

# Mở đầu

Năm 1987, Bak, Tang và Wiesenfeld đã đưa ra vấn đề đột biến tự tổ chức (Self Organization Criticality - SOC) trong vật lý: khi một hệ đang ở trạng thái ổn định (steady state, critical state) được nhiễu bằng một tác động nhỏ, thì hệ sẽ biến đổi đến một trạng thái ổn định mới. Tác động nhỏ này có thể gây nên những biến đổi lớn của hệ. Chẳng hạn như hiện tượng lở tuyết hay hiện tượng cát lở, chỉ cần sự chuyển động nhỏ mang tính địa phương của từng hạt (grain) có thể gây nên những biến đổi lớn toàn cục của cả núi tuyết hay các cột cát (sand piles). Đây là một trong những đặc trưng của hiện tượng SOC. Hiện tượng này thường xảy ra đối với các hệ vật lý trong tự nhiên và được các nhà Vật lý học trên mô hình hóa thành mô hình SPM (Sand Piles Model) của toán rời rạc. Từ đó có rất nhiều nghiên cứu về hiện tượng SOC và hệ SPM, có thể kể đến một số nghiên cứu tiêu biểu của D. Dhar(1990), C. Tang (1993), Goles và Kiwi (1993), Jacques Duran (1997), H.J. Jensen (1998). Hệ SPM đã được nghiên cứu trong nhiều lĩnh vực khác nhau với nhiều cách tiếp cận khác nhau, điển hình là các công trình của Dhar (1990) và sau đó Cori, Rossin (1998) nghiên cứu hệ SPM bằng cách tiếp cận đại số và liên hệ với cây bao trùm của đồ thị; Goles và Kiwi (1993) nghiên cứu các điểm dừng của hệ SPM. Đặc biệt, vào những năm 1990, Bjorner, Lovász và Shor đã nghiên cứu hệ động lực CFG - một mở rộng của hệ SPM - bằng cách tiếp cận của lý thuyết ngôn ngữ; N. Biggs (1993). Vào những năm 2001-2002, Morvan, Goles và Phan đã sử dụng cấu trúc dàn để chứng minh tính hội tụ. Sau đó Phan, Latapy và Lê (2007, 2009) đã sử dụng phương pháp cây hàm sinh nghiên cứu các mở rộng vô hạn của một số hệ cơ bản, tìm ra tính chất truy hồi của chúng và xây dựng một số thuật toán cũng như chương trình mô phỏng hệ.

Mục đích của luận án này là nghiên cứu các hệ theo hướng tiếp cận cấu trúc của không gian trạng thái. Sử dụng cấu trúc dàn để tìm hiểu về tính hội

tụ của các hệ mới, về các điểm đột biến của chúng; và sử dụng kỹ thuật đếm bằng phương pháp ECO (Enumeration of Combinatorial Objects) để tính toán lực lượng của hệ. Tìm hiểu mối quan hệ giữa các hệ CFG và mở rộng của nó với các hệ tin học nổi tiếng (mạng Petri), cho phép sử dụng các công cụ và phương pháp nghiên cứu của các hệ tin học vào việc nghiên cứu các hệ CFG. Sử dụng lý thuyết tập sắp thứ tự (order theory) để nghiên cứu cấu trúc thứ tự của không gian trạng thái của các hệ CFG mở rộng. Đặc biệt, chúng tôi còn tìm hiểu mối liên hệ giữa các hệ CFG mở rộng và lý thuyết luồng trong mạng để giải bài toán đạt được (reachability problem) của hệ CFG mở rộng. Bài toán đạt được là một bài toán quan trọng trong việc nghiên cứu các hệ. Một mặt nó cho biết các trạng thái nào có thể xảy ra, các trạng thái nào không bao giờ xảy ra. Mặt khác, nó cho ta biết mối quan hệ giữa các trạng thái, từ trạng thái nào được đến trạng thái nào. Trong trường hợp mạng Petri tổng quát, đây là bài toán mở. Chỉ có một số ít trường hợp giải được trong thời gian đa thức, còn nhiều trường hợp đã được chứng minh là NP đầy đủ. Trong luận án, chúng tôi đã xây dựng thuật toán giải bài toán đạt được của hệ CCFG trong thời gian  $O(|V|^3)$ , trong đó  $|V|$  là số đỉnh của đồ thị nền.

Luận án được chia làm 4 chương. Trong Chương 1, chúng tôi nhắc lại một số kiến thức cơ bản đã biết sẽ được sử dụng trong luận án như: lý thuyết tập sắp thứ tự, lý thuyết dàn, một số khái niệm liên quan đến lý thuyết đồ thị, phương pháp đếm bằng hàm sinh. Phần cuối chương này sẽ trình bày các khái niệm về hệ động rời rạc và một số bài toán liên quan.

Các kết quả mới của chúng tôi được trình bày trong các Chương 2, 3 và 4.

Trong Chương 2, chúng tôi nghiên cứu hệ Brylawsky mở rộng bằng cách thêm ngưỡng vào các luật vận động. Chúng tôi mở rộng các kết quả của Latapy, Le, Phan (2007, 2009) theo hai cách tiếp cận khác nhau: phương pháp hệ động lực rời rạc và phương pháp ECO bằng cách nghiên cứu các phân hoạch  $d$ -chặt của số tự nhiên, một mở rộng của phân hoạch số tự nhiên.

Theo cách tiếp cận của hệ động lực rời rạc, chúng tôi chứng minh được cấu trúc dàn của tập  $d\mathcal{P}(n)$  các phân hoạch  $d$ -chặt của số tự nhiên  $n$  cũng như mở rộng vô hạn  $d\mathcal{P}(\infty)$  của tập này. Theo cách tiếp cận bằng phương pháp ECO, chúng tôi chứng minh được cấu trúc đệ quy của cây sinh  $T_{d\mathcal{P}(\infty)}$ , là một cây bao trùm của dàn vô hạn  $d\mathcal{P}(\infty)$ . Từ đó, bằng cách sử dụng kỹ thuật dán nhãn trên cây vô hạn, chúng tôi chứng minh được một số đẳng thức tổ hợp.

Chương 3 nghiên cứu về mối quan hệ giữa các hệ CFG và mạng Petri. Trong phần đầu chương 3, chúng tôi nhắc lại các kết quả đã biết về hệ động lực CFG và các mở rộng của nó. Tiếp theo chúng tôi chứng minh song ánh giữa các hệ CFG và một số mạng Petri đặc biệt.

