VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM
VIỆN TOÁN HỌC

Hà Duy Hưng

TOÁN TỬ TÍCH PHÂN CỰC ĐẠI TRÊN TRƯỜNG ĐỊA PHƯƠNG

Chuyên ngành: Phương trình vi phân và tích phân

Mã số : 62 46 01 05

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - 2012

Công trình được hoàn thành tại Viện Toán học, Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam

Người hướng dẫn khoa học: **GS. TSKH. Nguyễn Minh Chương**

Phản biện :

GS. TSKH Đỗ Ngọc Diệp

GS. TSKH Nguyễn Mạnh Hùng

TS. Vũ Hoài An

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án cấp Viện họp tại Viện Toán học, Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam,

vào hồi ....giờ .... ngày .... tháng .... năm ....

Có thể tìm hiểu luận án tại:

-Thư viện Quốc gia Việt Nam
-Thư viện Viện Toán học

Lời nói đầu

I. Lý do chọn đề tài

Giải tích điều hòa có nguồn gốc từ lý thuyết các chuỗi Fourier. Từ lâu, người ta đã khởi xướng việc nghiên cứu các chuỗi Fourier từ một chiều sang nhiều chiều và trên các nhóm compact địa phương. Việc nghiên cứu các chuỗi Fourier trên các nhóm compact địa phương mang đến nhiều kết quả có những ứng dụng quan trọng trong nghiên cứu lý thuyết số, lý thuyết phương trình đạo hàm riêng. Bên cạnh $\mathbb{R}$ và đường tròn đơn vị $\mathbb{T}$ của mặt phẳng phức là các ví dụ quen thuộc về các nhóm compact địa phương, thì ta còn có các nhóm cộng và nhân của trường số $p-$adic $\mathbb{Q}_p$, hoặc rộng hơn là các trường địa phương (bao gồm $\mathbb{Q}_p$, mọi mở rộng hữu hạn của $\mathbb{Q}_p$ và trường các chuỗi Laurent trên một trường hữu hạn). Trước đây không gian ba chiều Euclid $\mathbb{R}^3$ thường được nói như là không gian của các hiện tượng vật lý. Theo thông lệ đó, $\mathbb{R}^3$ thường được nhận thức như là không gian vật lý thực. Tuy nhiên, $\mathbb{R}^3$ cũng chỉ đơn giản là một mô hình hình học mà ở đó người ta dễ dàng kiểm tra được các tiên đề hình học bằng trực giác. Thực vậy, bằng phương pháp tọa độ, ta có thể mô tả các vật thể hình học thông qua hệ thống các số. Không gian Euclid sử dụng hệ thống số thực, có thể coi là làm đầy của tập các số hữu tỷ $\mathbb{Q}$ với giá trị tuyệt đối thông thường $|\cdot|$ trên $\mathbb{Q}$, ở đó một giá trị tuyệt đối là một hàm $|\cdot| : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

1. $|x| \geq 0$, $|x| = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$,
2. $|xy| = |x|\,|y|$,
3. $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Tuy nhiên, trên trường các số hữu tỷ $\mathbb{Q}$ ngoài giá trị tuyệt đối thông thường còn có các giá trị tuyệt đối $p-$adic không tương đương với nó. Năm 1916, nhà toán học Ostrowski chứng minh được rằng mọi giá trị tuyệt đối không tầm thường trên trường các số hữu tỷ $\mathbb{Q}$ đều tương đương với giá trị tuyệt đối thực thông thường, hoặc giá trị tuyệt đối $p-$adic $|\cdot|_p$, với p là một số nguyên tố. Ở đây, giá trị tuyệt đối $|\cdot|_p$ thỏa mãn các điều kiện 1., 2., và

$3'$. $|x+y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$.

Chú ý rằng giá trị tuyệt đối thông thường thỏa mãn tiên đề Archimede trong khi đó tiên đề Archimede không còn đúng đối với $|\cdot|_p$. Thực vậy, ta có $|n\cdot 1|_p = |1+\cdots+1|_p \leq |1|_p = 1$, với mọi n nguyên dương. Do đó $|\cdot|_p$ được gọi là giá trị tuyệt đối phi-Archimede. Bao đầy của $\mathbb{Q}$ theo $|\cdot|_p$ cho ta trường các số $p-$adic $\mathbb{Q}_p$.

Trong luận án này, trường địa phương là một trường tôpô đủ, không rời rạc, compact địa phương và hoàn toàn không liên thông. Người ta chỉ ra được rằng, một trường như vậy, thì hoặc là trường các số $p-$adic $\mathbb{Q}_p$, hoặc là một mở rộng hữu hạn của $\mathbb{Q}_p$, hoặc là trường các chuỗi số Laurent trên một trường hữu hạn.

Như đã nói ở trên, nhiều lý thuyết toán học đã sớm được chuyển sang và xây dựng trên $\mathbb{Q}_p$, và tổng quát hơn trên các trường địa phương. Từ đây, các không gian hàm quan trọng trong lý thuyết phương trình đạo hàm riêng như không gian các hàm trơn vô cùng, không gian các hàm thử, không gian các phân bố được thiết lập trên các trường địa phương tương ứng là không gian $\mathcal{E}$ các hàm hằng địa phương, $\mathcal{D}$ không gian các hàm hằng địa phương với giá compact, $\mathcal{D}'$ không gian các phân bố, ... Bên cạnh đó, rất nhiều vấn đề cơ bản của giải tích điều hoà trên trường địa phương đã bắt đầu được nghiên cứu từ những năm 1934 và phát triển mạnh mẽ trong giai đoạn 1970-1980 bởi các công trình của M. Taibleson, Keith Phillips, J. A. Chao, James Daly, Charles Downey ... trong đó các nghiên cứu chủ yếu tập trung vào các toán tử cực đại, các toán tử tích phân kì dị, chuỗi Fourier. Vì những ứng dụng quan trọng trong khoa học công nghệ, trong y học mà những năm gần đây, các lý thuyết phương trình đạo hàm riêng $p-$adic, giải tích sóng nhỏ $p-$adic, giải tích điều hòa trên các trường trường địa phương đã thu hút được sự quan tâm nghiên cứu của rất nhiều nhà toán học như V.S. Vladimirov, I.V. Volovich, A. Kochubei, Keith Rogers, A. Yu. Khrennikov, S.V. Kozyrev, Nguyen Minh Chuong, ... Trong đó có nhiều công trình tập trung nghiên cứu về lý thuyết hàm cực đại, sóng nhỏ, các toán tử tích phân dao động, toán tử giả vi phân, bài toán Cauchy đối với phương trình giả vi phân parabolic, phổ của toán tử giả vi phân $p-$adic.

