng phương pháp hàm Lyapunov-Krasovskii như trong Định lí 2.1.4, chúng ta thu được điều kiện ổn định mũ cho hệ điều khiển không chắc chắn (2.12) thông qua thông tin phản hồi đầu ra như trong Hệ quả 2.2.1.

Cho số $\alpha > 0$, các ma trận đối xứng, xác định dương $P, U_1, U_2, S_1, S_2, S_3, X_1, X_2, X_3, N$, và ma trận tự do K. Trước khi đưa ra kết quả chính, ta cần một số kí hiệu sau:

$$\delta_3 = \lambda_{\min}((H_3^\top H_3)^{-1}),$$

$$\Gamma_{11} = PA_1 + A_1^\top P + U_1 + U_2 + Q_1 + 2\alpha P + 2H_1^\top H_1 - \lambda_2 S_1 - \lambda_3 S_2$$
$$- 2\lambda_2^2 X_1 - 2\lambda_3^2 X_2 - 2\lambda_3^2 \widetilde{h} X_3 + BKC_1 + C_1^\top K^\top B^\top - 0.5BNB^\top,$$

$$\Gamma_{22} = -\lambda_2 U_1 - \lambda_2 S_1 - \lambda_3 S_3, \Gamma_{33} = -\lambda_3 U_2 - \lambda_3 S_2 - \lambda_3 S_3,$$

$$\Gamma_{44} = h_1^2 S_1 + h_2^2 S_2 + (h_2 - h_1)^2 S_3 + 0.5h_1^2 X_1 + 0.5h_2^2 X_2 + 0.5\widehat{h} X_3 - 2P,$$

$$\Gamma_{55} = 2H_2^\top H_2 - 2\lambda_3 S_3 + Q_2, \Gamma_{66} = -\lambda_8 X_1, \Gamma_{77} = -\lambda_9 X_2,$$

$$\Gamma_{88} = -\lambda_4 X_3, \Gamma_{1,10} = C_1^\top K^\top - 0.5BN.$$

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \lambda_2 S_1 & \lambda_3 S_2 & A_1^\top P & PA_2 & \lambda_6 X_1 & \lambda_7 X_2 & \lambda_5 X_3 \\ * & \Gamma_{22} & 0 & 0 & \lambda_3 S_3 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Gamma_{33} & 0 & \lambda_3 S_3 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Gamma_{44} & PA_2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Gamma_{55} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \Gamma_{66} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \Gamma_{77} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & \Gamma_{88} \end{bmatrix},$$

$\Gamma_2 = [\Gamma_1^1, \Gamma_2^2]$, ở đó

$$\Gamma_1^1 = \begin{bmatrix} PB & \Gamma_{1,10} & C_1^\top K^\top & C_1^\top K^\top & PL_1 & PL_2 & PL_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_2^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ PB & PL_1 & PL_2 & PL_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_2^\top K^\top & C_2^\top K^\top & C_2^\top K^\top \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \Gamma_3 = \mathrm{diag}\Big(& -0.5N, -0.5N, -\delta_3 aN + 0.5\delta_3 a^2 I, -\delta_1 aN + 0.5\delta_1 a^2 I, \\ & -I, -I, -0.5I, -0.5N, -I, -I, -0.5I, -0.5N, -\delta_3 aN \\ & + 0.5\delta_3 a^2 I, -\delta_1 aN + 0.5\delta_1 a^2 I\Big). \end{aligned}$$

Hệ quả 2.2.1. *Cho số $a > 0, \alpha > 0$. Xét hệ điều khiển tuyến tính không chắc chắn (2.12) với hàm chi phí (2.4). Giả sử các ma trận hệ số của hệ (2.12) thỏa mãn điều kiện: tồn tại các ma trận đối xứng xác định dương $P, U_1, U_2, S_1, S_2, S_3, X_1, X_2, X_3, N$ và ma trận K, sao cho bất đẳng thức ma trận tuyến tính sau được thỏa mãn*

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ * & \Gamma_3 \end{bmatrix} < 0. \tag{2.18}$$

Khi đó $u(t) = N^{-1}Ky(t)$ là hàm điều khiển đảm bảo chi phí thông qua thông tin phản hồi đầu ra cho hệ (2.12), và giá trị đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ (2.12) là

$$J^* = \Lambda \|\phi\|^2_{C^1}.$$

Sau đây chúng tôi đưa ra một ví dụ số minh họa cho Hệ quả 2.2.1.

Ví dụ 2.2.2. Xét hệ điều khiển tuyến tính không chắc chắn có trễ biến thiên trên biến trạng thái và biến quan sát (2.12), trong đó

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.1 \\ 0 & -1.5 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} -1.6 & 0 \\ 0.1 & 1.8 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.1 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.8 \end{bmatrix}^T,\ C_2 = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.5 \end{bmatrix}^T,\ L_1 = \begin{bmatrix} 0.001 & 1 \\ 0.1 & 0.0002 \end{bmatrix},$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 0.002 & 0 \\ 0.3 & 0.005 \end{bmatrix}, \; L_3 = \begin{bmatrix} 0.002 & 0.1 \\ 0 & 0.03 \end{bmatrix},$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0.001 & 1 \\ 0.1 & 0.02 \end{bmatrix}, \; H_2 = \begin{bmatrix} 0.002 & 0.1 \\ 0.2 & 0.06 \end{bmatrix}, \; H_3 = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.003 \end{bmatrix},$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0.01 & 1 \\ 1 & 0.002 \end{bmatrix}, \; Q_2 = \begin{bmatrix} 0.001 & 1 \\ 1 & 0.004 \end{bmatrix}, \; R = \begin{bmatrix} 0.005 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{bmatrix}.$$

Cho $\alpha = 0.2,\ a = 10^{-6},\ h_1 = 0.1,\ h_2 = 0.4$, và sử dụng hộp công cụ bất đẳng thức ma trận tuyến tính trong MATLAB, ta tìm được một nghiệm của bất đẳng thức ma trận (3.3) trong Định lí 2.2.1 là:

$$P = \begin{bmatrix} 0.3892 & 0.1406 \\ 0.1406 & 4.2994 \end{bmatrix}, \qquad U_1 = \begin{bmatrix} 0.8648 & 0.9289 \\ 0.9289 & 17.2363 \end{bmatrix},$$

$$U_2 = \begin{bmatrix} 2.7941 & 0.6740 \\ 0.6740 & 21.3270 \end{bmatrix}, \qquad S_1 = \begin{bmatrix} 5.1839 & 0.1788 \\ 0.1788 & 63.7443 \end{bmatrix},$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} 0.0853 & -0.0070 \\ -0.0070 & 1.5270 \end{bmatrix}, \qquad S_3 = \begin{bmatrix} 1.9838 & 0.8964 \\ 0.8964 & 23.6742 \end{bmatrix},$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 20.1463 & 5.0446 \\ 5.0446 & 71.5662 \end{bmatrix}, \qquad X_2 = \begin{bmatrix} 0.2082 & 0.0334 \\ 0.0334 & 4.4634 \end{bmatrix},$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 0.2212 & 0.0357 \\ 0.0357 & 4.7579 \end{bmatrix}, \qquad N = 10^3 * \begin{bmatrix} 4.1222 & -0.2832 \\ -0.2832 & 3.7031 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} -0.0006 \\ -0.0011 \end{bmatrix}, \qquad F = 10^{-6} * \begin{bmatrix} -0.1663 \\ -0.2993 \end{bmatrix}.$$

Do đó, hệ (2.12) là 0.2 - ổn định hóa dưới dạng mũ và hàm điều khiển phản hồi đầu ra cho hệ được xác định bởi công thức

$$u(t) = 10^{-6} \begin{bmatrix} -0.1663 & 0.1330 \\ -0.2993 & 0.2395 \end{bmatrix} x(t) + 10^{-6} \begin{bmatrix} 0.0166 & -0.0832 \\ 0.0299 & -0.1497 \end{bmatrix} x(t - h(t)).$$

Ngoài ra, ta có nghiệm bất kì $x(t, \phi)$ của hệ đóng thỏa mãn đánh giá sau

$$\|x(t, \phi)\| \le 6.4140 e^{-0.2t} \|\phi\|_{C^1}, \ \ \forall t \ge 0,$$

và giá trị đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ điều khiển (2.12) là:

$$J^* = 15.8027 \|\phi\|^2_{C^1}.$$

2.3 Kết luận Chương 2

Chương 2 trình bày kết quả nghiên cứu bài toán đảm bảo giá trị tối ưu cho một số lớp hệ phương trình vi phân có trễ biến thiên liên tục dạng khoảng. Kết quả đạt được như sau:

- Thiết lập điều kiện đủ để thiết kế hàm điều khiển phản hồi đầu ra cho lớp hệ phương trình vi phân có trễ biến thiên liên tục dạng khoảng (Định lí 2.1.4).

- Áp dụng giải bài toán đảm bảo giá trị điều khiển cho lớp hệ điều khiển tuyến tính không chắc chắn trễ biến thiên (Hệ quả 2.2.1).

Chương 3

BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN H_∞ TRONG THỜI GIAN HỮU HẠN

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn của một lớp hệ điều khiển phi tuyến có nhiễu bị chặn và trễ biến thiên liên tục dạng khoảng thông qua thông tin phản hồi đầu ra. Dựa vào phương pháp hàm Lyapunov-Krasovskii, bất đẳng thức tích phân Jensen mở rộng và các bất đẳng thức ma trận tuyến tính, chúng tôi xây dựng được luật điều khiển ngược thông qua thông tin phản hồi đầu ra nhằm đảm bảo cho tính ổn định của hệ đóng trong thời gian hữu hạn. Các kết quả chính trong chương này dựa vào bài báo [2] trong danh mục các công trình khoa học của tác giả.

3.1 Hệ phương trình vi phân phi tuyến có nhiễu bị chặn và trễ biến thiên

Xét phương trình điều khiển phi tuyến có trễ biến thiên trên biến trạng thái

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_1x(t) + A_2x(t-h(t)) + Bu(t) + Gw(t) \\ \qquad\qquad +f(t, x(t), x(t-h(t)), u(t), w(t)), \\ z(t) = C_1x(t) + C_2x(t-h(t)), \quad t \geq 0, \\ x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-h_2, 0], \end{cases} \tag{3.1}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, z(t) \in \mathbb{R}^p$ lần lượt là các hàm trạng thái, hàm điều khiển, và hàm quan sát đầu ra; $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, G \in \mathbb{R}^{n\times r}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}^{p\times n}$ là các ma trận thực cho trước với số chiều thích hợp.

Hàm trễ $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ là hàm liên tục và thỏa mãn

$$0 \leq h_1 \leq h(t) \leq h_2, \quad \forall t \geq 0, \tag{3.2}$$

trong đó h_1, h_2 là hai hằng số cho trước. Hàm điều kiện ban đầu $\varphi \in C^1([-h_2, 0], \mathbb{R}^n)$ và hàm nhiễu $w(t)$ là hàm liên tục thỏa mãn

$$\int_0^T w(t)^\top w(t)\mathrm{d}t \leq d. \tag{3.3}$$

Hàm phi tuyến $f(t, x, y, u, w)$ thỏa mãn điều kiện tăng trưởng dưới tuyến tính, tức là tồn tại các số thực không âm a_1, a_2, a_3, a_4 sao cho với mọi $x, y \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, w \in \mathbb{R}^r$, ta có

$$\|f\|^2 \leq a_1\|x\|^2 + a_2\|y\|^2 + a_3\|u\|^2 + a_4\|w\|^2. \tag{3.4}$$

Ngoài ra, hàm $f(t, x, y, u, w)$ là liên tục theo t và Lipschitz địa phương theo (x, y, u, w). Dưới giả thiết về hàm trễ $h(\cdot), f(\cdot)$ và hàm giá trị ban đầu $\varphi(t)$, hệ (2.1) tồn tại và duy nhất nghiệm xác định trên $[0, +\infty)$.

Định nghĩa 3.1.1 (Ổn định trong thời gian hữu hạn)**.** Cho các số dương $T, c_1, c_2, c_2 > c_1$, và ma trận xác định dương R. Hệ phương trình (3.1) được gọi là ổn định trong thời gian hữu hạn (FTS) tương ứng với (c_1, c_2, T, R), nếu tồn tại một điều khiển ngược thông tin phản hồi đầu ra $u(t) = Fz(t)$ sao cho điều kiện sau thỏa mãn với mọi nhiễu thỏa mãn (3.3) với mọi $t \in [0, T]$

$$\max\left\{\sup_{-h_2\leq s\leq 0} \varphi(s)^\top R\varphi(s), \sup_{-h_2\leq s\leq 0} \dot{\varphi}(s)^\top R\dot{\varphi}(s)\right\} \leq c_1 \Longrightarrow x(t)^\top Rx(t) \leq c_2.$$

Định nghĩa 3.1.2 (Điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn)**.** Cho $T > 0, \gamma > 0$. Bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn cho hệ (3.1) có nghiệm nếu

(i) Hệ (3.1) là ổn định trong thời gian hữu hạn tương ứng với (c_1, c_2, T, R).

(ii) Tồn tại một số $c_0 > 0$ sao cho

$$\sup \frac{\int_0^T \|z(t)\|^2\mathrm{d}t}{c_0\|\varphi\|^2_{C^1} + \int_0^T \|w(t)\|^2\mathrm{d}t} \leq \gamma, \tag{3.5}$$

trong đó supremum chạy trên $\varphi \in C^1([-h_2, 0], \mathbb{R}^n)$ và nhiễu $w(.)$ thỏa mãn (3.3).

