VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM
VIỆN TOÁN HỌC

****

LÊ XUÂN DŨNG

CHẶN TRÊN CHỈ SỐ CHÍNH QUY CASTELNUOVO-MUMFORD

Chuyên ngành: Đại số và Lý thuyết số
Mã số: 62.46.01.04

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

CÁN BỘ HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
GS. TSKH. Lê Tuấn Hoa

Hà Nội - 2013

MỞ ĐẦU

Chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford là một bất biến quan trọng trong đại số giao hoán và hình học đại số. Nó cung cấp nhiều thông tin về độ phức tạp của những cấu trúc đại số phân bậc. Chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford ra đời từ những công trình về đường cong xạ ảnh của G. Castelnuovo và được D. Mumford (1966) phát biểu định nghĩa đầu tiên cho đa tạp xạ ảnh.

Nếu E là môđun phân bậc hữu hạn sinh trên một đại số phân bậc chuẩn R thì chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford $\mathrm{reg}(E)$ của E được định nghĩa là số m nhỏ nhất sao cho $H^i_{R_+}(E)_n = 0$ với mọi $n \geq m - i + 1$ và $i \geq 0$, trong đó $H^i_{R_+}(E)$ là đối đồng điều địa phương của E với giá $R_+ = \oplus_{i>0} R_i$. Chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của E chặn trên bậc cực đại của một hệ sinh tối tiểu thuần nhất của E.

Cho $(A, \mathfrak{m})$ là vành địa phương, I là iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ và M là A-môđun hữu hạn sinh. Ký hiệu

$$G_I(M) := \bigoplus_{n \geq 0} I^n M / I^{n+1} M \text{ và } F_{\mathfrak{m}}(I) := \bigoplus_{n \geq 0} I^n / \mathfrak{m} I^n.$$

Người ta gọi $G_I(M)$ là môđun phân bậc liên kết của M ứng với I và $F_{\mathfrak{m}}(I)$ là nón phân thớ của I ứng với iđêan cực đại $\mathfrak{m}$. Việc nghiên cứu chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của $G_I(M)$ và $F_{\mathfrak{m}}(I)$ sẽ cho chúng ta biết nhiều thông tin về cấu trúc của M và I. Chẳng hạn sử dụng $\mathrm{reg}(G_I(M))$ ta có thể ước lượng được kiểu quan hệ (relation type), số mũ rút gọn và chỉ số chính quy Hilbert (postulation number) của M theo I, còn sử dụng $\mathrm{reg}(F_{\mathfrak{m}}(I))$ ta có thể biết được dáng điệu số phần tử sinh của I^n khi $n \gg 0$. Do đó mục đích của luận án là giải quyết hai bài toán sau:

BÀI TOÁN 1 *Chặn trên chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford cho môđun phân bậc liên kết.*

BÀI TOÁN 2 *Chặn trên chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford cho nón phân thớ.*

Năm 2003, Rossi-Trung-Valla giải quyết Bài toán 1 cho trường hợp $M = A$ và $I = \mathfrak{m}$. Sau đó, năm 2005 C. H. Linh giải quyết cho trường hợp tổng quát. Luận án tiếp tục theo 3 cách khác nhau: mở rộng kết quả của Rossi-Trung-Valla và C. H. Linh cho môđun lọc, chặn trên theo độ dài của môđun đối đồng điều địa phương và theo hệ số Hilbert. Trong trường hợp môđun M phân bậc, luận án thiết lập được chặn trên cho chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của môđun phân bậc liên kết theo $\mathrm{reg}(M)$. Đây không phải là những việc làm mang tính tổng quát hay tương tự hình thức. Nhờ việc nghiên cứu Bài toán 1 cho môđun lọc tùy ý, trong luận án đã giải quyết được Bài toán 2 (xem Chương 4). Việc chặn trên theo hệ số Hilbert và độ dài môđun đối đồng điều địa phương giúp xác định được mối quan hệ giữa các hệ số Hilbert (xem Chương 5).

Khái niệm I-lọc tốt $\mathbb{M} = \{M_n\}_{n \geq 0}$ của M được giới thiệu trong N. Bourbaki (1972) và Atiyah-Macdonald (1969). Chúng tôi chặn trên cho $\mathrm{reg}(G(\mathbb{M}))$ theo bậc mở rộng $D(I, M)$ của M ứng với I (xem Định lý 2.1.4). Kết quả của chúng tôi đạt được tổng quát hơn và nói chung tốt hơn một ít so với kết quả của C. H. Linh (2005).

Phương pháp chính để đạt được kết quả trên đã được đưa ra trong bài báo của Rossi-Trung-Valla (2003). Đóng góp của luận án là giải quyết một số kĩ thuật hỗ trợ khi xem xét môđun lọc tổng quát.

Cũng tiếp tục ý tưởng đó, trong Định lý 2.3.1 chúng tôi đưa ra một chặn nữa cho $\mathrm{reg}(G(\mathbb{M}))$ theo độ dài của môđun đối đồng điều địa phương của một số môđun thương của môđun M ban đầu.

Khi M là môđun phân bậc và I là iđêan thuần nhất, thay cho bậc mở rộng $D(I, M)$ chúng tôi sử dụng một đại lượng khác không chỉ nhỏ hơn mà còn dễ tính toán hơn đó là $\mathrm{reg}(M)$. Trong trường hợp tổng quát, ta không thể sử dụng được phương pháp của Rossi-Trung-Valla (2003), bởi vì I chưa chắc đã chứa phần tử thuần nhất để phần tử khởi đầu của nó là phần tử lọc chính quy trên $G(\mathbb{M})$. Để vượt qua được khó khăn này, chúng tôi địa phương hoá để đưa về trường hợp địa phương, rồi kết hợp với kết quả của Chardin-Hà-Hoa (2011), chúng tôi chặn được $\mathrm{reg}(G(\mathbb{M}))$ theo $\mathrm{reg}(M)$ (xem Định lý 2.2.5). Nếu I là iđêan thuần nhất sinh bởi các phần tử cùng bậc, ta có thể áp dụng được phương pháp của Rossi-Trung-Valla (2003). Khi đó ta nhận được chặn trên khác của $\mathrm{reg}(G(\mathbb{M}))$ theo $\mathrm{reg}(M)$ tốt hơn (xem Định lý 2.2.8) so với chặn trên trong Định lý 2.2.5 nêu ở trên.

Các hệ số Hilbert của môđun M ứng với iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ I là những bất biến thông dụng. Do đó chặn trên $\mathrm{reg}(G(\mathbb{M}))$ theo hệ số Hilbert là vấn đề được nhiều người quan tâm. Sử dụng kết quả của Brodmann-Sharp (1998) và V. Trivedi (1997), ta có thể suy ra được $\mathrm{reg}^1(G(\mathbb{M}))$ bị chặn theo các hệ số Hilbert $e_0(\mathbb{M}), ..., e_{d-1}(\mathbb{M})$, trong đó $\mathrm{reg}^1(G(\mathbb{M}))$ được gọi là chỉ số chính quy hình học của môđun phân bậc liên kết và được định nghĩa như sau: $\mathrm{reg}^1(G(\mathbb{M})) := \min\{m \mid H^i_{G_+}(G_I(M))_n = 0$ với mọi $n \geq m - i + 1$ và $i \geq 1\}$. Có ví dụ chỉ ra rằng các bất biến trên không đủ để chặn $\mathrm{reg}(G(\mathbb{M}))$. Do đó, phải sử dụng thêm $e_d(\mathbb{M})$ chúng tôi đưa ra được chặn trên cho $\mathrm{reg}(G(\mathbb{M}))$ (xem Định lý 3.1.7).