Lý thuyết về các toán tử tích phân cực đại, là một trong những đối tượng nghiên cứu quan trọng của giải tích điều hòa hiện đại và lý thuyết phương trình đạo hàm riêng. Một trong những ứng dụng cổ điển nhất của lý thuyết các toán tử cực đại đó là trong chứng minh định lý đạo hàm Lebesgue. Bên cạnh đó, các toán tử tích phân cực đại, trong đó toán tử cực đại Hardy-Littlewood là một trong những ví dụ quan trọng nhất, được sử dụng trong nghiên cứu các không gian Sobolev bởi có một sự kiện khá đơn giản đó là tính khả vi yếu thường được bảo tồn qua toán tử cực đại. Chẳng hạn, một tính chất của toán tử cực đại Hardy-Littlewood M đó là biến một hàm Lipschitz thành một hàm Lipschitz, do đó theo định lý Rademacher, hàm cực đại của một hàm Lipschitz là khả vi hầu khắp nơi. Mặc dù toán tử cực đại không biến một hàm khả vi thành một hàm khả vi, nhưng M là toán tử bị chặn giữa các không gian Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ với $1 < p < \infty$, do đó nó bảo toàn tính khả vi yếu. Năm 2001, các nhà toán học J. Bourgain, H. Brezis, và P. Mironescu đã đưa ra một đặc trưng rất mới cho các không gian Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ với $1 < p < \infty$, mà ở đó các tính chất của toán tử cực đại đóng vai trò chìa khóa trong chứng minh của họ.

Trên các trường $p-$adic và rộng hơn trên các trường địa phương, giải tích điều hòa được các nhà toán học quan tâm và nghiên cứu từ rất sớm, mà đặc biệt trong đó là lý thuyết về các toán tử tích phân kì dị, các toán tử tích phân cực đại. Rất nhiều kết quả cơ bản đã được chứng minh từ những năm 70 của thế kỷ trước. Trong thời gian gần đây, nhiều kết quả mới về lĩnh vực này cũng được công bố trong đó có những kết quả mang tính mở đường. Chẳng hạn, năm 2004, Keith Rogers đã giải quyết được bài toán trung bình cực đại dọc theo một cung $p-$adic như sau: nếu kí hiệu $\mathcal{M}_\gamma f(x) = \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \dfrac{1}{p^k} \int\limits_{|t|\leq p^k} |f(x-\gamma(t))|\, dt$, trong đó $\gamma(t) = (t, t^2, \ldots, t^d)$ thì $\mathcal{M}_\gamma$ là bị chặn trong $L^q(\mathbb{Q}_p^d)$ với $1 < q < \infty$. Keith M. Rogers cũng đã chứng minh được dạng $p-$adic của bổ đề van der Corput cho đa thức, qua đó mở ra hướng nghiên cứu lý thuyết tích phân dao động $p-$adic, một trong những vấn đề trung tâm của giải tích điều hòa $p-$adic. Năm 2008, các tác giả Weiyi Su và Hua Qiu xây dựng lại định nghĩa và các tính chất của đạo hàm Gibbs $p-$adic thông qua toán tử giả vi phân $p-$adic và chỉ ra rằng các đạo hàm loại đó rất có nhiều ứng dụng đáng ngạc nhiên trong giải tích fractal, trong y học. Điều đó cho thấy việc cần thiết phải phát triển lý thuyết phương trình đạo hàm riêng $p-$adic, phương trình đạo hàm riêng fractal trên các trường địa phương. Năm 2008, các tác giả Nguyễn Minh Chương và Nguyễn Văn Cơ đã xây dựng được một hệ các cơ sở trực chuẩn mới của $L^2(\mathbb{Q}_p)$ gồm các hàm riêng của toán tử giả vi phân Vladimirov D^α, qua đó xây dựng được tường minh nghiệm ở dạng chuỗi của một lớp phương trình giả vi phân $p-$adic loại hyperbolic. Tuy nhiên, trên các trường địa phương, lý thuyết các toán tử tích phân cực đại còn chứa đựng nhiều bài toán quan trọng chưa được nghiên cứu. Chẳng hạn, các bài toán đặc trưng hàm trọng cho toán tử cực đại Hardy-Littlewood M: đặc trưng hàm trọng u để M bị chặn từ $L^\ell(u)$ vào $L^\ell(u)$, bài toán đặc trưng hàm trọng v để tồn tại u sao cho M bị chặn từ $L^\ell(u)$ vào $L^\ell(v)$, bài toán hai trọng.

Vì những nguyên nhân nói trên Giáo sư Nguyễn Minh Chương đã gợi ý cho tôi nghiên cứu các vấn đề đã nêu với đề tài **Toán tử tích phân cực đại trên trường địa phương**.

IV. Bố cục của Luận án

Bản Luận án có nhan đề **Toán tử tích phân cực đại trên trường địa phương**, được viết dựa trên hai bài báo đã được đăng của tác giả (trong danh mục công trình đã công bố liên quan đến Luận án). Như đã trình bày ở trên, các kết quả nghiên cứu mà chúng tôi đã đạt được không chỉ đúng trên các trường các số $p-$adic mà còn đúng cho một lớp rộng hơn: các trường địa phương. Do vậy, các kết quả trong Luận án này được chúng tôi trình bày trên các trường địa phương.

Luận án gồm **3 chương**:

Chương 1 trình bày một số khái niệm và kiến thức về các trường địa phương, lý thuyết tích phân, biến đổi Fourier, tích chập trên các trường địa phương. Đây là những khái niệm cần thiết cho việc trình bày các chương sau.

Chương 2 dành cho việc nghiên cứu các bổ đề phủ cần thiết, xây dựng lớp hàm trọng Muckenhoupt và giải quyết bài toán đặc trưng hàm trọng u để toán tử M bị chặn từ $L^\ell(u)$ vào $L^\ell(u)$. Các kết quả này được mở rộng cho toán tử cực đại Hardy-Littlewood với giá trị véctơ. Cũng trong chương này, chúng tôi đưa ra một điều kiện cần và một điều kiện đủ cho cặp hàm trọng (u, v) để toán tử M thỏa mãn bất đẳng thức trọng loại yếu ngược trên hình cầu. Chúng tôi áp dụng kết quả đạt được vào lớp hàm $L\log^+ L$ để nhận được một điều kiện cần đảm bảo tính khả tích của hàm cực đại Hardy-Littlewood Mf. Phần cuối chương, chúng tôi đưa ra một lớp toán tử tích phân cực đại mới trên trường địa phương và nghiên cứu tính bị chặn yếu $(1,1)$ của nó.

