BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO VIỆN KHOA HỌC & CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

VIỆN TOÁN HỌC

TRẦN ĐÌNH ĐỨC

VỀ TẬP XÁC ĐỊNH DUY NHẤT

CHO HÀM CHỈNH HÌNH NHIỀU BIẾN

Chuyên ngành: Giải tích

Mã số: 62.46.01.01

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Mở đầu

Một trong những ứng dụng sâu sắc của lý thuyết phân bố giá trị do R. Nevanlinna xây dựng là vấn đề xác định duy nhất cho các hàm phân hình khác hằng trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ qua điều kiện ảnh ngược của tập hợp điểm. Năm 1920, G. Pólya chứng minh Định lý 4 điểm sau: *Nếu hai hàm phân hình khác hằng f, g trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ có cùng ảnh ngược kể cả bội của 4 điểm phân biệt thì $f = \dfrac{ag+b}{cg+d}$ với những hằng số a, b, c, d nào đó thoả mãn $ad - bc \neq 0$.*

Năm 1926, R. Nevanlinna chứng minh được Định lý 5 điểm sau: *Nếu hai hàm phân hình khác hằng f, g trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ có cùng ảnh ngược không tính bội của 5 điểm phân biệt thì $f \equiv g$.*

Cho đến nay, có hai hướng nghiên cứu sau đây nhằm mở rộng Định lý 4 điểm, Định lý 5 điểm.

1) Xét nghịch ảnh riêng rẽ của điểm cho các hàm và nghịch ảnh của siêu phẳng, siêu mặt cho các ánh xạ chỉnh hình, với các tình huống không tính bội, có tính bội, tính với bội bị chặn, trong các trường hợp phức và p-adic.

2) Xét nghịch ảnh của tập hợp điểm cho các hàm và nghịch ảnh của tập hợp siêu phẳng, siêu mặt cho các ánh xạ chỉnh hình, với các tình huống không tính bội, có tính bội hoặc tính với bội bị chặn, trong các trường hợp phức và p-adic.

Hướng thứ nhất là sự mở rộng tự nhiên của Định lý 4 điểm và Định lý 5 điểm. Kết quả đầu tiên trong trường hợp phức thuộc về H. Fujimoto. Năm 1975, ông chứng minh được: *Nếu hai ánh xạ phân hình khác hằng $f, g : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ có cùng ảnh ngược tính cả bội của $3n + 1$ siêu phẳng ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ thì tồn tại một biến đổi tuyến tính xạ ảnh L của $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sao cho $L(f) = g$.*

Trong trường hợp p-adic W. Adams và E. Straus đã nhận được kết quả sau tương tự như Định lý 5 điểm của R. Nevanlinna:

Định lý A. *Giả sử* f, g *là hai hàm phân hình* p*-adic khác hằng sao cho đối với 4 giá trị phân biệt* a_1, a_2, a_3, a_4 *ta có* $f(z) = a_i$ *khi và chỉ khi* $g(z) = a_i, i = 1, 2, 3, 4$. *Khi đó* $f \equiv g$.

P. C. Hu-C. C. Yang, M. Ru mở rộng Định lý A cho các đường cong chỉnh hình p-adic không suy biến tuyến tính. Các ông đã chứng minh:

Định lý B. *Giả sử* $f, g : \mathbb{C}_p \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C}_p)$ *là hai đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính,* $H_i, 1 \leqslant i \leqslant 3n + 1$ *là 3n+1 siêu phẳng ở vị trí tổng quát trong* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}_p)$ *thoả mãn* $f^{-1}(H_i) \bigcap f^{-1}(H_j) = \emptyset$ *với mọi* $i \neq j$, $f^{-1}(H_i) = g^{-1}(H_i)$ *với mọi* $i = 1, ..., 3n + 1$ *và* $f(z) = g(z)$ *với mọi* $z \in \bigcup\limits_{i=1}^{3n+1} f^{-1}(H_i)$. *Khi đó* $f \equiv g$.

Từ đó, Vấn đề xác định duy nhất theo hướng thứ nhất được nghiên cứu liên tục và mạnh mẽ với kết quả của H. Fujimoto, M. Ru, L. Smiley, M. Shirosaki, Tran Van Tan, P. C. Hu - C. C. Yang, G. Dethloff - T.V. Tan, D.D. Thai - S. D. Quang, Z. Chen - Y. Li - Q. Yan, P. D. Thoan - P. V. Duc - S. D. Quang...

Sau đây là một số khái niệm:

Cho f là hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Đặt

$$E_f^{m_0}(S) = \bigcup_{a \in S} \big\{(z, m) \in \mathbb{C}\text{x}\mathbb{N} : f(z) = a \text{ với bội n và } m = \min(m_0, n)\big\}.$$

Trong trường hợp $m_0 = \infty$(tương ứng $m_0 = 1$), ta viết

$$E_f^{\infty}(S) = E_f(S), (\text{tương ứng } E_f^1(S) = \overline{E}_f(S)$$

Ký hiệu: $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là không gian xạ ảnh n chiều trên trường số phức $\mathbb{C}$.

Đường cong chỉnh hình f là ánh xạ $f = [f_1 : ... : f_{n+1}] : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ với $f_1, ..., f_{n+1}$ là các hàm nguyên, không có không điểm chung. Ánh xạ $\widetilde{f} = (f_1, ..., f_{n+1}) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ gọi là một biểu diễn rút gọn của f.

Nếu $\widetilde{f} = (f_1, ..., f_{n+1})$, $\widetilde{g} = (g_1, ..., g_{n+1})$ là hai biểu diễn rút gọn của f, thì tồn tại hàm nguyên c không có không điểm sao cho $f_i = cg_i$ với mọi i.

Nếu $f(z) = [c_1 : ... : c_{n+1}]$, ở đó $c_1, ..., c_{n+1}$ là các hằng số không đồng thời bằng 0, thì f được gọi là đường cong hằng.

Giả sử H là một siêu phẳng của $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ được xác định bởi phương trình $F = 0$, sao cho ảnh của f không chứa trong H. Đặt

$$E_f(H) = E_{F_\circ \widetilde{f}}(0), \ \ \overline{E}_f(H) = \overline{E}_{F_\circ \widetilde{f}}(0),$$
$$\overline{E}_f(H, \leqslant k) = \big\{z \in \mathbb{C} : F_\circ \widetilde{f}(z) = 0 \text{ không tính bội}, \ v_{F_\circ \tilde{f}}(z) \leqslant k\big\}.$$

F. Gross là người khởi xướng hướng nghiên cứu thứ hai. Năm 1977, ông đưa ra ý tưởng mới là không xét ảnh ngược của các điểm riêng rẽ mà xét ảnh ngược của các tập hợp điểm trong $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Ông đưa ra hai câu hỏi sau:

1) Tồn tại hay không tập S của $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sao cho với bất kỳ các hàm phân hình f, g thoả mãn điều kiện $E_f(S) = E_g(S)$, ta có $f \equiv g$?

2) Tồn tại hay không hai tập $\{S_1, S_2\}$ của $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sao cho bất kỳ các hàm phân hình f, g thoả mãn $E_f(S_i) = E_g(S_i), i = 1, 2$, ta có $f \equiv g$?

Tập S thoả mãn 1) gọi là tập xác định duy nhất (viết tắt là URS).

Tương tự S_1, S_2 thoả mãn 2) gọi là *song xác định duy nhất* (viết tắt là bi-URS).

