VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

VIỆN TOÁN HỌC

THÁI DOÃN CHƯƠNG

HÀM GIÁ TRỊ TỐI ƯU VÀ ÁNH XẠ NGHIỆM HỮU HIỆU TRONG CÁC BÀI TOÁN TỐI ƯU VÉCTƠ CÓ THAM SỐ

Chuyên ngành: Lý thuyết tối ưu

Mã số: 62 46 20 01

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - 2011

Công trình này được hoàn thành tại Viện Toán học, Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam.

Người hướng dẫn khoa học:

1. GS.TSKH. Nguyễn Đông Yên

2. TS. Nguyễn Quang Huy

Phản biện 1: GS.TSKH. Nguyễn Xuân Tấn

Phản biện 2: GS.TSKH. Nguyễn Hữu Công

Phản biện 3: PGS.TS. Nguyễn Thị Bạch Kim

Luận án sẽ được bảo vệ tại Hội đồng chấm luận án cấp viện họp tại Viện Toán học - Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam

vào hồi 9 giờ 00 ngày 28 tháng 07 năm 2011

Có thể tìm hiểu luận án tại: - Thư viện của Viện Toán học
. - Thư viện quốc gia

MỞ ĐẦU

Bài toán tối ưu véctơ dạng chuẩn là bài toán tìm cực trị một hàm $f : X \to Y$, ở đó X và Y là các không gian véctơ tôpô, dưới một số ràng buộc. Khái niệm cực trị ở đây được xác định theo một thứ tự bộ phận trong không gian Y. Thứ tự này thường được định nghĩa qua một nón lồi $K \subset Y$: $y_1 \preceq_K y_2 \Leftrightarrow y_2 - y_1 \in K$. Như vậy, bài toán tối ưu véctơ là sự mở rộng của bài toán quy hoạch toán học, ở đó $Y = \mathbb{R}$ và $K = \mathbb{R}_+$.

Tối ưu véctơ (Vector optimization) ra đời vào cuối thế kỷ 19, với khái niệm nghiệm được đề xuất bởi F. Y. Edgeworth (1881) và V. Pareto (1896). Mô hình bài toán tối ưu véctơ cho phép nghiên cứu một số vấn đề về phúc lợi xã hội (social welfare) và cân bằng kinh tế (economic equilibrium). Ngoài ra, mô hình này cũng hữu ích trong việc giải quyết những bài toán ra quyết định chứa đựng nhiều lợi ích không tương thích hoặc đối kháng thường gặp trong các vấn đề liên quan đến thiết kế kĩ thuật, môi trường, tài chính,... Tối ưu véctơ là một bộ phận quan trọng của Lý thuyết tối ưu (Optimization theory). Tối ưu véctơ xuất hiện như một chuyên ngành toán học độc lập sau bài báo của H. W. Kuhn và A. W. Tucker (1951) về các điều kiện cần và đủ cho một véctơ thỏa các ràng buộc là nghiệm hữu hiệu. Đến nay, đã có rất nhiều cuốn sách chuyên khảo về Tối ưu véctơ và ứng dụng: M. Ehrgott (2005), J. Jahn (2004), D. T. Luc (1989), Y. Sawaragi, H. Nakayama và T. Tanino (1985), R. E. Steuer (1986), M. Zeleny (1982),...

Bên cạnh sự tồn tại nghiệm, điều cần và đủ cực trị, tính chất của tập nghiệm và các thuật toán tìm nghiệm, *tính ổn định nghiệm* (solution stability/stability analysis) và *độ nhạy nghiệm* (solution sensitivity/sensitivity analysis) là những vấn đề cơ bản của lý thuyết Tối ưu véctơ và ứng dụng.

Nghiên cứu tính ổn định nghiệm tức là khảo sát các tính chất liên tục của ánh xạ nghiệm hữu hiệu hoặc hàm giá trị tối ưu theo tham số của bài toán đã cho, như tính nửa liên tục trên, tính nửa liên tục dưới, tính giả-Lipschitz, tính Lipschitz, và tính liên tục Hölder,... Những kết quả đầu tiên theo hướng này thuộc về P. H. Naccache (1979), T. Tanino và Y. Sawaragi (1980). Một số kết quả tổng quát hơn về tính ổn định của các bài toán tối ưu véctơ có trong các cuốn sách chuyên khảo của Luc và của Sawaragi, Nakayama và Tanino vừa được trích dẫn ở trên. Tính liên tục Lipschitz-Hölder của ánh xạ nghiệm trong các bài toán tối ưu véctơ lồi mạnh phụ thuộc tham số đã được khảo sát lần đầu tiên trong bài báo của G. M. Lee, D. S. Kim, B. S. Lee và N. D. Yen (1998).

Phân tích độ nhạy nghiệm trong Tối ưu véctơ có nghĩa là tính toán đạo hàm (theo nghĩa cổ điển hoặc theo nghĩa suy rộng), đối đạo hàm (đối đạo hàm Fréchet, đối đạo hàm Mordukhovich,...) của ánh xạ nghiệm hữu hiệu hoặc hàm giá trị tối ưu của các bài toán phụ thuộc tham số. Đôi khi, người ta cũng coi các kết quả về tính liên tục của ánh xạ nghiệm như các kết quả thuộc vào chủ đề phân tích độ nhạy nghiệm. T. Tanino (1988) đã phân tích dáng điệu của hàm giá trị tối ưu bằng cách sử dụng "đạo hàm tiếp liên" (contingent derivative). Người ta cũng đã nghiên cứu độ nhạy nghiệm bằng các loại đạo hàm suy rộng khác: E. M. Bednarczuk và W. Song (1998), và mới đây là W. Song và L.-J. Wan (2005), đã sử dụng "đạo hàm tiếp liên trên-đồ-thị suy rộng" (generalized contingent epiderivative); G. M. Lee và N. Q. Huy (2007) sử dụng "tiền đạo hàm" (proto-derivative). Mỗi loại đạo hàm suy rộng đều được xây dựng qua những nón tiếp tuyến nào đó của đồ thị của ánh xạ đa trị tại điểm đang khảo sát: đạo hàm tiếp liên được xây dựng qua nón tiếp tuyến Bouligand, tiền đạo hàm được xây dựng qua nón tiếp tuyến Bouligand và nón tiếp tuyến trung gian,... Phương pháp nghiên cứu sử dụng các đạo hàm suy rộng thường được gọi là *phương pháp tiếp cận bằng không gian nền* (the primal space approach). Sử dụng nón pháp tuyến tại một điểm cho trước trên đồ thị của ánh xạ đa trị, B. S. Mordukhovich (1980) đã xây dựng khái niệm *đối đạo hàm* (coderivative) - đó là một ánh xạ đa trị giữa các không gian đối ngẫu. Phương pháp nghiên cứu sử dụng đối đạo hàm được gọi là *phương pháp tiếp cận bằng không gian đối ngẫu* (the dual space approach). Trong nhiều tình huống mà ở đó nón pháp tuyến (không nhất thiết phải là nón lồi) không là đối ngẫu của bất cứ loại nón tiếp tuyến nào, phương pháp tiếp cận bằng không gian đối ngẫu thường chiếm ưu thế hơn phương pháp tiếp cận bằng không gian nền.

Luận án này trình bày một số kết quả mới về tính ổn định nghiệm và độ nhạy nghiệm của các bài toán tối ưu véctơ có tham số. Luận án bao gồm phần mở đầu, 4 chương, phần kết luận, và danh mục tài liệu tham khảo. Hai chương đầu nghiên cứu tính ổn định nghiệm của các bài toán tối ưu véctơ nửa vô hạn. Hai chương sau khảo sát độ nhạy nghiệm của một số bài toán dạng tổng quát.

Chương 1 nghiên cứu các tính chất nửa liên tục trên và nửa liên tục dưới của ánh xạ nghiệm hữu hiệu trong bài toán tối ưu véctơ nửa vô hạn dưới phép nhiễu hàm của hàm mục tiêu và tập ràng buộc.

Chương 2 thiết lập các điều kiện đủ cho tính giả-Lipschitz của ánh xạ nghiệm hữu hiệu trong bài toán tối ưu véctơ nửa vô hạn lồi dưới phép nhiễu hàm của hàm mục tiêu và phép nhiễu liên tục bên phải của các hàm ràng buộc.

Chương 3 sử dụng đạo hàm trên-đồ-thị Clarke suy rộng được giới thiệu bởi L. Chen (2002) để phân tích độ nhạy nghiệm.

Chương 4 nghiên cứu độ nhạy nghiệm bằng cách sử dụng đối đạo hàm Fréchet.

Việc đánh số của các chương, mục, định lý, công thức,... trong bản tóm tắt này được giữ nguyên như ở trong luận án.

Chương 1

TÍNH NỬA LIÊN TỤC CỦA NGHIỆM BÀI TOÁN TỐI ƯU VÉCTƠ NỬA VÔ HẠN TỔNG QUÁT

Chương 1 thiết lập các điều kiện cần và đủ cho tính chất nửa liên tục trên và nửa liên tục dưới của ánh xạ nghiệm hữu hiệu trong bài toán tối ưu véctơ nửa vô hạn dưới phép nhiễu hàm của cả hàm mục tiêu và tập ràng buộc. Những kết quả này đã được công bố trong [1].