Chặn trong Định lý 3.1.7 nhìn chung là rất lớn, cỡ hàm mũ của $d!$. Vì vậy, vấn đề tiếp theo mà chúng tôi quan tâm là tìm chặn tốt hơn theo hệ số Hilbert cho $\mathrm{reg}(G(\mathbb{M}))$. Trong luận án chúng tôi xét trường hợp lọc I-adic và $\dim(M) = 1$. Sử dụng thêm b là số nguyên lớn nhất thỏa mãn $IM \subseteq \mathfrak{m}^b M$, Định lý 3.2.11 đưa ra được chặn trên thực sự tốt. Chúng tôi đã xây dựng được những ví dụ, chứng tỏ đấy là những chặn chặt. Không những thế chúng tôi cũng đặc trưng được khi nào chặn trong Định lý 3.2.11 đạt được. Nếu M là môđun Cohen-Macaulay, Định lý 3.2.14 đưa ra các đặc trưng thông qua mối liên hệ giữa $e_0(I.M)$ và $e_1(I, M)$, qua chuỗi Hilbert-Poincaré và tính Cohen-Macaulay của $G_I(M)$. Nếu M không là môđun Cohen-Macaulay thì chúng tôi cũng đặc trưng được thông qua chuỗi Hilbert-Poincaré (xem Định lý 3.2.16).

Như đã nói ở trên, việc chặn trên cho $\mathrm{reg}(G(\mathbb{M}))$ đối với môđun lọc tạo ra khả năng ứng dụng mới. Trong luận án này, chúng tôi áp dụng để giải quyết Bài toán 2. Sử dụng dãy khớp ngắn liên hệ giữa nón phân thớ và môđun phân bậc liên kết của các môđun lọc khác nhau của Rossi-Valla (2010), rồi áp dụng Định lý 4.2.3 và Định lý 4.2.4, chúng tôi chỉ ra rằng $\mathrm{reg}(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M}))$ được chặn trên theo bậc mở rộng $D(I, M)$ (xem Định lý 4.3.2).

Áp dụng tiếp theo của Bài toán 1 là nghiên cứu mối quan hệ giữa các hệ số Hilbert. Trong trường hợp vành và môđun Cohen-Macaulay, N. G. Northcott

(1960) và M. Narita (1963) chỉ ra rằng $e_1(I,A) \geq 0, e_2(I,A) \geq 0$. Sau đó, C. P. L Rhodes (1971) chứng tỏ những kết quả này vẫn còn đúng cho I-lọc tốt $\mathbb{M}$ của môđun M. Hơn nữa Kirby-Mehran (1982) chứng minh được $e_1(I,M) \leq \binom{e_0(I,M)}{2}$ và $e_2(I,M) \leq \binom{e_1(I,M)}{2}$. Sau đó, các kết quả trên tiếp tục được nghiên cứu bởi nhiều tác giả khác nhau. Tuy vậy, mối quan hệ giữa các hệ số Hilbert là rất ít. Năm 1997, Srinivas-Trivedi và V. Trivedi đạt được một kết quả hết sức ngạc nhiên là với M là môđun Cohen-Macaulay thì tất cả $|e_i(I,M)|, i \geq 1$ được chặn trên bởi một đại lượng chỉ phụ thuộc vào $e_0(I,M)$ và d. Các mối liên hệ trên sẽ thay đổi thế nào nếu M không phải môđun Cohen-Macaulay?

Dùng một bất biến mới gọi là bậc mở rộng $D(\mathfrak{m}, A)$, Rossi-Trung-Valla (2003) chặn trên tất cả $|e_i(\mathfrak{m}, A)|$. Sau đó C. H. Linh (2007) đã mở rộng cho trường hợp tổng quát. Tuy nhiên, các kết quả này không cho ta biết được mối quan hệ giữa các hệ số Hilbert. Do vậy, chúng tôi quan tâm đến bài toán sau:

BÀI TOÁN 3 *Cho M là môđun tùy ý trên vành địa phương A tùy ý. Tìm mối liên hệ giữa các hệ số Hilbert.*

Sử dụng chặn trên chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford theo hệ số Hilbert chúng tôi chỉ ra rằng $(-1)^{i-1}e_i(I,A)$ bị chặn trên theo một hàm chỉ phụ thuộc vào $e_0(I,A), ..., e_{i-1}(I,A)$ với mọi i (xem Định lý 5.2.1). Tuy nhiên, trong trường hợp $d = 2$ và $\operatorname{depth}(M) = 1$, Srinivas-Trivedi (1997) chỉ ra rằng $|e_i(I,A)|, i \geq 1$ không thể chặn được theo $e_0(I,A)$. Vì vậy, một câu hỏi tự nhiên được đặt ra là có bao nhiêu hệ số Hilbert chặn được các hệ số Hilbert còn lại?

Chúng tôi chỉ ra được các số $|e_{d-t+1}(\mathbb{M})|$, ..., $|e_d(\mathbb{M})|$ *bị chặn bởi một hàm chỉ phụ thuộc vào* $e_0(\mathbb{M})$, $e_1(\mathbb{M})$, ..., $e_{d-t}(\mathbb{M})$ *và số rút gọn* $r(\mathbb{M})$(xem Định lý 5.2.5). Từ kết quả này, cuối cùng chúng tôi suy ra được một kết quả về sự hữu hạn của hàm Hilbert-Samuel.

Bây giờ chúng tôi xin giới thiệu cấu trúc của luận án. Ngoài phần mở đầu, tài liệu tham khảo, luận án chia làm năm chương.

Chương 1 giới thiệu lại một số khái niệm và tính chất cơ bản về chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford, phần tử lọc chính quy, hệ số Hilbert và môđun lọc.

Chương 2 chia làm ba phần. Mục 2.1 đưa ra chặn trên cho $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M}))$ theo chiều bậc mở rộng $D(I,M)$ (Định lý 2.1.4). Khi M là môđun phân bậc, chặn trên $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M}))$ theo $\operatorname{reg}(M)$ được đưa ra ở Mục 2.2 (Định lý 2.2.5 và Định lý

2.2.8). Mục 2.3 thiết lập chặn trên $\mathrm{reg}(G(\mathbb{M}))$ theo độ dài của môđun đối đồng điều địa phương (Định lý 2.3.1).

Chương 3 chia làm hai phần. Mục 3.1 thiết lập chặn trên cho $\mathrm{reg}(G(\mathbb{M}))$ theo hệ số Hilbert (Định lý 3.1.7). Mục 3.2 xét trường hợp $\dim(M) = 1$, chặn trên thực sự tốt được đưa ra trong Mệnh đề 3.2.9 và Định lý 3.2.11. Cuối cùng Định lý 3.2.14 và Định lý 3.2.16 đưa ra một số đặc trưng khi đẳng thức trong Định lý 3.2.11 đạt được.

