VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM
VIỆN TOÁN HỌC
-----oOo-----

Trần Nguyên An

VỀ ĐỐI ĐỒNG ĐIỀU ĐỊA PHƯƠNG VỚI GIÁ CỰC ĐẠI VÀ TÍNH CATENARY CỦA VÀNH NOETHER ĐỊA PHƯƠNG

Chuyên ngành: Đại số và lý thuyết số
Mã số: 62. 46. 05. 01

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HÀNỘI-2011

Công trình được hoàn thành tại:

Viện Toán học, Viện khoa học và Công nghệ Việt Nam

Tập thể hướng dẫn khoa học: GS. TSKH. Nguyễn Tự Cường

PGS. TS. Lê Thị Thanh Nhàn

Phản biện 1: …………………………………………………………

Phản biện 2: …………………………………………………………

Phản biện 3: …………………………………………………………

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án cấp viện họp tại: ..……

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

vào hồi …. ngày …. tháng …. năm ….

Có thể tìm hiểu luận án tại:

- Thư viện Quốc gia
- Thư viện Viện Toán học

Mở đầu

Lý thuyết môđun đối đồng điều địa phương được A. Grothendieck đưa ra lần đầu tiên và nhanh chóng trở thành công cụ hữu hiệu của Đại số giao hoán, Hình học đại số. Môđun đối đồng điều địa phương cho ta nhiều thông tin về môđun ban đầu cũng như về vành cơ sở. Giả sử $(R, \mathfrak{m})$ là vành giao hoán địa phương Noether và M là R-môđun hữu hạn sinh, có chiều Krull $\dim M = d$. Gần đây các tác giả N. T. Cường, N. T. Dung và L. T. Nhàn (2007) đã chỉ ra mối liên hệ giữa tính chất $(*)$ của môđun đối đồng điều địa phương cấp cao nhất với giá là iđêan cực đại và tính catenary của vành cơ sở. Tính chất $(*)$ được giới thiệu bởi N. T. Cường và L. T. Nhàn (2002) nhằm nghiên cứu chiều của môđun Artin. Tính chất này ngày càng được quan tâm trong việc nghiên cứu môđun Artin, môđun hữu hạn sinh và cấu trúc của vành cơ sở (xem các công trình của N. T. Cường, L. T. Nhàn, N. T. Dung, H. Zöschinger, L. G. Li). Trước hết, nhắc lại rằng một môđun Artin A được gọi là *thỏa mãn tính chất $(*)$* nếu

$$\operatorname{Ann}_R(0 :_A \mathfrak{p}) = \mathfrak{p} \text{ với mỗi iđêan nguyên tố } \mathfrak{p} \supseteq \operatorname{Ann}_R A.$$

Khi đó mối liên hệ giữa tính chất $(*)$ của môđun đối đồng điều và tính catenary của vành đưa ra bởi N. T. Cường, N. T. Dung và L. T. Nhàn (2007) được phát biểu như sau: môđun đối đồng điều địa phương cấp cao nhất $H^d_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$ khi và chỉ khi vành $R/\operatorname{Ann}_R H^d_{\mathfrak{m}}(M)$ là catenary. Chú ý rằng vành R được gọi là *catenary* nếu với mọi cặp iđêan nguyên tố $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ của R thì mọi dãy iđêan nguyên tố bão hoà giữa $\mathfrak{q}$ và $\mathfrak{p}$ đều có chung độ dài. Việc nghiên cứu tính catenary cho các vành được quan tâm bởi nhiều nhà toán học như W. Krull, M. Nagata, I. S. Cohen, D. Ferand, M. Raynaud, L. J. Ratliff, ...

Mục đích chính của luận án là nghiên cứu tính chất $(*)$ cho các môđun đối đồng điều địa phương cấp i bất kỳ, ứng với giá là iđêan cực đại trong mối liên hệ với tính catenary, tính catenary phổ dụng và tính không trộn lẫn của vành cơ sở. Đồng thời luận án đưa ra ứng dụng của tính chất $(*)$ trong việc nghiên cứu về chiều của môđun Artin, công thức bội liên kết, tính chất dịch chuyển địa phương, tập iđêan nguyên tố gắn kết cho các môđun đối đồng điều địa phương.

Luận án được chia làm 4 chương. Chương 1 nhắc lại một số kiến thức cơ sở như môđun đối đồng điều địa phương, tính catenary của vành, chiều, tập iđêan nguyên tố gắn kết và tính chất $(*)$ của môđun Artin. Một đặc trưng mới về tính chất $(*)$ của môđun Artin thông qua hệ tham số được trình bày trong phần cuối của chương. Chương 2, 3, 4 trình bày các kết quả thu được của luận án, viết dựa trên 03 bài báo, trong đó 02 bài đã đăng trên các tạp chí quốc tế trong danh sách SCI và 01 bài được nhận đăng ở tạp chí trong danh sách SCIE.

Trong suốt luận án, chúng tôi luôn giả thiết $(R, \mathfrak{m})$ là vành giao hoán địa phương Noether, M là một R-môđun hữu hạn sinh chiều Krull, $\dim M = d$ và A là một R-môđun Artin.

Trong Chương 2, chúng tôi trình bày những nghiên cứu về tính chất $(*)$ của các môđun đối đồng điều địa phương cấp tùy ý, mối quan hệ giữa tính chất $(*)$ của các môđun đối đồng điều địa phương với tập giả giá, tính catenary phổ dụng của vành $R/\operatorname{Ann}_R M$ và tính không trộn lẫn của các vành $R/\mathfrak{p}$ với $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M)$. Kết quả chính đầu tiên của chương chỉ ra một đặc trưng để môđun đối đồng điều địa phương $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$ thông qua tập giả giá thứ i của M (Định lý 2.1.2). Một ứng dụng của Định lý 2.1.2 chỉ ra rằng nếu vành $R/\operatorname{Ann}_R M$ là catenary phổ dụng và các thớ hình thức là Cohen-Macaulay thì $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$ với mọi $i \leqslant d$ (Hệ quả 2.1.4). Từ đó, ta đặt ra câu hỏi: môđun M và vành cơ sở R có những tính chất gì khi các môđun đối đồng điều địa phương $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$ với mọi i? Định lý 2.2.1 trả lời một phần cho câu hỏi đó. Năm 1980, M. Nagata đã đưa ra câu hỏi: Giả sử $(R, \mathfrak{m})$ là miền nguyên địa phương Noether không trộn lẫn. Gọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$. Liệu rằng $R/\mathfrak{p}$ không trộn lẫn? Năm 1983, Brodmann và Rotthaus đã xây dựng một phản ví dụ cho câu hỏi của M. Nagata. Định lý 2.2.4 đưa ra một tiêu chuẩn của tính không trộn lẫn cho vành $R/\mathfrak{p}$ với $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$ và $\dim R/\mathfrak{p} \geq d - 1$.

