Lời nói đầu

Năm 1892, tại trường Đại học tổng hợp Kharkov, A. M. Lyapunov đã công bố và bảo vệ thành công luận án tiến sĩ có nhan đề "Bài toán tổng quát về tính ổn định của chuyển động". Ông đã đưa ra định nghĩa và đặt ra một cách chặt chẽ toán học bài toán nghiên cứu ổn định nghiệm của phương trình vi phân thường. Ông đã phát triển hai phương pháp nghiên cứu tính ổn định của hệ phương trình vi phân thường là phương pháp số mũ Lyapunov (hay còn gọi là phương pháp thứ nhất) và phương pháp sử dụng hàm số Lyapunov (hay còn gọi là phương pháp thứ hai). Những ý tưởng của ông đưa ra đều được các nhà khoa học nghiên cứu, phát triển thành những ngành khoa học chuyên sâu và thu được nhiều kết quả có ý nghĩa trong nhiều lĩnh vực.

Lý thuyết số mũ Lyapunov đã được phát triển cho phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô và đã có nhiều công trình nghiên cứu số mũ Lyapunov của hệ phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô, đặc biệt là phương trình ôtônôm. Lý thuyết số mũ Lyapunov của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô không ôtônôm mới phát triển trong thời gian gần đây. Vấn đề được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu là tính chất của số mũ Lyapunov của hệ phương trình vi phân khi có nhiễu ngẫu nhiên nhỏ. Tuy nhiên đối với phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô các nghiên cứu lý thuyết về số mũ Lyapunov còn hạn chế so với các nghiên cứu lý thuyết về hàm Lyapunov, vì vậy nhiều vấn đề quan trọng thuộc lý thuyết số mũ Lyapunov của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô còn mở, cần được nghiên cứu và phát triển. Với lý do đó chúng tôi chọn "nghiên cứu tính ổn định và số mũ Lyapunov của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính" làm đề tài luận án tiến sĩ. Luận án được cấu trúc như sau. Ngoài phần mở đầu, kết luận và các danh mục công trình công bố, luận án chia làm ba chương.

Chương 1 giới thiệu tổng quan về phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô.

Chương 2 giới thiệu các khái niệm ổn định ngẫu nhiên của nghiệm tầm thường của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô. Trình bày một số kết quả nghiên cứu của chúng tôi về mối liên hệ giữa các loại ổn định ngẫu nhiên của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính.

Chương 3 trình bày các kết quả nghiên cứu của chúng tôi về tính chất của số mũ trung tâm và số mũ bổ trợ của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính. Sự trùng nhau của số mũ Lyapunov và các số mũ trung tâm của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính thỏa mãn điều kiện không suy biến. Cuối cùng là dáng điệu tiệm cận của số mũ Lyapunov lớn nhất của phương trình vi phân với nhiễu ngẫu nhiên Itô nhỏ.

Các kết quả của luận án đã được chúng tôi công bố trong ba bài báo và đã được trình bày tại tiểu ban xác suất và thống kê - Đại hội toán học toàn quốc lần thứ VII (Quy Nhơn, ngày 5/8/2008), seminar của phòng Xác suất và Thống kê toán học - Viện Toán học (25/2; 11,18,25/3/2009), Hội nghị quốc tế về phương trình vi phân và giải tích ứng dụng lần thứ IV (Viện Toán học, ngày 16-18/10/09), seminar của phòng Tối ưu và Điều khiển - Viện Toán học (15/12/2009). Hội nghị Xác suất - Thống kê toàn quốc lần thứ IV (Vinh, ngày 20-22/5/2010).

Chương 1

Phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô

Phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô thực chất được hiểu là phương trình tích phân Itô trong đó có một số hạng là tích phân Riemann, một số hạng là tích phân Itô. Trước khi trình bày một số kết quả nghiên cứu về tính ổn định và số mũ Lyapunov của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính, luận án dành Chương 1 để giới thiệu những khái niệm cơ bản liên quan đến phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô.

1.1 Những lớp quá trình ngẫu nhiên quan trọng

Cho $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ là không gian xác suất đầy đủ, $I \subset \mathbb{R}^+$ (thông thường $I = [0, T)$, $I = [0, T]$ với $0 < T \in \mathbb{R}$ hoặc $I = \mathbb{R}^+$). Trong luận án này ta xét $I = \mathbb{R}^+$.

Định nghĩa 1.1.1 *(Quá trình Gauss)*
Quá trình ngẫu nhiên $X = \{X(t) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ t \in I\}$ được gọi là một quá trình Gauss (hay quá trình có phân phối chuẩn), nếu các phân phối hữu hạn chiều của nó là Gauss, tức là phân phối của vec tơ ngẫu nhiên $(X(t_1), X(t_2), ..., X(t_n))$ là phân phối Gauss đối với mọi $t_1, t_2, ..., t_n \in I$.

Định nghĩa 1.1.2 *(Quá trình dừng theo nghĩa hẹp)*
Quá trình ngẫu nhiên $X = \{X(t) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ t \in I\}$ được gọi là một quá trình dừng theo nghĩa hẹp nếu với mọi dãy số hữu hạn $t_1, t_2, ..., t_n \in I$, với mọi số thực h thỏa mãn $t_1 + h, t_2 + h, ..., t_n + h \in I$ thì các véc tơ ngẫu nhiên $(X(t_1), X(t_2), ..., X(t_n))$ và $(X(t_1 + h), X(t_2 + h), ..., X(t_n + h))$ có cùng phân phối.

Định nghĩa 1.1.3 *(Quá trình dừng theo nghĩa rộng)*
Quá trình ngẫu nhiên $X = \{X(t) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \in I\}$ *có phương sai hữu hạn được gọi là một quá trình dừng theo nghĩa rộng nếu*
(i) Hàm trung bình là hằng số: $\mathbb{E}X(t) = m = const$ *với mọi* $t \in I$,
(ii) Hàm tương quan (hàm covarian) chỉ phụ thuộc vào hiệu số của thời gian, tức là: $K(t,s) = \mathbb{E}X(t)X(s) - m^2$, *chỉ phụ thuộc* $t - s$ *với mọi* $t, s \in I$.

Ta có thể chứng minh được rằng:
(i) Nếu X là quá trình có phương sai hữu hạn và dừng theo nghĩa hẹp thì dừng theo nghĩa rộng.
(ii) Nếu X là quá trình Gauss thì dừng theo nghĩa hẹp và dừng theo nghĩa rộng là tương đương.