Chương 4 chia làm ba phần. Mục 4.1 giới thiệu lại khái niệm và một số tính chất cơ bản của nón phân thớ. Mục 4.2 đưa ra một chặn cho hệ số Hilbert của nón phân thớ (Định lý 4.2.4). Mục 4.3 là phần chính của chương, phần này thiết lập chặn trên cho $\mathrm{reg}(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M}))$ theo bậc mở rộng $D(I, M)$ (Định lý 4.3.2).

Chương 5 chia làm hai phần. Chặn trên môđun đối đồng điều địa phương theo $\mathrm{reg}(G(\mathbb{M}))$ được đưa ra ở Mục 5.1 (Mệnh đề 5.1.2 và Mệnh đề 5.1.4). Mục 5.2 đưa ra mối quan hệ của các hệ số Hilbert (Định lý 5.2.5). Cuối cùng Định lý 5.2.7 đưa ra một kết quả về sự hữu hạn của hàm Hilbert-Samuel.

Các kết quả của luận án được trình bày trong 03 bài báo, trong đó 01 bài đã đăng trên tạp chí quốc tế trong danh sách SCI, 01 bài được nhận đăng ở Acta Mathematica Vietnamica và 01 bài ở dạng tiền ấn phẩm.

CHƯƠNG 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1 CHỈ SỐ CHÍNH QUY CASTELNUOVO-MUMFORD

Trong chương này, chúng tôi nhắc lại một số kiến thức cơ sở và một số kết quả đã biết về chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford, phần tử lọc chính quy, hệ số Hilbert và môđun lọc. Trong luận án này, ta luôn xét $R = \oplus_{i\geq 0} R_i$ là đại số phân bậc chuẩn trên vành địa phương Artin R_0. Ta ký hiệu $R_+ = \oplus_{i>0} R_i$. Cho E là R-môđun phân bậc hữu hạn sinh chiều d. $H^i_{R_+}(E)$ kí hiệu môđun đối đồng điều địa phương của E với giá R_+.

ĐỊNH NGHĨA 1.1.1. (D. Mumford, 1966 hoặc Eisenbud-Goto, 1984) *Chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford* của E là số

$$\operatorname{reg}(E) := \max\{a_i(E) + i |\ i \geq 0\},$$

trong đó

$$a_i(E) = \begin{cases} \max\{n |\ H^i_{R_+}(E)_n \neq 0\} & \text{nếu } H^i_{R_+}(E) \neq 0, \\ -\infty & \text{nếu } H^i_{R_+}(E) = 0. \end{cases}$$

Một cách tổng quát hơn, với $0 \leq l \leq d$, chúng ta đặt

$$\operatorname{reg}^l(E) := \max\{a_i(E) + i |\ i \geq l\},$$

và gọi nó là *chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford tại bậc l của E.*

1.2 PHẦN TỬ LỌC CHÍNH QUY

ĐỊNH NGHĨA 1.2.2. (Xem Brodmann-Sharp, 1998) Phần tử thuần nhất $z \in R$ được gọi là phần tử *E-lọc chính quy* (lọc chính quy trên E) nếu $(0_E : z)_n = 0$ với

$n \gg 0$. Các phần tử thuần nhất $z_1, ..., z_n$ gọi là dãy lọc chính quy trên E nếu z_i là $E/(z_1, ..., z_{i-1}E)$-lọc chính quy với mọi $1 \leq i \leq n$.

1.3 HỆ SỐ HILBERT

Hàm Hilbert của E là một hàm $h_E : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ được xác định bởi

$$h_E(n) := \ell_{R_0}(E_n).$$

Hilbert đã chứng minh được rằng nếu E là R-môđun hữu hạn sinh có chiều $d \geq 1$ thì tồn tại một đa thức $p_E(x) \in \mathbb{Q}[x]$ có bậc $d-1$ sao cho $h_E(n) = p_E(n)$ với n đủ lớn. Đa thức $p_E(x)$ ở trên được gọi là *đa thức Hilbert* của E. Đa thức này được viết duy nhất dưới dạng:

$$p_E(x) = \sum_{i=0}^{d-1} (-1)^i e_i(E) \binom{x+d-i-1}{d-i-1}.$$

Ta gọi $e_0(E), ..., e_{d-1}(E)$ là *hệ số Hilbert* của E. Đây là các số nguyên trong đó có $e_0(E) > 0$.

1.4 MÔĐUN LỌC

ĐỊNH NGHĨA 1.4.1. Cho I là một iđêan thực sự của A. Một dãy các môđun con của M

$$\mathbb{M} : \ M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots \supseteq M_n \supseteq \cdots$$

được gọi là *I-lọc* của M nếu $IM_i \subseteq M_{i+1}$ với mọi i. Một I-lọc được gọi là một *I-lọc tốt* nếu $IM_i = M_{i+1}$ với $i \gg 0$. Môđun M có một I-lọc được gọi là *môđun lọc*.

ĐỊNH NGHĨA 1.4.5 *Môđun phân bậc liên kết* đối với lọc $\mathbb{M}$ được xác định bởi công thức

$$G(\mathbb{M}) := \bigoplus_{n \geq 0} M_n/M_{n+1}.$$

Đặc biệt, nếu $\mathbb{M}$ là $\{I^n M\}_{n \geq 0}$ thì ta viết $G_I(M) := G(\mathbb{M})$. Đôi khi ta cũng nói $G(\mathbb{M})$ là môđun phân bậc liên kết của môđun lọc M.

Ta gọi $H_{\mathbb{M}}(n) = \ell(M/M_{n+1})$ là hàm Hilbert-Samuel của M ứng với lọc $\mathbb{M}$. Từ tính chất $H_{\mathbb{M}}(n) = \ell(M/I^{n+1-r}M_r)$ với mọi $n \geq r$, hàm số này là một đa thức - gọi là đa thức Hilbert-Samuel và được kí hiệu bởi $P_{\mathbb{M}}(n)$ - với $n \gg 0$. Đa thức Hilbert-Samuel $P_{\mathbb{M}}(n)$ được viết duy nhất dưới dạng

$$P_{\mathbb{M}}(n) = \sum_{i=0}^{d} (-1)^i e_i(\mathbb{M}) \binom{n+d-i}{d-i}.$$

Các số nguyên $e_i(\mathbb{M})$ được gọi là *hệ số Hilbert* của $\mathbb{M}$. Khi $\mathbb{M} = \{I^n M\}_{n\geq 0}$, $H_{\mathbb{M}}(n)$, $P_{\mathbb{M}}(n)$ và $e_i(\mathbb{M})$ tương ứng thường được kí hiệu bởi $H_{I,M}(n)$, $P_{I,M}(n)$ và $e_i(I, M)$.

