VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

VIỆN TOÁN HỌC

NGUYỄN HUY CHIÊU

MỘT SỐ VẤN ĐỀ VỀ PHÉP TÍNH VI PHÂN VÀ TÍCH PHÂN TRONG GIẢI TÍCH KHÔNG TRƠN VÀ LÝ THUYẾT TỐI ƯU

CHUYÊN NGÀNH: LÝ THUYẾT TỐI ƯU
MÃ SỐ: 62 46 20 01

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HÀ NỘI - 2011

Công trình này được hoàn thành tại Viện Toán học, Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam

Người hướng dẫn khoa học:

1. **GS. TSKH. Nguyễn Đông Yên**
2. **PGS. TS. Nguyễn Năng Tâm**

Phản biện 1: PGS. TS. Trương Xuân Đức Hà

Phản biện 2: GS. TS. Nguyễn Bường

Phản biện 3: PGS. TS. Huỳnh Thế Phùng

Luận án được bảo vệ tại Hội đồng chấm luận án cấp Viện
họp tại Hội trường Viện Toán học
vào hồi 8 giờ 30 ngày 07 tháng 04 năm 2011

Có thể tìm hiểu luận án tại: Thư viện Viện Toán học,
Thư Viện Quốc gia Việt Nam

Mở đầu

Hàm số không trơn và tập có biên không trơn xuất hiện thường xuyên và được biết đến từ lâu ở trong toán học và các khoa học ứng dụng. Vì lý thuyết vi phân cổ điển không còn phù hợp cho việc khảo sát các đối tượng đó nên các lý thuyết vi phân suy rộng đã được xây dựng.

Từ đầu thập niên 60, đã có nhiều nỗ lực nghiên cứu nhằm xây dựng một lý thuyết vi phân suy rộng cho các hàm xác định trên các không gian véctơ thực và nhận giá trị trong tập các số thực suy rộng để có thể phân tích thấu đáo các bài toán tối ưu với dữ liệu không trơn. Kết quả bước đầu của quá trình này là lý thuyết vi phân suy rộng cho các hàm lồi. Với những cống hiến quan trọng của R. T. Rockafellar và các nhà toán học khác, quy hoạch lồi - dựa trên giải tích lồi - đã trở thành một phần quan trọng và đẹp đẽ của lý thuyết tối ưu.

Năm 1973, F. H. Clarke đưa ra những khái niệm cơ bản dẫn đến lý thuyết vi phân suy rộng cho hàm số Lipschitz địa phương. Đây là một bước tiến quan trọng của giải tích không trơn. Lý thuyết này bao hàm được lý thuyết vi phân cổ điển và lý thuyết vi phân suy rộng cho hàm lồi Lipschitz địa phương. Cuối thập niên 70 đầu thập niên 80, lý thuyết vi phân suy rộng Clarke đã được R. T. Rockafellar, J.-B. Hiriart-Urruty, J.-P. Aubin và một số nhà toán học khác phát triển cho các hàm nhận giá trị thực suy rộng. Chỉ sau 10 năm (1973-1983), lý thuyết vi phân suy rộng Clarke đã đạt được nhiều thành tựu quan trọng cả về mặt lý thuyết cũng như về ứng dụng.

Trong nỗ lực để thu được các điều kiện cần cực trị của bài toán điều khiển tối ưu có tập ràng buộc điểm cuối được cho dưới dạng hình học, năm 1976 B. S. Mordukhovich đã đưa ra định nghĩa nón pháp tuyến và dưới vi phân qua giới hạn. Đây là mốc quan trọng đánh dấu sự ra đời của một lý thuyết vi phân suy rộng mới: lý thuyết vi phân suy rộng Mordukhovich. Giai đoạn 1993-1996, có nhiều kết quả quan trọng của lý thuyết này được công bố. Tiêu chuẩn Mordukhovich cho tính liên tục Aubin của các ánh xạ đa trị trở thành một công cụ hữu hiệu để nghiên cứu tính ổn định nghiệm của các phương trình suy rộng. Ngày nay lý thuyết vi phân suy rộng Mordukhovich vẫn tiếp tục phát triển và đóng một vai trò trung tâm trong giải tích đa trị và biến phân.

Năm 1965, R. J. Aumann định nghĩa tích phân của ánh xạ đa trị như là tập hợp các giá trị tích phân của các lát cắt khả tích của ánh xạ đa trị đó. Dưới vi phân của một hàm số là một ánh xạ đa trị đặc biệt, có vai trò tương tự như đạo hàm ở trong lý thuyết vi phân cổ điển. Trong lý thuyết tích phân Lebesgue, người ta đã chứng minh rằng nếu $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ là hàm số Lipschitz (hoặc, tổng quát hơn, là hàm liên tục tuyệt đối) xác định trên đoạn $[a, b] \subset \mathbb{R}$, thì công thức Newton-Leibniz $\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$ nghiệm đúng. Vấn đề được đặt ra ở đây là: *Vế phải của công thức này sẽ như thế nào nếu đạo hàm Fréchet $f'(\cdot)$ và tích phân Lebesgue tương ứng được thay bởi dưới vi phân Clarke $\partial^{Cl} f(\cdot)$ (hoặc dưới vi phân Mordukhovich $\partial f(\cdot)$) và tích phân Aumann?*

Phiếm hàm tích phân là một khái niệm cơ bản xuất hiện trong nhiều hướng nghiên cứu lý thuyết và ứng dụng toán học (như phương trình vi phân, bao hàm thức vi phân, giải tích hàm cơ sở, lý thuyết toán tử, quy hoạch toán học, bài toán biến phân, điều khiển tối ưu). Đó là hàm số có dạng

$$G(x) = \int_{\Omega} g(\omega, x) d\mu(\omega),$$

với g là một hàm số xác định trên $\Omega \times U$, U là một tập con mở của một không gian Banach và (Ω, μ) là một không gian có độ đo. Đối với lý thuyết tối ưu, việc khảo sát tính khả vi là một khâu quan trọng trong nhiều vấn đề như: tìm nghiệm tối ưu, nghiên cứu độ nhạy và các tính chất ổn định của nghiệm, phân tích sự hội tụ của các thuật toán,... Chính vì vậy, việc nghiên cứu các tính chất vi phân của phiếm hàm tích phân là một đề tài thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà toán học.

Để làm rõ hơn ý nghĩa của việc nghiên cứu các tính chất vi phân của phiếm hàm tích phân, chúng ta cần nhắc lại một kết quả cơ bản trong lý thuyết tối ưu, đó là *qui tắc nhân tử Lagrange*. Xét bài toán qui hoạch toán học

$$\text{(P)} \quad \min\{f(x) \mid x \in X,\ \ g_i(x) \le 0\ \ \forall i \in I,\ \ h_j(x) = 0\ \ \forall j \in J\},$$

ở đó X là không gian Banach, I và J là các tập hữu hạn các chỉ số, f, g_i, h_j là các hàm xác định trên X, nhận giá trị trong tập số thực suy rộng.