Định nghĩa 1.1.4 *(Quá trình gia số độc lập)*
Quá trình ngẫu nhiên $X = \{X(t) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, t \in I\}$ *được gọi là một quá trình gia số độc lập nếu các gia số của nó trên các khoảng thời gian rời nhau là các biến ngẫu nhiên độc lập, tức là đối với mỗi phân hoạch hữu hạn:* $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, $t_k \in I$, $k = 0, 1, \ldots, n$, *các gia số* $X(t_0), X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ *là những biến ngẫu nhiên độc lập.*

Định nghĩa 1.1.5 *(Quá trình Markov)*
Cho $(E, \mathcal{B})$ *là không gian đo sao cho tất cả các tập gồm một điểm là đo được. Quá trình ngẫu nhiên* $X = \{X(t) : \Omega \longrightarrow E, t \in I\}$, *nhận giá trị trong* E *được gọi là một quá trình Markov nếu với mọi* $A \in \mathcal{B}$, $0 \leq s < t$ *ta có*

$$\mathbb{P}(X(t,\omega) \in A | \mathcal{N}_s) = \mathbb{P}(X(t,\omega) \in A | X(s,\omega)),$$

trong đó $\mathcal{N}_s$ *là* σ*-đại số sinh bởi tất cả các tập có dạng*

$$\{\omega : X(u,\omega) \in B\} \quad (\text{với mọi } u \leq s, B \in \mathcal{B}).$$

Nhận xét:
▪ Quá trình gia số độc lập là một quá trình Markov.
▪ Tồn tại một hàm bốn biến $P(s, x, t, A)$, trong đó $0 \leq s \leq t, x \in E, A \in \mathcal{B}$ thỏa mãn:
(i) cố định s, t, x, hàm số $P(s, x, t, \centerdot) : \mathcal{B} \longrightarrow [0, 1]$ là độ đo xác suất trên $(E, \mathcal{B})$,

(ii) cố định s, t, A, hàm số $P(s, \centerdot, t, A) : E \longrightarrow [0, 1]$ là đo được đối với $\mathcal{B}$,

(iii) $P(s, x, s, A) = \delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{nếu} \quad x \in A \\ 0 & \text{nếu} \quad x \notin A, \end{cases}$

(iv) đối với mỗi s, t cho trước, $0 \le s \le t$ và $x \in E, A \in \mathcal{B}$, ta có

$$\mathbb{P}(X(t) \in A | X(s) = x) = P(s, t, x, A).$$

Hàm $P(s, x, t, A)$ được gọi là hàm chuyển (hay xác suất chuyển) của quá trình Markov. Với mọi $x \in E$, có thể trừ một tập N các giá trị của x sao cho $\mathbb{P}(X(s) \in N) = 0$, hàm chuyển của quá trình Markov thỏa mãn phương trình Chapman-Kolmogorov:

$$P(s, x, t, A) = \int\limits_E P(s, x, u, dy) P(u, y, t, A).$$

Ngược lại nếu có một hàm chuyển thì ta có thể xây dựng được một quá trình Markov với phân phối ban đầu tùy ý.

Định nghĩa 1.1.6 *(Martingale)*
Cho một lọc $\{\mathcal{F}_t, t \in I\}$ các σ-đại số con của $\mathcal{F}$.
Quá trình ngẫu nhiên $X = \{X(t) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ t \in I\}$, được gọi là một martingale đối với lọc $\{\mathcal{F}_t, t \in I\}$, viết là $\{X, \mathcal{F}_t, t \in I\}$ nếu:
(i) $\mathbb{E}|X(t)| < +\infty$ với mọi $t \in I$,
(ii) X thích nghi với $\{\mathcal{F}_t, t \in I\}$,
(iii) với mọi $0 \le s < t$, ta có đẳng thức $\mathbb{E}(X(t)|\mathcal{F}_s) = X(s)$ hầu chắc chắn.

Định nghĩa 1.1.7 *(Quá trình Wiener)*
Quá trình ngẫu nhiên $W = \{W(t) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ t \in I\}$, được gọi là một quá trình Wiener nếu
(i) $W(0) = 0$,
(ii) W là quá trình gia số độc lập,
(iii) với mọi $0 \le s < t$ biến ngẫu nhiên $W(t) - W(s)$ có phân phối chuẩn với trung bình 0 và phương sai $t - s$,
(iv) W có quỹ đạo liên tục (hầu chắc chắn).

Ta cũng có thể định nghĩa quá trình Wiener theo cách sau đây.

Định nghĩa 1.1.8 *Quá trình Wiener* $W = \{W(t) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ t \in I\}$ *là một quá trình Gauss với gia số dừng và độc lập thỏa mãn điều kiện*

$$\mathbb{E}W(t) = 0, \quad K(t,s) = K(t-s) = \mathbb{E}W(t)W(s) = min(s,t).$$

1.2 Định nghĩa tích phân Itô

1.2.2 Định nghĩa tích phân Itô cho quá trình đơn giản

Cho quá trình Wiener $W = \{W(t), t \geq 0\}$. Lọc tự nhiên tương ứng với quá trình W là $\mathcal{F}_t = \sigma(W(s))_{0 \leq s \leq t}$, $t \geq 0$.

Định nghĩa 1.2.1 *Một quá trình ngẫu nhiên* $c = \{c(t),\ t \in [0,T]\}$ *được gọi là đơn giản nếu các điều kiện sau được thỏa mãn:*
(i) Tồn tại một phân hoạch $\tau_n : \quad 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$, *và một dãy biến ngẫu nhiên* $\{Z_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ *sao cho*

$$c(t) = \begin{cases} Z_n & \text{nếu} \quad t = T, \\ Z_i & \text{nếu} \quad t_{i-1} \leq t < t_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

(ii) Dãy $\{Z_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ *là thích nghi với lọc* $\left\{\mathcal{F}_{t_{i-1}},\ i = 1, 2, \ldots, n\right\}$ *và thỏa mãn* $\mathbb{E}Z_i < +\infty$ *với mọi* $i = 1, 2, \ldots, n$.

Định nghĩa 1.2.2 *Tích phân Itô của quá trình ngẫu nhiên đơn giản c trên đoạn* $[0,T]$ *được định nghĩa bởi công thức*

$$\int_0^T c(s)dW(s) := \sum_{i=1}^n c(t_{i-1})[W(t_i) - W(t_{i-1})].$$

1.2.3 Định nghĩa tích phân Itô

Ta sẽ luôn đặt giả thiết (H) sau đây lên các quá trình ngẫu nhiên X là các quá trình mà ta lấy tích phân Itô:
(i) X thích nghi đối với quá trình Wiener trên $[0,T]$.
(ii) Tích phân $\int_0^T \mathbb{E}X^2(s)ds$ hữu hạn.
Nhận xét:

. Nếu quá trình ngẫu nhiên X thỏa mãn giả thiết (H) thì tồn tại một dãy các quá trình ngẫu nhiên đơn giản $\left\{c^{(n)},\, n=1,2,\ldots\right\}$ sao cho

$$\int_0^T \mathbb{E}[X(s)-c^{(n)}(s)]^2 ds \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

. Tồn tại một quá trình bình phương khả tích $I_t(X)$ trên $[0,T]$ là giới hạn trung bình bình phương của các tích phân Itô của các quá trình ngẫu nhiên đơn giản $\left\{c^{(n)},\, n=1,2,\ldots\right\}$, tức là $\mathbb{E}\sup\limits_{0\le t\le T}[I_t(X)-I_t(c^{(n)})]^2 \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Lưu ý, giới hạn trên không phụ thuộc vào việc chọn dãy các quá trình ngẫu nhiên đơn giản $\left\{c^{(n)},\, n=1,2,\ldots\right\}$.