Chương 3 dành cho việc nghiên cứu bài toán trọng Muckenhoupt: Với điều kiện nào của v để tồn tại hàm trọng u sao cho toán tử M là bị chặn từ $L^\ell(u)$ vào $L^\ell(v)$. Chúng tôi xây dựng lớp hàm $\mathcal{W}_\ell$ là lời giải của bài toán trên và giải quyết trọn vẹn bài toán vừa nêu trong chương này.

Chương 1

MỘT SỐ KHÁI NIỆM VÀ KẾT QUẢ CHUẨN BỊ

1.1 Trường địa phương

1.1.4 Trường địa phương

Định nghĩa 1.1.11. *Một trường địa phương là một trường tôpô đủ, compact địa phương, hoàn toàn không liên thông và không rời rạc.*

Có hai ví dụ quan trọng nhất về trường địa phương đó là trường các số $p-$adic $\mathbb{Q}_p$ và trường $\mathbb{F}_q((t))$ các chuỗi Laurent hình thức.

Mệnh đề 1.1.12. *Cho $\mathbb{K}$ là một trường tôpô đủ, compact địa phương, không rời rạc.*

(a) Nếu $\mathbb{K}$ là liên thông thì $\mathbb{K}$ sẽ hoặc là trường các số thực $\mathbb{R}$ hoặc là trường các số phức $\mathbb{C}$

(b) Nếu $\mathbb{K}$ không liên thông thì $\mathbb{K}$ là hoàn toàn không liên thông. Khi đó

- *Nếu $\mathbb{K}$ có đặc số hữu hạn p, thì $\mathbb{K}$ là trường $\mathbb{F}_q((t))$ trong đó $q = p^c$ và c là số nguyên dương nào đó.*
- *Nếu $\mathbb{K}$ có đặc số không thì $\mathbb{K}$ là mở rộng đại số hữu hạn của trường $\mathbb{Q}_p$ với p là một số nguyên tố nào đó.*

Mỗi phần tử $x \in \mathbb{K}$, ta sẽ kí hiệu $|x|$ là giá trị tuyệt đối tương ứng trên $\mathbb{K}$.

1.2 Độ đo và tích phân trên trường địa phương

Cho $\mathbb{K}$ là một trường địa phương. Nhóm cộng $(\mathbb{K}, +)$ là một nhóm giao hoán, compact địa phương vì vậy luôn tồn tại duy nhất (sai khác một hằng số nhân) một độ đo Haar trên $\mathbb{K}$, tức là một độ đo Borel chính quy trên $\mathbb{K}$, hữu hạn trên các tập con compact của $\mathbb{K}$ và bất biến với phép tịnh tiến. Độ đo Haar này được chuẩn hoá bởi

$$\int_{\mathcal{O}} dx = 1. \tag{1.5}$$

Với mỗi số d nguyên dương, kí hiệu $\mathbb{K}^d$ là không gian véctơ d chiều trên $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}^d = \{x = (x_1, \ldots, x_d) : x_i \in \mathbb{K}, i = \overline{1, d}\}$. Một chuẩn $|\cdot|$ trên $\mathbb{K}^d$ được xác định như sau: với mỗi $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{K}^d$, ta đặt $|x| := \max\{|x_1|, \ldots, |x_d|\}$.

Với mỗi γ là số nguyên, $a \in \mathbb{K}^d$, ta kí hiệu

$$a + B_\gamma = \{y \in \mathbb{K}^d : |y - a| \leq q^\gamma\}, \; B_\gamma = 0 + B_\gamma,$$

$$a + S_\gamma = \{y \in \mathbb{K}^d : |y - a| = q^\gamma\}, \; S_\gamma = 0 + S_\gamma.$$

$a + B_\gamma$, $a + S_\gamma$ lần lượt được gọi là hình cầu và mặt cầu có tâm là a, có bán kính là q^γ. Họ các hình cầu và mặt cầu trong $\mathbb{K}^d$ thỏa mãn các tính chất dưới đây.

Mệnh đề 1.2.1. *(a) $a + B_\gamma$ là một nhóm cộng giao hoán;*

$(a + B_{\gamma-1}) \subset (a + B_\gamma)$; $a + S_\gamma = (a + B_\gamma) \setminus (a + B_{\gamma-1})$;

$a + B_\gamma = \bigcup_{\gamma' \leq \gamma} (a + S_{\gamma'})$; $\bigcap_{\gamma \in \mathbb{Z}} (a + B_\gamma) = \{a\}$;

$\bigcup_{\gamma \in \mathbb{Z}} (a + B_\gamma) = \bigcup_{\gamma \in \mathbb{Z}} (a + S_\gamma) = \mathbb{K}^d$.

(b) Nếu $b \in a + B_\gamma$ thì $b + B_\gamma = a + B_\gamma$ (tức mọi điểm thuộc một hình cầu đều là tâm của hình cầu đó). Hệ quả là hai hình cầu bất kì thì hoặc rời nhau, hoặc chứa nhau.

(c) $a + B_\gamma$, $a + S_\gamma$ là các tập vừa mở, vừa đóng và là compact trong $\mathbb{K}^d$.

(d) Mọi tập mở trong $\mathbb{K}^d$ đều là hợp của không quá đếm được các hình cầu đôi một rời nhau.

Mỗi hàm $f \in L^1_{\text{loc}}$, nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{N \to +\infty} \int_{B_N} f(x)dx = \lim_{N \to +\infty} \sum_{-\infty < \gamma \leq N} \int_{S_\gamma} f(x)dx, \tag{1.7}$$

thì giới hạn trên được gọi là *tích phân của hàm f trên* $\mathbb{K}^d$ và kí hiệu là $\int\limits_{\mathbb{K}^d} f(x)dx$. Với mỗi hàm $f \in L^1_{\text{loc}}\left(\mathbb{K}^d \setminus \{a\}\right)$, nếu tồn tại giới hạn

$$\int\limits_{\mathbb{K}^d} f(x)dx = \lim_{\substack{N\to+\infty \\ M\to-\infty}} \sum_{M\le\gamma\le N} \int_{a+S_\gamma} f(x)dx. \tag{1.8}$$

thì giới hạn đó được gọi là tích phân của f trên $\mathbb{K}^d$.

