# Tóm tắt


Cho $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ là vành đa thức $n$ biến trên trường $k$ tùy ý và đồ thị $\Gamma$ trên tập đỉnh $V = \{1, \ldots, n\}$. Ta liên kết với $\Gamma$ iđêan

$$I(\Gamma) := \Big(x_i x_j \,|\, \{i, j\} \in \Gamma\Big)$$

trong vành $R$. Ta gọi $I := I(\Gamma)$ là *iđêan cạnh* của $\Gamma$. Vấn đề nghiên cứu của luận án là đặc trưng tập $\mathrm{Ass}(I^t)$ thông qua các tính chất tổ hợp của đồ thị. Kết quả chính của luận án là một số điều kiện cần hoặc đủ (hoàn toàn tổ hợp) để iđêan nguyên tố sinh bởi tập con của tập các biến là iđêan nguyên tố liên kết của $I^t$. Trong trường hợp $t = 2, 3, 4$ chúng tôi đưa ra phân loại hoàn toàn dạng các iđêan nguyên tố liên kết của $I^t$. Qua đó, ta có thể mô tả tường minh tập ổn định $\mathrm{Ass}^\infty(I)$ và ước lượng được chỉ số ổn định $\mathrm{astab}(I)$. Các kết quả trên còn được sử dụng để nghiên cứu tính giảm của hàm depth.

Luận án được chia thành bốn chương.

Trong Chương 1, chúng tôi giới thiệu một số khái niệm và kết quả về iđêan đơn thức và bão hòa của nó.

Trong Chương 2, chúng tôi tìm cách mô tả các iđêan nguyên tố liên kết nhúng của lũy thừa của iđêan cạnh.

Mục đích của chương 3 là phân loại đồ thị $t$-bão hòa và dạng các iđêan nguyên tố nhúng của $I^t$ với $t$ nhỏ.

Mục đích của chương 4 là nghiên cứu về tính giảm của hàm depth. Cụ thể, chúng tôi trả lời câu hỏi: dưới điều kiện nào thì $\operatorname{depth} R/I^t = 1$ kéo theo $\operatorname{depth} R/I^{t+1} = 0$ cho trường hợp $t = 1, 2$.

# Mở đầu

Một trong những hướng phát triển gần đây của Đại số giao hoán là Đại số giao hoán Tổ hợp. Nền tảng cho sự hình thành và phát triển của hướng này là chứng minh của Stanley năm 1975 cho giả thuyết về chặn trên (Upper Bound Conjecture) đối với đơn hình cầu. Tuy ra đời gần đây nhưng Đại số giao hoán Tổ hợp đã phát triển tương đối nhanh và đạt được những thành tựu đáng kể. Một số vấn đề trong Tổ hợp có thể chuyển thành các vấn đề trong Đại số rồi sau đó ta có thể sử dụng các kỹ thuật và phương pháp của Đại số để đưa ra lời giải cho bài toán ban đầu. Tương tự, người ta cũng có thể nghiên cứu một số cấu trúc đại số bằng các phương pháp tổ hợp. Mục đích của luận án là nghiên cứu vấn đề sau đây của Đại số giao hoán Tổ hợp.

Cho $R$ là vành Noether và $I$ là iđêan của $R$. Năm 1979, Brodmann đã chỉ ra rằng tập các iđêan nguyên tố liên kết của $I^t$ ổn định với $t$ đủ lớn, tức là tồn tại số nguyên dương $t_0$ sao cho $\mathrm{Ass}(I^t) = \mathrm{Ass}(I^{t_0})$ với mọi $t \geq t_0$. Tập $\mathrm{Ass}(I^{t_0})$ được gọi là *tập ổn định* của $I$ và được ký hiệu bởi $\mathrm{Ass}^{\infty}(I)$. Số $t_0$ nhỏ nhất sao cho điều trên xảy ra được gọi là *chỉ số ổn định* của $\mathrm{Ass}(I^t)$ và được ký hiệu bởi $\mathrm{astab}(I)$. Vì vậy người ta quan tâm đến vấn đề xác định tập $\mathrm{Ass}^{\infty}(I)$ và ước lượng giá trị $\mathrm{astab}(I)$.

Nếu $I$ là một iđêan tùy ý thì rất khó giải quyết vấn đề trên. Do đó người ta thường tập trung vào các iđêan có thêm các cấu trúc tổ hợp [3], [4], [5], [7]. Ở đây chúng tôi xét lớp iđêan cạnh của đồ thị và tìm cách đặc trưng tập $\mathrm{Ass}(I^t)$ thông qua các tính chất tổ hợp của đồ thị.

Cho đồ thị $\Gamma$ trên tập đỉnh $V = \{1, \ldots, n\}$, ta liên kết với $\Gamma$ iđêan

$$I(\Gamma) := \Big(x_i x_j \mid \{i, j\} \in \Gamma\Big)$$

trong vành đa thức $n$ biến $R := k[x_1, \ldots, x_n]$ trên một trường $k$ tùy ý. Ta gọi $I(\Gamma)$ là *iđêan cạnh* của $\Gamma$.

Mọi iđêan nguyên tố liên kết của một iđêan đơn thức đều sinh bởi tập con của tập các biến. Ta có thể ký hiệu các iđêan này dưới dạng

$P_F := (x_i \mid i \in F)$, trong đó $F \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Đối với lũy thừa của một iđêan cạnh $I$ thì $F$ phải là phủ đỉnh của đồ thị. Đặc biệt, các iđêan nguyên tố liên kết tối tiểu ứng với các phủ tối tiểu. Do đó ta chỉ cần quan tâm tới các iđêan nguyên tố liên kết không phải là tối tiểu. Để thuận tiện ta gọi các iđêan nguyên tố liên kết không tối tiểu của $I^t$ là iđêan nguyên tố nhúng của $I^t$ và ký hiệu $\mathrm{Emb}(I^t)$ là tập tất cả các iđêan đó.