1.1. Các ký hiệu và khái niệm cơ bản

Cho Θ là một tập con compắc của một không gian tôpô Hausdorff và cho $C[\Theta, \mathbb{R}^n]$ là không gian các hàm véctơ liên tục từ Θ vào $\mathbb{R}^n$ được trang bị bởi chuẩn

$$||f|| := \max_{x\in\Theta} \|f(x)\|_n \quad \forall f \in C[\Theta, \mathbb{R}^n],$$

ở đó ký hiệu $||\cdot||_n$ được dùng để chỉ chuẩn trong không gian Euclide n-chiều $\mathbb{R}^n$. Chuẩn trong không gian tích $X \times Y$ của các không gian định chuẩn X và Y nào đó được định nghĩa bởi

$$||(x, y)|| := ||x|| + ||y|| \quad \forall (x, y) \in X \times Y.$$

Cho Ω là tập con compắc khác rỗng của một không gian mêtric (X, d) và cho T là tập con compắc khác rỗng của một không gian tôpô Hausdorff nào đó. Bài toán *tối ưu véctơ nửa vô hạn phụ thuộc tham số* (parametric semi-infinite vector optimization), viết tắt là PSVO, được định nghĩa như sau:

Cho không gian tham số $P := C[\Omega, \mathbb{R}^s] \times C[\Omega \times T, \mathbb{R}^m] \times C[T, \mathbb{R}^m]$. Với mỗi tham số $p := (f, g, b) \in P$, ta xét bài toán tối ưu véctơ nửa vô hạn

$$(\mathrm{SVO})_p : \quad \min\nolimits_{\mathbb{R}^s_+} f(x) \quad \text{với ràng buộc} \quad x \in C(p), \tag{1.1.1}$$

ở đây

$$C(p) := \{x \in \Omega \,|\, g(x, t) - b(t) \in -\mathbb{R}^m_+ \quad \forall t \in T\} \tag{1.1.2}$$

là tập ràng buộc và

$$\mathbb{R}^k_+ := \{x = (x_1, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k \,|\, x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, ..., k\}, \quad k = 1, 2, ...$$

ký hiệu cho tập các véctơ không âm của $\mathbb{R}^k$.

Ánh xạ đa trị $C : P \rightrightarrows \Omega$, gán mỗi điểm $p \in P$ với tập $C(p)$ ở trong (1.1.2), được gọi là *ánh xạ tập ràng buộc* của bài toán (PSVO).

Xuyên suốt luận án này, ta ký hiệu phần trong tôpô và bao đóng tôpô của tập con A của một không gian tôpô Y tương ứng là $\mathrm{int}A$ và $\mathrm{cl}A$. Ký hiệu $\mathcal{N}(y)$ được dùng để chỉ tập tất cả các lân cận của $y \in Y$.

Định nghĩa 1.1.1. (i) Ta viết $\bar{x} \in \mathcal{S}(p)$ để chỉ rằng $\bar{x}$ là *nghiệm hữu hiệu* (hay *nghiệm Pareto*) của bài toán $(\mathrm{SVO})_p$ nếu $\bar{x} \in C(p)$ và không tồn tại $x \in C(p)$ thỏa mãn $f(x) - f(\bar{x}) \in -\mathbb{R}^s_+ \setminus \{0_s\}$. Ở đây 0_s là véctơ 0 của $\mathbb{R}^s$. Ánh xạ $\mathcal{S} : P \rightrightarrows \Omega$, gán mỗi điểm $p \in P$ với tập $\mathcal{S}(p)$, được gọi là *ánh xạ nghiệm hữu hiệu* (hay *ánh xạ nghiệm Pareto*) của bài toán (PSVO).
(ii) Ta viết $\bar{x} \in \mathcal{S}^w(p)$ để chỉ rằng $\bar{x}$ là *nghiệm hữu hiệu yếu* (hay *nghiệm Pareto yếu*) của bài toán $(\mathrm{SVO})_p$ nếu $\bar{x} \in C(p)$ và không tồn tại $x \in C(p)$ thỏa mãn $f(x) - f(\bar{x}) \in -\mathrm{int}\mathbb{R}^s_+$.

Cho $F : Y \rightrightarrows Z$ là ánh xạ đa trị giữa các không gian tôpô. Tập hợp $\mathrm{dom}F := \{y \in Y \mid F(y) \neq \emptyset\}$ là miền hữu hiệu của F.

Định nghĩa 1.1.2. Ánh xạ đa trị $F : Y \rightrightarrows Z$ được gọi là
(i) *nửa liên tục trên* tại $y_0 \in Y$ nếu với mọi tập mở $V \subset Z$ thỏa mãn $F(y_0) \subset V$ tồn tại $U \in \mathcal{N}(y_0)$ sao cho $F(y) \subset V$ với mọi $y \in U$.
(ii) *nửa liên tục dưới* tại $y_0 \in \mathrm{dom}\, F$ nếu với mọi tập mở $V \subset Z$ thỏa mãn $V \cap F(y_0) \neq \emptyset$ tồn tại $U \in \mathcal{N}(y_0)$ sao cho $V \cap F(y) \neq \emptyset$ với mọi $y \in U$.

Định nghĩa 1.1.3. (Xem D. T. Luc, *Theory of vector optimization*, Springer-Verlag, 1989) Cho Θ là tập lồi khác rỗng của một không gian véctơ tôpô và cho $f : \Theta \to \mathbb{R}^s$ là một hàm véctơ. Giả sử $K \subset \mathbb{R}^s$ là nón lồi. Ta nói rằng
(i) f là *lồi theo nón K* (hay *K-lồi*) trên Θ nếu với mọi $x_1, x_2 \in \Theta$, với mọi $t \in [0, 1]$,

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \in tf(x_1) + (1-t)f(x_2) - K,$$

(ii) f là *tựa lồi chặt theo nón K* (hay *K-tựa lồi chặt*) trên Θ, khi $\mathrm{int}K \neq \emptyset$, nếu với mọi $y \in \mathbb{R}^s$, với mọi $x_1, x_2 \in \Theta, x_1 \neq x_2$, với mọi $t \in (0, 1)$,

$$f(x_1), f(x_2) \in y - K \quad \text{kéo theo} \quad f(tx_1 + (1-t)x_2) \in y - \mathrm{int}K.$$

1.2. Tính liên tục của ánh xạ tập ràng buộc

Mục này khảo sát các tính chất nửa liên tục trên và nửa liên tục dưới của ánh xạ tập ràng buộc $C : P \rightrightarrows \Omega$.

Mệnh đề 1.2.1. *Cho $p_0 := (f_0, g_0, b_0) \in \mathrm{dom}\, C$. Khi đó ánh xạ tập ràng buộc C là nửa liên tục trên tại p_0.*

Mệnh đề 1.2.2. *Cho Ω là tập lồi compắc khác rỗng của một không gian lồi địa phương và $p_0 := (f_0, g_0, b_0) \in P$. Giả sử rằng các điều kiện sau đây được thỏa mãn:*
(i) *Với mọi $t \in T$, $g(\cdot, t)$ là $\mathbb{R}^m_+$-lồi trên Ω;*
(ii) *Điều kiện Slater đúng cho $C(p_0)$, có nghĩa là tồn tại $\hat{x} \in \Omega$ sao cho*

$$g_0(\hat{x}, t) - b_0(t) \in -\mathrm{int}\mathbb{R}^m_+ \quad \forall t \in T.$$

Khi đó C là nửa liên tục dưới tại p_0.

1.3. Tính nửa liên tục dưới của ánh xạ nghiệm hữu hiệu

Mục này đưa ra các điều kiện đủ, hoặc điều kiện cần và đủ, cho tính nửa liên tục dưới của ánh xạ nghiệm hữu hiệu $\mathcal{S}$ tại một điểm cho trước.

Định lý 1.3.1. *Cho $p_0 := (f_0, g_0, b_0) \in P$. Nếu $\mathcal{S}$ là nửa liên tục dưới tại p_0, thì với mỗi $x_0 \in \mathcal{S}(p_0)$ và với mỗi $V(x_0) \in \mathcal{N}(x_0)$ ở trong Ω, tồn tại $\bar{x} \in V(x_0) \cap \mathcal{S}(p_0)$ sao cho*

$$f_0^{-1}(f_0(\bar{x})) \cap C(p_0) \subset V(x_0).$$

Hơn nữa, nếu thêm vào đó ánh xạ tập ràng buộc C là nửa liên tục dưới tại p_0, thì khẳng định ngược lại cũng đúng.

Hệ quả 1.3.1. (S. W. Xiang và Y. H. Zhou 2006, S. W. Xiang và W. S. Yin 2007) *Cho $p_0 \in P$. Nếu $C(p) = \Omega$ với mọi $p \in P$, thì $\mathcal{S}$ là nửa liên tục dưới tại p_0 khi và chỉ khi với mỗi $x_0 \in \mathcal{S}(p_0)$ và với mỗi $V(x_0) \in \mathcal{N}(x_0)$ ở trong Ω, tồn tại $\bar{x} \in V(x_0) \cap \mathcal{S}(p_0)$ sao cho*

$$f_0^{-1}(f_0(\bar{x})) \cap [\Omega \setminus V(x_0)] = \emptyset.$$

Hệ quả 1.3.2. *Cho $p_0 := (f_0, g_0, b_0) \in P$. Giả sử rằng ánh xạ tập ràng buộc C là nửa liên tục dưới tại p_0. Nếu một trong hai điều kiện sau đây được thỏa mãn, thì $\mathcal{S}$ là nửa liên tục dưới tại p_0.*
(i) *Ω là tập lồi compắc khác rỗng của một không gian véctơ tôpô và f_0 là $\mathbb{R}^s_+$-tựa lồi chặt trên Ω.*
(ii) *f_0 là đơn ánh, có nghĩa là $f_0(x_1) \neq f_0(x_2)$ mỗi khi $x_1 \neq x_2$.*

Hệ quả 1.3.3. *Cho Ω là một tập con lồi compắc khác rỗng của một không gian lồi địa phương và cho $p_0 := (f_0, g_0, b_0) \in P$. Giả sử rằng các điều kiện sau đây đúng:*
(i) *Với mỗi $t \in T$, $g(\cdot, t)$ là $\mathbb{R}^m_+$-lồi trên Ω;*
(ii) *Điều kiện Slater đúng cho $C(p_0)$;*
(iii) *Với mỗi $x_0 \in \mathcal{S}(p_0)$, tồn tại $\sigma \in \mathrm{int}\mathbb{R}^s_+$ sao cho*

$$\mathrm{argmin}\{\langle \sigma, f_0(x)\rangle \mid x \in C(p_0)\} = \{x_0\},$$

ở đó $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ký hiệu cho tích vô hướng ở trong $\mathbb{R}^s$.
Khi đó $\mathcal{S}$ là nửa liên tục dưới tại p_0.