1.3 Biến đổi Fourier và tích chập

Trên $\mathbb{K}$ ta lấy cố định một đặc trưng χ của nhóm cộng $(\mathbb{K}, +)$ mà có hạng bằng 0.

Định nghĩa 1.3.1. *Với mỗi hàm $f \in L^1$, biến đổi Fourier $\widehat{f}$ của hàm f được xác định bởi*

$$\widehat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{K}^d} f(x)\chi(-\xi\cdot x)dx. \tag{1.11}$$

Ở đây $\xi\cdot x = \xi_1x_1 + \cdots + \xi_dx_d$ với mọi $x = (x_1, \ldots, x_d)$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d)$ thuộc $\mathbb{K}^d$.

Mệnh đề 1.3.2. *(a) Biến đổi Fourier F là một biến đổi tuyến tính bị chặn từ L^1 vào L^∞, với $||\widehat{f}||_\infty \le ||f||_1$.*

(b) Nếu $f \in L^1$ thì $\widehat{f}$ là hàm liên tục đều.

(c) **(Riemann-Lebesgue)** *Nếu $f \in L^1$ thì $\widehat{f}(x) \to 0$ khi $|x| \to \infty$.*

Với mỗi hàm $f \in L^1 \cap L^2$ thì $||\widehat{f}||_2 = ||f||_2$. Biến đổi Fourier của $f \in L^2$, kí hiệu là $\widehat{f}$, được xác định như là giới hạn trong L^2 của $\widehat{f\chi_{B_\gamma}}$ khi $\gamma \to \infty$. Ở đây χ_{B_γ} là hàm đặc trưng của hình cầu B_γ.

Một hàm giá trị phức f xác định trên $\mathbb{K}^d$ được gọi là hằng địa phương nếu với mọi $x \in \mathbb{K}^d$, tồn tại số nguyên $k(x)$ để $f(x+y) = f(x)$ với mọi $y \in B_{k(x)}$. Kí hiệu $\mathcal{E}$ là tập tất cả các hàm hằng địa phương trên $\mathbb{K}^d$.

Ta kí hiệu $\mathcal{D} = \mathcal{D}\left(\mathbb{K}^d\right)$ là tập tất cả các hàm thuộc $\mathcal{E}$ mà có giá compact. Họ $\mathcal{D}'$ tất cả các phiếm hàm liên tục trên $\mathcal{D}$ được gọi là *không gian các phân bố*. Biến đổi Fourier và biến đổi Fourier ngược của $f \in \mathcal{D}'$ được xác định bởi quy tắc: $(\widehat{f}, \varphi) = (f, \widehat{\varphi})$, $(\check{f}, \varphi) = (f, \check{\varphi})$. Với mọi $f \in \mathcal{D}'$ ta có $\widehat{\check{f}} = f = \check{\widehat{f}}$.

Chương 2

TOÁN TỬ CỰC ĐẠI HARDY - LITTLEWOOD VÀ CÁC BẤT ĐẲNG THỨC TRỌNG CHUẨN TRÊN TRƯỜNG ĐỊA PHƯƠNG

Một trong những mục đích chính của chương này là nghiên cứu các bất đẳng thức trọng chuẩn cho toán tử cực đại Hardy-Littlewood M và dạng véctơ của nó trên các trường địa phương. Trong trường hợp Euclid, các bất đẳng thức trọng chuẩn cho M đã được Muckenhoupt chứng minh hoàn thiện vào năm 1972. Hai nhà toán học Kenneth F. Andersen và Russel T. John đã phát triển kết quả của Muckenhoupt sang cho toán tử cực đại dạng véctơ $\overrightarrow{M}$. Trong chương này chúng tôi nghiên cứu cả hai vấn đề trên trong trường địa phương. Đầu tiên chúng tôi đi thiết lập các bổ đề phân tích kiểu Calderón-Zygmund. Chúng tôi cố gắng vận dụng các cấu trúc hình học đặc biệt của trường địa phương trong các chứng minh để nhận được các bổ đề phân tích có thể xem là mạnh hơn so với trường hợp Euclid. Từ đó, chúng tôi thu được một số ước lượng về chuẩn của toán tử M rất khác nếu so các kết quả tương ứng trong trường hợp Euclid. Tiếp theo, chúng tôi đi thiết lập lại các kết quả cơ bản và cần thiết về lớp hàm trọng Muckenhoupt trên trường địa phương. Với việc xây dựng được các phiên bản thích hợp của hệ các bổ đề phân tích kiểu Calderón-Zygmund và họ các hàm trọng Muckenhoupt, chúng tôi chứng minh được một số bất đẳng thức trọng chuẩn loại yếu và mạnh cho các toán tử M và $\overrightarrow{M}$.

Cũng trong chương này, chúng tôi đưa ra một điều kiện cần và một điều kiện đủ "gần tương tự" cho cặp hàm trọng (u, v) để toán tử cực đại Hardy-Littlewood M thỏa mãn bất đẳng thức trọng chuẩn loại yếu ngược trên hình cầu và trên toàn không gian. Trong trường hợp Euclid, các tác giả K. F. Andersen và Wo-Sang Young đưa ra một điều kiện cần và một điều kiện đủ khác nhau cho cặp hàm trọng để nhận được bất đẳng thức loại yếu ngược. Sự khác nhau về kết quả này trong hai trường thực và trường phức có thể giải thích là do cấu trúc hình học khác biệt giữa $\mathbb{R}^d$ và $\mathbb{K}^d$. Trong trường hợp Euclid, để có được sự "gần tương tự" giữa điều kiện cần và điều kiện đủ thì hàm trọng u phải thỏa mãn thêm điều kiện kép.

Kết quả bất đẳng thức loại yếu ngược ở trên được chúng tôi ứng dụng vào lớp hàm $L \log^+ L$ với trọng của Zygmund để thu được một điều kiện cần để hàm cực đại là khả tích. Cũng trong chương này, luận án đưa ra một lớp toán tử tích phân mới, chúng tôi chứng minh các toán tử tích phân đó là loại $(1, 1)$ nếu như giả thiết các toán tử này thuộc loại mạnh (ℓ, ℓ), với $1 < \ell < \infty$ nào đó. Phương pháp chứng minh mà chúng tôi vân dụng ở đây dựa trên phương pháp biến thực của Calderón-Zygmund. Tuy nhiên, theo chúng tôi được biết, kết quả về lớp toán tử này chưa có dạng tương tự nào trong trường hợp thực.