CHƯƠNG 2

CHẶN TRÊN THEO BẬC MỞ RỘNG VÀ ĐỘ DÀI CỦA MÔĐUN ĐỐI ĐỒNG ĐIỀU ĐỊA PHƯƠNG

Trong chương này, chúng tôi sẽ đưa ra một số chặn trên cho chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của môđun phân bậc liên kết $\mathrm{reg}(G(\mathbb{M}))$ theo bậc mở rộng hoặc theo độ dài của môđun đối đồng điều địa phương của một số môđun thương của môđun M ban đầu. Trường hợp M là môđun phân bậc chúng tôi thiết lập chặn cho $\mathrm{reg}(G(\mathbb{M}))$ theo $\mathrm{reg}(M)$.

2.1 CHẶN TRÊN THEO BẬC MỞ RỘNG

Trong luận án, nếu không nói gì khác ta luôn giả thiết A là vành Noether địa phương với trường thặng dư vô hạn $k := A/\mathfrak{m}$, M là A-môđun hữu hạn sinh và I là iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ.

Khái niệm bậc mở đầu tiên được Doering-Gunston-Vasconcelos (1998) và Vasconcelos (1998) đưa ra nhằm đo độ phức tạp về cấu trúc của môđun phân bậc. Sau đó, Rossi-Trung-Valla (2003) và C. H. Linh (2005) phát biểu cho trường hợp địa phương.

ĐỊNH NGHĨA 2.1.2. Ta xét một trong hai trường hợp sau:

(i) M là môđun hữu hạn sinh trên vành địa phương Noether $(A, \mathfrak{m})$ và I là iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ.

(ii) $M = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ là A-môđun phân bậc hữu hạn sinh và I là iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ thuần nhất của A, trong đó $A = \oplus_{n\geq 0} A_n$ là đại số phân bậc chuẩn

Noether trên vành địa phương Artin $(A_0, \mathfrak{m}_0)$ và $\mathfrak{m} := \mathfrak{m}_0 \oplus (\oplus_{n\geq 1} A_n)$ là iđêan cực đại thuần nhất của A.

Khi đó một bậc mở rộng $D(I, M)$ của M ứng với iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ I là một hàm số thoả mãn các tính chất sau:

(i) $D(I, M) = D(I, M/L) + \ell(L)$, trong đó $L := H^0_{\mathfrak{m}}(M)$.

(ii) $D(I, M) \geq D(I, M/xM)$ với mọi phần tử tổng quát $x \in I \setminus \mathfrak{m}I$ trên M.

(iii) $D(I, M) = e(I, M)$ nếu M là A-môđun Cohen-Macaulay, trong đó $e(I, M)$ là số bội của M ứng với I.

VÍ DỤ 2.1.3. Cho A là ảnh đồng cấu của một vành Gorenstein S chiều n và $M \in \mathcal{M}(A)$ với $\dim(M) = d$. Ta định nghĩa *bậc đồng điều* của M ứng với iđêan I, ký hiệu là $\operatorname{hdeg}(I, M)$, bằng quy nạp theo d như sau:

Khi $d = 0$ thì $\operatorname{hdeg}(I, M) := \ell(M)$.

Khi $d > 0$, vì $\dim \operatorname{Ext}_S^{s+i+1-d}(M, S) \leq d - i - 1$ nên ta đặt

$$\operatorname{hdeg}(I, M) := e(I, M) + \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d-1}{i} \operatorname{hdeg}(I, \operatorname{Ext}_S^{s+i+1-d}(M, S)). \tag{2.1}$$

Nếu A không là ảnh đồng cấu của vành Gorenstein thì ta đặt

$$\operatorname{hdeg}(I, M) := \operatorname{hdeg}(I, M \otimes_A \hat{A}),$$

trong đó $\hat{A}$ là ký hiệu vành $\mathfrak{m}$-adic đầy đủ của A. Khi đó Vasconcelos (1998) đã chứng minh được $\operatorname{hdeg}(I, M)$ là một bậc mở rộng của M ứng với iđêan I.

Đối với môđun lọc, kết quả của C. H. Linh 2005 được mở rộng như sau:

ĐỊNH LÝ 2.1.4 *Cho M là A-môđun hữu hạn sinh với $\dim(M) = d \geq 1$, $\mathbb{M} = \{M_n\}_{n\geq 0}$ là I-lọc tốt của M và $D(I, M)$ là một bậc mở rộng tuỳ ý của M ứng với I. Đặt $r := r_I(\mathbb{M})$. Khi đó*

(i) $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) \leq D(I, M) + r - 1$ nếu $d = 1$,

(ii) $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) \leq [D(I, M) + r + 1]^{3(d-1)!-1} - d$ nếu $d \geq 2$.

2.2 TRƯỜNG HỢP MÔĐUN PHÂN BẬC

Cho $A = \oplus_{n\geq 0} A_n$ là đại số phân bậc chuẩn Noether trên vành địa phương Artin $(A_0, \mathfrak{m}_0)$ với trường thặng dư $k := A_0/\mathfrak{m}_0$ vô hạn. Ta kí hiệu iđêan cực đại thuần nhất $\mathfrak{m} := \mathfrak{m}_0 \oplus (\oplus_{n\geq 1} A_n)$ của A. Cho $M = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ là A-môđun phân bậc hữu hạn sinh chiều d và $\mathbb{M} = \{\mathcal{M}_n\}_{n\geq 0}$ là I-lọc tốt bao gồm các môđun con thuần nhất của M, trong đó I là iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ thuần nhất của A.

Để cho gọn ta đặt $\operatorname{hdeg}(M) := \operatorname{hdeg}(\mathfrak{m}, M)$.

ĐỊNH LÝ 2.2.3. *Cho $\mathbb{M}$ là một I-lọc tốt của A-môđun phân bậc M chiều $d \geq 1$. Khi đó*

(i) $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) \leq \ell(A/I)\operatorname{hdeg}(M) + r(\mathbb{M}) - 1$ nếu $d = 1$,

(ii) $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) \leq [\ell(A/I)^d \operatorname{hdeg}(M) + r(\mathbb{M}) + 1]^{3(d-1)!-1} - d$ nếu $d \geq 2$.

Một hệ quả quan trọng của Định lý 2.2.3 là

HỆ QUẢ 2.2.4. *Giả sử I là một iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ thuần nhất của vành đa thức $A = k[x_1, ..., x_n]$ trên một trường k. Khi đó*

(i) $\operatorname{reg}(G_I(A)) \leq \ell(A/I) - 1$ *nếu* $d = 1$,

(ii) $\operatorname{reg}(G_I(A)) \leq (\ell(A/I) + 1)^{3(d-1)!-1} - d$ *nếu* $d \geq 2$.

Nếu M là môđun phân bậc tuỳ ý trên vành đa thức A thì ta có thể chặn $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M}))$ theo $\operatorname{reg}(M)$, $r(\mathbb{M})$ và một số bất biến khác của M như sau:

ĐỊNH LÝ 2.2.5. *Giả sử M là môđun phân bậc hữu hạn sinh chiều $d \geq 1$ trên vành đa thức $A = k[x_1, ..., x_n]$. Ký hiệu $i(M)$ là bậc khởi đầu của M (tức là $i(M) = \min\{p \mid M_p \neq 0\}$) và $\mu(M)$ là số phần tử của một hệ sinh tối tiểu của M. Khi đó*

(i) $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) \leq \ell(A/I)\mu(M)[\operatorname{reg}(M) - i(M) + 1]^n + r(\mathbb{M}) - 1$ nếu $d = 1$, (ii) $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) \leq [\ell(A/I)^d(\mu(M)(\operatorname{reg}(M) - i(M) + 1)^n)^{2^{(d-1)^2}} + r(\mathbb{M}) + 1]^{3(d-1)!-1} - d$ nếu $d \geq 2$.