Trước khi giới thiệu một điều kiện đủ cho sự tồn tại của điều khiển H_∞ cho hệ (3.1), chúng tôi sử dụng một số kí hiệu sau

$$
\begin{aligned}
&\overline{P} = R^{1/2}PR^{1/2}, \overline{U_1} = R^{1/2}U_1R^{1/2}, \overline{U_2} = R^{1/2}U_2R^{1/2}, \overline{X_1} = R^{1/2}X_1R^{1/2},\\
&\qquad \overline{X_2} = R^{1/2}X_2R^{1/2}, \overline{S} = R^{1/2}SR^{1/2},\\
&\alpha_1 = \lambda_{\min}(P), \ \ \alpha_2 = \lambda_{\max}(P) + h_1\lambda_{\max}(U_1) + h_2\lambda_{\max}(U_2) + 0.5h_1^3\lambda_{\max}(X_1)\\
&\qquad + 0.5h_2^3\lambda_{\max}(X_2) + 0.5(h_2-h_1)^2(h_2+h_1)\lambda_{\max}(S),\\
&\alpha_3 = \lambda_{\max}(\overline{P}) + h_1\lambda_{\max}(\overline{U_1}) + h_2\lambda_{\max}(\overline{U_2}) + 0.5h_1^3\lambda_{\max}(\overline{X_1}) + 0.5h_2^3\lambda_{\max}(\overline{X_2})\\
&\qquad + 0.5(h_2-h_1)^2(h_2+h_1)\lambda_{\max}(\overline{S_2}), \ \ \Psi^1 = (\Psi^1_{ij})_{11\times 11}, \ \ \Psi^2 = (\Psi^2_{ij})_{6\times 11},\\
&\Psi^3 = \mathrm{diag}\left(-0.5N, -0.5N, -\frac{1}{a_3}N + \frac{1}{2a_3}I, -\frac{1}{a_3}N + \frac{1}{2a_3}I, -0.5N, -0.5N\right),\\
&\Psi^1_{11} = \overline{P}A_1 + A_1^\top\overline{P} + \overline{U_1} + \overline{U_2} + a_1I + \eta C_1^\top C_1 - 4\overline{X_1} - 4\overline{X_2} + BKC_1\\
&\qquad + C_1^\top K^\top B^\top - 0.5BNB^\top,\\
&\Psi^1_{22} = -\overline{U_1} - 4\overline{X_1} - 4\overline{S}, \Psi^1_{33} = -\overline{U_2} - 4\overline{X_2} - 4\overline{S},\\
&\Psi^1_{44} = -8\overline{S} + a_2I + \eta C_2^\top C_2, \Psi^1_{55} = h_1^2\overline{X_1} + h_2^2\overline{X_2} + (h_2-h_1)^2\overline{S} - 2Q,\\
&\Psi^1_{66} = a_4I - \gamma\eta I, \Psi^1_{77} = -I, \Psi^1_{88} = -12\overline{X_1},\\
&\Psi^1_{99} = -12\overline{X_2}, \Psi^1_{10,10} = \Psi^1_{11,11} = -12\overline{S},\\
&\Psi^1_{12} = -2\overline{X_1}, \Psi^1_{13} = -2\overline{X_2}, \Psi^1_{14} = \overline{P}A_2 + \eta C_1^\top C_2, \Psi^1_{15} = A_1^\top Q,\\
&\Psi^1_{16} = \overline{P}G, \Psi^1_{17} = \overline{P}, \Psi^1_{18} = \Psi^1_{28} = 6\overline{X_1}, \Psi^1_{19} = \Psi^1_{39} = 6\overline{X_2},\\
&\Psi^1_{24} = \Psi^1_{34} = -2\overline{S}, \Psi^1_{45} = A_2^\top Q, \Psi^1_{56} = QG,\\
&\Psi^1_{2,11} = \Psi^1_{3,10} = \Psi^1_{4,10} = \Psi^1_{4,11} = 6\overline{S}, \Psi^1_{57} = Q,\\
&\text{và } \Psi^1_{ij} = 0 \text{ trong trường hợp còn lại},\\
&\Psi^2_{11} = \overline{P}B, \ \Psi^2_{12} = C_1^\top K^\top - 0.5BN, \ \Psi^2_{13} = C_1^\top K^\top, \ \Psi^2_{44} = \Psi^2_{45} = C_2^\top K^\top,\\
&\Psi^2_{56} = QB, \quad \Psi^2_{ij} = 0 \text{ trong trường hợp còn lại}.
\end{aligned}
$$

Định lí sau cho ta một điều kiện đủ cho sự tồn tại một bộ điều khiển thông qua thông tin phản hồi đầu ra của hệ điều khiển (3.1) với trễ biến thiên.

Định lí 3.1.3. *Cho $T, c_1, c_2 > 0$ và ma trận xác định dương R. Bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn thông qua thông tin phản hồi đầu ra cho hệ (3.1) có nghiệm nếu tồn tại số dương η, và các ma trận đối xứng xác định dương $P, U_1, U_2, X_1, X_2, S, N$ và các ma trận Q, K sao cho bất đẳng thức ma trận tuyến tính sau thỏa mãn*

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi^1 & \Psi^2 \\ * & \Psi^3 \end{bmatrix} < 0, \tag{3.6}$$

$$\alpha_2 c_1 + \gamma\eta d \le \alpha_1 c_2 e^{-\eta T}. \tag{3.7}$$

Khi đó hàm điều khiển ngược thông qua thông tin phản hồi đầu ra được xác định: $u(t) = N^{-1}Kz(t)$, $t \ge 0$.

Chứng minh. Xét hàm Lyapunov - Krasovskii cho hệ điều khiển (3.1) như sau

$$V(t, x_t) = \sum_{i=1}^{4} V_i(t, x_t),$$

trong đó

$$\begin{aligned}
V_1(t, x_t) =& e^{\eta t} x(t)^\top \overline{P} x(t),\\
V_2(t, x_t) =& \sum_{i=1}^{2} e^{\eta t} \int_{t-h_i}^{t} x(s)^\top \overline{U_i} x(s) \mathrm{d}s,\\
V_3(t, x_t) =& \sum_{i=1}^{2} h_i e^{\eta t} \int_{-h_i}^{0} \int_{t+s}^{t} \dot{x}(\tau)^\top \overline{X_i} \dot{x}(\tau) \mathrm{d}\tau \mathrm{d}s,\\
V_4(t, x_t) =& (h_2 - h_1) e^{\eta t} \int_{-h_2}^{-h_1} \int_{t+s}^{t} \dot{x}(\tau)^\top \overline{S} \dot{x}(\tau) \mathrm{d}\tau \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Dễ dàng kiểm tra được

$$\alpha_1 x(t)^\top R x(t) \le V(t, x_t),\ \forall t : 0 \le t \le T, \tag{3.8}$$

$$V(0, x_0) \le \alpha_2 \sup_{-h_2 \le s \le 0} \left\{ x(s)^\top R x(s), \dot{x}(s)^\top R \dot{x}(s) \right\} \le \alpha_2 c_1, \tag{3.9}$$

$$V(0, x_0) \le \alpha_3 \|\varphi\|^2, \tag{3.10}$$

Lấy đạo hàm của $V_i(t, x_t)$, $i = 1, \dots, 4$ theo t dọc theo nghiệm của hệ đóng (3.1), ta được

$$\dot{V_1}(t, x_t) \le \eta V_1$$

$$
\begin{aligned}
&+ e^{\eta t}\Big(x(t)^\top \left(\overline{P}A_1 + A_1^\top \overline{P} + 2\overline{P}BN^{-1}B^\top \overline{P} + C_1^\top F^\top NFC_1\right) x(t) \\
&+ 2x(t)^\top \overline{P}Gw(t) + x(t-h(t))^\top C_2^\top F^\top NFC_2 x(t-h(t)) \\
&+ 2x(t)^\top \overline{P}A_2 x(t-h(t)) + 2x(t)^\top \overline{P}f(t,x,x_h,u,w)\Big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{V}_2(t,x_t) =&\eta V_2 + e^{\eta t}\Big(x(t)^\top(\overline{U_1}+\overline{U_2})x(t) - x(t-h_1)^\top \overline{U_1}x(t-h_1) \\
&- x(t-h_2)^\top \overline{U_2}x(t-h_2)\Big),
\end{aligned}
$$

$$
\dot{V}_3(t,x_t) =\eta V_3 + e^{\eta t}\Big(\dot{x}(t)^\top(h_1^2\overline{X_1}+h_2^2\overline{X_2})\dot{x}(t) - \sum_{i=1}^{2} h_i \int_{t-h_i}^{t} \dot{x}(s)^\top \overline{X_i}\dot{x}(s)\mathrm{d}s\Big).
$$

Áp dụng Bổ đề 1.5.3, ta có

$$
\begin{aligned}
-h_i\int_{t-h_i}^{t} \dot{x}(s)^\top \overline{X_i}\dot{x}(s)\mathrm{d}s \leq& -4x(t)^\top \overline{X_i}x(t) - 4x(t-h_i)^\top \overline{X_i}x(t-h_i) \\
&- 4x(t)^\top \overline{X_i}x(t-h_i) + \frac{12}{h_i}x(t)^\top \overline{X_i}\int_{t-h_i}^{t} x(s)\mathrm{d}s \\
&+ \frac{12}{h_i}x(t-h_i)^\top \overline{X_i}\int_{t-h_i}^{t} x(s)\mathrm{d}s \\
&- \frac{12}{h_i^2}\int_{t-h_i}^{t} x(s)^\top \mathrm{d}s\overline{X_i}\int_{t-h_i}^{t} x(s)\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Do đó

$$
\begin{aligned}
\dot{V}_3(t,x_t) \leq&\eta V_3 + e^{\eta t}\Big(\dot{x}(t)^\top(h_1^2\overline{X_1}+h_2^2\overline{X_2})\dot{x}(t) + x(t)^\top(-4\overline{X_1}-4\overline{X_2})x(t) \\
&- 4x(t-h_1)^\top \overline{X_1}x(t-h_1) - 4x(t-h_2)^\top \overline{X_2}x(t-h_2) \\
&- 4x(t)^\top \overline{X_1}x(t-h_1) - 4x(t)^\top \overline{X_2}x(t-h_2) \\
&+ \sum_{i=1}^{2}\frac{12}{h_i}x(t)^\top \overline{X_i}\int_{t-h_i}^{t} x(s)\mathrm{d}s \\
&+ \sum_{i=1}^{2}\frac{12}{h_i}x(t-h_i)^\top \overline{X_i}\int_{t-h_i}^{t} x(s)\mathrm{d}s \\
&- \sum_{i=1}^{2}\frac{12}{h_i^2}\int_{t-h_i}^{t} x(s)^\top \mathrm{d}s\overline{X_i}\int_{t-h_i}^{t} x(s)\mathrm{d}s\Big).
\end{aligned}
$$

Tính toán tương tự như $\dot{V}_3(t,x_t)$, ta có

$$\begin{aligned}
\dot{V}_4(t,x_t) =& \eta V_4 + e^{\eta t}\Big((h_2-h_1)^2\dot{x}(t)^\top \overline{S}\dot{x}(t)\\
&- (h_2-h_1)\int_{t-h_2}^{t-h(t)} \dot{x}(s)^\top \overline{S}\dot{x}(s)\mathrm{d}s\\
&- (h_2-h_1)\int_{t-h(t)}^{t-h_1} \dot{x}(s)^\top \overline{S}\dot{x}(s)\mathrm{d}s\Big)\\
\le& \eta V_4 + e^{\eta t}\big((h_2-h_1)^2\dot{x}(t)^\top \overline{S}\dot{x}(t) - 8x(t-h(t))^\top \overline{S}x(t-h(t))\big)\\
&- 4x(t-h_2)^\top \overline{S}x(t-h_2) - 4x(t-h_1)^\top \overline{S}x(t-h_1)\\
&- 4x(t-h(t))^\top \overline{S}x(t-h_2) - 4x(t-h(t))^\top \overline{S}x(t-h_1)\\
&- \frac{12}{(h_2-h(t))^2}\int_{t-h_2}^{t-h(t)} x(s)^\top \mathrm{d}s\overline{S}\int_{t-h_2}^{t-h(t)} x(s)\mathrm{d}s\\
&- \frac{12}{(h(t)-h_1)^2}\int_{t-h(t)}^{t-h_1} x(s)^\top \mathrm{d}s\overline{S}\int_{t-h(t)}^{t-h_1} x(s)\mathrm{d}s\\
&+ \frac{12}{h_2-h(t)}x(t-h(t))^\top \overline{S}\int_{t-h_2}^{t-h(t)} x(s)\mathrm{d}s\\
&+ \frac{12}{h_2-h(t)}x(t-h_2)^\top \overline{S}\int_{t-h_2}^{t-h(t)} x(s)\mathrm{d}s\\
&+ \frac{12}{h(t)-h_1}x(t-h_1)^\top \overline{S}\int_{t-h(t)}^{t-h_1} x(s)\mathrm{d}s\\
&+ \frac{12}{h(t)-h_1}x(t-h(t))^\top \overline{S}\int_{t-h(t)}^{t-h_1} x(s)\mathrm{d}s\Big).
\end{aligned}$$