1.4. Tính nửa liên tục trên của ánh xạ nghiệm hữu hiệu

Mục này đưa ra các điều kiện đủ, hoặc điều kiện cần và đủ, cho tính nửa liên tục trên của ánh xạ nghiệm hữu hiệu $\mathcal{S}$ tại một điểm cho trước.

Định lý 1.4.1. *Cho* $p_0 := (f_0, g_0, b_0) \in P$. *Nếu* $\mathcal{S}$ *là nửa liên tục trên tại* p_0*, thì* $\mathcal{S}(p_0) = \mathcal{S}^w(p_0)$. *Hơn nữa, nếu thêm vào đó ánh xạ tập ràng buộc* C *là nửa liên tục dưới tại* p_0*, thì khẳng định ngược lại cũng đúng.*

Hệ quả 1.4.1. (S. W. Xiang và Y. H. Zhou 2006) *Cho* $p_0 \in P$. *Nếu* $C(p) = \Omega$ *với mọi* $p \in P$*, thì* $\mathcal{S}$ *là nửa liên tục trên tại* p_0 *khi và chỉ khi* $\mathcal{S}(p_0) = \mathcal{S}^w(p_0)$.

Hệ quả 1.4.2. *Cho* Ω *là tập lồi compắc khác rỗng của một không gian véctơ tôpô và cho* $p_0 := (f_0, g_0, b_0) \in P$. *Giả sử rằng ánh xạ tập ràng buộc* C *là nửa liên tục dưới tại* p_0. *Nếu* f_0 *là* $\mathbb{R}^s_+$*-tựa lồi chặt trên* Ω*, thì* $\mathcal{S}$ *là nửa liên tục trên tại* p_0.

Hệ quả 1.4.3. *Cho* Ω *là tập con lồi compắc khác rỗng của một không gian lồi địa phương và cho* $p_0 := (f_0, g_0, b_0) \in P$. *Giả sử rằng* $g(\cdot, t)$ *là* $\mathbb{R}^m_+$*-lồi trên* Ω *với mọi* $t \in T$ *và điều kiện Slater đúng cho* $C(p_0)$. *Nếu* $\mathcal{S}(p_0) = \mathcal{S}^w(p_0)$*, thì* $\mathcal{S}$ *là nửa liên tục trên tại* p_0.

Chương 2

TÍNH GIẢ-LIPSCHITZ CỦA NGHIỆM BÀI TOÁN TỐI ƯU VÉCTƠ NỬA VÔ HẠN LỒI

Chương 2 đưa ra một số điều kiện đủ cho tính giả-Lipschitz của ánh xạ nghiệm hữu hiệu trong bài toán tối ưu véctơ nửa vô hạn lồi dưới phép nhiễu hàm của hàm mục tiêu và phép nhiễu liên tục bên phải của các hàm ràng buộc. Kết quả này đã được công bố trong [3]. Ý tưởng chứng minh bắt nguồn từ [2].

2.1. Các khái niệm cơ bản và kết quả bổ trợ

Trong chương này, ta vẫn sử dụng các khái niệm và ký hiệu đã đưa ra trong chương trước. Ở đây, $K \subset \mathbb{R}^m$ được giả sử là nón lồi đóng nhọn với $\mathrm{int} K \neq \emptyset$ và T là tập con compắc khác rỗng của một không gian mêtric. Không gian mêtric bao gồm tất cả các hàm véctơ K-lồi từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}^m$ được ký hiệu bởi $CO_K[\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m]$.

Bài toán *tối ưu véctơ nửa vô hạn lồi phụ thuộc tham số* (parametric convex semi-infinite vector optimization), viết tắt là CSVO, được định nghĩa như sau:

Cho không gian tham số $P := CO_K[\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m] \times C[T, \mathbb{R}]$. Với mỗi tham số $p := (f, b) \in P$, ta xét bài toán tối ưu véctơ nửa vô hạn lồi,

$$(\mathrm{CSVO})_p : \quad \min\nolimits_K f(x) \quad \text{với ràng buộc} \quad x \in C(p), \qquad (2.1.1)$$

ở đó $C(p) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_t(x) \leq b(t) \quad \forall t \in T\}$ là tập ràng buộc, $g_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là hàm lồi với mọi $t \in T$ và thỏa mãn $(t, x) \mapsto g_t(x)$ là liên tục trên $T \times \mathbb{R}^n$.

Ánh xạ tập ràng buộc $C : P \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ và ánh xạ nghiệm hữu hiệu $\mathcal{S} : P \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ của bài toán (CSVO) được định nghĩa tương tự như ở trong Mục 1.1.

Cho (X, d) là một không gian mêtric. Khoảng cách từ $x \in X$ đến tập $\Omega \subset X$ được định nghĩa bởi $d(x, \Omega) := \inf \{d(x, y) \mid y \in \Omega\}$, và $d(x, \emptyset) := +\infty$. Trong trường hợp $X = \mathbb{R}^k$ với $k = 1, 2, ...,$ mêtric trên $\mathbb{R}^k$ là được cảm sinh bởi chuẩn Euclide $||\cdot||_k$. Ký hiệu $\mathrm{cone}(\Omega)$ dùng để chỉ bao nón lồi (convex conical hull) của $\Omega \subset \mathbb{R}^k$, đó là giao của tất cả các nón lồi chứa Ω và $\{0_k\}$. Theo quy ước, $\mathrm{cone}(\emptyset) = \{0_k\}$. Cho $h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là một hàm lồi và $x \in \mathbb{R}^k$ sao cho $h(x) \neq +\infty$. Dưới vi phân của h tại x, ký hiệu là $\partial h(x)$, được xác định bởi công thức

$$\partial h(x) := \{v \in \mathbb{R}^k \mid \langle v, y - x\rangle \leq h(y) - h(x) \quad \forall y \in \mathbb{R}^k\}.$$

Nón đối ngẫu không âm của nón $K \subset \mathbb{R}^m$ được định nghĩa bởi

$$K^* := \{\hbar \in \mathbb{R}^m \mid \langle \hbar, y\rangle \geq 0 \quad \forall y \in K\}.$$

Cho $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị giữa các không gian mêtric. Đồ thị của F được cho bởi công thức

$$\mathrm{gph}F := \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in F(x)\}.$$

Định nghĩa 2.1.1. Ta nói rằng F là *giả-Lipschitz* (hay *có tính chất Aubin*) tại $(x_0, y_0) \in \mathrm{gph}F$ nếu tồn tại $U \in \mathcal{N}(x_0)$, $V \in \mathcal{N}(y_0)$ và $\kappa > 0$ sao cho

$$d(y_2, F(x_1)) \leq \kappa d(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in U,\ \forall y_2 \in V \cap F(x_2).$$

Định nghĩa 2.1.2. (M. A. Goberna và M. A. López 1998) Cho $p := (f, b) \in P$.
(i) Ta nói rằng *điều kiện Slater* đúng cho $C(p)$ nếu tồn tại $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ sao cho

$$g_t(\hat{x}) < b(t) \quad \forall t \in T.$$

(ii) Giả sử $x \in C(p)$. Tập hợp $T_p(x) := \{t \in T \mid g_t(x) = b(t)\}$ được gọi là *tập các ràng buộc hoạt* (set of active constraints) tại x.

Định nghĩa 2.1.3. Cho $p := (f, b) \in P$ và $x \in \mathcal{S}(p)$. Nếu tồn tại $\hbar \in K^*$ với $||\hbar||_m = 1$ sao cho $x \in \mathrm{argmin}\{\hbar \circ f(z) \mid z \in C(p)\}$, thì x được gọi là *nghiệm vô hướng hóa* (scalarized solution) bởi $\hbar$. Ở đây $\hbar \circ f(z) := \langle \hbar, f(z)\rangle$ với mọi $z \in \mathbb{R}^n$.

Để chuẩn bị cho chứng minh kết quả chính, mục này còn trình bày một số kết quả bổ trợ có trong cuốn sách của M. A. Goberna và M. A. López, *Linear semi-infinite optimization*, John Wiley & Sons, 1998.

2.2. Tính giả-Lipschitz của ánh xạ nghiệm hữu hiệu

Kết quả chính của chương này được phát biểu như sau.

Định lý 2.2.1. *Cho* $p_0 := (f_0, b_0) \in P$ *và* $(p_0, x^0) \in \mathrm{gph}\mathcal{S}$. *Giả sử rằng các điều kiện sau được thỏa mãn:*
(i) *Điều kiện Slater đúng cho* $C(p_0)$.
(ii) *Không tồn tại* $T_0 \subset T_{p_0}(x^0)$ *với* $|T_0| < n$ *thỏa mãn*

$$\partial(\hbar_0 \circ f_0)(x^0) \cap \mathrm{cone}\left(\bigcup_{t \in T_0} (-\partial g_t(x^0))\right) \neq \emptyset$$

với mọi $\hbar_0 \in K^*$ *sao cho* x^0 *là nghiệm vô hướng hóa bởi* $\hbar_0$. *Hơn nữa, nếu* x^0 *là nghiệm vô hướng hóa bởi cả* $\hbar$ *và* $\bar{\hbar}$, *thì với mỗi* $z \in \mathbb{R}^n$ *với* $||z||_n = 1$,

$$\langle u, z \rangle \cdot \langle \bar{u}, z \rangle \geq 0 \text{ với mọi } u \in \partial(\hbar \circ f_0)(x^0), \bar{u} \in \partial(\bar{\hbar} \circ f_0)(x^0).$$

Khi đó $\mathcal{S}$ *là giả-Lipschitz tại* (p_0, x^0).