Cho $I = I(\Gamma)$ là iđêan cạnh của đồ thị $\Gamma$. Simis, Vasconcelos và Villarreal [13] đã chỉ ra rằng $\mathrm{Emb}(I^t) = \emptyset$ với mọi $t$ khi và chỉ khi $\Gamma$ không có chu trình lẻ. Nếu $\Gamma$ có chu trình lẻ thì Chen, S. Morey và A. Sung [3] đã xây dựng thuật toán xác định các iđêan nguyên tố nhúng của $I^t$ với $t$ đủ lớn. Trong [12], Martinez-Bernal, Morey và Villarreal đã chỉ ra rằng $\mathrm{Ass}(I^t) \subseteq \mathrm{Ass}(I^{t+1})$ với mọi $t$. Gần đây, tập các iđêan nguyên tố liên kết của lũy thừa của một iđêan đơn thức không chứa bình phương đã được nghiên cứu bởi Ha và Morey [7], Francisco, Ha và A. Van Tuyl [6]. Tuy nhiên các kết quả đó khi áp dụng cho iđêan cạnh thì không thể đưa ra mô tả tường minh cho các iđêan nhúng của $I^t$.

Với $t = 2$, Terai và Trung [15] đã đưa ra một đặc trưng tổ hợp cho tập các iđêan nguyên tố nhúng. Họ chỉ ra rằng $P_F \in \mathrm{Emb}(I^2)$ khi và chỉ khi $F$ là tối tiểu trong các phủ chứa lân cận đóng của một tam giác. Một kết quả yếu hơn đã được tìm thấy độc lập bởi hai tác giả Herzog và Hibi [8] cho trường hợp $P_F$ là iđêan thuần nhất cực đại. Luận án nghiên cứu vấn đề đặc trưng tổ hợp các iđêan nguyên tố liên kết $P_F \in \mathrm{Emb}(I^t)$ với một giá trị $t \geq 3$ cố định.

Kết quả chính của luận án là một số điều kiện cần hoặc đủ (hoàn toàn tổ hợp) để $P_F \in \mathrm{Emb}(I^t)$. Trong trường hợp $t = 2, 3, 4$ chúng tôi phân loại hoàn toàn dạng các iđêan nguyên tố nhúng của $I^t$. Qua đó, ta có thể mô tả tường minh tập ổn định $\mathrm{Ass}^\infty(I)$ và ước lượng được chỉ số ổn định $\mathrm{astab}(I)$. Các kết quả trên còn được sử dụng để nghiên cứu tính giảm của hàm depth.

Sử dụng kỹ thuật địa phương hóa chúng tôi chuyển vấn đề trên về bài toán khi nào $\mathfrak{m} := (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Emb}(I^t)$. Ký hiệu $\widetilde{I^t}$ là bão hòa của $I^t$. Để giải quyết bài toán này, ta chỉ cần tìm điều kiện cho sự tồn tại một đơn thức $x^{\mathbf{a}} \in \widetilde{I^t} \setminus I^t$ với $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n$. Ý tưởng của chúng tôi là biểu diễn đơn thức $x^{\mathbf{a}}$ bởi đồ thị có trọng $\Gamma_{\mathbf{a}}$ thu được từ đồ thị cảm sinh của $\Gamma$ trên tập $V_{\mathbf{a}} := \{i \mid a_i > 0\}$ bằng cách gán cho mỗi đỉnh $i \in V_{\mathbf{a}}$ trọng $a_i$. Kết quả đầu tiên chúng tôi thu được là điều kiện tổ hợp trên đồ thị có trọng $\Gamma_{\mathbf{a}}$ tương đương với điều kiện $x^{\mathbf{a}} \in \widetilde{I^t} \setminus I^t$ (Định lý 2.2.4). Từ điều kiện tổ hợp đó, ta có thể chỉ ra rằng mỗi đỉnh của tập $V \setminus V_{\mathbf{a}}$ kề với ít nhất một đỉnh của $V_{\mathbf{a}}$, mọi thành phần liên thông của đồ thị cảm sinh của $\Gamma_{\mathbf{a}}$ đều chứa ít nhất một chu trình lẻ có độ dài không vượt quá $2t-1$. Đặc biệt chúng tôi nhận được chặn trên cho bậc của đơn thức $x^{\mathbf{a}}$, đó là $\deg x^{\mathbf{a}} \leq 3(t-1)$ (Mệnh đề 2.3.9).

Sử dụng mô tả nói trên của các đơn thức trong $\widetilde{I^t} \setminus I^t$ chúng tôi đặc trưng được điều kiện $P_F \in \mathrm{Emb}(I^t)$ thông qua sự tồn tại của một loại đồ thị có trọng được gọi là $t$-bão hòa (Định lý 2.4.1). Từ đây chúng tôi chứng minh được nếu $P_F \in \mathrm{Emb}(I^t)$ thì $F$ là tối tiểu trong số các phủ của $\Gamma$ chứa lân cận đóng của tập $U \subseteq V$ thỏa mãn điều kiện mọi thành phần liên thông của $\Gamma_U$ chứa ít nhất một chu trình lẻ có độ dài không quá $2t-1$ (Định lý 2.4.2). Tuy nhiên điều kiện này không phải là điều kiện đủ.

Với ý tưởng tương tự, chúng tôi đã đưa ra một điều kiện đủ để $P_F$ là iđêan nguyên tố nhúng của $I^t$ (Định lý 2.4.7). Điều kiện này chỉ phụ thuộc vào sự tồn tại của một loại đồ thị có trọng trên $\Gamma$ mà chúng tôi gọi là đồ thị $t$-bão hòa mạnh. Hơn nữa chúng tôi còn chứng tỏ được rằng điều kiện cần trong Định lý 2.4.2 cũng đồng thời là điều kiện đủ để $P_F \in \mathrm{Ass}^{\infty}(I)$ (Hệ quả 2.5.5). Phương pháp của chúng tôi đưa ra một đặc trưng đơn giản hơn cho tập $\mathrm{Ass}^{\infty}(I)$ và một chặn trên tốt hơn cho $\mathrm{astab}(I)$ so với kết quả của Chen, Morey và Sung (Hệ quả 2.5.6).

Đối với các lũy thừa $I^t$ với $t = 2, 3, 4$, chúng tôi đưa ra phân loại đầy đủ cho các đồ thị $t$-bão hòa. Từ đó chúng tôi dễ dàng nhận lại được kết quả của Terai-Trung và Herzog-Hibi về tập $\mathrm{Emb}(I^2)$ (Định lí 3.1.1).

