

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

VIỆN TOÁN HỌC

Trần Thị Thu Hương

**ĐẶC TRƯNG KHÔNG GIAN TRẠNG THÁI
VÀ TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA MỘT SỐ HỆ
SANDPILE MODEL MỞ RỘNG**

Chuyên ngành: Cơ sở Toán học cho Tin học

Mã số: 62 46 01 10

**Cán bộ hướng dẫn: PGS.TS. Phan Thị Hà Dương, Viện Toán
học**

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Mở đầu

Lý thuyết hệ động lực đã được nghiên cứu nhiều trong các lĩnh vực khác nhau như Toán học, Vật lý, Sinh học, Hóa học. Hệ động lực là một quá trình tiến hóa theo thời gian và được mô tả bằng các trạng thái và các luật vận động. Một hệ động lực là rời rạc nếu thời gian là trong \mathbb{Z} . Trên hệ động lực rời rạc người ta quan tâm đến một số vấn đề sau: sự hội tụ của hệ, cấu trúc (thứ tự, dàn, nhóm) của không gian các trạng thái của hệ, tính đạt được của hệ (khi nào một trạng thái đạt được từ một trạng thái khác bằng cách áp dụng một số lần luật vận động), sự ổn định của hệ dưới các tác động... Trong luận án này, chúng tôi nghiên cứu các vấn đề trên cho một số mở rộng của hai hệ động lực CFG (Chip firing game) và SPM (Sandpile model).

Hệ CFG được giới thiệu bởi Bak, Tang và Wiesenfeld khi nghiên cứu các hệ đột biến có tổ chức trong tự nhiên vào năm 1987. Năm 1991, Bjorner, Lovász và Shor đã mô hình hóa và sử dụng lý thuyết ngôn ngữ để nghiên cứu sự hội tụ của hệ. Theo đó, hệ CFG được định nghĩa trên một đa đồ thị có hướng $G = (V, E)$, được gọi là đồ thị nền. Mỗi trạng thái của hệ là một sự phân bố chip trên V . Luật vận động là luật bắn: một đỉnh có thể bắn nếu chứa số chip ít nhất bằng số bậc đi ra của nó, và khi bắn nó sẽ cho tất cả các đỉnh dọc theo các cạnh đi ra này một chip. Năm 2002, Phan và các đồng nghiệp đã chứng minh cấu trúc dàn phân phối địa phương dưới của không gian các trạng thái của CFG trên đồ thị có hướng. Sau đó, Dhar et. al. và Cori và Rossin nghiên cứu cấu trúc nhóm trên một lớp các trạng thái ổn định đặc biệt và thực hiện nhiều tính toán tổ hợp liên quan đến lý thuyết đồ thị như số cây bao trùm, ma trận Laplace. Điều này cũng được nghiên cứu sâu hơn và mở rộng cho đồ thị có hướng nhờ sử dụng các công cụ của đại số. Hơn nữa, gần đây hệ CFG còn được sử dụng như là một công cụ trong nghiên cứu một số vấn đề về đại số liên quan đến các định lý Riemann-Roch, đa thức Tutte, giả thuyết về h -vector của Stanley.

Hệ SPM được giới thiệu và nghiên cứu trong nhiều lĩnh vực khác nhau: trong bối cảnh về dàn các phân hoạch của các số tự nhiên bởi Brylawsky; từ góc nhìn của Vật lý để nghiên cứu hiện tượng tự đột biến có tổ chức (SOC) bởi Bak, Tang và Wiesenfeld; từ cách tiếp cận của Tổ hợp bởi Anderson et. al., Spencer, Goles và Kiwi. Hệ SPM là hệ động lực rời rạc, trong đó mỗi trạng thái là dãy các cột cát có độ cao giảm dần. Luật vận động là luật rơi, tức là khi một cột cát có độ cao lớn hơn cột bên phải của nó ít nhất là 2 hạt thì nó sẽ cho hàng xóm đó một hạt. Năm 1993, Goles và Kiwi đã

chứng minh rằng hệ SPM có thể được mã hóa như một hệ CFG trên đồ thị nền là nửa đường thẳng vô hạn. Nhờ vậy, hệ SPM kế thừa một số tính chất tổng quát của hệ CFG như sự hội tụ, cấu trúc dàn. Ngoài ra, do là một CFG trên đồ thị đặc biệt nên nó cũng có một số tính chất đặc trưng như các trạng thái đạt được từ một cột duy nhất đều được đặc tả. Hơn nữa, thời gian để hệ hội tụ đến trạng thái ổn định cũng được xác định tường minh. Bên cạnh đó, hệ SPM và một số hệ mở rộng của nó được dùng để tính toán hoặc sinh tổ hợp các lớp con của các phân hoạch như phân hoạch trơn, phân hoạch chặt và để chứng minh một số đẳng thức tổ hợp.

Mục đích của luận án là:

1. Nghiên cứu quá trình tự ổn định của hệ SPM dưới tác động từ bên ngoài. Nhắc lại rằng các hệ trong tự nhiên ngoài sự vận động nội tại bên trong còn bị tác động bởi các yếu tố từ bên ngoài. Mỗi khi hệ ổn định, một tác động nhỏ từ bên ngoài sẽ phá vỡ sự ổn định của hệ và làm cho hệ tiếp tục vận động với luật nội tại. Để đo sự biến thiên của hệ dưới tác động bên ngoài này, chúng tôi quan tâm tới sự chuyển đổi giữa các trạng thái ổn định và thời gian chuyển đổi giữa chúng.

2. Đề xuất các hệ mở rộng trên các hệ SPM và CFG để mô tả tốt hơn hoặc cho phù hợp với các mục đích khác nhau của các hệ trong thực tế. Với các hệ mở rộng này, chúng tôi quan tâm đến đặc trưng các trạng thái, trạng thái ổn định; cấu trúc không gian; sự hội tụ; thời gian hội tụ và các tính toán tổ hợp trên các trạng thái của hệ.

Với mục tiêu này, luận án trình bày bốn chương chính. Trước đó, một số kiến thức chuẩn bị và các kết quả đã được nghiên cứu liên quan đến luận án trên hai hệ SPM và CFG được trình bày trong Chương 1.

Chương 2: Nghiên cứu tính ổn định của hệ SPM dưới tác động từ bên ngoài. Chúng tôi xét hệ *SPM* có bổ sung *luật thêm*: mỗi khi hệ đạt đến một trạng thái ổn định duy nhất, thì một hạt sẽ được thêm vào một cột hợp lý, và hệ lại tiếp tục vận động với luật rơi nội tại để đạt đến một trạng thái ổn định khác, và tiếp tục quá trình này. Chúng tôi quan tâm đến tập tất cả các trạng thái ổn định thu được bằng cách như vậy. Các kết quả trong phần này là: sinh ra tập tất cả các phân hoạch trơn bằng hệ động lực; chứng minh rằng tập các phân hoạch trơn có cấu trúc dàn và là dàn con của dàn Young (dàn các phân hoạch với quan hệ thứ tự bao hàm). Thêm vào đó, bằng việc đưa ra khái niệm "năng lượng", chúng tôi cũng tính thời gian để hệ đạt đến một trạng thái ổn định cho trước. Trong hệ này vì thời gian của mỗi con đường đến một trạng thái ổn định là khác nhau nên việc đánh giá thời gian sẽ thông qua thời gian ngắn nhất và dài

nhất. Đây cũng là cơ sở để khảo sát sự biến thiên của hệ dưới tác động từ bên ngoài.