Kết quả đầu tiên thuộc về F. Gross và C. C. Yang. Năm 1982, hai ông đã chứng minh tập $S = \{z \in \mathbb{C} : z + e^z = 0\}$, có vô hạn phần tử, là URS cho các hàm nguyên.

Đối với hàm phân hình, năm 1994, H. X. Yi lần đầu tiên đưa ra URS hữu hạn có 15 phần tử.

Năm 1998, G. Frank và M. Reinders, xây dựng URS có 11 phần tử.

Đối với hàm phân hình p-dic, năm 1999, P. C. Hu-C. C. Yang xây dựng URS có 10 phần tử.

Đối với câu hỏi thứ hai của F. Gross, năm 1998, A. Boutaba - A. Escassut chỉ ra tồn tại cặp bi-URS cho các hàm phân hình dạng $(\{z_1, ..., z_n\}, w)$ với mọi $n \geq 5$. Hiện nay, tập bi-URS tốt nhất là dạng $(\{z_1, ..., z_n\}, w)$ với mọi $n \geq 4$ thuộc về Hà Huy Khoái-Tạ Thị Hoài An.

Cho đến nay, đã có nhiều kết quả sâu sắc theo hướng thứ hai như của G. Frank - M. Reinders, H. Fujimoto, C. C. Yang - X. Hua, H. X. Yi, Mues E. - Reinders M., A. Escassut - L. Haddad - R Vidal, Ha Huy Khoai - T. T. H. An, W. Cherry- C. C. Yang, Ta Thi Hoai An, T. T. H. An - J. T. Y. Wang - P. M. Wong...

Theo hai hướng nghiên cứu nói trên, trong luận án này chúng tôi xét các vấn đề sau:

Giả sử $H_1, ..., H_q$ là các siêu phẳng ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^n$, $k_1, ..., k_q$ là các số nguyên dương. Gọi A là tập các đường cong chỉnh hình khác hằng từ $\mathbb{C}$ tới $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, $f, g \in A$, thoả mãn các điều kiện sau:

1)$\overline{E}_f(H_i, \leqslant k_i) = \overline{E}_g(H_i, \leqslant k_i)$,

2)$f = g$ trên $\bigcup\limits_{i=1}^{q} \overline{E}_f(H_i, \leqslant k_i)$ với mọi $i = 1, ..., q$ và $g \in A$.

Vấn đề 1. Tìm mối liên hệ giữa q với k_i và n để $\#A = 1$.

Vấn đề 2. Tìm siêu mặt X trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sao cho nếu $E_f(X) = E_g(X)$ thì $f \equiv g$.

Vấn đề 3.

3.1. Tương tự Vấn đề 1 và Vấn đề 2 trong trường hợp p-adic.

3.2. Tương tự Định lý 4 điểm, Định lý 5 điểm và thiết lập bi-URS cho trường hợp p-adic nhiều biến.

Trong các vấn đề trên, nếu số q và bậc của siêu mặt càng nhỏ, lớp xác định các siêu mặt càng rộng thì kết quả tìm được càng có ý nghĩa.

Vấn đề 1, chúng tôi xét cho các đường cong chỉnh hình khác hằng. Chúng tôi chọn cách tiếp cận khác là cải tiến Định lý chính thứ 2 của E. I. Nochka đối với đường cong chỉnh hình k-không suy biến tuyến tính để đưa ra các ước lượng giữa các hàm đặc trưng thông qua ước lượng giữa hàm đặc trưng với hàm đếm. Nhờ đó chúng tôi nhận được Định lý 1.2.3, Hệ quả 1.2.4. Từ Hệ quả 1.2.4, nhận được Định lý 5 điểm của R. Nevanlinna và kết quả của L. Smiley.

Sử dụng Bổ đề Borel chúng tôi nhận được Định lý duy nhất cho các đường cong chỉnh hình không suy biến đại số mà giả thiết xuất hiện ảnh ngược tính cả bội của siêu mặt Fermat và ảnh ngược không tính bội của họ các siêu phẳng ở vị trí tổng quát (Định lý 1.3.4).

M. Shirosaki là người đầu tiên xem xét Vấn đề 2. Ông sử dụng hai Định lý chính và đưa ra hai lớp siêu mặt xác định duy nhất cho các đường cong chỉnh hình không suy biến đại số.

Khi nghiên cứu Vấn đề 2, chúng tôi không sử dụng trực tiếp hai Định lý chính mà dùng hai kiểu Bổ đề Borel để xét sự suy biến của đường cong chỉnh hình. Từ đó đưa Vấn đề 2 về việc xét tính duy nhất nghiệm phân hình của phương trình hàm. Chúng tôi nhận được hai lớp siêu mặt xác định duy nhất cho các đường cong chỉnh hình không suy biến đại số (Định lý 1.3.9, Định lý 1.3.10).

Siêu mặt được xác định trong Định lý 1.3.9, tổng quát hơn và có bậc nd, $d \geq (2s-1)^2$ nhỏ hơn bậc của các siêu mặt được xác định bởi M. Shirosaki.

Khi giải quyết Vấn đề 3.1, chúng tôi cải tiến Định lý chính thứ hai trong trường hợp p-adic cho các đường cong chỉnh hình k-không suy biến tuyến tính (Bổ đề 2.2.2) để đưa ra các ước lượng giữa các hàm độ cao thông qua ước lượng giữa hàm này với hàm đếm. Kết quả chúng tôi nhận được là Định lý 2.2.3, tương tự Định lý 1.2.3 nhưng được xét trong trường hợp p-adic. Kết quả này tương tự của Adams-E. Straus, M. Ru, P.C. Hu-C. C. Yang đối với các đường cong chỉnh hình p-adic.

Chú ý rằng Định lý chính thứ hai trong trường hợp p-adic khác trường hợp phức, và số q trong Định lý 2.2.3 nhỏ hơn trong Định lý 1.2.3.

Sử dụng Bổ đề 2.2.2 và Định lý không điểm Hilbert, chúng tôi nhận được Định lý 2.2.7, thể hiện vấn đề duy nhất khi xét ảnh ngược tính cả bội của $n+1$ siêu mặt, với ảnh ngược không tính bội của các siêu phẳng ở vị trí tổng quát. Trong trường hợp phức chưa có kết quả tương tự Định lý 2.2.7.

Chúng tôi sử dụng hai Định lý chính trong trường hợp p-adic để xét sự suy biến của đường cong chỉnh hình, từ đó đưa vấn đề nghiên cứu về vấn đề duy nhất nghiệm phân hình của phương trình hàm p-adic. Kết quả, chúng tôi nhận được là hai lớp siêu mặt xác định duy nhất cho các đường cong chỉnh hình p-adic không suy biến đại số theo hướng trả lời câu hỏi thứ 2 của F. Gross trong trường hợp p-adic (Định lý 2.3.3, Định lý 2.3.4).

Có hai hướng giải quyết Vấn đề 3.2:

Hướng thứ nhất: Sử dụng nhát cắt thích hợp, chuyển hàm p-adic nhiều biến về hàm một biến, nhờ đó nhận được Mệnh đề 3.3.2. Từ đó, thu được các kết quả đối với đa thức duy nhất trong trường hợp nhiều biến, khi đã biết kết quả trong trường hợp một biến. Nhờ đó, nhận được các Định lý 3.3.3, Định lý 3.3.4. Đối với hướng thứ nhất, nhận xét và kết quả của phản biện là thực sự có ý nghĩa. Phản biện cũng nêu ý tưởng cho tác giả chứng minh Mệnh đề 3.2.5 là tương tự Mệnh đề 3.3.2, nhưng được xét đối với tập xác định duy nhất. Từ đó, nhận được Định lý 3.2.7, Định lý 3.2.8.