Với trường hợp $t = 3$, chúng tôi phân loại được các iđêan nguyên tố của $\mathrm{Emb}(I^3)$ như sau: $P_F$ là iđêan nguyên tố liên kết nhúng của $I^3$ khi và chỉ khi $F$ là tối tiểu trong số các phủ của $\Gamma$ chứa lân cận đóng của một tập đỉnh $U$ thỏa mãn đồ thị cảm sinh $\Gamma_U$ của $\Gamma$ được căng bởi một trong các dạng: một tam giác, hợp của một cạnh và một tam giác giao nhau tại một đỉnh, hợp của hai tam giác không kề nhau, hợp của hai tam giác giao nhau tại một đỉnh, một ngũ giác.

Với trường hợp $t = 4$, chúng tôi cũng đặc trưng được cụ thể 21 dạng đồ thị tương ứng với các iđêan nguyên tố liên kết của $\mathrm{Emb}(I^4)$ (Định lý 3.3.5).

Cuối cùng, sử dụng các kết quả nhận được chúng tôi nghiên cứu tính giảm từ $\operatorname{depth} R/I^t$ sang $\operatorname{depth} R/I^{t+1}$. Cụ thể, chúng tôi chứng minh rằng nếu $\Gamma$ không là một đồ thị hai phần thì $\operatorname{depth} R/I = 1$ kéo theo $\operatorname{depth} R/I^2 = 0$ (Định lí 4.2.1). Tuy nhiên, khẳng định tương tự như trên với $t \geq 2$ không còn đúng nữa. Với $t = 2$, chúng tôi chứng minh rằng nếu $\Gamma$ không là đồ thị hai phần và $\operatorname{depth} R/I^2 = 1$ thì $\operatorname{depth} R/I^5 = 0$ (Định lý 4.3.1).

Ngoài phần mở đầu và phần kết luận, luận án được chia làm bốn chương.

Trong Chương 1, chúng tôi giới thiệu một số khái niệm và kết quả về iđêan đơn thức và bão hòa của nó. Chương này bao gồm ba mục. Mục 1.1 giới thiệu các khái niệm cơ bản được sử dụng trong luận án như iđêan đơn thức, siêu đồ thị, phức đơn hình và mối liên hệ giữa chúng. Mục 1.2 giới thiệu khái niệm đối đồng điều địa phương và công thức Takayama tính đối đồng điều địa phương của iđêan đơn thức theo các phức đơn hình. Mục 1.3 quy việc xét một iđêan nguyên tố liên kết tùy ý về việc xét iđêan thuần nhất cực đại.

Trong Chương 2, chúng tôi tìm cách mô tả các iđêan nguyên tố liên kết nhúng của lũy thừa của iđêan cạnh. Chương này bao gồm năm mục. Mục 2.1 giới thiệu khái niệm đồ thị có trọng nhằm biểu diễn các đơn thức. Mục 2.2 đưa ra tiêu chuẩn tổ hợp cho điều kiện $x^{\mathbf{a}} \in \widetilde{I^t} \setminus I^t$ theo

$\Gamma_{\mathbf{a}}$. Mục 2.3 định nghĩa một lớp đồ thị có trọng đặc biệt mà chúng tôi gọi là đồ thị $t$-bão hòa được dùng để nghiên cứu điều kiện $x^{\mathbf{a}} \in \widetilde{I^t} \setminus I^t$. Mục 2.4 đưa ra các điều kiện cần hoặc đủ để $P_F$ là iđêan nguyên tố liên kết nhúng của $I^t$. Mục 2.5 đặc trưng tập ổn định $\operatorname{Ass}^{\infty}(I)$ và đưa ra một chặn trên cho chỉ số ổn định $\operatorname{astab}(I)$.

Mục đích của Chương 3 là phân loại đồ thị $t$-bão hòa và dạng các iđêan nguyên tố liên kết nhúng của $I^t$ với $t$ nhỏ. Các trường hợp $t = 2, 3, 4$ được chia ra lần lượt cho các mục 3.1, 3.2, 3.3.

Chương 4 nghiên cứu về tính giảm của hàm depth. Mục 4.1 nghiên cứu tính chất này trong trường hợp $\operatorname{depth} R_j/(I^t)_j = 0$ với $j \in \{1, \ldots, n\}$. Mục 4.2 đưa ra điều kiện trên đồ thị để $\operatorname{depth} R/I^2 = 0$ nếu $\operatorname{depth} R/I = 1$. Mục 4.3 đưa ra giá trị $q_0 = f(t)$ nhỏ nhất để $\operatorname{depth} R/I^q = 0$ với mọi $q \geq q_0$ trong trường hợp $t = 2$.

Các kết quả trong luận án được trình bày trong hai bài báo và một tiền ấn phẩm. Hai bài báo đã được công bố, trong đó có một bài đăng trên tạp chí quốc tế nằm trong danh mục ISI và một bài đăng trên Acta Mathematica Vietnamica.

# Chương 1

# Bão hòa của iđêan đơn thức

Trong chương này chúng tôi giới thiệu một số khái niệm và kết quả về iđêan đơn thức và bão hòa của nó.

## 1.1 Iđêan đơn thức

Trong toàn bộ luận án ta xét $R := k[x_1, \ldots, x_n]$ là vành đa thức $n$ biến trên trường $k$ tùy ý. Iđêan $I$ của $R$ được gọi là iđêan *đơn thức* nếu $I$ được sinh bởi các đơn thức của $R$. Nếu các đơn thức đó không chứa số mũ bội thì ta nói $I$ là iđêan đơn thức *không chứa bình phương.*

Ta biết rằng mỗi iđêan đơn thức $I$ là $\mathbb{N}^n$-phân bậc. Do vậy mỗi iđêan nguyên tố liên kết của $I$ cũng là $\mathbb{N}^n$-phân bậc, nó chính là iđêan đơn thức sinh bởi các biến. Nếu $I$ là iđêan đơn thức không chứa bình phương thì $I$ là giao của các iđêan này.

Lớp iđêan đơn thức không chứa bình phương đóng một vai trò then chốt trong Đại số giao hoán Tổ hợp vì việc nghiên cứu một iđêan đơn thức tùy ý có thể đưa về việc nghiên cứu một iđêan đơn thức không chứa bình phương bằng kỹ thuật phân cực.

