LỜI MỞ ĐẦU

Năm 1929, ba nhà toán học người Ba Lan là Knaster, Kuratowski và Mazurkiewicz đã chứng minh được một kết quả quan trọng mang tên "Bổ đề KKM" bằng phương pháp tương đối sơ cấp mà từ đó suy ra được nguyên lý điểm bất động Brouwer.

Bổ đề KKM chỉ áp dụng được cho các không gian véctơ hữu hạn chiều. Năm 1961, Ky Fan đã mở rộng cho trường hợp không gian véctơ tôpô bất kỳ. Định lý của Ky Fan ngày nay được gọi là "Nguyên lý ánh xạ KKM".

Nguyên lý ánh xạ KKM. *Giả sử E là không gian véctơ tôpô bất kỳ, X là tập con khác rỗng của E và $F : X \to 2^E$ là ánh xạ thỏa mãn*

(1) $F(x)$ là tập đóng với mọi $x \in X$;

(2) $co\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset \cup_{i=1}^n F(x_i)$ với mọi $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset X$;

(3) $F(x_0)$ là tập compắc với x_0 nào đó thuộc X.

Khi đó

$$\bigcap_{x \in X} F(x) \neq \emptyset.$$

Năm 1972, dựa vào nguyên lý ánh xạ KKM năm 1961, Ky Fan đã chứng minh được một kết quả quan trọng mà sau này người ta gọi là "Bất đẳng thức Ky Fan".

Bất đẳng thức Ky Fan. *Giả sử E là không gian véctơ tôpô bất kỳ, X là tập con lồi compắc khác rỗng của E và $f : X \times X \to \mathbb{R}$ là hàm số thỏa mãn*

(1) $f(x, x) \leq 0$ với mọi $x \in X$;

(2) $f(x, y)$ là tựa lõm theo x với mỗi y cố định;

(3) $f(x, y)$ là nửa liên tục dưới theo y với mỗi x cố định.

Khi đó tồn tại $y^* \in X$ sao cho $f(x, y^*) \leq 0$ với mọi $x \in X$.

Từ đây, bất đẳng thức Ky Fan trở thành một công cụ quan trọng để nghiên cứu các bài toán như: Tối ưu, bất đẳng thức biến phân, điểm bất động, điểm cân bằng Nash, điểm yên ngựa, ... Có thể nói, từ đây nguyên lý ánh xạ KKM đã thu hút nhiều nhà toán học trên thế giới quan tâm và suy ra được các kết quả cơ bản cũng như nhiều kết quả mới khác về một số khía cạnh sau:

- Những định lý về sự tồn tại điểm bất động của ánh xạ đơn trị và đa trị liên tục của Brouwer, Schauder, Tikhonov, Ky Fan, ...

• Một số định lý về tính chất của tập lồi: Định lý matching, định lý thiết diện, định lý tương giao, ...

• Các bất đẳng thức minimax, các định lý về sự tồn tại nghiệm của bất đẳng thức biến phân, các định lý về sự tồn tại điểm cân bằng Nash, các kết quả về toán kinh tế.

Những kết quả quan trọng đó cùng rất nhiều các dạng mở rộng và tương đương đã được tập hợp lại dưới cái tên: Lý thuyết KKM. Lý thuyết này đã được sử dụng rộng rãi như một công cụ hữu ích trong các lĩnh vực như: Lý thuyết điểm bất động, lý thuyết minimax, toán kinh tế, tối ưu hoá, ... Lý thuyết KKM đã được nghiên cứu cho rất nhiều lớp không gian khác nhau. Năm 1983, Lassonde đã nghiên cứu lý thuyết KKM trong các không gian "lồi". Năm 1987, Horvath đã mở rộng cho trường hợp các c-không gian hay H-không gian. Năm 1991, Park đã nghiên cứu lý thuyết KKM trong không gian G-lồi. Đặc biệt, năm 1996, Khamsi đã xây dựng được một dạng siêu lồi của nguyên lý ánh xạ KKM, mở đầu cho việc hình thành lý thuyết KKM trong các không gian metric siêu lồi.

Cũng trong năm 1996, Horvath và Llinares Ciscar đã chứng minh được dạng nguyên lý ánh xạ KKM trong các nửa dàn tôpô và đã thu được một số kết quả bước đầu trong lớp không gian này. Sau đó, năm 2001, Luo đã mở rộng các kết quả của Horvath và Llinares Ciscar đồng thời chứng minh được sự tồn tại điểm cân bằng Nash đơn trị với số người chơi hữu hạn. Các năm 2004, 2006, Luo đã tiếp tục nghiên cứu xa hơn nữa bằng việc mở rộng bất đẳng thức Ky Fan cho trường hợp đa trị. Tuy nhiên các kết quả thu được của Luo vẫn chưa phải là mở rộng thực sự bất đẳng thức Ky Fan trong nửa dàn tôpô.

Hơn nữa, rất nhiều vấn đề khác về lý thuyết KKM trong nửa dàn tôpô như các định lý ghép đôi (matching), tương giao, định lý điểm bất động Browder-Fan với nghịch ảnh đóng, định lý dạng Browder-Fan cho họ các ánh xạ đa trị, điểm cân bằng Nash đa trị cho trường hợp vô hạn người chơi, tính liên tục và liên thông của tập nghiệm, ... vẫn chưa được nghiên cứu đầy đủ. Đó là lý do chúng tôi chọn đề tài "Lý thuyết KKM trong nửa dàn tôpô và ứng dụng" để làm luận án tiến sỹ. Luận án trình bày các nghiên cứu mới về lý thuyết KKM trong các nửa dàn tôpô. Ngoài phần mở đầu và phần kết luận, luận án chia làm ba chương:

Ở phần đầu Chương 1, chúng tôi giới thiệu về nửa dàn tôpô. Sau đó chúng tôi mở rộng nguyên lý ánh xạ KKM trong nửa dàn tôpô. Các kết quả tiếp theo là định lý ghép đôi, định lý tương giao, định lý điểm bất động Browder-Fan, sự tương đương giữa nguyên lý ánh xạ KKM và định lý điểm bất động Browder-Fan, định lý thiết diện và một số định lý điểm bất động khác cho ánh xạ đa trị, định lý điểm bất động dạng Kakutani-Ky Fan trong nửa dàn. Cuối chương là các bất đẳng thức minimax và định lý minimax dạng Sion-Neumann.

Trong Chương 2, chúng tôi trình bày các mở rộng đa trị của bất đẳng thức Ky Fan cho các ánh xạ đa trị C-liên tục trong nửa dàn tôpô. Sau đó chúng tôi chứng minh một định lý điểm bất động dạng Browder-Fan cho họ bất kỳ các ánh xạ Browder và chứng minh sự tồn tại nghiệm của các hệ bất đẳng thức Ky Fan, điểm cân bằng Nash đa trị với số người chơi vô hạn. Cuối chương là sự tồn tại nghiệm tối ưu Pareto của hệ trò chơi đa mục tiêu.