Qui tắc nhân tử Lagrange 1. *Nếu $\bar{x}$ là nghiệm địa phương của* (P) *và nếu f, g_i $(i \in I), h_j$ $(j \in J)$ là Lipschitz địa phương tại $\bar{x}$, thì tồn tại các nhân tử Lagrange $\lambda_0 \ge 0$, $\lambda_i \ge 0$ $(i \in I)$, $\mu_j \in \mathbb{R}$ $(j \in J)$ không đồng thời bằng 0 sao cho*

$$0 \in \lambda_0 \partial^{Cl} f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \lambda_i \partial^{Cl} g_i(\bar{x}) + \sum_{j \in J} \mu_j \partial^{Cl} h_j(\bar{x})$$

và $\lambda_i g_i(\bar{x}) = 0\ \ \forall i \in I$, ở đó ∂^{Cl} ký hiệu dưới vi phân Clarke. (Xem Chương 6, tr. 228, trong cuốn sách "Optimization and Nonsmooth Analysis", Wiley-Interscience, 1983, của F. H. Clarke).

Qui tắc nhân tử Lagrange 2. *Nếu X là không gian Asplund, $\bar{x}$ là nghiệm địa phương của* (P)*, và nếu f, g_i $(i \in I), h_j$ $(j \in J)$ là Lipschitz địa phương tại $\bar{x}$,* *thì tồn tại các nhân tử Lagrange* $\lambda_0 \geq 0$*,* $\lambda_i \geq 0$ $(i \in I)$*,* $\mu_j \in \mathbb{R}$ $(j \in J)$ *không đồng thời bằng 0 sao cho bao hàm thức*

$$0 \in \lambda_0 \partial f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \lambda_i \partial g_i(\bar{x}) + \sum_{j \in J} \partial(\mu_j h_j)(\bar{x}),$$

với ∂ *ký hiệu dưới vi phân Mordukhovich, và điều kiện* $\lambda_i g_i(\bar{x}) = 0 \quad \forall i \in I$*, được thoả mãn.* (Xem Chương 5, tr. 33, trong cuốn sách "Variational Analysis and Generalized Differentiation, Vol. II: Applications", Springer, 2006, của B. S. Mordukhovich).

Rõ ràng rằng, *khi một hoặc một số hàm xác định bài toán* (P) *là phiếm hàm tích phân thì chúng ta chỉ có thể sử dụng được qui tắc nhân tử Lagrange 1 (tương ứng, qui tắc nhân tử Lagrange 2) nếu ta biết cách tính toán chính xác hoặc ước lượng trên các dưới vi phân Clarke (tương ứng, dưới vi phân Mordukhovich) của các phiếm hàm tích phân.*

Bài toán ước lượng dưới vi phân Clarke của phiếm hàm tích phân đã được nghiên cứu ở Mục 2.7 trong cuốn sách "Optimization and Nonsmooth Analysis" (1983) của F. H. Clarke. Vấn đề được đặt ra tiếp theo là: *Tính toán hoặc ước lượng dưới vi phân Mordukhovich của* $G(\cdot)$. Trong trường hợp tổng quát, bài toán này cho đến nay vẫn chưa có lời giải.

Mục đích chính của luận án này là *khảo sát mối quan hệ giữa phép tính tích phân và phép tính vi phân trong giải tích không trơn và lý thuyết tối ưu* trên cơ sở nghiên cứu hai bài toán đặt ra ở trên. Việc nghiên cứu theo đề tài luận án được thực hiện bằng cách sử dụng một số kiến thức và kỹ thuật của lý thuyết tối ưu, giải tích hàm, giải tích không trơn, giải tích đa trị và biến phân.

Ngoài phần mở đầu, luận án gồm 4 chương, phần kết luận, và danh sách 63 tài liệu tham khảo.

Chương 1 nhắc lại một số khái niệm và tính chất cơ bản trong lý thuyết vi phân suy rộng và lý thuyết tích phân của các ánh xạ đa trị. Các kiến thức này là cơ sở cho việc khảo sát được trình bày ở những chương tiếp theo.

Chương 2 nghiên cứu bài toán tính toán hoặc ước lượng tích phân của các ánh xạ dưới vi phân. Mục 2.1 được dành cho tích phân của ánh xạ dưới vi phân Clarke. Mục 2.2 xét tích phân Aumann của ánh xạ dưới vi phân Mordukhovich.

Chương 3 nghiên cứu bài toán tính dưới vi phân Mordukhovich của phiếm hàm tích phân. Mục 3.1 khảo sát dưới vi phân Mordukhovich của tích phân bất định. Mục 3.2 giới thiệu các công thức tính dưới vi phân Fréchet và dưới vi phân Mordukhovich của các phiếm hàm tích phân trên $L_1(\Omega; E)$. Các kết quả đó dẫn đến một tiêu chuẩn tồn tại nghiệm địa phương của bài toán tối ưu không ràng buộc, với hàm mục tiêu là phiếm hàm tích phân.

Chương 4 nghiên cứu miền giá trị của ánh xạ dưới vi phân Fréchet. Mục 4.1 được dành cho trường hợp không gian Banach phản xạ, ở đây các đặc trưng của không gian phản xạ sẽ được đưa ra. Mục 4.2 khảo sát miền giá trị của ánh xạ dưới vi phân Fréchet cho trường hợp không gian Asplund. Mục 4.3 trình bày một số kết quả về sự tồn tại điểm dừng và sự tồn tại nghiệm của bài toán nhiễu của một bài toán tối ưu phi tuyến trong không gian vô hạn chiều dưới tác động của nhiễu tuyến tính.

Việc đánh số của các chương, mục, định lý, công thức,... trong bản tóm tắt này được giữ nguyên như ở trong luận án.

Chương 1

Các kiến thức chuẩn bị

Chương này trình bày một số khái niệm và tính chất cơ bản sẽ được sử dụng ở các chương tiếp theo.

1.1. Vi phân suy rộng

Cho $f : X \to \bar{\mathbb{R}} := [-\infty, +\infty]$ là một hàm trên không gian Banach thực X. Ta ký hiệu không gian đối ngẫu tôpô của X bởi X^* và cặp đối ngẫu giữa X^* và X bởi $\langle x^*, x\rangle$. Hình cầu đơn vị đóng trong không gian X và trong không gian đối ngẫu X^* được ký hiệu tương ứng bởi $\mathbb{B}_X$ và $\mathbb{B}_{X^*}$. Đối với ánh xạ đa trị $G\colon X \rightrightarrows X^*$, ký hiệu

$$\operatorname*{Lim\,sup}_{u\to x} G(x) := \Big\{ x^* \in X^* \;\Big|\; \exists u_k \to x,\ x_k^* \xrightarrow{w^*} x^*, \\ x_k^* \in G(u_k) \quad \forall k = 1, 2, \ldots \Big\}$$

được dùng để chỉ *giới hạn trên theo dãy theo nghĩa Painlevé-Kuratowski* trong tôpô sinh bởi chuẩn của X và tôpô yếu* (được ký hiệu bằng chữ w^*) của X^*. Các ký hiệu $u \xrightarrow{f} x$ đối với một hàm $f\colon X \to \bar{\mathbb{R}}$ và $u \xrightarrow{\Omega} x$ đối với một tập $\Omega \subset X$ tương ứng có nghĩa là $u \to x$ với $f(u) \to f(x)$ và $u \to x$ với $u \in \Omega$. Các ký hiệu $t \to t_0^+$ và $t \downarrow t_0$ tương ứng có nghĩa là $t \to t_0$ với $t > t_0$ và $t \to t_0$ với $t \geq t_0$.