Trong Chương 3, chúng tôi giới thiệu khái niệm môđun Artin *tựa không trộn lẫn*. Một số tính chất của môđun Artin tựa không trộn lẫn được trình bày trong tiết một của chương. Kết quả đầu tiên của Chương 3 chỉ ra mối liên hệ giữa tính catenary của vành, tính chất $(*)$ và chiều của môđun Artin tựa không trộn lẫn (Định lý 3.1.5). Chúng tôi đã xây dựng những ví dụ trong chương này chứng tỏ giả thiết tựa không trộn lẫn trong Định lý 3.1.5 không thể bỏ đi được (Ví dụ 3.1.6 và Ví dụ 3.1.7). Một câu hỏi tự nhiên đặt ra là chiều ngược lại của Định lý 3.1.5 có còn đúng không? Gần đây chúng tôi đã xây dựng ví dụ chứng tỏ rằng điều đó không đúng (Ví dụ 3.2.2). Tuy nhiên chúng tôi đã chỉ ra điều ngược lại là đúng cho các môđun đối đồng điều địa phương tựa không trộn lẫn (Định lý 3.2.4). Chú ý rằng, môđun đối đồng điều địa phương cấp cao nhất $H^d_{\mathfrak{m}}(M)$ là môđun Artin không trộn lẫn. Do đó Định lý 3.2.4 mở rộng kết quả chính của N. T. Cường, N. T. Dung và L. T. Nhàn (2007).

Trong Chương 4, chúng tôi đưa ra một số ứng dụng của tính chất $(*)$ của môđun đối đồng điều địa phương. Ứng dụng đầu tiên của tính chất $(*)$ của $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$, chúng tôi đưa ra công thức bội liên kết cho môđun đối đồng điều địa phương $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$, mở rộng kết quả của M. Brodmann và R. Y. Sharp (2002). Cụ thể, chúng tôi chỉ ra rằng nếu $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$, với mỗi i cố định cho trước thì ta có thể xây dựng công thức bội liên kết cho môđun đó. Ứng dụng thứ hai của tính chất $(*)$ là để nghiên cứu về tính chất dịch chuyển địa phương cho $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$, tức là đòi hỏi

$$\operatorname{Att}_{R_{\mathfrak{p}}}(H^{i-\dim R/\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})) = \{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{q} \in \operatorname{Att}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M)), \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\},$$

với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$. Khi R là một vành thương của vành địa phương Gorenstein, R.Y. Sharp (1975) đã chứng tỏ rằng $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ luôn thỏa mãn tính chất dịch chuyển địa phương. Tuy nhiên tính chất này không đúng trong trường hợp tổng quát. Do đó một câu hỏi tự nhiên được đặt ra là với điều kiện nào thì $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất dịch chuyển địa phương. Định lý 4.2.3 trả lời trọn vẹn câu hỏi trên cho các môđun đối đồng điều địa phương cấp cao nhất. Hiện tại chúng tôi chưa tìm được điều kiện cần và đủ để các môđun đối đồng điều địa phương cấp nhỏ hơn d thỏa mãn tính chất dịch chuyển địa phương. Vì vậy Định lý 4.2.4 có thể đưa ra một cách tiếp cận mới - đưa ra điều kiện cần và đủ để các môđun đối đồng điều địa phương cấp nhỏ hơn d thỏa mãn tính chất dịch chuyển địa phương cho tập các iđêan nguyên tố gắn kết tối tiểu. Kết quả cuối cùng trong chương này chúng tôi vận dụng tính chất $(*)$ của môđun đối đồng điều địa phương để đưa ra một số thông tin về tập các iđêan nguyên tố gắn kết của $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ liên hệ với tập giá, các tập giả giá của M (Định lý 4.3.1). Vận dụng kết quả đó chúng tôi chứng minh lại một trường hợp của Định lý triệt Faltings dưới giả thiết các môđun đối đồng điều địa phương thỏa mãn tính chất $(*)$ (Hệ quả 4.3.2).

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này chúng tôi nhắc lại một số kiến thức cơ sở và một số kết quả đã biết về môđun đối đồng điều địa phương, tính catenary của vành, chiều, tập iđêan nguyên tố gắn kết và tính chất $(*)$ cho các môđun Artin, tiện cho việc theo dõi các kết quả trong các chương sau. Chương 1 bao gồm các mục:

1.1. Môđun đối đồng điều địa phương

1.2. Tính catenary của vành

1.3. Biểu diễn thứ cấp và chiều của môđun Artin

1.4. Tính chất $(*)$ cho môđun Artin

Trong Mục 1.4, chúng tôi trình bày một đặc trưng mới của tính chất $(*)$ cho môđun Artin qua hệ tham số. Nhắc lại định nghĩa môđun Artin A *thỏa mãn tính chất (*)* được đưa ra bởi N. T. Cường và L. T. Nhàn (2002).

Định nghĩa 1.4.1. Một R-môđun Artin A được gọi là *thỏa mãn tính chất $(*)$* nếu

$$\operatorname{Ann}_R(0 :_A \mathfrak{p}) = \mathfrak{p} \text{ với mọi iđêan nguyên tố } \mathfrak{p} \supseteq \operatorname{Ann}_R A \qquad (*).$$

Khi đó đặc trưng mới về tính chất (*) được phát biểu như sau.