Chương 3: Nghiên cứu một mở rộng của hệ SPM thành hệ SPM đối xứng song song. Trong đó một cột có thể rơi sang bên phải hoặc bên trái nếu hiệu độ cao tương ứng ít nhất là 2 (hệ mở rộng SPM đối xứng) và các cột có thể rơi (trái hoặc phải) sẽ rơi đồng thời (hệ mở rộng SPM song song). Hệ SPM đối xứng được nghiên cứu bởi Formenti et. al [8] và bởi Phan [11]. Chúng tôi chứng minh mặc dù trạng thái ổn định của hệ SPM đối xứng song song là một tập con của tập trạng thái ổn định của hệ SPM đối xứng, nhưng dạng ổn định của chúng lại trùng nhau (Định lý 3.2.1). Chứng minh của chúng tôi mang tính kiến thiết. Hơn nữa, chúng tôi cũng đưa ra một đánh giá gần chính xác cho thời gian ngắn nhất để hệ SPM đối xứng song song hội tụ tới một trạng thái ổn định.

Chương 4: Nghiên cứu một mở rộng của hệ SPM và hệ CFG thành các hệ SPM đối xứng và CFG có dấu tương ứng và mối liên hệ giữa chúng. Mục 4.2 đưa ra các mở rộng trên đường thẳng và Mục 4.3 là trên đồ thị vòng. Chúng tôi mở rộng bằng cách thêm luật cho các hệ như sau. Với hệ SPM, một cột có thể rơi sang bên phải hoặc bên trái nó nếu hiệu độ cao tương ứng ít nhất là 2. Với hệ CFG, các đỉnh có thể chứa một số âm các chip và các đỉnh đủ âm chip cũng có thể bắn như các đỉnh đủ dương chip. Bằng cách mở rộng như trên, việc mô tả các hệ trong thực tế sẽ tốt hơn. Hơn nữa, hệ CFG có dấu có thể được sử dụng để mã hóa hệ SPM đối xứng. Với mỗi đối tượng nghiên cứu khác nhau chúng tôi sẽ hoặc là làm trên hệ SPM rồi chuyển các kết quả sang hệ CFG hoặc ngược lại. Chẳng hạn, bài toán đặc trưng các trạng thái sẽ được thực hiện trên hệ SPM và bài toán tính toán tổ hợp số các trạng thái ổn định sẽ được thực hiện trên hệ CFG. Các kết quả đạt được khi đồ thị nền là đường thẳng và đồ thị vòng là: mã hóa hệ SPM đối xứng bởi hệ CFG có dấu; đặc trưng trạng thái; đưa ra các tính toán tổ hợp cho số trạng thái định theo độ dài và theo trọng số. Từ đây chúng tôi cũng chỉ ra rằng mở rộng hệ CFG theo cách này là một mở rộng tự nhiên, và có thể được áp dụng cho những nghiên cứu khác.

Chương 1. Hệ động lực rời rạc

Chương này nhắc lại các kiến thức chuẩn bị, một số hướng nghiên cứu và các kết quả đã biết về hai hệ được nghiên cứu chính trong luận án: Hệ SPM (Sandpile model) và hệ CFG (Chip firing game). Cụ thể bố cục của chương như sau:

1.1 Các kiến thức chuẩn bị

Phần này nhắc lại ngắn gọn các kiến thức chuẩn bị dùng trong luận án về đồ thị, phân hoạch của số tự nhiên, tập thứ tự bộ phận, dàn và ngôn ngữ.

1.2 Một số hệ động lực rời rạc

Phần này giới thiệu hai hệ động lực rời rạc được sử dụng trong luận án là hệ CFG (Chip firing game) và hệ SPM (Sandpile Model). Mục 1.2.1 nhắc lại một số đối tượng và thuật ngữ chung liên quan đến các hệ động lực rời rạc. Các vấn đề nghiên cứu, các kết quả đã có cho các hệ CFG và SPM được trình bày trong các mục 1.2.2 và 1.2.3.

1.2.1 Các kiến thức chung về hệ động lực rời rạc

Trước hết, định nghĩa hình thức của hệ động lực rời rạc được phát biểu như sau

Định nghĩa 1.2.1 (Hệ động lực rời rạc). *Hệ động lực rời rạc* S là một cặp $S = (\mathcal{C}, \mathcal{R})$, trong đó

- \mathcal{C} là một tập hợp khác rỗng, được gọi là *không gian trạng thái* của hệ S .
- \mathcal{R} là tập các hàm $\phi : \mathbb{N} \times \mathcal{C} \rightarrow 2^{\mathcal{C}}$ thỏa mãn $\phi(0, c) = c$ và $\phi(t_2, \phi(t_1, c)) = \phi(t_1 + t_2, c)$ với mọi $t_1, t_2 \in \mathbb{N}$ và $c \in \mathcal{C}$. Khi đó, \mathcal{R} còn được gọi là *luật vận động* của hệ S .

Ký hiệu \leq_S là quan hệ hai ngôi cảm sinh từ hệ động lực rời rạc S như sau: Với a, b là các trạng thái của S , ta có $b \leq_S a$ nếu b thu được từ a bằng cách áp dụng dãy các luật vận động.

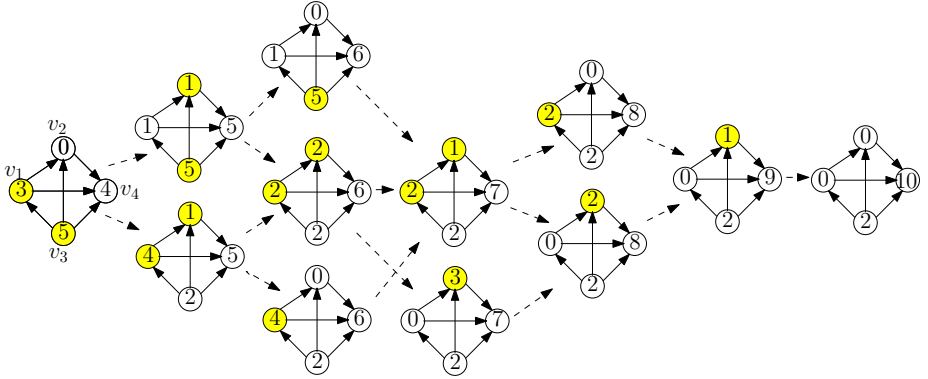
1.2.2 Hệ CFG

Bjorner, Lovász và Shor [2] đã đưa ra định nghĩa hệ CFG, được phát biểu như sau

Định nghĩa 1.2.3 (Hệ CFG). Cho $G = (V, E)$ là một đa đồ thị (có hướng hoặc vô hướng). Hệ CFG (*Chip firing game*) được định nghĩa trên G (G được gọi là *đồ thị nền* của hệ), ký hiệu là $\text{CFG}(G)$, là một hệ động lực rời rạc. Trong đó, mỗi trạng thái là một phân bố chip trên V và luật vận động là *luật bắn*. Luật bắn như sau: tại mỗi bước một *đỉnh bắn được*

sẽ *bắn*. Ở đây, một đỉnh bắn được nếu chứa số chip ít nhất là số bậc (bậc đi ra) của nó và khi bắn nó sẽ cho tất cả các đỉnh dọc theo các cạnh đi ra này một chip.

Hình 1 chỉ ra không gian trạng thái của một hệ CFG trên một đồ thị 4 đỉnh. Từ hình này ta thấy hệ hội tụ (dừng) và đạt tới một trạng thái ổn định duy nhất. Đỉnh v_4 là một đỉnh đặc biệt, nó đóng vai trò giống như là đỉnh thu thập các chip và là nguyên nhân làm cho hệ hội tụ.



Hình 1: Đồ thị quỹ đạo của CFG

Ký hiệu $CFG(G, \mathcal{O})$ là hệ CFG xuất phát từ một trạng thái khởi đầu \mathcal{O} . Ta có

Định lý 1.2.2. Cho G là đồ thị có hướng liên thông không có thành phần đóng và $\mathcal{O} \in CFG(G)$. Khi đó, $(CFG(G, \mathcal{O}), \leq_{CFG})$ là một tập có thứ tự, và do đó hệ $CFG(G, \mathcal{O})$ là dừng.