Chương 4 dành cho việc nghiên cứu cấu trúc không gian trạng thái và bài toán đạt được của hệ động lực CFG tương tranh (Conflicting Chip Firing Game - CCFG) - một mở rộng của hệ động lực CFG. Phần đầu chương này chúng tôi nhắc lại bài toán đạt được của một số mạng Petri đặc biệt. Phần tiếp theo, chúng tôi nghiên cứu cấu trúc thứ tự của không gian trạng thái của hệ CCFG trên đồ thị có hướng không chu trình. Chúng tôi đưa ra khái niệm họ năng lượng của các trạng thái của hệ để đặc trưng cho thứ tự của không gian trạng thái và chúng tôi xây dựng thuật toán để xác định thứ tự này. Phần cuối chương này, chúng tôi nghiên cứu bài toán đạt được của hệ CCFG trên đồ thị có hướng tổng quát. Chúng tôi đưa ra khái niệm *mạng vận tải tương ứng* với trạng thái của hệ để đặc trưng cho tính đạt được của hệ CCFG. Chúng tôi sử dụng thuật toán Push-Relabel, một biến thể của thuật toán Ford-Fulkerson để giải bài toán đạt được của hệ CCFG trong thời gian  $O(m^3)$  với  $m$  là số đỉnh của đồ thị nền của hệ CCFG.

Trong phần kết luận của luận án, chúng tôi tóm tắt lại các kết quả đã đạt được và nêu một số hướng nghiên cứu tiếp theo.

# Chương 1

## Kiến thức chuẩn bị

Trong Chương 1 chúng tôi nhắc lại ngắn gọn một số kiến thức cơ sở và một số kết quả đã biết cần thiết cho luận án.

Mục 1.1 nhắc lại khái niệm và một số tính chất cơ bản tập thứ tự, dàn.

Mục 1.2 dành để nêu lại các khái niệm liên quan đến đồ thị.

Mục 1.3 nhắc lại một số khái niệm về hàm sinh, một trong những phương pháp rất hữu hiệu để giải bài toán đếm.

Mục 1.4 chúng tôi nhắc lại các khái niệm về hệ động lực rời rạc và một số bài toán đạt được của hệ động lực rời rạc.

## Chương 2

# Mô hình cột cát và phân hoạch của số tự nhiên

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu mối liên hệ giữa các mô hình cột cát mở rộng và phân hoạch của số tự nhiên. Hệ cột cát (Sand Piles Model - SPM) là một hệ động lực quan trọng được đề xuất bởi ba nhà Vật lý Bak, Tang và Wiesenfeld vào năm 1987 để mô hình hóa hiện tượng đột biến tự tổ chức (Self-Organized Criticality - SOC). Hệ SPM này đã được chứng minh là một trường hợp đặc biệt của hệ Chip Firing Game (CFG) (các kết quả về hệ CFG và các mở rộng của nó sẽ được trình bày trong các Chương 3 và 4 của luận án). Theo các nghiên cứu của Dhar (1990), Goles, Kiwi (1993), Goles, Latapy, Morvan, Phan (2002), ... mô hình cột cát có liên quan chặt chẽ với phân hoạch của số tự nhiên. Trong chương này, chúng tôi sẽ xét đến các mô hình cột cát với ngưỡng  $d$  cho luật vận động và mối liên hệ của chúng với các phân hoạch  $d$ -chặt của số tự nhiên. Phương pháp chính được sử dụng ở đây là phương pháp ECO (Enumeration of Combinatorial Objects), một phương pháp tính toán tổ hợp sử dụng cây sinh và được phát triển trong những năm gần đây. Phương pháp này cho phép chúng tôi chứng minh cấu trúc của không gian trạng thái và tính toán số các trạng thái của mô hình. Bên cạnh đó, nhờ có phương pháp này chúng tôi cũng nghiên cứu được cấu trúc đệ quy của tập các phân hoạch  $d$ -chặt và đưa ra chứng minh cho một số đẳng thức tổ hợp.

### 2.1 Phân hoạch số tự nhiên và hệ động lực rời rạc

#### 2.1.1 Các định nghĩa và ký hiệu

**Định nghĩa 2.1.1.** *Phân hoạch  $a$*  là một dãy các số nguyên dương không giảm  $(a_1, a_2, \dots, a_l)$  với  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_l > 0$ , (quy ước  $a_i = 0, \forall i \geq l + 1$ ). Các  $a_i$  gọi là *các phần* của phân hoạch  $a$ . Ta nói rằng  $a$  là một phân hoạch

của  $n$  (hay  $a$  có trọng số  $n$ ), ký hiệu là  $a \vdash n$  hay  $|a| = n$ , nếu  $\sum_{i=1}^l a_i = n$ .

**Định nghĩa 2.1.3.** Cho  $d$  là một số tự nhiên. Một phân hoạch  $d$ -chặt ( $d$ -strict partition)  $a = (a_1, \dots, a_l)$  là một phân hoạch thỏa mãn  $a_i - a_{i+1} \geq d$ , với mọi  $1 \leq i \leq l - 1$ . Riêng với  $a_l$  có thể nhận giá trị nhỏ hơn  $d$ . Tập hợp tất cả các phân hoạch  $d$ -chặt của  $n$  ký hiệu là  $d\text{-}\mathcal{P}(n)$ .

Ta xét hệ động lực rời rạc có không gian trạng thái là  $d\text{-}\mathcal{P}(n)$  và các luật vận động của nó được xác định như sau:

**Định nghĩa 2.1.4.** Cho  $a$  là một phân hoạch  $d$ -chặt của  $n$ , ta áp dụng các luật vận động lên  $a$  như sau:

- Luật dọc (luật V):

$$(a_1, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \rightarrow (a_1, \dots, a_i - 1, a_{i+1} + 1, \dots, a_n) \text{ nếu } a_i - a_{i+1} \geq d + 2$$

- Luật ngang (luật H) với độ dài  $l$ :

$$(a_1, \dots, p + l + 1, p + l - d, p + l - 2d, \dots, p + l - (l - 1)d, p + l - ld - 1, \dots, a_n) \rightarrow (a_1, \dots, p + l, p + l - d, p + l - 2d, \dots, p + l - (l - 1)d, p + l - ld, \dots, a_n)$$

và luật ngang với độ dài 1 :  $(a_1, \dots, p + 2, p - d, \dots, a_n) \rightarrow (a_1, \dots, p + 1, p - d + 1, \dots, a_n)$ .

## 2.1.2 Cấu trúc của $d\text{-}\mathcal{P}(n)$

Trước hết, chúng tôi chứng minh rằng mọi phân hoạch  $d$ -chặt của  $n$  đều đạt được từ trạng thái ban đầu  $(n)$  bằng cách áp dụng các luật vận động.

**Bổ đề 2.1.5.** Tập hợp  $d\text{-}\mathcal{P}(n)$  chính là tập các phân hoạch  $d$ -chặt đạt được từ trạng thái đầu  $(n)$  bằng cách áp dụng hai luật vận động V và H.

**Định lý 2.1.6.** Tập  $d\text{-}\mathcal{P}(n)$  có cấu trúc dàn. Hơn nữa, cận dưới lớn nhất của hai phần tử trong  $d\text{-}\mathcal{P}(n)$  được xác định như trong  $\mathcal{P}(n)$ .