Phần cuối cùng của luận án được trình bày trong Chương 3. Trong chương này, chúng tôi chứng minh tính nửa liên tục trên của tập nghiệm và sự tồn tại thành phần liên thông cốt yếu của tập nghiệm của bất đẳng thức Ky Fan dạng đa trị trong nửa dàn tôpô.

Hiện nay, lý thuyết KKM nói chung vẫn đang phát triển không ngừng. Chúng tôi hy vọng rằng luận án này sẽ góp phần làm phong phú thêm lý thuyết KKM trong nửa dàn tôpô và lý thuyết KKM nói chung.

Việc đánh số các chương, mục, định nghĩa, định lý, ... trong bản tóm tắt này được giữ nguyên như ở trong luận án.

Chương 1
Nguyên lý ánh xạ KKM suy rộng và các kết quả liên quan

Phần đầu Chương 1 giới thiệu về nửa dàn tôpô. Các kết quả chính của chương này được trình bày trong các Mục 1.3, Mục 1.4, Mục 1.5, Mục 1.6, Mục 1.7, Mục 1.8 và Mục 1.9.

1.1 Giới thiệu về nửa dàn tôpô

Định nghĩa 1.1.1 *Tập sắp thứ tự bộ phận* $(X, \leqslant)$ *được gọi là nửa dàn trên nếu mỗi cặp phần tử bất kỳ* (x, y) *đều có cận trên đúng* $\sup\{x, y\}$. *Và* $(X, \leqslant)$ *gọi là nửa dàn tôpô nếu* X *là một không gian tôpô và ánh xạ* $X \times X \to X$, $(x, y) \mapsto \sup\{x, y\}$ *liên tục.*

Từ nay về sau ta chỉ gọi đơn giản là các nửa dàn. Từ định nghĩa ta dễ dàng thấy rằng mỗi tập con hữu hạn khác rỗng A của nửa dàn X đều có cận trên đúng, kí hiệu bởi $\sup A$. Nếu $x_1 \leqslant x_2$, thì ta đặt

$$[x_1, x_2] := \{y \in X : x_1 \leqslant y \leqslant x_2\}$$

và gọi là một khoảng thứ tự (gọi đơn giản là khoảng).

Bây giờ ta giả sử rằng $(X, \leqslant)$ là nửa dàn và $A \subseteq X$ là tập con hữu hạn khác rỗng. Khi đó tập hợp

$$\Delta(A) := \cup_{a \in A}[a, \sup A]$$

hoàn toàn xác định (gọi là bao Δ-lồi của tập hữu hạn A).

Định nghĩa 1.1.2 *Ta nói rằng tập con* $E \subseteq X$ *là* Δ*-lồi nếu với mọi tập con hữu hạn khác rỗng* $A \subseteq E$, *ta đều có* $\Delta(A) \subseteq E$.

Kí hiệu Δ_n là đơn hình chuẩn n chiều với các đỉnh $e_0, ..., e_n$. Nếu J là một tập con khác rỗng của $\{0, ..., n\}$ thì ta kí hiệu Δ_J là bao lồi của các đỉnh $\{e_j : j \in J\}$.

1.2 Nguyên lý ánh xạ KKM

Mục này nhắc lại khái niệm ánh xạ KKM và nguyên lý ánh xạ KKM do Horvath và Llinares Ciscar chứng minh năm 1996 và chúng tôi sẽ mở rộng nguyên lý đó ở mục sau đây.

1.3 Các định lý ghép đôi

Bổ đề 1.3.1 *Giả sử* X *là nửa dàn tôpô với các khoảng liên thông đường và*

$\{R_i : i = 0, ..., n\}$ *là họ các tập con của* X*. Giả sử*

(1) Tồn tại các phần tử $x_0, ..., x_n$ *của* X *sao cho với mọi tập con khác rỗng* J *của* $\{0, ..., n\}$,

$$\Delta(\{x_j : j \in J\}) \subseteq \bigcup_{j \in J} R_j;$$

(2) Tất cả các tập $\Delta(\{x_0, ..., x_n\}) \cap R_i,\ i = 0, ..., n$ *đều đóng hoặc đều mở trong* $\Delta(\{x_0, ..., x_n\})$.

Khi đó

$$\bigcap_{i=0}^{n} R_i \neq \emptyset.$$

Định lý 1.3.1 *Giả sử* X *là nửa dàn tôpô với các khoảng liên thông đường và* $F : X \to 2^X$ *là một ánh xạ đa trị với các giá trị khác rỗng sao cho*

(1) F *là ánh xạ KKM, nghĩa là với mọi tập con hữu hạn khác rỗng* $A \subseteq X$,

$$\Delta(A) \subseteq \bigcup_{x \in A} F(x);$$

(2) Tất cả các tập $F(x) \cap \Delta(A),\ x \in X$ *đều đóng hoặc đều mở trong* $\Delta(A)$ *với mỗi* $A \in \langle X \rangle$.

Khi đó họ $\{F(x) : x \in X\}$ *có tính chất giao hữu hạn.*

Nhận xét 1.3.1 *Nếu các tập* $F(x) \cap \Delta(A),\ x \in X$, *đóng trong* $\Delta(A)$ *với mỗi* $A \in \langle X \rangle$, $F(x_0)$ *là tập compắc với* x_0 *nào đó thuộc* X *và với mỗi* $x \in X$, $F(x_0) \cap F(x)$ *đóng trong* $F(x_0)$ *thì* $\bigcap_{x \in X} F(x) \neq \emptyset$.

Từ Bổ đề 1.3.1 ta có định lý ghép đôi (matching) sau đây:

Định lý 1.3.2 *Giả sử* X *là nửa dàn tôpô với các khoảng liên thông đường và* $A_1, ..., A_n$ *là* n *tập con của* X*. Mặt khác giả sử rằng tất cả các tập* $A_i,\ i = 1, ..., n$ *đều đóng hoặc đều mở sao cho* $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = X$*. Khi đó với bất kỳ* n *phần tử* $x_1, ..., x_n$ *(không nhất thiết khác nhau) của* X*, tồn tại một tập con khác rỗng* J_0 *của* $\{1, ..., n\}$ *sao cho*

$$\Delta(\{x_j : j \in J_0\}) \cap (\bigcap_{j \in J_0} A_j) \neq \emptyset.$$

1.4 Các định lý điểm bất động

Từ Định lý 1.3.2 ta thu được định lý điểm bất động dạng Browder-Fan trong nửa dàn tôpô.