Định nghĩa 1.2.3 *Giới hạn trung bình bình phương $I_t(X)$ được gọi là tích phân Itô của quá trình ngẫu nhiên X và được ký hiệu*

$$I_t(X)=\int_0^t X(s)dW(s), \quad t\in[0,T].$$

Tích phân Itô của quá trình ngẫu nhiên X thỏa mãn giả thiết (H) có các tính chất sau:

1. Quá trình ngẫu nhiên $I_t(X)$, $t\in[0,T]$ là một martingale đối với lọc tự nhiên của quá trình Wiener.
2. Tích phân Itô có kỳ vọng bằng 0.
3. Tích phân Itô có tính chất đẳng chuẩn.
4. Tích phân Itô có tính chất tuyến tính.
5. Tích phân Itô có tính chất cộng tính.
6. Quá trình ngẫu nhiên $I_t(X)$ có quỹ đạo mẫu liên tục.

1.3 Phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô

Trong không gian xác suất đầy đủ $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ cho họ các σ-đại số con đầy đủ $\{\mathcal{F}_t, t\in[0,T]\}$ của $\mathcal{F}$; $\left\{W^1(t),W^2(t),\ldots,W^m(t),\, t\in[0,T]\right\}$ là các quá trình Wiener độc lập với nhau, thỏa mãn với mọi $r=1,2,...,m$ thì $\{W^r(t),\mathcal{F}_t,\, t\in[0,T]\}$ lập thành martingale. Thông thường

$$\mathcal{F}_t=\sigma(W^1(s),W^2(s),\ldots,W^m(s))_{0\le s\le t}.$$

Định nghĩa 1.3.1 *Phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô được viết dưới dạng*

$$\begin{aligned} &dX(t) = a(t, X(t))dt + \sum_{r=1}^{m} b_r(t, X(t))dW^r(t), \\ &X(t_0) = x_0(\omega), \end{aligned} \tag{1.1}$$

hoặc

$$X(t) = x_0(\omega) + \int_{t_0}^{t} a(s, X(s))ds + \sum_{r=1}^{m} \int_{t_0}^{t} b_r(s, X(s))dW^r(s), \tag{1.2}$$

trong đó

- $0 \le t_0 \le t \le T < +\infty$,
- *biến ngẫu nhiên n-chiều* $x_0(\omega)$ *được gọi là giá trị ban đầu tại điểm* t_0,
- $\{X(t,\omega), t \in [t_0, T]\}$ *là quá trình ngẫu nhiên n-chiều thỏa mãn* $X(t_0,\omega) = x_0(\omega)$,
- $a(t,x), b_r(t,x) : [0,T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $r = 1, 2 \ldots m$ *là các véc tơ hàm n-chiều đo được. Với mỗi* (t,x) *giả thiết các hàm* $a(t,x), b_r(t,x)$ *là độc lập với* $\omega \in \Omega$, *tức là tham số ngẫu nhiên* ω *chỉ xuất hiện gián tiếp trong hệ số của phương trình (1.1) hay (1.2) dưới dạng* $a(t, X(t,\omega)), b_r(t, X(t,\omega))$.

Định nghĩa 1.3.2 *Nghiệm của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô (1.1) là quá trình ngẫu nhiên n-chiều*

$$X = \{X(t,\omega) = (X_1(t,\omega), X_2(t,\omega), \ldots, X_n(t,\omega)),\ t \in [t_0, T]\}$$

thỏa mãn các tính chất sau:
(i) $X_i(t,\omega)$ *thích nghi với* σ*-đại số* $\mathcal{F}_t^{x_0(\omega)} := \sigma(\mathcal{F}_t, x_0(\omega))$ *với mọi* $i = 1, 2, ..., n$ *và* $t \in [t_0, T]$.
(ii) Các hàm $\overline{a}(t,\omega) = a(t, X(t,\omega))$, $\overline{b}_r(t,\omega) = b_r(t, X(t,\omega))$ *với mọi* $r = 1, 2, ..., m$ *thỏa mãn*

$$\mathbb{P}\Big(\{\omega : \int_0^T \|\overline{a}(t,\omega)\|\, dt < +\infty\}\Big) = 1,$$

$$\mathbb{P}\Big(\{\omega : \int_0^T \big\|\overline{b}_r(t,\omega)\big\|^2\, dt < +\infty\}\Big) = 1.$$

(iii) Đẳng thức (1.2) được thỏa mãn với mọi $t \in [0,T]$ *hầu chắc chắn.*

Định lý 1.3.3 *Cho phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô (1.1). Giả sử* $a(t,x), b_r(t,x) : [t_0,T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad (r = 1,2,\dots,m)$ *là các hàm liên tục theo hai biến* (t,x) *và tồn tại một hằng số* K *sao cho với mọi* $t \in [t_0,T]$ *và* $x,y \in \mathbb{R}^n$ *ta có:*

$$\|a(t,x) - a(t,y)\| + \sum_{r=1}^{m} \|b_r(t,x) - b_r(t,y)\| \le K\|x-y\|,$$

$$\|a(t,x)\| + \sum_{r=1}^{m} \|b_r(t,x)\| \le K(1 + \|x\|).$$

Khi đó với mọi biến ngẫu nhiên n*-chiều* $x_0(\omega)$ *đo được đối với* σ*-đại số* $\mathcal{F}_{t_0}$*, có* $\mathbb{E}[x_0(\omega)]^2 < +\infty$ *và độc lập với các quá trình* $\{W^r(t), t \in [t_0,T]\}$ $(r = 1,2,...,m)$ *thì phương trình (1.1) có duy nhất một nghiệm là quá trình ngẫu nhiên*

$$X = \{X(t,\omega) = (X_1(t,\omega), X_2(t,\omega), \dots, X_n(t,\omega)),\, t \in [t_0,T]\},$$

thỏa mãn điều kiện sau đây:
(i) X *có các quỹ đạo mẫu liên tục,*
(ii) $X_i(t,\omega)$ *thích nghi với* σ*-đại số* $\mathcal{F}_t^{x_0(\omega)}$ *với mọi* $i = 1,2,\dots n$ *và* $t \in [t_0,T]$,
(iii) X *là một quá trình Markov,*
(iv) với mọi $t \in [t_0,T]$*, với mọi* $i = 1,2,\dots,n$ *thì*

$$\mathbb{E}\left[\int_{t_0}^{t} |X_i(s,\omega)|^2 ds\right] < +\infty.$$

Trong luận án chúng ta xét điều kiện ban đầu là tất định, tức là $x_0(\omega) \equiv x_0 \in \mathbb{R}^n$ và $t \in \mathbb{R}^+$.