### 2.1.4 Dàn vô hạn $d\text{-}\mathcal{P}(\infty)$

Mở rộng vô hạn của  $d\text{-}\mathcal{P}(n)$  chính là  $d\text{-}\mathcal{P}(\infty)$ , là hệ động lực rời rạc trạng thái ban đầu là  $(\infty)$  (cột đầu tiên có vô hạn hạt và các cột còn lại không chứa hạt nào) và hai luật vận động V và H. Chúng ta ký hiệu  $d\text{-}\mathcal{P}(\infty)$  là không gian trạng thái của hệ động lực này. Mỗi phần tử của  $d\text{-}\mathcal{P}(\infty)$  sẽ có dạng  $(\infty, a_2, a_3, \dots, a_k)$ . Quan hệ thứ tự bộ phận giữa các phần tử trong  $d\text{-}\mathcal{P}(\infty)$  được định nghĩa như sau:  $a \geq_{\infty} b$  nếu  $\sum_{i \geq j} a_i \leq \sum_{i \geq j} b_i$  với mọi  $j \geq 2$ .

Với hai phần tử bất kỳ  $a = (\infty, a_2, \dots, a_k), b = (\infty, b_2, \dots, b_{\ell}); a, b \in d\text{-}\mathcal{P}(\infty)$ , ta xác định phần tử  $c$  như sau:  $c_i = \max(\sum_{j \geq i} a_j, \sum_{j \geq i} b_j) - \sum_{j > i} c_j$  với mọi  $i$  sao cho  $2 \leq i \leq \max(k, \ell)$  và  $c_i = 0$  nếu  $i > \max(k, \ell)$ . Từ đó ta có kết quả sau:

**Định lý 2.1.11.** *Tập  $d\text{-}\mathcal{P}(\infty)$  cùng với hai phép toán  $\vee$  và  $\wedge$  là một dàn.*

## 2.2 Phương pháp ECO và phân hoạch số tự nhiên

Trong phần này, chúng tôi sử dụng phương pháp ECO để chứng minh cấu trúc đệ quy của tập các phân hoạch  $d$ -chặt.

### 2.2.2 Phân hoạch $d$ -chặt và phương pháp ECO

Trước hết, ta định nghĩa toán tử ECO cho phân hoạch  $d$ -chặt của các số tự nhiên.

**Định nghĩa 2.2.2.** Toán tử  $\vartheta : d\text{-}\mathcal{P}(n) \rightarrow 2^{d\text{-}\mathcal{P}(n+1)}$  xác định như sau:

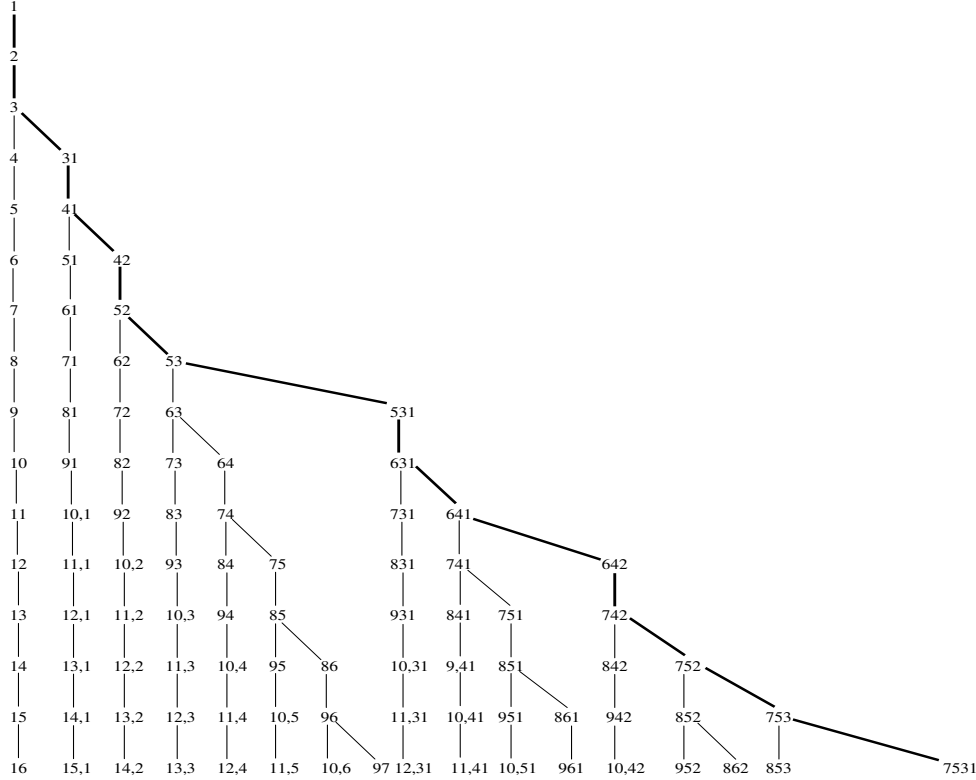
+ Với mỗi  $a = (a_1, a_2, \dots, a_l) \in d\text{-}\mathcal{P}(n)$ ,  $a^{\downarrow 1} = (a_1 + 1, a_2, \dots, a_l)$  là một phần tử của  $\vartheta(a)$ , phần tử này gọi là *con trái* của  $a$ .

+ Nếu  $a$  bắt đầu bằng một cầu thang có dạng:  $p, p - d, \dots, p - id, p - (i + 1)d - 1$ , thì  $\vartheta(a)$  chứa thêm phần tử  $a^{\downarrow i+2}$  (gọi là *con phải* của  $a$ ) bắt đầu bằng dãy  $p, p - d, \dots, p - id, p - (i + 1)d$ .

Cây sinh tương ứng  $T_{2-P}$  (hình 2.1) của toán tử này trùng với cây bao trùm

của dàn vô hạn  $2\text{-}\mathcal{P}(\infty)$  được trình bày trong các phần trước theo quan điểm của hệ động lực rời rạc. Tiếp theo, chúng tôi chứng minh toán tử  $\vartheta$  trong định nghĩa trên là toán tử ECO cho phân hoạch  $d$ -chặt của các số tự nhiên.

**Bổ đề 2.2.3.** *Toán tử  $\vartheta$  là một toán tử ECO.*



Hình 2.1: Cây các phân hoạch 2-chặt

### 2.2.3 Cấu trúc đệ quy của cây vô hạn $T_{d\text{-}\mathcal{P}(\infty)}$

Để chứng minh cấu trúc đệ quy của cây  $T_{d\text{-}\mathcal{P}}$  chúng tôi sử dụng một số dạng cây con của  $T_{d\text{-}\mathcal{P}}$ .

**Định nghĩa 2.2.4.** Ta gọi cây con  $X_k$  của  $T_{d\text{-}\mathcal{P}}$  thỏa mãn:

+ gốc của cây đặt tại phân tử  $a = (m, m - d, m - 2d, \dots, m - (k - 1)d, a_{k+1}, \dots)$ , trong đó  $a_{k+1} \leq m - kd - 1$ ,

+ Nếu  $a$  chỉ có một con thì  $X_k$  là toàn bộ cây con có gốc tại  $a$ ,

+ Nếu  $a$  có hai con thì  $X_k$  là cây gốc  $a$  và con trái của  $a$ ,



+  $X_0$  là một nút.