Hướng thứ hai: Thiết lập Định lý chính thứ 2 cho các hàm phân hình p-adic nhiều biến (Định lý 3.4.2). Sử dụng Định lý 3.4.2 với các kỹ thuật đánh giá giữa hàm độ cao với hàm đếm không tính bội, chúng tôi cũng nhận được các Định lý 3.2.7, Định lý 3.2.8, Định lý 3.3.3, Định lý 3.3.4 nói trên.

Luận án được chia thành ba chương.

Chương 1

Tập xác định duy nhất cho các đường cong chỉnh hình phức

Chúng tôi nghiên cứu Vấn đề 1, Vấn đề 2. Nội dung của chương này được viết dựa trên bài báo [3]. Chúng tôi đưa ra một số định lý duy nhất cho các đường cong chỉnh hình khác hằng (Định lý 1.2.3, Định lý 1.3.4), hai lớp đa thức duy nhất và siêu mặt xác định duy nhất cho các đường cong chỉnh hình không suy biến đại số. Đây là mở rộng Định lý 5 điểm và theo hướng trả lời câu hỏi của F. Gross (Định lý 1.3.9, Định lý 1.3.10).

1.1 Một số khái niệm.

Các khái niệm: Đường cong chỉnh hình f, biểu diễn rút gọn $\widetilde{f}$ của f, đường cong hằng, $E_f(H), \overline{E}_f(H), \overline{E}_f(H, \leqslant k)$ định nghĩa như phần mở đầu.

Định nghĩa 1. Giả sử f là hàm nguyên không đồng nhất không trên $\mathbb{C}$, với mỗi $a \in \mathbb{C}$, ký hiệu $v_f(a)$ là bậc của f tại điểm a, nghĩa là

$$f(z) = (z-a)^{v_f(a)} g(z),$$

ở đó $g(z)$ là hàm chỉnh hình trong một lân cận của a và $g(a) \neq 0$.

Cho k, l là các số nguyên dương và $r > 1$.

1) Hàm $v_f^{\leqslant k} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{N}$ xác định bởi $v_f^{\leqslant k}(z) = \begin{cases} v_f(z) & \text{nếu } \ v_f(z) \leqslant k, \\ 0 & \text{nếu } \ v_f(z) > k. \end{cases}$

và $\quad n_f^{\leqslant k}(r)=\sum\limits_{|z|\leqslant r} v_f^{\leqslant k}(z),\;\; n_f^{\leqslant k}(a,r)=n_{f-a}^{\leqslant k}(r).$

$$N_f^{\leqslant k}(a,r)=\int\limits_1^r \frac{n_f^{\leqslant k}(a,x)}{x}dx,\;\; N_f^{\leqslant k}(r)=N_f^{\leqslant k}(0,r),$$

$$N_{l,f}^{\leqslant k}(a,r)=\int\limits_1^r \frac{n_{l,f}^{\leqslant k}(a,x)dx}{x},\text{ ở đó } n_{l,f}^{\leqslant k}(a,r)=\sum_{|z|\leqslant r}\min\left\{v_{f-a}^{\leqslant k}(z),l\right\}.$$

2) Hàm $v_f^{>k}:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{N}$ xác định bởi $v_f^{>k}(z)=\begin{cases} v_f(z) & \text{nếu } v_f(z)>k\\ 0 & \text{nếu } v_f(z)\leqslant k,\end{cases}$

và $\; n_f^{>k}(r)=\sum\limits_{|z|\leqslant r} v_f^{>k}(z),\;\; n_f^{>k}(a,r)=n_{f-a}^{>k}(r),$

$$N_f^{>k}(a,r)=\int\limits_1^r \frac{n_f^{>k}(a,x)}{x}dx,\;\; N_f^{>k}(r)=N_f^{>k}(0,r),$$

$$N_{l,f}^{>k}(a,r)=\int\limits_1^r \frac{n_{l,f}^{>k}(a,r)}{x}dx,\text{ ở đó } n_{l,f}^{>k}(a,r)=\sum_{|z|\leqslant r}\min\left\{v_{f-a}^{>k}(z),l\right\}.$$

Định nghĩa 2. Các siêu mặt phân biệt $X_1,...,X_q$ của $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ được gọi là ở vị trí tổng quát nếu $n+1$ siêu mặt bất kỳ của $\{X_1,...,X_q\}$ có giao bằng rỗng.

Định nghĩa 3. Đường cong chỉnh hình $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ được gọi là *không suy biến đại số* (*không suy biến tuyến tính*) nếu không tồn tại đa thức thuần nhất P (dạng tuyến tính F) của các biến $z_1,\ldots,z_{n+1}$ sao cho $P(\widetilde{f})=0$ $(F(\widetilde{f})=0)$.

Nếu ảnh của f chứa trong một không gian con tuyến tính m-chiều nhưng không chứa trong không gian tuyến tính nào có số chiều nhỏ hơn m của $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ thì f được gọi là *m-không suy biến tuyến tính*.

Định nghĩa 4. Hàm đặc trưng của đường cong chỉnh hình $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ có biểu diễn rút gọn là $\widetilde{f}=(f_1,...,f_{n+1})$ được xác định bởi

$$T_f(r)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log||\widetilde{f}(re^{\imath\theta})||d\theta-\log||\widetilde{f}(0)||,$$

ở đó $||\widetilde{f}|| = \big(|f_1|^2 + ... + |f_{n+1}|^2\big)^{1/2}$.

Khi nghiên cứu Vấn đề 1, chúng tôi cải tiến Định lý chính thứ hai và xét trong tình huống ảnh ngược của các siêu phẳng có giao khác rỗng. Chúng tôi nhận được kết quả sau:

Định lý 1.2.3. *Giả sử $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là hai đường cong chỉnh hình khác hằng, $k_1, \ldots, k_q \in \mathbb{N}^*$ và $H_1, \ldots, H_q$ là các siêu phẳng của $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ở vị trí tổng quát sao cho $f(\mathbb{C}) \not\subset H_i$, $g(\mathbb{C}) \not\subset H_i$, $i = 1, \ldots, q$. Giả sử*

$$f(z) = g(z) \ \text{ với } \ z \in \bigcup_{i=1}^{q} \overline{E}_f(H_i, \leqslant k_i) \text{ và } z \in \bigcup_{i=1}^{q} \overline{E}_g(H_i, \leqslant k_i).$$

Nếu $q > 2n^2 + n + 1 + \sum_{i=1}^{q} \dfrac{n}{k_i + 1}$, *thì* $f \equiv g$.

Trong Định lý 1.2.3, thêm giả thiết $\overline{E}_f(H_i, \leqslant k_i) \bigcap \overline{E}_f(H_j, \leqslant k_j) = \emptyset$, với mọi $1 \leqslant i \neq j \leqslant q$ thì ta có

Hệ quả 1.2.4. *Giả sử $f, g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là hai đường cong chỉnh hình khác hằng, $k_1, ..., k_q \in \mathbb{N}^*$ và $H_1, ..., H_q$ là các siêu phẳng của $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ở vị trí tổng quát sao cho $f(\mathbb{C}) \not\subset H_i$, $g(\mathbb{C}) \not\subset H_i$, $i = 1, \ldots, q$. Giả sử*

$\overline{E}_f(H_i, \leqslant k_i) \bigcap \overline{E}_f(H_j, \leqslant k_j) = \emptyset$, *với mọi* $1 \leqslant i \neq j \leqslant q$,

$f(z) = g(z)$ *với* $z \in \overline{E}_f(H_i, \leqslant k_i)$ *và* $z \in \overline{E}_g(H_i, \leqslant k_i), i = 1, ..., q$.