1.2.3 Hệ SPM

Trước hết ta nhắc lại khái niệm phân hoạch, phân hoạch trơn của số tự nhiên.

Định nghĩa 1.1.6 (Phân hoạch). (i) Một *phân hoạch* (partition) là một dãy các số nguyên không âm $a = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ sao cho $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k > 0$ (quy ước, $a_j = 0$ với mọi $j > k$). Khi đó, a_i là các *phần* của a ; và k là *độ dài* của a , ký hiệu $l(a) = k$. Chúng ta nói rằng a là một phân hoạch của một số tự nhiên n , hay n là *trọng số* của a , và viết $w(a) = n$, nếu $\sum_{i=1}^k a_i = n$.

- (ii) Một phân hoạch a được gọi là *trơn* nếu $a_i - a_{i+1} \leq 1$ với mọi $i = 1, 2, \dots, k$.

Hệ SPM được định nghĩa như sau

Định nghĩa 1.2.7 (Hệ SPM). Cho N là một số tự nhiên. Hệ SPM(N) là hệ động lực rời rạc sao cho:

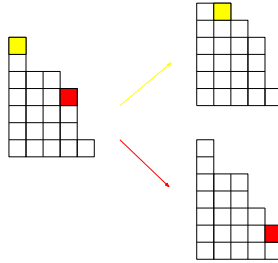
- (i) Trạng thái khởi đầu là (N) ;
(ii) Luật vận động là *luật SPM tuần tự* như sau:

a) Luật rơi:

- Vị trí i có thể rơi nếu $a_i - a_{i+1} \geq 2$;
- Áp dụng luật rơi tại vị trí i có thể rơi là:

$$(a_1, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_k) \rightarrow (a_1, \dots, a_i - 1, a_{i+1} + 1, \dots, a_k).$$

b) Luật tuần tự: Mỗi bước áp dụng luật rơi tại một vị trí.

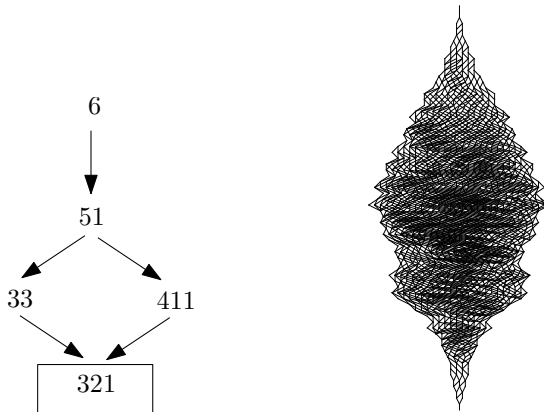


Hình 2: Luật rơi phải

Hình 2 mô tả không gian trạng thái của hệ SPM(6) và hệ SPM(30). Qua hình minh họa, ta thấy hệ hội tụ tới một trạng thái ổn định duy nhất.

Đặc trưng trạng thái của hệ SPM như sau

Mệnh đề 1.2.4 ([9]). Cho a là một phân hoạch của một số tự nhiên. Khi đó, a là một phần tử của SPM nếu và chỉ nếu a không chứa đoạn con nào có dạng $p, p, p-1, \dots, p-r+1, p-r, p-r$ hoặc p, p, p trong đó $p > r \geq 1$.



Hình 3: Không gian trạng thái của SPM(6) và SPM(30)

Chương 2. Hệ SPM: Tính ổn định

Trong chương này, chúng tôi xét hệ *SPM* với luật bổ sung sau: mỗi khi hệ đạt đến một trạng thái ổn định duy nhất, thì một hạt sẽ được thêm vào một cột hợp lý một cách ngẫu nhiên, và hệ lại tiếp tục vận động với luật rơi nội tại để đạt đến một trạng thái ổn định khác và cứ tiếp tục như vậy. Chúng tôi nghiên cứu tập tất cả các trạng thái ổn định thu được bằng cách này. Các kết quả là chứng minh được hệ sinh ra tập tất cả các phân hoạch tron và tập hợp này cùng với thứ tự cảm sinh bởi hệ động lực là một dàn con của dàn Young. Thêm vào đó, phần 2.3 đưa ra cách tính thời gian để hệ đạt đến một trạng thái ổn định nhờ sử dụng khái niệm "năng lượng" cho các hạt trong hệ. Các kết quả của chương này đã được trình bày trong [12].

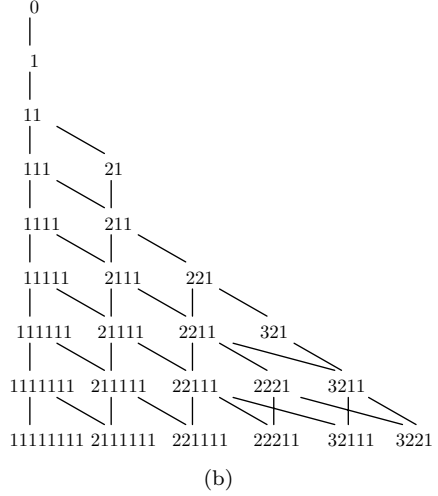
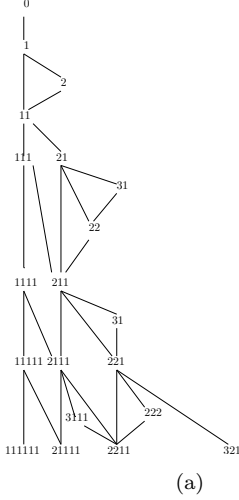
2.1 Hệ E-SPM

Định nghĩa 2.1.1 (Hệ E-SPM). Hệ *SPM mở rộng*, được ký hiệu là E-SPM (Extended Sandpile Model), là một hệ động lực rời rạc, trong đó các trạng thái của nó là các phân hoạch của số các số tự nhiên với trạng thái khởi đầu là (0) . Hệ gồm hai luật vận động như sau:

- (i) *Luật rơi (luật nội tại)*: một hạt ở cột thứ i có thể rơi xuống cột thứ $(i + 1)$ nếu hiệu độ cao của cột i và $i + 1$ ít nhất là 2.

- (ii) *Luật thêm (luật bên ngoài)*: một hạt có thể được thêm vào một cột của một phân hoạch trơn sao trạng thái thu được vẫn là một phân hoạch.

Hình 4(a) mô tả không gian trạng thái của hệ SPM mở rộng E-SPM.



Hình 4: Không gian trạng thái của hệ E-SPM và hệ SE-SPM

Mệnh đề 2.1.1. *Tất cả các phân hoạch trơn đều là các phần tử của hệ E-SPM.*

2.2 Cấu trúc không gian trạng thái của các phân hoạch trơn

Kết quả chính của phần này là chứng minh không gian các trạng thái ổn định với thứ tự cảm sinh \leq_S của hệ E-SPM, được ký hiệu là SE-SPM, lập thành một dàn. Hơn nữa, dàn này là một dàn con của dàn Young.

Định lý 2.2.1. *Tập $(SE-SPM, \leq_S)$ là một dàn con của dàn Young.*

Hình 4(b) minh họa dàn các phân hoạch trơn với thứ tự cảm sinh từ hệ E-SPM.