Định nghĩa 1.1.1. Giả sử f là một hàm số Lipschitz địa phương tại $x \in X$. *Đạo hàm theo hướng Clarke* của f tại x theo hướng $v \in X$ được xác định bởi

$$f^0(x; v) := \limsup_{x' \to x,\ t \to 0^+} \frac{f(x' + tv) - f(x')}{t}.$$

Dưới vi phân Clarke của f tại x là tập hợp

$$\partial^{Cl} f(x) := \Big\{ \xi^* \in X^* \mid \langle \xi^*, v \rangle \leqslant f^0(x;v) \quad \forall v \in X \Big\}.$$

Đạo hàm theo hướng của f tại x theo hướng $v \in X$, ký hiệu là $f'(x;v)$, được xác định bởi

$$f'(x;v) := \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t},$$

nếu giới hạn ở vế phải tồn tại.

Định nghĩa 1.1.2. Cho f là một hàm số Lipschitz địa phương tại $x \in X$. Ta nói rằng f là *chính qui Clarke* tại x nếu với mọi $v \in X$ đạo hàm theo hướng $f'(x;v)$ tồn tại và $f'(x;v) = f^0(x;v)$.

Định nghĩa 1.1.3. Với mỗi $\varepsilon \geq 0$, *ε-dưới vi phân Fréchet* của f tại $x \in X$ mà $f(x) \in \mathbb{R}$ là tập hợp

$$\widehat{\partial}_\varepsilon f(x) := \Big\{ x^* \in X^* \,\Big|\, \liminf_{u \to x} \frac{f(u) - f(x) - \langle x^*, u - x \rangle}{\|u - x\|} \geq -\varepsilon \Big\}.$$

Nếu $|f(x)| = \infty$ thì đặt $\widehat{\partial}_\varepsilon f(x) = \emptyset$. Khi $\varepsilon = 0$, tập $\widehat{\partial}_0 f(x)$ được ký hiệu bởi $\widehat{\partial} f(x)$ và được gọi là *dưới vi phân Fréchet* của f tại x. Tập hợp

$$\partial f(x) := \operatorname*{Lim\,sup}_{\substack{u \xrightarrow{f} x \\ \varepsilon \downarrow 0}} \widehat{\partial}_\varepsilon f(u)$$

được gọi là *dưới vi phân Mordukhovich* (hay *dưới vi phân qua giới hạn*) của hàm f tại x.

Hàm chỉ của một tập $\Omega \subset X$ được cho bởi công thức $\delta(x;\Omega) = 0$ nếu $x \in \Omega$ và $\delta(x;\Omega) = +\infty$ nếu $x \in X \backslash \Omega$. *Nón pháp tuyến Fréchet* và *nón pháp tuyến qua giới hạn* (*nón pháp tuyến Mordukhovich*) của Ω tại $x \in X$ tương ứng được định nghĩa bởi $\widehat{N}(x;\Omega) := \widehat{\partial}\delta(x;\Omega)$ và $N(x;\Omega) := \partial\delta(x;\Omega)$.

Dưới vi phân Fenchel của f tại $x \in X$ với $f(x) \in \mathbb{R}$ là tập hợp

$$\partial^{Fen} f(x) := \{ x^* \in X^* \mid f(u) - f(x) \geq \langle x^*, u - x \rangle \;\; \forall u \in X \}.$$

Hàm số $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ được gọi là nửa *liên tục dưới tại điểm* $x \in X$ nếu $f(x) \leqslant \liminf_{u \to x} f(u)$, ở đây $\liminf_{u \to x} f(u) := \sup_{U \in \mathcal{N}(x)} \inf_{u \in U} f(u)$ với $\mathcal{N}(x)$ là họ tất cả các tập mở của X có chứa x. Ta nói f *nửa liên tục dưới địa phương tại* x nếu tồn tại $U \in \mathcal{N}(x)$ sao cho f nửa liên tục dưới tại mọi điểm $u \in U$.

Nếu tôpô sinh bởi chuẩn của X được thay bằng tôpô yếu của X thì tương ứng ta có các khái niệm *nửa liên tục dưới yếu tại một điểm* và *nửa liên tục dưới yếu địa phương* của các hàm số thực xác định trên X.

Không gian Banach X được gọi là *không gian Asplund* (hoặc *không gian có tính chất Asplund*) nếu mọi hàm lồi liên tục $f : U \to \mathbb{R}$ xác định trên một tập lồi mở $U \subset X$ là khả vi Fréchet trên một tập con trù mật của U.

1.2. Tích phân Aumann

Cho $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ là một không gian có độ đo $\sigma-$hữu hạn đầy đủ và $G : \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ là một ánh xạ đa trị từ Ω vào $\mathbb{R}^n$ có giá trị đóng khác rỗng. Ta nói rằng G là *đo được* nếu $G^{-1}(W) := \{\omega \in \Omega \mid G(\omega) \cap W \neq \emptyset\} \in \mathcal{A}$ với mọi tập mở $W \subset \mathbb{R}^n$; G là *giới nội khả tích* nếu tồn tại một hàm không âm $k(\cdot) \in L_1(\Omega)$ sao cho $G(\omega) \subset k(\omega)\mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}$ hầu khắp nơi trên Ω, ở đây $L_1(\Omega)$ là không gian các hàm khả tích từ Ω vào $\mathbb{R}$.

Đặt

$$\mathcal{G} = \Big\{ g \in L_1(\Omega; \mathbb{R}^n) \mid g(\omega) \in G(\omega) \quad \text{h.k.n. trên } \Omega \Big\}.$$

Định nghĩa 1.2.1. Tích phân của G trên Ω là tập hợp gồm tất cả các tích phân của các lát cắt khả tích của G :

$$\int\limits_{\Omega} G d\mu := \Big\{ \int\limits_{\Omega} g d\mu \mid g \in \mathcal{G} \Big\},$$

ở đây $\int\limits_{\Omega} g d\mu = \Big(\int\limits_{\Omega} g_1 d\mu, ..., \int\limits_{\Omega} g_n d\mu \Big)$ với mọi $g = (g_1, ..., g_n)$.

Chương 2

Tích phân của ánh xạ dưới vi phân

2.1. Tích phân của ánh xạ dưới vi phân Clarke

Mục này giới thiệu công thức biểu diễn tích phân Aumann-Gelfand của ánh xạ dưới vi phân Clarke, các điều kiện cần và đủ để tích phân này là đơn trị, và một dạng tương tự của công thức Newton-Leibniz cổ điển cho trường hợp tích phân đa trị. Công thức dạng Newton-Leibniz ở đây cho phép đưa ra một chứng minh mới cho kết quả đã biết về khả năng đặc trưng hàm số của ánh xạ dưới vi phân Clarke.

Định lý 2.1.1. *Cho X là một không gian Banach khả ly, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ là một không gian có độ đo, ở đây $\mathcal{A}$ là một σ-đại số chứa tất cả các tập mở của X. Giả sử $f : U \to \mathbb{R}$ là một hàm Lipschitz trên tập mở $U \subset X$ và $\Omega \subset U$ là một tập con đo được có $\mu(\Omega) < \infty$. Khi đó,*

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \partial^{Cl} f(x) d\mu(x) = \partial^{Cl} F(0) \\ &= \Big\{ x^* \in X^* \mid \langle x^*, v\rangle \leqslant \int_\Omega f^0(x; v) d\mu(x) \quad \forall\, v \in X \Big\}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

ở đó $F(v) := \int_\Omega f^0(x; v) d\mu(x)$.