Theo Kunita, phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô (1.1), thỏa mãn Định lý 1.3.3 sinh ra một dòng ngẫu nhiên hai tham số $\Phi_{s,t}(\omega)$ các đồng phôi của $\mathbb{R}^n$ và nó được định nghĩa như sau.

Định nghĩa 1.3.4 *Một dòng ngẫu nhiên hai tham số các đồng phôi của* $\mathbb{R}^n$ *là một họ ánh xạ liên tục* $\{\Phi_{s,t}(\omega) : \omega \in \Omega,\; s,t \in \mathbb{R}^+\}$ *thỏa mãn các điều kiện sau đây với mọi* $\omega \in \Omega' \subset \Omega$, $\mathbb{P}(\Omega') = 1$.
(i) $\Phi_{s,t}(\omega) = \Phi_{u,t}(\omega) \circ \Phi_{s,u}(\omega)$ *với mọi* $s,t,u \in \mathbb{R}^+$*;*
(ii) $\Phi_{s,s}(\omega)$ *là ánh xạ đồng nhất với mọi* $s \in \mathbb{R}^+$*;*

(iii) ánh xạ $\Phi_{s,t}(\omega) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ là đồng phôi với mọi $s, t \in \mathbb{R}^+$;
Hơn nữa, nếu $\Phi_{s,t}(\omega)$ thỏa mãn thêm điều kiện (iv) dưới đây thì nó được gọi là dòng ngẫu nhiên hai tham số các vi phôi của $\mathbb{R}^n$.
(iv) $\Phi_{s,t}(\omega)x$ là khả vi theo $x \in \mathbb{R}^n$ với mọi $s, t \in \mathbb{R}^+$ và $\Phi_{s,t}(\omega)x$ cùng với đạo hàm $\frac{\partial}{\partial x}(\Phi_{s,t}(\omega)x)$ là các ánh xạ liên tục theo s, t, x.

Mỗi nghiệm của phương trình (1.1) thỏa mãn điều kiện ban đầu $X(t_0, \omega) = x_0$ viết dưới dạng $X(t, \omega) = \Phi_{t_0,t}(\omega)x_0$. Đối với phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính có dạng:

$$\begin{aligned} &dX(t) = F_0(t)X(t)dt + \sum_{r=1}^{m} F_r(t)X(t)dW^r(t), \\ &X(t_0) = x_0, \end{aligned} \tag{1.3}$$

trong đó $F_r(t) = (f_{ir}^j(t))_{n\times n}$ $(r = \overline{0, m})$ là các ma trận hàm, liên tục, bị chặn bởi một hằng số K, sẽ sinh ra dòng ngẫu nhiên hai tham số các toán tử tuyến tính của $\mathbb{R}^n$.

Với bất kỳ $x \in \mathbb{R}^n$, $s, t \in \mathbb{R}^+$ và tập Borel A của $\mathbb{R}^n$ thì nghiệm $\Phi_{s,t}(\omega)x$ của phương trình (1.3) là quá trình Markov có hàm chuyển

$$P(s, x, t, A) = \mathbb{P}\Big(\Phi_{s,t}(\omega)x \in A | \Phi_{s,s}(\omega)x = x\Big).$$

Theo Khasminskii, hàm chuyển có mật độ $p(s, x, t, y)$ và mật độ của nó là nghiệm cơ bản của phương trình vi phân đạo hàm riêng parabolic:

$$Lu(s, x) = 0,$$

trong đó

$$\begin{aligned} Lu(s, x) &\equiv \frac{\partial u}{\partial s}(s, x) + \Big\langle F_0(s)x, \frac{\partial u}{\partial x}(s, x)\Big\rangle + \frac{1}{2}\Big\langle D(s, x)\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}\Big\rangle(s, x) \\ &\equiv \frac{\partial u}{\partial s}(s, x) + \sum_{i,j=1}^{n} f_{i0}^j(s)x_j\frac{\partial u}{\partial x_j}(s, x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} d_{ij}(s, x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(s, x), \end{aligned}$$

$$D(s, x) = \big(d_{ij}(s, x)\big)_{n\times n} \text{ với } d_{ij}(s, x) = \sum_{r=1}^{m}\Big(\sum_{h,l=1}^{n} f_{ir}^h(s)f_{jr}^l(s)x_h x_l\Big),$$

$u(s, x) = p(s, x, t, y)$ với t, y cố định.

Chương 2

Sự ổn định nghiệm của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô

Chương này nhắc lại một số định nghĩa ổn định ngẫu nhiên của nghiệm tầm thường của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô (1.1) và trình bày các kết quả nghiên cứu của chúng tôi về mối liên hệ giữa các loại ổn định ngẫu nhiên của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính (1.3), cụ thể:

- Tính ổn định hầu chắc chắn không phụ thuộc vào thời điểm ban đầu.
- Tính ổn định theo xác suất tương đương với tính ổn định hầu chắc chắn.
- Đối với phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính 1-chiều hệ số hằng thỏa mãn điều kiện không suy biến thì tính ổn định theo xác suất và tính ổn định yếu theo xác suất là tương đương với nhau.

2.1 Một số định nghĩa ổn định của nghiệm tầm thường của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô

Xét phương trình (1.1) và giả thiết rằng điều kiện tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình (1.1) nêu ra trong Định lý 1.3.3 được thỏa mãn.