Chúng ta có thể mô tả các iđêan đơn thức không chứa bình phương bằng các công cụ tổ hợp khác nhau thông qua các khái niệm iđêan cạnh của một siêu đồ thị và iđêan Stanley-Reisner của một phức đơn hình. Khi đó iđêan nguyên tố liên kết của $I$ cũng được mô tả thông qua các khái niệm tổ hợp đó là phủ đỉnh của siêu đồ thị và mặt cực đại của phức đơn hình.

## 1.2 Đối đồng điều địa phương

Cho $I$ là iđêan đơn thức. Do $R/I$ có cấu trúc $\mathbb{N}^n$-phân bậc nên $H^i_{\mathfrak{m}}(R/I)$ là môđun $\mathbb{Z}^n$-phân bậc. Với mỗi phần tử $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$, ta ký hiệu $H^i_{\mathfrak{m}}(R/I)_{\mathbf{a}}$ là thành phần bậc $\mathbf{a}$ của $H^i_{\mathfrak{m}}(R/I)$. Theo Takayama [14], ta có thể mô tả $H^i_{\mathfrak{m}}(R/I)_{\mathbf{a}}$ thông qua phức đơn hình:

$$\Delta_{\mathbf{a}}(I) := \{F \backslash G_{\mathbf{a}} \mid G_{\mathbf{a}} \subseteq F \subseteq V,\ x^{\mathbf{a}} \notin I_F\},$$

trong đó $G_{\mathbf{a}} := \{i|\ a_i < 0\}$, $I_F := k[x_i \mid i \in V \backslash F] \cap IR[x_i^{-1} \mid i \in F]$. Phức $\Delta_{\mathbf{a}}(I)$ được gọi là *phức bậc* của $I$ ứng với $\mathbf{a}$. Theo Terai, Trung [15], $\Delta_{\mathbf{a}}(I)$ phụ thuộc vào tập các iđêan nguyên tố liên kết của $I$.

## 1.3 Iđêan nguyên tố liên kết và địa phương hóa

Cho $I := I(\Gamma)$ là iđêan cạnh của đồ thị $\Gamma$. Mỗi iđêan nguyên tố liên kết của thừa $I^t$ được mô tả qua các phủ của đồ thị $\Gamma$. Hơn nữa các iđêan nguyên tố liên kết tối tiểu tương ứng 1-1 với các phủ tối tiểu.

Do vậy ta chỉ cần miêu tả tổ hợp đối với các iđêan nguyên tố liên kết nhúng của $I^t$. Để làm điều đó chúng tôi đưa ra khái niệm lõi của một tập đỉnh.

Cho $F \subseteq V$, ta gọi tập các đỉnh của $F$ mà không kề với đỉnh nào trong tập $V \setminus F$ là *lõi* của $F$, ký hiệu $\mathrm{c}(F)$.

Mệnh đề dưới đây cho ta thấy rằng lõi của một phủ $F$ có thể được dùng để đặc trưng cho việc $P_F$ có là iđêan nguyên tố liên kết của $I^t$ hay không. Hơn nữa, bài toán còn được quy về trường hợp khi nào một iđêan cực đại thuần nhất là iđêan nguyên tố liên kết của lũy thừa của một iđêan cạnh.

**Mệnh đề 1.3.3.** *Cho $F$ là một phủ của đồ thị $\Gamma$ và đặt*

$$S = k[x_i|\ i \in \mathrm{c}(F)], J = I(\Gamma_{\mathrm{c}(F)}).$$

*Gọi $\mathfrak{n}$ là iđêan thuần nhất cực đại của $S$. Khi đó $P_F$ là một iđêan nguyên tố liên kết của $I^t$ khi và chỉ khi $\mathfrak{n}$ là một iđêan nguyên tố liên kết của $J^t$.*

# Chương 2

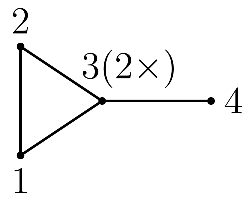
# Đặc trưng $\operatorname{Emb}(I^t)$

Bão hòa của iđêan $I$ là iđêan $\tilde{I} := \cup_{m\geq 1}(I : \mathfrak{m}^m)$. Trong chương này, trước hết chúng tôi tìm cách đặc trưng bão hòa của các lũy thừa của iđêan cạnh. Cụ thể là cho trước một đơn thức $x^{\mathbf{a}}$ chúng tôi đặc trưng điều kiện $x^{\mathbf{a}} \in \widetilde{I^t} \setminus I^t$ bằng các công cụ tổ hợp. Tiếp theo, chúng tôi tìm cách mô tả các iđêan nguyên tố liên kết nhúng của $I^t$.

## 2.1 Đồ thị có trọng

Cho trước đồ thị $\Gamma$ trên tập đỉnh $V = \{1, \ldots, n\}$. Nếu ta gán cho mỗi đỉnh $i$ của $\Gamma$ số nguyên dương $w_i$ thì ta gọi cặp $\Omega := (\Gamma, \mathbf{w})$ là *đồ thị có trọng*, trong đó $\mathbf{w} := (w_1, \ldots, w_n)$. Ta gọi $\Gamma$ là *đế* của $\Omega$ và $\mathbf{w}$ là *véctơ trọng*. Hai đỉnh được gọi là *kề nhau* trong $\Omega$ nếu chúng kề nhau trong đồ thị đế. Chú ý rằng mỗi đồ thị $\Gamma$ thông thường luôn có thể được xem là một đồ thị có trọng bằng cách gán cho mọi đỉnh của nó trọng 1.

**Ví dụ 2.1.1.** Cho $\Omega$ là đồ thị có trọng với đế là hợp của tam giác trên tập đỉnh $\{1, 2, 3\}$ với cạnh $\{3, 4\}$ và trọng của các đỉnh theo thứ tự là $1, 1, 2, 1$.




Hình 2.1. Đồ thị có trọng

Một *ghép cặp* của đồ thị có trọng $\Omega$ là một họ $M$ các cạnh của $\Omega$ không nhất thiết khác nhau sao cho mỗi đỉnh của $\Omega$ có số lần xuất hiện trong $M$ không lớn hơn trọng của nó. Tương tự như với đồ thị thông thường, số cạnh lớn nhất của một ghép cặp của $\Omega$ được gọi là *chỉ số ghép cặp* của $\Omega$ và được ký hiệu là $\nu(\Omega)$.