2.3 Độ dài đường đi giữa hai phân hoạch trơn trong hệ E-SPM

Trong phần trước, chúng ta đã biết rằng để đi từ một phân hoạch trơn này đến một phân hoạch trơn khác trong hệ E-SPM có thể có nhiều cách áp dụng luật vận động hay nhiều đường đi trong đồ thị quỹ đạo của hệ. Mỗi cách áp dụng có thể tốn nhiều hay ít bước phụ thuộc vào vị trí của cột mà luật thêm được áp dụng. Do đó hệ này không có tính chất phân bậc. Tuy nhiên tiếp theo chúng tôi sẽ chứng minh rằng đường đi ngắn nhất giữa hai phân hoạch trơn có độ dài chỉ phụ thuộc vào trọng số của chúng. Trong khi đó, bài toán sẽ phức tạp hơn đối với đường đi dài nhất.

Định lý 2.3.1. *Cho a và b là các phân hoạch trơn và $b \leq_S a$. Khi đó*

- (i) *Độ dài của đường đi ngắn nhất trong hệ E-SPM từ (0) đến (a) là $w(a)$.*
- (ii) *Độ dài của đường đi ngắn nhất trong hệ E-SPM từ a đến b là $w(b) - w(a)$.*

Để đưa ra công thức tường minh cho độ dài của đường đi dài nhất, chúng tôi sử dụng khái niệm "năng lượng" cho mỗi phân hoạch trơn.

Định nghĩa 2.3.1 (Năng lượng). Cho a là một phân hoạch trơn.

- (i) *Năng lượng của hạt $(i, j) \in F(a)$, được ký hiệu là $e_a(i, j)$, là số bước di chuyển lớn nhất có thể, xét trong mọi đường đi trên hệ E-SPM xuất phát từ (0) đến a , của hạt được thêm vào để đạt tới vị trí (i, j) trong a .*
- (ii) *Năng lượng $E(a)$ của a là $E(a) = \sum_{(i,j) \in F(a)} e_a(i, j)$.*

Bổ đề sau cho phép chúng ta tính năng lượng của một phân hoạch trơn dựa vào các thành phần của nó.

Bổ đề 2.3.1. *Cho $a = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ là một phân hoạch trơn, ta có:*

- (i) *$e_a(i, j) = i + 1 - \min\{r : a_r + r \geq i + j \text{ hoặc } a_r < a_{r-1} \text{ và } a_r + r = j + i - 1\}$ với mọi $(i, j) \in F(a)$.*
- (ii) *Nếu $(i, j) \in F(a)$ và $(i - 1, j + 1) \in F(a)$ thì*

$$e_a(i - 1, j + 1) = e_a(i, j) - 1.$$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 1 | 2 | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 2 | 2 |

Hình 5: Biểu đồ năng lượng của $b = (4, 3, 2, 2, 2, 1, 1)$

Định lý 2.3.2. Cho $a = (a_1, \dots, a_k)$ là một phân hoạch trơn, và $1 = i_1 < i_2 < \dots < i_\ell$ là tập tất cả các cột trơn của a . Khi đó, độ dài của đường đi dài nhất từ (0) tới a đúng bằng $E(a)$ và được cho bởi công thức

$$E(a) = \frac{a_1(a_1 + 1)(a_1 + 2)}{6} + \sum_{r=2}^{\ell} i_r a_{i_r} - \sum_{r=3}^{\ell} i_{r-1} a_{i_r} + \sum_{r=2}^{\ell} \frac{a_{i_r}(a_{i_r} - 1)}{2}.$$

2.4 Kết luận chương 2

Trong chương này chúng tôi trình bày hệ E-SPM, qua đó nghiên cứu sự ổn định của hệ SPM dưới tác động bởi luật thêm hạt mỗi khi hệ đạt tới trạng thái ổn định. Chúng tôi đã thu được các kết quả sau:

1. Sinh ra tất cả các phân hoạch trơn bằng hệ động lực E-SPM.
2. Chứng minh được các phân hoạch trơn có cấu trúc dàn con của dàn Young được đặc tả bởi quan hệ thứ tự trội.
3. Tính toán thời gian ngắn nhất và dài nhất để tới một phân hoạch trơn trong hệ E-SPM bằng sử dụng khái niệm năng lượng.

Chương 3. Hệ SPM đối xứng song song

Chương này giới thiệu hệ mở rộng SPM đối xứng, song song (PS-SPM) với luật vận động thừa kế từ hệ SPM đối xứng và thực hiện sự rơi một cách đồng thời (song song). Phần 3.1 sẽ trình bày lại một số kết quả trên hệ P-SPM và hệ S-SPM. Phần 3.2 là đóng góp của chúng tôi chứng minh Định lý 3.2.1 nói rằng tập dạng trạng thái ổn định của hệ S-SPM và hệ PS-SPM trùng nhau. Các kết quả này tham khảo trong [7, 14].

3.1 Một số mở rộng của hệ SPM

3.1.1 Hệ SPM song song (P-SPM)

Hệ SPM song song (Parallel sandpile model) được giới thiệu bởi Durand-Lose.

Định nghĩa 3.1.1 (Hệ P-SPM(N)). Hệ SPM song song, ký hiệu P-SPM(N), là hệ động lực rời rạc sao cho:

- i) Trạng thái khởi đầu là (N);
- ii) Luật vận động là luật P-SPM song song như sau: Mỗi bước áp dụng luật rơi tại tất cả vị trí có thể rơi.

Ta cũng ký hiệu P-SPM(N) là không gian trạng thái của hệ P-SPM(N) và

$$\text{P-SPM} = \cup_{N \geq 0} \text{P-SPM}(N).$$

Kết quả dưới đây cho ta đánh giá về thời gian tới trạng thái ổn định trong



Không gian trạng thái của: (a): SPM(6); (b): PS-SPM(6)

hệ P-SPM.

Định lý 3.1.1 ([6]). Cho N là một số nguyên dương. Thời gian để tới được trạng thái ổn định trong hệ P-SPM(N) là $\mathcal{O}(N)$.

3.1.2 Hệ SPM đối xứng (S-SPM)

Một dãy $a = (a_1, \dots, a_k)$ các số nguyên dương được gọi là dãy đơn đỉnh nếu tồn tại $1 \leq i \leq k$ sao cho $a_1 \leq \dots \leq a_i \geq a_{i+1} \geq \dots \geq a_k$.

Một dãy đơn đỉnh được đánh dấu là một cặp (a, i) trong đó $a = (a_1, \dots, a_k)$ là dãy đơn đỉnh và i là một vị trí được đánh dấu với $1 \leq i \leq k$. Dạng của một dãy đơn đỉnh được đánh dấu (a, i) là dãy đơn đỉnh a .

Ký hiệu

$$a_{<i} = (a_1, \dots, a_{i-1}) \text{ và } a_{>i} = (a_{i+1}, \dots, a_k),$$

là các dãy trái và phải của a tại i .

Nhắc lại, hệ SPM có luật rơi phải là nếu $a_i - a_{i+1}$ thì áp dụng luật rơi phải tại i là

$$(a_1, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_k) \rightarrow (a_1, \dots, a_i - 1, a_{i+1} + 1, \dots, a_k).$$

Ta định nghĩa luật rơi trái như sau: nếu $a_i - a_{i-1} \geq 2$ thì áp dụng luật rơi trái tại i là

$$(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, \dots, a_k) \rightarrow (a_1, \dots, a_{i-1} + 1, a_i - 1, \dots, a_k).$$

Hệ SPM đối xứng hay S-SPM được giới thiệu bởi Forment *et.al.* và Phan.