2.1 Các bổ đề phủ loại Calderón-Zygmund

Bổ đề 2.1.4. *Giả sử $f \in L^1(\mathbb{K}^d)$ và α là một số thực dương. Khi đó, tồn tại hàm g, họ các hàm b_j thuộc $L^1(\mathbb{K}^d)$, và một họ hữu hạn hoặc đếm được các hình cầu đôi một rời nhau $\{B^j\}_{j\geq 1}$, thỏa mãn $f = g + \sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j$, supp $b_j \subset B^j_\star$. Các hàm và các hình cầu đó còn thỏa mãn các điều kiện sau đây:*

(a) $|g(x)| \leq \alpha$ *với hầu khắp nơi* $x \in \mathbb{K}^d$,

(b) $||b_j||_{L^1(\mathbb{K}^d)} \leq 2q^d\alpha|B^j|$,

(c) $\int\limits_{B^j} b_j dx = 0$,

(d) $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B^j \subset E_\alpha = \{x \in \mathbb{K}^d :\ Mf(x) > \alpha\} \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B^j_\star$,

(e) $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |B^j_\star| \le \frac{q^{2d}}{\alpha} \cdot ||f||_{L^1(\mathbb{K}^d)}$,

ở đó ta kí hiệu $B^j_\star$ *là hình cầu có tâm cùng tâm với* B^j *nhưng bán kính bằng* q *lần bán kính của hình cầu* B^j.

Bổ đề 2.1.5. *Giả sử rằng* $f \in L^1(\mathbb{K}^d)$ *và* α *là một số thực dương. Khi đó tồn tại một họ hữu hạn hoặc đếm được các hình cầu đôi một rời nhau* $\{B^j\}_{j\ge 1}$ *thỏa mãn*

(a) $E_\alpha = \big\{x \in \mathbb{K}^d :\ Mf(x) > \alpha\big\} = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B^j$,

(b) $\alpha < \frac{1}{|B^j|} \int\limits_{B^j} |f(y)|dy \le q^d\alpha$ *với mọi* j.

Hệ quả 2.1.6. *Nếu* $f \in L^1(\mathbb{K}^d)$ *và* α *là một số thực dương. Khi đó tồn tại một phân tích của* $\mathbb{K}^d$ *sao cho*

(a) $\mathbb{K}^d = \Omega \bigcup F$ *và* $\Omega \cap F = \emptyset$,

(b) $|\{x \in F :\ |f(x)| > \alpha\}| = 0$,

(c) $\Omega = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B^j$ *là hợp đếm được các hình cầu rời nhau* $\{B^j\}$ *thỏa mãn*

$$\alpha \le \frac{1}{|B^j|} \int\limits_{B^j} |f(x)|dx \le q^d\alpha.$$

Bổ đề 2.1.7. *Cho* $(z, s) \in \mathbb{K}^d \times \mathbb{Z}$. *Giả sử rằng* $f \in L^1(z + B_s)$, α *là một số thực dương thỏa mãn* $\alpha \ge \dfrac{1}{q^{ds}} \int\limits_{z+B_s} |f(y)|dy$. *Khi đó tồn tại một họ hữu hạn hoặc đếm được các hình cầu đôi một rời nhau* $\{B^j\}_{j\ge 1}$ *nằm trong* $z + B_s$ *và thỏa mãn*

(a) $|f(x)| \le \alpha$ *với hầu khắp nơi* $x \in (z + B_s) \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B^j$

(b) $\alpha < \frac{1}{|B^j|} \int\limits_{B^j} |f(y)|dy \le q^d\alpha$ *với mọi* j.

2.2 Toán tử cực đại Hardy-Littlewood và lớp hàm trọng Muckenhoupt $\mathcal{A}_\ell$ trên trường địa phương

Định lý 2.2.2. *Giả sử $u \in L^1_{\text{loc}}\left(\mathbb{K}^d\right)$ là hàm không âm.*

(a) Toán tử cực đại M_u là loại yếu $(1,1)$,

$$u\left(\{x \in \mathbb{K}^d : M_u f(x) > \alpha\}\right) \le \frac{1}{\alpha} \cdot \|f\|_{L^1(u)}, \tag{2.5}$$

với mọi $\alpha > 0$ và với mọi $f \in L^1(u)$.

(b) Với mọi $1 < \ell \le +\infty$, thì

$$\|M_u f\|_{L^\ell(u)} \le 2\left(\frac{\ell}{\ell - 1}\right)^{1/\ell} \|f\|_{L^\ell(u)} \qquad \text{với mọi } f \in L^\ell(u). \tag{2.6}$$

Nhận xét 2.2.3. *Ta thấy rằng, hằng số $2\left(\frac{\ell}{\ell-1}\right)^{1/\ell}$ ở bất đẳng thức (2.6) (ta gọi là một L^ℓ-cận của toán tử M) không phụ thuộc vào hàm u và cũng không phụ thuộc vào số chiều d. Trong trường hợp Euclid, E.M. Stein và J.-O. Strömberg chỉ ra chuẩn của toán tử M(toán tử cực đại Hardy-Littlewood có tâm) từ $L^\ell(\mathbb{R}^d)$ vào $L^\ell(\mathbb{R}^d)$ bé hơn hoặc bằng c_ℓ, là một hằng số dương không phụ thuộc vào số chiều d. Đối với toán tử cực đại Hardy-Littlewood không tâm thì chuẩn từ $L^\ell(\mathbb{R}^d)$ vào $L^\ell(\mathbb{R}^d)$ phụ thuộc vào số chiều d.*

Hệ quả 2.2.4. *Chuẩn yếu loại $(1,1)$ của toán tử cực đại M_u là không lớn hơn 1.*

Trong trường hợp Euclid, E.M. Stein và J.-O. Strömberg đã chứng minh được rằng chuẩn loại yếu $(1,1)$ của toán tử M (toán tử cực đại Hardy-Littlewood có tâm) là bằng $\mathcal{O}(d)$, tức là phụ thuộc vào số chiều d. Lưu ý rằng, một cận yếu quen thuộc thường được sử dụng trong trường hợp Euclid là 3^d.

Định nghĩa 2.2.5. *Cho $1 < \ell < \infty$. Với mỗi hàm u không âm, khả tích địa phương trên $\mathbb{K}^d$ được gọi là thuộc vào lớp $\mathcal{A}_\ell$, nếu tồn tại một hằng số $c > 0$ thỏa mãn điều kiện sau*

$$\left(\frac{1}{q^{dk}} \int\limits_{x+B_k} u(y)dy\right) \cdot \left(\frac{1}{q^{dk}} \int\limits_{x+B_k} (u(y))^{-\frac{1}{\ell-1}}\, dy\right)^{\ell-1} \le c \tag{2.8}$$

với mọi $(k, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{K}^d$.