Định lý 1.4.3 *Giả sử X là nửa dàn tôpô với các khoảng liên thông đường và $T : X \to 2^X$ là một ánh xạ đa trị thoả mãn*

(1) $T(x)$ là tập Δ-lồi với mỗi $x \in X$;

(2) Tồn tại một tập hữu hạn $D \in \langle X \rangle$ sao cho

(a) $T(x) \cap D \neq \emptyset$ với mỗi $x \in X$;

(b) Tất cả các tập $T^{-1}(y), y \in D$ đều đóng hoặc đều mở.

Khi đó tồn tại $x^* \in X$ sao cho $x^* \in T(x^*)$.

Nhận xét 1.4.1 *Trong Định lý 1.4.3, so với định lý điểm bất động Browder-Fan dạng thông thường, ở đây các tập nghịch ảnh có thể đóng.*

Sử dụng Định lý trên, ta chứng minh được định lý thiết diện dạng Ky Fan như sau.

Định lý 1.4.4 *Giả sử X là nửa dàn tôpô với các khoảng liên thông đường và E là một tập con của $X \times X$, có các tính chất sau:*

(1) $(x, x) \in E$ với mọi $x \in X$;

(2) Với mỗi $x \in X$, tập $\{y \in X : (x, y) \notin E\}$ là Δ-lồi ;

(3) Với $y \in X$, tất cả các tập $\{x \in X : (x, y) \in E\}$ thoả mãn: (c_1) đều đóng hoặc (c_2) đều mở.

Khi đó với mỗi tập hữu hạn khác rỗng $D \subset X$, tồn tại một phần tử $x_D \in X$ sao cho $\{x_D\} \times D \subset E$.

1.5 Sự tương đương giữa nguyên lý ánh xạ KKM và định lý điểm bất động Browder-Fan

Giả sử $\mathcal{C}$ là họ tất cả các tập con Δ-lồi của nửa dàn tôpô X và A là tập con tùy ý của X. Ta đặt $CO_\Delta(A) = \cap\{E \in \mathcal{C} : A \subseteq E\}$.

Dễ thấy tập con E của X là Δ-lồi khi và chỉ khi $CO_\Delta(E) = E$.

Kết quả chính của mục này nhằm chỉ ra hai định lý sau là tương đương.

Định lý 1.5.1 (Horvath và Llinares Ciscar, 1996) *Giả sử X là nửa dàn tôpô với các khoảng liên thông đường, C là tập con khác rỗng của X, và $T : C \to 2^X$ là ánh xạ thỏa mãn:*

(1) $T(x)$ đóng với mỗi $x \in C$;

(2) T là ánh xạ KKM, tức là, với mỗi $A \in \langle C \rangle$,

$$\Delta(A) \subset \bigcup_{x \in A} T(x);$$

(3) Tồn tại $x_0 \in C$ sao cho $T(x_0)$ là tập compắc.

Khi đó $\cap_{x \in C} T(x) \neq \emptyset$.

Định lý 1.5.2 (Horvath và Llinares Ciscar, 1996) *Giả sử X là nửa dàn tôpô compắc với các khoảng liên thông đường và $T : X \to 2^X$ là ánh xạ thỏa mãn:*

(1) Với mỗi $x \in X$, $T(x)$ là Δ-lồi khác rỗng;

(2) Với mỗi $y \in X$, $T^{-1}(y)$ mở.

Khi đó tồn tại $x^* \in X$ sao cho $x^* \in T(x^*)$.

1.6 Các định lý điểm trùng

Định nghĩa 1.6.1 *Giả sử X, Y là các tập khác rỗng, $T : X \to 2^Y$ và $S : Y \to 2^X$. Khi đó T và S được gọi là có một điểm trùng nếu tồn tại $(x, y) \in X \times Y$ sao cho $y \in T(x)$ và $x \in S(y)$.*

Từ Định lý 1.3.2 ta có định lý điểm trùng sau.

Định lý 1.6.1 *Giả sử X là nửa dàn tôpô với các khoảng liên thông đường, $S : X \to 2^X$ là một ánh xạ KKM và $T : X \to 2^X$ là một ánh xạ đa trị. Giả sử rằng tồn tại một tập hữu hạn khác rỗng $D \subset X$ sao cho*

(1) $T(x) \cap D \neq \emptyset$ với mọi $x \in X$;

(2) Tất cả các tập $T^{-1}(y)$, $y \in D$ đều đóng hoặc đều mở.

Khi đó T và S có một điểm trùng.

Từ Định lý 1.5.2 ta có kết quả sau.

Định lý 1.6.3 *Giả sử X là nửa dàn tôpô compắc với các khoảng liên thông đường, Y là nửa dàn tôpô và $A : X \to 2^Y$, $B : Y \to 2^X$ là các ánh xạ đa trị thoả mãn*

(1) Với mỗi $x \in X$, $A(x)$ là tập khác rỗng và Δ-lồi, $B^{-1}(x)$ mở trong Y;

(2) Với mỗi $y \in Y$, $A^{-1}(y)$ mở trong X, $B(y)$ là tập khác rỗng và Δ-lồi.

Khi đó tồn tại một phần tử x_0 sao cho $A(x_0) \cap B^{-1}(x_0) \neq \emptyset$.

1.7 Các bất đẳng thức dạng Ky Fan

Định lý 1.7.2 *Giả sử X là nửa dàn tôpô với các khoảng liên thông đường và f, g là các hàm số xác định trên $X \times X$ sao cho*

(1) $f(x, y) \leqslant g(x, y)$ với mọi $(x, y) \in X \times X$;

(2) Với mỗi $x \in X$, $f(x, .)$ là một hàm nửa liên tục trên trên X;

(3) Với mỗi $y \in X$, tập $\{x \in X : g(x, y) \geq 0\}$ là Δ-lồi ;

(4) $g(x, x) < 0$ với mọi $x \in X$.

Khi đó với mỗi tập hữu hạn khác rỗng $D \subset X$ tồn tại một phần tử $y_D \in X$ sao cho $f(x, y_D) < 0$ với mọi $x \in D$.

Nhận xét 1.7.2 *Định lý 1.7.2 không đòi hỏi tính compắc của không gian nền và cũng không cần ràng buộc thêm một điều kiện nào liên quan đến tính compắc.*

1.8 Định lý minimax kiểu Sion-Neumann

Bây giờ ta áp dụng Định lý 1.6.3 để chứng minh định lý minimax kiểu Sion-Neumann. Đây là một kết quả quan trọng trong giải tích phi tuyến.

Định lý 1.8.1 *Giả sử X là nửa dàn tôpô compắc với các khoảng liên thông đường, Y là một nửa dàn tôpô. Giả sử $f,\ g : X \times Y \to \mathbb{R}$ là các hàm số thoả mãn*

(1) $f(x, y) \leqslant g(x, y)$ với mọi $(x, y) \in X \times Y$;

(2) Với mọi $x \in X$, $g(x, .)$ là Δ-tựa lồi trên Y và $f(x, .)$ là nửa liên tục dưới trên Y;

(3) Với mọi $y \in Y$, $g(., y)$ là nửa liên tục trên trên X và $f(., y)$ là Δ-tựa lõm trên X.