## 2.2 Đơn thức trong bão hòa

Trong phần này chúng tôi xác định một đồ thị có trọng tương ứng với mỗi véctơ $\mathbf{a}$. Đồ thị đó được định nghĩa như sau.

Cho $\Omega$ là đồ thị có trọng trên tập đỉnh $V$ và $\Gamma$ là đế của $\Omega$. Với $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ ta ký hiệu $V_{\mathbf{a}} := \{i \in V |\ a_i > 0\}$. Gán cho mỗi đỉnh $i \in V_{\mathbf{a}}$ trọng mới là $a_i$ ta thu được đồ thị có trọng trên tập đỉnh $V_{\mathbf{a}}$ với đế là đồ thị cảm sinh $\Gamma_{V_{\mathbf{a}}}$. Ta ký hiệu đồ thị này là $\Gamma_{\mathbf{a}}$.

Bây giờ, việc một đơn thức $x^{\mathbf{a}}$ nằm trong một lũy thừa nào đó của $I = I(\Gamma)$ có thể được đặc trưng tổ hợp bằng bổ đề dưới đây.

**Bổ đề 2.2.1.** *Cho $\mathbf{a}$ là véctơ có các tọa độ không âm. Khi đó $x^{\mathbf{a}} \in I^t$ khi và chỉ khi $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}}) \geq t$.*

Với đỉnh $i \in V$, ta ký hiệu $N_{\mathbf{a}}(i)$ là tập các đỉnh trong $\Gamma_{\mathbf{a}}$ kề với $i$ và đặt $\deg_{\mathbf{a}}(i) := \sum\limits_{j \in N_{\mathbf{a}}(i)} a_j$.

Tương tự như Bổ đề 2.2.1, một đơn thức $x^{\mathbf{a}}$ nằm trong bão hòa của một lũy thừa nào đó của $I = I(\Gamma)$ có thể được đặc trưng qua chỉ số ghép cặp của một đồ thị có trọng thu được từ $\Gamma_{\mathbf{a}}$. Từ đó ta nhận được một tiêu chuẩn tổ hợp mô tả điều kiện $x^{\mathbf{a}} \in \widetilde{I^t} \setminus I^t$.

**Định lý 2.2.4.** $x^{\mathbf{a}} \in \widetilde{I^t} \setminus I^t$ *khi và chỉ khi các điều kiện sau được thỏa mãn:*

(i) $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}}) < t$,

(ii) $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}} - N_{\mathbf{a}}(i)) \geq t - \deg_{\mathbf{a}}(i)$ *với mọi* $i \in V$.

trong đó $\Gamma_{\mathbf{a}} - N_{\mathbf{a}}(i)$ là đồ thị con cảm sinh của $\Gamma_{\mathbf{a}}$ trên tập đỉnh $V_{\mathbf{a}} \setminus N_{\mathbf{a}}(i)$.

## 2.3 Đồ thị bão hòa

Để nghiên cứu các điều kiện chỉ liên quan đến các tính chất nội tại của đồ thị $\Gamma_{\mathbf{a}}$ chúng tôi đưa ra một khái niệm đó là khái niệm đồ thị bão hòa, cụ thể như sau.

Cho đồ thị có trọng $\Omega$ trên tập đỉnh $U$. Số nguyên dương $\sum\limits_{j \in N_\Omega(i)} w_j$ được gọi là *bậc* của đỉnh $i \in U$ trong $\Omega$, ký hiệu $\deg_\Omega(i)$. Nếu $\Omega$ thỏa mãn các điều kiện:

(i) $\nu(\Omega) < t$,

(ii) $\nu(\Omega - N_\Omega(i)) \geq t - \deg_\Omega(i)$ với mọi $i \in U$,

thì $\Omega$ được gọi là *đồ thị $t$-bão hòa*.

**Ví dụ 2.3.1.** Mỗi chu trình lẻ độ dài $2t - 1$ mà mọi đỉnh của nó đều có trọng 1 là một đồ thị $t$-bão hòa.

## 2.4 Đặc trưng iđêan nguyên tố liên kết

Bằng các công cụ tổ hợp, chúng tôi chứng tỏ được một số tính chất của đồ thị $t$-bão hòa. Từ các tính chất đó ta thu được điều kiện cần dưới đây để $P_F$ là iđêan nguyên tố liên kết nhúng của $I^t$.

**Định lý 2.4.2.** *Cho $P_F$ là iđêan nguyên tố nhúng của $I^t$. Khi đó $F$ là tối tiểu trong số các phủ của $\Gamma$ chứa $N[U]$ với tập $U \subseteq V$ mà mọi thành phần liên thông của $\Gamma_U$ chứa ít nhất một chu trình lẻ có độ dài $\leq 2t - 1$.*

Điều kiện trên không đủ để $P_F$ là iđêan nguyên tố liên kết nhúng của $I^t$. Trong phần sau đây chúng tôi giới thiệu một lớp đồ thị mà sự tồn tại của nó trong đồ thị $\Gamma$ cho ta các iđêan nguyên tố nhúng của $I^t$.

Cho $\Omega$ là đồ thị có trọng trên tập đỉnh $U$ với véctơ trọng $\mathbf{a}$. Ta ký hiệu $\Omega - i$ là đồ thị cảm sinh của $\Omega$ trên tập đỉnh $U \setminus \{i\}$.

Nếu các điều kiện sau được thỏa mãn:

(i) $\nu(\Omega) < t$,

(ii) $\nu(\Omega - i) \geq t - a_i$ với mọi $i \in U$,

thì $\Omega$ được gọi là đồ thị *t-bão hòa mạnh*.

**Ví dụ 2.4.4.** Hợp của $t - 1$ tam giác giao nhau tại cùng một đỉnh là đồ thị $t$-bão hòa mạnh.

Điều kiện đủ dưới đây cho một iđêan nguyên tố liên kết nhúng của $I^t$ chỉ ra rằng nếu tồn tại một đồ thị $t$-bão hòa mạnh trên một tập con của $V$ thì ta có thể xây dựng được một iđêan như vậy.