Mệnh đề 1.4.5. *Các điều kiện sau là tương đương:*

(i) *A thỏa mãn tính chất $(*)$;*

(ii) *Mọi hệ tham số của A là hệ tham số của $R/\operatorname{Ann}_R A$ và ngược lại.*

Chương 2

Môđun đối đồng điều địa phương thỏa mãn tính chất (*)

Năm 2002, N.T. Cường và L.T. Nhàn đã xét tính chất $(*)$ sau cho môđun Artin A

$$\mathrm{Ann}_R(0 :_A \mathfrak{p}) = \mathfrak{p} \text{ với mỗi iđêan nguyên tố } \mathfrak{p} \supseteq \mathrm{Ann}_R A. \quad (*)$$

Tính chất $(*)$ luôn đúng khi vành là đầy đủ theo tôpô $\mathfrak{m}$-adic. Khi R không đầy đủ, họ đã chỉ ra ví dụ về môđun Artin không thỏa mãn tính chất $(*)$. Năm 2007, N.T. Cường, N.T. Dung và L.T. Nhàn đã tìm ra mối liên hệ giữa tính chất $(*)$ của môđun đối đồng điều địa phương cấp cao nhất và tính catenary của vành cơ sở: $H^d_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$ khi và chỉ khi vành $R/\mathrm{Ann}_R H^d_{\mathfrak{m}}(M)$ là catenary. Tuy nhiên tồn tại một vành là catenary và tồn tại môđun đối đồng điều địa phương của vành đó, bậc nhỏ hơn d không thỏa mãn tính chất $(*)$. Điều này là động cơ dẫn ta nghĩ đến việc nghiên cứu tính chất $(*)$ cho các môđun đối đồng điều cấp thấp hơn chiều của môđun.

Mục đích của chương này trước hết là đưa ra một đặc trưng để môđun đối đồng điều địa phương $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$ với i bất kỳ thông qua tập giả giá thứ i và đưa ra liên hệ giữa giả chiều, chiều Krull, chiều Noether của môđun đối đồng điều địa phương. Mục đích tiếp theo của chương là nghiên cứu tính chất $(*)$ cho đồng loạt các môđun đối đồng điều địa phương $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ với $i = 0, 1, \ldots, d-1$. Kết quả thu được là tính catenary phổ dụng của vành thương $R/\mathrm{Ann}_R M$ và tính không trộn lẫn của một số vành địa phương $R/\mathfrak{p}$ với $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_R M$.

2.1 Giả giá và giả chiều

Khái niệm giả giá và giả chiều của một môđun hữu hạn sinh được M. Brodmann và R. Y. Sharp (2002) đưa ra nhằm xây dựng công thức bội cho các môđun đối đồng điều địa phương.

Định nghĩa 2.1.1. Cho $i \geq 0$ là số nguyên. *Giả giá thứ* i (pseudo-support) của M, kí hiệu là $\operatorname{Psupp}_R^i M$, được cho bởi công thức

$$\operatorname{Psupp}_R^i(M) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \ : \ H_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}^{i-\dim R/\mathfrak{p}}(M_{\mathfrak{p}}) \neq 0\}.$$

Giả chiều thứ i (pseudo dimension) của M, kí hiệu là $\operatorname{psd}_R^i(M)$, được cho bởi công thức

$$\operatorname{psd}_R^i(M) = \sup\{\dim R/\mathfrak{p} \ : \ \mathfrak{p} \in \operatorname{Psupp}_R^i(M)\}.$$

Để xây dựng được công thức bội, M. Brodmann và R. Y. Sharp quan tâm đến câu hỏi khi nào thì giả giá $\operatorname{Psupp}_R^i M$ của M là đóng của $\operatorname{Spec} R$ với tôpô Zariski? Khi $\operatorname{Psupp}_R^i M$ đóng thì giả chiều $\operatorname{psd}_R^i(M)$ là bao nhiêu? Nhìn chung giả giá thứ i của M không là tập con đóng. Xét trường hợp R là vành đầy đủ theo tôpô $\mathfrak{m}$-adic, bằng đối ngẫu Matlis và đối ngẫu địa phương, ta có

$$H_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}^{i-\dim R/\mathfrak{p}}(M_{\mathfrak{p}}) \cong D_{R_{\mathfrak{p}}}((D_R(H_{\mathfrak{m}}^i(M)))_{\mathfrak{p}}).$$

Do đó $\operatorname{Psupp}_R^i(M) = \operatorname{Var}\big(\operatorname{Ann}_R(H_{\mathfrak{m}}^i(M))$. Trong trường hợp vành tổng quát đẳng thức trên cho ta một đặc trưng cho môđun đối đồng điều địa phương $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ thoả mãn tính chất $(*)$.

Định lý 2.1.2. *Giả sử $i \geq 0$ là một số nguyên. Khi đó các điều kiện sau là tương tương:*

(i) $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ *thỏa mãn tính chất* $(*)$*;*

(ii) $\operatorname{Psupp}_R^i M = \operatorname{Var}\big(\operatorname{Ann}_R(H_{\mathfrak{m}}^i(M))\big)$.

Hơn nữa, nếu (i) và (ii) thoã mãn thì

$$\operatorname{psd}^i_R M = \operatorname{psd}^i_{\widehat{R}} \widehat{M} = \text{N-dim}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M)) = \dim R/\operatorname{Ann}_R H^i_{\mathfrak{m}}(M),$$

$$\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Psupp}^i_R M : \dim(R/\mathfrak{p}) = \operatorname{psd}^i_R M\}$$
$$= \{\widehat{\mathfrak{p}} \cap R : \widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Psupp}^i_{\widehat{R}} \widehat{M}, \dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}}) = \operatorname{psd}^i_{\widehat{R}} \widehat{M}\}.$$

Áp dụng Định lý 2.1.2 ta có hệ quả sau đưa ra mối liên hệ giữa cấu trúc vành là catenary phổ dụng và các thớ hình thức là Cohen-Macaulay và điều kiện các môđun đối đồng điều địa phương thỏa mãn tính chất $(*)$.

Hệ quả 2.1.4. *Nếu vành $R/\operatorname{Ann}_R M$ là catenary phổ dụng và các thớ hình thức là Cohen-Macaulay thì $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$ với mọi $i \leqslant d$.*

Năm 2007, N. T. Cường, N. T. Dung và L. T. Nhàn đã đưa ra đặc trưng của tính chất $(*)$ cho môđun đối đồng điều địa phương cấp cao nhất với giá cực đại $H^d_{\mathfrak{m}}(M)$ qua tính catenary của vành $R/\operatorname{Ann}_R H^d_{\mathfrak{m}}(M)$. Cùng với kết quả đó và Định lý 2.1.2, ta có hệ quả sau, chỉ ra điều kiện cần và đủ để tập giả giá thứ d của M là đóng.