Khi đó bất đẳng thức sau đúng:

$$\inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} f(x, y) \leqslant \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} g(x, y).$$

1.9 Định lý điểm bất động dạng Kakutani-Ky Fan trong nửa dàn tôpô

Trước hết ta cần định nghĩa sau.

Định nghĩa 1.9.2 *Nửa dàn tôpô X gọi là nửa dàn Δ-lồi địa phương nếu X là không gian đều với cấu trúc đều $\mathcal{U}$ có cơ sở $\beta := \{V_i : i \in I\}$ gồm các tập mở đối xứng sao cho với mỗi $V \in \beta$, tập $V[x]$ là Δ-lồi với mỗi $x \in X$.*

Ngoài ra ta còn giả thiết nửa dàn Δ-lồi địa phương X thỏa mãn điều kiện (H) sau đây (Horvath, 1991):

Điều kiện (H): $L = \{y \in X : K \cap U[y] \neq \emptyset\}$ là tập Δ-lồi với mọi tập con Δ-lồi K của X và $U \in \mathcal{U}$.

Định lý 1.9.1 *Giả sử X là tập con Δ-lồi, compắc khác rỗng của một nửa dàn Δ-lồi địa phương với các khoảng liên thông đường thỏa mãn điều kiện (H) và $F : X \to 2^X$ là ánh xạ nửa liên tục trên có giá trị Δ-lồi đóng khác rỗng. Khi đó F có điểm bất động, tức là tồn tại $x_0 \in X$ sao cho $x_0 \in F(x_0)$.*

Chương 2
Bất đẳng thức Ky Fan đa trị
và điểm cân bằng Nash đa trị

Các kết quả chính được trình bày trong các Mục 2.1, Mục 2.2, Mục 2.3, Mục 2.4, Mục 2.5 và Mục 2.6.

2.1 Bất đẳng thức Ky Fan đa trị

Định nghĩa 2.1.2 *Giả sử X là nửa dàn tôpô hoặc một tập con Δ-lồi của một nửa dàn tôpô, Y là một không gian véctơ tôpô, C là một nón lồi, đóng, nhọn trong Y với $intC \neq \emptyset$.*

1. *Ánh xạ $F : X \to 2^Y$ được gọi C-Δ-lồi nếu với mọi tập con hữu hạn khác rỗng $D = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset X$, với mọi $x \in \Delta(D)$ và $t_i \in (0,1)$, $\sum_{i=1}^n t_i = 1$,*

$$F(x) \subset \sum_{i=1}^{n} t_i F(x_i) - C.$$

2. *Ánh xạ đa trị $F : X \to 2^Y \setminus \{\emptyset\}$ được gọi là C-Δ-tựa lồi trên (tương ứng, dưới) nếu với mọi $x_1, x_2 \in X$ và $x \in \Delta(\{x_1, x_2\})$, ta có*

$$\begin{aligned} &\text{hoặc} \quad F(x_1) \subset F(x) + C, \\ &\text{hoặc} \quad F(x_2) \subset F(x) + C, \end{aligned}$$

$$(\text{t. ư., hoặc} \quad F(x) \subset F(x_1) - C \quad \text{hoặc} \quad F(x) \subset F(x_1) - C).$$

Nếu F là đơn trị, thì hai khái niệm ở trên trùng nhau và ta gọi F là C-Δ-tựa lồi.

Định nghĩa 2.1.3 *Giả sử X là không gian tôpô, Y là không gian véctơ tôpô với nón C, $D \subset X$, $F : D \to 2^Y$ là một ánh xạ đa trị. Miền xác định của F là tập $\{x \in D : F(x) \neq \emptyset\}$, ký hiệu là $domF$.*

1. F được gọi là C-liên tục trên (t. ư., dưới) tại $\bar{x} \in domF$ nếu với mọi lân cận V của điểm gốc trong Y đều tồn tại một lân cận U của $\bar{x}$ sao cho

$$F(x) \subset F(\bar{x}) + V + C \quad (\text{t. ư.,} \quad F(\bar{x}) \subset F(x) + V - C),$$

với mọi $x \in domF \cap U$.
2. Nếu F đồng thời là C-liên tục trên và C-liên tục dưới tại $\bar{x}$ *thì ta nói rằng nó là C-liên tục tại* $\bar{x}$*; và F là C-liên tục trên (t. ư., dưới) trên D nếu nó là C-liên tục trên (t. ư., dưới) tại mỗi điểm thuộc D.*
3. Nếu F là ánh xạ đơn trị, thì hai khái niệm C-liên tục trên và C-liên tục dưới tại $\bar{x}$ *trùng nhau và ta nói rằng F là C-liên tục tại* $\bar{x}$.

Định nghĩa 2.1.4 *Giả sử* X, Y *là hai không gian tôpô ;* $F : X \to 2^Y$ *gọi là có lát cắt dưới mở nếu* $F^{-1}(y) = \{x \in X : y \in F(x)\}$ *mở với mọi* $y \in Y$.

Định lý 2.1.1 *Giả sử K là tập con* Δ*-lồi compắc khác rỗng của nửa dàn tôpô M với các khoảng liên thông đường, Y là không gian véctơ tôpô,* $A : K \to 2^K$ *với giá trị* Δ*-lồi khác rỗng, C là nón lồi đóng nhọn trong Y có* $intC \neq \emptyset$, $f : K \times K \to 2^Y$*. Giả sử rằng:*

(1) A có lát cắt dưới mở và $B := \{x \in K : x \in A(x)\}$ *đóng;*

(2) $f(x, x) \cap -intC = \emptyset,\ \forall x \in K$;

(3) $\forall x \in K,\ f(x, .)$ *là C-*Δ*-tựa lồi trên;*

(4) $\forall y \in K,\ f(., y)$ *là* $-C$*-liên tục dưới.*

Khi đó tồn tại $x^* \in K$ *sao cho*

$$x^* \in A(x^*),\ \text{và } f(x^*, y) \cap -intC = \emptyset,\ \forall y \in A(x^*).$$

Định lý 2.1.2 *Giả sử K là tập con* Δ*-lồi compắc khác rỗng của nửa dàn tôpô M với các khoảng liên thông đường, Y là không gian véctơ tôpô,* $A : K \to 2^K$ *với giá trị* Δ*-lồi khác rỗng, C là nón lồi đóng nhọn trong Y có* $intC \neq \emptyset$, $f : K \times K \to 2^Y$*. Giả sử rằng:*

(1) A có lát cắt dưới mở và $B := \{x \in K : x \in A(x)\}$ *đóng;*

(2) $f(x, x) \not\subset -intC,\ \forall x \in K$;