Cấu trúc của các cây con  $X_k$  được thể hiện trong mệnh đề sau:

**Mệnh đề 2.2.5.** *Mỗi cây con  $X_k$  ( $k \geq 1$ ) là một dây chuyền  $k + 1$  nút, các cạnh của nó được dán nhãn  $1, 2, \dots, k$  và nút thứ  $i$  được nối với nút tiếp theo bởi cạnh được dán nhãn  $i$  và nút thứ  $i$  là gốc của cây con  $X_{i-1}$ ,  $1 \leq i \leq k+1$ .*

### 2.3 Một số tính toán trên cây vô hạn

Trong phần này chúng tôi sử dụng cấu trúc đệ quy của cây sinh  $T_P$  và kỹ thuật dán nhãn trên cây để tính toán hàm sinh của các dạng phân hoạch và chứng minh lại một số đẳng thức về phân hoạch.

**Định nghĩa 2.3.1.** a) Cho  $T$  là cây vô hạn, dán nhãn  $t$  trên các cạnh của nó theo một qui luật nào đó. Gọi  $n_t(a)$  là số nhãn  $t$  trên đường đi từ gốc của cây  $T$  đến đỉnh  $a$ . Khi đó, hàm sinh (generating function) một biến của  $T$  ứng với cách dán nhãn đó là:  $f_T(t) = \sum_{a \in T} t^{n_t(a)}$ ,

b) Cho  $T$  là cây vô hạn, dán nhãn  $t$  và  $s$  trên các cạnh của nó theo một qui luật nào đó. Gọi  $n_t(a)$  (tương ứng,  $n_s(a)$ ) là số nhãn  $t$  (tương ứng,  $s$ ) trên đường đi từ gốc của cây  $T$  đến đỉnh  $a$ . Khi đó, hàm sinh (generating function) hai biến của  $T$  ứng với cách dán nhãn đó là:  $f_T(t, s) = \sum_{a \in T} t^{n_t(a)} s^{n_s(a)}$ .

Bằng tính toán hàm sinh hai biến của cây  $T_P$  và hàm sinh cho các phân hoạch chặt theo các cách khác nhau, ta nhận được các đẳng thức Euler trong các định lý sau:

**Định lý 2.3.3. (Đẳng thức Euler 1)**

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k t^k}{(1-t) \dots (1-t^k)} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-st^i}.$$

**Định lý 2.3.4. (Đẳng thức Euler 2)**

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k t^{k(k+1)/2}}{\prod_{i=1}^k (1-t^i)} = \prod_{i=1}^{\infty} (1+st^i).$$

## Chương 3

# Các hệ động lực CFG và mạng Petri

Trong chương này chúng tôi nhắc lại một số định nghĩa, tính chất, các hướng nghiên cứu về các hệ CFG và trình bày các kết quả về mối quan hệ giữa các hệ động lực CFG và mạng Petri. Chúng tôi chứng minh song ánh giữa các hệ CFG và một số mạng Petri đặc biệt.

### 3.1 CFG cổ điển

**Định nghĩa 3.1.1.** (*A.Bjoner, L.Lovász, Shor*) Hệ động lực CFG (*Chip Firing Game*) được định nghĩa trên một đa đồ thị (có hướng hoặc vô hướng)  $G = (V, E)$ . Mỗi trạng thái là một phân hoạch chip trên các đỉnh của đồ thị, luật vận động được định nghĩa như sau: mỗi đỉnh có thể cháy được nếu số chip tại đỉnh đó lớn hơn hoặc bằng bậc (đi) ra của nó và hoạt động cháy của đỉnh đó sẽ là chuyển một số chip đến các đỉnh lân cận dọc theo mỗi cạnh đi ra từ nó. Hệ này được ký hiệu là  $CFG(G)$ ,  $G$  gọi là đồ thị nền của hệ.

Tiếp theo, chúng tôi giới thiệu khái niệm CFG tô màu - một mở rộng của CFG sinh ra đúng lớp dàn ULD.

**Định nghĩa 3.1.9.** (*C. Magnien, H. D. Phan và L. Vuillon*) Cho đồ thị  $G = (V; E)$  và  $X$  là tập các màu. Ta gọi *đồ thị tô màu* (coloured graph) là bộ  $(V; E; X; col)$  trong đó  $col$  là ánh xạ màu từ  $E$  vào  $X$ . Hạn chế của đồ thị này lên màu  $c \in X$  là đồ thị  $G_c = (V; col^{-1}(c))$  chỉ gồm các cạnh có màu  $c$ . Mô hình CFG tô màu được định nghĩa trên một đa đồ thị có hướng tô màu  $G = (V; E; X; col)$ . Mỗi trạng thái của CFG này được cho bởi một hàm  $\sigma : V \rightarrow \mathbb{N}^X$ , tại mỗi đỉnh chứa một số chip với các màu khác nhau. Với mỗi  $v \in V, c \in X$ , ta ký hiệu  $\sigma_c(v)$  là số các chip có màu  $c$  tại đỉnh  $v$ . Tại mỗi thời điểm, mỗi đỉnh có một trạng thái là đóng hay mở. Luật vận

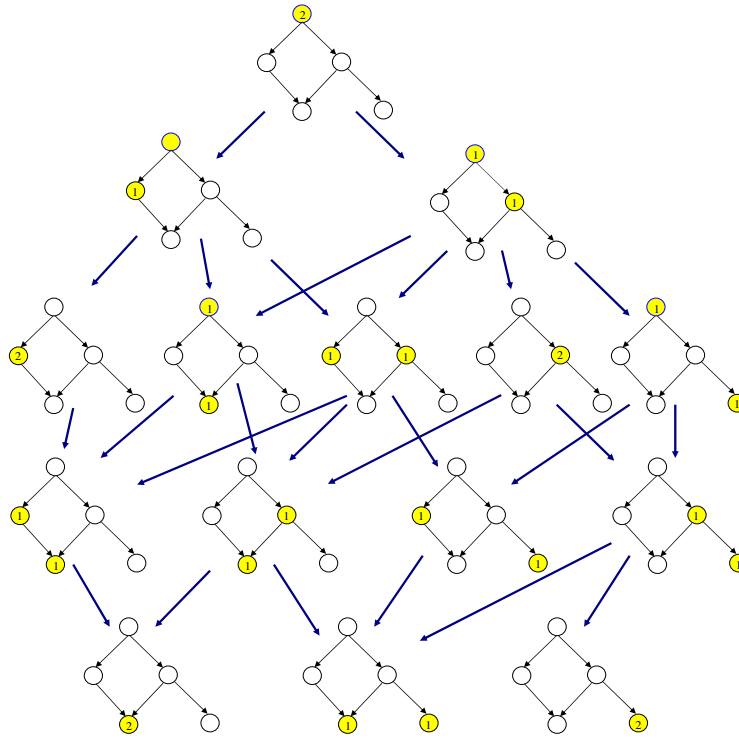
động của CFG tô màu là việc mở các đỉnh. Điều kiện để có thể mở đỉnh  $v$  là:

- +  $v$  đang đóng,
- + tồn tại một màu  $c \in X$  sao cho  $v$  có thể cháy (theo nghĩa cổ điển) trên  $G_c$  (tức là, số chip có màu  $c$  tại đỉnh  $v$  lớn hơn hoặc bằng số cạnh có màu  $c$  đi ra từ đỉnh  $v$ ).