Hệ quả 2.1.5. *Cho $\mathfrak{q}$ là một iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ của R. Khi đó các điều kiện sau là tương đương:*

(i) $\operatorname{Psupp}^d_R M$ *đóng.*

(ii) *Vành $R/\operatorname{Ann}_R(H^d_{\mathfrak{m}}(M))$ là catenary.*

(iii) $H^d_{\mathfrak{m}}(M)$ *thỏa mãn tính chất $(*)$.*

(iv) $\operatorname{Var}\big(\operatorname{Ann}(H^d_{\mathfrak{m}}(M))\big) = \operatorname{Psupp}^d_R M$.

2.2 Tính catenary phổ dụng của vành cơ sở

Trong mục này chúng tôi nghiên cứu tính chất $(*)$ cho các môđun đối đồng điều địa phương $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ với $i < d$ liên hệ với tính catenary phổ dụng và tính không trộn lẫn của vành địa phương.

Định lý 2.2.1. *Giả sử $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất ($*$) với mọi $i < d$. Khi đó $R/\mathfrak{p}$ là không trộn lẫn với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$ và vành $R/\operatorname{Ann}_R M$ là catenary phổ dụng.*

Chúng tôi đã đưa ra ví dụ chứng tỏ chiều ngược lại của Định lý 2.2.1 là không đúng (Ví dụ 2.2.5).

Mối liên hệ giữa tính chất (*) của môđun đối đồng điều cấp d và các môđun đối đồng điều điều cấp nhỏ hơn d được đưa ra trong hệ quả sau.

Hệ quả 2.2.2. *Giả sử $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất ($*$) với mọi $i < d$. Khi đó $H^d_{\mathfrak{m}}(M)$ cũng thỏa mãn tính chất ($*$).*

Năm 1980, M. Nagata đã đưa ra câu hỏi: Giả sử $(R, \mathfrak{m})$ là miền nguyên địa phương Noether không trộn lẫn. Gọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$. Liệu rằng $R/\mathfrak{p}$ không trộn lẫn? Năm 1983, M. Brodmann và C. Rotthaus đã xây dựng phản ví dụ cho câu hỏi của Nagata. Chúng tôi đưa ra một tiêu chuẩn về tính không trộn lẫn của vành $R/\mathfrak{p}$ với $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$ và $\dim R/\mathfrak{p} \geq d - 1$ trong kết quả sau.

Định lý 2.2.4. *Giả sử M không trộn lẫn và $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất (*) với mọi $i < d$. Khi đó $R/\mathfrak{p}$ cũng không trộn lẫn với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$ với $\dim(R/\mathfrak{p}) \geq d - 1$.*

Chương 3

Môđun đối đồng điều địa phương tựa không trộn lẫn

Nhắc lại năm 2007, N. T. Cường, N. T. Dung và L. T. Nhàn đã đưa ra mối liên hệ giữa tính chất $(*)$ của một loại môđun Artin đặc biệt - môđun đối đồng điều địa phương cấp cao nhất $H^d_{\mathfrak{m}}(M)$ và tính catenary của vành địa phương $R/\operatorname{Ann}_R H^d_{\mathfrak{m}}(M)$. Cụ thể $H^d_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$ khi và chỉ khi vành $R/\operatorname{Ann}_R H^d_{\mathfrak{m}}(M)$ là catenary. Nhận xét rằng $H^d_{\mathfrak{m}}(M) \cong H^d_{\mathfrak{m}\widehat{R}}(\widehat{M})$ như các $\widehat{R}$-môđun. Hơn nữa theo I. G. Macdonald và R. Y. Sharp (1972)

$$\operatorname{Att}_{\widehat{R}} H^d_{\mathfrak{m}}(M) = \{\widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Ass}_{\widehat{R}} \widehat{M} \mid \dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}}) = d\}.$$

Từ đó, dựa vào các khái niệm tựa không trộn lẫn, không trộn lẫn đã được định nghĩa cho các môđun hữu hạn sinh, chúng tôi định nghĩa và nghiên cứu lớp *môđun Artin tựa không trộn lẫn*, lớp *môđun Artin trộn lẫn*. Phát triển ý tưởng của N. T. Cường, N. T. Dung và L. T. Nhàn (2007), chúng tôi đã chỉ ra rằng nếu A là môđun Artin tựa không trộn lẫn, A thỏa mãn tính chất $(*)$ thì vành $R/\operatorname{Ann}_R A$ là catenary và $\dim(R/\operatorname{Ann}_R A) = \dim(\widehat{R}/\operatorname{Ann}_{\widehat{R}} A)$. Các ví dụ đã được xây dựng để chỉ ra rằng giả thiết tựa không trộn lẫn là không bỏ đi được. Từ đó một câu hỏi tự nhiên đặt ra là liệu rằng chiều ngược lại của kết quả trên vẫn đúng? Chúng tôi đã chỉ ra ví dụ chứng tỏ rằng chiều ngược lại là sai. Mặt khác chúng tôi cũng chỉ ra rằng chiều ngược lại là đúng cho một lớp môđun Artin, đó là lớp môđun đối đồng điều địa phương với giá là iđêan cực đại và tựa không trộn lẫn. Đây là một sự mở rộng của kết quả chính N. T. Cường, N. T. Dung và L. T. Nhàn (2007).

3.1 Môđun Artin tựa không trộn lẫn

Trước hết chúng tôi đưa ra định nghĩa môđun Artin tựa không trộn lẫn và một số lớp môđun liên quan, đưa ra một số nghiên cứu về môđun Artin tựa không trộn lẫn làm cơ sở cho việc trình bày kết quả chính trong Tiết 2 của chương này.

Định nghĩa 3.1.1. Môđun Artin A được gọi là *đẳng chiều* nếu $\dim(R/\mathfrak{p}) = \dim(R/\operatorname{Ann}_R A)$ với mọi iđêan nguyên tố gắn kết $\mathfrak{p} \in \min \operatorname{Att}_R A$ và A được gọi là *tựa không trộn lẫn* nếu $\widehat{R}$-môđun A là đẳng chiều, tức là $\dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}}) = \dim(\widehat{R}/\operatorname{Ann}_{\widehat{R}} A)$ với mọi $\widehat{\mathfrak{p}} \in \min \operatorname{Att}_{\widehat{R}} A$. Nếu $\dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}}) = \dim(\widehat{R}/\operatorname{Ann}_{\widehat{R}} A)$ với mọi $\widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R}} A$ thì ta nói A là *không trộn lẫn*.