Trong trường hợp iđêan I sinh bởi các phần tử thuần nhất cùng bậc ta có thể sử dụng phương pháp của Rossi-Trung-Valla để đạt được kết quả tốt hơn như sau:

ĐỊNH LÝ 2.2.8. *Giả sử I sinh bởi các phần tử thuần nhất có bậc $\Delta \geq 1$. Cho Q là một rút gọn thuần nhất tối tiểu của $I(A/\operatorname{Ann}(M))$. Cho $i(M)$ kí hiệu là bậc khởi đầu của M. Khi đó*

(i) $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) \leq \ell(M/QM) + r(\mathbb{M}) + \operatorname{reg}(M) - i(M) - 1$ nếu $d = 1$,

(ii) $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) \leq [\ell(M/QM) + r(\mathbb{M}) + \operatorname{reg}(M) - i(M) + (d-1)\Delta]^{3(d-1)!-1} - d$ nếu $d \geq 2$.

2.3 CHẶN TRÊN THEO ĐỘ DÀI CỦA MÔĐUN ĐỐI ĐỒNG ĐIỀU ĐỊA PHƯƠNG

Trong mục này, chúng tôi thiết lập chặn trên cho chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của $G(\mathbb{M})$ theo độ dài của môđun đối đồng điều địa phương của một số môđun thương của môđun M ban đầu. Với mỗi môđun hữu hạn sinh M ta đặt

$$h^0(M) := \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(M)).$$

Định lý sau tương tự như Định lý 2.1.4. Điểm mới trong định lý này là sử dụng độ dài của môđun đối đồng điều địa phương thay cho bậc mở rộng.

ĐỊNH LÝ 2.3.1. *Cho M là A-môđun hữu hạn sinh với $\dim(M) = d \geq 1$, $\mathbb{M} = \{M_n\}_{n\geq 0}$ là một I-lọc tốt của M và dãy các phần tử $x_1, ..., x_d \in I \setminus \mathfrak{m}I$ sao cho dãy các phần tử khởi đầu $x_1^*, ..., x_d^* \in G_I(A)$ là $G(\mathbb{M})$-dãy lọc chính quy. Đặt $B(I, M) := \ell(M/(x_1, ..., x_d)M)$ và*

$$\mu(I, M) := \max\{h^0(M/(x_1, ..., x_i)M) | 0 \leq i \leq d - 1\}.$$

Khi đó

(i) $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) \leq B(I, M) + \mu(I, M) + r(\mathbb{M}) - 1$ *nếu* $d = 1$,

(ii) $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) \leq [B(I, M) + \mu(I, M) + r(\mathbb{M}) + 1]^{3(d-1)!-1} - d$ *nếu* $d \geq 2$.

CHƯƠNG 3

CHẶN TRÊN THEO HỆ SỐ HILBERT

Mục đích chính của chương này là chặn trên cho chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của $G(\mathbb{M})$ theo hệ số Hilbert. Đặc biệt, khi môđun có chiều một, chúng tôi tìm ra được chặn trên chặt và đặc trưng khi nào chặn này đạt được.

3.1 TRƯỜNG HỢP TỔNG QUÁT

Sử dụng kết quả của Brodmann-Sharp (1998) và V. Trivedi (1997) ta suy ra $\operatorname{reg}^1(G(\mathbb{M}))$ được chặn bởi $e_0(\mathbb{M}), ..., e_{d-1}(\mathbb{M})$. Do đó nếu $\operatorname{depth}(M) > 0$ thì sẽ suy ra $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M}))$ được chặn trên theo $e_i(\mathbb{M})$, $i < d$. Tuy nhiên nếu $\operatorname{depth}(M) = 0$ thì các đại lượng $e_i(\mathbb{M})$, $i < d$, không đủ để chặn trên được $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M}))$.

Mục đính chính của mục này chỉ ra rằng nếu sử dụng thêm $e_d(\mathbb{M})$ chúng tôi có thể chặn được $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M}))$.

ĐỊNH LÝ 3.1.7. *Cho $\mathbb{M}$ là I-lọc tốt của môđun M chiều $d \geq 1$. Đặt $r'(\mathbb{M}) := \max\{1, r(\mathbb{M})\}$ và*

$$\xi(\mathbb{M}) := \max\{e_0(\mathbb{M}), |e_1(\mathbb{M})|, ..., |e_d(\mathbb{M})|\}.$$

Khi đó

$$\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) \leq (\xi(\mathbb{M}) + r'(\mathbb{M}))^{d!} + \xi(\mathbb{M})\binom{(\xi(\mathbb{M}) + r'(\mathbb{M}))^{d!} + d}{d} - 1.$$

3.2 Trường hợp chiều một

Chặn trên thiết lập trong trường hợp chiều một được nêu ra trong định lý sau:

ĐỊNH LÝ 3.2.11. *Cho M là môđun chiều một và b là số nguyên lớn nhất thỏa mãn $IM \subseteq \mathfrak{m}^b M$. Khi đó*

$$\operatorname{reg}(G_I(M)) \leq \binom{e_0 - b + 2}{2} - e_1 - 1.$$

Để xét xem khi nào dấu bằng xảy ra, chúng tôi xét hai trường hợp riêng rẽ trong hai định lý sau:

ĐỊNH LÝ 3.2.14. *Cho M là môđun Cohen-Macaulay chiều một và b là số nguyên thỏa mãn $IM \subseteq \mathfrak{m}^b M$. Khi đó các điều kiện sau là tương đương:*

(i) $\operatorname{reg}(G_I(M)) = \binom{e_0-b+2}{2} - e_1 - 1$;

(ii) $HP_{I,M}(z) = \frac{b+\sum_{i=1}^{e_0-b} z^i}{1-z}$;

(iii) $e_1 = \binom{e_0-b+1}{2}$;

(iv) $\operatorname{reg}(G_I(M)) = e_0 - b$ *và* $G_I(M)$ *là môđun Cohen-Macaulay.*

Hơn nữa, nếu một trong các điều kiện của định lý đúng thì $b = \max\{t \mid IM \subseteq m^t M\}$.

Có ví dụ chỉ ra rằng giả thiết $G_I(M)$ là môđun Cohen-Macaulay trong mệnh đề (iv) của định lý trên không thể bỏ đi được.

ĐỊNH LÝ 3.2.16. *Giả sử M là môđun chiều một và $\operatorname{depth}(M) = 0$. Cho b là một số nguyên dương thỏa mãn $IM \subseteq \mathfrak{m}^b M$. Khi đó các điều kiện sau là tương đương:*

(i) $\operatorname{reg}(G_I(M)) = \binom{e_0-b+2}{2} - e_1 - 1$;

(ii) $HP_{I,M}(z) = \frac{b+\sum_{i=1}^{e_0-b+1} z^i - z^{\binom{e_0-b+2}{2}-e_1}}{1-z}$.