Việc mở đỉnh  $v$  gồm có:

- + đánh dấu đỉnh  $v$  đã mở,
- + với mỗi màu  $c \in X$ , xét CFG màu  $c$  hạn chế trên các đỉnh đã mở, cho CFG vận hành đến khi đạt đến trạng thái cuối cùng.

### 3.2 Hệ động lực CCFG



Hình 3.1: Không gian trạng thái của một CCFG 2 chips

**Định nghĩa 3.2.2.** (Phan, Pham 2006) Hệ động lực CCFG (Conflicting Chip Firing Game - CFG tương tranh) được định nghĩa trên đồ thị có hướng

$G = (V, E)$ , ký hiệu là  $CCFG(G, n)$ :

+ Mỗi trạng thái là một hợp thành của  $n$  trên  $V$ .

+ Luật vận động:

- Điều kiện cháy: Đỉnh  $i \in V$  có thể cháy được tại trạng thái  $a$  nếu  $a_i > 0$ .
- Hoạt động cháy: khi đỉnh  $i$  cháy nó chuyển một chip đến một đỉnh lân cận của  $i$ .

### 3.3 Mạng Petri

Trong phần này chúng tôi trình bày khái niệm mạng Petri đặt trong mối quan hệ với các hệ động lực CFG.

## 3.4 Mối quan hệ giữa hệ động lực CFGs và mạng Petri

### 3.4.1 CFG và mạng Petri

Cho hệ CFG trên đa đồ thị có hướng  $G = (V, E)$ . Ta sẽ xây dựng mạng Petri  $N$  thỏa mãn với mọi trạng thái ban đầu  $\mathcal{O}$  với  $n$  chips của  $CFG(G)$ , tồn tại một trạng thái ban đầu  $M_0$  sao cho đồ thị đạt được  $R(N, M_0)$  của mạng Petri  $N$  đẳng cấu với đồ thị trạng thái của  $CFG(G, n, \mathcal{O})$ .

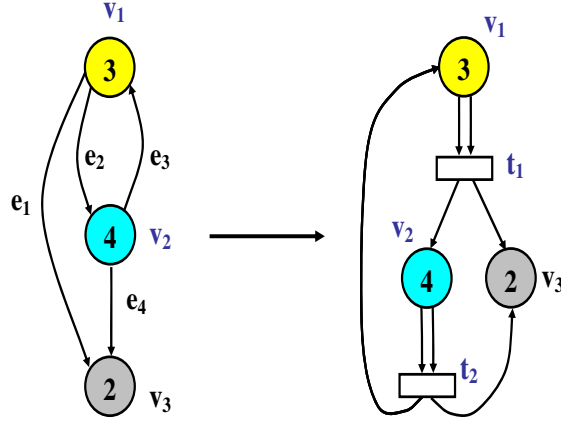
**Định nghĩa 3.4.1.** Ta định nghĩa ánh xạ  $\phi$  từ tập các CFG vào tập các mạng Petri như sau. Với một (đa) đồ thị có hướng  $G$ ,  $\phi(CFG(G))$  là mạng Petri  $(N) = (P, T, I, O)$ , trong đó:

- Tập các vị trí là tập đỉnh của  $G$ :  $P = V$
- Tập các chuyển: với mỗi  $v \in V$  có  $deg^+(v) > 0$ , ta định nghĩa cái chuyển  $t(v)$  thỏa mãn hai điều kiện:

(i)  $v$  là vị trí vào duy nhất của  $t(v)$  và  $I(v, t(v)) = deg^+(v)$ ,

(ii) các vị trí ra  $u$  của  $t(v)$  là các đỉnh  $u \in V$  sao cho  $(v, u) \in E$ , và  $O(t(v), u) = w(v, u)$ , ở đây  $w(v, u)$  là trọng số cạnh  $(v, u)$  trong  $G$ .

- Tương ứng trạng thái: với mỗi trạng thái  $a$  trong  $CFG(G)$  xác định trạng thái  $M = \phi(a)$  trong  $N$  sao cho  $M(v) = a(v)$ , với mọi  $v \in V$ .



Hình 3.2: CFG và mạng Petri tương ứng

**Định lý 3.4.2.** Cho  $G$  là (đa) đồ thị có hướng, cho  $\mathcal{O}$  trạng thái đầu. Gọi  $N$  là mạng Petri nhận được từ  $CFG(G)$  bởi ánh xạ  $\phi$ ,  $M_0$  trạng thái của  $N$  tương ứng với  $\mathcal{O}$ . Khi đó mạng Petri  $(N, M_0)$  và hệ động lực  $CFG(G, n, \mathcal{O})$  có cùng đồ thị đạt được.

Từ định lý trên ta có ngay hệ quả sau

**Hệ quả 3.4.3.** Hệ động lực CFG là mạng Petri bảo toàn.

### 3.4.2 CCFG và mạng Petri

Trong phần này chúng tôi trình bày mối quan hệ giữa CCFG và mạng Petri. Cho  $CCFG(G)$  trên (đa) đồ thị có hướng  $G = (V, E)$ . Ta định nghĩa ánh xạ  $\psi$  từ tập các CCFG vào tập các mạng Petri như sau:

**Định nghĩa 3.4.4.** Cho (đa) đồ thị có hướng  $G$ ,  $\psi(CFG(G))$  là mạng Petri  $(N) = (P, T, I, O)$ , trong đó:

- Tập hợp các vị trí là tập đỉnh của đồ thị  $P = V$
- Tập hợp các chuyển: Với mỗi cạnh  $e = (u, v) \in E$ , ta định nghĩa cái chuyển  $t(e)$  thỏa mãn hai điều kiện sau:

(i)  $u$  là vị trí vào duy nhất của  $t$  và  $I(u, t(e)) = 1$ ,

(ii)  $v$  là vị trí ra duy nhất của  $t$  và  $O(t(e), v) = 1$ .

- Tương ứng trạng thái: với mỗi trạng thái  $a$  trong  $CFG(G)$  xác định trạng thái  $M = \phi(a)$  trong  $N$  sao cho  $M(v) = a(v)$ , với mọi  $v \in V$ .

Trong mạng Petri này ta có  $|T| = |E|, |P| = |V|$ .