Nếu $q > 3n + 1 + \sum_{i=1}^{q} \dfrac{n}{k_i + 1}$ *thì* $f \equiv g$.

Nhận xét 1. Từ Hệ quả 1.2.4, ta nhận được Định lý 5 điểm của R.Nevanlinna khi cho $k_i \to \infty$ và $n = 1$, được kết quả của Smiley khi cho $k_i \to \infty$.

1.2 Tập xác định duy nhất cho các đường cong chỉnh hình không suy biến đại số

Định nghĩa 5. Đa thức khác hằng $P \in \mathbb{C}[z]$ được gọi là *đa thức duy nhất cho các hàm phân hình* nếu với mọi f, g là các hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}$ thoả mãn điều kiện $P(f) = P(g)$ ta có $f = g$.

Tương tự, đa thức khác hằng $P \in \mathbb{C}[z]$ được gọi là *đa thức duy nhất mạnh* *cho các hàm phân hình* nếu với mọi f, g là các hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}$ và hằng số $c \neq 0$ thoả mãn $P(f) = cP(g)$, ta có $f = g$.

Đa thức duy nhất, đa thức duy nhất mạnh cho các hàm phân hình viết tắt là UPM và SUPM.

Định nghĩa 6. Đa thức thuần nhất P của các biến $z_1, \ldots, z_{n+1}$ là *đa thức duy nhất cho các đường cong chỉnh hình không suy biến đại số* nếu với mọi đường cong chỉnh hình không suy biến đại số $f, g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ có biểu diễn rút gọn tương ứng là $\widetilde{f}, \widetilde{g}$ thoả mãn điều kiện $P(\widetilde{f}) = P(\widetilde{g})$ ta có $f = g$.

Tương tự, đa thức thuần nhất P của các biến $z_1, \ldots, z_{n+1}$ là *đa thức duy nhất mạnh cho các đường cong chỉnh hình không suy biến đại số* nếu với mọi đường cong chỉnh hình không suy biến đại số $f, g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ có biểu diễn rút gọn tương ứng là $\widetilde{f}, \widetilde{g}$, và hằng số $c \neq 0$ thoả mãn điều kiện $P(\widetilde{f}) = cP(\widetilde{g})$ ta có $f = g$.

Đa thức duy nhất, đa thức duy nhất mạnh cho các đường cong chỉnh hình không suy biến đại số viết tắt là UPC và SUPC.

Định nghĩa 7. Siêu mặt trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ được xác định bởi phương trình $x_1^d + ... + x_{n+1}^d = 0$ được gọi là siêu mặt Fermat.

Trước tiên, chúng tôi đưa ra Định lý duy nhất cho các đường cong chỉnh hình không suy biến đại số mà trong giả thiết xuất hiện ảnh ngược tính cả bội của siêu mặt Fermat và ảnh ngược không tính bội của họ các siêu phẳng ở vị trí tổng quát.

Định lý 1.3.4. *Giả sử $f, g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là hai đường cong chỉnh hình không suy biến đại số, X là siêu mặt Fermat bậc d, $H_1, ..., H_q$ là các siêu phẳng ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Giả sử*

$E_f(X) = E_g(X)$,

$f(z) = g(z)$ *với mọi* $z \in \bigcup_{i=1}^{q} \overline{E}_f(H_i, \leqslant k_i)$.

Nếu $q > 2n^2 + n + 1 + \sum_{i=1}^{q} \frac{n}{k_i + 1}$ *và* $d \geq (2n+1)^2$ *thì* $f \equiv g$. Trong Định lý1.3.4, thêm giả thiết $\overline{E}_f(H_i, \leqslant k_i) \bigcap \overline{E}_f(H_j, \leqslant k_j) = \emptyset$, với mọi $1 \leqslant i \neq j \leqslant q$ thì ta có

Hệ quả 1.3.5. *Giả sử* $f, g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *là hai đường cong chỉnh hình không suy biến đại số, X là siêu mặt Fermat bậc $d, H_1, ..., H_q$ là các siêu phẳng ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Giả sử*

$\overline{E}_f(H_i, \leqslant k_i) \bigcap \overline{E}_f(H_j, \leqslant k_j) = \emptyset$ *với mọi* $i \neq j$,

$E_f(X) = E_g(X)$,

$f(z) = g(z)$ *với* $z \in \bigcup_{i=1}^{q} \overline{E}_f(H_i, \leqslant k_i)$.

Nếu $q > 3n + 1 + \sum_{i=1}^{q} \frac{n}{k_i + 1}$ *và* $d \geq (2n+1)^2$ *thì* $f \equiv g$.

Tiếp theo chúng tôi xây dựng lớp các đa thức duy nhất cho các đường cong chỉnh hình không suy biến đại số.

Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2m + 9$, $(m, n) = 1$, $m \geq 2$, $P_i(z) = z^n - a_i z^{n-m} + b_i$, $0 \neq a_i, b_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, ..., s$ và $b_i^{2d} \neq b_j^d b_l^d$ với $i \neq j$, $i \neq l$.

Xét các đa thức thuần nhất sau:

$$Q_i = \widetilde{P}_i(z_i, z_{s+1}) = z_i^n - a_i z_i^{n-m} z_{s+1}^m + b_i z_{s+1}^n, i = 1, 2, ..., s.$$

$$\text{và} \quad P_{s+1,d} = Q_1^d + Q_2^d + ... + Q_s^d, d \geq (2s-1)^2. \tag{1.1}$$

Khi đó, $P_{s+1,d}$ là đa thức thuần nhất bậc nd có hệ số thuộc $\mathbb{C}$.

Định lý 1.3.6. *Đa thức $P_{s+1,d}$, được xác định bởi (1.1) là một UPC.*

Ta có kết quả sau theo hướng trả lời câu hỏi của F. Gross.

Định lý 1.3.9. *Giả sử* $f, g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^s(\mathbb{C})$ *là hai đường cong chỉnh hình không suy biến đại số và X là một siêu mặt của $\mathbb{P}^s(\mathbb{C})$ xác định bởi $P_{s+1,d} = 0$. Nếu $E_f(X) = E_g(X)$, thì $f \equiv g$.*

Tiếp theo, ta đưa ra lớp siêu mặt thứ hai xác định duy nhất đường cong chỉnh hình không suy biến đại số.

Cho $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2m+9, m \geq 2, (m,n) = 1$, xét đa thức $P(z) = z^n - az^{n-m} + b$, ở đó $0 \neq a, b \in \mathbb{C}$, và đặt

$$\widetilde{P}_i(z_i, z_j) = z_i^n - a_i z_i^{n-m} z_j^m + b_i z_j^n.$$

Ta xác định các đa thức thuần nhất sau đây:

$$R_1(z_1, z_2) = \widetilde{P}(z_1, z_2) = z_1^n - a z_1^{n-m} z_2^m + b z_2^n,$$
$$R_i(z_1, \ldots, z_{i+1}) = R_1\Big(R_{i-1}(z_1, \ldots, z_i), \widetilde{P}^{n^{(i-2)}}(z_i, z_{i+1})\Big), i = 2, ..., s.$$

Khi đó, R_s là đa thức thuần nhất với bậc n^s có hệ số thuộc $\mathbb{C}$.