Để chứng minh Định lý 2.2.1, ngoài một số bổ đề đã được đưa ra trong mục trước, chúng ta cần thiết lập thêm hai kết quả bổ trợ ở trong mục này.

Mệnh đề 2.2.1. *Nếu tất cả các giả thiết của Định lý 2.2.1 được thỏa mãn, thì các phát biểu sau đây đúng:*
(a) *Tồn tại* $W \in \mathcal{N}(p_0)$ *sao cho điều kiện Slater đúng cho* $C(p)$ *với mọi* $p \in W$.
(b) *Lấy dãy tùy ý* $\{(p_k, x^k) := (f_k, b_k, x^k)\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathrm{gph}\mathcal{S}$. *Nếu* $(p_k, x^k) \to (p_0, x^0) := (f_0, b_0, x^0) \in \mathrm{gph}\mathcal{S}$, *thì với k đủ lớn, tồn tại* $\hbar_k \in K^*$ *với* $||\hbar_k||_m = 1$, $u^k \in \partial(\hbar_k \circ f_k)(x^k), u^k_{t_i^k} \in -\partial g_{t_i^k}(x^k), t_i^k \in T_{p_k}(x^k)$, *và* $\lambda_i^k > 0$ *với mọi* $i = 1, 2, ..., n$, *sao cho*

$$u^k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k u^k_{t_i^k},$$

ở đó $\{u^k_{t_1^k}, ..., u^k_{t_n^k}\}$ *là một cơ sở của* $\mathbb{R}^n$.

Mệnh đề 2.2.2. *Nếu tất cả các giả thiết của Định lý 2.2.1 được thỏa mãn, thì các phát biểu sau đây đúng:*
(a) *Với mỗi* $\hbar_0 \in K^*$ *thỏa mãn* x^0 *là nghiệm vô hướng hóa tương ứng, ta có*

$$\mathrm{argmin}\{\hbar_0 \circ f_0(z) \mid z \in C(p_0)\} = \{x^0\}.$$

(b) *Với mỗi dãy* $\{p_k\}_{k=1}^{\infty} \subset P$ *hội tụ đến* p_0, *ta có thể tìm được các phần tử* $x^k \in \mathcal{S}(p_k)$ *sao cho* $x^k \to x^0$ *khi* $k \to +\infty$.

2.3. Một số ví dụ

Mục này trình bày 3 ví dụ để minh họa và phân tích kết quả đạt được trong Mục 2.2.

Chương 3

ĐẠO HÀM TRÊN-ĐỒ-THỊ CLARKE SUY RỘNG CỦA HÀM GIÁ TRỊ TỐI ƯU TRONG TỐI ƯU VÉCTƠ

Chương 3 sử dụng *đạo hàm trên-đồ-thị Clarke suy rộng* để phân tích độ nhạy nghiệm. Các kết quả chính đã được công bố trong [5].

3.1. Các khái niệm cơ bản và kết quả bổ trợ

Trong chương này, trừ khi quy ước khác đi, ta vẫn sử dụng các khái niệm và ký hiệu đã đưa ra trong các chương trước. Cho $f : P \times X \to Y$ là hàm véctơ và $C : P \rightrightarrows X$ là ánh xạ đa trị. Ở đây P, X và Y được giả sử là các không gian Euclide hữu hạn chiều được trang bị với chuẩn $||\cdot||$. Cho $K \subset Y$ là nón lồi đóng nhọn. Nón K cảm sinh một quan hệ thứ tự bộ phận $\preceq_K$ ở trên Y như sau:

$$y \preceq_K y' \Leftrightarrow y' - y \in K \quad \forall y, y' \in Y.$$

Xét bài toán tối ưu véctơ

$$\min\nolimits_K \left\{ f(p,x) \,|\, x \in C(p) \right\} \tag{3.1.1}$$

phụ thuộc vào tham số $p \in P$.

Định nghĩa 3.1.1. Ta nói $y \in A$ là *điểm hữu hiệu* của tập $A \subset Y$ đối với nón K nếu $(y - K) \cap A = \{y\}$. Tập tất cả các điểm hữu hiệu của A đối với nón K được ký hiệu bởi $E(A|K)$. Quy ước, $E(\emptyset|K) := \emptyset$.

Cho $F : P \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị được xác định bởi

$$F(p) := \{f(p,x) \,|\, x \in C(p)\}. \tag{3.1.2}$$

Ta đặt

$$\mathcal{F}(p) := E(F(p)|K), \quad p \in P \tag{3.1.3}$$

và gọi $\mathcal{F} : P \rightrightarrows Y$ là *hàm giá trị tối ưu* của bài toán (3.1.1). Khi đó, với mỗi $p \in P$, tập nghiệm hữu hiệu $\mathcal{S}(p)$ của bài toán (3.1.1) được xác định bởi

$$\mathcal{S}(p) = \{x \in C(p) \mid f(p,x) \in \mathcal{F}(p)\}.$$

Định nghĩa 3.1.2. Cho $G : P \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị.
(i) G được gọi là *lồi* nếu

$$\alpha G(p) + (1-\alpha)G(p') \subset G(\alpha p + (1-\alpha)p') \quad \forall p, p' \in P, \quad \forall \alpha \in [0,1].$$

(ii) G được gọi là *lồi theo nón K* (hay K-*lồi*) nếu

$$\alpha G(p) + (1-\alpha)G(p') \subset G(\alpha p + (1-\alpha)p') + K, \quad \forall p, p' \in P, \quad \forall \alpha \in [0,1].$$

Để cho gọn trong các phát biểu về sau, ta ký hiệu các giả thiết như sau:

(A) *Ánh xạ tập ràng buộc* C *ở trong* (3.1.1) *là lồi và hàm mục tiêu* f *ở trong* (3.1.1) *là* K*-lồi;*

(B) *Ánh xạ đa trị* F *ở trong* (3.1.2) *là* K*-lồi.*

Ta có (A) kéo theo (B).

Định nghĩa 3.1.3. (Xem J.-P. Aubin và H. Frankowska, *Set-valued analysis,* Birkhäuser, 1990) Cho $\Omega \subset Y$ và $\bar{y} \in \mathrm{cl}\Omega$. *Nón tiếp tuyến Clarke* (hay *nón tiếp tuyến làm tròn*) của Ω tại $\bar{y}$ được xác định bởi công thức

$$T^C(\Omega; \bar{y}) := \{v \in Y \mid \forall \{\bar{y}_n\} \subset \Omega, \bar{y}_n \to \bar{y}, \forall \{t_n\} \subset (0, +\infty), t_n \to 0,$$
$$\exists \{v_n\} \subset Y, v_n \to v \text{ với } \ \bar{y}_n + t_n v_n \in \Omega \quad \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Cho trước một tập $\widetilde{\Omega} \subset P \times Y$, ta định nghĩa phép chiếu tại $u \in P$ bởi

$$\Pi_u \widetilde{\Omega} := \{y \in Y \mid (u, y) \in \widetilde{\Omega}\}.$$

Định nghĩa 3.1.4. (L. Chen 2002) Cho $G : P \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị và $(\bar{p}, \bar{y}) \in \mathrm{gph}G$. Ánh xạ đa trị $D^C G(\bar{p}, \bar{y}) : P \rightrightarrows Y$ được gọi là *đạo hàm trên-đồ-thị Clarke suy rộng* (generalized Clarke epiderivative) của G tại $(\bar{p}, \bar{y})$ nếu

$$D^C G(\bar{p}, \bar{y})(u) = E\big(\Pi_u T^C(\mathrm{epi}G; (\bar{p}, \bar{y}))|K\big) \quad \forall u \in P,$$

ở đó $\mathrm{epi}G := \{(p, y) \in P \times Y \mid p \in \mathrm{dom}G, \ y \in G(p) + K\}$ ký hiệu cho trên-đồ-thị của ánh xạ đa trị G.

Định nghĩa 3.1.5. (E. M. Bednarczuk và W. Song 1998) Ánh xạ đa trị $G : P \rightrightarrows Y$ được gọi là *compắc theo hướng* (directionally compact) tại $(\bar{p}, \bar{y}) \in \mathrm{gph}G$ nếu với mỗi dãy tùy ý $\{t_n\} \subset (0, +\infty), t_n \to 0$, $\{h_n\} \subset P, h_n \to h \in P$, $\{y_n\} \subset Y$ thỏa mãn $\bar{y} + t_n y_n \in G(\bar{p} + t_n h_n)$ với mọi n kéo theo $\{y_n\}$ chứa một dãy con hội tụ.

Định nghĩa 3.1.6. Ta nói rằng *tính chất trội* đúng cho $G : P \rightrightarrows Y$ ở xung quanh $\bar{p} \in P$ nếu tồn tại $U \in \mathcal{N}(\bar{p})$ sao cho

$$G(p) \subset E(G(p)|K) + K \quad \forall p \in U.$$

Một số kết quả bổ trợ cũng được trình bày trong mục này.

3.2. Trường hợp bài toán tối ưu véctơ không có ràng buộc

Mục này cung cấp một số công thức để tính đạo hàm trên-đồ-thị Clarke suy rộng của hàm giá trị tối ưu $\mathcal{F}$ cho bài toán tối ưu véctơ không có ràng buộc. Trước hết ta cần tính đạo hàm trên-đồ-thị Clarke suy rộng của F.