Nhân cả hai vế của (3.1) với $e^{\eta t}2\dot{x}(t)^\top Q$ ta có

$$\begin{aligned}
e^{\eta t}\Big(& -2\dot{x}(t)^\top Q\dot{x}(t) + 2\dot{x}(t)^\top Q(A_1+BFC_1)x(t)\\
&+ 2\dot{x}(t)^\top Q(A_2+BFC_2)x(t-h(t)) + 2\dot{x}(t)^\top QGw(t)\\
&+ 2\dot{x}(t)^\top Qf(t,x,x_h,u,w)\Big) = 0.
\end{aligned}$$

Tương đương với

$$\begin{aligned}
0 \le e^{\eta t}\Big(&\dot{x}(t)^\top(-2Q+2QBN^{-1}B^\top Q)\dot{x}(t) + x(t)^\top C_1^\top F^\top NFC_1x(t)\\
&+ 2\dot{x}(t)^\top QA_1x(t) + x(t-h(t))^\top C_2^\top F^\top NFC_2x(t-h(t))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ 2\dot{x}(t)^\top QA_2x(t-h(t)) + 2\dot{x}(t)^\top QGx(t) \\
&+ 2\dot{x}(t)^\top Qf(t,x,x_h,u,w)\Big). \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

Cộng bất đẳng thức (3.11) và đẳng thức

$$
\begin{aligned}
e^{\eta t}\Big(&f(t,x,x_h,u,w)^\top f(t,x,x_h,u,w) - f(t,x,x_h,u,w)^\top f(t,x,x_h,u,w) \\
&+ \gamma\eta w(t)^\top w(t) - \gamma\eta w(t)^\top w(t) + \eta z(t)^\top z(t) - \eta z(t)^\top z(t)\Big) = 0
\end{aligned}
$$

vào $\dot{V}(t,x_t)$, và sử dụng đánh giá (3.4) của $f(t,x,x_h,u,w)$, và chú ý rằng

$$
\begin{aligned}
f(t,x,&x_h,u,w)^\top f(t,x,x_h,u,w) \le x(t)^\top \left(a_1I + 2a_3C_1^\top F^\top FC_1\right)x(t) \\
&+ a_3w(t)^\top w(t) + x(t-h(t))^\top \left(a_2I + 2a_3C_2^\top F^\top FC_2\right)x(t-h(t)), \\
\eta z(t)^\top z(t) &= \eta x(t)^\top C_1^\top C_1x(t) + 2\eta x(t)^\top C_1^\top C_2x(t-h(t)) \\
&+ \eta x(t-h(t))^\top C_2^\top C_2x(t-h(t)),
\end{aligned}
$$

ta có

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(t,x_t) \le \eta V(t,x_t) + e^{\eta t}\Big(&x(t)^\top(\overline{P}A_1 + A_1^\top\overline{P} + \overline{U_1} + \overline{U_2} + a_1I + \eta C_1^\top C_1 \\
&- 4\overline{X_1} - 4\overline{X_2} + 2\overline{P}BN^{-1}B^\top\overline{P} + 2C_1^\top F^\top NFC_1 + 2a_3C_1^\top F^\top FC_1)x(t) \\
&+ w(t)^\top(a_4I - \gamma\eta I)w(t) + x(t-h_1)^\top(-\overline{U_1} - 4\overline{X_1} - 4\overline{S})x(t-h_1) \\
&+ x(t-h_2)^\top(-\overline{U_2} - 4\overline{X_2} - 4\overline{S})x(t-h_2) \\
&+ x(t-h(t))^\top(-8\overline{S} + a_2I + \eta C_2^\top C_2 + 2C_2^\top F^\top NFC_2 \\
&+ 2a_3C_2^\top F^\top FC_2)x(t-h(t)) \\
&+ \dot{x}(t)^\top\left(h_1^2\overline{X_1} + h_2^2\overline{X_2} + (h_2-h_1)^2\overline{S} - 2Q + 2QBN^{-1}B^\top Q\right)\dot{x}(t) \\
&- f(t,x,x_h,u,w)^\top f(t,x,x_h,u,w) + 2x(t)^\top(\overline{P}A_2 + \eta C_1^\top C_2)x(t-h(t)) \\
&+ 2x(t)^\top\overline{P}Gw(t) + 2x(t)^\top\overline{P}f(t,x,x_h,u,w) - 4x(t)^\top\overline{X_1}x(t-h_1) \\
&- 4x(t)^\top\overline{X_2}x(t-h_2) - 4x(t-h(t))^\top\overline{S}x(t-h_2) \\
&- 4x(t-h(t))^\top\overline{S}x(t-h_1) + 2\dot{x}(t)^\top QA_1x(t) + 2\dot{x}(t)^\top QA_2x(t-h(t)) \\
&+ 2\dot{x}(t)^\top QGw(t) + 2\dot{x}(t)^\top Qf(t,x,x_h,w)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \sum_{i=1}^{2} \frac{12}{h_i^2} \int_{t-h_i}^{t} x(s)^\top \mathrm{d}s \overline{X_i} \int_{t-h_i}^{t} x(s)\mathrm{d}s \\
&+ \sum_{i=1}^{2} \frac{12}{h_i} x(t)^\top \overline{X_i} \int_{t-h_i}^{t} x(s)\mathrm{d}s \\
&+ \sum_{i=1}^{2} \frac{12}{h_i} x(t-h_i)^\top \overline{X_i} \int_{t-h_i}^{t} x(s)\mathrm{d}s \\
&- \frac{12}{(h_2 - h(t))^2} \int_{t-h_2}^{t-h(t)} x(s)^\top \mathrm{d}s \overline{S} \int_{t-h_2}^{t-h(t)} x(s)\mathrm{d}s \\
&- \frac{12}{(h(t) - h_1)^2} \int_{t-h(t)}^{t-h_1} x(s)^\top \mathrm{d}s \overline{S} \int_{t-h(t)}^{t-h_1} x(s)\mathrm{d}s \\
&+ \frac{12}{h_2 - h(t)} x(t-h(t))^\top \overline{S} \int_{t-h_2}^{t-h(t)} x(s)\mathrm{d}s \\
&+ \frac{12}{h_2 - h(t)} x(t-h_2)^\top \overline{S} \int_{t-h_2}^{t-h(t)} x(s)\mathrm{d}s \\
&+ \frac{12}{h(t) - h_1} x(t-h_1)^\top \overline{S} \int_{t-h(t)}^{t-h_1} x(s)\mathrm{d}s \\
&+ \frac{12}{h(t) - h_1} x(t-h(t))^\top \overline{S} \int_{t-h(t)}^{t-h_1} x(s)\mathrm{d}s \Big) \\
&+ e^{\eta t} \gamma \eta w(t)^\top w(t) - e^{\eta t} \eta z(t)^\top z(t).
\end{aligned}
$$

Ta thu được

$$
\dot{V}(t, x_t) - \eta V(t, x_t) \le e^{\eta t} \xi(t)^\top W \xi(t) + e^{\eta t} \gamma \eta w(t)^\top w(t) - e^{\eta t} \eta z(t)^\top z(t), \quad (3.12)
$$

với

$$
\begin{aligned}
\xi(t)^\top = \Big[& x(t)^\top, x(t-h_1)^\top, x(t-h_2)^\top, x(t-h(t))^\top, \dot{x}(t)^\top, w(t)^\top, \\
& f(t, x, x_h, u, w)^\top, \frac{1}{h_1} \int_{t-h_1}^{t} x(s)^\top \mathrm{d}s, \frac{1}{h_2} \int_{t-h_2}^{t} x(s)^\top \mathrm{d}s, \\
& \frac{1}{h_2 - h(t)} \int_{t-h_2}^{t-h(t)} x(s)^\top ds, \frac{1}{h(t) - h_1} \int_{t-h(t)}^{t-h_1} x(s)^\top ds \Big],
\end{aligned}
$$

$$
W = (W_{ij})_{11 \times 11},
$$

$$
\begin{aligned}
W_{11} = {} & \overline{P} A_1 + A_1^\top \overline{P} + \overline{U_1} + \overline{U_2} + a_1 I + \eta C_1^\top C_1 - 4\overline{X_1} - 4\overline{X_2} \\
& + 2\overline{P} B N^{-1} B^\top \overline{P} + 2C_1^\top F^\top N F C_1 + 2a_3 C_1^\top F^\top F C_1,
\end{aligned}
$$

$$W_{22} = -\overline{U_1} - 4\overline{X_1} - 4\overline{S}, W_{33} = -\overline{U_2} - 4\overline{X_2} - 4\overline{S},$$

$$W_{44} = -8\overline{S} + a_2 I + \eta C_2^\top C_2 + 2C_2^\top F^\top N F C_2 + 2a_3 C_2^\top F^\top F C_2,$$

$$W_{55} = h_1^2\overline{X_1} + h_2^2\overline{X_2} + (h_2 - h_1)^2\overline{S} - 2Q + 2QBN^{-1}B^\top Q,$$

$$W_{66} = a_4 I - \gamma\eta I, W_{77} = -I, W_{88} = -12\overline{X_1}, W_{99} = -12\overline{X_2},$$

$$W_{10,10} = W_{11,11} = -12\overline{S}, W_{12} = -2\overline{X_1}, W_{13} = -2\overline{X_2},$$

$$W_{14} = \overline{P}A_2 + \eta C_1^\top C_2, W_{15} = A_1^\top Q, W_{16} = \overline{P}G, W_{17} = \overline{P},$$

$$W_{18} = W_{28} = 6\overline{X_1}, W_{19} = W_{39} = 6\overline{X_2}, W_{24} = W_{34} = -2\overline{S},$$

$$W_{45} = A_2^\top Q, W_{56} = QG, W_{2,11} = W_{3,10} = W_{4,10} = W_{4,11} = 6\overline{S},$$

$W_{57} = Q$ và $W_{ij} = 0$ trong các trường hợp còn lại.

Do đó, từ (3.12), ta thu được

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{-\eta t}V(t, x_t)\right) \leq \xi(t)^\top W\xi(t) + \gamma\eta w(t)^\top w(t) - \eta z(t)^\top z(t). \tag{3.13}$$

Chúng ta sẽ chứng minh bất đẳng thức ma trận $W < 0$ tương đương với điều kiện (3.6) được thỏa mãn. Sử dụng Bổ đề Schur cho các thành phần phi tuyến W_{11}, W_{44}, W_{55}, khi đó điều kiện $W < 0$ tương đương với

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega^1 & \Omega^2 \\ * & \Omega^3 \end{bmatrix} < 0,$$

với

$$\Omega^1 = (\Omega^1_{ij})_{11\times 11}, \quad \Omega^2 = (\Omega^2_{ij})_{6\times 11},$$

$$\Omega^3 = \mathrm{diag}\left(-0.5N, -0.5N^{-1}, -\frac{1}{2a_3}I, -\frac{1}{2a_3}I, -0.5N^{-1}, -0.5N\right),$$

$$\Omega^1_{11} = \overline{P}A_1 + A_1^\top\overline{P} + \overline{U_1} + \overline{U_2} + a_1 I + \eta C_1^\top C_1 - 4\overline{X_1} - 4\overline{X_2},$$

$$\Omega^1_{44} = -8\overline{S} + a_2 I + \eta C_2^\top C_2,$$

$$\Omega^1_{55} = h_1^2\overline{X_1} + h_2^2\overline{X_2} + (h_2 - h_1)^2\overline{S} - 2Q,$$

và $\Omega^1_{ij} = W_{ij}$ trong trường hợp còn lại,

$$\Omega^2_{11} = \overline{P}B,\ \Omega^2_{12} = \Omega^2_{13} = C_1^\top F^\top,\ \Omega^2_{44} = \Omega^2_{45} = C_2^\top F^\top,$$

$$\Omega^2_{56} = QB, \Omega^2_{ij} = 0 \text{ trong trường hợp còn lại.}$$

Định nghĩa ma trận Δ như sau

$$\Delta = \begin{bmatrix} I_n & 0 & BN & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{9n+m+r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_m \end{bmatrix}.$$

Do ma trận Δ là chính quy, ta có $\Lambda = \Delta\Omega\Delta^\top < 0$ với

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda^1 & \Lambda^2 \\ * & \Lambda^3 \end{bmatrix} < 0,$$

trong đó

$$\begin{aligned}
&\Lambda^1 = (\Lambda^1_{ij})_{11\times 11}, \quad \Lambda^2 = (\Lambda^2_{ij})_{6\times 11}, \\
&\Lambda^3 = \text{ diag}\left(-0.5N, -0.5N, -\frac{1}{2a_3}N^2, -\frac{1}{2a_3}N^2, -0.5N, -0.5N\right), \\
&\Lambda^1_{11} = \overline{P}A_1 + A_1^\top\overline{P} + \overline{U_1} + \overline{U_2} + a_1 I + \eta C_1^\top C_1 - 4\overline{X_1} - 4\overline{X_2} \\
&\qquad + BNFC_1 + C_1^\top F^\top NB^\top - 0.5BNB^\top, \\
&\Lambda^1_{ij} = \Omega_{ij} \text{ đối với trường hợp khác}, \\
&\Lambda^2_{11} = \overline{P}B,\ \Lambda^2_{12} = C_1^\top F^\top N - 0.5BN,\ \Lambda^2_{13} = C_1^\top F^\top N, \\
&\Lambda^2_{44} = \lambda^2_{45} = C_2^\top F^\top N,\ \Lambda^2_{56} = QB,\ \Lambda^2_{ij} = 0 \text{ với trường hợp khác.}
\end{aligned}$$