Hơn nữa, nếu một trong các điều kiện của định lý đúng thì $b = \max\{t \mid IM \subseteq m^t M\}$.

Các ví dụ sau chỉ ra chặn trên trong Định lý 3.2.11 là chặn chặt.

VÍ DỤ 3.2.17. Cho $A = k[[x]]$ và $I = (x^\alpha)$. Khi đó, ta có $b = \alpha$ và $HP_{I,A}(z) = \frac{\alpha}{1-z}$. Vì vậy $e_0 = \alpha$ và $e_1 = 0$. Dẫn đến $e_1 = \binom{e_0-b+1}{2}$.

VÍ DỤ 3.2.18. Cho $A = k[[x,y]]/(x^s y^{u+v}, x^{s+1}y^u)$, trong đó $s, u, v \in \mathbb{N}$ và $v > 0$. Khi đó ta có $G_{\mathfrak{m}}(A) \cong k[x,y]/(x^s y^{u+v}, x^{s+1}y^u)$ và $b = 1$.Vì vậy ta suy ra được

$$HP_{\mathfrak{m},A}(z) = \frac{\sum_{i=0}^{s+u} z^i - z^{s+u+v}}{1-z}, e_0 = s+u, e_1 = \frac{(s+u)(s+u-1)}{2} - v,$$

và $\operatorname{reg}(G_{\mathfrak{m}}(A)) = s+u+v-1$. Các đẳng thức này chỉ ra rằng tất các điều kiện trong Định lý 3.2.16 đúng.

CHƯƠNG 4

CHẶN TRÊN TRONG TRƯỜNG HỢP NÓN PHÂN THỚ

Mục đích chính của chương này là đưa ra chặn trên cho hệ số Hilbert và cho chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của nón phân thớ theo bậc mở rộng.

4.1 NÓN PHÂN THỚ

ĐỊNH NGHĨA 4.1.1. (Xem Rossi-Valla, 2010) Cho $\mathfrak{q}$ là một iđêan tuỳ ý chứa I. *Nón phân thớ* của $\mathbb{M}$ ứng với $\mathfrak{q}$ được xác định bởi công thức

$$F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M}) := \oplus_{n\geq 0} M_n/\mathfrak{q}M_n.$$

Nếu $\mathbb{M}$ là lọc I-adic của A và $\mathfrak{q} = \mathfrak{m}$ thì đây là nón phân thớ cổ điển

$$F_{\mathfrak{m}}(I) = \oplus_{n\geq 0} I^n/\mathfrak{m}I^n$$

của I.

Chú ý rằng $F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M})$ là môđun phân bậc trên $G := G_I(A)$.

4.2 CHẶN TRÊN HỆ SỐ HILBERT CỦA NÓN PHÂN THỚ

Trong mục này, chúng tôi đưa ra một I-lọc mới

$$\mathfrak{q}M: \ M \supseteq \mathfrak{q}M \supseteq \mathfrak{q}M_1 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{q}M_n \supseteq \cdots .$$

Nếu $\mathbb{M}$ là một I-lọc tốt thì $\mathfrak{q}M$ cũng là một I-lọc tốt. Mối liên hệ giữa hệ số Hilbert của nón phân thớ với hệ số Hilbert của lọc $\mathbb{M}$ và $\mathfrak{q}M$ như sau:

BỔ ĐỀ 4.2.1. (Xem Rossi-Valla, 2010, tr. 80) *Cho M là A-môđun hữu hạn sinh với $\dim(M) = d \geq 1$, $\mathbb{M} = \{M_n\}_{n\geq 0}$ là một I-lọc tốt của M. Giả sử $I \subseteq \mathfrak{q}$ và $M_{n+1} \subseteq \mathfrak{q}M_n$ với mọi $n \geq 0$. Khi đó*

(i) $e_0(\mathbb{M}) = e_0(\mathfrak{q}M)$,

(ii) $e_{i-1}(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M})) = e_i(\mathbb{M}) + e_{i-1}(\mathbb{M}) - e_i(\mathfrak{q}M)$, *với mọi* $1 \leq i \leq d$.

Tiếp theo ta cần ước lượng được hệ số Hilbert của lọc $\mathbb{M}$ và trong trường hợp đặc biệt là lọc $\mathfrak{q}M$. Vấn đề này đã được Rossi-Trung-Valla (2003) giải quyết trong trường hợp $\mathfrak{m}$-adic của một vành và được C. H. Linh (2007) mở rộng cho môđun. Tuy nhiên, phép chứng minh của C. H. Linh (2007) có chỗ chưa hoàn chỉnh. Vì vậy, chúng tôi đưa ra phép chứng minh chi tiết của kết quả sau và kết quả này không chỉ tổng quát hơn mà nói chung tốt hơn kết quả của C. H. Linh (2007).

ĐỊNH LÝ 4.2.3. *Cho M là A-môđun hữu hạn sinh với $\dim(M) = d \geq 1$ và $\mathbb{M} = \{M_n\}_{n\geq 0}$ là I-lọc tốt của M và $D(I, M)$ là một bậc mở rộng tùy ý của M ứng với I. Khi đó*

(i) $e_0(\mathbb{M}) = e(I, M) \leq D(I, M)$,

(ii) $|e_1(\mathbb{M})| \leq (D(I, M) + r(\mathbb{M}) - 1)D(I, M)$,

(iii) $|e_i(\mathbb{M})| \leq (D(I, M) + r(\mathbb{M}) + 1)^{3i!-i+1}$ *nếu* $i \geq 2$.

Từ đó ta có thể chặn được hệ số Hilbert của nón phân thớ qua bậc mở rộng, chiều và số rút gọn.

ĐỊNH LÝ 4.2.4. *Với giả thiết như trong Bổ đề 4.2.1, ta có*

(i) $e_0(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M})) \leq 2D(I, M)(D(I, M) + r(\mathbb{M}))$,

(ii) $|e_i(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M}))| \leq 2(D(I, M) + r(\mathbb{M}) + 2)^{3(i+1)!-i}$ *nếu* $1 \leq i \leq d - 1$.

4.3 CHỈ SỐ CHÍNH QUY CASTELNUOVO-MUMFORD CỦA NÓN PHÂN THỚ

Kết quả chính của mục này chúng tôi đưa ra chặn trên chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của nón phân thớ theo $D(I, M)$. Phương pháp chứng minh của Rossi-Trung-Valla (2003) cho môđun phân bậc liên kết không áp dụng được cho nón phân thớ.