Tích phân $\int_\Omega \partial^{Cl} f(x) d\mu(x)$ ở trong công thức (2.1) được hiểu là tích phân Aumann-Gelfand; nghĩa là $\xi^* \in \int_\Omega \partial^{Cl} f(x) d\mu(x)$ nếu và chỉ nếu $\xi^* \in X^*$ và tồn tại ánh xạ $x \mapsto \xi^*_x$ từ Ω vào X^* sao cho $\xi^*_x \in \partial^{Cl} f(x)$ hầu khắp nơi, và với mỗi $u \in X$, $\omega \mapsto \langle \xi^*_x, u\rangle$ là hàm số khả tích trên Ω và $\langle \xi^*, u\rangle = \int_\Omega \langle \xi^*_x, u\rangle d\mu(x)$.

Định nghĩa 2.1.1. Cho $f : X \to Y$ là một ánh xạ từ không gian Banach X vào không gian Banach Y.

(i) Ta nói rằng f *khả vi chặt Hadamard* tại $x_0 \in X$ nếu tồn tại một ánh xạ tuyến tính liên tục $D_s f(x_0) : X \to Y$ sao cho

$$\lim_{x \to x_0,\, t \to 0^+} t^{-1}(f(x + tv) - f(x)) = D_s f(x_0)(v)$$

và sự hội tụ là đều theo v trên mỗi tập con compact của X. Khi đó $D_s f(x_0)$ được gọi là *đạo hàm chặt Hadamard* của f tại x_0.

(ii) Nếu tồn tại một ánh xạ tuyến tính liên tục $f'(x_0) : X \to Y$ sao cho

$$\lim_{x, x' \overset{x \neq x'}{\longrightarrow} x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0,$$

thì ta nói f là *khả vi Fréchet* tại x_0. Khi đó $f'(x_0)$ được gọi là *đạo hàm Fréchet* của f tại x_0.

(iii) f được gọi là *khả vi chặt Fréchet* tại x_0 nếu tồn tại một ánh xạ tuyến tính liên tục $f'(x_0) : X \to Y$ sao cho

$$\lim_{x, x' \overset{x \neq x'}{\longrightarrow} x_0} \frac{\|f(x) - f(x') - f'(x_0)(x - x')\|}{\|x - x'\|} = 0.$$

Khi đó $f'(x_0)$ được gọi là *đạo hàm chặt Fréchet* của f tại x_0.

Nhận xét 2.1.1. Nếu f là khả vi chặt Fréchet tại x_0 thì f khả vi chặt Hadamard tại x_0 và $f'(x_0) = D_s f(x_0)$. Chiều ngược lại cũng đúng nếu X là không gian hữu hạn chiều.

Nếu X là một không gian hữu hạn chiều, thì chúng ta sử dụng thuật ngữ "khả vi chặt" thay cho các thuật ngữ "khả vi chặt Fréchet" và "khả vi chặt Hadamard".

Định lý 2.1.2. *Giả sử $f : U \to \mathbb{R}$ là một hàm Lipschitz xác định trên một tập mở U của $\mathbb{R}^n$, $\Omega \subset U$ là đo được và có độ đo Lebesgue $\mu(\Omega) < \infty$. Khi đó, các tính chất sau đây là tương đương:*

(i) $\int\limits_{\Omega} \partial^{Cl} f(x) d\mu(x)$ là tập hợp gồm một điểm;

(ii) với mỗi $v \in \mathbb{R}^n$, $\langle f'(x), v\rangle = f^0(x; v)$ hầu khắp nơi trên Ω;

(iii) f là chính qui Clarke hầu khắp nơi trên Ω;

(iv) f là khả vi chặt hầu khắp nơi trên Ω.

Nếu một trong các tính chất (i)-(iv) nghiệm đúng, thì

$$\int\limits_{\Omega} \partial^{Cl} f(x) d\mu(x) = \Big\{ \int\limits_{\Omega} f'(x) d\mu(x) \Big\}.$$

Kết quả tiếp theo là một dạng tương tự công thức Newton-Leibniz cổ điển $\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$. Chúng ta thu được ở đây cho trường hợp đạo hàm Fréchet $f'(x)$ và tích phân Lebesgue tương ứng được thay bằng dưới vi phân Clarke $\partial^{Cl} f(x)$ và tích phân Aumann.

Định lý 2.1.3. *Nếu $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$ là một hàm Lipschitz, thì*

$$f(b) - f(a) \in \int\limits_a^b \partial^{Cl} f(x) dx \tag{2.6}$$

và đẳng thức

$$\int\limits_a^b \partial^{Cl} f(x) dx = \Big\{ f(b) - f(a) \Big\}$$

nghiệm đúng khi và chỉ khi f là khả vi chặt hầu khắp nơi trên $[a, b]$.

Tập hợp ở vế phải của công thức (2.6) có thể chứa vô hạn phần tử.

Ví dụ 2.1.1. Giả sử $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ là tập tất cả các số hữu tỷ trong khoảng $(a, b) \subset \mathbb{R}$, $a < b$. Với mỗi $k \in \mathbb{N}$, lấy $\delta_k > 0$ sao cho $(r_k - \delta_k, r_k + \delta_k) \subset (a, b)$ và $\delta_k < 2^{-(k+3)}(b - a)$. Đặt $A = \cup_{k=1}^{\infty}(r_k - \delta_k, r_k + \delta_k)$ và $P = [a, b]\backslash A$. Vì A là một tập mở trong $\mathbb{R}$ nên P là một tập đóng và $A = \cup_{j=1}^{\infty}(a_j, b_j)$, với $\{(a_j, b_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ là một dãy các khoảng mở đôi một rời nhau. Xét hàm số $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ được cho bởi công thức

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{nếu} \quad x \in P, \\ (x - a_j)^2(x - b_j)^2 \sin \dfrac{1}{(b_j - a_j)(x - a_j)(x - b_j)} \quad \text{nếu } x \in (a_j, b_j). \end{cases}$$

Ta có f là Lipschitz trên $[a, b]$ và $\mathcal{I} := \int_a^b \partial^{Cl} f(t)dt$ là tập hợp quá đếm được.

Định lý 2.1.3 cho phép đưa ra một chứng minh mới cho một kết quả đã biết [Thibault L., Zagrodny D. (2005), "Enlarged inclusion of subdifferentials", *Canad. Math. Bull.*, **48**, pp. 283 - 301] về đặc trưng hàm số Lipschitz địa phương của dưới vi phân Clarke.

Định lý 2.1.4. *Giả sử X là một không gian Banach và $f, g : X \to \mathbb{R}$ là các hàm Lipschitz địa phương. Khi đó, nếu f là chính qui Clarke và $\partial^{Cl} g(x) \subset \partial^{Cl} f(x)$ với mọi $x \in X$, thì tồn tại $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x) = g(x) + \alpha$ với mọi $x \in X$.*

Nếu X là không gian hữu hạn chiều thì các giả thiết f là "chính qui Clarke" và "$\partial^{Cl} g(x) \subset \partial^{Cl} f(x)$ với mọi $x \in X$" ở Định lý 2.1.4 có thể giảm nhẹ được.