Đặt $F^\top N = K^\top$, do đó $F = N^{-1}K$. Do $-(N-I)^2 \leq 0$, ta có $-N^2 \leq -2N + I$. Do đó

$$-\frac{1}{2a_3}N^2 \leq -\frac{1}{a_3}N + \frac{1}{2a_3}I.$$

Điều kiện $\Lambda < 0$ tương đương với điều kiện $\Psi < 0$, do đó $W < 0$ và từ bất đẳng thức (3.13) ta thu được

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{-\eta t}V(t, x_t)\right) < \gamma\eta w(t)^\top w(t). \tag{3.14}$$

Lấy tích phân hai vế của (3.14) từ 0 đến t, với $t \in [0, T]$, ta thu được

$$\begin{aligned} V(t, x_t) &\le e^{\eta t} \left(V(0, x_0) + \gamma\eta \int_0^t w(s)^\top w(s) \mathrm{d}s \right) \\ &\le e^{\eta T} (\alpha_2 c_1 + \gamma\eta d). \end{aligned}$$

Do đó

$$\alpha_1 x(t)^\top R x(t) \le V(t, x_t) \le e^{\eta T} (\alpha_2 c_1 + \gamma\eta d),$$

hay tương đương với

$$x(t)^\top R x(t) \le \frac{e^{\eta T}(\alpha_2 c_1 + \gamma\eta d)}{\alpha_1} \le c_2, \ \ \forall t \in [0, T],$$

điều này chứng tỏ hệ (3.1) là ổn định trong thời gian hữu hạn tương ứng với (c_1, c_2, T, R). Để kết thúc chứng minh định lí, ta còn phải chỉ ra điều kiện $\gamma-$ tối ưu (3.5). Để kiểm tra điều kiện này, ta xét quan hệ sau

$$\begin{aligned} &\int_0^T \left[\eta \|z(t)\|^2 - \gamma\eta \|w(t)\|^2 \right] \mathrm{d}t \\ &\quad = \int_0^T \left[\eta \|z(t)\|^2 - \gamma\eta \|w(t)\|^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(e^{-\eta t} V(t, x_t) \right) \right] \mathrm{d}t \\ &\quad - \int_0^T \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(e^{-\eta t} V(t, x_t) \right) \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Từ $V(t, x_t) \ge 0$, ta có

$$- \int_0^T \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(e^{-\eta t} V(t, x_t) \right) \mathrm{d}t = -e^{-\eta T} V(T, x_T) + V(0, x_0) \le \alpha_3 \|\varphi\|^2.$$

Mặt khác, từ (3.13), ta có

$$\eta \|z(t)\|^2 - \gamma\eta \|w(t)\|^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(e^{-\eta t} V(t, x_t) \right) < 0,$$

do đó

$$\int_0^T \left[\eta \|z(t)\|^2 - \gamma\eta \|w(t)\|^2 \right] \mathrm{d}t \le \alpha_3 \|\varphi\|^2.$$

Đặt $c_0 = \dfrac{\alpha_3}{\gamma\eta} > 0$, từ bất đẳng thức trên ta có

$$\sup \frac{\int_0^T \|z(t)\|^2 \mathrm{d}t}{c_0 \|\varphi\|^2 + \int_0^T \|w(t)\|^2 \mathrm{d}t} \le \gamma.$$

Đánh giá này thỏa mãn với mọi $w \in L_2([0, T], \mathbb{R}^r), \varphi \in C^1([-h_2, 0], \mathbb{R}^n)$, và do đó điều kiện (3.5) được thỏa mãn. Điều này đã kết thúc chứng minh định lí. $\square$

Nhận xét 3.1.4. Chúng ta để ý rằng điều kiện (3.7) không phải là một bất đẳng thức ma trận tuyến tính theo η, do η xuất hiện trong thành phần phi tuyến. Tuy nhiên, điều kiện (3.6) là một bất đẳng thức ma trận tuyến tính, do đó ta có thể tìm η từ điều kiện (3.6), rồi sau đó kiểm tra lại điều kiện (3.7). Nếu điều kiện của định lí được thỏa mãn, thì hàm điều khiển ngược thông qua thông tin phản hồi đầu ra $u(t) = N^{-1}Kz(t)$ giải quyết bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn thông qua thông tin phản hồi đầu ra.

Nhận xét 3.1.5. Theo hiểu biết của chúng tôi, đây là kết quả đầu tiên về bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn của một lớp hệ điều khiển phi tuyến thông qua thông tin phản hồi đầu ra. Trước đó, các tác giả mới nghiên cứu bài toán điều khiển H_∞ cho hệ tuyến tính có trễ hằng, sau đó là trễ biến thiên, hay cho lớp hệ quy mô lớn có trễ biến thiên.

Các khó khăn khi nghiên cứu bài toán là:

- Hàm trễ dạng khoảng, không khả vi, và hàm trễ xuất hiện ở cả hàm trạng thái và hàm quan sát.
- Hệ điều khiển thông qua thông tin phàn hồi đầu ra.
- Xét bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn.

Sau đây chúng tôi đưa ra một ví dụ số minh họa cho Định lí 3.1.3.

Ví dụ 3.1.6. Xét hệ điều khiển có trễ biến thiên (3.1), trong đó

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.05 \\ 0 & -1.1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0.02 & 0.9 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0.5 & 0.2 \end{bmatrix}, \qquad C_1 = \begin{bmatrix} 0.01 & -0.2 \end{bmatrix}, \qquad C_2 = \begin{bmatrix} -0.02 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$f(.) = 0.1 \begin{bmatrix} \sqrt{\sin(t)x_1^2(t) + x_1^2(t-h(t)) + \cos(t)u_2^2(t) + \omega_2^2(t)} \\ \sqrt{\sin(t)x_2^2(t) + x_2^2(t-h(t)) + \cos(t)u_1^2(t) + \omega_1^2(t)} \end{bmatrix}$$

và $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0.01$,

$$h(t) = \begin{cases} 0.1 + 0.3\cos(t), & t \in I = \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}^+} (-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi), \\ 0.1, & t \in \mathbb{R}^+ \setminus I. \end{cases}$$

$$\varphi(t) = [2, 2.4], \quad t \in [-0.4, 0].$$

Chú ý rằng hàm $h(t)$ là hàm không khả vi, do đó, các phương pháp đề xuất trong các công trình [37, 54, 55] là không áp dụng được cho lớp hệ xét trong công trình này. Cho $h_1 = 0.1; h_2 = 0.4; T = 5; d = 1; \gamma = 4; c_1 = 1; c_2 = 37; R = 0.1I$, và sử dụng hộp công cụ bất đẳng thức ma trận tuyến tính trong Matlab, khi đó bất đẳng thức ma trận tuyến tính trong Định lí 3.1.3 thỏa mãn với $\eta = 0.4138$ và

$$P = \begin{bmatrix} 1.5584 & -0.2630 \\ -0.2630 & 1.6955 \end{bmatrix}, \qquad U_1 = \begin{bmatrix} 0.9896 & -0.9271 \\ -0.9271 & 1.6102 \end{bmatrix},$$

$$U_2 = \begin{bmatrix} 0.5054 & -0.6833 \\ -0.6833 & 1.2911 \end{bmatrix}, \qquad X_1 = \begin{bmatrix} 194.7508 & 24.4056 \\ 24.4056 & 135.9976 \end{bmatrix},$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 8.7212 & 1.9574 \\ 1.9574 & 5.4938 \end{bmatrix}, \qquad S = \begin{bmatrix} 49.2089 & -6.5256 \\ -6.5256 & 52.7801 \end{bmatrix},$$

$$N = 10^4 \begin{bmatrix} 1.3599 & 0.3567 \\ 0.3567 & 0.9026 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} 0.8179 & 0.0048 \\ 0.0048 & 0.7321 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} 0.0105 \\ -0.0335 \end{bmatrix}.$$

Theo Định lí 3.1.3, bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn thông qua thông tin phản hồi đầu ra cho hệ (3.1) có nghiệm, và bộ điều khiển ngược thông qua thông tin phản hồi đầu ra được xác định bởi công thức

$$\begin{aligned} u(t) = N^{-1}Kz(t) = 10^{-6} &\begin{bmatrix} 0.0195 & -0.3901 \\ -0.0448 & 0.8962 \end{bmatrix} x(t) \\ &+ 10^{-6} \begin{bmatrix} -0.0390 & 0.1950 \\ 0.0896 & -0.4481 \end{bmatrix} x(t - h(t)). \end{aligned}$$

Hơn nữa, nghiệm $x(t, \varphi)$ của hệ đóng thỏa mãn đánh giá sau

$$x(t)^\top Rx(t) \leq 37, \quad \forall t \in [0, 5].$$

3.2 Hệ phương trình vi phân tuyến tính không chắc chắn có nhiễu bị chặn và trễ biến thiên

Tiếp theo, chúng tôi nghiên cứu bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn thông qua thông tin phản hồi đầu ra cho hệ tuyến tính không chắc chắn với trễ biến thiên. Xét hệ tuyến tính không chắc chắn với thời gian biến thiên

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [A_1 + \Delta A_1(t)]x(t) + [A_2 + \Delta A_2(t)]x(t-h(t)) \\ \qquad\qquad +[B + \Delta B(t)]u(t) + [G + \Delta G(t)]w(t), \quad t \geq 0, \\ z(t) = C_1 x(t) + C_2 x(t-h(t)), \\ x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-h_2, 0], \end{cases} \tag{3.15}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, z(t) \in \mathbb{R}^p$ lần lượt là các hàm trạng thái, hàm điều khiển, và hàm quan sát đầu ra; $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}, G \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^{p\times n}$ là các ma trận thực cho trước với số chiều thích hợp. Hàm trễ $h(t)$ thỏa mãn điều kiện (3.2), hàm nhiễu $w(t)$ là hàm liên tục thỏa mãn (3.3), và các nhiễu $\Delta A_1(t), \Delta A_2(t)$, $\Delta B(t), \Delta G(t)$ được cho bởi

$$[\Delta A_1(t) \;\; \Delta A_2(t) \;\; \Delta B(t) \;\; \Delta G(t)] = DE(t)[M_{a_1} \;\; M_{a_2} \;\; M_b \;\; M_g],$$

với $D, M_{a_1}, M_{a_2}, M_b, M_g$ là các ma trận thực cho trước với số chiều thích hợp, và $E(t)$ là ma trận phụ thuộc thời gian thỏa mãn

$$E(t)^\top E(t) \leq I, \quad \forall t \geq 0. \tag{3.16}$$

Xét hệ điều khiển (3.1) với nhiễu phi tuyến $f(t, x(t), x(t-h(t)), u(t))$ thỏa mãn

$$f(t, x, x(t-h(t)), u(t), \omega(t)) = \Delta A_1(t)x(t) + \Delta A_2(t)x(t-h(t)) + \Delta B(t)u(t)$$

với $D, M_{a_1}, M_{a_2}, M_b, M_g$ là các ma trận thực cho trước với số chiều thích hợp, và $E(t)$ là ma trận phụ thuộc thời gian thỏa mãn (3.16). Chúng ta biến đổi hệ điều khiển (3.1) về hệ (3.15). Đặt:

$$\lambda_d = \lambda_{\max}(D^\top D), \quad \lambda_{m_1} = \lambda_{\max}(M_{a_1}^\top M_{a_1}), \quad \lambda_{m_2} = \lambda_{\max}(M_{a_2}^\top M_{a_2}),$$

$$\lambda_{m_b} = \lambda_{\max}(M_b^\top M_b), \quad \lambda_{m_g} = \lambda_{\max}(M_g^\top M_g).$$

Ta có

$$\begin{aligned}\|f\|^2 &\le 4\|\Delta A_1 x\|^2 + 4\|\Delta A_2 x_h\|^2 + 4\|\Delta B u\|^2 + 4\|\Delta G\omega\|^2 \\ &\le 4\lambda_d\lambda_{m_1}\|x\|^2 + 4\lambda_d\lambda_{m_2}\|x_h\|^2 + 4\lambda_d\lambda_{m_b}\|u\|^2 + 4\lambda_d\lambda_{m_g}\|\omega\|^2.\end{aligned}$$

Chúng ta sử dụng các kí hiệu trong Định lí 3.1.3 với

$$a_1 = 4\lambda_d\lambda_{m_1},\ \ a_2 = 4\lambda_d\lambda_{m_2},\ \ a_3 = 4\lambda_d\lambda_{m_b},\ \ a_4 = 4\lambda_d\lambda_{m_g}.$$

Sử dụng phương pháp hàm Lyapunov-Krasovskii như trong Định lí 3.1.3, chúng ta thu được điều kiện ổn định mũ cho hệ điều khiển không chắc chắn (3.15) thông qua thông tin phản hồi đầu ra như trong Hệ quả 3.2.1. Hệ quả 3.2.1 thiết lập một điều kiện đủ cho sự tồn tại hàm điều khiển phản hồi đầu ra của bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn của hệ điều khiển tuyến tính không chắc chắn với trễ biến thiên.