Định lý sau đây cho ta họ thứ hai các siêu mặt Y xác định duy nhất đường cong chỉnh hình không suy biến đại số từ $\mathbb{C}$ tới $\mathbb{P}^s(\mathbb{C})$.

Định lý 1.3.10. *Giả sử $f, g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^s(\mathbb{C})$ là hai đường cong chỉnh hình không suy biến đại số và Y là siêu mặt của $\mathbb{P}^s(\mathbb{C})$ được xác định bởi $R_s = 0$. Nếu $E_f(Y) = E_g(Y)$ thì $f \equiv g$.*

Chương 2

Tập xác định duy nhất cho các đường cong chỉnh hình p-adic

Trong Chương này chúng tôi nghiên cứu Vấn đề 3.1. Nội dung của chương này được viết dựa trên bài báo [1]. Chúng tôi đưa ra một số định lý duy nhất cho các đường cong chỉnh hình p-adic khác hằng (Định lý 2.2.3, Định lý 2.2.7), hai lớp đa thức duy nhất mạnh và siêu mặt xác định duy nhất cho các đường cong chỉnh hình p-adic không suy biến đại số (Định lý 2.3.3, Định lý 2.3.4). Các định lý này là mở rộng của Định lý 5 điểm của R. Nevanlinna, mở rộng các kết quả của M. Ru, P.C. Hu-C. C. Yang, và theo hướng trả lời câu hỏi của F. Gross trong trường hợp p-dic.

2.1 Một số khái niệm.

Các khái niệm: $v_f(a), v_f^{\leq k}, v_f^{>k}$..., họ các siêu mặt ở vị trí tổng quát, đường cong chỉnh hình không suy biến đại số, đa thức duy nhất, đa thức duy nhất mạnh cho các hàm phân hình và cho các đường cong chỉnh hình không suy biến đại số, được định nghĩa tương tự trường hợp phức.

Định nghĩa 8. Độ cao của hàm $f(z)$ trên D_r được xác định bởi

$$H_f(r) = \log|f|_r.$$

Định nghĩa 9. Cho $k, l \in \mathbb{N}^*$ và số thực ρ cố định với $0 < \rho \leqslant r$.

$$1) N_f^{\leqslant k}(a,r) = \frac{1}{\ln p}\int\limits_\rho^r \frac{n_f^{\leqslant k}(a,x)}{x}dx, N_{l,f}^{\leqslant k}(a,r) = \frac{1}{\ln p}\int\limits_\rho^r \frac{n_{l,f}^{\leqslant k}(a,x)dx}{x}.$$

$$2) N_f^{>k}(a,r) = \frac{1}{\ln p}\int\limits_\rho^r \frac{n_f^{>k}(a,x)}{x}dx, N_{l,f}^{>k}(a,r) = \frac{1}{\ln p}\int\limits_\rho^r \frac{n_{l,f}^{>k}(a,r)}{x}dx.$$

2.2 Định lý duy nhất cho các đường cong chỉnh hình p-adic khác hằng.

Giả sử $f = [f_1 : ... : f_{n+1}] : \mathbb{C}_p \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C}_p)$ là đường cong chỉnh hình với một biểu diễn rút gọn $\widetilde{f} = (f_1, ..., f_{n+1}) : \mathbb{C}_p \longrightarrow \mathbb{C}_p^{n+1} - \{0\}$. Nếu $\widetilde{f} = (f_1, ..., f_{n+1})$ và $\widetilde{g} = (g_1, ..., g_{n+1})$ là hai biểu diễn rút gọn của f, thì tồn tại hằng số c khác không sao cho $f_i = cg_i$ với mọi i.

Định nghĩa 10. Giả sử $f : \mathbb{C}_p \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C}_p)$ là đường cong chỉnh hình có biểu diễn rút gọn là $\widetilde{f} = (f_1, ..., f_{n+1})$. Độ cao của f được xác định

$$H_f(r) = \max_{1\leqslant i\leqslant n+1} H_{f_i}(r).$$

Khi nghiên cứu Vấn đề 3.1, chúng tôi cải tiến Định lý chính thứ hai trong trường hợp p-adic và xét trong tình huống ảnh ngược của các siêu phẳng có giao khác rỗng. Khi đó, chúng tôi nhận được kết quả sau:

Định lý 2.2.3. *Giả sử $f, g : \mathbb{C}_p \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C}_p)$ là hai đường cong chỉnh hình khác hằng, $k_1, \ldots, k_q \in \mathbb{N}^*$ và $H_1, \ldots, H_q$ là các siêu phẳng của $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}_p)$ ở vị trí tổng quát, $f(\mathbb{C}_p) \not\subset H_i, g(\mathbb{C}_p) \not\subset H_i$, $i = 1, \ldots, q$. Giả sử*

$$f(z) = g(z) \text{ với mọi } z \in \bigcup_{i=1}^q \overline{E}_f(H_i, \leqslant k_i) \text{ và } z \in \bigcup_{i=1}^q \overline{E}_g(H_i, \leqslant k_i).$$

Nếu $q \geqslant 2n^2 + n + 1 + \sum\limits_{i=1}^q \dfrac{n}{k_i+1}$ *thì* $f \equiv g$

Trong Định lý 2.2.3, thêm giả thiết $\overline{E}_f(H_i, \leqslant k_i) \bigcap \overline{E}_f(H_j, \leqslant k_j) = \emptyset$, với mọi $1 \leqslant i \neq j \leqslant q$ thì ta có

Hệ quả 2.2.4. *Giả sử* $f, g : \mathbb{C}_p \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C}_p)$ *là hai đường cong chỉnh hình khác hằng,* $k_1, ..., k_q \in \mathbb{N}^*$ *và* $H_1, ..., H_q$ *là các siêu phẳng của* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}_p)$ *ở vị trí tổng quát,* $f(\mathbb{C}_p) \not\subset H_i$, $g(\mathbb{C}_p) \not\subset H_i$, $i = 1, \ldots, q$. *Giả sử rằng*

$\overline{E}_f(H_i, \leqslant k_i) \bigcap \overline{E}_f(H_j, \leqslant k_j) = \emptyset$ *với mọi* $1 \leqslant i \neq j \leqslant q$,

$f(z) = g(z)$ *với* $z \in \overline{E}_f(H_i, \leqslant k_i)$ *và* $z \in \overline{E}_g(H_i, \leqslant k_i), i = 1, ..., q$.

Nếu $q \geq 3n + 1 + \sum\limits_{i=1}^{q} \dfrac{n}{k_i + 1}$ *thì* $f \equiv g$.

Nhận xét 2. Khi $k_i \to \infty$ thì từ Hệ quả 2.2.4 ta nhận được kết quả của M. Ru, P.C. Hu-C.C. Yang. Chú ý rằng Định lý chính thứ hai trong trường hợp p-adic khác trường hợp phức, và số q trong Định lý 2.2.3 nhỏ hơn trong Định lý 1.2.3.

Tiếp theo, chúng tôi đưa ra Định lý duy nhất cho các đường cong chỉnh hình khác hằng mà trong giả thiết xuất hiện ảnh ngược của $n + 1$ siêu mặt tính cả bội với ảnh ngược của các siêu phẳng không tính bội ở vị trí tổng quát.