Định lý 2.1.5. *Giả sử $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là các hàm Lipschitz địa phương. Nếu f là chính qui Clarke và $\partial^{Cl} g(x) \subset \partial^{Cl} f(x)$ hầu khắp nơi trên $\mathbb{R}^n$, thì tồn tại $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x) = g(x) + \alpha$ với mọi $x \in \mathbb{R}^n$.*

2.2. Tích phân của ánh xạ dưới vi phân Mordukhovich

Định lý 2.2.1. *Giả sử $f : U \to \mathbb{R}$ là một hàm Lipschitz xác định trên một tập mở $U \subset \mathbb{R}^n$ và $\Omega \subset U$ là một tập con đo được có độ đo Lebesgue $\mu(\Omega) < \infty$. Khi đó,*

$$\int_\Omega \partial f(x) d\mu(x) = \Big\{ x^* \in \mathbb{R}^n \mid \langle x^*, v \rangle \leqslant \int_\Omega f^0(x; v) d\mu(x) \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \Big\}.$$

Ví dụ 2.2.1. Xét hàm số $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ở trong Ví dụ 2.1.1. Ta có

$$f^0(x; v) = \max_{\xi \in \partial^{Cl} f(x)} \langle \xi, v \rangle = \begin{cases} |v| & \text{nếu } x \in P \cap (a, b), \\ \{f'(x)v\} & \text{nếu } x \in A, \end{cases}$$

với mọi $v \in \mathbb{R}$. Theo Định lý 2.2.1,

$$\int_a^b \partial f(x) dx = \Big\{ x^* \in \mathbb{R} \mid \langle x^*, v \rangle \leqslant \mu(P)|v| \quad \forall v \in \mathbb{R} \Big\} = [-\mu(P), \mu(P)].$$

Hệ quả 2.2.1. *Nếu $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$ là một hàm Lipschitz, thì*

$$f(b) - f(a) \in \int_a^b \partial f(x)dx$$

và đẳng thức

$$\int_a^b \partial f(x)dx = \Big\{ f(b) - f(a) \Big\}$$

xảy ra khi và chỉ khi f là hàm khả vi chặt hầu khắp nơi trên $[a,b]$.

Chương 3

Dưới vi phân của phiếm hàm tích phân

Một số công thức tính dưới vi phân Fréchet và dưới vi phân Mordukhovich của các phiếm hàm tích phân được thiết lập. Các kết quả đó dẫn đến một tiêu chuẩn tồn tại nghiệm địa phương của bài toán tối ưu không ràng buộc với hàm mục tiêu là phiếm hàm tích phân.

3.1. Dưới vi phân của tích phân bất định

Kết quả chính của mục này là công thức tính dưới vi phân Mordukhovich của tích phân bất định

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \tag{3.1}$$

ở đó f là một hàm bị chặn cốt yếu trên đoạn $[a,b] \subset \mathbb{R}$ (nghĩa là f là đo được và tồn tại $M > 0$ sao cho $|f(x)| \leqslant M$ hầu khắp nơi trên $[a,b]$).

Ký hiệu $L_\infty[a,b]$ là tập gồm tất cả các hàm bị chặn cốt yếu trên $[a,b]$. Đặt

$$\begin{aligned}
f^+(x) &= \inf \Big\{ M \mid \exists\, \varepsilon > 0 \text{ sao cho } f(x') \leqslant M \text{ h.k.n. trên } [x-\varepsilon, x+\varepsilon] \Big\},\\
f^+_+(x) &= \inf \Big\{ M \mid \exists\, \varepsilon > 0 \text{ sao cho } f(x') \leqslant M \text{ h.k.n. trên } [x, x+\varepsilon] \Big\},\\
f^-(x) &= \sup \Big\{ M \mid \exists\, \varepsilon > 0 \text{ sao cho } f(x') \geqslant M \text{ h.k.n. trên } [x-\varepsilon, x+\varepsilon] \Big\},\\
f^-_-(x) &= \sup \Big\{ M \mid \exists\, \varepsilon > 0 \text{ sao cho } f(x') \geqslant M \text{ h.k.n. trên } [x-\varepsilon, x] \Big\}.
\end{aligned}$$

Dễ thấy rằng

$$f^-(x) \leqslant f^-_-(x) \leqslant f^+(x) \quad \text{và} \quad f^-(x) \leqslant f^+_+(x) \leqslant f^+(x).$$

Do đó,
$$\Big[f^-(x), f_+^+(x)\Big] \bigcup \Big[f_-^-(x), f^+(x)\Big] \subset \Big[f^-(x), f^+(x)\Big].$$

Định lý 3.1.2. *Giả sử* $f \in L_\infty[a,b]$, F *là hàm cho bởi công thức* (3.1), *và* $x \in (a,b)$. *Khi đó,*
$$\partial F(x) = \Big[f^-(x), f_+^+(x)\Big] \bigcup \Big[f_-^-(x), f^+(x)\Big]. \tag{3.2}$$

Sau đây là một số ví dụ minh họa việc tính dưới vi phân Mordukhovich $\partial F(x)$ bằng cách sử dụng công thức (3.2).

Ví dụ 3.1.1. Lấy E là một tập con đo được của $[0,1]$ có tính chất sau: giao của một khoảng mở khác rỗng bất kỳ của $[0,1]$ với E và với $[0,1]\backslash E$ đều có độ đo Lebesgue dương. Đặt $f(t) = 1$ nếu $t \in E$, $f(t) = 0$ nếu $t \in [0,1]\backslash E$. Xét hàm $F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$ $(x \in [0,1])$. Ta có $f \in L_\infty[0,1]$ và
$$f^+(x) = f_+^+(x) = 1 \text{ và } f^-(x) = f_-^-(x) = 0 \ \text{ với mọi } x \in (0,1).$$
Theo Định lý 3.1.2, $\partial F(x) = [0,1]$ với mọi $x \in (0,1)$.

Ví dụ 3.1.2. Lấy tập E như trong Ví dụ 3.1.1. Giả sử $x_0 \in E \cap (0,1)$ và $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ là hàm số cho bởi công thức
$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } t \in [x_0, 1] \bigcap E, \\ 0 & \text{nếu } t \in [x_0, 1]\backslash E, \\ 2 & \text{nếu } t \in [0, x_0) \bigcap E, \\ 3 & \text{nếu } t \in [0, x_0)\backslash E. \end{cases}$$
Đặt $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ $(x \in [0,1])$. Ta có $f \in L_\infty[0,1]$ và $f^+(x_0) = 3$, $f_+^+(x_0) = 1$, $f^-(x_0) = 0$, $f_-^-(x_0) = 2$. Theo Định lý 3.1.2,
$$\partial F(x_0) = \big[0,1\big] \cup \big[2,3\big].$$

Hệ quả 3.1.1. *Ngoài các giả thiết của Định lý 3.1.2, giả sử rằng* $\widehat{\partial} F(x) \neq \emptyset$. *Khi đó ta có*
$$\partial F(x) = \Big[f^-(x), f^+(x)\Big],$$
và do đó $\partial F(x) = \partial^{Cl} F(x)$.