Hệ quả 3.2.1. *Bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn thông qua thông tin phản hồi đầu ra cho hệ (3.15) có nghiệm nếu tồn tại số dương η, và các ma trận đối xứng xác định dương $P, U_1, U_2, X_1, X_2, S, N$, và các ma trận Q, K sao cho bất đẳng thức ma trận tuyến tính sau thỏa mãn*

$$\Psi = \begin{bmatrix}\Psi^1 & \Psi^2 \\ * & \Psi^3\end{bmatrix} < 0, \tag{3.17}$$

$$\alpha_2 c_1 + \gamma\eta d \le \alpha_1 c_2 e^{-\eta T}. \tag{3.18}$$

Khi đó hàm điều khiển ngược thông qua thông tin phản hồi đầu ra được xác định $u(t) = N^{-1}Kz(t), \quad \forall t \ge 0.$

Nhận xét 3.2.2. Bộ điều khiển ngược thông qua thông tin phản hồi đầu ra vừa đảm bảo sự ổn định bền vững trong thời gian hữu hạn của hệ đóng và vừa đảm bảo được điều kiện $\gamma-$tối ưu được biểu diễn dưới dạng bất đẳng thức ma trận tuyến tính. Kết quả nghiên cứu này đã phát triển kết quả tìm điều khiển H_∞ trong [17, 37, 54, 55] mà ở đó các trễ được nghiên cứu dưới dạng hằng số. Hơn nữa, ta xây dựng các hàm Lyapunov khác so với các nghiên cứu [37, 54, 55], và đánh giá các đạo hàm của $V(\cdot)$ dưới dạng tích phân tổng quát, nó đưa đến các điều kiện bất đẳng thức ma trận tuyến tính tốt hơn và đưa các ví dụ số tốt hơn.

Sau đây chúng tôi đưa ra một ví dụ số minh họa cho Hệ quả 3.2.1.

Ví dụ 3.2.3. Xét hệ phương trình vi phân tuyến tính không chắc chắn với thời gian biến thiên (3.15), trong đó

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.3 & 0.01 \\ 0.2 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -1.5 & 0 \\ 0.02 & 1.8 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -12 & 5 \\ 2 & 8 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0.5 & 0.02 \end{bmatrix}, \qquad C_1 = \begin{bmatrix} 0.001 & -0.05 \end{bmatrix}, \qquad C_2 = \begin{bmatrix} -0.04 & 0.01 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 \\ 0 & 0.025 \end{bmatrix}, \qquad M_{a_1} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix},$$

$$M_{a_2} = M_b = M_g = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$\varphi(t) = [3, 3.8]$ và hàm trễ $h(t)$ được cho trong Ví dụ 3.1.6. Ta để ý rằng hàm $h(t)$ là không khả vi, do đó, phương pháp đưa ra trong [38, 54, 55] là không thể áp dụng cho lớp hệ xét trong công trình này. Sử dụng hộp công cụ bất đẳng thức ma trận tuyến tính trong Matlab, khi đó bất đẳng thức ma trận tuyến tính trong Hệ quả 3.2.1 thỏa mãn với $T = 8, d = 2, \gamma = 1, c_1 = 1, c_2 = 74, R = 0.04I, \eta = 0.4$ and

$$P = \begin{bmatrix} 3.3747 & -0.7143 \\ -0.7143 & 1.3600 \end{bmatrix}, \qquad U_1 = \begin{bmatrix} 2.3774 & -0.1270 \\ -0.1270 & 2.1229 \end{bmatrix},$$

$$U_2 = \begin{bmatrix} 0.7881 & 0.2115 \\ 0.2115 & 1.2668 \end{bmatrix}, \qquad X_1 = \begin{bmatrix} 323.1831 & -12.8844 \\ -12.8844 & 121.4385 \end{bmatrix},$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 13.8824 & -0.6318 \\ -0.6318 & 5.1041 \end{bmatrix}, \qquad S = \begin{bmatrix} 84.9282 & -1.2178 \\ -1.2178 & 34.5612 \end{bmatrix},$$

$$N = 10^3 \begin{bmatrix} 6.3315 & 0.4824 \\ 0.4824 & 4.6013 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} 0.5451 & -0.0093 \\ -0.0093 & 0.2147 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} 0.0591 \\ 0.0496 \end{bmatrix}.$$

Bài toán điều khiển H_∞ bền vững trong thời gian hữu hạn của hệ (3.15) có nghiệm, và điều khiển ngược thông qua thông tin phản hồi đầu ra được xác định bởi công thức

$$u(t) = 10^{-6}\begin{bmatrix} 0.0086 & -0.4288 \\ 0.0099 & -0.4942 \end{bmatrix} x(t) + 10^{-6}\begin{bmatrix} -0.3430 & 0.0858 \\ -0.3953 & 0.0988 \end{bmatrix} x(t-h(t)).$$

Hơn nữa, nghiệm $x(t,\varphi)$ thỏa mãn

$$x(t)^\top Rx(t) \le 74, \quad \forall t \in [0,8].$$

3.3 Kết luận Chương 3

Chương 3 trình bày kết quả nghiên cứu bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn của một lớp hệ điều khiển phi tuyến có trễ biến thiên liên tục dạng khoảng thông qua thông tin phản hồi đầu ra. Kết quả đạt được như sau:

- Xây dựng hàm điều khiển phản hồi đầu ra cho bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn của một lớp hệ điều khiển phi tuyến có trễ biến thiên liên tục dạng khoảng. Điều kiện đủ này được biểu diễn thông qua các bất đẳng thức ma trận tuyến tính (Định lí 3.1.3).

- Thiết lập hàm điều khiển phản hồi đầu ra của bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn cho hệ điều khiển tuyến tính không chắc chắn với trễ biến thiên (Hệ quả 3.2.1).

KẾT LUẬN

Luận án nghiên cứu một số bài toán điều khiển như bài toán đảm bảo giá trị điều khiển và bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn của hệ phương trình vi phân phi tuyến có trễ biến thiên thông qua thông tin phản hồi đầu ra.

Những kết quả đã được chứng minh trong luận án:

- Chứng minh điều kiện đủ để thiết kế hàm điều khiển phản hồi đầu ra cho bài toán đảm bảo giá trị điều khiển của lớp hệ phương trình vi phân phi tuyến có trễ biến thiên liên tục dạng khoảng (Định lí 2.1.4). Áp dụng giải bài toán đảm bảo giá trị điều khiển cho lớp hệ điều khiển tuyến tính không chắc chắn có trễ biến thiên (Hệ quả 2.2.1).
- Chứng minh điều kiện đủ để xây dựng hàm điều khiển phản hồi đầu ra cho bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn của một lớp hệ điều khiển phi tuyến có trễ biến thiên liên tục dạng khoảng (Định lí 3.1.3). Áp dụng giải bài toán H_∞ trong thời gian hữu hạn cho hệ điều khiển tuyến tính không chắc chắn với trễ biến thiên (Hệ quả 3.2.1).

Điểm mới của luận án so với các kết quả đã có:

- Hàm trễ không đòi hỏi tính khả vi và cận dưới của trễ có thể khác 0.
- Thiết kế hàm điều khiển phản hồi đầu ra cho bài toán đảm bảo giá trị điều khiển của lớp hệ phương trình vi phân phi tuyến có trễ biến thiên liên tục dạng khoảng.
- Thiết kế hàm điều khiển phản hồi đầu ra cho bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn.

Luận án mở ra một số vấn đề có thể tiếp tục nghiên cứu:

- Nghiên cứu bài toán đảm bảo giá trị điều khiển của lớp hệ phương trình vi phân phi tuyến nhưng ôtônôm với trễ biến thiên.

- Nghiên cứu bài toán điều khiển H_∞ trong thời gian hữu hạn của các hệ phương trình vi phân không ôtônôm với trễ biến thiên.

DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC CỦA TÁC GIẢ ĐÃ CÔNG BỐ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

[1]. S. Adly, Ta T.H. Trang and Vu N. Phat, Guaranteed quadratic cost control of nonlinear time-varying delay systems via output feedback stabilization, *Pacific Journal of Optimization*, **12**(3) (2016), pp. 649-667. (SCIE)

[2]. Ta T.H. Trang, Vu N. Phat and S. Adly, Robust finite-time H_∞ control of nonlinear time-varying delay systems, *Journal of Industrial and Management Optimization*, **12**(1) (2016), pp. 303 - 315. (SCIE)

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

[1] Vũ Ngọc Phát, *Nhập Môn Lý Thuyết Điều Khiển Toán Học*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, (2001).

[2] Nguyễn Trường Thanh, *Điều khiển H_∞ các hệ phương trình vi phân có trễ biến thiên*, Luận án tiến sĩ toán học, Đại học Quốc gia Hà Nội, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, (2015).

[3] Mai Viết Thuận, *Tính ổn định của một số lớp hệ phương trình vi phân hàm và ứng dụng trong lí thuyết điều khiển*, Luận án tiến sĩ toán học, Viện Hàn Lâm Khoa Học và Công nghệ Việt Nam, Viện Toán học, (2014).

Tiếng Anh

[4] Amato F., Ariola M. and Dorato P., Finite-time control of linear systems subject to parametric uncertainties and disturbances, *Automatica*, **37** (2001), 1459 - 1463.

[5] Amato F., Ariola M. and Cosentino C., Finite-time stabilization via dynamic output feedback, *Automatica*, **42** (2006), 337 - 342.

[6] Amato F., Tommasi G. De and Pironti A., Necessary and sufficient conditions for finite-time stability of impulsive dynamical linear systems, *Automatica*, **49** (2013), 2546 - 2550.

[7] Bellman R., *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw-Hill, New York, (1970).

[8] Blondel V., Gevers M. and Lindquist A., Survey on the state of systems and control, *European Journal of Control*, **1** (1995), 523 - 531.

[9] Botmart T., Niamsup P. and Phat V.N., Delay-dependent exponential stabilization for uncertain linear systems with interval non-differentiable time-varying delays, *Applied Mathematics and Computation*, **217** (21) (2011), 8236 - 8247.

[10] Boukas E.K., Static output feedback control for stochastic hybrid systems: LMI approach, *Automatica,* **42** (2006), 183 - 188.

[11] Boukas E.K., Optimal guaranteed cost for singular linear systems with random abrupt changes, *Optimal Control Applications and Methods*, **31** (2011), 335 - 349.

[12] Boyd S., Ghaoui L. El., Feron E. and Balakrishnan V., *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, Philadelphia, (1994).

[13] Chang S.S.L. and Peng T.K.C., Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameters, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **17 (4)** (1972), 474 - 483.

[14] Chukwu E.N., *Stability and time-optimal control of hereditary systems*, Academic Press, Inc, (1992).

[15] Costa E.F. and Oliveira V.A., On the design of guaranteed cost controllers for a class of uncertain linear systems, *Systems & Control Letters*, **46** (2002), 17 - 29.

[16] Dorato P., Short time stability in linear time-varying systems, *In Proc IRE Int Convention Record*, **4** (1961), 83 - 87.

[17] Fridman E. and Shaked U., Delay-dependent stability and H_∞control: constant and time-varying delays, *International Journal of Control*, **76** (2003), 48 - 60.

[18] Gahinet P., Nemirovskii A., Laub A.J., and Chilali M., *LMI Control Toolbox For use with MATLAB*, The MathWorks, Inc, (1995).

[19] Garcia G., Tarbouriech S. and Bernussou J., Finite-time stabilization of linear time-varying continuous systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **54** (2009), 364 - 369.

[20] Gollmann L. and Maurer H., Theory and applications of optimal control problems with multiple time-delays, *Journal of Industrial and Management Optimization,* **10** (2014), 413 - 441.

[21] Gu K., Kharitonov V.L. and Chen J., *Stability of Time-Delay Systems*, Birkhauser, Boston, (2003).

[22] Hale J.K. and Verduyn Lunel S.M., *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, (1993).

[23] Han Q.L., Robust stability for a class of linear systems with time-varying delay and nonlinear perturbations, *Computers and Mathematics with Applications,* **47** (2004), 1201 - 1209.

[24] Hien L.V. and Phat V.N., Exponential stability and stabilization of a class of uncertain linear time-delay systems, *Journal of the Franklin Institute*, **346** (2009), 611 - 625.

[25] Jiang X. and Han Q.L., On H_∞ control for linear systems with interval time-varying delay, *Automatica*, **41** (2005), 2099 - 2106.

[26] Kharitonov V., *Time-Delay Systems: Lyapunov Functionals and Matrices*, Birkhauser, Berlin, (2013).

[27] Kharitonov V.L. and Hinrichsen D., Exponential estimate for time delay systems, *Systems and Control Letters*, **53** (2004), 395 - 405.

[28] Kolmanovskii V.B. and Nosov V.R., *Stability of Functional Differential Equations*, Academic Press, Inc., (1986).

[29] Kolmanovskii V.B. and Myshkis A., *Applied Theory of Functional Differential Equations*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, (1992).

[30] Krasovskii N.N., *Stability of Motion: Applications of Lyapunov's Second Method to Differential Systems and Equations with Delay*, Stanford University Press, Stanford, California, (1963).

[31] Kwon O.M. and Park J.H., Robust stabilization of uncertain systems with delays in control input: a matrix inequality approach, *Applied Mathematics and Computation*, **172** (2006), 1067 - 1077.