Định nghĩa 2.1.1 *(Ổn định yếu theo xác suất)*
Nghiệm tầm thường $X(t,\omega) \equiv 0$ của phương trình (1.1) được gọi là ổn định yếu theo xác suất với $t \geq t_0$ (hay trên $[t_0,\infty)$) nếu với mọi $\epsilon > 0$ và $\delta > 0$ đều tồn tại một số $r > 0$ sao cho với mọi $t \geq t_0$ và $\|x_0\| < r$, ta có

$$\mathbb{P}\Big(\{\omega : \|\Phi_{t_0,t}(\omega)\, x_0\| \geq \epsilon\} \Big) < \delta. \qquad (2.1)$$

Định nghĩa 2.1.2 *(Ổn định theo xác suất)*
Nghiệm tầm thường $X(t,\omega) \equiv 0$ của phương trình (1.1) được gọi là ổn định theo xác suất với $t \geq 0$ nếu với mọi $t_0 \geq 0$ và $\epsilon > 0$ ta có

$$\lim_{x_0 \to 0} \mathbb{P}\left(\left\{ \omega \ : \sup_{t > t_0} \| \Phi_{t_0,t}(\omega) x_0 \| > \epsilon \right\} \right) = 0. \tag{2.2}$$

Định nghĩa 2.1.6 (*Ổn định tiệm cận theo xác suất*)
Nghiệm tầm thường $X(t,\omega) \equiv 0$ của phương trình (1.1) được gọi là ổn định tiệm cận theo xác suất với $t \geq t_0$ nếu

$$X(t,\omega) \equiv 0 \text{ là ổn định theo xác suất với } t \geq t_0 \text{ và} \tag{2.3}$$

$$\lim_{x_0 \to 0} \mathbb{P}\left(\left\{ \lim_{t \to +\infty} \Phi_{t_0,t}(\omega) x_0 = 0 \right\} \right) = 1. \tag{2.4}$$

Định nghĩa 2.1.7 (*Ổn định tiệm cận toàn cục theo xác suất*)
Nghiệm tầm thường $X(t,\omega) \equiv 0$ của phương trình (1.1) được gọi là ổn định tiệm cận toàn cục theo xác suất với $t \geq t_0$ nếu

$$X(t,\omega) \equiv 0 \text{ ổn định tiệm cận yếu theo xác suất với } t \geq t_0 \text{ và} \tag{2.5}$$

$$\text{với mọi } x_0 \in \mathbb{R}^n,\ \epsilon > 0 : \lim_{t \to +\infty} \mathbb{P}\left(\{ \omega \ : \ \| \Phi_{t_0,t}(\omega) x_0 \| > \epsilon \} \right) = 0. \tag{2.6}$$

Định nghĩa 2.1.13 (*Ổn định hầu chắc chắn*)
Nghiệm tầm thường $X(t,\omega) \equiv 0$ của phương trình (1.1) được gọi là ổn định hầu chắc chắn với $t \geqslant t_0$ nếu tồn tại tập $\Omega' \subset \Omega$, $\mathbb{P}(\Omega') = 1$ sao cho với mọi $\omega \in \Omega'$ thì nghiệm $X(t,\omega) \equiv 0$ ổn định (tất định) với $t \geqslant t_0$..

2.2 Mối liên hệ giữa các loại ổn định của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính

Trước tiên chúng tôi chứng minh một mối liên hệ được Khasminskii chỉ ra trong cuốn "Ổn định ngẫu nhiên của phương trình vi phân".

Mệnh đề 2.2.1 *Nghiệm $X(t,\omega) \equiv 0$ của phương trình (1.3) ổn định tiệm cận theo xác suất thì ổn định tiệm cận toàn cục theo xác suất.*

Như chúng ta đã biết đối với phương trình vi phân tất định tính ổn định của nghiệm không phụ thuộc vào thời điểm ban đầu, tức là nếu nghiệm ổn định tính từ thời điểm $t_0 \in \mathbb{R}^+$ nào đó thì cũng ổn định tính từ thời điểm $t'_0 \in \mathbb{R}^+$. Đối với phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính (1.3) chúng tôi cũng chứng minh rằng tính ổn định hầu chắc chắn của nghiệm tầm thường không phụ thuộc vào thời điểm ban đầu.

Định lý 2.2.2 *Cho $t_0, t^* \in \mathbb{R}^+$, tùy ý. Nếu nghiệm tầm thường $X(t,\omega) \equiv 0$ của phương trình (1.3) ổn định hầu chắc chắn với $t \geqslant t_0$ thì nó ổn định hầu chắc chắn với $t \geqslant t^*$.*

Chứng minh. Định lý này được chứng minh bằng phương pháp phản chứng.

Trong lý thuyết xác suất, nói chung một tính chất nào đó đúng hầu chắc chắn thì cũng đúng theo xác suất nhưng ngược lại không đúng. Với khái niệm ổn định theo xác suất được trình bày ở trên chúng tôi chứng minh rằng tính ổn định theo xác suất và ổn định hầu chắc chắn của nghiệm tầm thường $X(t,\omega) \equiv 0$ của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính (1.3) là tương đương.

Định lý 2.2.3 *Nếu nghiệm tầm thường $X(t,\omega) \equiv 0$ của phương trình (1.3) ổn định hầu chắc chắn với $t \geqslant 0$ thì nó ổn định theo xác suất với $t \geqslant 0$ và ngược lại.*

Chứng minh. Định lý này được chứng minh bằng phương pháp phản chứng.

Từ định nghĩa các loại ổn định của nghiệm phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô ta thấy nếu nghiệm ổn định theo xác suất thì ổn định yếu theo xác suất. Hơn nữa Khasminskii đã chỉ ra ví dụ một phương trình ngẫu nhiên có nghiệm ổn định yếu theo xác suất nhưng không ổn định theo xác suất. Tuy nhiên đối với phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính 1-chiều, hệ số hằng, thỏa mãn điều kiện không suy biến chúng tôi chỉ ra tính ổn định yếu theo xác suất và tính ổn định theo xác suất của nghiệm là tương đương

Định lý 2.2.4 *Cho phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính* 1-*chiều, hệ số hằng*

$$dX(t) = BX(t)dt + \sum_{r=1}^{m} \sigma_r X(t) dW^r(t) \tag{2.16}$$

thỏa mãn điều kiện không suy biến

$$\sum_{r=1}^{m} (\sigma_r x, \alpha)^2 \geqslant K \|x\|^2 \|\alpha\|^2 ,$$

trong đó K là hằng số dương. Khi đó tính ổn định theo xác suất và tính ổn định yếu theo xác suất của nghiệm tầm thường $X(t,\omega) \equiv 0$ là tương đương.

Khasminskii lưu ý rằng có thể chỉ ra ví dụ phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính, hệ số hằng, thỏa mãn điều kiện không suy biến, ổn định yếu theo xác suất nhưng không ổn định theo xác suất. Chúng tôi đã cố gắng tìm ví dụ chứng tỏ điều này, đồng thời đặt bài toán chứng minh rằng mọi phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính n-chiều ($n \geq 2$), hệ số hằng, thỏa mãn điều kiện không suy biến thì tính ổn định theo xác suất và ổn định yếu theo xác suất của nghiệm là tương đương nhưng đến nay chúng tôi chưa thu được kết quả theo hướng này.

Chương 3

Số mũ Lyapunov và số mũ trung tâm của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính

Khi nghiên cứu bài toán ổn định của phương trình vi phân ngẫu nhiên người ta thường tìm cách mở rộng, tổng quát hóa những khái niệm, kết quả cơ bản như trong lý thuyết ổn định Lyapunov tất định lên trường hợp ngẫu nhiên. Ta biết rằng, hai phương pháp cơ bản của lý thuyết ổn định Lyapunov tất định là phương pháp hàm Lyapunov và phương pháp số mũ Lyapunov.