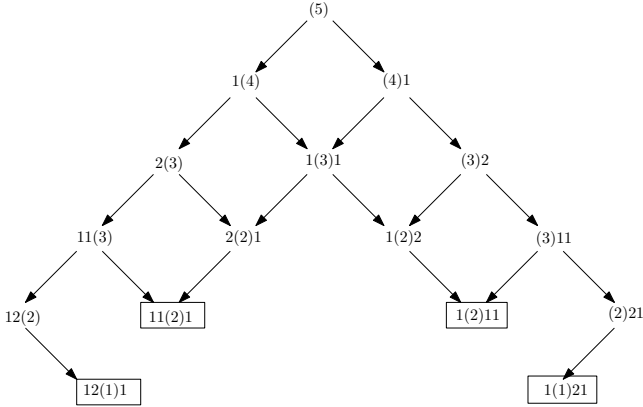
Định nghĩa 3.1.3 (Hệ SPM đối xứng). Cho N là một số tự nhiên. Hệ SPM đối xứng trọng số N , ký hiệu S-SPM(N), là hệ động lực rời rạc trong đó:

- i) Trạng thái khởi đầu là (N) ; Trạng thái là dãy đơn đỉnh được đánh dấu tại vị trí của cột khởi đầu.
- ii) Luật vận động là luật S-SPM tuần tự như sau: tại mỗi bước áp dụng luật rơi phải hoặc trái tại một vị trí.

Bên cạnh các nghiên cứu về trạng thái đạt được của các hệ, người ta cũng quan tâm tới dạng trạng thái và dạng ổn định (dạng trạng thái ổn định) của các hệ [8, 11]. Để đặc trưng dạng trạng thái của hệ S-SPM, các tác giả đã giới thiệu khái niệm "*khai triển SPM*".

Định nghĩa 3.1.4 (Khai triển SPM). Dãy đơn đỉnh $a = (a_1, a_2, \dots, a_k) \in \mathbb{N}^k$ được gọi là có khai triển SPM (SPM decomposition) nếu tồn tại $1 \leq i \leq k$ sao cho các dãy $(a_i, a_{i-1}, \dots, a_1)$ và $(a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_k)$ là các phần tử của SPM.

Định lý dưới đây chỉ ra đặc trưng của tất cả các dạng trạng thái của hệ S-SPM.



Hình 3.3: Không gian trạng thái của hệ S-SPM(5)

Định lý 3.1.2 ([8], [11]). *Một dãy đơn đỉnh a là một dạng trạng thái của hệ S-SPM(N) nếu và chỉ nếu a có một khai triển SPM.*

Hơn nữa, ta cũng có công thức tường minh cho số dạng ổn định của hệ S-SPM.

Định lý 3.1.3 ([8], [11]). *Cho N là một số tự nhiên. Số dạng ổn định của hệ S-SPM(N) là $\lfloor \sqrt{N} \rfloor$. Hơn nữa, nếu P là một dạng ổn định của S-SPM(N) thì P có độ cao hoặc $\lfloor \sqrt{N} \rfloor$ hoặc $\lfloor \sqrt{N} \rfloor - 1$.*

3.2 Hệ SPM đối xứng song song (PS-SPM): Trạng thái ổn định

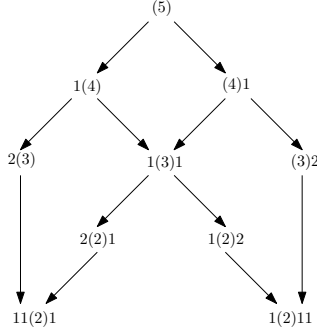
Phần này giới thiệu hệ SPM đối xứng song song. Kết quả chính là Định lý 3.2.1 nói rằng tập dạng trạng thái ổn định của hệ SPM đối xứng và hệ SPM đối xứng song song là trùng nhau. Chứng minh mang tính kiến thiết.

Định nghĩa 3.2.1 (Hệ SPM đối xứng song song). Cho N là số nguyên dương. Hệ SPM đối xứng song song, ký hiệu là PS-SPM(N), là hệ động lực rời rạc trong đó

- i) Trạng thái khởi đầu là (N) ; Trạng thái là dãy đơn đỉnh được đánh dấu tại vị trí khởi đầu.
- ii) Luật vận động là luật PS-SPM song song như sau: tại mỗi bước, áp dụng luật rơi phải hoặc luật rơi trái tại tất cả các vị trí có thể.

Ký hiệu không gian trạng thái có thể của hệ PS-SPM là

$$\text{PS-SPM} = \cup_{N \geq 0} \text{PS-SPM}(N).$$



Không gian trạng thái của hệ PS-SPM(5)

Định lý 3.2.1. *Tập dạng ổn định của hệ PS-SPM(N) và của hệ S-SPM(N) là trùng nhau. Hệ quả là hệ PS-SPM(N) có $\lfloor \sqrt{N} \rfloor$ dạng ổn định.*

Cuối cùng, chúng tôi đưa ra một chặn trên cho đường đi ngắn nhất tới một trạng thái ổn định trong PS-SPM.

Hệ quả 3.2.11. *Cho $T_{\text{PS-SPM}}(N)$ là đường đi ngắn nhất tới một trạng thái ổn định trong PS-SPM(N). Khi đó, $N - \lfloor \sqrt{N} \rfloor \leq T_{\text{PS-SPM}}(N) \leq N$.*

3.3 Kết luận chương 3

Chương này nghiên cứu hệ mở rộng SPM đối xứng song song. Các kết quả là:

1. Giới thiệu hệ SPM đối xứng song song;
2. Chứng minh hệ SPM đối xứng song song và hệ SPM đối xứng có cùng dạng ổn định. Chứng minh mang tính chất kiến thiết;
3. Đưa ra một đánh giá về thời gian ngắn nhất tới một dạng ổn định trong hệ SPM đối xứng song.

Chương 4. Các hệ mở rộng CFG có dấu và SPM đối xứng

Chương này giới thiệu một mở rộng của hệ CFG bằng việc cho phép số các chip trên đỉnh của đồ thị nền có thể nhận giá trị âm. Hơn nữa, các đỉnh chứa đủ âm các chip cũng có thể bắn được như là các đỉnh đủ dương. Tuy nhiên, khi một đỉnh đủ âm chip bắn thì nó sẽ nhận một chip từ mỗi đỉnh mà nó đi vào (hay hàng xóm của nó khi G là vô hướng). Hệ CFG mở rộng này được gọi là CFG có dấu (Signed chip firing game). Chúng tôi nghiên cứu hệ mở rộng này trên hai lớp đồ thị cụ thể là đường thẳng và đồ thị vòng trong mối liên quan đến các hệ SPM và S-SPM đã được trình bày trong các chương trước. Bằng việc chỉ ra các đẳng cấu tương ứng, chúng tôi đưa ra các đặc trưng trạng thái, đặc trưng trạng thái ổn định bằng ngôn ngữ và một số tính toán tổ hợp cho số các trạng thái ổn định theo độ dài và theo trong số cho các hệ. Mục 4.2 sẽ trình bày về các mở rộng trên đường thẳng. Mục 4.3 sẽ trình bày về các mở rộng trên đồ thị vòng.

4.1 Hệ mở rộng CFG có dấu (S-CFG)

Cho $G = (V, E)$ là một đa đồ thị vô hướng, không có khuyên, trong đó $V = \{v_1, \dots, v_n\}$.

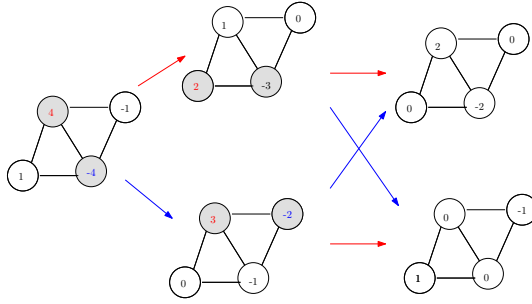
Định nghĩa 4.1.1 (CFG có dấu). *Hệ CFG có dấu* trên một đa đồ thị vô hướng G , ký hiệu là S-CFG(G), được cho bởi:

- i) Trạng thái là dãy các số nguyên trên $a \in \mathbb{Z}^n$ trên tập đỉnh của G .
- ii) Một đỉnh v_i của trạng thái a là bắn được nếu $|a_i| \geq \deg(v_i)$. Khi v_i bắn thì nó sẽ cho mỗi lân cận một chip nếu $a_i \geq \deg(v_i)$ và nhận từ mỗi lân cận của nó một chip nếu $a_i \leq -\deg(v_i)$. Hơn nữa, chúng ta cũng gọi luật bắn áp dụng cho đỉnh chứa chip dương (âm) là *luật cho* (*luật nhận* tương ứng).