Mệnh đề 3.2.1. *Cho giả thiết* (B) *được thỏa mãn và cho* $(\bar{p}, \bar{y}) \in \mathrm{gph}F$*. Ta có*

$$D^C F(\bar{p}, \bar{y})(u) \subset E\big(\Pi_u T^C(\mathrm{gph}F; (\bar{p}, \bar{y}))|K\big) \quad \forall u \in P, \tag{3.2.1}$$

và bao hàm thức ngược lại cũng đúng nếu

$$\mathrm{epi} D^C F(\bar{p}, \bar{y}) = T^C(\mathrm{epi}F; (\bar{p}, \bar{y})). \tag{3.2.2}$$

Để hiểu rõ thêm điều kiện (3.2.2), ta đưa ra sau đây một điều kiện đủ cho đẳng thức này nghiệm đúng.

Mệnh đề 3.2.2. *Cho* $(\bar{p}, \bar{y}) \in \mathrm{gph}F$*. Nếu* $D^C F(\bar{p}, \bar{y})(0) \neq \emptyset$*, thì* (3.2.2) *nghiệm đúng.*

Kết quả chính của mục này là như sau.

Định lý 3.2.1. *Cho giả thiết* (B) *được thỏa mãn và cho* $(\bar{p}, \bar{y}) \in \mathrm{gph}\mathcal{F}$*. Giả sử rằng tính chất trội đúng cho* F *ở xung quanh* $\bar{p}$*. Ta có*

$$D^C \mathcal{F}(\bar{p}, \bar{y})(u) \subset E\big(\Pi_u T^C(\mathrm{gph}F; (\bar{p}, \bar{y}))|K\big) \quad \forall u \in P.$$

Bao hàm thức ngược lại cũng đúng nếu (3.2.2) *được thỏa mãn.*

Như một hệ quả trực tiếp của Định lý 3.2.1 và Mệnh đề 3.2.2, ta có kết quả sau đây.

Hệ quả 3.2.1. *Cho giả thiết* (B) *được thỏa mãn và cho* $(\bar{p}, \bar{y}) \in \mathrm{gph}\mathcal{F}$*. Giả sử rằng tính chất trội đúng cho* F *ở xung quanh* $\bar{p}$*. Nếu* $D^C F(\bar{p}, \bar{y})(0) \neq \emptyset$*, thì*

$$D^C \mathcal{F}(\bar{p}, \bar{y})(u) = E\big(\Pi_u T^C(\mathrm{gph}F; (\bar{p}, \bar{y}))|K\big) \quad \forall u \in P.$$

3.3. Trường hợp bài toán tối ưu véctơ có ràng buộc

Mục này thiết lập một số công thức để tính đạo hàm trên-đồ-thị Clarke suy rộng của hàm giá trị tối ưu $\mathcal{F}$ trong bài toán tối ưu véctơ với ràng buộc được xác định bởi ánh xạ đa trị $C : P \rightrightarrows X$. Ta định nghĩa ánh xạ $\widetilde{C} : P \times Y \rightrightarrows X$ như sau:

$$\widetilde{C}(p, y) = \{x \in C(p) \mid y - f(p, x) \in K\}. \tag{3.3.1}$$

Mệnh đề 3.3.1. *Cho* $\bar{p} \in P$ *và* $\bar{x} \in C(\bar{p})$*. Giả sử rằng* f *là khả vi Fréchet tại* $(\bar{p}, \bar{x})$ *với đạo hàm* $\nabla f(\bar{p}, \bar{x})$*. Nếu giả thiết* (B) *được thỏa mãn, thì*

$$\{\nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p, x) \mid (p, x) \in T^C(\mathrm{gph}C; (\bar{p}, \bar{x}))\} + K \subset \Pi_p T^C(\mathrm{epi}F; (\bar{p}, \bar{y})) \tag{3.3.2}$$

với mọi $p \in P$, ở đó $\bar{y} := f(\bar{p}, \bar{x})$. Hơn nữa, nếu giả thiết (B) được thay bởi giả thiết (A) và ánh xạ $\widetilde{C}$ ở trong (3.3.1) *là compắc theo hướng tại* $((\bar{p}, \bar{y}), \bar{x})$, *thì bao hàm thức ngược lại của* (3.3.2) *nghiệm đúng, có nghĩa là*

$$\{\nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p, x) \mid (p, x) \in T^C(\mathrm{gph}C; (\bar{p}, \bar{x}))\} + K = \Pi_p T^C(\mathrm{epi}F; (\bar{p}, \bar{y})) \tag{3.3.3}$$

với mọi $p \in P$.

Kết quả chính đầu tiên trong mục này được phát biểu như sau.

Định lý 3.3.1. *Cho $\bar{p} \in P$ và cho $\bar{x} \in C(\bar{p})$ sao cho $\bar{y} := f(\bar{p}, \bar{x}) \in \mathcal{F}(\bar{p})$. Giả sử rằng tính chất trội đúng cho F ở xung quanh $\bar{p}$ và f là khả vi Fréchet tại $(\bar{p}, \bar{x})$ với đạo hàm $\nabla f(\bar{p}, \bar{x})$. Nếu* (3.3.3) *nghiệm đúng, thì*

$$D^C\mathcal{F}(\bar{p}, \bar{y})(p) = E\big(\{\nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p, x) \mid (p, x) \in T^C(\mathrm{gph}C; (\bar{p}, \bar{x}))\}|K\big) \quad \forall p \in P.$$

Bây giờ chúng ta sẽ trình bày một áp dụng của Định lý 3.3.1 cho bài toán *tối ưu véctơ nửa vô hạn*. Xét bài toán (3.1.1) với ánh xạ tập ràng buộc $C\colon P \rightrightarrows X$ được định nghĩa bởi

$$C(p) := \{x \in X \mid g_t(p, x) \le 0 \quad \forall t \in T\}, \tag{3.3.10}$$

ở đó T là tập chỉ số bất kỳ và với mỗi $t \in T$, $g_t : P \times X \to \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ là hàm lồi chính thường nửa liên tục dưới.

Ký hiệu bởi $\mathbb{R}_+^{(T)}$ là họ tất cả các hàm $\lambda : T \to \mathbb{R}$ lấy giá trị λ_t dương chỉ tại hữu hạn điểm của T, và bằng 0 tại các điểm khác. Trong mối liên hệ với (3.3.10), ta sử dụng tập các *nhân tử ràng buộc hoạt* (active constraint multipliers) được định nghĩa bởi

$$A(\bar{p}, \bar{x}) := \{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)} \mid \lambda_t g_t(\bar{p}, \bar{x}) = 0 \quad \forall t \in T\}.$$

Cho hàm số $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Trên-đồ-thị của hàm φ được định nghĩa là tập

$$\mathrm{epi}\varphi := \{(x, \mu) \in X \times \mathbb{R} \mid \mu \ge \varphi(x)\}.$$

Hàm liên hợp $\varphi^* : X \to \overline{\mathbb{R}}$ của hàm φ được định nghĩa bởi

$$\varphi^*(v) := \sup\{\langle v, x\rangle - \varphi(x) \mid x \in X\} \quad \forall v \in X.$$

Định nghĩa 3.3.1. (N. Dinh, B. S. Mordukhovich và T. T. A. Nghia 2009) Ta nói rằng *điều kiện Farkas-Minkowski* (FM) đúng cho hệ ràng buộc (3.3.10) nếu tập

$$\mathrm{cone}\left(\bigcup_{t\in T}\mathrm{epi}g_t^*\right) \quad \text{đóng ở trong} \quad P \times X \times \mathbb{R}. \tag{3.3.11}$$

Kết quả sau đây đưa ra các công thức để tính đạo hàm trên-đồ-thị Clarke suy rộng của $\mathcal{F}$ trong bài toán tối ưu véctơ nửa vô hạn.

Định lý 3.3.2. *Cho $\bar{p} \in P$ và cho $\bar{x} \in C(\bar{p})$ sao cho $\bar{y} := f(\bar{p}, \bar{x}) \in \mathcal{F}(\bar{p})$. Giả sử rằng tính chất trội đúng cho F ở xung quanh $\bar{p}$, hàm mục tiêu f là khả vi Fréchet tại $(\bar{p}, \bar{x})$, và điều kiện* (FM) *đúng cho hệ* (3.3.10). *Nếu*

$$\Big\{\nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p, x) \,\big|\, (p, x) \in P \times X, \sum_{t \in T} \lambda_t \partial g_t(\bar{p}, \bar{x})(p, x) \leq 0, \forall \lambda \in A(\bar{p}, \bar{x})\Big\} + K = \Pi_p T^C(\mathrm{epi}F; (\bar{p}, \bar{y})) \quad \forall p \in P$$

thì, với mỗi $p \in P$,

$$D^C \mathcal{F}(\bar{p}, \bar{y})(p) = E\Big(\big\{\nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p, x) \mid (p, x) \in P \times X, \sum_{t \in T} \lambda_t \partial g_t(\bar{p}, \bar{x})(p, x) \leq 0 \quad \forall \lambda \in A(\bar{p}, \bar{x})\big\} \big| K\Big).$$

Chương 4

ĐỐI ĐẠO HÀM FRÉCHET CỦA HÀM GIÁ TRỊ TỐI ƯU TRONG TỐI ƯU VÉCTƠ

Chương 4 thiết lập một số công thức để tính đối đạo hàm Fréchet của hàm giá trị tối ưu trong bài toán tối ưu véctơ phụ thuộc tham số. Những kết quả này đã được công bố trong [4].

4.1. Các khái niệm cơ bản và kết quả bổ trợ

Trong chương này, ta vẫn sử dụng các khái niệm và ký hiệu đã đưa ra trong các chương trước. Chẳng hạn, ta tiếp tục xét bài toán tối ưu véctơ phụ thuộc tham số (3.1.1), ánh xạ đa trị F ở trong (3.1.2) và hàm giá trị tối ưu $\mathcal{F}$ ở trong (3.1.3), nhưng xuyên suốt chương này P, X và Y được giả sử là các không gian Banach thực với chuẩn $||\cdot||$.