**Định lý 2.4.7.** *$P_F$ là iđêan nguyên tố liên kết nhúng của $I^t$ nếu $F$ là tối tiểu trong số các phủ của $\Gamma$ chứa lân cận đóng $N[U]$ của tập đỉnh $U \subseteq V$ sao cho tồn tại một đồ thị $t$-bão hòa mạnh trên $U$.*

## 2.5 Đặc trưng tập ổn định

Một chu trình lẻ có độ dài $2s - 1$ hiển nhiên là đồ thị $s$-bão hòa mạnh trên $2s - 1$ đỉnh. Vì vậy sử dụng Định lý 2.4.7 và một Bổ đề kỹ thuật ta có thể xác định giá trị $t$ sao cho $P_F$ là iđêan nguyên tố nhúng của $I^t$.

**Định lý 2.5.4.** *Giả sử $F$ là tối tiểu trong số các phủ của $\Gamma$ chứa lân cận đóng $N[U]$ của tập đỉnh $U \subseteq V$ thỏa mãn mọi thành phần liên thông của $\Gamma_U$ chứa ít nhất một chu trình lẻ. Ta gọi $m$ là số thành phần liên thông của $\Gamma_U$ và $s_i$ là số lớn nhất sao cho thành phần liên thông thứ $i$ của $\Gamma_U$ (theo một thứ tự nào đó) có đồ thị $s_i$-bão hòa mạnh trên $2s_i - 1$ đỉnh, $i = 1, \ldots, m$. Khi đó $P_F$ là iđêan nguyên tố nhúng của $I^t$ với mọi $t \geq |U| - \sum_{i=1}^{m} s_i + 1$.*

Ta biết rằng tập các iđêan nguyên tố liên kết của $I^t$ được ký hiệu là

$\mathrm{Ass}(I^t)$. Trong [1], Brodmann đã chỉ ra rằng tồn tại số $t_0$ thỏa mãn

$$\mathrm{Ass}(I^t) = \mathrm{Ass}(I^{t_0})$$

với mọi $t \geq t_0$. Tập $\mathrm{Ass}(I^{t_0})$ được gọi là tập *ổn định* của $I$ và được ký hiệu bởi $\mathrm{Ass}^{\infty}(I)$. Trong [3, Theorem 4.1], Chen, Morey và Sung đã đưa ra thuật toán xác định các iđêan nằm trong tập $\mathrm{Ass}^{\infty}(I)$ khi $\Gamma$ là một đồ thị liên thông. Tuy nhiên đó là thuật toán đệ quy và khá phức tạp. Ở đây, từ Định lý 2.4.2 và Định lý 2.5.4 chúng tôi thu được một mô tả tường minh cho tập $\mathrm{Ass}^{\infty}(I)$.

**Hệ quả 2.5.5.** *Cho $F$ là một phủ của $\Gamma$. Khi đó $P_F$ thuộc $\mathrm{Ass}^{\infty}(I)$ khi và chỉ khi $F$ hoặc là phủ tối tiểu hoặc là tối tiểu trong số các phủ của $\Gamma$ chứa $N[U]$ với tập con $U$ của $V$ thỏa mãn mọi thành phần liên thông của đồ thị cảm sinh $\Gamma_U$ chứa ít nhất một chu trình lẻ.*

Số $t_0$ nhỏ nhất sao cho $\mathrm{Ass}(I^t) = \mathrm{Ass}(I^{t_0})$ với mọi $t \geq t_0$ được gọi là *chỉ số ổn định* của $\mathrm{Ass}(I^t)$ và được ký hiệu là $\mathrm{astab}(I)$. Ngoài miêu tả tập $\mathrm{Ass}^{\infty}(I)$ như trong Hệ quả 2.5.5 chúng tôi còn đưa ra chặn trên cho chỉ số $\mathrm{astab}(I)$.

Cho $U$ là tập các đỉnh sao cho mọi thành phần liên thông của $\Gamma_U$ chứa ít nhất một chu trình lẻ. Ta đặt $s(U) := |U| - \sum_{i=1}^{m} s_i + 1$ trong đó $m$ là số thành phần liên thông của $\Gamma_U$ và $s_i$ là số lớn nhất sao cho thành phần liên thông thứ $i$ của $\Gamma_U$ có đồ thị $s_i$-bão hòa mạnh trên $2s_i - 1$ đỉnh. Ta gọi $s(\Gamma)$ là số lớn nhất trong các $s(U)$ như trên (nếu $\Gamma$ là đồ thị hai phần thì ta đặt $s(\Gamma) = 1$), ta có hệ quả sau.

**Hệ quả 2.5.6.** *Cho $I$ là iđêan cạnh của đồ thị $\Gamma$. Khi đó*

$$\mathrm{astab}(I) \leq s(\Gamma).$$

# Chương 3

# Trường hợp $t = 2, 3, 4$

Trong chương này, chúng tôi phân loại đồ thị $t$-bão hòa và dạng các iđêan nguyên tố liên kết của $I^t$ với $t = 2, 3, 4$. Kết quả mới của chương này được trình bày ở các bài báo [9] và [10].

## 3.1 Trường hợp $t = 2$

Tập các iđêan nguyên tố liên kết của $I^2$ đã được miêu tả bởi Herzog-Hibi [8] và Terai-Trung [15]. Với phương pháp tổng quát của chúng tôi thì kết quả đó được suy ra ngay như một hệ quả trực tiếp.
**Định lý 3.1.1** [15, Theorem 3.8]. *Gọi $F$ là một phủ của $\Gamma$. Khi đó $P_F$ là iđêan nguyên tố liên kết của $I^2$ khi và chỉ khi $F$ là phủ tối tiểu hoặc tối tiểu trong số các phủ của $\Gamma$ chứa lân cận đóng của một tam giác.*