Nhận xét 3.1.2. Từ Hệ quả 3.1.1 ta suy ra rằng nếu dưới vi phân Mordukhovich $\partial F(x)$ là một tập không lồi thì $\widehat{\partial} F(x) = \emptyset$.

Hệ quả 3.1.2. *Giả sử $\varphi : I \to \mathbb{R}$ là một hàm số Lipschitz địa phương trên một khoảng mở I của $\mathbb{R}$, $x \in I$, và $\widehat{\partial}\varphi(x) \neq \emptyset$. Khi đó $\partial\varphi(x) = \partial^{Cl}\varphi(x)$.*

Ký hiệu *dưới vi phân đối xứng* (symmetric subdifferential) của hàm số φ tại x bởi $\partial^0\varphi(x) := \partial\varphi(x) \cup [-\partial(-\varphi)(x)]$. Vì $\partial\varphi(x) \subset \partial^0\varphi(x) \subset \partial^{Cl}\varphi(x)$ và nếu φ là khả vi Fréchet tại x thì $\widehat{\partial}\varphi(x) = \{\varphi'(x)\} \neq \emptyset$, nên từ Hệ quả 3.1.2 ta thu lại được kết quả sau đây của J. M. Borwein và X. Wang [Borwein J. M., Wang X. (1997), "Distinct differentiable functions may share the same Clarke subdifferential at all points", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **125**, pp. 807 - 813].

Hệ quả 3.1.3. *Cho I là một khảng mở của $\mathbb{R}$ và $\varphi : I \to \mathbb{R}$ là một hàm khả vi và Lipschitz địa phương. Khi đó $\partial\varphi(x) = \partial^{Cl}\varphi(x) = \partial^0\varphi(x)$.*

3.2. Dưới vi phân của phiếm hàm tích phân trên không gian $L_1(\Omega; E)$

Cho $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ là một không gian có độ đo không nguyên tử $\sigma-$hữu hạn đầy đủ, E là một không gian Banach khả ly và $f : \Omega \times E \to \bar{\mathbb{R}}$ là một hàm $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(E)-$đo được.

Kết quả chính của mục này là các công thức tính chính xác dưới vi phân Fréchet và dưới vi phân Mordukhovich của phiếm hàm tích phân có dạng

$$F(u) = \int_\Omega f(\omega, u(\omega))d\mu(\omega) \quad (u \in L_1(\Omega; E)). \tag{3.16}$$

Định nghĩa 3.2.1. (i) Hàm $s : \Omega \to E$ được gọi là hàm đơn giản nếu nó có thể biểu diễn được dưới dạng

$$s = \sum_{i=1}^{m} c_i \chi_{A_i},$$

ở đây $m \in \mathbb{N}$, $c_i \in E$, $A_i \in \mathcal{A}$ $(i = 1, 2, ..., m)$ đôi một rời nhau, $\Omega = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$, $\chi_A(\omega) = 1$ nếu $\omega \in A$ và $\chi_A(\omega) = 0$ nếu $\omega \in X \backslash A$.

(ii) Hàm $u : \Omega \to E$ được gọi là đo được mạnh nếu tồn tại một dãy các hàm đơn giản $s_k : \Omega \to E$ sao cho

$$\lim_{k\to\infty} \|s_k(\omega) - u(\omega)\|_E = 0 \quad \text{h.k.n.}$$

(iii) Hàm đơn giản $s : \Omega \to E$ được gọi là khả tích Bochner nếu ta có thể biểu diễn nó dưới dạng

$$s = \sum_{i=1}^{m} c_i \chi_{A_i},$$

ở đây $m \in \mathbb{N}$, $c_i \in E$, $A_i \in \mathcal{A}$ $(i = 1, 2, ..., m)$ đôi một rời nhau, $\Omega = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$, $c_i = 0$ nếu $\mu(A_i) = \infty$. Với mỗi $A \in \mathcal{A}$, tích phân Bochner của s trên A được định nghĩa bởi công thức

$$\int_A s d\mu := \sum_{i=1}^{m} \mu(A \cap A_i) c_i,$$

ở đó $\mu(A \cap A_i)c_i := 0$ nếu $c_i = 0$ và $\mu(A \cap A_i) = \infty$.

(iv) Hàm đo được mạnh $u : \Omega \to E$ được gọi là khả tích Bochner nếu tồn tại một dãy các hàm đơn giản $s_k : \Omega \to E$ khả tích Bochner thoả mãn

$$\lim_{k\to\infty} \|s_k(\omega) - u(\omega)\|_E = 0 \quad \text{h.k.n.}$$

và

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \|s_k - u\| d\mu = 0.$$

Với $A \in \mathcal{A}$, tích phân Bochner của u trên A được định nghĩa bởi

$$\int_A u d\mu := \lim_{k\to\infty} \int_A s_k d\mu.$$

Ký hiệu bởi $L_1(\Omega; E)$ không gian tất cả các hàm $u : \Omega \to E$ khả tích Bochner trên Ω và được trang bị chuẩn $\|u\| := \int_\Omega \|u(\omega)\| d\mu$ với mọi $u \in L_1(\Omega; E)$.

Với mỗi $u \in L_1(\Omega; E)$, đặt

$$\begin{aligned} I_f(u) &= \textstyle\int_\Omega^* f(\omega, u(\omega)) d\mu \\ &:= \inf\Big\{ \textstyle\int_\Omega v(\omega) d\mu \mid v \in L_1(\Omega; \mathbb{R}), v(\omega) \geq f(\omega, u(\omega)) \quad \text{h.k.n.}\Big\}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Nếu $\omega \mapsto f(\omega, u(\omega))$ là một hàm khả tích trên Ω thì hiển nhiên $I_f(u) = F(u)$, ở đó $F(u)$ được cho bởi (3.16).

Hàm $v : \Omega \to E^*$ được gọi là *đo được yếu** nếu với mỗi $e \in E$, hàm số $\Omega \ni \omega \mapsto \langle v(\omega), e\rangle$ là đo được. Ký hiệu bởi $L^w_\infty(\Omega; E^*)$ không gian tất cả các hàm đo được yếu* $v : \Omega \to E^*$ sao cho hàm $\Omega \ni \omega \mapsto \|v(\omega)\|$ thuộc $L_\infty(\Omega; \mathbb{R})$. Không gian $L^w_\infty(\Omega; E^*)$ được trang bị chuẩn $\|v\|_{L^w_\infty(\Omega;E^*)} = \operatorname*{ess\,sup}_{\omega\in\Omega} \|v(\omega)\|$, ở đây $\operatorname*{ess\,sup}_{\omega\in\Omega} \|v(\omega)\| = \inf\{\alpha > 0 \mid \|v(\omega)\| < \alpha \quad \text{h.k.n.}\}$.

Kết quả sau đây được phát biểu và chứng minh trong cuốn sách của I. Fonseca và G. Leoni "*Modern Methods in the Calculus of Variations: L^p Spaces*", Vol. I, Springer, 2007. Tuy nhiên, chứng minh ở đó không chặt chẽ. Vì vậy, tác giả luận án đã đề xuất một chứng minh mới. (Chứng minh khá dài này đã được Giáo sư I. Fonseca và Giáo sư G. Leoni công nhận và đưa lên các trang web *http://www.math.cmu.edu/~ leoni/book1, http://www.math.cmu.edu/~ leoni /Typos.pdf, http://www.math.cmu.edu/~ leoni/notes.pdf* liên quan đến cuốn sách nói trên.)