[32] Kwon O.M., Park J.H. and Lee S.M., Exponential stability for uncertain dynamic systems with time-varying delays: LMI optimization approach, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **137** (2008), 521 - 532.

[33] Lakshmikantham V., Leela S. and Martynyuk A.A., *Stability Analysis of Nonlinear Systems*, Marcel Dekker, New York, (1989).

[34] Li H., Niculescu S.L., Dugard L. and Diona J.M., Robust guaranteed cost control of uncertain linear time-delay systems using dynamic output feedback, *Mathematics, Computers in Simulation*, **45** (1998), 349 - 358.

[35] Liao X.X., Wang L. and Yu P., *Stability of Dynamical Systems*, Elsevier, Oxford, UK, (2007).

[36] Lien C.H., Delay-dependent and delay-independent guaranteed cost control for uncertain neutral systems with time-varying delays via LMI approach, *Chaos, Soliton and Fractals*, **33** (2007), 1017 - 1027.

[37] Liu H., Shen Y. and Zhao X., Delay-dependent observer-based H_∞ finite-time control for switched systems with time-varying delay, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, **6** (2012), 885 - 898.

[38] Meng Q.Y. and Shen Y. J, Finite-time H_∞ control for linear continuous system with norm-bounded disturbance, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation,* **14** (2009), 1043 - 1049.

[39] Moulay E., Dambrine M., Yeganefar N. and Perruquetti W., Finite-time stability and stabilization of time-delay systems, *Systems and Control Letters*, **57** (2008), 561 - 566.

[40] Nam P.T. and Phat V.N., Robust stabilization of linear systems with delayed state and control, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **140** (2) (2009), 287 - 299.

[41] Niculescu S.I. and Gu K., *Advances in Time-Delay Systems*, Springer, Berlin, (2004).

[42] Park J.H., Delay-dependent criterion for guaranteed cost control of neutral delay systems,*Journal of Optimization Theory and Applications*, **124** (2005), 491 - 502.

[43] Persis C. De and Mazenc F., Stability of quantized time-delay nonlinear systems: a Lyapunov–Krasowskii-functional approach, *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, **21** (2010), 337 - 370.

[44] Petersen I.R. and Macfarlane D.C., Optimal guaranteed cost control and filtering uncertain linear systems, *Transactions on Automatic Control*, **39** (1994), 1971 - 1977.

[45] Phat V.N., Memoryless H_∞ controller design for switched nonlinear systems with mixed time-varying delays, *International Journal of Control*, **82** (2009), 1889 - 1898.

[46] Phat V.N., Ha Q.P. and Trinh H., Parameter-dependent H_∞ control for time-varying delay polytopic systems, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **147** (2010), 58 - 70.

[47] Richard J.P., Time-delay systems: An overview of some recent advances and open problems, *Automatica*, **39** (2003), 1667 - 1694.

[48] Senthilkumar T. and Balasubramaniam P., Delay-dependent robust stabilization and H_∞ control for nonlinear stochastic systems with Markovian jump parameters and interval time-varying delays, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **151** (2011), 100 - 120.

[49] Seuret A. and Gouaisbaut F., Wirtinger-based integral inequality: Application to time-delay systems, *Automatica*, **49** (2013), 2860 - 2866.

[50] Sun J., Liu G.P., Chen J. and Rees D., Improved delay-range-dependent stability criteria for linear systems with time-varying dealys, *Automatica*, **46** (2010), 466 - 470.

[51] Thuan M.V. and Phat V.N., Optimal guaranteed cost control of linear systems with mixed interval time-varying delayed state and control, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **152** (2012), 394 - 412.

[52] Wang Y., Wang Q., Zhou P. and Duan D., Robust guaranteed cost control for singular Markovian jump systems with time-varying delay, *ISA Transactions*, **51** (2012), 559 - 565.

[53] Wu L., Lam J. and Wang C., Robust H_∞ dynamic output feedback control for 2D linear parameter-varying systems, *IMA journal of mathematical control and information,* **26** (1) (2009), 23 - 44.

[54] Xiang Z., Sun Y.N. and Mahmoud M.S., Robust finite-time H_∞ control for a class of uncertain switched neutral systems, *Communications in Nonlinear Science Numerical Simulations*, **17** (2012), 1766 - 1778.

[55] Xiang W. and Xiao J., H_∞ finite-time control for nonlinear switched discrete-time systems with norm-bounded disturbance, *Journal of the Franklin Institute*, **348** (2011), 331 - 352.

[56] Xu H., Teo K.L. and Liu X., Robust stability analysis of guaranteed cost control for impulsive switched systems, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, **38** (2008), 1419 - 1422.

[57] Xu H. and Teo K. L., H_∞ optimal stabilization of a class of uncertain impulsive systems: An LMI approach, *Journal of Industrial and Management Optimization,* **5** (2009), 153 - 159.

[58] Xu H. and Teo K.L., Stability with L_2-gain condition of nonlinear impulsive switched systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **55** (2010), 2429 - 2433.

[59] Yoshizawa T., *Stability Theory by Lyapunov Second Method*, The Mathematical Society of Japan, Tokyo, (1966).

[60] Yu L. and Chu J., An LMI approach to guaranteed cost control of linear uncertain time-delay systems, *Automatica*, **35** (1999), 1155 - 1159.

[61] Zamorano S. and Henríquez H. R., Feedback stabilization of abstract neutral linear control systems, *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, **25** (3) (2013), 345 - 386.

[62] Zhang Y., Liu C. and Mu X., Robust finite time H_∞ control of singular stochastic systems via static output feedback, *Applied Mathematics and Computation,* **218** (2012), 5629 - 5640.

[63] Zhou K. and Khargonekar P.P, Robust stabilization of linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty, *Systems and Control Letters,* **10** (1988), 17 - 20.

[64] Zhou K., Doyle J.C. and Glover K., Robuts and Optimal Control, *New Jersey: Prentice Hall*, (1995).

PHỤ LỤC

1. Code Mattlab cho Ví dụ 2.1.7:

$A1 = [1\ 0; 0.2\ \ -2.6];\qquad gtrA1 = eig(A1);$

$A2 = [-1.8\ 0.5; 0\ 2];\qquad gtrA2 = eig(A2);$

$A3 = A1 + A2;\qquad gtrA3 = eig(A3);$

$B = [0.1\ \ -1.2; 2\ 1.5];\qquad gtrB = eig(B);$

$C1 = [0.1\ \ -0.5];\qquad C2 = [-0.01\ 0.03];$

$E1 = [0.00001\ 0; 0\ 0.00005];\qquad E2 = [0.00002\ 0; 0\ 0.00003];$

$E3 = [0.00001\ 0; 0\ 0.00002];\qquad E33 = E3' * E3;$

$E333 = inv(E33);\qquad I1 = E33 * E333;$

$gtrE333 = eig(E333);$

$gmine333 = min(gtrE333(1,1), gtrE333(2,1));$

$a = 0.000001;\qquad ap = 0.2;\qquad 1 = 0.1;\qquad h2 = 0.4;$

$I = [1\ 0; 0\ 1];\qquad Q1 = [0.05\ 1; 1\ 0.0001];$

$Q2 = [0.001\ 0.1; 0.1\ 0.0004];\qquad R = [0.0005\ 0; 0\ 0.001];$

$gr = eig(R);\qquad R1 = inv(R);$

$gr1 = eig(R1);\qquad gminr1 = min(gr1(1,1), gr1(2,1));$

$setlmis([]);\qquad P = lmivar(1, [2\ 1]);$

$U1 = lmivar(1, [2\ 1]);\qquad U2 = lmivar(1, [2\ 1]);$

$S1 = lmivar(1, [2\ 1]);\qquad S2 = lmivar(1, [2\ 1]);$

$S3 = lmivar(1, [2\ 1]); \qquad X1 = lmivar(1, [2\ 1]);$

$X2 = lmivar(1, [2\ 1]); \qquad X3 = lmivar(1, [2\ 1]);$

$N = lmivar(1, [2\ 1]); \qquad K = lmivar(2, [2\ 2]);$

$lmiterm([1\ 1\ 1\ P], 1, A1,' s'); \qquad lmiterm([1\ 1\ 1\ U1], 1, 1);$

$lmiterm([1\ 1\ 1\ U2], 1, 1); \qquad lmiterm([1\ 1\ 1\ 0], Q1);$

$lmiterm([1\ 1\ 1\ P], 2 * ap, 1); \qquad lmiterm([1\ 1\ 1\ 0], 2 * E1' * E1);$

$lmiterm([1\ 1\ 1\ S1], -exp(-2 * ap * h1), 1);$

$lmiterm([1\ 1\ 1\ S2], -exp(-2 * ap * h2), 1);$

$lmiterm([1\ 1\ 1\ X1], -2 * exp(-4 * ap * h1), 1);$

$lmiterm([1\ 1\ 1\ X2], -2 * exp(-4 * ap * h2), 1);$

$lmiterm([1\ 1\ 1\ X3], -2 * exp(-4 * ap * h2) * (h2 - h1) * inv(h2 + h1), 1);$

$lmiterm([1\ 1\ 1\ K], B, C1,' s'); \qquad lmiterm([1\ 1\ 1\ N], -0.5 * B, B');$

$lmiterm([1\ 2\ 1\ S1], exp(-2 * ap * h1), 1);$

$lmiterm([1\ 2\ 2\ U1], -exp(-2 * ap * h1), 1);$

$lmiterm([1\ 2\ 2\ S1], -exp(-2 * ap * h1), 1);$

$lmiterm([1\ 2\ 2\ S3], -exp(-2 * ap * h2), 1);$

$lmiterm([1\ 3\ 1\ S2], exp(-2 * ap * h2), 1); \qquad lmiterm([1\ 3\ 2\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 3\ 3\ U2], -exp(-2 * ap * h2), 1);$

$lmiterm([1\ 3\ 3\ S2], -exp(-2 * ap * h2), 1);$

$lmiterm([1\ 3\ 3\ S3], -exp(-2 * ap * h2), 1); \qquad lmiterm([1\ 4\ 1\ P], 1, A1);$

$lmiterm([1\ 4\ 2\ 0], 0); \qquad lmiterm([1\ 4\ 3\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 4\ 4\ S1], h1^2, 1); \qquad lmiterm([1\ 4\ 4\ S2], h2^2, 1);$

$lmiterm([1\ 4\ 4\ S3], (h2 - h1)^2, 1); \qquad lmiterm([1\ 4\ 4\ X1], 0.5 * h1^2, 1);$

$lmiterm([1\ 4\ 4\ X2], 0.5*h2^2, 1);$

$lmiterm([1\ 4\ 4\ X3], 0.5*(h2^2-h1^2), 1);$

$lmiterm([1\ 4\ 4\ P], -2, 1);\qquad lmiterm([1\ 5\ 1\ P], A2', 1);$

$lmiterm([1\ 5\ 2\ S3], exp(-2*ap*h2), 1);$

$lmiterm([1\ 5\ 3\ S3], exp(-2*ap*h2), 1);$

$lmiterm([1\ 5\ 4\ P], A2', 1);\qquad lmiterm([1\ 5\ 5\ 0], 2*E2'*E2);$

$lmiterm([1\ 5\ 5\ 0], Q2);\qquad lmiterm([1\ 5\ 5\ S3], -2*exp(-2*ap*h2), 1);$

$lmiterm([1\ 6\ 1\ X1], 2*exp(-4*ap*h2)*inv(h1), 1);$

$lmiterm([1\ 6\ 2\ 0], 0);\quad lmiterm([1\ 6\ 3\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 6\ 4\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 6\ 5\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 6\ 6\ X1], -2*exp(-4*ap*h2)*inv(h1^2), 1);$

$lmiterm([1\ 7\ 1\ X2], 2*exp(-4*ap*h2)*inv(h2), 1);$

$lmiterm([1\ 7\ 2\ 0], 0);\quad lmiterm([1\ 7\ 3\ 0], 0);\quad lmiterm([1\ 7\ 4\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 7\ 5\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 7\ 6\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 7\ 7\ X2], -2*exp(-4*ap*h2)*inv(h2^2), 1);$

$lmiterm([1\ 8\ 1\ X3], 2*exp(-4*ap*h2)*inv(h1+h2), 1);$

$lmiterm([1\ 8\ 2\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 8\ 3\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 8\ 4\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 8\ 5\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 8\ 6\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 8\ 7\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 8\ 8\ X3], -2*exp(-4*ap*h2)*inv(h2^2-h1^2), 1);$

$lmiterm([1\ 9\ 1\ P], B', 1);\qquad lmiterm([1\ 9\ 2\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 9\ 3\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 9\ 4\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 9\ 5\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 9\ 6\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 9\ 7\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 9\ 8\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 9\ 9\ N], -0.5, 1);\qquad lmiterm([1\ 10\ 1\ K], 1, C1);$

$lmiterm([1\ 10\ 1\ N], -0.5, B');\qquad lmiterm([1\ 10\ 2\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 10\ 3\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 10\ 4\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 10\ 5\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 10\ 6\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 10\ 7\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 10\ 8\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 10\ 9\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 10\ 10\ N], -0.5, 1);$

$lmiterm([1\ 11\ 1\ K], 1, C1);\qquad lmiterm([1\ 11\ 2\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 11\ 3\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 11\ 4\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 11\ 5\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 11\ 6\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 11\ 7\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 11\ 8\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 11\ 9\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 11\ 10\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 11\ 11\ N], -0.5 * gmine333 * a, 1);$