4.2 Các mở rộng S-SPM và S-CFG trên đường thẳng

4.2.1 Sự đẳng cấu

Để xây dựng mã hóa (đẳng cấu) giữa hệ S-SPM bằng hệ S-CFG, chúng tôi định nghĩa đồ thị nền của S-CFG như sau: $G = (V, E)$ trong đó, $V = \mathbb{Z}$ và $E = \{(i, j) : |i - j| = 1\}$. Ký hiệu đồ thị này là L .



Hình 6: CFG có dấu

Xét $a = (a_1, \dots, a_k) \in \text{S-SPM}(N)$, trạng thái $d(a)$ tương ứng với a trong $\text{S-CFG}(L)$ được xác định như sau:

$$d(a) = (a_1 - a_0, a_2 - a_1, a_3 - a_2, \dots, a_{k+1} - a_k),$$

quy ước $a_0 = a_{k+1} = 0$.

Mệnh đề 4.2.1. Cho N là số tự nhiên và $\mathcal{O}_N = (N, -N, 0, \dots)$. Dưới ánh xạ d , các hệ $\text{S-SPM}(N)$ và hệ $\text{S-CFG}(L, \mathcal{O}_N)$ là đẳng cấu.

4.2.2 Trạng thái ổn định

Trong phần này, chúng tôi sẽ kết hợp nghiên cứu hệ S-SPM và S-CFG trên đường thẳng. Từ đó rút ra các đặc trưng của các trạng thái ổn định của hệ $\text{S-CFG}(L, \mathcal{O}_N)$ bằng ngôn ngữ và tính toán số các trạng thái ổn định của hai hệ theo độ dài và theo trọng số.

Mệnh đề 4.2.2. Tập tất cả các trạng thái ổn định của hệ $\text{S-CFG}(L, \mathcal{O})$ là các từ u trên bảng chữ cái $\{1, 0, \bar{1}\}$, trong đó $\bar{1}$ được hiểu như -1 , thỏa mãn:

- (i) u bắt đầu từ 1 và kết thúc bởi $\bar{1}$.
- (ii) Số xuất hiện trong u của ký tự 1 đúng bằng số xuất hiện của $\bar{1}$.
- (iii) u tránh các từ con sau: $0000; \bar{1}1; 1001; \bar{1}00\bar{1}$.

Tiếp theo, chúng tôi tính số các từ ổn định của hệ S-SPM với độ dài và trọng số cho trước.

Định lý 4.2.1. Cho l là số nguyên dương. Khi đó, số các trạng thái ổn định của hệ S-SPM có độ dài l là

(i) k^2 nếu $l = 2k + 1$;

(ii) $k^2 + 1$ nếu $l = 2k + 2$.

Định lý 4.2.2. Gọi v_n là số các từ trong \mathcal{LS} có trọng số n và $V(x)$ là hàm sinh của nó. Khi đó,

$$V(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{m^2}}{(1-x)^m}.$$

Hệ quả 4.2.5. Số các từ trong \mathcal{LS} có trọng số n là $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

4.3 Các mở rộng trên đồ thị vòng: Hệ S-SPM(C_n) và S-CFG(C_n)

Phần này chúng tôi nghiên cứu các hệ SPM, SPM đối xứng, CFG và CFG có dấu trên đồ thị vòng. Các kết quả của phần này được trình bày trong [4].

4.3.1 Các hệ SPM(C_n) và CFG(C_n); hệ S-SPM(C_n) và S-CFG(C_n): Sự đẳng cấu

Chúng tôi chứng minh hai đẳng cấu trên đồ thị vòng: hệ SPM và CFG; hệ SPM đối xứng và CFG có dấu.

Định nghĩa 4.3.1 (Hệ SPM(C_n, k)). Cho k là một số nguyên không âm. Hệ SPM trên C_n trọng số k , ký hiệu là SPM(C_n, k), là hệ động lực rời rạc xác định như sau:

(i) Trạng thái khởi đầu là $(k, 0, 0, \dots, 0)$.

(ii) Luật vận động là luật rơi bên phải: Một đỉnh i sẽ cho đỉnh $(i + 1)$ (quy ước đỉnh $n + 1$ trùng với đỉnh 1) một chip nếu nó có số chip lớn hơn ít nhất là 2 so với đỉnh $(i + 1)$.

Định nghĩa 4.3.2 (Hệ S-SPM(C_n, k)). Cho k là một số nguyên không âm. Hệ SPM đối xứng trên C_n trọng số k , ký hiệu là S-SPM(C_n, k), là hệ động lực rời rạc xác định như sau:

(i) Trạng thái khởi đầu là $(k, 0, \dots, 0)$.

- (ii) Luật vận động: Ngoài luật rơi bên phải như trong hệ $SPM(C_n, k)$, hệ còn có thêm *luật rơi bên trái*, tức là một đỉnh i sẽ cho đỉnh $(i - 1)$ (quy ước đỉnh 0 trùng với đỉnh n) một chip nếu nó chứa số chip lớn hơn ít nhất là 2 so với đỉnh $(i - 1)$.

Tiếp theo, đây chúng tôi trình bày lại và chi tiết hơn định nghĩa của hệ CFG và CFG có dấu trên C_n .

Định nghĩa 4.3.3 (Hệ CFG(C_n, k)). Cho k là một số nguyên không âm. Hệ CFG trên C_n trọng số k , ký hiệu là $CFG(C_n, k)$, được mô tả như sau:

- (i) Trạng thái khởi đầu là $(k, 0, 0, \dots, 0, -k)$.
- (ii) Luật vận động là *luật cho* như sau: một đỉnh chứa ít nhất 2 chip sẽ cho hai lân cận của nó mỗi cái một chip.

Định nghĩa 4.3.4 (Hệ S-CFG(C_n, k)). Cho k là một số nguyên không âm. Hệ CFG có dấu trên C_n trọng số k , ký hiệu là $S-CFG(C_n, k)$, được mô tả như sau:

- (i) Trạng thái khởi đầu là $(k, 0, \dots, 0, -k)$.
- (ii) Luật vận động: Ngoài luật cho như trong $CFG(C_n, k)$, hệ còn có thêm *luật nhận*, tức là một đỉnh chứa nhiều nhất -2 chip sẽ nhận một chip từ mỗi lân cận của nó.

Với mỗi $a = (a_1, \dots, a_n)$ là một phân bố tròn trên C_n , ta định nghĩa

$$d^n(a) = (a_1 - a_2, \dots, a_{n-1} - a_n, a_n - a_1).$$

Ta có

Mệnh đề 4.3.1. Dưới ánh xạ d^n , hai hệ $SPM(C_n, k)$ và $CFG(C_n, k)$ là đẳng cấu; và hai hệ $S-SPM(C_n, k)$ và $S-CFG(C_n, k)$ là đẳng cấu.

4.3.2 Cấu trúc không gian và đặc trưng trạng thái

Phần này chúng tôi sẽ trình bày cấu trúc không gian của bốn hệ: $SPM(C_n)$, $CFG(C_n)$, $S-SPM(C_n)$ và $S-CFG(C_n)$.