Như vậy rõ ràng nếu A là không trộn lẫn thì A là tựa không trộn lẫn. Một ví dụ quen thuộc về lớp môđun Artin không trộn lẫn là môđun đối đồng điều địa phương cấp cao nhất với giá cực đại $H^d_{\mathfrak{m}}(M)$. Hơn nữa, với iđêan I tuỳ ý của R ta cũng có $H^d_I(M)$ là R-môđun Artin và

$$\operatorname{Att}_{\widehat{R}} H^d_I(M) \subseteq \{\widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Ass}_{\widehat{R}} \widehat{M} \mid \dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}}) = d\}.$$

Vì thế $H^d_I(M)$ cũng là môđun Artin không trộn lẫn.

Ta biết rằng nếu môđun Noether M là tựa không trộn lẫn thì với mọi phần hệ tham số $(x_1, \ldots, x_r)$ của M, môđun $M/(x_1, \ldots, x_r)M$ cũng là tựa không trộn lẫn. Sau đây chúng ta chỉ ra rằng điều tương tự cũng đúng cho các môđun Artin tựa không trộn lẫn. Đây là một kết quả bổ trợ cho việc chứng minh kết quả chính của tiết.

Bổ đề 3.1.2. *Nếu A là tựa không trộn lẫn thì $0 :_A (x_1, \ldots, x_r)R$ cũng là tựa không trộn lẫn với mọi phần hệ tham số $(x_1, \ldots, x_r)$ của A.*

Chú ý rằng nếu môđun Noether M là tựa không trộn lẫn thì M là đẳng chiều. Tuy nhiên, đối với các môđun Artin tựa không trộn lẫn thì điều tương tự là không đúng, tức là có những môđun Artin tựa không trộn lẫn không là đẳng chiều (Ví dụ 3.1.3).

Kết quả dưới đây đưa ra một điều kiện để một môđun Artin tựa không trộn lẫn là đẳng chiều. Đây cũng là một kết quả bổ trợ cho việc chứng minh kết quả chính của tiết.

Bổ đề 3.1.4. *Giả sử A là tựa không trộn lẫn,* $\dim(R/\operatorname{Ann}_R A) = \text{N-dim}\, A$ *và I là một iđêan của R. Khi đó A là đẳng chiều và*

$$\dim(R/\operatorname{Ann}_R(0:_A I)) = \text{N-dim}(0:_A I).$$

Vận dụng những kết quả chuẩn bị trên, ta có định lý sau đây. Định lý là kết quả chính của tiết, đưa ra mối liên hệ giữa tính chất (*) của môđun Artin tựa không trộn lẫn A, tính catenary của vành $R/\operatorname{Ann}_R A$ và chiều của A.

Định lý 3.1.5. *Giả sử A là tựa không trộn lẫn. Nếu A thỏa mãn tính chất (*) thì vành $R/\operatorname{Ann}_R A$ là catenary và*

$$\dim(R/\operatorname{Ann}_R A) = \text{N-dim}_R\, A.$$

Giả thiết tựa không trộn lẫn của A trong Định lí 3.1.5 là không bỏ đi được (Ví dụ 3.1.6 và Ví dụ 3.1.7).

3.2 Môđun đối đồng điều địa phương với giá cực đại

Một câu hỏi tự nhiên đặt ra là chiều ngược lại của Định lý 3.1.5 còn đúng không? Chúng tôi đã chỉ ra ví dụ chứng tỏ rằng nhìn chung chiều ngược lại là sai.

Ví dụ 3.2.2. *Cho k là một trường đặc số 0, $R = \left(\frac{k[x,y,u,v]}{(f)}\right)_{\mathfrak{m}}$, trong đó $k[x,y,u,v]$ là vành đa thức của các biến x,y,u,v, $f = xy - ux^2 - vy^2$ và $\mathfrak{m} = (x,y,u,v)$. Đặt $\mathfrak{p} = (y,u,v)R$. Ta có R là miền nguyên, catenary chiều 3, $\mathfrak{p}$ là iđêan nguyên tố $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = 2$, $0 \neq H^3_{\mathfrak{p}}(R)$ là môđun Artin tựa* *không trộn lẫn,*

$$\dim R/\operatorname{Ann}_R H^3_{\mathfrak{p}}(R) = \dim \widehat{R}/\operatorname{Ann}_{\widehat{R}} H^3_{\mathfrak{p}}(R) = 3$$

nhưng $H^3_{\mathfrak{p}}(R)$ không thỏa mãn tính chất (∗).

Sau đây chúng tôi sẽ chứng tỏ rằng chiều ngược lại của Định lý 3.1.5 vẫn còn đúng cho một lớp môđun Artin. Đó là các môđun đối đồng điều địa phương với giá là iđêan cực đại và tựa không trộn lẫn. Đây là kết quả chính của tiết và cũng là của chương.

Định lý 3.2.4. *Giả sử $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ là tựa không trộn lẫn. Khi đó các điều kiện sau là tương đương:*

(i) *$H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất (∗).*

(ii) *Vành $R/\operatorname{Ann}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M))$ là catenary và*

$$\dim\big(R/\operatorname{Ann}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M))\big) = \dim\big(\widehat{R}/\operatorname{Ann}_{\widehat{R}} H^i_{\mathfrak{m}}(M))\big).$$

Chú ý rằng môđun đối đồng điều địa phương cấp cao nhất $H^d_{\mathfrak{m}}(M)$ là không trộn lẫn và

$$\dim(\widehat{R}/\operatorname{Ann}_{\widehat{R}} H^d_{\mathfrak{m}}(M)) = \dim(R/\operatorname{Ann}_R H^d_{\mathfrak{m}}(M)) = d.$$

Vì thế, từ Định lí 3.2.4 ta có thể nhận lại kết quả chính của N. T. Cường, N. T. Dung và L. T. Nhàn (2007). Chúng tối cũng xây dựng ví dụ chứng tỏ điều kiện $\dim\big(R/\operatorname{Ann}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M))\big) = \dim\big(\widehat{R}/\operatorname{Ann}_{\widehat{R}} H^i_{\mathfrak{m}}(M))\big)$ trong Định lí 3.2.4 là không thể bỏ đi được (Chú ý 3.2.5). Cho đến nay chúng tôi chưa xây dựng được ví dụ chứng tỏ rằng giả thiết tựa không trộn lẫn của $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ trong Định lý 3.2.4 là cần thiết.