(3) $\forall x \in K,\ f(x, .)$ *là C-*Δ*-tựa lồi dưới;*

(4) $\forall y \in K,\ f(., y)$ *là* $-C$*-liên tục trên với giá trị compắc.*

Khi đó tồn tại $x^* \in K$ *sao cho*

$$x^* \in A(x^*),\ \text{và } f(x^*, y) \not\subset -intC,\ \forall y \in A(x^*).$$

Định lý 2.1.3 *Giả sử K là tập con Δ-lồi compắc khác rỗng của nửa dàn tôpô M với các khoảng liên thông đường, Y là không gian véctơ tôpô, $A : K \to 2^K$ với giá trị Δ-lồi khác rỗng, C là nón lồi đóng nhọn trong Y có $intC \neq \emptyset$, $f : K \times K \to 2^Y$. Giả sử rằng:*

(1) A có lát cắt dưới mở và $B := \{x \in K : x \in A(x)\}$ đóng;

(2) $f(x, x) \subset C$, $\forall x \in K$;

(3) $\forall x \in K$, $f(x, .)$ là C-Δ-tựa lồi trên;

(4) $\forall y \in K$, $f(., y)$ là $-C$-liên tục dưới.

Khi đó tồn tại $x^* \in K$ sao cho

$$x^* \in A(x^*), \ \textit{và } f(x^*, y) \subset C, \ \forall y \in A(x^*).$$

Ta có thể trình bày ba định lý nêu trên theo một sơ đồ tổng quát hơn bằng cách xét "bài toán quan hệ biến phân" (Tiếng Anh: variational relation problem, viết tắt là (VR)) như sau: Giả sử X là một nửa dàn tôpô, $K \subset X$ là tập con Δ-lồi khác rỗng, $A : K \to 2^K$, R là một quan hệ giữa x và y. Ta xét bài toán sau:

$$\text{Tìm } \bar{x} \text{ sao cho } \bar{x} \in A(\bar{x}) \text{ và } R(\bar{x}, y) \text{ đúng với mọi } y \in A(\bar{x}).$$

Đặc biệt, bài toán quan hệ biến phân trong trường hợp bất đẳng thức Ky Fan suy rộng được mô tả như sau: Giả sử Y là không gian véctơ tôpô, C là nón lồi đóng nhọn trong Y có $intC \neq \emptyset$, $f : K \times K \to 2^Y$. Khi đó ta xác định quan hệ biến phân R như sau: $R(x, y)$ đúng khi và chỉ khi $f(x, y)\rho C$, trong đó $f(x, y)\rho C$ biểu diễn một trong các quan hệ sau đây:

$$f(x, y) \cap C \neq \emptyset, \quad f(x, y) \subset C,$$

$$f(x, y) \cap intC = \emptyset, \quad f(x, y) \not\subset -intC.$$

Khi đó (VR) trở thành: Tìm $\bar{x}$ sao cho $\bar{x} \in A(\bar{x})$ và $f(\bar{x}, y)\rho C$ với mọi $y \in A(\bar{x})$.

Định lý 2.1.4 *Giả sử X là một nửa dàn tôpô với các khoảng liên thông đường, $K \subset X$ là tập con Δ-lồi compắc khác rỗng, $A : K \to 2^K$ và R là một quan hệ giữa x và y thỏa mãn các điều kiện sau:*

(1) A có lát cắt dưới mở và $B := \{x \in K : x \in A(x)\}$ đóng;

(2) $R(x, x)$ đúng $\forall x \in K$;

(3) $\forall x \in K$, tập $\{y \in K : R(x,y)$ sai$\}$ là Δ-lồi;

(4) $\forall y \in K$, tập $\{x \in K : R(x,y)$ đúng$\}$ là đóng trong K.

Khi đó tồn tại $\bar{x}$ sao cho $\bar{x} \in A(\bar{x})$ và $R(\bar{x}, y)$ đúng với mọi $y \in A(\bar{x})$.

2.2 Định lý điểm bất động dạng Browder-Fan cho họ các ánh xạ

Kết quả chính của mục này là định lý sau.

Định lý 2.2.2 *Giả sử $\{X_i\}_{i\in I}$ là họ các tập Δ-lồi compắc, $X_i \subset M_i$, M_i là nửa dàn tôpô với các khoảng liên thông đường, $X = \prod_{i\in I} X_i$, và $\{T_i : X \to 2^{X_i}\}_{i\in I}$ là họ các ánh xạ thỏa mãn:*

(1) Mỗi T_i có giá trị Δ-lồi;

(2) Mỗi T_i có lát cắt dưới mở.

(3) Với mỗi $x \in X$, tồn tại $i \in I$ sao cho $T_i(x) \neq \emptyset$.

Khi đó tồn tại $x = (x_i)_{i\in I} \in X$ và $i \in I$ sao cho $x_i \in T_i(x)$.

2.3 Hệ bất đẳng thức dạng Ky Fan

Kết quả chính của mục này là định lý sau.

Định lý 2.3.1 *Giả sử I là một tập chỉ số bất kỳ. Với mỗi $i \in I$, giả sử Y_i là không gian véctơ tôpô và X_i là tập con Δ-lồi compắc của nửa dàn tôpô E_i với các khoảng liên thông đường, giả sử $F_i : X \times X_i \to 2^{Y_i}$ là ánh xạ đa trị với giá trị khác rỗng, và giả sử $D_i : X \to 2^{X_i}$ là ánh xạ đa trị sao cho $D_i(x)$ là Δ-lồi, khác rỗng với mọi $x \in X$. Với mỗi $i \in I$, giả sử C_i là nón lồi đóng nhọn trong Y_i với $intC_i \neq \emptyset$. Giả sử rằng:*

(1) Với mỗi $i \in I$, D_i có lát cắt dưới mở và $B_i := \{x \in X : x \in D_i(x)\}$ là đóng;

(2) Với mỗi $i \in I$, $F_i(x, x_i) \cap intC_i = \emptyset,\ \forall x = (x_{-i}, x_i) \in X$;

(3) Với mỗi $i \in I$, $\forall x \in X$, $F_i(x, .)$ là $-C_i$-Δ-tựa lõm;

(4) Với mỗi $i \in I$, $\forall y_i \in X_i$, $F_i(., y_i)$ là C_i-liên tục dưới.

Khi đó tồn tại $\bar{x} \in X$ sao cho với mỗi $i \in I$,

$$\bar{x}_i \in D_i(\bar{x}),\ F_i(\bar{x}, y_i) \cap intC_i = \emptyset,\ \forall y_i \in D_i(\bar{x}).$$

2.4 Điểm cân bằng Nash đa trị trong nửa dàn tôpô

Giả sử $(X_i, \leqslant_i), i \in I$ là một họ các nửa dàn tôpô và X, X_{-i} là các không gian tôpô với tôpô tích

$$X := \prod_{i \in I} X_i, \quad X_{-i} := \prod_{j \in I \setminus \{i\}} X_j.$$

Ta đưa vào X quan hệ thứ thứ tự bộ phận như sau: với $x, x' \in X := \prod_{i \in I} X_i$, ta xác định $x \leq x'$ khi và chỉ khi $x_i \leq_i x'_i$, khi đó $(X, \leqslant)$ là nửa dàn tôpô với $[\sup\{x, x'\}]_i = \sup\{x_i, x'_i\}$, $i \in I$.