Định lý 3.2.2. *Giả sử $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ là một không gian có độ đo $\sigma-$hữu hạn và E là một không gian Banach khả ly. Khi đó:*

(i) Nếu $T \in (L_1(\Omega; E))^*$ thì tồn tại duy nhất một phần tử $v \in L_\infty^w(\Omega; E^*)$ sao cho

$$T(u) = \int_\Omega \langle v(\omega), u(\omega)\rangle d\mu \tag{3.19}$$

với mọi $u \in L_1(\Omega; E)$. Hơn thế, $\|T\| = \|v\|_{L_\infty^w(\Omega;E^*)}$.

(ii) Mọi phiếm hàm T có dạng (3.19), ở đó $v \in L_\infty^w(\Omega; E^*)$, là phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $L_1(\Omega; E)$.

Mệnh đề sau đây đóng vai trò then chốt trong chứng minh Định lý 3.2.3 - kết quả chính của mục này.

Mệnh đề 3.2.1. *Giả sử $I_f(\cdot) : L_1(\Omega; E) \to \bar{\mathbb{R}}$ là hàm số được cho bởi công thức (3.18) và $x \in L_1(\Omega; E)$ thoả mãn $f(x) \in L_1(\Omega; \mathbb{R})$. Khi đó*

$$\begin{aligned}\widehat{\partial}_\varepsilon I_f(x) &= \Big\{x^* \in L_\infty^w(\Omega; E^*) \mid \inf_{e\in E} g_\varepsilon(\omega, e, x^*(\omega)) \geq 0 \quad h.k.n.\Big\}\\ &= \Big\{x^* \in L_\infty^w(\Omega; E^*) \mid I_f(u) - I_f(x) - \langle x^*, u - x\rangle\\ &\qquad\qquad \geq -\varepsilon\|u - x\| \quad \forall u \in L_1(\Omega; E)\Big\},\end{aligned}$$

với $g_\varepsilon(\omega, e, e^*) := f(\omega, e) - f(\omega, x(\omega)) - \langle e^*, e - x(\omega)\rangle + \varepsilon\|e - x(\omega)\|$, $\omega \in \Omega$, $e \in E$, $e^* \in E^*$, $\varepsilon \geq 0$.

Định lý 3.2.3. *Giả sử $f : \Omega \times E \to \bar{\mathbb{R}}$ là một hàm $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(E)-$đo được thoả mãn $f(u) \in L_1(\Omega; \mathbb{R})$ với mọi $u \in L_1(\Omega; E)$, và F là hàm số cho bởi công thức (3.16). Khi đó*

$$\begin{aligned}&\partial F(x) = \widehat{\partial} F(x) = \partial^{Fen} F(x)\\ &= \Big\{x^* \in L_\infty^w(\Omega; E^*) \mid \inf_{e\in E} g_0(\omega, e, x^*(\omega)) \geq 0 \quad h.k.n.\Big\},\end{aligned}$$

với $g_0(\omega, e, e^*) := f(\omega, e) - f(\omega, x(\omega)) - \langle e^*, e - x(\omega)\rangle$, $\omega \in \Omega$, $e \in E$, $e^* \in E^*$ và $x \in L_1(\Omega; E)$.

Hệ quả 3.2.1 *Ngoài các giả thiết của Định lý 3.2.3, nếu giả sử thêm rằng F khả vi Fréchet và Lipschitz địa phương tại x, thì ta có*

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k^* - F'(x)\| = 0 \ \textit{ khi } \ x_k^* \in \partial F(x_k) \textit{ mà } \lim_{k\to\infty} x_k = x.$$

Do đó, F là khả vi liên tục nếu F là khả vi Fréchet và Lipschitz địa phương.

Xét bài toán tối ưu

$$\text{(P)} \quad \min\{F(x) \mid x \in L_1(\Omega; E)\},$$

ở đây $F(x) = \int_\Omega f(\omega, x(\omega))d\mu(\omega)$ $(x \in L_1(\Omega; E))$ là một phiếm hàm tích phân thoả mãn các giả thiết của Định lý 3.2.3.

Hệ quả 3.2.2. *Điều kiện cần và đủ để x là một nghiệm địa phương của bài toán* (P) *là*

$$\min_{e\in E} f(\omega, e) = f(\omega, x(\omega)) \ \textit{ hầu khắp nơi.}$$

Chương 4

Miền giá trị của ánh xạ dưới vi phân

Trong chương này chúng ta nghiên cứu miền giá trị của ánh xạ dưới vi phân của hàm $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ chính thường nửa liên tục dưới và thoả mãn một điều kiện bức, ở đây X là một không gian Banach.

4.1. Trường hợp không gian Banach phản xạ

Định lý 4.1.1. *Cho X là một không gian Banach. Khi đó, các mệnh đề sau là tương đương:*

(i) *X là không gian phản xạ.*

(ii) *Với bất kỳ hàm chính thường nửa liên tục dưới yếu $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ thoả mãn điều kiện bức*

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{f(x)}{\|x\|} = +\infty, \tag{4.1}$$

ta có $\bigcup_{x\in X} \widehat{\partial} f(x) = X^*$.

(iii) *Với bất kỳ tập đóng yếu và bị chặn $\Omega \subset X$, ta có* $\bigcup_{x\in\Omega} \widehat{N}(x;\Omega) = X^*$.

4.2. Trường hợp không gian Asplund

Định lý 4.2.1. *Cho X là một không gian Asplund và $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là một hàm chính thường nửa liên tục dưới. Nếu f bị chặn dưới trên các tập bị chặn và điều kiện (4.1) đúng, thì tập hợp $\bigcup\limits_{x \in X} \widehat{\partial} f(x)$ là trù mật trong X^*.*

Ví dụ 4.2.1. Lấy $X = \ell_2$ và $e_n := (0, ..., 0, 1, 0, ...)$, ở đây phần tử đơn vị nằm ở vị trí thứ n. Xét hàm số $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ cho bởi công thức

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{n} + \dfrac{t}{2}\Big(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}\Big) & \text{nếu } x = (1-t)e_n + te_{n+1} \\ & (t \in [0,1)\ n = 1, 2, ...), \\ +\infty & \text{nếu } x \in X \setminus \Big[\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [e_n, e_{n+1})\Big], \end{cases}$$

ở đây $[e_n, e_{n+1}) := \big\{(1-t)e_n + te_{n+1} \mid t \in [0,1)\big\}$. Khi đó, các giả thiết của Định lý 4.2.1 được thoả mãn và $\bigcup\limits_{x \in X} \widehat{\partial} f(x) \neq X^*$.

Hệ quả 4.2.2. *Giả sử X là một không gian Asplund và Ω là một tập con khác rỗng, đóng và bị chặn của X. Khi đó tập $\bigcup\limits_{x \in \Omega} \widehat{N}(x; \Omega)$ là trù mật trong X^*.*

Ví dụ 4.2.2. Lấy $X = \ell_2$ và $e_n := (0, ..., 0, 1, 0, ...)$ là véctơ đơn vị thứ n. Đặt $\Omega = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [e_n, e_{n+1}]$, ở đây $[e_n, e_{n+1}] := \big\{e_n + t(e_{n+1} - e_n) \mid t \in [0,1]\big\}$. Ta có Ω là một tập con đóng khác rỗng bị chặn của X và $\bigcup\limits_{x \in \Omega} \widehat{N}(x; \Omega) \neq X^*$.