**Định lý 3.4.5.** Cho  $G$  là (đa) đồ thị có hướng, cho  $\mathcal{O}$  là trạng thái ban đầu của  $CCFG(G)$ . Gọi  $N$  là mạng Petri nhận được từ  $CCFG(G)$  bởi ánh xạ  $\psi$ ,  $M_0$  là cấu hình của  $N$  tương ứng với trạng thái  $\mathcal{O}$ . Khi đó, mạng Petri  $(N, M_0)$  và hệ động lực  $CCFG(G, n, \mathcal{O})$  có cùng đồ thị đạt được.

### 3.4.3 CFG tô màu và mạng Petri

Vấn đề phức tạp nhất là xây dựng phép nhúng từ lớp các CFG tô màu vào lớp các mạng Petri bởi vì sự khác biệt về cấu trúc giữa CFG hay CCFG với CFG tô màu. Hành vi chuyển trạng thái của CFG tô màu phức tạp hơn, gồm có việc mở các đỉnh và cháy như trong CFG cổ điển. Một khó khăn nữa là trong CFG tô màu, số chip tại mỗi đỉnh có các màu khác nhau, và chip màu nào thì chỉ được di chuyển theo cạnh đi ra có cùng màu.

Cho  $ColCFG(G)$  là CFG tô màu trên đồ thị tô màu  $G = (V, E, X, col)$ . Gọi  $m$  là số các màu. Với  $u, v \in V, c \in X$ , gọi  $d(v, c)$  là số cạnh có màu  $c$  đi ra từ  $v$ ,  $d((v, u), c)$  là số cạnh màu  $c$  đi từ  $v$  đến  $u$ . Gọi  $\mathbf{N}$  là số tự nhiên đủ lớn (lớn hơn tổng số chip). Mạng Petri được xây dựng như sau:

**Định nghĩa 3.4.6.** Ta định nghĩa ánh xạ  $\chi$  từ tập các CFG tô màu vào tập các mạng Petri như sau: Cho  $ColCFG(G)$  CFG tô màu trên đồ thị tô màu  $G = (V, E, X, col)$ .  $\chi(ColCFG(G))$  là mạng Petri  $(N(G)) = (P, T, I, O)$ , trong đó các thành phần được xây dựng như sau:

- Tập các vị trí  $P$ : với mỗi  $v \in V$ , có  $2m + 1$  vị trí tương ứng của  $P$  bao gồm  $m$  vị trí  $p(v, c)$ ,  $m$  vị trí  $q(v, c)$  và một vị trí  $r(v)$ .

- Tập các chuyển  $T$ : với mỗi  $v \in V$ , có  $2m + 1$  cái chuyển của  $T$  bao gồm  $m$  cái chuyển  $t(v, c)$ ,  $m$  cái chuyển  $f(v, c)$  và một cái chuyển  $\theta(v)$ .

- Hàm vào  $I$  (input function): với mỗi  $v \in V, c \in C, I(p(v, c), t(v, c)) = \mathbf{N} + d(v, c), I(r(v), \theta(v)) = \mathbf{N} + 1$ , và  $I(q(v, c), f(v, c)) = \mathbf{N} + d(v, c)$ . Tất cả các giá trị còn lại bằng 0.

- Hàm ra (output function)  $O$ : với mỗi  $v \in V, c \in C, O(t(v, c), r(c)) = 1, O(\theta(v), q(v, c)) = \mathbf{N}, O(f(v, c), q(v, c)) = \mathbf{N}$ , và với mỗi lân cận  $u$  của  $v, O(f(v, c), p(u, c)) = d((v, u), c)$  và  $O(f(v, c), q(u, c)) = d((v, u), c)$ . Các giá trị còn lại bằng 0.

- Vai trò của  $\mathbf{N}$ : các toán tử  $\theta$  có thể thực hiện khi và chỉ khi các toán tử  $f$  không thực hiện được.

Tiếp theo chúng tôi chỉ ra sự tương ứng giữa các trạng thái của CFG tô màu  $ColCFG(G)$  với các cấu hình của mạng Petri  $N(G)$ .

**Định nghĩa 3.4.7.** Cho  $ColCFG(G)$  là CFG tô màu,  $\delta$  là một trạng thái của nó (ở đây  $\delta(v, c)$  là số chip có màu  $c$  tại đỉnh  $v$ ), gọi  $N(G)$  là mạng Petri tương ứng CFG tô màu  $ColCFG(G)$ . Ta định nghĩa cấu hình  $M$  tương ứng với  $\delta$  trong mạng Petri như sau:

- + Số token ở  $p(v, c)$  là  $\mathbf{N} + \delta(v, c)$ .
- + Số token ở  $r(v)$  là  $\mathbf{N}$ .
- + Số token ở  $q(v, c)$  là  $\delta(v, c)$ .
- + Mỗi cấu hình  $M$  được đồng nhất với tập giá trị  $\{q(v, c), c \in X\}$ .

Kết quả chính của phần này được phát biểu ở định lý sau:

**Định lý 3.4.8.** Cho CFG tô màu  $ColCFG(G)$ ,  $\delta$  là trạng thái ban đầu. Gọi  $N(G)$  là mạng Petri nhận được từ  $ColCFG(G)$  qua ánh xạ  $\chi$ ,  $M_0$  là cấu hình của mạng Petri  $N(G)$  tương ứng với  $\delta$ . Khi đó mạng Petri  $(N(G), M_0)$  và mô hình  $ColCFG(G, \delta)$  có cùng đồ thị đạt được.

## Chương 4

# Tính đạt được của CCFG trên đồ thị có hướng

Trong chương này chúng tôi nghiên cứu bài toán đạt được (reachability) sau: cho trước hai trạng thái  $a$  và  $b$  của hệ động lực CCFG, hãy xác định xem  $b$  có nhận được từ  $a$  sau một số lần áp dụng luật cháy? Trước hết, chúng tôi xét hệ CCFG trên đồ thị có hướng không chu trình (directed acyclic graph - DAG). Chúng tôi đặc trưng tính đạt được của CCFG trên DAG. Sau đó, chúng tôi đưa ra thuật toán (A) xác định thứ tự của các trạng thái của CCFG (phần 4.2). Tuy nhiên, trong trường hợp xấu nhất, thuật toán A chạy trong thời gian hàm mũ của  $|V|$ . Thuật toán sẽ hiệu quả khi phải so sánh nhiều cặp trạng thái cùng một lúc. Trong trường hợp tổng quát hơn, khi xét CCFG trên đồ thị có hướng, để đặc trưng tính đạt được của CCFG chúng tôi đưa ra khái niệm mạng vận tải tương ứng với các trạng thái của CCFG (4.4). Chúng tôi đặc trưng tính đạt được của CCFG bằng cách tính toán giá trị của luồng qua mạng vận tải tương ứng (4.5) và đưa ra thuật toán (B) với thời gian  $O(|V|^3)$  để xác định tính đạt được của CCFG. Khi xét các hệ CCFG trên đồ thị nên lớn thì thuật toán B là một cách khắc phục nhược điểm của thuật toán A. Khi các xét hệ CCFG trên đồ thị nên nhỏ và cần phải so sánh nhiều cặp trạng thái cùng lúc thì ta sử dụng thuật toán A.