Đối với phương pháp hàm Lyapunov, trong cuốn "Ổn định ngẫu nhiên của phương trình vi phân" của Khasminskii đã đề cập khá toàn diện và chi tiết những kết quả thu được trong việc nghiên cứu bài toán ổn định của phương trình vi phân ngẫu nhiên nói chung và phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô nói riêng.

Đối với phương pháp số mũ Lypunov, năm 1966, số mũ trung tâm Ω_1 của phương trình vi phân tất định lần đầu tiên được giới thiệu bởi Vinograd để làm đánh giá chặn trên của số mũ Lyapunov lớn nhất λ_1. Tương tự như đối với số mũ trung tâm Ω_1 của Vinograd, Millionshchikov (1983) định nghĩa số mũ trung tâm Ω_k của hệ tất định làm chặn trên của số mũ Lypunov λ_k và Nguyễn Đình Công (1990) định nghĩa số mũ trung tâm Θ_k làm chặn dưới của số mũ Lyapunov λ_k với $k=1,2,\cdots,n$. Nói chung các số mũ trung tâm được đưa ra thực sự khác biệt với số mũ Lyapunov. Điều này đã được Bylov chỉ ra bằng ví dụ cụ thể.

Năm 1970, tương tự như đối với trường hợp tất định, lần đầu tiên Millionshchikov đưa ra định nghĩa số mũ bổ trợ cho phương trình vi phân có nhiễu ngẫu nhiên (hay phương trình vi phân ngẫu nhiên). Số mũ bổ trợ được đưa ra để hỗ trợ cho việc nghiên cứu số mũ Lyapunov. Một ưu điểm nữa là việc tính toán số mũ bổ trợ không phải theo dõi quỹ đạo của nghiệm trên toàn bộ thời gian mà chỉ cần tính toán đối với ma trận nghiệm cơ bản trên mỗi khoảng thời gian compac.

Nghiên cứu của chúng tôi về số mũ Lyapunov và số mũ trung tâm của phương trình vi phân ngẫu nhiên bắt đầu từ bài toán của Millionshchikov, đó là xét phương trình vi phân $\dot{u} = [B(t) + C(t, \omega)]u$, trong đó $B(t)$ là ma trận hàm liên tục, bị chặn và ma trận $C(t, \omega)$ có các phần tử là quá trình ngẫu nhiên hằng từng khúc, độc lập với nhau. Sử dụng luật 0-1 của Kolmogorov, Millionshchikov đã chứng minh số mũ Lyapunov của nó không phụ thuộc vào ω. Chú ý rằng phương trình này có thể giải được theo quỹ đạo mà không cần sử dụng phép tính tích phân Itô.

Năm 1993, khi xét phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô

$$dX(t) = F_0(t)X(t)dt + \sigma \sum_{r=1}^{m} F_r X(t) dW^r(t), \tag{3.1}$$

trong đó $F_0(t)$ là ma trận hàm liên tục và bị chặn, F_r $(r = 1, 2, ..., m)$ là ma trận hằng, Nguyễn Đình Công cũng đưa ra nhận xét rằng số mũ Lyapunov, số mũ trung tâm, số mũ bổ trợ thứ k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ của phương trình (3.1) không phụ thuộc vào ω và chứng minh nếu phương trình (3.1) thỏa mãn điều kiện không suy biến của nhiễu ngẫu nhiên, tức là tồn tại hai số thực dương μ_1, μ_2 sao cho với mọi $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\mu_1 \|x\|^2 \|y\|^2 \leq \sum_{r=1}^{m} \langle F_r x, y \rangle^2 \leq \mu_2 \|x\|^2 \|y\|^2,$$

thì số mũ trung tâm, số mũ Lyapunov, số mũ bổ trợ thứ k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ của phương trình (3.1) bằng nhau. Đến năm 2001 trong bài báo "Phổ của phương trình vi phân ngẫu nhiên tuyến tính không ôtônôm", Nguyễn Đình Công mới chứng minh cụ thể cho trường hợp tổng quát (không cần điều kiện không suy biến) các số mũ Lyapunov của phương trình (1.3) không phụ thuộc vào ω, tức là không ngẫu nhiên.

Dựa trên ý tưởng chính của Nguyễn Đình Công công bố, chúng tôi đã chứng minh một số tính chất của số mũ trung tâm và số mũ bổ trợ của phương trình (1.3). Thay vì sử dụng Luật 0-1 của Kolmogorov cho dãy các biến ngẫu nhiên độc lập chúng tôi sử dụng Luật mạnh số lớn và các bất đẳng thức được đưa ra bởi Rosenblatt-Roth cho xích Markov không thuần nhất để chứng minh các số mũ trung tâm, số mũ Lyapunov, số mũ bổ trợ thứ k ($k = 1, 2, \ldots, n$) của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính (1.3), thỏa mãn điều kiện không suy biến, trùng nhau. Chú ý rằng phương trình (1.3) tổng quát hơn phương trình (3.1).

3.1 Các định nghĩa số mũ của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính

Cho X là ma trận vuông cấp n không suy biến, $d_1(X) \geq d_2(X) \geq ... \geq d_n(X)$ là các căn bậc hai dương của giá trị riêng của ma trận X^*X. Xét phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính (1.3). Nhắc lại rằng $\Phi_{s,t}(\omega)$ là dòng ngẫu nhiên hai tham số các toán tử tuyến tính của $\mathbb{R}^n$ sinh bởi phương trình (1.3).

Định nghĩa 3.1.1 Các biến ngẫu nhiên $\lambda_k(\omega), \Omega_k(\omega), \Theta_k(\omega)$ với $k \in \{1, 2, ..., n\}$ được xác định bởi

$$\lambda_k(\omega) := \min_{U \in \mathcal{G}_{n-k+1}} \max_{x \in U} \limsup_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln \|\Phi_{0,t}(\omega)x\|, \tag{3.2}$$

$$\Theta_k(\omega) := \sup_{V \in \mathcal{G}_k} \sup_{T \in \mathbb{R}^+} \limsup_{m \to +\infty} \frac{1}{mT} \sum_{i=0}^{m-1} \ln \left\| \Phi_{(i+1)T,iT}(\omega)\big|_{\Phi_{0,(i+1)T}(\omega)V} \right\|^{-1}, \tag{3.3}$$

$$\Omega_k(\omega) := \inf_{U \in \mathcal{G}_{n-k+1}} \inf_{T \in \mathbb{R}^+} \limsup_{m \to +\infty} \frac{1}{mT} \sum_{i=0}^{m-1} \ln \left\| \Phi_{iT,(i+1)T}(\omega)\big|_{\Phi_{0,iT}(\omega)U} \right\|, \tag{3.4}$$

tương ứng là *số mũ Lyapunov*, *số mũ trung tâm chặn dưới* và *số mũ trung tâm chặn trên* của phương trình (1.3).