Với mọi $x \in X$, ta viết $x = (x_{-i}, x_i)$, trong đó $x_i \in X_i,\ x_{-i} \in X_{-i}$.

Giả sử Y là không gian véctơ tôpô Hausdorff và với mỗi $i \in I$, $A_i : X \to 2^{X_i}$ là ràng buộc thứ i, $F_i : X \to 2^Y$ là hàm lợi ích thứ i.

Định nghĩa 2.4.1 *Phần tử $x^* \in X$ được gọi là điểm cân bằng Nash suy rộng của hệ trò chơi $\Gamma = (X_i, A_i, F_i)_{i \in I}$, nếu với mỗi $i \in I$,*

$$x_i^* \in A_i(x^*), \quad F_i(x_{-i}^*, u_i) \subset F_i(x_{-i}^*, x_i^*) + C, \quad \forall u_i \in A_i(x^*).$$

Chú ý 2.4.1 *Khi $Y = (-\infty, +\infty)$, $C = (-\infty, 0]$ và F_i là ánh xạ đơn trị, bao hàm thức trên quy về: Tìm $x^* \in X$ sao cho với mỗi $i \in I$,*

$$x_i^* \in A_i(x^*), \quad F_i(x_{-i}^*, x_i^*) \geq F_i(x_{-i}^*, u_i), \quad \forall u_i \in A_i(x^*).$$

Ta có định lý điểm cân bằng Nash cho ánh xạ đa trị với số người chơi vô hạn như sau.

Định lý 2.4.2 *Giả sử I là tập chỉ số bất kỳ và với mỗi $i \in I$, X_i là tập con Δ-lồi compắc khác rỗng của nửa dàn tôpô M_i với các khoảng liên thông đường,*

$$X := \prod_{i \in I} X_i, \quad X_{-i} := \prod_{j \in I \setminus \{i\}} X_j.$$

Với mỗi $i \in I$, $A_i : X \to 2^{X_i}$, $F_i : X \to 2^Y$, C là nón nhọn lồi đóng trong không gian véctơ tôpô lồi địa phương Y với $intC \neq \emptyset$. Giả sử rằng:

(1) $\forall i \in I$, A_i có lát cắt dưới mở và giá trị Δ-lồi khác rỗng;

(2) $\forall i \in I$, tập $B_i = \{x \in X : x_i \in A_i(x)\}$ là đóng;

(3) $\forall i \in I$, F_i là C-liên tục trên với giá trị đóng;

(4) $\forall i \in I$, $F_i(x_{-i}, u_i)$ là $-C$-liên tục dưới theo x_{-i};

(5) $\forall i \in I$, với mọi $x_{-i} \in X_{-i}$, hàm $F_i(x_{-i}, .)$ là C-Δ-tựa lồi trên.

Khi đó tồn tại $x^* \in X$ sao cho với mỗi $i \in I$,

$$x_i^* \in A_i(x^*), \quad F_i(x_{-i}^*, u_i) \subset F_i(x_{-i}^*, x_i^*) + C, \quad \forall u_i \in A_i(x^*).$$

2.5 Sự tồn tại điểm cân bằng Pareto

Giả sử I là tập chỉ số bất kỳ và với mỗi $i \in I$, X_i là không gian tôpô. Các tập X và X_{-i} vẫn dùng như mục trước. Giả sử I là tập hợp người chơi. Mỗi người chơi $i \in I$ có tập lựa chọn X_i, hàm ràng buộc $A_i : X_{-i} \to 2^{X_i}$, hàm lợi ích $F_i : X_{-i} \times X_i \to 2^{Z_i}$, trong đó Z_i là không gian véctơ tôpô Hausdorff, C_i là nón lồi đóng nhọn trong Z_i có $intC_i \neq \emptyset$ và $C_i \neq Z_i$. Trò chơi đa mục tiêu suy rộng có ràng buộc, thường viết tắt là GCMOG (theo tiếng Anh), $\Gamma = (X_i, A_i, F_i, C_i)_{i \in I}$ là họ các bộ bốn có thứ tự (X_i, A_i, F_i, C_i). Điểm $\hat{x} = (\hat{x}_{-i}, \hat{x}_i) \in X$ được gọi là điểm cân bằng Pareto (t. ư., Pareto yếu) của Γ nếu với mỗi $i \in I$, tồn tại $\hat{z}_i \in F(\hat{x}_{-i}, \hat{x}_i)$ sao cho

$$\hat{x}_i \in A_i(\hat{x}_{-i}), \quad z_i - \hat{z}_{-i} \notin -C_i \setminus \{0\}, \quad \forall z_i \in F_i(\hat{x}_{-i}, u_i),\ u_i \in A_i(\hat{x}_{-i})$$

$$(\text{t. ư.}, \hat{x}_i \in A_i(\hat{x}_{-i}),\ z_i - \hat{z}_{-i} \notin -intC_i,\ \forall z_i \in F_i(\hat{x}_{-i}, u_i),\ u_i \in A_i(\hat{x}_{-i})).$$

Vì $-intC_i \subset -C_i \setminus \{0\}$ với mỗi $x_{-i} \in X_{-i}$ nên dễ thấy mỗi điểm cân bằng Pareto của GCMOG cũng là điểm cân bằng Pareto yếu của GCMOG.

Định nghĩa 2.5.1 *Giả sử Z là không gian véctơ tôpô với thứ tự được sinh bởi nón lồi đóng nhọn C với $intC \neq \emptyset$ và A là tập con khác rỗng của Z.*

(i) Điểm $x \in A$ được gọi là điểm hữu hiệu lý tưởng của tập A đối với nón C nếu $y - x \in C$ với mọi $y \in A$.

(ii) Điểm $x \in A$ được gọi là điểm hữu hiệu Pareto (t. ư., điểm hữu hiệu yếu) của A đối với nón C nếu với mọi $y \in A$, $y - x \notin -C \setminus \{0\}$ (t. ư., $y - x \notin -intC$). Ta ký hiệu tập điểm hữu hiệu Pareto (t. ư., điểm hữu hiệu yếu) của A là $\min\limits_C(A)$ (t. ư., $\mathrm{w}\min\limits_C(A)$).