$lmiterm([1\ 11\ 11\ 0], 0.25 * gmine333 * a * a * I);$

$lmiterm([1\ 12\ 1\ K], 1, C1);\qquad lmiterm([1\ 12\ 2\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 12\ 3\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 12\ 4\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 12\ 5\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 12\ 6\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 12\ 7\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 12\ 8\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 12\ 9\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 12\ 10\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 12\ 11\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 12\ 12\ N], -gminr1 * a, 1);$

$lmiterm([1\ 12\ 12\ 0], 0.5 * gminr1 * a * a * I);$

$lmiterm([1\ 13\ 1\ P], 1, 1);$

$lmiterm([1\ 13\ 2\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 13\ 3\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 13\ 4\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 13\ 5\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 13\ 6\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 13\ 7\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 13\ 8\ 0],0);$ $lmiterm([1\ 13\ 9\ 0],0);$

$lmiterm([1\ 13\ 10\ 0],0);$ $lmiterm([1\ 13\ 11\ 0],0);$

$lmiterm([1\ 13\ 12\ 0],0);$ $lmiterm([1\ 13\ 13\ 0],-I);$

$lmiterm([1\ 14\ 1\ 0],0);$ $lmiterm([1\ 14\ 2\ 0],0);$

$lmiterm([1\ 14\ 3\ 0],0);$ $lmiterm([1\ 14\ 4\ P],B',1);$

$lmiterm([1\ 14\ 5\ 0],0);$ $lmiterm([1\ 14\ 6\ 0],0);$

$lmiterm([1\ 14\ 7\ 0],0);$ $lmiterm([1\ 14\ 8\ 0],0);$

$lmiterm([1\ 14\ 9\ 0],0);$ $lmiterm([1\ 14\ 10\ 0],0);$

$lmiterm([1\ 14\ 11\ 0],0);$ $lmiterm([1\ 14\ 12\ 0],0);$

$lmiterm([1\ 14\ 13\ 0],0);$ $lmiterm([1\ 14\ 14\ N],-0.5,1);$

$lmiterm([1\ 15\ 1\ 0],0);$ $lmiterm([1\ 15\ 2\ 0],0);$

$lmiterm([1\ 15\ 3\ 0],0);$ $lmiterm([1\ 15\ 4\ P],1,1);$

$lmiterm([1\ 15\ 5\ 0],0);$ $lmiterm([1\ 15\ 6\ 0],0);$

$lmiterm([1\ 15\ 7\ 0],0);$ $lmiterm([1\ 15\ 8\ 0],0);$

$lmiterm([1\ 15\ 9\ 0],0);$ $lmiterm([1\ 15\ 10\ 0],0);$

$lmiterm([1\ 15\ 11\ 0],0);$ $lmiterm([1\ 15\ 12\ 0],0);$

$lmiterm([1\ 15\ 13\ 0],0);$ $lmiterm([1\ 15\ 14\ 0],0);$

$lmiterm([1\ 15\ 15\ 0],-I);$ $lmiterm([1\ 16\ 1\ 0],0);$

$lmiterm([1\ 16\ 2\ 0],0);$ $lmiterm([1\ 16\ 3\ 0],0);$

$lmiterm([1\ 16\ 4\ 0],0);$ $lmiterm([1\ 16\ 5\ K],1,C2);$

$lmiterm([1\ 16\ 6\ 0],0);$ $lmiterm([1\ 16\ 7\ 0],0);$

$lmiterm([1\ 16\ 8\ 0],0);$ $lmiterm([1\ 16\ 8\ 0],0);$

$lmiterm([1\ 16\ 9\ 0],0);$ $lmiterm([1\ 16\ 10\ 0],0);$

$lmiterm([1\ 16\ 11\ 0],0);$ $lmiterm([1\ 16\ 12\ 0],0);$

$lmiterm([1\ 16\ 13\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 16\ 14\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 16\ 15\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 16\ 16\ N], -0.5, 1);$

$lmiterm([1\ 17\ 1\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 17\ 2\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 17\ 3\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 17\ 4\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 17\ 5\ K], 1, C2);\qquad lmiterm([1\ 17\ 6\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 17\ 7\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 17\ 8\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 17\ 9\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 17\ 10\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 17\ 11\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 17\ 12\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 17\ 13\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 17\ 14\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 17\ 15\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 17\ 16\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 17\ 17\ N], -0.5 * gmine333 * a, 1);$

$lmiterm([1\ 17\ 17\ 0], 0.25 * gmine333 * a * a * I);$

$lmiterm([1\ 18\ 1\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 18\ 2\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 18\ 3\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 18\ 4\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 18\ 5\ K], 1, C2);\qquad lmiterm([1\ 18\ 6\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 18\ 7\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 18\ 8\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 18\ 9\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 18\ 10\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 18\ 11\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 18\ 12\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 18\ 13\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 18\ 14\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 18\ 15\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 18\ 16\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 18\ 17\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 18\ 18\ N], -gminr1 * a, 1);$

$lmiterm([1\ 18\ 18\ 0], 0.5 * gminr1 * a * a * I);\qquad ;$

$lmiterm([-2\ 1\ 1\ P], 1, 1);\qquad lmiterm([-3\ 1\ 1\ U1], 1, 1);$

$lmiterm([-4\ 1\ 1\ U2],1,1); \qquad lmiterm([-5\ 1\ 1\ S1],1,1);$

$lmiterm([-6\ 1\ 1\ S2],1,1); \qquad lmiterm([-7\ 1\ 1\ S3],1,1);$

$lmiterm([-8\ 1\ 1\ X1],1,1); \qquad lmiterm([-9\ 1\ 1\ X2],1,1);$

$lmiterm([-10\ 1\ 1\ X3],1,1); \qquad lmiterm([-11\ 1\ 1\ N],1,1);$

$mylmi = getlmis; \qquad [tmin, xfeas] = feasp(mylmi);$

$P = dec2mat(mylmi, xfeas, P); \qquad U1 = dec2mat(mylmi, xfeas, U1);$

$U2 = dec2mat(mylmi, xfeas, U2); \qquad S1 = dec2mat(mylmi, xfeas, S1);$

$S2 = dec2mat(mylmi, xfeas, S2); \qquad S3 = dec2mat(mylmi, xfeas, S3);$

$X1 = dec2mat(mylmi, xfeas, X1); \qquad X2 = dec2mat(mylmi, xfeas, X2);$

$X3 = dec2mat(mylmi, xfeas, X3); \qquad N = dec2mat(mylmi, xfeas, N);$

$K = dec2mat(mylmi, xfeas, K); \qquad F = inv(N) * K;$

$$\begin{aligned}
O11 = {} & P * A1 + A1' * P + U1 + U2 + Q1 + 2 * ap * P \\
& + 2 * E1' * E1 - exp(-2 * ap * h1) * S1 \\
& - exp(-2 * ap * h2) * S2 - 2 * exp(-4 * ap * h1) * X1 \\
& - 2 * exp(-4 * ap * h2) * X2 \\
& - 2 * exp(-4 * ap * h2) * (h2 - h1) * inv(h2 + h1) * X3 \\
& + B * K * C1 + C1' * K' * B' - 0.5 * B * N * B';
\end{aligned}$$

$EgO11 = eig(O11);$

$$\begin{aligned}
O22 = {} & -exp(-2 * ap * h1) * U1 - exp(-2 * ap * h1) * S1 \\
& - exp(-2 * ap * h2) * S3;
\end{aligned}$$

$EgO22 = eig(O22);$

$$\begin{aligned}
O33 = {} & -exp(-2 * ap * h2) * U2 - exp(-2 * ap * h2) * S2 \\
& - exp(-2 * ap * h2) * S3;
\end{aligned}$$

$EgO33 = eig(O33);$

$$O44 = h1^2 * S1 + h2^2 * S2 + (h2 - h1)^2 * S3 + 0.5 * h1^2 * X1$$

$$+ 0.5 * h2^2 * X2 + 0.5 * (h2^2 - h1^2) * X3 - 2 * P;$$

$EgO44 = eig(O44);$ $\quad O55 = 2 * E2' * E2 - exp(-2 * ap * h2) * S3 + Q2;$

$EgO55 = eig(O55);$

$O66 = -2 * exp(-4 * ap * h2) * inv(h1^2) * X1;$ $\quad EgO66 = eig(O66);$

$O77 = -2 * exp(-4 * ap * h2) * inv(h2^2) * X2;$ $\quad EgO77 = eig(O77);$

$O88 = -2 * exp(-4 * ap * h2) * inv(h2^2 - h1^2) * X3;$ $\quad EgO88 = eig(O88);$

$O99 = -0.5 * gmine333 * a * N + 0.25 * gmine333 * a * a * I;$

$EgO99 = eig(O99);$

$O1010 = -gminr1 * a * N + 0.5 * gminr1 * a * a * I;$

$EgO1010 = eig(O1010);$ $\quad EgP = eig(P);$ $\quad EgU1 = eig(U1);$

$EgU2 = eig(U2);$ $\quad EgS1 = eig(S1);$ $\quad EgS2 = eig(S2);$

$EgS3 = eig(S3);$ $\quad EgX1 = eig(X1);$ $\quad EgX2 = eig(X2);$

$EgX3 = eig(X3);$ $\quad EgN = eig(N);$

$mp = max(EgP(1, 1), EgP(2, 1));$ $\quad mu1 = max(EgU1(1, 1), EgU1(2, 1));$

$mu2 = max(EgU2(1, 1), EgU2(2, 1));$ $\quad ms1 = max(EgS1(1, 1), EgS1(2, 1));$

$ms2 = max(EgS2(1, 1), EgS2(2, 1));$ $\quad ms3 = max(EgS3(1, 1), EgS3(2, 1));$

$mx1 = max(EgX1(1, 1), EgX1(2, 1));$ $\quad mx2 = max(EgX2(1, 1), EgX2(2, 1));$

$mx3 = max(EgX3(1, 1), EgX3(2, 1));$ $\quad FC1 = F * C1;$

$FC2 = F * C2;$ $\quad Lamda = mp + h1 * mu1 + h2 * mu2 + 0.5 * h1^3 * ms1$

$$+ 0.5 * h2^3 * ms2 + (h2^2 - h1^2) * (h2 - h1) * ms3;$$

$$+ 1/6 * h1^3 * mx1 + 1/6 * h2^3 * mx2 + 1/6 * (h2 - h1)^3 * mx3;$$

$lam = min(EgP(1, 1), EgP(2, 1));$ $\quad ;$

$k1 = Lamda/lam;$ $\quad k2 = sqrt(k1);$

2. Code Mattlab cho Ví dụ 3.2.3:

$A1 = [1.3\ 0.01; 0.2\ \ -2]; \qquad gtrA1 = eig(A1);$

$A2 = [-1.5\ 0; 0.02\ 1.8]; \qquad gtrA2 = eig(A2);$

$A3 = A1 + A2; \qquad gtrA3 = eig(A3);$

$B = [-12\ 5; 2\ 8]; \qquad G = [0.01\ 0; 0.5\ 0.02];$

$C1 = [0.001\ \ -0.05]; \qquad C2 = [-0.04\ 0.01];$

$D = [0.001\ 0; 0\ 0.025]; \qquad Ma1 = [0.01\ 0; 0\ 0.01];$

$Ma2 = [0.1\ 0; 0\ 0.1]; \qquad Mb = [0.1\ 0; 0\ 0.1];$

$Mg = [0.1\ 0; 0\ 0.1]; \qquad EgD = eig(D'^{*}D);$

$mD = max(EgD(1,1), EgD(2,1)); \qquad EgMa1 = eig(Ma1'^{*}Ma1);$

$mMa1 = max(EgMa1(1,1), EgMa1(2,1)); \qquad EgMa2 = eig(Ma2'^{*}Ma2);$

$mMa2 = max(EgMa2(1,1), EgMa2(2,1)); \qquad EgMb = eig(Mb'^{*}Mb);$

$mMb = max(EgMb(1,1), EgMb(2,1)); \qquad EgMg = eig(Mg'^{*}Mg);$

$mMg = max(EgMg(1,1), EgMg(2,1)); \qquad a1 = 4^{*}mD^{*}mMa1;$

$a2 = 4^{*}mD^{*}mMa2; \qquad a3 = 4^{*}mD^{*}mMb;$

$a4 = 4^{*}mD^{*}mMg; \qquad I = [1\ 0; 0\ 1];$

$R = 0.04^{*}I; \qquad R1 = sqrtm(R);$

$h1 = 0.1; \qquad h2 = 0.4; \qquad T = 8; \qquad d = 2;$

$gamma = 1; \qquad c1 = 1;$

$eta = 0.3; \qquad setlmis([]); \qquad P = lmivar(1, [2\ 1]);$

$U1 = lmivar(1, [2\ 1]); \qquad U2 = lmivar(1, [2\ 1]);$

$X1 = lmivar(1, [2\ 1]); \qquad X2 = lmivar(1, [2\ 1]);$

$S = lmivar(1, [2\ 1]); \qquad N = lmivar(1, [2\ 1]);$

$Q = lmivar(1, [2\ 1]); \qquad K = lmivar(2, [2\ 1]);$

$lmiterm([1\ 1\ 1\ P], R1, R1^{*}A1,' S');$

$lmiterm([1\ 1\ 1\ U1], R1, R1);$

$lmiterm([1\ 1\ 1\ U2], R1, R1);$

$lmiterm([1\ 1\ 1\ 0], a1);$ $lmiterm([1\ 1\ 1\ 0], eta^{*}C1'^{*}C1);$

$lmiterm([1\ 1\ 1\ X1], -4^{*}R1, R1);$ $lmiterm([1\ 1\ 1\ X2], -4^{*}R1, R1);$

$lmiterm([1\ 1\ 1\ K], B, C1,' s');$ $lmiterm([1\ 1\ 1\ N], -0.5^{*}B, B');$

$lmiterm([1\ 2\ 1\ X1], -2^{*}R1, R1);$ $lmiterm([1\ 2\ 2\ U1], -R1, R1);$

$lmiterm([1\ 2\ 2\ X1], -4^{*}R1, R1);$ $lmiterm([1\ 2\ 2\ S], -4^{*}R1, R1);$

$lmiterm([1\ 3\ 1\ X2], -2^{*}R1, R1);$ $lmiterm([1\ 3\ 2\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 3\ 3\ U2], -R1, R1);$ $lmiterm([1\ 3\ 3\ X2], -4^{*}R1, R1);$