4.3. Một vài ứng dụng

Xét bài toán

$$(\mathrm{P}_0) \quad \min\{f(x) \,|\, x \in X\},$$

ở đó X là không gian Banach và $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là hàm nửa liên tục dưới.

Ta nói $\bar{x} \in X$ là điểm dừng của (P_0) nếu $0 \in \widehat{\partial} f(\bar{x})$.

Định lý 4.3.1. *Nếu X là không gian phản xạ, $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là hàm chính thường nửa liên tục dưới yếu, và điều kiện bức (4.1) được thoả mãn thì, với mọi $c \in X^*$, bài toán*

$$(\mathrm{P_c}) \quad \min\{f(x) + \langle c, x\rangle \,|\, x \in X\}$$

có tập các điểm dừng khác rỗng.

Mệnh đề 4.3.1. *Nếu X là không gian phản xạ, $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là hàm lồi chính thường nửa liên tục dưới, và điều kiện bức* (4.1) *được thoả mãn thì với mọi $c \in X^*$ bài toán* $(\mathrm{P_c})$ *có nghiệm.*

Nhận xét 4.3.1. Ta có thể xem $(\mathrm{P_c})$ là kết quả của việc làm "nhiễu tuyến tính" bài toán $(\mathrm{P_0})$ (tức là việc cộng thêm hàm tuyến tính $\langle c, x\rangle$ vào hàm mục tiêu $f(x)$ của $(\mathrm{P_0})$). Theo cách hiểu này, Định lý 4.3.1 là một khẳng định về sự tồn tại điểm dừng của bài toán nhiễu của $(\mathrm{P_0})$ dưới tác động của *mọi* nhiễu tuyến tính, còn Mệnh đề 4.3.1 là một điều kiện đủ cho sự tồn tại nghiệm bài toán nhiễu của một bài toán qui hoạch lồi dưới tác động của nhiễu tuyến tính.

Định lý 4.3.2. *Cho X là không gian Asplund, $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là hàm chính thường nửa liên tục dưới và bị chặn dưới ở trên mỗi tập con bị chặn của X. Nếu điều kiện bức* (4.1) *được thoả mãn, thì tồn tại một tập C trù mật trong X^* sao cho với mọi $c \in C$ bài toán* $(\mathrm{P_c})$ *có tập điểm dừng khác rỗng.*

Mệnh đề 4.3.2. *Cho X là không gian Asplund, $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là hàm lồi chính thường nửa liên tục dưới và bị chặn dưới ở trên mỗi tập con bị chặn của X. Nếu điều kiện bức* (4.1) *được thoả mãn, thì tồn tại một tập C trù mật trong X^* sao cho với mọi $c \in C$ bài toán* $(\mathrm{P_c})$ *có nghiệm.*

Kết luận

Các kết quả chính của luận án này bao gồm:

1. Công thức biểu diễn tích phân Aumann của ánh xạ dưới vi phân Clarke và của ánh xạ dưới vi phân Mordukhovich, các điều kiện cần và đủ để tích phân này là tập gồm một điểm.
2. Một dạng tương tự của công thức Newton-Leibniz cổ điển cho trường hợp tích phân đa trị. Chứng minh mới cho định lý đã biết về khả năng đặc trưng hàm số của ánh xạ dưới vi phân Clarke.
3. Công thức tính chính xác dưới vi phân Mordukhovich của tích phân bất định $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, với f là một hàm bị chặn cốt yếu.
4. Công thức tính chính xác dưới vi phân Mordukhovich của phiếm hàm tích phân $F(u) = \int_\Omega f(\omega, u(\omega))d\mu(\omega) \quad (u \in L_1(\Omega; E))$, với $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ là một không gian có độ đo không nguyên tử σ-hữu hạn đầy đủ, E là không gian Banach khả ly, và $f : \Omega \times E \to \bar{\mathbb{R}}$ là hàm $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(E)-$đo được. Công thức này kéo theo một tiêu chuẩn tồn tại nghiệm địa phương của bài toán tối ưu không ràng buộc, với hàm mục tiêu là phiếm hàm tích phân.
5. Một số đặc trưng của không gian Banach phản xạ thông qua tính chất tràn của ánh xạ dưới vi phân Fréchet. Điều kiện đủ để miền giá trị của ánh xạ dưới vi phân Fréchet trù mật trong X^* khi không gian nền X là Asplund.
6. Hai định lý về sự tồn tại điểm dừng của bài toán nhiễu của một bài toán tối ưu phi tuyến dưới tác động của nhiễu tuyến tính.
7. Hai mệnh đề về sự tồn tại nghiệm của bài toán nhiễu của một bài toán qui hoạch lồi dưới tác động của nhiễu tuyến tính.

Cùng với công thức Newton-Leibniz (đã được khảo sát ở Chương 2), hướng nghiên cứu chính của luận án có thể tiếp tục đối với công thức Green, công thức Gauss và các ứng dụng. Đối với bài toán tính toán hoặc đánh giá dưới vi phân của phiếm hàm tích phân (Chương 3 của luận án), ngoài các lớp hàm đã được xét, cần tiếp tục nghiên cứu tìm ra các công thức tính toán hoặc đánh giá dưới vi phân cho các lớp hàm khác và ứng dụng các công thức thu được vào việc khảo sát các bài toán tối ưu có liên quan đến phiếm hàm tích phân, đặc biệt là các bài toán điều khiển tối ưu.

Các kết quả của luận án này đã được báo cáo tại

• Xêmina phòng Giải tích số và Tính toán khoa học, Viện Toán học.

• The 4th Vietnam-Korea Workshop on Mathematical Optimization Theory and Applications, Ho Chi Minh City, February 18-20, 2004.

• Các hội thảo Tối ưu và Tính toán khoa học lần thứ 3 (Hà Nội, 20-24/4/2005), lần thứ 5 (Ba Vì, 16-19/5/2007), lần thứ 6 (Ba Vì, 23-26/4/2008).

• Đại hội Toán học Việt Nam lần thứ 7 (Qui Nhơn, 4-8/8/2008).

• Miniworkshop for Optimization (Department of Mathematics, National Cheng Kung University, Tainan, Taiwan, 14/1/2009).

• International Symposium on Optimization and Optimal Control (National Sun Yat-sen University, Kaohsiung, Taiwan, 2-6/2/2009).

Danh mục các công trình của tác giả có liên quan tới luận án

1. Nguyen Huy Chieu (2008), "Limiting subdifferentials of indefinite integrals", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **341**, pp. 247 - 258.

2. Nguyen Huy Chieu (2008), "Density of the range of the Fréchet subdifferential of a lower semicontinuous function in Asplund spaces", *Nonlinear Analysis Forum*, **13**, pp. 67 - 76.

3. Nguyen Huy Chieu (2009), "The Fréchet and limiting subdifferentials of integral functionals on the spaces $L_1(\Omega, E)$", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **360**, pp. 704 - 710.

4. Nguyen Huy Chieu (2010), "Integral of the Clarke subdifferential mapping and a generalized Newton-Leibniz formula", *Nonlinear Analysis*, **73**, pp. 614 - 621.