Định lý 2.5.1 *Giả sử I là tập chỉ số bất kỳ và với mỗi $i \in I$, X_i là tập con Δ-lồi compắc khác rỗng của nửa dàn tôpô M_i với các khoảng liên thông đường, Y_i là không gian véctơ tôpô lồi địa phương, C_i là nón lồi đóng nhọn trong Y_i với $intC_i \neq \emptyset$ và $C_i \neq Y_i$. Giả sử $\Gamma = (X_i, A_i, F_i, C_i)$ là trò chơi đa mục tiêu suy rộng có ràng buộc. Với mỗi $i \in I$, giả sử $A_i : X \to 2^{X_i}$, $F_i : X \to 2^{Y_i}$ thỏa mãn các điều kiện sau:*

(1) $\forall i \in I$, *A_i có lát cắt dưới mở và giá trị Δ-lồi khác rỗng;*

(2) $\forall i \in I$, *tập* $B_i = \{x \in X : x_i \in A_i(x_{-i})\}$ *là đóng;*

(3) $\forall i \in I$, *F_i là C_i-liên tục trên với giá trị compắc;*

(4) $\forall i \in I$, *$F_i(x_{-i}, u_i)$ là $-C_i$-liên tục dưới theo x_{-i};*

(5) $\forall i \in I$, *với mọi $x_{-i} \in X_{-i}$, hàm $F_i(x_{-i}, .)$ là C_i-Δ-tựa lồi trên.*

Khi đó tồn tại $x^* \in X$ sao cho với mỗi $i \in I$, tồn tại $z_i^* \in F(x^*)$ thỏa mãn

$$x_i^* \in A_i(x^*), \quad z_i - z_i^* \notin -C_i \setminus \{0\}, \quad \forall z_i \in F_i(x_{-i}^*, u_i),\ u_i \in A_i(x^*)$$

tức là, $x^* \in X$ là điểm cân bằng Pareto của GCMOG và vì vậy $x^* \in X$ là điểm cân bằng Pareto yếu của GCMOG.

Chương 3
Tính liên tục và liên thông của tập nghiệm

Trong chương này, chúng tôi sẽ trình bày tính ổn định của tập các điểm Ky Fan bằng cách chỉ ra sự tồn tại thành phần cốt yếu liên thông cực tiểu của tập nghiệm của bất đẳng thức Ky Fan đa trị. Kết quả chính được trình bày trong Mục 3.2.

3.1 Mở đầu

Sau đây là hệ quả của Định lý 2.1.2.

Định lý 3.1.1 *Giả sử K là tập con Δ-lồi compắc khác rỗng của nửa dàn tôpô M với các khoảng liên thông đường, Y là không gian véctơ tôpô, C là nón lồi đóng nhọn trong Y có $intC \neq \emptyset$, $f : K \times K \to 2^Y$. Giả sử rằng:*

(1) $f(x, x) \not\subset -intC,\ \forall x \in K$;

(2) $\forall x \in K$, *$f(x, .)$ là C-Δ-tựa lồi dưới;*

(3) $\forall y \in K$, *$f(., y)$ là $-C$-liên tục trên với giá trị compắc.*

Khi đó tồn tại $x^* \in K$ sao cho

$$f(x^*, y) \not\subset -intC,\ \forall y \in K.$$

Trong chương này, ta sẽ nghiên cứu tính ổn định của tập nghiệm (cũng gọi là tập điểm Ky Fan) của bất đẳng thức Ky Fan suy rộng nói trên, tức là tập

$$S(f) = \bigcap_{y \in X} \{x \in X : f(x, y) \not\subset -intC\}.$$

Như vậy, với mỗi hàm f cho trước, ta có một bài toán bất đẳng thức Ky Fan suy rộng ứng với nó và tập nghiệm của bài toán này phụ thuộc vào f và ký hiệu là $S(f)$, xem như một ánh xạ đa trị. Ta sẽ gọi f là dữ kiện của bài toán bất đẳng thức Ky Fan suy rộng nói trên. Và ta sẽ chứng minh tập nghiệm của bài toán này có ít nhất một thành phần liên thông cốt yếu.

Một cách tổng quát, giả sử (P, d) là không gian metric các dữ kiện của bài toán bất đẳng thức Ky Fan suy rộng và X là không gian các tập nghiệm $S(p)$ của bài toán, phụ thuộc vào dữ kiện $p \in P$. Khi đó $S : P \to 2^X$ được xác định và gọi là ánh xạ nghiệm.

Định nghĩa 3.1.1 *Nghiệm $x \in S(p)$ được gọi là điểm cốt yếu nếu với mọi lân cận mở $N(x)$ của x trong X, đều tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $p' \in P$ mà $d(p, p') < \delta$, $S(p') \cap N(x) \neq \emptyset$. Dữ kiện p được gọi là cốt yếu nếu mọi nghiệm của bài toán ứng với nó là cốt yếu.*

Định nghĩa 3.1.2 *Tập con đóng khác rỗng $e(p) \subset S(p)$ được gọi là tập cốt yếu của $S(p)$ nếu với mọi tập con mở O trong X sao cho $O \supset e(p)$, đều tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $p' \in P$ mà $d(p, p') < \delta$, $S(p') \cap O \neq \emptyset$.*

Giả sử $F : P \to 2^X$ là ánh xạ nửa liên tục trên với giá trị compắc khác rỗng. Với mỗi $p \in P$, thành phần liên thông của $x \in S(p)$ là hợp của các tập con liên thông của $S(p)$ chứa x. Các thành phần liên thông là các tập con đóng liên thông của $S(p)$ và do đó chúng đều compắc. Ta biết rằng các thành phần liên thông của hai phần tử khác nhau của $S(p)$ là rời nhau hoặc trùng nhau. Vì vậy, $S(p)$ phân tích thành hợp của tất cả các tập con liên thông compắc rời nhau đôi một, nghĩa là:

$$S(p) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} S_\alpha(p),$$

trong đó Λ là tập chỉ số, với mọi $\alpha \in \Lambda$, $S_\alpha(p)$ là tập con compắc liên thông khác rỗng của $S(p)$ và với mọi $\alpha, \beta \in \Lambda$ $(\alpha \neq \beta)$, $S_\alpha(p) \cap S_\beta(p) = \emptyset$.

Định nghĩa 3.1.3 *(1) Nếu thành phần $S_\alpha(p)$ của $S(p)$ là một tập cốt yếu thì $S_\alpha(p)$ được gọi là thành phần cốt yếu của $S(p)$;*

(2) Tập $m(p)$ được gọi là tập cốt yếu cực tiểu của $S(p)$ nếu $m(p)$ là phần tử

cực tiểu của họ tất cả các tập con cốt yếu của $S(p)$ được sắp thứ tự bộ phận theo quan hệ bao hàm.