Cặp đối ngẫu giữa X và đối ngẫu tôpô của nó X^* được ký hiệu bởi $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$. Ký hiệu A^* được dùng để chỉ toán tử liên hợp của toán tử tuyến tính liên tục A. Hình cầu mở tâm $x \in X$ bán kính ρ trong X được ký hiệu bởi $B_\rho(x)$. Nón đối ngẫu không âm của nón K được định nghĩa là tập

$$K^* := \{y^* \in Y^* \mid \langle y^*, k \rangle \geq 0 \quad \forall k \in K\}. \tag{4.1.1}$$

Hàm véctơ $f\colon P \to Y$ được gọi là *khả vi chặt* tại $\bar{p} \in P$ nếu tồn tại một toán tử tuyến tính liên tục $\nabla f(\bar{p})\colon P \to Y$ sao cho

$$\lim_{p,u\to\bar{p}} \frac{f(p)-f(u)-\langle \nabla f(\bar{p}), p-u\rangle}{\|p-u\|} = 0.$$

Hàm véctơ $l\colon \Omega \subset X \to Y$ được gọi là *Lipschitz địa phương* (tương ứng, *Lipschitz trên địa phương*) tại $\bar{x} \in \Omega$ nếu tồn tại $\eta > 0$ và $\ell \geq 0$ sao cho

$$\|l(x)-l(u)\| \leq \ell\|x-u\| \quad \forall\, x,u \in B_\eta(\bar{x}) \cap \Omega$$
$$(\text{tương ứng, } \|l(x)-l(\bar{x})\| \leq \ell\|x-\bar{x}\| \quad \forall\, x \in B_\eta(\bar{x}) \cap \Omega).$$

Ta nói rằng ánh xạ đa trị $L\colon X \rightrightarrows Y$ có *lát cắt Lipschitz trên địa phương* tại $(\bar{x},\bar{y}) \in \operatorname{gph} L$ nếu tồn tại hàm véctơ $l\colon \operatorname{dom} L \to Y$ là Lipschitz trên địa phương tại $\bar{x}$ sao cho $l(\bar{x}) = \bar{y}$ và $l(x) \in L(x)$ với mọi $x \in \operatorname{dom} L$ trong một lân cận nào đó của $\bar{x}$. Đối với ánh xạ đa trị $G\colon X \rightrightarrows X^*$, ký hiệu

$$\operatorname*{Lim\,sup}_{x\to\bar{x}} G(x) := \Big\{x^* \in X^* \Big| \exists\, x_n \to \bar{x},\ \exists x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*,\ x_n^* \in F(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}\Big\}$$

được dùng để chỉ *giới hạn trên theo dãy theo nghĩa Painlevé-Kuratowski* trong tôpô sinh bởi chuẩn của X và tôpô yếu* (được ký hiệu bởi chữ w^*) của X^*. Ký hiệu $x \xrightarrow{\Omega} \bar{x}$ đối với tập $\Omega \subset X$ có nghĩa là $x \to \bar{x}$ với $x \in \Omega$. Ký hiệu $\varepsilon \downarrow \varepsilon_0$ được dùng để chỉ $\varepsilon \to \varepsilon_0$ với $\varepsilon \geq \varepsilon_0$.

Định nghĩa 4.1.1. (Xem B. S. Mordukhovich, *Variational analysis and generalized differentiation*, I: Basic Theory, Springer, 2006) Cho $\Omega \subset X$.
(i) Với mỗi $\varepsilon \geq 0$, đặt

$$\widehat{N}_\varepsilon(\bar{x};\Omega) := \Big\{x^* \in X^* \Big| \limsup_{x\xrightarrow{\Omega}\bar{x}} \frac{\langle x^*, x-\bar{x}\rangle}{\|x-\bar{x}\|} \leq \varepsilon\Big\}. \tag{4.1.2}$$

Các phần tử của tập hợp ở vế trái công thức này được gọi là các *ε-pháp tuyến* của Ω tại $\bar{x} \in \Omega$. Khi $\varepsilon = 0$, tập hợp $\widehat{N}(\bar{x};\Omega) := \widehat{N}_0(\bar{x};\Omega)$ ở trong (4.1.2) là một nón và được gọi là *nón pháp tuyến Fréchet* của Ω tại $\bar{x}$. Nếu $\bar{x} \notin \Omega$, ta đặt $\widehat{N}_\varepsilon(\bar{x};\Omega) := \emptyset$ với mọi $\varepsilon \geq 0$.
(ii) *Nón pháp tuyến Mordukhovich* của Ω tại $\bar{x} \in \Omega$ được định nghĩa là tập

$$N(\bar{x};\Omega) := \operatorname*{Lim\,sup}_{\substack{x\xrightarrow{\Omega}\bar{x}\\ \varepsilon\downarrow 0}} \widehat{N}_\varepsilon(x;\Omega). \tag{4.1.3}$$

Ta đặt $N(\bar{x};\Omega) := \emptyset$ nếu $\bar{x} \notin \Omega$.

Nhận xét 4.1.1. Hiển nhiên ta có $\widehat{N}(\bar{x};\Omega) \subset N(\bar{x};\Omega)$.

Định nghĩa 4.1.2. (Xem Mordukhovich, sách đã dẫn, 2006) Cho hàm số φ : $X \to \overline{\mathbb{R}}$ và cho $\bar{x} \in X$.

(i) *Dưới vi phân Mordukhovich* (hay *dưới vi phân qua giới hạn*) và *dưới vi phân Fréchet* của φ tại $\bar{x}$ với $|\varphi(\bar{x})| < \infty$ tương ứng được cho bởi các công thức

$$\partial\varphi(\bar{x}) := \{x^* \in X^* \mid (x^*, -1) \in N((\bar{x}, \varphi(\bar{x})); \text{epi}\varphi)\},$$
$$\widehat{\partial}\varphi(\bar{x}) := \{x^* \in X^* \mid (x^*, -1) \in \widehat{N}((\bar{x}, \varphi(\bar{x})); \text{epi}\varphi)\}.$$

Nếu $|\varphi(\bar{x})| = \infty$, thì ta đặt $\partial\varphi(\bar{x}) = \widehat{\partial}\varphi(\bar{x}) = \emptyset$.
(ii) *Dưới vi phân Fréchet trên* của φ tại $\bar{x}$ được định nghĩa là tập

$$\widehat{\partial}^+\varphi(\bar{x}) := -\widehat{\partial}(-\varphi)(\bar{x}). \tag{4.1.4}$$

Nhận xét 4.1.2. (Xem Mordukhovich, sách đã dẫn, 2006) Nếu φ là hàm lồi, thì dưới vi phân Mordukhovich của φ tại $\bar{x}$ với $|\varphi(\bar{x})| < \infty$ trùng với dưới vi phân theo nghĩa giải tích lồi, có nghĩa là

$$\partial\varphi(\bar{x}) = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x - \bar{x}\rangle \le \varphi(x) - \varphi(\bar{x}) \quad \forall x \in X\}.$$

Theo định nghĩa trên và Nhận xét 4.1.1, ta luôn có $\widehat{\partial}\varphi(\bar{x}) \subset \partial\varphi(\bar{x})$. Nếu bao hàm thức ngược lại được nghiệm đúng, thì ta nói rằng φ là *chính quy dưới* (lower regular) tại $\bar{x}$, có nghĩa là

$$\widehat{\partial}\varphi(\bar{x}) = \partial\varphi(\bar{x}). \tag{4.1.5}$$

Tập hợp các hàm chính quy dưới là đủ rộng, bao gồm tất cả các hàm lồi, các hàm khả vi chặt.

Định nghĩa 4.1.3. (Xem Mordukhovich, sách đã dẫn, 2006) Cho $G\colon P \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị và cho $(\bar{p}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} G$. *Đối đạo hàm Fréchet* (Fréchet coderivative) của G tại $(\bar{p}, \bar{y})$ được cho bởi công thức

$$\widehat{D}^*G(\bar{p}, \bar{y})(y^*) := \{p^* \in P^* \mid (p^*, -y^*) \in \widehat{N}((\bar{p}, \bar{y}); \operatorname{gph} G))\} \quad \forall y^* \in Y^*.$$

4.2. Trường hợp bài toán tối ưu véctơ có ràng buộc tổng quát

Mục này thiết lập một số công thức để tính đối đạo hàm Fréchet của hàm giá trị tối ưu $\mathcal{F}$ trong bài toán tối ưu véctơ có ràng buộc tổng quát (3.1.1). Ta định nghĩa các ánh xạ $\mathcal{H} : P \times Y \rightrightarrows Y$ và $\widetilde{C} : P \times Y \rightrightarrows X$ lần lượt như sau: $\mathcal{H}(p, y) := \mathcal{F}(p) \cap (y - K)$, $\widetilde{C}(p, y) := \{x \in C(p) \mid y = f(p, x)\}$. Kết quả chính của mục này:

Định lý 4.2.1. *Cho $\bar{p} \in P$, $\bar{x} \in C(\bar{p})$ sao cho $\bar{y} := f(\bar{p}, \bar{x}) \in \mathcal{F}(\bar{p})$. Với $y^* \in K^*$ được cho bởi* (4.1.1)*, giả sử rằng $\widehat{\partial}^+\langle y^*, f\rangle(\bar{p}, \bar{x}) \neq \emptyset$ và hàm f là Lipschitz trên địa phương tại $(\bar{p}, \bar{x})$. Giả thiết thêm rằng tính chất trội đúng cho F ở xung quanh $\bar{p}$ và $\mathcal{H}$ có lát cắt Lipschitz trên địa phương tại $(\bar{p}, \bar{y}, \bar{y})$. Khi đó*

$$\widehat{D}^*\mathcal{F}(\bar{p}, \bar{y})(y^*) \subset \bigcap_{(p^*, x^*) \in \widehat{\partial}^+\langle y^*, f\rangle(\bar{p}, \bar{x})} \Big[p^* + \widehat{D}^*C(\bar{p}, \bar{x})(x^*)\Big]. \tag{4.2.12}$$