Định lý 2.2.7. *Giả sử* $f, g : \mathbb{C}_p \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C}_p)$ *là hai đường cong chỉnh hình khác hằng,* X_i *là các siêu mặt bậc* d *và* H_j *là các siêu phẳng ở vị trí tổng quát trong* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}_p)$ *sao cho ảnh của* f *và* g *không chứa trong* X_i, H_j *với mọi* $i = 1, \ldots, n + 1$ *và* $j = 1, \ldots, q$. *Giả sử rằng*

$E_f(X_i) = E_g(X_i),\ i = 1 \ldots, n + 1,$

$f(z) = g(z)$ *với* $z \in \bigcup\limits_{j=1}^{q} \overline{E}_f(H_j, \leqslant k_j)$.

Nếu $q \geqslant 2n^2 + n + 1 + \sum\limits_{i=1}^{q} \dfrac{n}{k_i + 1}$ *thì* $f \equiv g$.

Trong Định lý 2.2.7, thêm giả thiết $\overline{E}_f(H_i, \leqslant k_i) \bigcap \overline{E}_f(H_j, \leqslant k_j) = \emptyset$, với mọi $1 \leqslant i \neq j \leqslant q$ thì ta có

Hệ quả 2.2.8. *Giả sử* $f, g : \mathbb{C}_p \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C}_p)$ *là hai đường cong chỉnh hình khác hằng,* X_i *là các siêu mặt bậc* d *và* H_j *là các siêu phẳng ở vị trí tổng quát trong* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}_p)$ *sao cho ảnh của* f *và* g *không chứa trong* X_i, H_j *với mọi* $i = 1, \ldots, n + 1, j = 1, \ldots, q$. *Giả sử rằng*

$\overline{E}_f(H_i, \leqslant k_i) \bigcap \overline{E}_f(H_j, \leqslant k_j) = \emptyset$ *với mọi* $i \neq j$,

$E_f(X_i) = E_g(X_i), i = 1, \ldots, n+1,$

$f(z) = g(z)$ *với* $z \in \bigcup_{i=1}^{q} \overline{E}_f(H_i, \leqslant k_i)$.

Nếu $q \geqslant 3n + 1 + \sum_{i=1}^{q} \frac{n}{k_i + 1}$ *thì* $f \equiv g$.

Chú ý 1. Trong trường hợp phức, chưa có định lý nào tương tự như Định lý 2.2.7 và Hệ quả 2.2.8

2.3 Tập xác định duy nhất cho các đường cong chỉnh hình p-adic không suy biến đại số.

Hai định lý sau theo hướng trả lời câu hỏi của F. Gross trong trường hợp p-adic.

Cho $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2m + 8, m \geq 2, (m, n) = 1$, $0 \neq a, b \in \mathbb{C}_p$, xét đa thức $P(z) = z^n - az^{n-m} + b$, $\frac{a^n}{b^m} \neq \frac{n^n}{m^m(n-m)^{n-m}}$. Đặt

$$\widetilde{P}_i(z_i, z_j) = z_i^n - az_i^{n-m} z_j^m + bz_j^n.$$

Ta xác định các đa thức thuần nhất P_i sau đây

$$P_1(z_1, z_2) = \widetilde{P}(z_1, z_2) = z_1^n - az_1^{n-m} z_2^m + bz_2^n,$$
$$P_i(z_1, \ldots, z_{i+1}) = P_{i-1}\big(\widetilde{P}(z_1, z_2), \ldots, \widetilde{P}(z_i, z_{i+1})\big), \quad i = 2, ..., s. \quad (2.1)$$

Khi đó, P_s là đa thức thuần nhất với bậc n^s có hệ số thuộc $\mathbb{C}_p$.

Định lý 2.3.2. *P_s được định nghĩa bởi (2.1) là SUPC.*

Định lý 2.3.3. *Giả sử $f, g : \mathbb{C}_p \longrightarrow \mathbb{P}^s(\mathbb{C}_p)$ là hai đường cong chỉnh hình không suy biến đại số và X là siêu mặt của $\mathbb{P}^s(\mathbb{C}_p)$ được xác định bởi $P_s = 0$. Nếu $E_f(X) = E_g(X)$, thì $f \equiv g$.*

Tiếp theo, ta đưa ra lớp các siêu mặt thứ hai xác định duy nhất đường cong chỉnh hình p-adic không suy biến đại số.

Với các đa thức $P(z), \widetilde{P}_i(z_i, z_j)$ trong Định lý 2.3.2, ta xác định các đa thức thuần nhất sau:

$$A_1(z_1, z_2) = \widetilde{P}(z_1, z_2),$$
$$A_i(z_1, ..., z_{i+1}) = A_1\Big(A_{i-1}(z_1, ..., z_i), \widetilde{P}^{n^{(i-2)}}(z_i, z_{i+1})\Big),\ i = 2, ..., s. \quad (2.2)$$

Khi đó A_s là đa thức thuần nhất bậc n^s có hệ số thuộc $\mathbb{C}_p$.

Định lý sau đây cho ta họ thứ hai các siêu mặt Y xác định duy nhất đường cong chỉnh hình không suy biến đại số từ $\mathbb{C}_p$ tới $\mathbb{P}^s(\mathbb{C}_p)$.

Định lý 2.3.4. *Giả sử $f, g : \mathbb{C}_p \longrightarrow \mathbb{P}^s(\mathbb{C}_p)$ là hai đường cong chỉnh hình không suy biến đại số và Y là siêu mặt của $\mathbb{P}^s(\mathbb{C}_p)$ được xác định bởi $A_s = 0$. Nếu $E_f(Y) = E_g(Y)$, thì $f \equiv g$.*

Chương 3

Định lý duy nhất và bi-URS cho các hàm phân hình p-adic nhiều biến

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu vấn đề 3.2. Có hai hướng giải quyết Vấn đề này, đó là:

Hướng thứ nhất: Sử dụng nhát cắt thích hợp, chuyển hàm p-adic nhiều biến về hàm một biến, nhờ đó nhận được Mệnh đề 3.3.2. Từ Mệnh đề 3.3.2, thu được các kết quả đối với đa thức duy nhất trong trường hợp nhiều biến, khi đã biết kết quả trong trường hợp một biến. Nhờ đó, nhận được các Định lý 3.3.3, Định lý 3.3.4. Đối với hướng thứ nhất, nhận xét và kết quả của phản biện là thực sự có ý nghĩa. Phản biện cũng nêu ý tưởng cho tác giả chứng minh Mệnh đề 3.2.5 là tương tự Mệnh đề 3.3.2, nhưng được xét đối với tập xác định duy nhất. Từ đó, nhận được Định lý 3.2.7, Định lý 3.2.8.

Hướng thứ hai: Thiết lập Định lý chính thứ 2 cho các hàm phân hình p-adic nhiều biến (Định lý 3.4.2). Sử dụng Định lý 3.4.2 với các kỹ thuật đánh giá giữa hàm độ cao với hàm đếm không tính bội, chúng tôi cũng nhận được các Định lý 3.2.7, Định lý 3.2.8, Định lý 3.3.3, Định lý 3.3.4 nói trên.