Hàm u được gọi là thuộc lớp $\mathcal{A}_\infty$, nếu tồn tại ϵ, δ thuộc khoảng $(0;1)$ sao cho với mọi $(k,x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{K}^d$ và với mọi tập con đo được E của $x + B_k$ mà $|E| < \epsilon\, q^{dk}$, thì $u(E) < \delta \cdot u(x + B_k)$.

Hàm u được gọi là thuộc lớp $\mathcal{A}_1$ nếu tồn tại hằng số $C > 0$ sao cho với mọi $(x,\gamma) \in \mathbb{K}^d \times \mathbb{Z}$ thì

$$\frac{1}{|B_\gamma|} \int\limits_{x+B_\gamma} u(y)dy \le C \operatorname{ess.inf} u(y),$$

ở đó ess.inf được lấy qua tất cả các y thuộc hình cầu $x + B_\gamma$.

Định lý 2.2.6. *Giả sử rằng u là một hàm thuộc lớp $\mathcal{A}_\ell$, trong đó $1 < \ell < +\infty$. Khi đó bất đẳng thức Hölder đảo ngược sau đây là đúng*

$$\left(\frac{1}{q^{dk}} \int\limits_{x+B_k} (u(y))^{1+\delta} dy\right)^{\frac{1}{1+\delta}} \le \frac{c}{q^{dk}} \int\limits_{x+B_k} u(y)dy \tag{2.9}$$

với mọi $(k,x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{K}^d$, trong đó $c > 0$, $\delta > 0$ là các hằng số không phụ thuộc vào (k,x).

Định lý 2.2.9. *Cho ℓ là một số thực thỏa mãn $1 < \ell < +\infty$ và u là một hàm không âm khả tích địa phương. Khi đó các mệnh đề sau là tương đương*

(a) u thuộc lớp $\mathcal{A}_\ell$.

(b) Với mọi $f \in L^\ell(u)$ và $\alpha > 0$ thì

$$u\left(\left\{x \in \mathbb{K}^d : \ Mf(x) > \alpha\right\}\right) \le B \cdot \alpha^{-\ell} \int\limits_{\mathbb{K}^d} |f(x)|^\ell u(x)dx. \tag{2.12}$$

(c) Với mọi $f \in L^\ell(u)$ thì

$$||Mf||_{L^\ell(u)} \le A \cdot \|f\|_{L^\ell(u)}. \tag{2.13}$$

ở đây A, B là các hằng số chỉ phụ thuộc vào u, q và d.

2.3 Bất đẳng thức trọng chuẩn Fefferman-Stein cho toán tử cực đại giá trị vectơ trên trường địa phương

Định nghĩa 2.3.1. *Toán tử cực đại Hardy-Littlewood giá trị vectơ được xác định như sau: với mỗi dãy $f = \{f_k\}_{k=1}^\infty$ (để cho tiện ta sẽ sử dụng kí hiệu $f = \{f_k\}$) các hàm khả tích địa phương trên $\mathbb{K}^d$, ta đặt $\overrightarrow{M}f = \{Mf_k\}$, trong đó M là toán tử cực đại Hardy-Littlewood.*

Các bất đẳng thức về chuẩn của toán tử cực đại Hardy-Littlewood với giá trị véctơ được C. Fefferman và E. Stein giới thiệu năm 1971. Hai ông đã thu được các bất đẳng thức cực đại mở rộng cho trường hợp các hàm với giá trị ℓ^r và đưa ra những ứng dụng thú vị vào các tích phân với hạch Poisson. Kenneth F. Andersen và Russel T. John, mở rộng các bất đẳng thức cực đại của C. Fefferman và E. Stein cho trường hợp có trọng. Năm 2009, Loukas Grafakos, Liguang Liu, và Dachun Yang nghiên cứu các bất đẳng thức Fefferman-Stein trên các không gian thuần nhất, trong trường hợp không có trọng. Trên trường địa phương, các bất đẳng thức trọng chuẩn Fefferman-Stein cho toán tử cực đại giá trị vectơ chưa được nghiên cứu trước đó. Phương pháp chứng minh của chúng tôi là vận dụng định lý nội suy, bổ đề phân tích Calderón-Zygmund đã thiết lập được và dựa trên những ý tưởng đã có trong trường hợp Euclid.

Trong mục này chúng tôi trình bày các kết quả nghiên cứu mà chúng tôi đã đạt được về các bất đẳng thức trọng chuẩn Fefferman-Stein cho toán tử cực đại giá trị vectơ trên trường địa phương. Ta kí hiệu $|f(x)|_r = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|^r\right)^{1/r}$. Giả sử t, r là các số thực thỏa mãn $1 \leq t, r < \infty$ và ω là một hàm trọng $\mathbb{K}^d$. Ta kí hiệu $L^t_\omega(\ell^r)$ là không gian tất cả các dãy $f = \{f_k\}$ các hàm đo được trên $\mathbb{K}^d$ với *chuẩn*:

$$||f||_{L^t_\omega(\ell^r)} := \left(\int_{\mathbb{K}^d} |f(x)|^t_r \omega(x)dx\right)^{1/t} < \infty. \tag{2.16}$$

Định lý 2.3.2. *Kí hiệu M là toán tử cực đại Hardy-Littlewood và ω là một hàm không âm, khả tích địa phương. Cho ℓ, r là các số thực tùy ý.*

(a) Giả sử rằng $1 \leq \ell \leq r < \infty$. Khi đó $\omega \in \mathcal{A}_\ell$, khi và chỉ khi, tồn tại một hằng số dương $C = C(r, \ell, q, d)$, chỉ phụ thuộc vào các hằng số r, ℓ, q, d, sao cho

$$\omega\left(\left\{x \in \mathbb{K}^d : |\overrightarrow{M} f|_r > \alpha\right\}\right) \leq \frac{C}{\alpha^\ell} \int\limits_{\mathbb{K}^d} |f(x)|^\ell_r \omega(x)dx, \tag{2.17}$$

với mọi dãy hàm $f = \{f_j\}$ thuộc $L^\ell_\omega(\ell^r)$, và mọi $\alpha > 0$.