4.3.2.1 Cấu trúc không gian và đặc trưng trạng thái của các hệ SPM(C_n) và CFG(C_n)

Đặc trưng cho các trạng thái của hệ SPM trên C_n được trình bày như sau

Định lý 4.3.1. Cho a là một phân bố tròn trên C_n trọng số k . Khi đó a là một phần tử của SPM(C_n, k) nếu và chỉ nếu tồn tại một phép quay các đỉnh của C_n sao cho a (dưới dạng dây) là một phần tử của SPM trên đường thẳng có trọng số k và có độ dài nhiều nhất là n .

Mệnh đề 4.3.3. Tập có thứ tự (SPM(C_n, k), \leq) là một dàn con của dàn (SPM(k), \leq) và tập có thứ tự CFG(C_n, k) là một dàn con của dàn (CFG(L^+ , \mathcal{O}_k), với $\mathcal{O}_k = (0, k, 0, \dots, 0)$.

4.3.2.2 Đặc trưng trạng thái của các hệ S-SPM(C_n) và S-CFG(C_n)

Để đặc trưng cho các phần tử của S-SPM(C_n) và S-CFG(C_n), chúng tôi giới thiệu khái niệm *khai triển 2-SPM* (2-SPM decomposition) của một phân bố tròn.

Định nghĩa 4.3.5 (Khai triển 2-SPM). Cho $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ là một phân bố tròn. Khi đó, a được gọi là có *khai triển 2-SPM* nếu tồn tại (i, j) ($1 \leq i \leq j \leq n$) sao cho $(a_{i-1}, a_{i-2}, \dots, a_1, a_n, \dots, a_{j+1})$ và $(a_i, a_{i+1}, \dots, a_j)$ là các phần tử của SPM. Khi đó, a được gọi là có *khai triển 2-SPM tại (i, j)* .

Định lý 4.3.2. Cho a là một phân bố tròn trên C_n . Khi đó a là một phần tử của S-SPM(C_n) nếu và chỉ nếu a có khai triển 2-SPM.

4.3.3 Trạng thái ổn định của hệ S-CFG(C_n)

Phần này chúng tôi đưa ra một đặc trưng trực tiếp bằng ngôn ngữ cho các trạng thái ổn định và tính toán bằng công thức tường minh cho số trạng thái ổn định của hệ S-CFG(C_n) bằng ngôn ngữ.

Ký hiệu $FP(S-CFG(C_n, k))$ là tập trạng thái ổn định của S-CFG(C_n, k) và

$$FP(S-CFG(C_n)) = \bigcup_{k \geq \lceil \frac{n+1}{2} \rceil} FP(S-CFG(C_n, k)).$$

Định lý 4.3.3. Tập $FP(S-CFG(C_n))$ được xác định như sau:

$$1. FP(S-CFG(C_3)) = \{(000), (10\bar{1}), (1\bar{1}0)\}.$$

2. $FP(S\text{-CFG}(C_4)) = \{(0000), (1\bar{1}00), (10\bar{1}0), (100\bar{1}), (11\bar{1}\bar{1})\}$.
3. $FP(S\text{-CFG}(C_n))$, với $n \geq 5$, bao gồm các từ w thỏa mãn các tính chất sau đây:
 - i) w bắt đầu bằng 1;
 - ii) Số các xuất hiện của 1 đúng bằng số xuất hiện của $\bar{1}$ trong w ;
 - iii) w tránh các dãy con: $\bar{1}1, 1001, \bar{1}00\bar{1}, 00000$;
 - iv) Nếu w có 4 sự xuất hiện của 0 thì nó phải kết thúc bởi ký tự 0 và không chứa từ con $1\bar{1}$.

Định lý 4.3.4. *Lực lượng của $FP(S\text{-CFG}(C_n))$ là*

- (i) 3 nếu $n = 3$
- (ii) 5 nếu $n = 4$
- (iii) $\frac{(n-1)^2}{2}$ nếu n là lẻ và $n \geq 5$
- (iv) $\frac{n(n-2)}{2}$ nếu n chẵn và $n \geq 6$.

4.4 Kết luận chương 4

Chương này giới thiệu một mở rộng của hệ CFG thành hệ S-CFG (CFG có dấu) bằng cách cho phép hệ có các đỉnh có thể chứa một số âm chip và có thêm luật nhận cho các đỉnh chứa đủ âm chip. Các kết quả đạt được như sau:

1. Đồ thị nền là đường thẳng:
 - (a) Chứng minh hệ S-SPM và hệ S-CFG là đẳng cấu.
 - (b) Đặc trưng cho dạng ổn định của hệ S-CFG trên đường thẳng bằng ngôn ngữ trên bảng chữ cái $\{1, 0, \bar{1}\}$.
 - (c) Đưa ra các tính toán tổ hợp cho số dạng ổn định của hai hệ theo trọng số và độ dài. Từ đó suy ra một kết quả theo trọng số đã có cho hệ S-SPM trong [8] như một hệ quả.
2. Đồ thị nền là đồ thị vòng:
 - (a) Chứng minh các hệ SPM(C_n, k) và CFG(C_n, k), các hệ S-SPM(C_n, k) và S-CFG(C_n, k) là đẳng cấu.

- (b) Chứng minh cấu trúc dàn, đặc trưng trạng thái của các hệ SPM(C_n) và CFG(C_n).
- (c) Đặc trưng trạng thái của hệ S-SPM(C_n) bằng các trạng thái có khai triển 2 – SPM.
- (d) Đặc trưng trạng thái ổn định của hệ S-CFG(C_n) bằng ngôn ngữ.
- (e) Đưa ra tính toán tổ hợp cho số trạng thái ổn định của hệ S-CFG(C_n).

Kết luận chung

Luận án được thực hiện dựa trên các công trình [4, 7, 12, 13, 14] của tác giả và các đồng nghiệp. Chúng tôi đã đạt được những kết quả sau:

1. Nghiên cứu sự ổn định của hệ SPM khi có thêm tác động từ bên ngoài bằng việc bổ sung luật thêm hạt vào các cột hợp lý khi hệ đã đạt trạng thái ổn định duy nhất. Các kết quả chúng tôi thu được trong phần này là sinh tất cả các phân hoạch trơn bằng hệ động lực, từ đó chứng minh cấu trúc dàn của các phân hoạch trơn trong mối quan hệ với dàn Young. Thêm vào đó, chúng tôi cũng đã mô tả được sự biến thiên của hệ dưới tác động nhỏ từ bên ngoài bằng việc tính toán đường đi ngắn nhất và dài nhất để hệ tới một phân hoạch trơn.
2. Nghiên cứu tập trạng thái ổn định của hệ mở rộng SPM đối xứng song song. Kết quả chính của chúng tôi là chứng minh hệ SPM đối xứng song song và hệ SPM đối xứng có cùng dạng ổn định. Chứng minh này mang tính kiến thiết bằng cách chỉ ra tường minh con đường áp dụng luật PS-SPM kết hợp giữa các thủ tục giả đan xen, đan xen và tất định một cách hợp lý.
3. Nghiên cứu một mở rộng của hệ SPM và CFG bằng việc cho phép các cột trong hệ SPM có thể rơi sang hai phía (trái hoặc phải); các đỉnh trong hệ CFG có thể chứa một số âm các chip và các đỉnh chứa chip đủ âm cũng có thể bắn như các đỉnh chứa đủ dương chip. Chúng tôi chứng minh các đẳng cấu giữa các hệ mở rộng này trong hai trường hợp khi đồ thị nền là đường thẳng vô hạn và đồ thị vòng. Nhờ việc kết hợp nghiên cứu giữa hai hệ, chúng tôi đã thu được một số đặc trưng cho các trạng thái của các hệ và đưa ra một số tính toán tổ hợp liên quan đến số trạng thái ổn định của chúng.