ĐỊNH LÝ 4.3.2. *Cho M là A-môđun hữu hạn sinh với $\dim(M) = d \geq 1$, $\mathbb{M} = \{M_n\}_{n\geq 0}$ là I-lọc tốt của M và $D(I,M)$ là một bậc mở rộng tùy ý của M ứng với I. Giả sử $I \subseteq \mathfrak{q}$ và $M_{n+1} \subseteq \mathfrak{q}M_n$ với mọi $n \geq 0$. Khi đó*

(i) $\operatorname{reg}(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M})) \leq 2D(I,M)(D(I,M) + r(\mathbb{M})) + r(\mathbb{M}) - 1$ *nếu* $d = 1$*;*

(ii) $\operatorname{reg}(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M})) \leq (D(I,M) + r(\mathbb{M}) + 2)^2 + D(I,M)^2 - 3$ *nếu* $d = 2$*;*

(iii) $\operatorname{reg}(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M})) \leq (D(I,M) + r(\mathbb{M}) + 2)^{3(d-1)!-1} - d$ *nếu* $d \geq 3$.

Như là một hệ quả trực tiếp từ định lý trên, ta nhận được chặn trên cho chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của nón phân thớ cổ điển của iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ.

HỆ QUẢ 4.3.3. *Cho I là một iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ của vành địa phương A với chiều d và $D(I,A)$ là một bậc mở rộng tùy ý của A ứng với I. Khi đó*

(i) $\operatorname{reg}(F_{\mathfrak{m}}(I)) \leq 2D(I,A)^2 - 1$ *nếu* $d = 1$*;*

(ii) $\operatorname{reg}(F_{\mathfrak{m}}(I)) \leq 2D(I,A)^2 + 4D(I,A) + 1$ *nếu* $d = 2$*;*

(iii) $\operatorname{reg}(F_{\mathfrak{m}}(I)) \leq (D(I,A) + 2)^{3(d-1)!-1} - d$ *nếu* $d \geq 3$.

Trong trường hợp phân bậc, ta có thể áp dụng phương pháp trong Chương 2, Mục 2.2 để chặn trên chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của $F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M})$. Ta thu được kết quả sau:

MỆNH ĐỀ 4.3.5. *Giả sử A là ảnh đồng cấu của đại số Gorenstein phân bậc, M là A-môđun phân bậc hữu hạn sinh với $\dim(M) = d \geq 1$, $I \subseteq \mathfrak{q}$ là iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ phân bậc của A, và $\mathbb{M} = \{\mathcal{M}_n\}_{n\geq 0}$ là một I-lọc tốt của các môđun con phân bậc của M sao cho $\mathcal{M}_{n+1} \subseteq \mathfrak{q}\mathcal{M}_n$ với mọi $n \geq 0$. Khi đó*

(i) $\operatorname{reg}(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M})) \leq 2\ell(A/I)\operatorname{hdeg}(I,M)(\ell(A/I)\operatorname{hdeg}(I,M) + r(\mathbb{M})) + r(\mathbb{M}) - 1$ *nếu* $d = 1$*;*

(ii) $\operatorname{reg}(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M})) \leq (\ell(A/I)^2\operatorname{hdeg}(I,M) + r(\mathbb{M}) + 2)^2 + \ell(A/I)^4\operatorname{hdeg}(I,M)^2 - 3$ *nếu* $d = 2$*;*

(iii) $\operatorname{reg}(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M})) \leq (\ell(A/I)^d\operatorname{hdeg}(I,M) + r(\mathbb{M}) + 2)^{3(d-1)!-1} - d$ *nếu* $d \geq 3$.

CHƯƠNG 5

SỰ PHỤ THUỘC CỦA CÁC HỆ SỐ HILBERT

Mục đích chính của chương này là đưa ra mối liên hệ giữa các hệ số Hilbert của môđun $G(\mathbb{M})$ biết độ sâu của môđun lọc.

5.1 CHẶN TRÊN ĐỘ DÀI CỦA MÔĐUN ĐỐI ĐỒNG ĐIỀU ĐỊA PHƯƠNG

Các kết quả chính của mục này.

MỆNH ĐỀ 5.1.2. *Giả sử M là A-môđun hữu hạn sinh với $\dim M = d \geq 1$ và $\mathbb{M} = \{M_n\}_{n\geq 0}$ là I-lọc tốt của M. Cho dãy các phần tử $x_1, ..., x_d \in I \setminus \mathfrak{m}I$ sao cho dãy các phần tử khởi đầu $x_1^*, ..., x_d^* \in G_I(A)$ là $G(\mathbb{M})$-dãy lọc chính quy và $d \geq 1$. Đặt $\mathbb{M}_i := \mathbb{M}/(x_1, ..., x_i)M$ và $M_{(i)} := M/(x_1, ..., x_i)M$, trong đó $\mathbb{M}_0 := \mathbb{M}$ và $M_{(0)} := M$. Khi đó với mọi $0 \leq i \leq d-1$, ta có*

$$h^0(M_{(i)}) \leq (i+1)\xi(\mathbb{M})(\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) + 2)^d.$$

MỆNH ĐỀ 5.1.4. *Với kí hiệu và giả thiết như trong Bổ đề 5.1.2, đặt $B := \ell(M/(x_1, x_2, ..., x_d)M)$. Khi đó*

$$B \leq (d+1)\xi(\mathbb{M})(\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) + 2)^d.$$

5.2 MỐI QUAN HỆ GIỮA CÁC HỆ SỐ HILBERT

Sử dụng chặn trên chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford theo hệ số Hilbert chúng tôi chỉ ra $(-1)^{i-1}e_i(I, A)$ bị chặn trên theo một hàm chỉ phụ thuộc vào

$e_0(I,A)$, ..., $e_{i-1}(I,A)$. Cụ thể như sau:

ĐỊNH LÝ 5.2.1. *Giả sử* M *là* A*-môđun hữu hạn sinh với* $\dim M = d \geq 1$ *và* $\mathbb{M} = \{M_n\}_{n\geq 0}$ *là* I*-lọc tốt của* M. *Khi đó*

(i) $e_1(\mathbb{M}) \leq \binom{e_0(\mathbb{M})}{2}$.

(ii) *Đặt* $\varsigma_{i-1} := \max\{e_0(\mathbb{M}), |e_1(\mathbb{M})|, ..., |e_{i-1}(\mathbb{M})|\}$ *và* $r' := \max\{1, r(\mathbb{M})\}$. *Với mọi* $i \geq 2$, *ta có*

$$(-1)^{i-1}e_i(\mathbb{M}) \leq \varsigma_{i-1}\binom{(\varsigma_{i-1}+r')^{i!}+i}{i}.$$

Sử dụng $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M}))$ có thể chặn trên các hệ số Hilbert của $\mathbb{M}$.

MỆNH ĐỀ 5.2.3. *Giả sử* M *là* A*-môđun hữu hạn sinh với* $\dim M = d \geq 1$ *và* $\mathbb{M} = \{M_n\}_{n\geq 0}$ *là* I*-lọc tốt của* M. *Cho* $l_1, \ldots, l_d \in I$ *sao cho các dạng khởi đầu* $l_1^*, \ldots, l_d^*$ *trong* $G_I(A)$ *là một dãy lọc chính quy trên* $G(\mathbb{M})$. *Đặt* $B := \ell(M/(l_1, ..., l_d)M)$. *Khi đó*

(a) *Với mọi* $1 \leq i \leq d-1$, $|e_i(\mathbb{M})| \leq B(\operatorname{reg}^1(G(\mathbb{M}))+1)^i$,

(b) $|e_d(\mathbb{M})| \leq B(d+1)(\operatorname{reg}(G(\mathbb{M}))+1)^d$.