Chương 4

Ứng dụng của tính chất $(*)$

Trong chương này, chúng tôi đưa ra một số ứng dụng của tính chất $(*)$ của môđun đối đồng điều địa phương. Ứng dụng đặc trưng của tính chất $(*)$ của môđun đối đồng điều địa phương trong Định lý 2.1.2, chúng tôi thu được tính chất đóng cho các tập giả giá và công thức bội liên kết cho các môđun $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ với mỗi i cho trước, mở rộng kết quả của M. Brodmann và R. Y. Sharp (2002). Thông qua tính chất $(*)$ của các môđun đối đồng điều, chúng tôi đưa ra điều kiện cần và đủ để môđun đối đồng điều địa phương cấp cao nhất $H^d_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất dịch chuyển địa phương và đưa ra điều kiện cần và đủ để các môđun $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất dịch chuyển địa phương cho tập các iđêan nguyên tố tối tiểu. Bên cạnh đó, chúng tôi đưa ra một số tính chất của tập các iđêan nguyên tố gắn kết cho các môđun đối đồng điều địa phương trong mối liên hệ với các tập giả giá và tập giá của M dưới điều kiện các môđun đối đồng điều địa phương thỏa mãn tính chất $(*)$.

4.1 Bội của môđun đối đồng điều địa phương

Một trong những tính chất cơ bản của số bội cho các môđun hữu hạn sinh là công thức sau đây, được gọi là *công thức liên kết* của số bội

$$e(\mathfrak{q}, M) = \sum_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Supp} M, \dim R/\mathfrak{p}=d} \ell_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})e(\mathfrak{q}, R/\mathfrak{p}).$$

Cho đến nay người ta chưa xây dựng được một công thức tương tự cho các môđun Artin. M. Brodmann và R. Y. Sharp (2002) đã tìm cách xây dựng công thức bội liên kết cho một loại môđun Artin đặc biệt, đó là môđun $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$, với điều kiện vành cơ sở R là vành có tính chất "tốt". Để làm được điều này, trước hết họ giới thiệu khái niệm tập *giả giá thứ* i của M (xem Định nghĩa

2.1.1). Họ đã chứng minh rằng nếu R là vành catenary phổ dụng và có các thớ hình thức là Cohen-Macaulay thì tập giả giá $\mathrm{Psupp}^i_R(M)$ là tập con đóng và ta có công thức liên kết của bội $e(\mathfrak{q}, H^i_{\mathfrak{m}}(M))$ cho $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ tương ứng với iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ $\mathfrak{q}$ của R, với mọi M và với mọi i

$$e(\mathfrak{q}, H^i_{\mathfrak{m}}(M)) = \sum_{\substack{\mathfrak{p}\in \mathrm{Psupp}^i_R(M)\\ \dim(R/\mathfrak{p})=\mathrm{psd}^i_R(M)}} \ell_{R_{\mathfrak{p}}}\big(H^{i-\dim(R/\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})\big) e(\mathfrak{q}, R/\mathfrak{p}).$$

Ứng dụng Định lý 2.1.2, chúng tôi mở rộng kết quả trên của M. Brodmann và R. Y. Sharp cho trường hợp $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thoả mãn tính chất $(*)$.

Định lý 4.1.1. *Giả sử $i \geq 0$ là một số nguyên và $\text{N-dim}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M)) = s$. Với mỗi $\mathfrak{p} \in \mathrm{Psupp}^i_R M$, đặt*

$$T(\mathfrak{p}) = \{\widehat{\mathfrak{p}} \in \mathrm{Psupp}^i_{\widehat{R}}(\widehat{M}) : \dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}}) = \dim(R/\mathfrak{p}),\ \widehat{\mathfrak{p}} \cap R = \mathfrak{p}\}.$$

Giả sử $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất $(*)$. Khi đó các mệnh đề sau là đúng.

(i) $\mathrm{Psupp}^i_R M$ *là tập đóng.*

(ii) *Nếu $\mathfrak{p} \in \mathrm{Psupp}^i_R M$ với $\dim(R/\mathfrak{p}) = s$ thì $T(\mathfrak{p}) \neq \emptyset$, $\ell_{R_{\mathfrak{p}}}\big(H^{i-\dim(R/\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})\big)$ có độ dài hữu hạn khác không và*

$$\ell_{\widehat{R}_{\widehat{\mathfrak{p}}}}\big(H^{i-\dim(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}})}_{\widehat{\mathfrak{p}}\widehat{R}_{\widehat{\mathfrak{p}}}}(\widehat{M}_{\widehat{\mathfrak{p}}})\big) = \ell_{R_{\mathfrak{p}}}\big(H^{i-\dim(R/\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})\big)\ell_{\widehat{R}_{\widehat{\mathfrak{p}}}}(\widehat{R}_{\widehat{\mathfrak{p}}}/\mathfrak{p}\widehat{R}_{\widehat{\mathfrak{p}}})$$

với mọi $\widehat{\mathfrak{p}} \in T(\mathfrak{p})$.

(iii) *Cho $\mathfrak{q}$ là một iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ của R. Giả sử $H^i_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0$. Khi đó bội $e(\mathfrak{q}, H^i_{\mathfrak{m}}(M))$ của $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ tương ứng với $\mathfrak{q}$ thỏa mãn*

$$e(\mathfrak{q}, H^i_{\mathfrak{m}}(M)) = \sum_{\substack{\mathfrak{p}\in \mathrm{Psupp}^i_R(M)\\ \dim(R/\mathfrak{p})=\mathrm{psd}^i(M)}} \ell_{R_{\mathfrak{p}}}\big(H^{i-\dim(R/\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})\big) e(\mathfrak{q}, R/\mathfrak{p}).$$

Áp dụng Hệ quả 2.1.5 và Định lý 4.1.1, ta có thể thiết lập công thức bội liên kết cho môđun đối đồng điều cấp cao nhất khi vành là catenary. Hơn nữa áp dụng Hệ quả 2.1.4 và Định lý 4.1.1, ta thu lại được kết quả chính của M. Brodmann và R.Y. Sharp (2002).