### 4.1 Tính đạt được của một số mạng Petri

Trong phần này chúng tôi nhắc lại một số mạng Petri đặc biệt và độ phức tạp của bài toán đạt được tương ứng.

### 4.2 Cấu trúc thứ tự của CCFG trên DAG

Để đặc trưng cấu trúc thứ tự của không gian trạng thái của CCFG, trong phần này chúng tôi đưa ra định nghĩa họ năng lượng của các trạng thái của CCFG.



**Định nghĩa 4.2.1.** Cho  $G = (V, E)$  là một đồ thị có hướng không chu trình (DAG),  $a = (a_1, a_2, \dots, a_{|V|})$  là một hợp thành của  $n$  trên  $V$ . Năng lượng  $e(A, a)$  của trạng thái  $a$  trên tập  $A \subseteq V$  được định nghĩa là  $e(A, a) = \sum_{i \in A} a_i$ . Dãy số  $(e(A, a)_{A \in \mathcal{F}(V)})$  được gọi là họ năng lượng của trạng thái  $a$  và đại lượng  $\mathcal{E}(a) = \sum_{A \in \mathcal{F}(V)} e(A, a)$  được gọi là năng lượng tổng của trạng thái  $a$ , ở đây  $\mathcal{F}(V)$  là tập các lọc của  $V$ .

Từ định nghĩa trên ta có ngay mệnh đề sau

**Bổ đề 4.2.2.** Các trạng thái của CCFG được xác định duy nhất bởi họ năng lượng của nó. Nghĩa là, nếu  $a$  và  $b$  là hai trạng thái của  $CCFG(G, n)$  có cùng họ năng lượng thì  $a = b$ .

Tiếp theo, chúng tôi chứng minh cấu trúc thứ tự của không gian trạng thái của hệ CCFG.

**Bổ đề 4.2.3.**  $(CCFG(G, n), \leq)$  là một tập được sắp thứ tự bộ phận.

Định lý về đặc trưng thứ tự của CCFG được phát biểu như sau:

**Định lý 4.2.4.** Cho  $a$  và  $b$  là hai trạng thái của  $CCFG(G, n)$ . Khi đó  $a \geq b$  trong  $CCFG(G, n)$  khi và chỉ khi  $e(A, a) \geq e(A, b)$ , với mọi  $A \in \mathcal{F}(V)$ .

### 4.3 Thuật toán xác định thứ tự của CCFG trên DAG

Mục đích của phần này là đưa ra thuật toán xác định tính đạt được của CCFG trên DAG. Cho trước hai trạng thái  $a$  và  $b$  của  $CCFG(G, n)$ , thuật toán sẽ xác định  $a$  có dẫn đến được  $b$  hay không?

Thuật toán gồm có hai thuật toán con:

- + Thuật toán sinh ra các lọc (Thuật toán I),
- + Thuật toán so sánh hai trạng thái (Thuật toán II).

Như vậy đối với các mạng có đồ thị nền cố định thì chỉ cần chạy Thuật toán I một lần để in ra các lọc của đồ thị. Sau đó, muốn so sánh hai trạng thái  $a$  và  $b$  thì ta chỉ cần chạy Thuật toán II. Từ đó, ta thấy rằng thuật toán

này rất hiệu quả trong trường hợp cần so sánh một dãy các cặp trạng thái  $(a_1$  và  $b_1)$ , ... ,  $(a_k$  và  $b_k)$  của hệ trên một đồ thị nền cố định, vì ta chỉ cần chạy một lần Thuật toán I và  $k$  lần Thuật toán II.

**Định lý 4.3.1.** *Thuật toán I sinh ra tất cả các lọc của  $V$  với độ phức tạp  $O(m^3 + m|\mathcal{F}(V)|)$ , trong đó  $m = |V|$ .*

## 4.4 Mạng vận tải

Tiếp theo chúng tôi sẽ đưa ra đặc trưng cho tính đạt được của CCFG trên đồ thị có hướng tổng quát. Trước hết, chúng tôi trình bày khái niệm mạng vận tải tương ứng với cấu hình của đồ thị. Chúng tôi đưa ra thuật toán thời gian đa thức để giải quyết bài toán đạt được của CCFG trên đồ thị có hướng.

**Định nghĩa 4.4.2.** Một *cấu hình* (configuration) của đồ thị  $G = (V, E)$  là một hàm số  $c : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$  và được ký hiệu là  $C = \{c(v)\}_{v \in V}$ , với  $c(v)$  là giá trị tại đỉnh  $v$ .

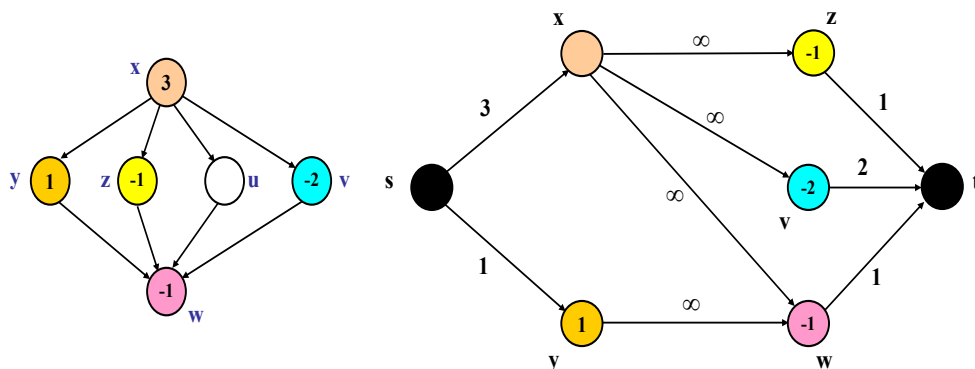
**Định nghĩa 4.4.3.** Cho  $A = \{a(v)\}_{v \in V}$  và  $B = \{b(v)\}_{v \in V}$  là hai cấu hình của đồ thị  $G$ . Cấu hình  $\{a(v) - b(v)\}_{v \in V}$ , ký hiệu là  $A - B$ , được gọi là *cấu hình lệch* của hai cấu hình  $A$  và  $B$ .

Sau đây, chúng tôi trình bày khái niệm *mạng vận tải tương ứng* (corresponding flow network) với cấu hình của đồ thị. Với mỗi cấu hình  $C = \{c(v)\}_{v \in V}$  của đồ thị  $G$ , ta xác định duy nhất một mạng vận tải tương ứng  $(G_c, w, s, t)$  (xem hình 4.1). Ta sẽ dựa vào khái niệm này để giải bài toán đạt được của CCFG.