$lmiterm([1\ 3\ 3\ S], -4^{*}R1, R1);$ $lmiterm([1\ 4\ 1\ P], A2'^{*}R1, R1);$

$lmiterm([1\ 4\ 1\ 0], eta^{*}C2'^{*}C1);$ $lmiterm([1\ 4\ 2\ S], -2^{*}R1, R1);$

$lmiterm([1\ 4\ 3\ S], -2^{*}R1, R1);$ $lmiterm([1\ 4\ 4\ S], -8^{*}R1, R1);$

$lmiterm([1\ 4\ 4\ 0], a2);$ $lmiterm([1\ 4\ 4\ 0], eta^{*}C2'^{*}C2);$

$lmiterm([1\ 5\ 1\ Q], 1, A1);$ $lmiterm([1\ 5\ 2\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 5\ 3\ 0], 0);$ $lmiterm([1\ 5\ 4\ Q], 1, A2);$

$lmiterm([1\ 5\ 5\ X1], h1^{2} * R1, R1);$ $lmiterm([1\ 5\ 5\ X2], h2^{2} * R1, R1);$

$lmiterm([1\ 5\ 5\ S], (h2 - h1)^{2} * R1, R1);$ $lmiterm([1\ 5\ 5\ Q], -2, 1);$

$lmiterm([1\ 6\ 1\ P], G'^{*}R1, R1);$ $lmiterm([1\ 6\ 2\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 6\ 3\ 0], 0);$ $lmiterm([1\ 6\ 4\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 6\ 5\ Q], G', 1);$ $lmiterm([1\ 6\ 6\ 0], a4);$

$lmiterm([1\ 6\ 6\ 0], -gamma^{*}eta);$ $lmiterm([1\ 7\ 1\ P], R1, R1);$

$lmiterm([1\ 7\ 2\ 0], 0);$ $lmiterm([1\ 7\ 3\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 7\ 4\ 0], 0);$ $lmiterm([1\ 7\ 5\ Q], 1, 1);$

$lmiterm([1\ 7\ 6\ 0], 0);$ $lmiterm([1\ 7\ 7\ 0], -1);$

$lmiterm([1\ 8\ 1\ X1], 6*R1, R1);\qquad lmiterm([1\ 8\ 2\ X1], 6*R1, R1);$

$lmiterm([1\ 8\ 3\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 8\ 4\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 8\ 5\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 8\ 6\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 8\ 7\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 8\ 8\ X1], -12*R1, R1);$

$lmiterm([1\ 9\ 1\ X2], 6*R1, R1);\qquad lmiterm([1\ 9\ 2\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 9\ 3\ X2], 6*R1, R1);\qquad lmiterm([1\ 9\ 4\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 9\ 5\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 9\ 6\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 9\ 7\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 9\ 8\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 9\ 9\ X2], -12*R1, R1);\qquad lmiterm([1\ 10\ 1\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 10\ 2\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 10\ 3\ S], 6*R1, R1);$

$lmiterm([1\ 10\ 4\ S], 6*R1, R1);\qquad lmiterm([1\ 10\ 5\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 10\ 6\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 10\ 7\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 10\ 8\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 10\ 9\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 10\ 10\ S], -12*R1, R1);\qquad lmiterm([1\ 11\ 1\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 11\ 2\ S], 6*R1, R1);\qquad lmiterm([1\ 11\ 3\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 11\ 4\ S], 6*R1, R1);\qquad lmiterm([1\ 11\ 5\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 11\ 6\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 11\ 7\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 11\ 8\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 11\ 9\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 11\ 10\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 11\ 11\ S], -12*R1, R1);$

$lmiterm([1\ 12\ 1\ P], B'*R1, R1);\qquad lmiterm([1\ 12\ 2\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 12\ 3\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 12\ 4\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 12\ 5\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 12\ 6\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 12\ 7\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 12\ 8\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 12\ 9\ 0], 0);\qquad lmiterm([1\ 12\ 10\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 12\ 11\ 0], 0);$ $lmiterm([1\ 12\ 12\ N], -0.5, 1);$

$lmiterm([1\ 13\ 1\ K], 1, C1);$ $lmiterm([1\ 13\ 1\ N], -0.5, B');$

$lmiterm([1\ 13\ 2\ 0], 0);$ $lmiterm([1\ 13\ 3\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 13\ 4\ 0], 0);$ $lmiterm([1\ 13\ 5\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 13\ 6\ 0], 0);$ $lmiterm([1\ 13\ 7\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 13\ 8\ 0], 0);$ $lmiterm([1\ 13\ 9\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 13\ 10\ 0], 0);$ $lmiterm([1\ 13\ 11\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 13\ 12\ 0], 0);$ $lmiterm([1\ 13\ 13\ N], -0.5, 1);$

$lmiterm([1\ 14\ 1\ K], 1, C1);$ $lmiterm([1\ 14\ 2\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 14\ 3\ 0], 0);$ $lmiterm([1\ 14\ 4\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 14\ 5\ 0], 0);$ $lmiterm([1\ 14\ 6\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 14\ 7\ 0], 0);$ $lmiterm([1\ 14\ 8\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 14\ 9\ 0], 0);$ $lmiterm([1\ 14\ 10\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 14\ 11\ 0], 0);$ $lmiterm([1\ 14\ 12\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 14\ 13\ 0], 0);$ $lmiterm([1\ 14\ 14\ N], -1/a3, 1);$

$lmiterm([1\ 14\ 14\ 0], 1/(2*a3));$ $lmiterm([1\ 15\ 1\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 15\ 2\ 0], 0);$ $lmiterm([1\ 15\ 3\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 15\ 4\ K], 1, C2);$ $lmiterm([1\ 15\ 5\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 15\ 6\ 0], 0);$ $lmiterm([1\ 15\ 7\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 15\ 8\ 0], 0);$ $lmiterm([1\ 15\ 9\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 15\ 10\ 0], 0);$ $lmiterm([1\ 15\ 11\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 15\ 12\ 0], 0);$ $lmiterm([1\ 15\ 13\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 15\ 14\ 0], 0);$ $lmiterm([1\ 15\ 15\ N], -1/a3, 1);$

$lmiterm([1\ 15\ 15\ 0], 1/(2*a3));$ $lmiterm([1\ 16\ 1\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 16\ 2\ 0], 0);$ $lmiterm([1\ 16\ 3\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 16\ 4\ K], 1, C2);$ $lmiterm([1\ 16\ 5\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 16\ 6\ 0], 0);$ $lmiterm([1\ 16\ 7\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 16\ 8\ 0], 0);$ $lmiterm([1\ 16\ 9\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 16\ 10\ 0], 0);$ $lmiterm([1\ 16\ 11\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 16\ 12\ 0], 0);$ $lmiterm([1\ 16\ 13\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 16\ 14\ 0], 0);$ $lmiterm([1\ 16\ 15\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 16\ 16\ N], -0.5, 1);$ $lmiterm([1\ 17\ 1\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 17\ 2\ 0], 0);$ $lmiterm([1\ 17\ 3\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 17\ 4\ 0], 0);$ $lmiterm([1\ 17\ 5\ Q], 1, B');$

$lmiterm([1\ 17\ 6\ 0], 0);$ $lmiterm([1\ 17\ 7\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 17\ 8\ 0], 0);$ $lmiterm([1\ 17\ 9\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 17\ 10\ 0], 0);$ $lmiterm([1\ 17\ 11\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 17\ 12\ 0], 0);$ $lmiterm([1\ 17\ 13\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 17\ 14\ 0], 0);$ $lmiterm([1\ 17\ 15\ 0], 0);$

$lmiterm([1\ 17\ 16\ 0], 0);$ $lmiterm([1\ 17\ 17\ N], -0.5, 1);$

$lmiterm([-2\ 1\ 1\ P], 1, 1);$ $lmiterm([-3\ 1\ 1\ U1], 1, 1);$

$lmiterm([-4\ 1\ 1\ U2], 1, 1);$ $lmiterm([-5\ 1\ 1\ X1], 1, 1);$

$lmiterm([-6\ 1\ 1\ X2], 1, 1);$ $lmiterm([-7\ 1\ 1\ S], 1, 1);$

$lmiterm([-8\ 1\ 1\ N], 1, 1);$ $mylmi = getlmis;$

$[tmin, xfeas] = feasp(mylmi);$

$P = dec2mat(mylmi, xfeas, P);$

$U1 = dec2mat(mylmi, xfeas, U1);$

$U2 = dec2mat(mylmi, xfeas, U2);$

$$X1 = dec2mat(mylmi, xfeas, X1);$$

$$X2 = dec2mat(mylmi, xfeas, X2);$$

$$S = dec2mat(mylmi, xfeas, S);$$

$$N = dec2mat(mylmi, xfeas, N);$$

$$Q = dec2mat(mylmi, xfeas, Q);$$

$$K = dec2mat(mylmi, xfeas, K);$$

$$EgP = eig(P); \qquad EgU1 = eig(U1);$$

$$EgU2 = eig(U2); \qquad EgX1 = eig(X1);$$

$$EgX2 = eig(X2); \qquad EgS = eig(S);$$

$$EgN = eig(N);$$

$$\begin{aligned} O11 = {} & R1 * P * R1 * A1 + A1' * R1 * P * R1 + R1 * U1 * R1 \\ & + R1 * U2 * R1 + a1 * I \\ & + eta * C1' * C1 - 4 * R1 * X1 * R1 - 4 * R1 * X2 * R1 \\ & + B * K * C1 + C1' * K' * B' - 0.5 * B * N * B'; \end{aligned}$$

$$EgO11 = eig(O11); \qquad O44 = -8 * R1 * S * R1 + a2 * I + eta * C2' * C2;$$

$$EgO44 = eig(O44);$$

$$\begin{aligned} O55 = {} & h1^2 * R1 * X1 * R1 + h2^2 * R1 * X2 * R1 \\ & + (h2 - h1)^2 * R1 * S * R1 - 2 * Q; \end{aligned}$$

$$EgO55 = eig(O55); \qquad EgbarP = eig(R1 * P * R1);$$

$$EgbarU1 = eig(R1 * U1 * R1); \qquad EgbarU2 = eig(R1 * U2 * R1);$$

$$EgbarX1 = eig(R1 * X1 * R1); \qquad EgbarX2 = eig(R1 * X2 * R1);$$

$$EgbarS = eig(R1 * S * R1); \qquad mp = max(EgP(1,1), EgP(2,1));$$

$$mu1 = max(EgU1(1,1), EgU1(2,1));$$

$$mu2 = max(EgU2(1,1), EgU2(2,1));$$

$$mx1 = max(EgX1(1,1), EgX1(2,1));$$

$$mx2 = max(EgX2(1,1), EgX2(2,1));$$

$$ms = max(EgS(1,1), EgS(2,1)); \qquad mn = max(EgN(1,1), EgN(2,1));$$

$$mpbar = max(EgbarP(1,1), EgbarP(2,1));$$

$$mu1bar = max(EgbarU1(1,1), EgbarU1(2,1));$$

$$mu2bar = max(EgbarU2(1,1), EgbarU2(2,1));$$

$$mx1bar = max(EgbarX1(1,1), EgbarX1(2,1));$$

$$mx2bar = max(EgbarX2(1,1), EgbarX2(2,1));$$

$$msbar = max(EgbarS(1,1), EgbarS(2,1));$$

$$alpha1 = min(EgP(1,1), EgP(2,1));$$

$$\begin{aligned} alpha2 = {} & mp + h1 * mu1 + h2 * mu2 + 0.5 * h1^3 * mx1 + 0.5 * h2^3 * mx2 \\ & + 0.5 * (h2 - h1)^2 * (h2 + h1) * ms; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} alpha3 = {} & mpbar + h1 * mu1bar + h2 * mu2bar + 0.5 * h1^3 * mx1bar \\ & + 0.5 * h2^3 * mx2bar + 0.5 * (h2 - h1)^2 * (h2 + h1) * msbar; \end{aligned}$$

$$c2 = ((alpha2 * c1 + gamma * eta * d) * exp(eta * T))/alpha1;$$

$$NKC1 = inv(N) * K * C1; \qquad NKC2 = inv(N) * K * C2;$$