Nếu ta giả sử thêm rằng f là khả vi Fréchet tại $(\bar{p},\bar{x})$ với đạo hàm $\nabla f(\bar{p},\bar{x}) := (\nabla_p f(\bar{p},\bar{x}), \nabla_x f(\bar{p},\bar{x}))$ và $\widetilde{C}$ có lát cắt Lipschitz trên địa phương tại $(\bar{p},\bar{y},\bar{x})$, thì bao hàm thức ngược lại của (4.2.12) *cũng đúng, có nghĩa là ta có*

$$\widehat{D}^*\mathcal{F}(\bar{p},\bar{y})(y^*) = \nabla_p f(\bar{p},\bar{x})^*y^* + \widehat{D}^*C(\bar{p},\bar{x})\big(\nabla_x f(\bar{p},\bar{x})^*y^*\big).$$

4.3. Trường hợp bài toán tối ưu véctơ có ràng buộc thông thường

Mục này được dành để triển khai các công thức tính đối đạo hàm Fréchet của $\mathcal{F}$ như ở trong Định lý 4.2.1 vào một số lớp các bài toán tối ưu véctơ có ràng buộc như: ràng buộc toán tử, ràng buộc được mô tả bởi hữu hạn và vô hạn các hàm số thực.

Trước hết ta xét bài toán (3.1.1) với ánh xạ tập ràng buộc $C : P \rightrightarrows X$ được cho ở dạng

$$C(p) := \{x \in X \mid h(p,x) \in \Theta\}, \tag{4.3.1}$$

ở đó $h : P \times X \to W$ là hàm véctơ giữa các không gian Banach và $\emptyset \neq \Theta \subset W$. Các ràng buộc kiểu (4.3.1) được biết như là *ràng buộc toán tử.*

Kết quả sau đây đưa ra các công thức để tính đối đạo hàm Fréchet của $\mathcal{F}$ với C ở trong (4.3.1).

Định lý 4.3.1. *Cho $\bar{p} \in P$, $\bar{x} \in C(\bar{p})$ sao cho $\bar{y} := f(\bar{p},\bar{x}) \in \mathcal{F}(\bar{p})$. Với $y^* \in K^*$ được cho bởi* (4.1.1)*, giả sử rằng $\widehat{\partial}^+\langle y^*, f\rangle(\bar{p},\bar{x}) \neq \emptyset$ và hàm f là Lipschitz trên địa phương tại $(\bar{p},\bar{x})$. Giả thiết thêm rằng tính chất trội đúng cho F được xác định bởi* (3.1.2) *ở xung quanh $\bar{p}$ và $\mathcal{H}$ có lát cắt Lipschitz trên địa phương tại $(\bar{p},\bar{y},\bar{y})$. Ta có các khẳng định sau:*

(i) *Giả sử rằng h ở trong* (4.3.1) *là khả vi chặt tại $(\bar{p},\bar{x})$ với đạo hàm $\nabla h(\bar{p},\bar{x})$ là toàn ánh. Khi đó*

$$\widehat{D}^*\mathcal{F}(\bar{p},\bar{y})(y^*) \subset \bigcap_{(p^*,x^*)\in\widehat{\partial}^+\langle y^*,f\rangle(\bar{p},\bar{x})} \Big\{p^* + u^* \Big| \; (u^*, -x^*) \in \nabla h(\bar{p},\bar{x})^*\widehat{N}(\bar{w};\Theta)\Big\}, \tag{4.3.2}$$

ở đây $\bar{w} := h(\bar{p},\bar{x})$.

(ii) *Giả sử thêm vào* (i) *rằng f là khả vi Fréchet tại $(\bar{p},\bar{x})$ với đạo hàm $\nabla f(\bar{p},\bar{x}) := (\nabla_p f(\bar{p},\bar{x}), \nabla_x f(\bar{p},\bar{x}))$ và $\widetilde{C}$ có lát cắt Lipschitz trên địa phương tại $(\bar{p},\bar{y},\bar{x})$. Khi đó bao hàm thức ngược lại của* (4.3.2) *cũng đúng, có nghĩa là ta có*

$$\widehat{D}^*\mathcal{F}(\bar{p},\bar{y})(y^*) = \Big\{\nabla_p f(\bar{p},\bar{x})^*y^* + u^* \Big| \; (u^*, -\nabla_x f(\bar{p},\bar{x})^*y^*) \in \nabla h(\bar{p},\bar{x})^*\widehat{N}(\bar{w};\Theta)\Big\}.$$

Bây giờ ta xét bài toán (3.1.1) với các ràng buộc đẳng thức và bất đẳng thức

$$C(p) := \big\{x \in X \mid g_i(p,x) \le 0,\ i = 1,...,m,\\ g_i(p,x) = 0,\ \ i = m+1,...,m+r\big\}, \tag{4.3.6}$$

ở đó $g_i,\ i = 1,...,m+r$ là các hàm số thực ở trên $P \times X$. Các ràng buộc kiểu này có thể được xem như một trường hợp đặc biệt của ràng buộc toán tử (4.3.1) với $h : P \times X \to \mathbb{R}^{m+r}$ được xác định bởi

$$h(p,x) := (g_1(p,x),...,g_{m+r}(p,x)) \tag{4.3.7}$$

và $\Theta \subset \mathbb{R}^{m+r}$ được cho bởi

$$\Theta := \big\{(\alpha_1,...,\alpha_{m+r}) \in \mathbb{R}^{m+r} \mid \alpha_i \le 0,\ i = 1,...,m,\\ \alpha_i = 0,\ \ i = m+1,...,m+r\big\}. \tag{4.3.8}$$

Tuy nhiên, các ràng buộc kiểu (4.3.6) lại là một lớp thông thường và quen thuộc trong quy hoạch phi tuyến và tối ưu véctơ. Định lý tiếp theo đưa ra các công thức để tính đối đạo Fréchet của $\mathcal{F}$ với C được cho bởi (4.3.6).

Định lý 4.3.2. *Cho $\bar{p} \in P$, $\bar{x} \in C(\bar{p})$ sao cho $\bar{y} := f(\bar{p},\bar{x}) \in \mathcal{F}(\bar{p})$. Với $y^* \in K^*$ được cho bởi* (4.1.1)*, giả sử rằng $\widehat{\partial}^+\langle y^*, f\rangle(\bar{p},\bar{x}) \neq \emptyset$ và hàm f là Lipschitz trên địa phương tại $(\bar{p},\bar{x})$. Giả sử rằng tính chất trội đúng cho F được xác định bởi* (3.1.2) *ở xung quanh $\bar{p}$ và $\mathcal{H}$ có lát cắt Lipschitz trên địa phương tại $(\bar{p},\bar{y},\bar{y})$. Giả thiết thêm rằng các hàm $g_i, i = 1,...,m+r$, ở trong* (4.3.6) *là khả vi Fréchet tại $(\bar{p},\bar{x})$ và*

$$\nabla g_1(\bar{p},\bar{x}),...,\nabla g_{m+r}(\bar{p},\bar{x}) \ \text{ là độc lập tuyến tính.} \tag{4.3.9}$$

Ta có

$$\widehat{D}^*\mathcal{F}(\bar{p},\bar{y})(y^*) \subset \bigcap_{(p^*,x^*)\in\widehat{\partial}^+\langle y^*,f\rangle(\bar{p},\bar{x})} \ \bigcup_{\lambda\in\Lambda(\bar{p},\bar{x},x^*)} \Big[p^* + \sum_{i=1}^{m+r} \lambda_i \nabla_p g_i(\bar{p},\bar{x})\Big], \tag{4.3.10}$$

ở đó

$$\Lambda(\bar{p},\bar{x},x^*) := \Big\{\lambda := (\lambda_1,...,\lambda_{m+r}) \in \mathbb{R}^{m+r}\Big|\, x^* + \sum_{i=1}^{m+r}\lambda_i\nabla_x g_i(\bar{p},\bar{x}) = 0,\\ \lambda_i \ge 0, \lambda_i g_i(\bar{p},\bar{x}) = 0 \text{ với } i = 1,...,m\Big\} \tag{4.3.11}$$

ký hiệu cho tập các nhân tử Lagrange. Hơn nữa, (4.3.10) *trở thành đẳng thức*

$$\widehat{D}^*\mathcal{F}(\bar{p},\bar{y})(y^*) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda(\bar{p},\bar{x},\nabla_x f(\bar{p},\bar{x})^* y^*)} \Big[\nabla_p f(\bar{p},\bar{x})^* y^* + \sum_{i=1}^{m+r}\lambda_i\nabla_p g_i(\bar{p},\bar{x})\Big], \tag{4.3.12}$$

nếu $\widetilde{C}$ có lát cắt Lipschitz trên địa phương tại $(\bar{p}, \bar{y}, \bar{x})$ và f là khả vi Fréchet tại $(\bar{p}, \bar{x})$ với đạo hàm $\nabla f(\bar{p}, \bar{x}) := (\nabla_p f(\bar{p}, \bar{x}), \nabla_x f(\bar{p}, \bar{x}))$.

Tiếp theo chúng ta sẽ triển khai các công thức để tính đối đạo hàm Fréchet của hàm giá trị tối ưu $\mathcal{F}$ trong bài toán *tối ưu véctơ nửa vô hạn*. Cụ thể, ta xét bài toán (3.1.1) với ánh xạ tập ràng buộc C được xác định bởi (3.3.10), nhưng giả sử rằng với mỗi $t \in T$, $g_t : P \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ là *chính quy dưới* (xem định nghĩa ở trong (4.1.5)) tại điểm đang khảo sát. Ta vẫn giả thiết rằng P, X và Y là các không gian Banach và sử dụng các ký hiệu ở trong Mục 3.3.