## 3.2 Trường hợp $t = 3$

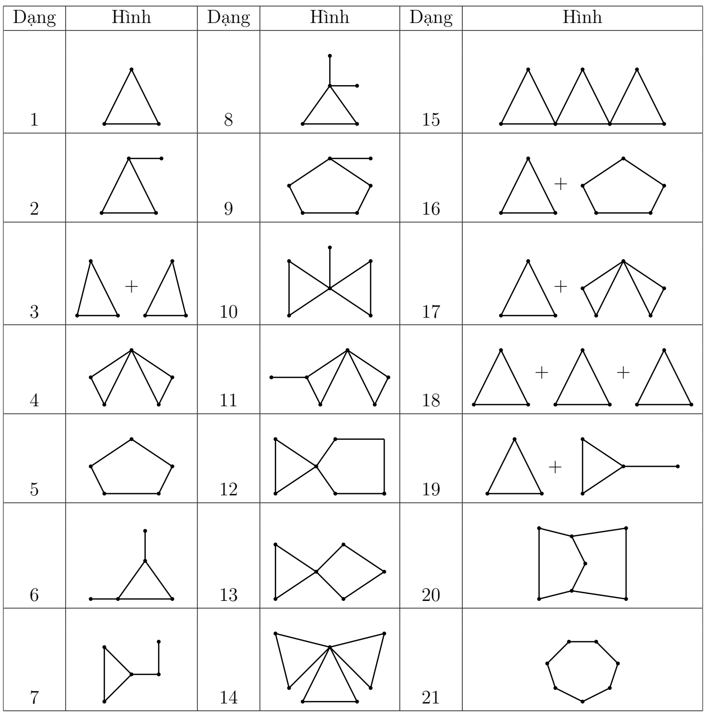
Ta có thể miêu tả một cách thuần túy tổ hợp tập các iđêan nguyên tố liên kết của $I^3$ nhờ vào miêu tả của tất cả các đơn thức $x^{\mathbf{a}} \in \widetilde{I^3} \setminus I^3$.
**Định lý 3.2.3.** *Gọi $F$ là một phủ của $\Gamma$. Khi đó $P_F$ là iđêan nguyên tố liên kết của $I^3$ khi và chỉ khi $F$ là phủ tối tiểu hoặc tối tiểu trong số các*

*phủ của $\Gamma$ chứa lân cận đóng của một tập đỉnh $U$ mà đồ thị cảm sinh $\Gamma_U$ của $\Gamma$ được căng bởi một trong các dạng sau: một tam giác, hợp của một cạnh và một tam giác giao nhau tại một đỉnh, hợp của hai tam giác không kề nhau, hợp của hai tam giác giao nhau tại một đỉnh, một ngũ giác.*

## 3.3 Trường hợp $t = 4$

Trường hợp này phức tạp hơn nên trước hết chúng tôi tìm các đồ thị 4-bão hòa. Sau đó chúng tôi miêu tả tất cả các đơn thức $x^{\mathbf{a}} \in \widetilde{I^4} \setminus I^4$. Từ đó chúng tôi nhận được miêu tả một cách thuần túy tổ hợp iđêan nguyên tố liên kết của $I^4$ như sau.

**Định lý 3.3.5.** *Gọi $F$ là một phủ của $\Gamma$. Khi đó $P_F$ iđêan nguyên tố liên kết của $I^4$ khi và chỉ khi $F$ là phủ tối tiểu hoặc tối tiểu trong số các phủ của $\Gamma$ chứa lân cận đóng của một tập đỉnh $U$ mà đồ thị cảm sinh $\Gamma_U$ của $\Gamma$ được căng bởi một trong các dạng ở Bảng 3.4.*




Bảng 3.4. Các đồ thị con ứng với $\operatorname{Ass}(I^4)$.

# Chương 4

# Về tính giảm của $\operatorname{depth} R/I^t$

Mục đích chính của chương này là ứng dụng các kết quả của các chương trước để nghiên cứu về hàm độ sâu. Cho $I$ là iđêan trong vành Noether $R$, M. Brodmann [2] đã chỉ ra rằng $\operatorname{depth} R/I^t$ ổn định với $t$ đủ lớn. Giá trị đó được gọi là độ sâu giới hạn và được ký hiệu là $\lim\limits_{t\to\infty} \operatorname{depth} R/I^t$. Đối với iđêan cạnh của một đồ thị thì người ta đặt ra giả thuyết là $\operatorname{depth} R/I^t \geq \operatorname{depth} R/I^{t+1}$ với mọi $t \geq 1$. Giả thuyết này đến nay vẫn chưa giải quyết được. Khi đồ thị là liên thông và có chứa ít nhất một chu trình lẻ thì $\lim\limits_{t\to\infty} \operatorname{depth} R/I^t = 0$. Vấn đề ở đây là khi nào thì $\operatorname{depth} R/I^t = 1$ kéo theo $\operatorname{depth} R/I^{t+1} = 0$.

## 4.1 Điều kiện để $\operatorname{depth} R/I^t = 1$

Ta biết rằng $\operatorname{depth} R/I^t$ chính là số tự nhiên $i$ nhỏ nhất sao cho $H^i_{\mathfrak{m}}(R/I^t) \neq 0$. Do đó $\operatorname{depth} R/I^t = 1$ khi và chỉ khi $H^0_{\mathfrak{m}}(R/I^t) = 0$ và $H^1_{\mathfrak{m}}(R/I^t) \neq 0$. Điều kiện $H^0_{\mathfrak{m}}(R/I^t) = 0$ hay là $\mathfrak{m} \notin \operatorname{Ass}(I^t)$ đã được xét ở chương 2. Còn điều kiện $H^1_{\mathfrak{m}}(R/I^t) \neq 0$ đã được Terai và Trung nghiên cứu trong [15, Proposition 1.6]. Trong mục này, luận án nghiên cứu tính giảm của hàm độ sâu khi $\operatorname{depth} R_j/(I^t)_j = 0$ với $j \in \{1, \ldots, n\}$, trong đó $R_j = k[x_i|\ i \neq j]$ và $I_j = IR[x_j^{-1}] \cap R_j$.

Ta ký hiệu $\mathfrak{n}$ là iđêan cực đại thuần nhất của $R_j$.