Nội dung của chương này được viết dựa trên bài báo [14], [27] và nhận xét cùng kết quả của phản biện. Cụ thể là:

1. Phát biểu và chứng minh các định lý tương tự Định lý 4 điểm của Nevanlinna trong trường hợp p-adic nhiều biến (Định lý 3.4.2, Định lý 3.2.7. Định lý 3.2.7).

2. Thiết lập lớp đa thức duy nhất, đa thức duy nhất mạnh và chỉ ra sự tồn tại của một bi-URS cho các hàm phân hình p-adic nhiều biến dạng $(\{a_1, ..., a_q\},\ \{u\})$, với mọi $q \geq 4$ (Định lý 3.3.4, Định lý 3.3.5). Đây là tương tự kết quả của Hà Huy Khoái và Tạ Thị Hoài An trong trường hợp nhiều biến.

3.1 Một số khái niệm.

Ký hiệu $\mathbb{C}_p^m$ là không gian $p-$adic m chiều:

$$\mathbb{C}_p^m = \{(z_1, ..., z_m) : z_i \in \mathbb{C}_p \text{ với } i = 1, ..., m\},$$

Cho f là hàm chỉnh hình không đồng nhất không trên $\mathbb{C}_p^m$ và

$$f = \sum_{|\gamma| \geq 0} a_\gamma z^\gamma.$$

Định nghĩa 11. Độ cao của hàm $f(z_{(m)})$ định nghĩa bởi

$$H_f(r_{(m)}) = \log |f|_{r_{(m)}}.$$

Định nghĩa 12. Hàm $v_f^d : \mathbb{C}_p^m \to (\mathbb{N} \bigcup \{+\infty\})^m$ được định nghĩa:

$$v_f^d(a_{(m)}) = (v_{1,f-d}(a_{(m)}), \ldots, v_{m,f-d}(a_{(m)})).$$

Cố định các số thực dương $\rho_1, \ldots, \rho_m$ với $0 < \rho_i \leqslant r_i,\ i = 1, \ldots, m$. Với mỗi $x \in \mathbb{R}$, đặt

$$A_i(x) = (\rho_1, \ldots, \rho_{i-1}, x, r_{i+1}, \ldots, r_m),\ i = 1, \ldots, m,$$
$$B_i(x) = (\rho_1, \ldots, \rho_{i-1}, x, \rho_{i+1}, \ldots, \rho_m), i = 1, \ldots, m.$$

Định nghĩa 13. Hàm đếm $N_f(a, r_{(m)})$ được xác định bởi

$$N_f(a, r_{(m)}) = \frac{1}{\ln p} \sum_{i=1}^{m} \int_{\rho_i}^{r_i} \frac{n_{i,f}(a, A_i(x))}{x} dx, n_{i,f}(a, r_{(m)}) = n_{1i,f-a}(r_{(m)}).$$

3.2 Định lý duy nhất cho các hàm phân hình p-adic nhiều biến.

Định nghĩa 14. Giả sử $f = \dfrac{f_1}{f_2}$ là hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p^m$, ở đó f_1, f_2 là hai hàm chỉnh hình không có không điểm chung trên $\mathbb{C}_p^m$. Độ cao của f được xác định bởi

$$H_f(r_{(m)}) = \max_{1\leqslant i\leqslant 2} H_{f_i}(r_{(m)}).$$

Cho $d \in \mathbb{C}_p$. Hàm $v_f^d:\ \mathbb{C}_p^m \to\ (\mathbb{N}\cup\{+\infty\})^m$ định nghĩa bởi

$$v_f^d(a_{(m)}) = v^0_{f_1-df_2}(a_{(m)}), \quad v_f^{\infty}(a_{(m)}) = v^0_{f_2}(a_{(m)}).$$

Cho tập con S của $\mathbb{C}_p \cup \{\infty\}$, với mỗi $i = 1, 2..., m.$ ta đặt

$$E_{i,f}(S) = \bigcup_{d\in S} \big\{(q_i, a_{(m)}) \in (\mathbb{N}\cup\{+\infty\}) \times \mathbb{C}_p^m | f(a_{(m)}) = d,\ v^d_{i,f}(a_{(m)}) = q_i\big\},$$

Định nghĩa 15. Họ $S = \{S_1, ..., S_n\}$ các tập con không rỗng của $\mathbb{C}_p \cup \{\infty\}$ được gọi là n tập xác định duy nhất tính bội (tương ứng, không tính bội) cho các hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p^m$ nếu với mọi cặp hàm phân hình f và g khác hằng trên $\mathbb{C}_p^m$ thoả mãn điều kiện $E_{i,f}(S_j) = E_{i,g}(S_j)$, (tương ứng, $\overline{E}_f(S_j) = \overline{E}_g(S_j)$), với $i = 1, \ldots, m, j = 1, ...n$, ta có $f \equiv g$.
Để ngắn gọn, n tập xác định duy nhất tính bội (tương ứng, không tính bội) được gọi là n-URS (tương ứng, n-URSIM),

1-URS (tương ứng, 1-URSIM) là URS (tương ứng, URSIM),

2-URS (tương ứng, 2-URSIM) là *bi* URS (tương ứng, *bi* URSIM).

Chúng tôi đưa ra mệnh đề sau thiết lập mối liên hệ của URS đối với các hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p$ và URS đối với các hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p^m$.

Mệnh đề 3.2.5. *Tập hữu hạn S của $\mathbb{C}_p \cup \{\infty\}$ là URS tính bội (tương ứng, không tính bội) cho các hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p^m$ khi và chỉ khi nó là URS tính bội (tương ứng, không tính bội) cho cho các hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p$.*

Lý luận tương tự Mệnh đề 3.2.5 ta nhận được:

Mệnh đề 3.2.6. *Họ S là n-URS tính bội (tương ứng, không tính bội) cho các hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p^m$ khi và chỉ khi nó là n-URS tính bội (tương ứng, không tính bội) cho cho các hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p$.*

Áp dụng Mệnh đề 3.2.6, ta nhận được

Định lý 3.2.7. *Giả sử f, g là hai hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}_p^m$ sao cho $\overline{E}_f(a_i) = \overline{E}_g(a_i), a_i \in \mathbb{C}_p \cup \{\infty\}, i = 1, 2, ..., q$. Nếu $q \geq 4$ thì $f \equiv g$.*

Áp dụng Mệnh đề 3.2.5 cho hàm phân hình, ta được

Định lý 3.2.8. *Giả sử f, g là hai hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}_p^m$ sao cho $E_{i,f}(a_j) = E_{i,g}(a_j), i = 1, 2, ..., m, a_j \in \mathbb{C}_p \cup \{\infty\}, j = 1, 2, 3$. Khi đó $f \equiv g$.*

3.3 Đa thức duy nhất và bi-URS cho các hàm phân hình p-adic nhiều biến

Định nghĩa 16. Một đa thức khác hằng $P(x) \in \mathbb{C}_p[x]$ được gọi là *đa thức duy nhất* cho các hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p^m$ nếu với mọi cặp hàm phân hình f, g khác hằng trên $\mathbb{C}_p^m$ thoả mãn điều kiện $P(f) = P(g)$ thì $f = g$.

Tương tự, ta gọi đa thức khác hằng $P(x) \in \mathbb{C}_p[x]$ là *đa thức duy nhất mạnh* cho các hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p^m$ nếu với mọi cặp hàm phân hình f, g khác hằng trên $\mathbb{C}_p^m$ và mọi hằng số khác không $c \in \mathbb{C}_p$ thoả mãn điều kiện $P(f) = P(g)$ thì $f = g$.