Trong phần còn lại của mục này ta luôn sử dụng kí hiệu sau:

$$\xi_t(\mathbb{M}) := \max\{e_0(\mathbb{M}), |e_1(\mathbb{M})|, ..., |e_{d-t}(\mathbb{M})|\},$$

trong đó $0 \leq t \leq d$. Sử dụng Định lý 2.3.1, Định lý 3.1.7, các Mệnh đề 5.1.2, Mệnh đề 5.1.4 và Mệnh đề 5.2.3 ta chặn trên được $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M}))$ theo $\xi_t(\mathbb{M})$ (thay cho $\xi(\mathbb{M})$ trong Định lý 3.1.7).

ĐỊNH LÝ 5.2.4. *Cho* $\mathbb{M}$ *là một* I*-lọc tốt của* M *với* $\dim(M) = d \geq 1$. *Giả sử rằng* $\operatorname{depth}(M) = t$. *Khi đó*

$$\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) \leq [2(d+1)\xi_t(\mathbb{M})]^{3d!}[\xi_t(\mathbb{M}) + r(\mathbb{M}) + 4]^{3d!(d+1-t)!}.$$

Từ đó dẫn đến

ĐỊNH LÝ 5.2.5. *Cho* $\mathbb{M}$ *là một* I*-lọc tốt của* M. *Giả sử rằng* $\dim(M) \geq 1$ *và* $\operatorname{depth}(M) = t \geq 1$. *Khi đó* $|e_d(\mathbb{M})|, |e_{d-1}(\mathbb{M})|, ..., |e_{d-t+1}(\mathbb{M})|$ *được chặn bởi một hàm chỉ phụ thuộc vào* $e_0(\mathbb{M}), |e_1(\mathbb{M})|, ..., |e_{d-t}(\mathbb{M})|$ *và* $r(\mathbb{M})$. *Cụ thể là*

$$|e_j(\mathbb{M})| < [2(j+1)\xi_t(\mathbb{M})]^{3j!+2}[\xi_t(\mathbb{M}) + r(\mathbb{M}) + 4)]^{4j!(j+1-t)!}.$$

Nếu lọc $\mathbb{M} = \{I^n M\}_{n\geq 0}$ thì $r(\mathbb{M}) = 0$. Trong trường hợp M là môđun Cohen-Macaulay, như một hệ quả tức thì của Định lý 5.2.5 là một mở rộng kết quả của V. Trivedi (1997).

HỆ QUẢ 5.2.6. *Giả sử* $\dim(M) = d \geq 1$ *và* $\operatorname{depth}(M) = t \geq 1$. *Khi đó với mọi* $d - t + 1 \leq j \leq d$, *ta có*

$$|e_j(I, M)| \leq [2(j+1)\xi_t]^{3j!+2}(\xi_t + 4)^{4j!(j+1-t)!},$$

trong đó

$$\xi_t := \max\{e_0(I, M), |e_1(I, M)|, ..., |e_{d-t}(I, M)|\}.$$

Hay nói cách khác, $|e_j(I, M)|$ *với* $d - t + 1 \leq j \leq d$ *được chặn theo các đại lượng* $e_0(I, M)$, $e_1(I, M)$, ..., $e_{d-t}(I, M)$.

Tiếp theo chúng tôi đưa ra một kết quả về sự hữu hạn của hàm Hilbert-Samuel.

ĐỊNH LÝ 5.2.7. *Cho* $d \geq t \geq 0$, $e_0, ..., e_{d-t}$ *là các số nguyên. Khi đó chỉ tồn tại một số hữu hạn (nếu có) các hàm Hilbert-Samuel tương ứng với môđun* M *với chiều* d *và iđêan* I *là* $\mathfrak{m}$*-nguyên sơ sao cho* $\operatorname{depth}(M) = t$ *và* $e_j(I, M) = e_j$ *với mọi* $0 \leq j \leq d - t$.

Một ví dụ của Srinivas-Trivedi (1997), ta thấy rằng chúng ta không thể giảm bớt được số các hệ số Hilbert "độc lập" trong Định lý 5.2.5.

KẾT LUẬN

Tóm lại, trong luận án này chúng tôi đã thu được những kết quả sau đây:

- Thiết lập được ba loại chặn trên cho chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của môđun phân bậc liên kết của một lọc môđun tuỳ ý: theo bậc mở rộng; theo độ dài của môđun đối đồng điều địa phương và theo hệ số Hilbert. Trong trường hợp môđun M phân bậc, đưa ra được một chặn trên cho chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của môđun phân bậc liên kết theo $\mathrm{reg}(M)$. Trong trường hợp chiều một, thiết lập được chặn trên chặt theo hệ số Hilbert và đặc trưng được khi nào đẳng thức xảy ra.

- Thiết lập được một chặn trên cho chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của nón phân thớ của một lọc môđun tuỳ ý theo bậc mở rộng.

- Tìm ra được mối liên hệ giữa các hệ số Hilbert là: các số $|e_{d-t+1}(I, M)|$, ..., $|e_d(I, M)|$ bị chặn bởi một hàm chỉ phụ thuộc vào $e_0(I, M)$, $e_1(I, M)$, ..., $e_{d-t}(I, M)$, trong đó $t = \mathrm{depth}(M)$ và chỉ ra rằng tồn tại một số hữu hạn các hàm Hilbert-Samuel (nếu có) của môđun nếu cho trước chiều d, độ sâu $0 \le t \le d$ và $d - t$ hệ số Hilbert $e_0, ..., e_{d-t}$.

CÁC CÔNG TRÌNH LIÊN QUAN ĐẾN ĐỀ TÀI LUẬN ÁN

[1] L. X. Dung and L. T. Hoa, *Castelnuovo-Mumford regularity of associated graded modules and fiber cones of filtered modules*, Comm. Algebra. **40** (2012), 404-422.

[2] L. X. Dung and L. T. Hoa, *Dependence of Hilbert coefficients*, Preprint.

[3] L. X. Dung *Castelnuovo-Mumford regularity of associated graded modules in dimension one*, Acta Math. Vietnam (to appear).

CÁC KẾT QUẢ TRONG LUẬN ÁN ĐÃ ĐƯỢC BÁO CÁO TẠI:

1. Xemina của Phòng Đại số, Viện Toán học Hà Nội.
2. Xemina của bộ môn Đại số, Khoa Khoa học Tự nhiên, Đại Học Hồng Đức.
3. Hội nghị nghiên cứu sinh của Viện Toán học, 10/2009, 10/2010, 10/2011.
4. Hội nghị khoa học của trường Đại học Hồng Đức, 5/2010, 5/2012.
5. Đại hội toán học toàn quốc, Quy nhơn, 8/2008.
6. Hội nghị Đại số - Tô pô - Hình học, Huế, 9/2009 và Thái Nguyên, 11/2011.
7. Hội Thảo liên kết Nhật Bản-Việt Nam về Đại số giao hoán, Hà Nội, 01/2010 và Quy Nhơn, 12/2011.