4.2 Tính chất dịch chuyển địa phương

Địa phương hóa là một công cụ hữu hiệu trong việc nghiên cứu môđun hữu hạn sinh. Nhắc lại một tính chất quen thuộc chỉ ra mối liên hệ giữa tập các iđêan nguyên tố liên kết của môđun hữu hạn sinh M và địa phương hoá của nó tại một iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$

$$\operatorname{Ass}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{q}R_\mathfrak{p} \mid \mathfrak{q} \in \operatorname{Ass}_R M, \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\}$$

với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$.

Đối với các môđun Artin ta cũng muốn tìm một công thức tương tự như vậy cho tập các iđêan nguyên tố gắn kết. Tuy nhiên một công thức như vậy chưa được tìm ra. Năm 1975, R.Y. Sharp đã xét tính chất sau cho tập các iđêan nguyên tố gắn kết, hạn chế trên các môđun đối đồng điều địa phương với giá cực đại

$$\operatorname{Att}_{R_\mathfrak{p}}(H^{i-\dim R/\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})) = \{\mathfrak{q}R_\mathfrak{p} \mid \mathfrak{q} \in \operatorname{Att}_R(H^i_\mathfrak{m}(M)), \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\},$$

với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$, với mọi i. Ông đã chứng tỏ bao hàm thức sau luôn đúng

$$\operatorname{Att}_{R_\mathfrak{p}}(H^{i-\dim R/\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})) \subseteq \{\mathfrak{q}R_\mathfrak{p} \mid \mathfrak{q} \in \operatorname{Att}_R(H^i_\mathfrak{m}(M)), \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\},$$

với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$, với mọi i và ông gọi đó là *tính chất dịch chuyển địa phương tổng quát yếu*. Hơn nữa, khi R là một vành thương của vành địa phương Gorenstein, ông đã chứng tỏ dấu đẳng thức xảy ra và gọi đó là *tính chất dịch chuyển địa phương*. Mở rộng ta nói rằng môđun $H^i_\mathfrak{m}(M)$, với mỗi $i \geq 0$ cho trước, thỏa mãn *tính chất dịch chuyển địa phương* nếu đẳng thức

$$\operatorname{Att}_{R_\mathfrak{p}}(H^{i-\dim R/\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})) = \{\mathfrak{q}R_\mathfrak{p} \mid \mathfrak{q} \in \operatorname{Att}_R(H^i_\mathfrak{m}(M)), \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\},$$

này thỏa mãn với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$. Tính chất dịch chuyển địa phương không đúng trong trường hợp tổng quát. Vì vậy một câu hỏi tự nhiên được đặt ra là với điều kiện nào thì $H^i_\mathfrak{m}(M)$ thỏa mãn tính chất dịch chuyển địa phương?

Để trả lời câu hỏi đó, trước hết ta đưa ra một số kết quả bổ trở về tập giả giá và tính chất ($*$) của môđun đối đồng điều địa phương.

Bổ đề sau đưa ra tính chất tương tự cho tập giả giá với điều kiện vành là catenary.

Bổ đề 4.2.1. *Giả sử $i \geq 0$ là một số nguyên. Nếu vành $R/\operatorname{Ann}_R H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ là catenary thì*

$$\operatorname{Psupp}^{i-\dim R/\mathfrak{p}}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \supseteq \{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{q} \in \operatorname{Psupp}^i_R(M), \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\},$$

với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$. Dấu đẳng thức xảy ra nếu $R/\operatorname{Ann}_R M$ là catenary.

Mệnh đề sau chỉ ra mối liên hệ giữa tính chất ($*$) cho môđun đối đồng điều địa phương của M và môđun đối đồng điều địa phương của địa phương hóa của nó, mối liên hệ giữa giả giá của M và của $\widehat{M}$.

Mệnh đề 4.2.2. *Cho $i \geq 0$ là một số nguyên. Giả sử $R/\operatorname{Ann}_R H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ là catenary. Khi đó các điều kiện sau là tương đương:*

(i) *$H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất ($*$);*

(ii) *$H^{i-\dim R/\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$ thỏa mãn tính chất ($*$), với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M)$;*

(iii) $\operatorname{Psupp}^i_R(M) = \{\widehat{\mathfrak{p}} \cap R \mid \widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Psupp}^i_{\widehat{R}}(\widehat{M})\}$.

Kết quả chính đầu tiên của tiết đưa ra điều kiện cần và đủ để môđun đối đồng điều địa phương cấp cao nhất thỏa mãn tính chất dịch chuyển địa phương.

Định lý 4.2.3. *Các điều kiện sau là tương đương:*

(i) *$H^d_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất dịch chuyển địa phương;*

(ii) *Vành $R/\operatorname{Ann}_R H^d_{\mathfrak{m}}(M)$ là catenary;*

(iii) *$H^d_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất ($*$);*

(iv) $H^{d-\dim R/\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$ *thỏa mãn tính chất dịch chuyển địa phương với mọi* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M)$;

(v) $H^{d-\dim R/\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$ *thỏa mãn tính chất (*) với mọi* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M)$.

Hiện tại chúng tôi chưa tìm được điều kiện cần và đủ để các môđun đối đồng điều địa phương cấp nhỏ hơn d thỏa mãn tính chất dịch chuyển địa phương. Vì vậy kết quả sau đây có thể đưa ra một cách tiếp cận mới.

Định lý 4.2.4. *Cho $i \geq 0$ là một số nguyên. Giả sử $R/\operatorname{Ann}_R M$ là catenary. Khi đó các điều kiện sau là tương đương.*

(i) $\min \operatorname{Att}_{R_{\mathfrak{p}}}(H^{i-\dim R/\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})) = \{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{q} \in \min \operatorname{Att}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M)), \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\}$, *với* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$.

(ii) $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ *thỏa mãn tính chất (*);*

(iii) $H^{i-\dim R/\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$ *thỏa mãn tính chất (*) với mọi* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M)$.