Định nghĩa 17. Giả sử $P(x)$ là đa thức bậc q không có nghiệm bội và đạo hàm của nó có dạng

$$P'(x) = a(x - d_1)^{q_1} \dots (x - d_k)^{q_k},$$

ở đó $q_1 + \cdots + q_k = q - 1$ và $d_1, \dots, d_k$ là các không điểm phân biệt của P'. Khi đó k được gọi là *chỉ số đạo hàm* của P.

Không giảm tổng quát, có thể giả sử $d_1, \dots, d_k \in \mathbb{C}_p \backslash \{0\}$.

Định nghĩa 18. Đa thức khác không $P(x)$ được gọi là thoả mãn điều kiện (H) nếu $P(d_l) \neq P(d_m)$ với $1 \leqslant l < m \leqslant k$.

Định nghĩa 19. Đa thức khác không $P(x)$ được gọi là thoả mãn điều kiện (G) nếu $\sum\limits_{i=1}^{k} P(d_i) \neq 0$.

Chúng tôi đưa ra mệnh đề sau thiết lập mối liên hệ của đa thức duy nhất đối với các hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p$ và đa thức duy nhất đối với các hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p^m$.

Mệnh đề 3.3.2. *Đa thức $P(x) \in \mathbb{C}_p[x]$ là đa thức duy nhất (tương ứng, duy nhất mạnh) cho các hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p$ nếu và chỉ nếu nó là đa thức duy nhất (tương ứng, duy nhất mạnh) cho các hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p^m$.*

Áp dụng Mệnh đề 3.3.2, ta nhận được lớp các đa thức duy nhất, duy nhất mạnh và đặc trưng của bi-URS cho các hàm phân hình nhiều biến sau:

Định lý 3.3.3. *Giả sử $P(x) \in \mathbb{C}_p[x]$ là đa thức không có nghiệm bội, có chỉ số đạo hàm $k \geq 3$, và thoả mãn điều kiện (H). Khi đó $P(x)$ là một đa thức duy nhất cho các hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p^m$.*

Định lý 3.3.4. *Giả sử $P(x) \in \mathbb{C}_p[x]$ là đa thức không có nghiệm bội, có chỉ số đạo hàm $k \geq 3$, thoả mãn điều kiện (H) và (G). Khi đó $P(x)$ là một đa thức duy nhất mạnh cho các hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p^m$.*

Định lý 3.3.5. *Giả sử $P(x) \in \mathbb{C}_p[x]$ là đa thức không có nghiệm bội, có chỉ số đạo hàm $k \geq 3$, thoả mãn điều kiện (H) và (G). Khi đó ta có*

1) Nếu $\{a_1, ..., a_q\}$ tập nghiệm của $P(x) = 0$ thì $\Big(\{a_1, ..., a_q\}, \{\infty\}\Big)$ là bi-URS cho các hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p^m$.

2) Nếu $a_i \neq u \in \mathbb{C}_p$ và $\dfrac{1}{a_i - u}, i = 1, ..., q$ là tập nghiệm của $P(x) = 0$ thì $\Big(\{a_1, ..., a_q\}, \{u\}\Big)$ là bi-URS cho các hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p^m$.

Hệ quả 3.3.6. Với mọi $q \geq 4$ và với mọi $w \in \mathbb{C}_p$, tồn tại bi-URS cho các hàm phân hình p-adic dạng $\Big(\{a_1, ..., a_q\}, \{u\}\Big)$

3.4 Một kiểu định lý chính thứ hai cho hàm phân hình p-adic nhiều biến.

Chúng tôi đưa ra kiểu Định lý chính thứ 2 cho các hàm phân hình p-adic nhiều biến sau:

Định lý 3.4.2. *Cho f là hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}_p^m$ và $a_j \in \mathbb{C}_p$, $j = 1, \ldots, q$. Khi đó*

$$\begin{aligned}&(q-1)H_f(B_e(r_e))\\ &\leqslant \sum_{j=1}^{q} \overline{N}_f(a_j, B_e(r_e)) + \overline{N}_f(\infty, B_e(r_e)) - N_{0,\partial^{\gamma_1} f}(B_e(r_e)) - \log r_e + O(1),\end{aligned}$$

trong đó $O(1)$ là đại lượng giới nội, không phụ thuộc r_e.

Nhận xét 3. Sử dụng Định lý 3.4.2 với các kỹ thuật đánh giá giữa hàm độ cao và hàm đếm không tính bội, chúng tôi cũng nhận được Định lý 3.2.7, Định lý 3.2.8, Định lý 3.3.4, Định lý 3.3.5.

Kết luận của luận án

Luận án nghiên cứu các vấn đề tập xác định duy nhất cho các hàm chỉnh hình nhiều biến phức và p-adic. Mục tiêu của luận án là thiết lập một số tập xác định duy nhất và lớp đa thức duy nhất trong các trường hợp trên.

Các kết quả chính của luận án:

1. Thiết lập một số định lý duy nhất cho các đường cong chỉnh hình khác hằng, xây dựng hai lớp đa thức duy nhất và siêu mặt xác định duy nhất cho các đường cong chỉnh hình không suy biến đại số.

   Các kết quả trên là mở rộng của Định lý 4 điểm, Định lý 5 điểm của Nevanlinna và theo hướng đặt ra của F. Gross.

2. Chứng minh một số định lý duy nhất cho đường cong chỉnh hình p-adic khác hằng, xây dựng hai lớp đa thức duy nhất mạnh và siêu mặt xác định duy nhất cho các đường cong chỉnh hình p-adic không suy biến đại số.

   Các Định lý trên là mở rộng của Định lý 4 điểm, Định lý 5 điểm của Nevanlinna, mở rộng các kết quả của M. Ru, P.C. Hu-C. C. Yang và F. Gross trong trường hợp p-dic.

3. Thiết lập một số định lý duy nhất, đa thức duy nhất và bi-URS đối với các hàm phân hình p-adic nhiều biến.

Danh mục các công trình liên quan đến luận án

1. Tran Dinh Duc, *Unique range sets for p-adic meromorphic functions in several variables,* East-West J.of Math, Vol. 9, No 2 (2007) pp. 99-112.

2. Vu Hoai An and Tran Dinh Duc, *Uniqueness theorems and uniqueness polynomials for p-adic holomorphic curves,* Acta Math. Vietnam 33(2008), no.2, 181-195.

3. Vu Hoai An and Tran Dinh Duc, *Uniqueness polynomials and bi-URS for p-adic meromorphic functions in several variables,* Vietnam J.Math. 36(2008), no.2, 191-207.

4. Vu Hoai An and Tran Dinh Duc, *Uniqueness theorems and uniqueness polynomials for holomorphic curves,* Complex Variables and Elliptic Equations, Vol. 56, Nos. 1-4, January-April 2011, 253-262.

CÁC KẾT QUẢ TRONG LUẬN ÁN ĐƯỢC BÁO CÁO TẠI:

Hội nghị quốc tế về lý thuyết số và các vấn đề liên quan,Viện Toán học, 12-2006.

Hội nghị Đại số-Hình học-Tôpô, Vinh 12-2007.

Đại hội Toán học Toàn quốc, Quy Nhơn 8-2008.

Hội nghị Đại số-Hình học-Tôpô, Huế 9-2009.

Seminar phòng Giải tích toán học-Viện Toán học 2009.

Hội nghị Nghiên cứu sinh Viện Toán học 2006, 2007, 2008.