Định nghĩa 4.3.1. Ta nói rằng hệ (3.3.10) thỏa mãn điều kiện chính quy ràng buộc đặt trên dưới vi phân Fréchet, viết tắt là (FRCQ), tại $(\bar{p}, \bar{x}) \in \operatorname{gph} C$ nếu

$$\widehat{N}\big((\bar{p}, \bar{x}); \operatorname{gph} C\big) = \bigcup_{\lambda \in A(\bar{p}, \bar{x})} \Big[\sum_{t \in T} \lambda_t \widehat{\partial} g_t(\bar{p}, \bar{x})\Big]. \tag{4.3.18}$$

Định lý 4.3.4. *Cho $\bar{p} \in P$, $\bar{x} \in C(\bar{p})$ sao cho $\bar{y} := f(\bar{p}, \bar{x}) \in \mathcal{F}(\bar{p})$. Với $y^* \in K^*$ được cho bởi* (4.1.1)*, giả sử rằng $\widehat{\partial}^+\langle y^*, f\rangle(\bar{p}, \bar{x}) \neq \emptyset$ và hàm f là Lipschitz trên địa phương tại $(\bar{p}, \bar{x})$. Giả sử rằng tính chất trội đúng cho F ở xung quanh $\bar{p}$, $\mathcal{H}$ có lát cắt Lipschitz trên địa phương tại $(\bar{p}, \bar{y}, \bar{y})$ và g_t, $t \in T$, ở trong* (3.3.10) *là chính quy dưới tại $(\bar{p}, \bar{x})$. Giả thiết thêm rằng hệ* (3.3.10) *thỏa mãn* (FRCQ) *tại $(\bar{p}, \bar{x})$. Khi đó ta có*

$$\widehat{D}^*\mathcal{F}(\bar{p}, \bar{y})(y^*) \subset \bigcap_{(p^*, x^*) \in \widehat{\partial}^+\langle y^*, f\rangle(\bar{p}, \bar{x})} \Big\{p^* + u^* \Big|\ (u^*, -x^*) \in \bigcup_{\lambda \in A(\bar{p}, \bar{x})} \big[\sum_{t \in T} \lambda_t \widehat{\partial} g_t(\bar{p}, \bar{x})\big]\Big\}. \tag{4.3.19}$$

Ngoài ra, (4.3.19) *nghiệm đúng dưới dạng đẳng thức*

$$\widehat{D}^*\mathcal{F}(\bar{p}, \bar{y})(y^*) = \Big\{\nabla_p f(\bar{p}, \bar{x})^* y^* + u^* \Big| (u^*, -\nabla_x f(\bar{p}, \bar{x})^* y^*) \in \bigcup_{\lambda \in A(\bar{p}, \bar{x})} \big[\sum_{t \in T} \lambda_t \widehat{\partial} g_t(\bar{p}, \bar{x})\big]\Big\}, \tag{4.3.20}$$

nếu $\widetilde{C}$ có lát cắt Lipschitz trên địa phương tại $(\bar{p}, \bar{y}, \bar{x})$ và f là khả vi Fréchet tại $(\bar{p}, \bar{x})$ với đạo hàm $\nabla f(\bar{p}, \bar{x}) := (\nabla_p f(\bar{p}, \bar{x}), \nabla_x f(\bar{p}, \bar{x}))$.

KẾT LUẬN

Các kết quả chính của luận án này bao gồm:

1. Điều kiện cần và đủ cho tính chất nửa liên tục trên và nửa liên tục dưới của ánh xạ nghiệm hữu hiệu trong bài toán tối ưu véctơ nửa vô hạn.
2. Điều kiện đủ cho tính chất giả-Lipschitz của ánh xạ nghiệm hữu hiệu trong bài toán tối ưu véctơ nửa vô hạn lồi.
3. Công thức tính đạo hàm trên-đồ-thị Clarke suy rộng của hàm giá trị tối ưu cho bài toán tối ưu véctơ trong các trường hợp sau: a) bài toán không có ràng buộc, b) bài toán có ràng buộc tổng quát, c) bài toán tối ưu véctơ nửa vô hạn.
4. Công thức tính đối đạo hàm Fréchet của hàm giá trị tối ưu trong các bài toán tối ưu véctơ thuộc các dạng sau: a) bài toán có tập ràng buộc được xác định bởi một ánh xạ đa trị, b) bài toán có ràng buộc toán tử, c) bài toán có tập ràng buộc được mô tả bởi hữu hạn hoặc vô hạn các hàm số thực.

Có thể phát triển các kết quả của hai chương đầu, đặc biệt là của Chương 2, bằng cách xác lập điều kiện cần cho tính giả-Lipschitz của ánh xạ nghiệm hữu hiệu và đưa ra các điều kiện đủ để ánh xạ nghiệm hữu hiệu là liên tục Hölder.

Cần nghiên cứu sâu thêm mối quan hệ giữa các kết quả của Chương 3 và Chương 4 với những kết quả quen biết của J. Gauvin và J. W. Tolle (1977), J. Gauvin (1979), R. T. Rockafellar (1982) về tính ổn định vi phân trong bài toán quy hoạch có tham số.

Ngoài ra, cũng nên khảo sát sự cần thiết của một số giả thiết đặc biệt (như tính lồi, điều kiện trội,...) trong các định lý ở Chương 3.

LỜI CẢM ƠN

Luận án này được hoàn thành tại Viện Toán học (Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam). Trong thời gian làm nghiên cứu sinh, nhờ sự giúp đỡ nhiệt tình của GS. J.-C. Yao, tác giả luận án đã có cơ hội đến học tập và nghiên cứu tại Đại học Quốc gia Tôn Trung Sơn (National Sun Yat-sen University, Kaohsiung, Đài Loan) từ tháng 10/2007 đến tháng 10/2009. Tác giả xin chân thành cám ơn GS. TSKH. Nguyễn Đông Yên, TS. Nguyễn Quang Huy, và GS. Jen-Chih Yao đã tận tình hướng dẫn để có được những kết quả trong luận án này.

Xin chân thành cám ơn GS. Franco Giannessi, GS. Boris Mordukhovich, GS. Xi Yin Zheng, GS. TSKH. Hoàng Xuân Phú, GS. TSKH. Phạm Hữu Sách, PGS. TS. Trần Văn Ân, PGS. TS. Tạ Duy Phượng, PGS. TS. Nguyễn Năng Tâm, TS. Bùi Trọng Kiên, và các thành viên của phòng Giải tích số và Tính toán khoa học đã giúp đỡ tác giả trong quá trình nghiên cứu.

Tác giả xin được cám ơn PGS. TS. Trương Xuân Đức Hà, PGS. TS. Nguyễn Thị Bạch Kim, và Hội đồng chấm luận án cấp phòng về những nhận xét và những ý kiến bổ ích, giúp hoàn thiện luận án.

Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn Ban lãnh đạo Viện Toán học, Trung tâm Đào tạo Sau đại học, và tập thể cán bộ công nhân viên của Viện Toán học về sự quan tâm giúp đỡ.

Xin chân thành cám ơn Ban lãnh đạo trường Đại học Đồng Tháp và trường Đại học Sài Gòn, các thầy cô giáo và các bạn đồng nghiệp ở Khoa Toán trường Đại học Đồng Tháp và Khoa Toán-Ứng dụng trường Đại học Sài Gòn đã luôn động viên giúp đỡ tác giả.

Xin cám ơn các bạn nghiên cứu sinh, gia đình và bạn bè đã luôn khuyến khích giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập, nghiên cứu.

CÁC KẾT QUẢ CỦA LUẬN ÁN NÀY ĐÃ ĐƯỢC BÁO CÁO TẠI

• Xêmina phòng Giải tích số và Tính toán khoa học, Viện Toán học.

• The 9th International Symposium on Generalized Convexity and Generalized Monotonicity, Kaohsiung, Taiwan, July 21-25, 2008.

• International Symposium on Variational Analysis and Optimization, Kaohsiung, Taiwan, November 28-30, 2008.

• International Symposium on Optimization and Optimal Control, Kaohsiung, Taiwan, February 2-6, 2009.

• The 8th International Spring School and Workshop on Optimization and its Applications, Nha Trang, Vietnam, March 1-3, 2010.

• CIMPA-UNESCO-VIETNAM SCHOOL, Variational Inequalities and Related Problems, Hanoi, Vietnam, May 10-21, 2010.

DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH CỦA TÁC GIẢ CÓ LIÊN QUAN TỚI LUẬN ÁN

[1] T. D. Chuong, N. Q. Huy, J.-C. Yao (2009), "Stability of semi-infinite vector optimization problems under functional perturbations", *J. Glob. Optim.*, **45**, pp. 583 - 595.

[2] T. D. Chuong, N. Q. Huy, J.-C. Yao (2010), "Pseudo-Lipschitz property of linear semi-infinite vector optimizition problems", *European J. Oper. Res.*, **200**, pp. 639 - 644.

[3] T. D. Chuong, J.-C. Yao (2009), "Sufficient conditions for pseudo-Lipschitz property in convex semi-infinite vector optimization problems", *Nonlinear Anal.*, **71**, pp. 6312 - 6322.

[4] T. D. Chuong, J.-C. Yao (2009), "Coderivatives of efficient point multifunctions in parametric vector optimization", *Taiwanese J. Math.*, **13**, pp. 1671 - 1693.

[5] T. D. Chuong, J.-C. Yao (2010), "Generalized Clarke epiderivatives of parametric vector optimization problems", *J. Optim. Theory Appl.*, **146**, pp. 77 - 94.