3.2 Tính liên tục của tập các điểm Ky Fan

Bây giờ, giả sử X là tập con Δ-lồi compắc khác rỗng của nửa dàn tôpô E với các khoảng liên thông đường và Y là không gian Banach, C là nón lồi đóng nhọn trong Y có $intC \neq \emptyset$. Giả sử M là tập các hàm $f : X \times X \to 2^Y$ thỏa mãn:

(1) $f(x,x) \not\subset -intC$, $\forall x \in X$;

(2) $\forall x \in X$, $f(x,.)$ là C-Δ-lồi;

(3) $\forall y \in X$, $f(.,y)$ là $-C$-liên tục trên với giá trị compắc;

(4) $f(X \times X)$ là tập bị chặn.

Với mỗi $f, g \in M$, ta xác định

$$\rho(f,g) := \sup_{(x,y)\in X\times X} H(f(x,y), g(x,y)),$$

trong đó H là khoảng cách Hausdorff trên $K(Y)$ (không gian tất cả các tập con compắc khác rỗng của Y).

Bổ đề 3.2.1 *(M,ρ) là không gian metric đầy đủ.*

Với mỗi $f \in M$, ta ký hiệu $S(f)$ là tập các điểm Ky Fan của f. Khi đó S là ánh xạ đa trị từ M vào X và theo Định lý 3.1.1, ta có $S(f) \neq \emptyset$ với mỗi $f \in M$.

Bổ đề 3.2.2 *Ánh xạ $S : M \to 2^X$ là ánh xạ nửa liên tục trên với giá trị compắc khác rỗng.*

Bổ đề 3.2.3 *Với mỗi $f \in M$, tồn tại ít nhất một tập cốt yếu cực tiểu của $S(f)$.*

Định lý 3.2.1 *Với các giả thiết của Định lý 3.1.1, tồn tại ít nhất một tập cốt yếu cực tiểu của $S(f)$ và nó là liên thông.*

Định lý 3.2.2 *Trong những điều kiện của Định lý 3.1.1, với mỗi $f \in M$, có tồn tại ít nhất một thành phần cốt yếu của $S(f)$.*

KẾT LUẬN CỦA LUẬN ÁN

Luận án nghiên cứu Lý thuyết KKM trong các nửa dàn tôpô.

Những kết quả đã chứng minh được trong luận án

1. Mở rộng nguyên lý ánh xạ KKM trong nửa dàn tôpô và hệ quả là các định lý tương giao, điểm bất động cho ánh xạ đa trị.
2. Các định lý điểm trùng, bất đẳng thức minimax.
3. Dạng mở rộng đa trị của bất đẳng thức Ky Fan trong nửa dàn tôpô.
4. Định lý điểm bất động dạng Browder-Fan cho họ các ánh xạ và ứng dụng để nghiên cứu hệ các bất đẳng thức Ky Fan đa trị, điểm cân bằng Nash đa trị trong nửa dàn tôpô.
5. Sự tương đương giữa Nguyên lý ánh xạ KKM và định lý điểm bất động Browder-Fan.
6. Sự tồn tại nghiệm tối ưu Pareto của hệ trò chơi.
7. Tính liên tục và liên thông của tập các điểm Ky Fan.

LỜI CẢM ƠN

Luận án được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của thầy giáo, PGS. TSKH. Đỗ Hồng Tân. Tác giả xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc đến Thầy. Thầy đã truyền thụ kiến thức, từng bước định hướng nghiên cứu, giúp tác giả tiếp cận vấn đề một cách tự nhiên để từ đó có thể chủ động, tự tin trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu. Tấm gương nghiên cứu khoa học nghiêm túc và sự chỉ bảo ân cần của thầy Đỗ Hồng Tân đã giúp cho tác giả có ý thức trách nhiệm và quyết tâm cao khi hoàn thành luận án của mình.

Tác giả cũng xin bày tỏ lòng biết ơn tiến sĩ Charles D. Horvath, Đại học Perpignan (Pháp) đã cung cấp cho tác giả các công trình liên quan đến nửa dàn tôpô.

Tác giả xin chân thành cám ơn TS. Nguyễn Thị Thanh Hà, TS. Lê Anh Dũng, TS. Nguyễn Văn Khiêm đã động viên và góp nhiều ý kiến quý báu trong suốt thời gian tác giả tham gia Seminar "Một số vấn đề trong lý thuyết KKM và lý thuyết điểm bất động" do Bộ môn Giải tích, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội tổ chức.

Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn đến GS. TSKH. Nguyễn Xuân Tấn vì những chỉ dẫn tận tình và những ý kiến đóng góp quý báu của Thầy dành cho tác giả trong suốt thời gian học tập và nghiên cứu.

Tác giả xin chân thành cảm ơn GS. TSKH. Phạm Hữu Sách về những nhận xét xác đáng đối với dạng khởi thảo của luận án này.

Tác giả xin được nói lời cảm ơn chân thành tới Ban lãnh đạo Viện Toán học, Trung tâm Đào tạo Sau Đại học cùng toàn thể các thầy giáo, cô giáo, cán bộ và nhân viên của Viện Toán học đã tạo điều kiện và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian tác giả hoàn thành luận án của mình.

Tác giả xin được bày tỏ sự biết ơn đến Ban giám hiệu Trường Đại học Giao thông Vận tải Hà Nội, các Thầy Cô trong Bộ môn Toán giải tích, Khoa Khoa học cơ bản đã tạo mọi điều kiện thuận lợi để tác giả hoàn thành tốt nhiệm vụ học tập, nghiên cứu cũng như giảng dạy trong Nhà trường.

Xin gửi lời cảm ơn đặc biệt đến toàn thể bạn bè và người thân, những người đã động viên, giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận án này.

CÁC KẾT QUẢ CỦA LUẬN ÁN NÀY ĐÃ ĐƯỢC BÁO CÁO TẠI

- Xêmina Phòng Giải tích toán học, Viện Toán học.
- Xêmina Bộ môn Giải tích, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội.
- Hội nghị Nghiên cứu sinh hàng năm của Viện Toán học.

DANH MỤC CÔNG TRÌNH CỦA TÁC GIẢ CÓ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

1. NGUYEN THE VINH (2005), Matching theorems, fixed point theorems and minimax inequalities in topological ordered spaces, *Acta Math. Vietnam.*, 30(3), 211-224.

2. NGUYEN THE VINH (2008), Some generalized quasi-Ky Fan inequalities in topological ordered spaces, *Vietnam J. Math.*, 36(4), 437-449.

3. NGUYEN THE VINH (2009), Systems of generalized quasi-Ky Fan inequalities and Nash equilibrium points with set-valued maps in topological semilattices, *PanAmer. Math. J.*, 19(3), 79-92.

4. DO HONG TAN AND NGUYEN THE VINH (2010), Some further applications of KKM theorem in topological semilattices, *Preprint* 10/02, Hanoi Institute of Mathematics (submitted to Advances in Nonlinear Variational Inequalities).

5. NGUYEN THE VINH (2010), On essential components of the solution set of a generalized Ky Fan inequality, *Communications on Applied Nonlinear Analysis* 17(4), 89-100.