4.3 Tập iđêan nguyên tố gắn kết, tập giá và tập giả giá

Giả sử X là một tập con trong $\operatorname{Spec}(R)$, ta ký hiệu $\min X$ là tập các iđêan tối tiểu của X, $\overline{X}$ là bao đóng của X theo tôpô Zariski và $\overset{\circ}{X}$ là $X \setminus \{\mathfrak{m}\}$. Khi R là ảnh đồng cấu của một vành địa phương Gorenstein, M. Brodmann và R. Y. Sharp đã đưa ra mối liên hệ giữa tập các iđêan nguyên tố gắn kết và tập giá như sau

$$\begin{aligned}
&\min\{\mathfrak{p} \in \overset{\circ}{\operatorname{Supp}}(M) : \operatorname{depth} M_{\mathfrak{p}} + \dim R/\mathfrak{p} = i\} \\
&\qquad = (\min \overset{\circ}{\operatorname{Att}}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M))) \setminus \overline{\bigcup_{j=0}^{i-1} \operatorname{Att}_R(H^j_{\mathfrak{m}}(M))}.
\end{aligned}$$

Nếu $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất (*) thì theo Định lý 2.1.2 $\operatorname{Psupp}^i_R(M) = \operatorname{Var}(\operatorname{Ann}_R H^i_{\mathfrak{m}}(M))$. Vì vậy $\operatorname{Psupp}^i_R(M) = \overline{\operatorname{Att}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M))}$. Định lý sau chứng minh lại kết quả trên của M. Brodmann và R. Y. Sharp với giả thiết yếu hơn, đồng thời chỉ ra mối liên hệ giữa tập các iđêan nguyên tố gắn kết, các tập giả giá và tập giá của M.

Định lý 4.3.1. *Giả sử $i \geq 0$ là một số nguyên. Khi đó các mệnh đề sau là đúng.*

(i) $\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M) \mid \operatorname{depth} M_{\mathfrak{p}} + \dim R/\mathfrak{p} = i\}$

$$= \operatorname{Psupp}^i_R(M) \setminus \textstyle\bigcup_{j=0}^{i-1} \operatorname{Psupp}^j_R(M).$$

(ii) *Nếu $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất (*) thì*

$$\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Att}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M)) \mid \operatorname{depth} M_{\mathfrak{p}} + \dim R/\mathfrak{p} = i\}$$
$$= \operatorname{Att}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M)) \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} \operatorname{Psupp}^j_R(M).$$

(iii) *Nếu $H^j_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất (*) với mọi $j \leqslant i$ thì*

$$\min\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M) \mid \operatorname{depth} M_{\mathfrak{p}} + \dim R/\mathfrak{p} = i\ \}$$
$$= (\min \operatorname{Att}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M))) \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} \operatorname{Var}(\operatorname{Ann}_R H^j_{\mathfrak{m}}(M)).$$

Công thức (iii) trong Định lý 4.3.1 có mối liên hệ với Định lý triệt của Faltings.

Hệ quả 4.3.2. *Giả sử $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thỏa mãn tính chất (*) với mọi i. Giả sử $\mathfrak{b}$ là một iđêan của R. Khi đó $f^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{m}}(M) = \lambda^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{m}}(M)$, trong đó*

$$f^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{m}}(M) := \inf\{i \in \mathbb{N} : \mathfrak{b} \not\subseteq \sqrt{(\operatorname{Ann}_R H^i_{\mathfrak{m}}(M))}\}$$

và

$$\lambda^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{m}}(M) = \inf\{\operatorname{depth} M_{\mathfrak{p}} + \dim R/\mathfrak{p}\ :\ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \setminus \operatorname{Var}(\mathfrak{b})\}.$$

Kết luận của luận án

1. Đặc trưng tính chất gọi là tính chất $(*)$ cho môđun đối đồng điều địa phương $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ thông qua tập giả giá $\operatorname{Psupp}^i(M)$.
2. Chỉ ra các quan hệ giữa tính chất $(*)$ của $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ và tính catenary phổ dụng của vành $R/\operatorname{Ann}_R M$, tính không trộn lẫn của vành $R/\mathfrak{p}$ với $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$.
3. Đặc trưng tính chất $(*)$ của môđun đối đồng điều địa phương $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ tựa không trộn lẫn thông qua tính catenary của vành cơ sở và chiều Noether của $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$.
4. Ứng dụng của tính chất $(*)$ để đưa ra công thức bội liên kết cho $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ và chỉ ra các mối quan hệ giữa các tập iđêan nguyên tố gắn kết, giả giá và giá qua địa phương hóa.
5. Một số bài toán phát triển trực tiếp của luận án: Nghiên cứu cấu trúc của lớp vành địa phương Noether $(R, \mathfrak{m})$ mà các môđun đối đồng điều địa phương $H^i_{\mathfrak{m}}(R)$ thỏa mãn tính chất $(*)$ với mọi i; Đặc trưng lớp vành địa phương Noether $(R, \mathfrak{m})$ mà $\operatorname{Supp}^i_R(M)$ là đóng với mọi R-môđun hữu hạn sinh M và với mọi i.

Các công trình liên quan đến luận án

1. L. T. Nhan and T. N. An (2009), "On the unmixedness and the universal catenaricity of local rings and local cohomology modules", *J. Algebra*, **321**, pp. 303-311.

2. L. T. Nhan and T. N. An (2010), "On the catenaricity of Noetherian local rings and quasi unmixed Artinian modules", *Comm. Algebra*, **38**, pp. 3728-3736.

3. T. N. An (2011), "On the attached primes and Shifted Localization Principle for local cohomology modules", *Algebra Colloquium* (to appear).

Các kết quả trong luận án đã được báo cáo và thảo luận tại

- Xemina Đại số và Lý thuyết số - Viện Toán học.

- Xemina Đại số Đại số giao hoán - Đại học Thái Nguyên.

- Đại hội Toán học toàn quốc, Quy Nhơn, 08/2008.

- Hội nghị nghiên cứu sinh của Viện Toán học, 10/2008, 10/2009, 10/2010.

- Hội nghị Đại số - Hình học - Tô pô, Huế, 09/2009.

- Hội thảo liên kết Nhật Bản - Việt Nam lần thứ năm về Đại số giao hoán, Hà Nội, 01/2010.

- Xemina Đại số giao hoán, Trường đại học tổng hợp Meiji, Nhật Bản, 03/2010.