**Bổ đề 4.1.3.** *Cho đỉnh $j \in V$ và số nguyên dương $t \geq 1$ sao cho* $\operatorname{depth} R_j/(I^t)_j = 0$. *Khi đó:*

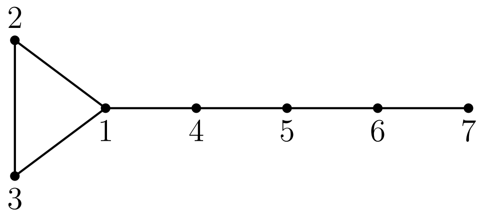
(i) *Nếu $I_j = \mathfrak{n}$ thì* $1 = \operatorname{depth} R/I > \operatorname{depth} R/I^2 = 0$,

(ii) *Nếu $I_j \neq \mathfrak{n}$ thì*

$$1 \geq \operatorname{depth} R/I^t \geq \operatorname{depth} R/I^{t+1} \geq \operatorname{depth} R/I^{t+2} \geq \operatorname{depth} R/I^{t+3} = 0.$$

**Ví dụ 4.1.4.** Đồ thị dưới đây cho ta thấy rằng $q = t + 3$ là giá trị nhỏ nhất mà độ sâu của $R/I^q$ triệt tiêu.

$\Gamma =$




Hình 4.1.

Ta có $\operatorname{depth} R_j/(I^2)_j = 0$ với $j = 6$, $\operatorname{depth} R/I^5 = 0$ và

$$\operatorname{depth} R/I^2 = 1 = \operatorname{depth} R/I^3 = \operatorname{depth} R/I^4.$$

## 4.2 Trường hợp $\operatorname{depth} R/I = 1$

Với $t = 1$, Định lý dưới đây cho ta thấy rằng điều kiện đồ thị $\Gamma$ chứa ít nhất một chu trình lẻ đủ để suy ra $\operatorname{depth} R/I^2 = 0$ nếu $\operatorname{depth} R/I = 1$. Không những thế điều này còn đúng đối với lớp iđêan rộng hơn, đó là iđêan cạnh của một siêu đồ thị.

**Định lý 4.2.1.** *Cho $\mathcal{H}$ là siêu đồ thị không là đồ thị hai phần, $I := I(\mathcal{H})$ là iđêan cạnh của $\mathcal{H}$. Khi đó nếu* $\operatorname{depth} R/I = 1$ *thì* $\operatorname{depth} R/I^2 = 0$.

Nếu $\operatorname{depth} R/I^t = 1$ với giá trị cố định $t \geq 2$ thì điều kiện $\Gamma$ liên thông và có chứa một chu trình lẻ không đủ để $\operatorname{depth} R/I^{t+1} = 0$.

## 4.3 Trường hợp depth $R/I^2 = 1$

Khi $\Delta_{\mathbf{a}}(I^t)$ không liên thông với $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ và $|V_{\mathbf{a}}| \geq 3$, chúng tôi không biết liệu rằng depth $R/I^{t+3} = 0$ khi depth $R/I^t = 1$. Chúng tôi trả lời được câu hỏi này với $t = 2$.

**Định lý 4.3.1.** *Giả sử* depth $R/I^2 = 1$. *Khi đó:*

$$\operatorname{depth} R/I^2 \geq \operatorname{depth} R/I^3 \geq \operatorname{depth} R/I^4 \geq \operatorname{depth} R/I^5 = 0.$$

## Các công trình liên quan đến luận án

1. H.T.T. Hien, H.M. Lam and N.V. Trung, *Saturation and associated primes of powers of edge ideals*, J. Algebra **439** (2015), 225–244.
2. H.T.T. Hien, H.M. Lam, *On the associated primes of the fourth power of edge ideals*, Acta Math. Vietnam **40** (2015), no. 3, 511–526.
3. H.T.T. Hien, H.M. Lam and N.V. Trung, *On the decrease of depth function for powers of edge ideals*, preprint.

## Các kết quả trong luận án được báo cáo tại

1. Xêmina tại phòng Đại số - Viện Toán học Hà nội, 1/2015, 4/2016.
2. Xêmina tại Viện nghiên cứu cao cấp về Toán, 4/2016.
3. Hội nghị Nghiên cứu sinh của Viện Toán học, 10/2014, 10/2015.
4. Hội nghị Đại số - Hình học - Tôpô, Tuần Châu, 12/2014.

# Tài liệu tham khảo


[1] M. Brodmann, *Asymptotic stability of* $\mathrm{Ass}(M/I^nM)$, Proc. Amer. Math. Soc. **74** (1979), 16–18.

[2] M. Brodmann, *The asymptotic nature of the analytic spread*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **86** (1979), 35–39.

[3] J. Chen, S. Morey and A. Sung, *The stable set of associated primes of the ideal of a graph*, Rocky Mountain J. Math. **32** (2002), 71–89.

[4] C. Francisco, H.T. Ha and A. Van Tuyl, *A conjecture on critical graphs and connections to the persistence of associated primes*, Discrete Math **310** (2010), 2176–2182.

[5] C.A. Francisco, H.T. Ha and A. Van Tuyl, *Colorings of hypergraphs, perfect graphs, and associated primes of powers of monomial ideals*, J. Algebra **331** (2011), 224–242.

[6] C.A. Francisco, H.T. Ha and A. Van Tuyl, *Associated primes of monomial ideals and odd holes in graphs*, J. Alg. Comb **32** (2010), 287–301.

[7] H.T. Ha and S. Morey, *Embedded associated primes of powers of squarefree monomial ideals*, J. Pure Appl. Algebra **214** (2010), 301–308.

[8] J. Herzog and T. Hibi, *Bounding the socles of powers of squarefree monomial ideals*, MSRI Book Series **68** (2015), 223-229.

[9] H.T.T. Hien, H.M. Lam, *On the associated primes of the fourth power of edge ideals*, Acta Math. Vietnam **40** (2015), no. 3, 511–526.

[10] H.T.T. Hien, H.M. Lam, N.V. Trung, *Saturation and associated primes of powers of edge ideals*, J. Algebra **439** (2015), 225–244.

[11] H.T.T. Hien, H.M. Lam and N.V. Trung, *On the decrease of depth function for powers of edge ideals*, preprint.

[12] J. Martinez-Bernal, S. Morey and R. Villarreal, *Associated primes of powers of edge ideals*, Collect. Math. **63** (2012), 361–374.

[13] A. Simis, W. Vasconcelos and R. Villarreal, *On the ideal theory of graphs*, J. Algebra **167** (1994), no. 2, 389–416.

[14] Y. Takayama, *Combinatorial characterizations of generalized Cohen-Macaulay monomial ideals*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie (N.S.) **48** (2005), 327–344.

[15] N. Terai and N.V. Trung, *On the associated primes and the depth of the second power of squarefree monomial ideals*, J. Pure Appl. Algebra **218** (2014), 1117–1129.