(b) Giả sử rằng $1 < \ell \leq r < \infty$. Khi đó $\omega \in \mathcal{A}_\ell$, khi và chỉ khi, tồn tại một hằng số $C = C(r, \ell, q, d)$ chỉ phụ thuộc vào r, ℓ, q, d thỏa mãn

$$\int\limits_{\mathbb{K}^d} |\overrightarrow{M} f(x)|^\ell_r \omega(x)dx \leq C \int\limits_{\mathbb{K}^d} |f(x)|^\ell_r \omega(x)dx, \tag{2.18}$$

với mọi $f = \{f_j\} \in L^\ell_\omega(\ell^r)$.

2.4 Một bất đẳng thức trọng chuẩn loại yếu ngược cho toán tử cực đại

Có một câu hỏi tự nhiên được đặt ra đó là: với điều kiện nào của hàm f để hàm cực đại Mf là khả tích địa phương. A. Zygmund đưa ra lớp hàm $L\log^+ L$ và chứng minh rằng nếu f thuộc $L\log^+ L$ thì Mf khả tích địa phương. Năm 1969, E.M. Stein chứng minh được chiều ngược lại, đó là: cho f là hàm khả tích trên B, nếu Mf thuộc $L^1(B)$, với B là một hình cầu nào đó, thì f thuộc lớp hàm $L\log^+ L$. Một trong những kĩ thuật chính trong chứng minh của E.M. Stein đó là phải thiết lập được một bất đẳng thức ngược với bất đẳng thức yếu loại $(1,1)$. Kết quả này cũng được J.A. Chao chứng minh đúng trên trường địa phương, với trường hợp không có hàm trọng.

Năm 1984, các nhà toán học K.F. Andersen và Wo-Sang Young đã mở rộng bất đẳng thức ngược loại yếu của E.M. Stein sang trường hợp cặp hàm trọng. K.F. Andersen và Wo-Sang Young đưa ra các điều kiện về hàm trọng u và hàm trọng v để có được bất đẳng thức ngược với bất đẳng thức loại yếu $(1,1)$. Trong mục này, chúng tôi nghiên cứu các kết quả mà K.F. Andersen và Wo-Sang Young đã nhận được trong trường địa phương. Chúng tôi cũng thu được một số các kết quả tương tự như trong trường hợp Euclid của K.F. Andersen và Wo-Sang Young. Nhưng điều thú vị ở đây là: trong $\mathbb{R}^d$ các điều kiện cần và các điều kiện đủ của cặp hàm trọng đưa ra là không tương đương nhau. Để có được sự tương đương giữa các điều kiện cần và các điều kiện đủ, các hàm trọng cần phải được giả thiết thêm là thỏa mãn điều kiện kép. Tuy nhiên những kết quả tương ứng trong $\mathbb{K}^d$, dù không cần đặt thêm điều kiện kép cho các hàm trọng, thì các điều kiện cần và các điều kiện đủ đặt lên cặp hàm trọng (u,v) mà chúng tôi nhận được là *gần tương tự nhau* (thực chất là các điều kiện tương đương nhưng sai khác một hằng số). Chính sự khác biệt giữa hai hệ bổ đề phân tích loại Calderón-Zygmund, giữa hai cấu trúc hình học của hai trường thực và trường địa phương dẫn tới sự nhau về mặt kết quả nói trên. Cũng trong mục này, chúng tôi ứng dụng kết quả thu được về bất đẳng thức ngược loại yếu, để chứng minh được điều kiện cần đảm bảo tính khả tích của hàm cực đại Mf trong không gian trọng là f thuộc lớp trọng $L\log^+ L$ tương ứng. Từ kết quả này, chúng tôi thu được kết quả của J.A. Chao như là một hệ quả trực tiếp.

Định lý 2.4.1. *Cho $(s,x) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{K}^d$ và hai hàm u, v không âm, khả tích trên hình cầu $x+B_s$.*

(a) Giả sử rằng tồn tại một hằng số $c_1>0$ sao cho

$$\frac{u\left(x+y+B_k\right)}{q^{dk}} \geq c_1 \cdot \operatorname{ess.sup}_{z\in y+B_k} v(x+z),$$

với mọi $(y + B_k) \subset B_s$. *Khi đó*

$$u\left(\{y \in x + B_s :\, Mf(y) > \lambda\}\right) \geq \frac{c_1}{q^d \lambda} \int\limits_{\{y \in x+B_s :\, |f(y)| > \lambda\}} |f(y)| v(y) dy, \tag{2.28}$$

với mọi hàm $f \in L^1(x + B_s)$ *và với mọi* $\lambda \geq \frac{1}{q^{sd}} \int\limits_{x+B_s} |f(y)| dy$.

(b) *Đảo lại, nếu (2.28) đúng với mọi* $f = \chi_E$, *hàm đặc trưng của tập đo được* $E \subset \mathbb{K}^d$ *với* $0 < |E| < +\infty$, *và với mọi* $0 < \lambda \leq 1$, *thì*

$$\frac{u\left(x + y + B_k\right)}{q^{dk}} \geq \frac{c_1}{q^d} \cdot \operatorname{ess.sup}_{z \in y + B_k} v(x + z),$$

với mọi $(y + B_k) \subset B_s$.

Định lý 2.4.2. *Giả sử rằng* u, v *là các hàm không âm, khả tích địa phương trên* $\mathbb{K}^d$.

(a) *Nếu tồn tại một hằng số dương* c_2 *sao cho*

$$\frac{u(x + B_k)}{q^{dk}} \geq c_2 \cdot \operatorname{ess.sup}_{y \in x + B_k} v(y),$$

với mọi $(k, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{K}^d$ *thì*

$$u(\{x \in \mathbb{K}^d : Mf(x) > \lambda\}) \geq \frac{c_2}{q^d \lambda} \int\limits_{\{x \in \mathbb{K}^d :\, |f(x)| > \lambda\}} |f(x)| v(x) dx, \tag{2.29}$$

với mọi $f \in L^1(\mathbb{K}^d)$ *và với mọi* λ *dương.*

(b) *Đảo lại, nếu (2.29) đúng với mọi hàm đặc trưng* $f = \chi_E$ *của tập đo được* $E \subset \mathbb{K}^d$ *mà* $0 < |E| < +\infty$ *và với mọi* $0 < \lambda \leq 1$, *thì*

$$\frac{u(x + B_k)}{q^{dk}} \geq \frac{c_2}{q^d} \cdot \operatorname{ess.sup}_{y \in x + B_k} v(y), \tag{2.30}$$

với mọi $(k, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{K}^d$.