**Định nghĩa 4.4.4.** Cho  $C = \{c(v)\}_{v \in V}$  là một cấu hình của đồ thị  $G$ . *Mạng vận tải tương ứng* với cấu hình  $C$  là mạng  $(G_c, w, s, t)$  được định nghĩa như sau:

- $s$  là đỉnh nguồn và  $t$  đỉnh đích.
- $V(G_c) = \{s, t\} \cup P \cup N$ , với  $P = \{v \in V(G) | c(v) > 0\}$ ,  $N = \{v \in V(G) | c(v) < 0\}$ .

- $E(G_c) = \{(s, v) | v \in P\} \cup \{(v, u) | v \in P, u \in N, v \rightsquigarrow u \text{ trong } G\} \cup \{(u, t) | u \in N\}$
- $$\begin{cases} w(s, v) = c(v), \forall v \in P; \\ w(u, t) = -c(u), \forall u \in N; \\ w(v, u) = +\infty, \forall v \in P, \forall u \in N \text{ sao cho } (v, u) \in E(G_c). \end{cases}$$



Hình 4.1: Một cấu hình  $C$  trên đồ thị  $G$  (trái) và mạng vận tải tương ứng (phải)

## 4.5 Tính đạt được của CCFG trên đồ thị có hướng

Một trong những kết quả chính của chương này là định lý đặc trưng về tính đạt được của CCFG trên đồ thị có hướng.

**Định lý 4.5.1.** Cho  $A$  và  $B$  là hai trạng thái của  $CCFG(G, n)$ . Khi đó  $B$  đạt được từ  $A$  khi và chỉ khi luồng trên mạng vận tải tương ứng với cấu hình lệch  $C = A - B$  đạt giá trị cực đại là  $\sum_{c(v) > 0} c(v)$ .

## 4.6 Thuật toán

Trong mục này, chúng tôi đưa ra thuật toán xác định tính đạt được của CCFG trên đồ thị có hướng dựa vào mạng vận tải. Theo định lý 4.5.1 thì chỉ cần tìm luồng cực đại trên mạng vận tải tương ứng với cấu hình lệch  $A - B$  của đồ thị thì xác định được trạng thái  $A$  có dẫn đến được trạng thái  $B$  hay không và chúng tôi chứng minh kết quả sau:

**Mệnh đề 4.6.1.** Thuật toán xác định tính đạt được của CCFG có hướng chạy trong thời gian  $O(|V|^3)$ .

## Kết luận của luận án

Như vậy, trong luận án này chúng tôi đã thu được những kết quả chính sau:

1. Chứng minh cấu trúc dàn của tập  $d\text{-}\mathcal{P}(n)$  các phân hoạch  $d$ -chặt của một số tự nhiên  $n$  cho trước ( $d$  là số tự nhiên cho trước) và mở rộng vô hạn  $d\text{-}\mathcal{P}(\infty)$  của nó.
2. Xây dựng toán tử ECO cho phân hoạch  $d$ -chặt của các số tự nhiên và xây dựng cây sinh tương ứng. Chứng minh cấu trúc đệ quy của cây sinh  $T_{d\text{-}\mathcal{P}(n)}$  và cây sinh vô hạn  $T_{d\text{-}\mathcal{P}(\infty)}$ . Từ đó chứng minh một số đẳng thức tổ hợp.
3. Chứng minh các hệ động lực CFG là các mạng Petri đặc biệt.
4. Đặc trưng cấu trúc thứ tự của hệ động lực CCFG trên đồ thị có hướng không chu trình.
5. Xây dựng thuật toán xác định thứ tự của hệ CCFG trên đồ thị có hướng không chu trình.
6. Đặc trưng tính đạt được của hệ CCFG trên đồ thị có hướng.
7. Xây dựng thuật toán trong thời gian  $O(|V|^3)$  ( $V$  là tập đỉnh của đồ thị nền) xác định tính đạt được của CCFG trên đồ thị có hướng.

# Các công trình liên quan đến luận án

## A. Các bài đăng ở tạp chí:

1. Le Manh Ha and Phan Thi Ha Duong (2009), "Integer partitions in discrete dynamical models and ECO method", *Vietnam J. Math.*, (2-3) **37**, pp. 273-293.

2. Le Manh Ha and Phan Thi Ha Duong (2010), "Order structure and energy of conflicting Chip Firing Game", *Acta Math. Vietnam.*, (2) **35**, pp. 289-301.

## B. Các bài đăng trong kỷ yếu Hội nghị quốc tế, có phản biện, có số ISBN:

3. LE Manh Ha, PHAM Tra An, PHAN Thi Ha Duong (2009), "On the relation between Chip Firing Games and Petri Nets", *Proceeding of IEEE-RIVF International Conference on Computing and Communication Technologies*, ISBN: 978-1-4244-4567-7, pp. 328-335.

4. LE Manh Ha; NGUYEN Anh Tam; PHAN Thi Ha Duong.(2010), "Algorithmic aspects of the Reachability of Conflicting Chip Firing Game", *Advances in Intelligent Information and Database Systems* in series *Studies in Computational Intelligence*, Springer, ISSN: 1860-949X, Vol.283, pp. 359-370.

5. Le Manh Ha (2010), "The lattice structure of rotor-router model", *Proceeding of IEEE-RIVF International Conference on Computing and Communication Technologies*, ISBN: 978-1-4244-8072-2, pp. 236-241.

## C. Bài đăng hoàn thiện:

6. LE Manh Ha, PHAM Van Trung, PHAN Thi Ha Duong (2010), "Reachability of Conflicting Chip Firing Game and Flow network"

## Các kết quả trong luận án đã được báo cáo tại các hội nghị khoa học và xemina:

- Hội nghị quốc tế về tính toán kỹ thuật cao và ứng dụng 2007 (ACOMP 2007), TP HCM 3/2007.

- Đại hội toán học toàn quốc lần thứ 7, Quy Nhơn 8/2008.

- Hội thảo tối ưu và tính toán khoa học lần thứ 7, Bà vù 22-25/4/2009.

- Hội nghị quốc tế IEEE-RIVF 2009 về Công nghệ thông tin và Truyền thông, Đà Nẵng 5/2009.
- Hội thảo khoa học quốc gia lần thứ IV: Nghiên cứu cơ bản và ứng dụng Công nghệ thông tin (Fair 2009), Hà nội 12/2009.
- Hội nghị quốc tế ACIIDS lần II (ACIIDS 2010): Các hệ thống thông tin và Cơ sở dữ liệu thông minh, Huế 3/2010.
- Hội thảo tối ưu và tính toán khoa học lần thứ 8, Bà Rịa 20-23/4/2010.
- Hội nghị quốc tế IEEE-RIVF 2010 về Công nghệ thông tin và Truyền thông, Hà nội 11/2010.
- Xemina của nhóm "Tính toán tổ hợp và các hệ động lực rời rạc" - Viện Toán học.
- Xemina của phòng "Cơ sở Toán học của Tin học" - Viện Toán học.
- Hội nghị đánh giá kết quả làm việc của nghiên cứu sinh - Viện Toán học 10/2007, 10/2008, 10/2009.