Trong Định lý 3.2.6 chúng tôi chứng minh rằng trong công thức (3.3) và (3.4) có thể thay $T \in \mathbb{R}^+$ bởi $T > 1$.

Định nghĩa 3.1.2 Biến ngẫu nhiên $\gamma_k(\omega)$ xác định bởi công thức

$$\gamma_k(\omega) := \limsup_{T\to+\infty} \limsup_{m\to+\infty} \frac{1}{mT} \sum_{i=0}^{m-1} \ln d_k\big[\Phi_{iT,(i+1)T}(\omega)\big], \tag{3.7}$$

với $k \in \{1, 2, ..., n\}$ được gọi là *số mũ bổ trợ* của phương trình (1.3). Hàm $\gamma_k(T)$ xác định bởi công thức

$$\gamma_k(T) := \limsup_{m\to+\infty} \frac{1}{mT} \sum_{i=0}^{m-1} \mathbb{E} \ln d_k\big[\Phi_{iT,(i+1)T}(\omega)\big], \tag{3.8}$$

với $k \in \{1, 2, ..., n\}$, $T \in \mathbb{R}^+$ được gọi là *hàm số bổ trợ* của phương trình (1.3).

3.2 Một số tính chất của số mũ trung tâm và số mũ bổ trợ

Định lý 3.2.1 *Với mọi $k \in \{1, 2, ..., n\}$ ta có đẳng thức $\gamma_k(\omega) = \limsup_{T\to+\infty} \gamma_k(T)$ với xác suất 1, tức là số mũ bổ trợ $\gamma_k(\omega)$ của phương trình (1.3) không phụ thuộc vào $\omega \in \Omega$.*

Định lý 3.2.2 *Với mọi $k \in \{1, 2, ..., n\}$ số mũ trung tâm $\Theta_k(\omega)$ của phương trình (1.3) không phụ thuộc vào $\omega \in \Omega$.*

Định lý 3.2.3 *Với mọi $k \in \{1, 2, ..., n\}$, số mũ trung tâm $\Omega_k(\omega)$ của phương trình (1.3) không phụ thuộc vào $\omega \in \Omega$.*

Như vậy số mũ Lyapunov, số mũ trung tâm, số mũ bổ trợ của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính (1.3) không phụ thuộc vào ω do đó trong ký hiệu sau này của các số mũ chúng ta sẽ bỏ qua ω.

Định lý 3.2.4 *Với mọi $k \in \{1, 2, ..., n\}$, số mũ trung tâm Ω_k của phương trình (1.3) lớn hơn hoặc bằng số mũ Lyapunov λ_k.*

Định lý 3.2.5 *Với mọi $k \in \{1, 2, ..., n\}$, số mũ trung tâm Θ_k của phương trình (1.3) nhỏ hơn hoặc bằng số mũ Lyapunov λ_k.*

Định lý 3.2.6 *Với mọi $k \in \{1, 2, ..., n\}$, số mũ trung tâm Θ_k của phương trình (1.3) nhỏ hơn hoặc bằng số mũ bổ trợ γ_k.*

Định lý 3.2.7 *Đối với phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính (1.3) ta luôn có*

$$\gamma_1 \geq \Omega_1 \ \text{ và } \ \gamma_n = \Theta_n.$$

3.3 Sự trùng nhau của số mũ Lyapunov và số mũ trung tâm của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính thỏa mãn điều kiện không suy biến

Trong phần này chúng ta xét phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính (1.3) có phần ngẫu nhiên thỏa mãn *điều kiện không suy biến* sau đây:
Tồn tại hai số thực dương μ_1, μ_2 sao cho với mọi $x, y \in \mathbb{R}^n$ và $t \in \mathbb{R}^+$

$$\mu_1 \|x\|^2 \|y\|^2 \leq \big\langle D(t,x)y, y\big\rangle \leq \mu_2 \|x\|^2 \|y\|^2, \tag{3.16}$$

trong đó

$$D(t,x) = \big(d_{ij}(t,x)\big)_{n\times n} \text{ với } d_{ij}(t,x) = \sum_{r=1}^{m}\Bigg(\sum_{h,l=1}^{n} f_{ir}^{h}(t) f_{jr}^{l}(t) x_h x_l\Bigg).$$

Trước tiên ta nhắc lại Mệnh đề mà Nguyễn Đình Công đã chứng minh.

Mệnh đề 3.3.1 *Với mọi $\epsilon > 0$, đều tồn tại $0 < \delta = \delta(\epsilon) < 1$ sao cho với mọi không gian véc tơ con $V \in \mathcal{G}_k$, $U \in \mathcal{G}_{n-k}$ $(k = 1, 2, ..., n-1)$ và với mọi $\tau \in \mathbb{R}^+$ thì tập hợp các $\omega \in \Omega$ thỏa mãn*

$$\big[\Phi_{\tau,\tau+1}(\omega)V\big] \cap \hat{U}[\delta(\epsilon)] \not\equiv \{0\}$$

có độ đo xác suất nhỏ hơn hoặc bằng ϵ, trong đó $\hat{U}(\varrho)$ biểu thị nón gồm những véc tơ trong $\mathbb{R}^n$ tạo với không gian véc tơ con U một góc nhỏ hơn hoặc bằng ϱ.

Tiếp sau là hai kết quả của Rosenblatt-Roth về Luật mạnh số lớn của xích Markov không thuần nhất.

Cho $(\mathcal{U}_i, \Sigma_i)$ là không gian đo được, x_i là phần tử của $\mathcal{U}_i$, A_i là tập đo được và là phần tử trong σ-đại số Σ_i $(i = 1, 2, \ldots)$. Xác suất chuyển (hay hàm chuyển) $P_i(x_i, A_{i+1})$ trên miền xác định $(\mathcal{U}_i, \Sigma_i, \mathcal{U}_{i+1}, \Sigma_{i+1})$ với $i = 1, 2, \ldots$ xác định một xích Markov. Ta ký hiệu $\alpha_i = \alpha(P_i)$ là hệ số ergodic của P_i. Xét dãy biến ngẫu nhiên ξ_i, $(i = 1, 2, \ldots)$, phụ thuộc vào $r \geq 1$ bước thời gian (hay r-phụ thuộc) đối với xích Markov và giả sử rằng với mọi $i = 1, 2, \ldots$ các biến ngẫu nhiên ξ_i đều có phương sai $D\xi_i$ hữu hạn. Đặt

$$\begin{aligned} \alpha^{(m)} &= \min_{1\leq i\leq m} \alpha_i, \qquad D_m = \sum_{i=1}^{m} D\xi_i, \\ S_m &= \sum_{i=1}^{m} \xi_i, \qquad U_m = \max_{1\leq s\leq m} |S_s - \mathbb{E}S_s|, \quad (m = 1, 2, \ldots). \end{aligned}$$