Hướng nghiên cứu tiếp theo

1. Nghiên cứu các hệ (hệ mở rộng) CFG cùng với hệ SPM trên một số lớp đồ thị đặc biệt như đồ thị đầy đủ, đồ thị bánh xe, ... Mặc dù hệ CFG và SPM có nhiều điểm tương đồng nhưng chúng cũng có những điểm rất đặc trưng. Với hệ SPM, chúng ta không cần đề cập tới việc có đỉnh chìm cho sự hội tụ. Việc xác định đặc trưng cho trạng thái và trạng thái ổn định, tính toán thời gian được thực hiện tường minh hơn. Trong khi đó, với hệ CFG chúng ta có nhiều công cụ hơn để nghiên cứu hạn như lý thuyết nhóm, lý thuyết đồ thị, lý thuyết ngôn ngữ.
2. Nghiên cứu tính ổn định của các hệ SPM (hoặc CFG) mở rộng dưới tác động từ bên ngoài. Vì hệ SPM đối xứng không có cấu trúc dàn và hệ có nhiều điểm dừng nên dưới tác động của việc thêm hạt hệ sẽ có nhiều trạng thái dừng mới và tính ổn định sẽ rất phức tạp.
3. Nghiên cứu các trạng thái đột biến của hệ CFG trên đồ thị có hướng. Chúng tôi quan tâm tới hai tính chất sau:
 - i) Số các trạng thái đột biến đúng bằng số các cây bao trùm (có gốc) của đồ thị.
 - ii) Hàm sinh cho số trạng thái đột biến theo cấp (level) được định giá bởi đa thức Tutte $T_G(1, y)$ khi G là vô hướng [10].

Từ khía cạnh tổ hợp, chúng tôi quan tâm tới các song ánh giữa hai đối tượng có cùng lực lượng trong tính chất (i). Khi G là vô hướng, một họ song ánh được đưa ra tường minh hoặc bằng thuật toán trong [3, 5]. Mục tiêu của chúng tôi là nghiên cứu với đồ thị có hướng.

Với tính chất (ii), cho đến nay dù đã có rất nhiều nỗ lực cho việc định nghĩa đa thức Tutte trên đồ thị có hướng nhưng vẫn chưa thành công thậm chí cho đa thức một biến. Cách tiếp cận sử dụng CFG gần đây rất được quan tâm và đã có nhiều loại trạng thái được định nghĩa trên hệ CFG có cùng lực lượng với số cây bao trùm như trạng thái đột biến, trạng thái siêu ổn định (super-stable), hàm G -đỗ xe (G -parking function), ước rút gọn (reduced divisor) [1, 3, 5]. Trước tiên, chúng tôi xét lớp các đồ thị có hướng có tính chất Euler, tức là tại mỗi đỉnh của đồ thị số cạnh đi vào đúng bằng số cạnh đi ra. Lớp đồ thị này cũng đủ rộng và hơn nữa nó có nhiều tính chất tương tự như đồ thị vô hướng.

4. Cuối cùng, Baker và Norine [1] nghiên cứu định lý Riemann-Roch trong hình học đại số cho đồ thị vô hướng nhờ sử dụng hệ CFG. Trong bài báo đó, các tác giả đã giới thiệu một lớp các trạng thái đặc biệt của hệ CFG, được gọi là các *trạng thái hiệu quả* (effective configuration), là các trạng thái nằm trong lớp tương đương với một trạng thái không âm trong nhóm $SP(G)$. Từ đó định nghĩa một bất biến cho mỗi trạng thái, được gọi là hạng, là số lớn nhất các chip có thể loại bỏ khỏi một trạng thái một cách tùy ý để trạng thái thu được là hiệu quả. Với định nghĩa này, các tác giả đã mở ra một hướng nghiên cứu mới cho hệ CFG liên quan đến các đại lượng được quan tâm nhiều trong hình học đại số như số chiều, hạng, ... Các chứng minh trong bài báo trên sử dụng các công cụ của Đại số và chúng tôi mong muốn đưa ra các giải thích tổ hợp cho những kết quả này và phát triển thêm theo các hướng trong bài báo.

Tài liệu

- [1] Matthew Baker and Serguei Norine. Riemann-Roch and Abel-Jacobi theory on a finite graph. *Adv. Math.*, 215(2):766–788, 2007.
- [2] A. Bjorner, L. Lovász, and W. Shor. Chip-firing games on graphs. *E.J. Combinatorics*, 12:283–291, 1991.
- [3] Denis Chebikin and Pavlo Pylyavskyy. A family of bijections between g-parking functions and spanning trees. *J. Comb. Theory, Ser. A*, 110(1):31–41, 2005.
- [4] R. Cori, H.D. Phan, and T.T.H. Tran. Signed chip firing games and symmetric sandpile models on the cycles. *RAIRO Theore. Inf. Appl.*, 47(2):133–146, 2013.
- [5] Robert Cori and Yvan Le Borgne. The sand-pile model and Tutte polynomials. *Adv. in Appl. Math.*, 30(1-2):44–52, 2003. Formal power series and algebraic combinatorics (Scottsdale, AZ, 2001).
- [6] Jérôme Olivier Durand-Lose. Parallel transient time of one-dimensional sand pile. *Theor. Comput. Sci.*, 205(1-2):183–193, 1998.
- [7] E. Formenti, V. T. Pham, H. D. Phan, and T. T. H. Tran. Fixed point forms of the parallel symmetric sandpile model. *Theore. Comput. Sci.*, 2014. To appear.
- [8] Enrico Formenti, Benoît Masson, and Theophilos Pisokas. Advances in symmetric sandpiles. *Fundam. Inf.*, 76(1-2):91–112, 2007.

- [9] E. Goles, M. Morvan, and H.D. Phan. Sandpiles and order structure of integer partitions. *Discrete Appl. Math.*, 117:51–64, 2002.
- [10] Criel Merino. The chip firing game and matroid complexes. In *Discrete models: combinatorics, computation, and geometry (Paris, 2001)*, Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc., AA, pages 245–255 (electronic). Maison Inform. Math. Discrèt. (MIMD), Paris, 2001.
- [11] Thi Ha Duong Phan. Two sided sand piles model and unimodal sequences. *ITA*, 42(3):631–646, 2008.
- [12] Thi Ha Duong Phan and Thi Thu Huong Tran. On the stability of sand piles model. *Theoret. Comput. Sci.*, 411(3):594–601, 2010.
- [13] Thi-Thu-Huong Tran. Signed chip-firing games on some graphs and its applications. Master’s thesis, University Paris Diderot, Paris 7, 2009.
- [14] Pham Van Trung. Discrete dynamical systems - symmetric sandpile model. Technical report, Bachelor thesis, ThesisHanoi University of Natural Science, VNU, 2008.

Danh mục công trình

Các công trình dùng trong luận án

1. E. Formenti, V. T. Pham, H. D. Phan, and T. T. H. Tran. Fixed point forms of the parallel symmetric sandpile model. *Theoret. Comput. Sci.*, To appear.
2. R. Cori, H. D. Phan, and T. T. H. Tran. Signed chip firing games and symmetric sandpile models on the cycles. *RAIRO Theore. Inf. Appl.*, 47(2):133–146, 2013.
3. H. D. Phan and T. T. H. Tran. On the stability of sand piles model. *Theoret. Comput. Sci.*, 411(3):594–601, 2010.

Các công trình khác

1. P. T. Do, D. Rossin and T. T. .H. Tran. Permutations weakly avoiding barred patterns and combinatorial bijections to generalized Dyck and Motzkin paths, *Discret. Math.*, 320: 40-50, 2014.
2. Dan Hefetz, Annina Saluz, and T.T. Huong Tran. An application of the combinatorial Nullstellensatz to a graph labeling problem. *J. Graph Theory*, 65(1):70–82, 2010.