Mệnh đề 3.3.2 *Nếu* $\alpha_i > \rho > 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$ *và* $\sum\limits_{m=1}^{+\infty} m^{-2} D\xi_m < +\infty$ *thì dãy các biến ngẫu nhiên* ξ_i $(i = 1, 2, \ldots)$ *thỏa mãn luật mạnh số lớn.*

Mệnh đề 3.3.3 *Nếu* $\alpha_i > \rho > 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$ *thì*

$$\mathbb{P}(U_m > \epsilon) < \frac{[20(1 + \sqrt{6})]^2 \rho^2}{\epsilon} D_m.$$

Dựa vào kết quả của các Mệnh đề trên chúng tôi chứng minh được các bất đẳng thức đánh giá sai số giữa các số mũ trung tâm và số mũ bổ trợ thứ k $(k \in \{1, 2, ..., n\})$ của phương trình (1.3).

Định lý 3.3.4 *Tồn tại một hằng số* $c_1 > 0$ *sao cho với mọi* $\epsilon \in (0, 1)$, $T \in \mathbb{R}$, $T > 1$ *và* $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ *các bất đẳng thức sau xảy ra*

$$|\Omega_k - \gamma_k(T)| \leq (2c_1 + 1)\sqrt{\epsilon} - \frac{1}{T} \ln \frac{\delta(\epsilon)}{2}, \tag{3.17}$$

$$|\Theta_k - \gamma_k(T)| \leq (2c_1 + 1)\sqrt{\epsilon} - \frac{1}{T} \ln \frac{\delta(\epsilon)}{2}, \tag{3.18}$$

trong đó $\delta(\epsilon)$ *được xác định như ở trong Mệnh đề 3.3.1.*

Định lý 3.3.5 *Nếu phương trình (1.3) thỏa mãn điều kiện không suy biến (3.16) thì với mọi* $k \in \{1, 2, ..., n\}$ *giới hạn sau tồn tại và bằng số mũ bổ trợ*

$$\gamma_k := \lim_{T\to+\infty} \gamma_k(T) = \gamma_k(\omega). \tag{3.32}$$

Hơn nữa ta có đẳng thức sau

$$\Omega_k = \lambda_k = \Theta_k = \gamma_k.$$

3.4 Dáng điệu tiệm cận của số mũ Lyapunov lớn nhất của phương trình vi phân với nhiễu ngẫu nhiên Itô nhỏ

Xét phương trình vi phân tuyến tính tất định n-chiều

$$dX(t) = F_0(t)X(t)dt, \tag{3.35}$$

trong đó $t \in \mathbb{R}^+, F_0(t) = (f_{i0}^j)_{n\times n}$ là ma trận hàm, liên tục, bị chặn và phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính n-chiều có dạng

$$\begin{aligned} dX(t) &= F_0(t)X(t)dt + \sigma \sum_{r=1}^{m} F_r(t)X(t)dW^r(t),\\ X(t_0) &= x_0, \end{aligned} \tag{3.36}$$

trong đó $F_r(t) = (f_{ir}^j(t))_{n\times n}$ $(r = 1, 2, \ldots, m)$ là các ma trận hàm, liên tục, bị chặn, thỏa mãn điều kiện không suy biến (3.16). Ta có thể coi phương trình (3.36) là phương trình vi phân tất định (3.35) được nhiễu bởi tiếng ồn trắng có dạng ngẫu nhiên Itô tuyến tính thỏa mãn điều kiện không suy biến (3.16). Khi đó ta có định lý sau.

Định lý 3.4.1 *Số mũ Lyapunov lớn nhất của phương trình (3.36) sẽ tiến đến số mũ trung tâm lớn nhất của phương trình (3.35) khi σ tiến đến 0.*

Kết luận của Luận án

Luận án nghiên cứu tính ổn định và số mũ Lyapunov của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính.

Những kết quả chính của luận án

1. Luận án chỉ ra được một số mối liên hệ giữa các loại ổn định ngẫu nhiên của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính.
2. Luận án chứng minh được một số tính chất của số mũ trung tâm, số mũ bổ trợ. Chỉ ra sự trùng nhau của số mũ Lyapunov và số mũ trung tâm của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính thỏa mãn điều kiện không suy biến.

Các vấn đề cần tiếp tục nghiên cứu

Các nghiên cứu thực hiện trong Luận án này thuộc hướng nghiên cứu định tính phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô. Các kết quả bước đầu về phổ Lyapunov và các phổ liên quan của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính tạo ra cơ sở để tác giả có thể tiếp tục nghiên cứu các hệ có cấu trúc phức tạp hơn như hệ suy biến hoặc hệ có tính không suy biến yếu hơn so với giả thiết đặt ra trong luận án (hệ số không suy biến μ_1, μ_2 phụ thuộc vào t chẳng hạn).

Sử dụng các kết quả và các công cụ trong luận án này tác giả có thể tiếp tục nghiên cứu tính chất ổn định của phổ Lyapunov, tính chất ổn định nghiệm của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính; nghiên cứu các tính chất định tính của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô phi tuyến.

Một hướng phát triển thú vị là nghiên cứu tính chất định tính của các hệ đặc biệt (hệ vật lý, hệ cơ học, hệ sinh học) trong các mô hình ngẫu nhiên dạng phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô: phương trình Schorødinger ngẫu nhiên, phương trình hệ sinh thái thú-mồi trong môi trường ngẫu nhiên...

Danh mục công trình công bố

1. Nguyễn Thị Thúy Quỳnh (2004), *Using some Financial Mathematical Methods for Analysing Vietnam stock's Market*, Journal of Science and Technique, No. 108, 86-93.
2. Nguyễn Thị Thúy Quỳnh (2009), *On the stability of solutions of Ito differential equations*, Acta Math. Vietnamica, Vol. 35, No. 2, 253-261.
3. Nguyễn Đình Công, Nguyễn Thị Thúy Quỳnh (2009), *Lyapunov exponents and central exponents of linear Ito stochastic diferential equations*, Acta Math. Vietnamica (đã được nhận đăng).
4. Nguyễn Đình Công, Nguyễn Thị Thúy Quỳnh (2009), *Coincidence of Lyapunov exponents and central exponents of linear Ito stochastic differential equations with nondegenerate stochastic term*, preprint,Viện Toán học, Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam, 09/09 và đã gửi đăng.