Với mỗi số thực x, ta kí hiệu $\log^+ x = \begin{cases} \log x & \text{nếu } x > 1 \\ 0 & \text{ngược lại.} \end{cases}$

Định lý 2.4.3. *Giả sử rằng* u, v *là hai hàm không âm, khả tích địa phương và* $(s, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{K}^d$ *thỏa mãn*

$$\frac{u(x + y + B_k)}{q^{dk}} \geq c \cdot \operatorname{ess.sup}_{z \in y + B_k} v(x + z), \tag{2.31}$$

với mọi hình cầu $(y+B_k) \subset B_s$. *Ở đây* c *là một hằng số không phụ thuộc vào cách chọn hình cầu* $y+B_k$. *Với mọi hàm* f *khả tích địa phương, có giá nằm trong* $x+B_s$, *nếu* $\int\limits_{x+B_s} Mf(y)u(y)dy < +\infty$ *thì*

$$\int\limits_{x+B_s} |f(y)| \cdot \log^+ |f(y)| v(y) dy < +\infty.$$

Hệ quả 2.4.4. *Giả sử rằng* f *là một hàm thuộc* $L^1(\mathbb{K})$ *có giá nằm trên mặt cầu* S *nào đó. Khi đó:*

$$\text{nếu } \int\limits_S M_\star f(x)dx < \infty \text{ thì } \int\limits_S |f(x)| \log^+ |f(x)| dx < \infty.$$

ở đây toán tử $M_\star$ *được xác định bởi công thức* $M_\star f(z) = \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \dfrac{1}{q^k} \int\limits_{z+S_k} |f(t)|dt$

2.5 Ước lượng loại yếu cho một lớp toán tử tích phân

Trong mục này chúng tôi sẽ đi nghiên cứu một lớp toán tử tích phân cực đại được sinh ra tự nhiên từ một dãy các nhân $\{\zeta_m\}_{m\geq 1}$. Giả sử $\{\zeta_m\}_{m\geq 1}$ là một dãy các hàm thuộc lớp L^1_{loc}, thỏa mãn điều kiện

$$\sup_{y\neq 0} \sum_{m=1}^{+\infty} \int\limits_{|x|\geq q^2|y|} |\zeta_m(x-y) - \zeta_m(x)| dx \leq c_2 < +\infty. \tag{2.33}$$

Ta đặt $Tf(x) = \sup\limits_{m\geq 1} |\zeta_m * f(x)|$. Sau đây là kết quả chính của mục này

Định lý 2.5.2. *Giả sử rằng* T *có thể xác định như là một toán tử bị chặn từ* $L^\ell(\mathbb{K}^d)$ *tới* $L^\ell(\mathbb{K}^d)$, *với* ℓ *là một số thực thỏa mãn* $1 < \ell < +\infty$. *Khi đó,* T *có thể thác triển tới một toán tử loại yếu* $(1,1)$ *và thỏa mãn*

$$|\{x : Tf > \lambda\}| \leq \frac{C_T}{\lambda} \cdot \|f\|_1 \quad \text{với mọi } f \in L^1\left(\mathbb{K}^d\right) \text{ và mọi } \lambda > 0. \tag{2.34}$$

Ở đây C_T *là một hằng số dương và có thể chọn*

$$C_T = 2\frac{\ell}{(\ell-1)^{1-\frac{1}{\ell}}} \cdot q^{2d(1-\frac{1}{\ell})} \cdot \|T\|_\ell + 4c_2.$$

Chương 3

BÀI TOÁN MUCKENHOUPT TRÊN TRƯỜNG ĐỊA PHƯƠNG

Vào năm 1979, Benjamin Muckenhoupt đã đặt ra câu hỏi rằng một hàm trọng v, tức là một hàm không âm và khả tích địa phương, phải thỏa mãn điều kiện gì để tồn tại một hàm u không âm, đo được, hữu hạn hầu khắp nơi, sao cho toán tử cực đại Hardy-Littlewood M bị chặn từ $L^p(\mathbb{R}^n, udx)$ vào $L^p(\mathbb{R}^n, vdx)$. Bài toán này đã được giải độc lập bởi Wo-Sang Young và muộn hơn sau đó bởi nhóm các tác giả Angel E. Gatto, Cristian E. Gutiérrez với hai phương pháp chứng minh khác nhau. Trong chương này chúng tôi đi trả lời câu hỏi tương tự đặt ra trên $\mathbb{K}^d$: với điều kiện nào của hàm trọng v để toán tử Hardy-Littlewood M là bị chặn từ $L^\ell\left(\mathbb{K}^d, udx\right)$ vào $L^\ell\left(\mathbb{K}^d, vdx\right)$, với một hàm trọng u nào đó.

Lớp hàm v là nghiệm của bài toán về hình thức là giống với trong trường hợp $\mathbb{R}^d$. Thực tế thì việc tìm ra điều kiện cần, tức là v thuộc lớp hàm nào khá đơn giản, với chứng minh tương tự như trong $\mathbb{R}^d$. Phần khó khăn nhất chính là việc xây dựng hàm u như thế nào để thỏa mãn yêu cầu: nếu v thuộc lớp hàm đã tìm được thì toán tử M sẽ bị chặn từ $L^\ell(u)$ vào $L^\ell(v)$. Tuy nhiên, chúng tôi đã tính toán được rằng, nếu giữ nguyên về mặt hình thức hàm u do Wo-Sang Young xây dựng sang trường hợp trường địa phương thì chứng minh sẽ bị đổ vỡ vì một số chuỗi lũy thừa kiểu như $1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \cdots$ không hội tụ trong $\mathbb{K}$. Chính vì vậy, khó khăn lớn nhất khi nghiên cứu bài toán trọng Muckenhoupt trên trường địa phương là việc xây dựng hàm u thích hợp khi mà các hàm sẵn có trong $\mathbb{R}^d$ không còn dùng được nữa. Ý tưởng xây dựng hàm u của chúng tôi là giữ lại phần "đẹp" của hàm u mà Wo-Sang Young đã xây dựng được và dán thêm một hàm thích hợp khác thay thế cho phần "xấu". Vì thế hàm u được xây dựng trong luận án này, về mặt hình thức, rất khác biệt so với trường hợp thực đã được xây dựng bởi Wo-Sang Young, hay bởi Angel E. Gatto, Cristian E. Gutiérrez.

3.2 Lớp hàm trọng $\mathcal{W}_\ell$ và bài toán trọng của Muckenhoupt trên trường địa phương

Định nghĩa 3.2.2. *Cho ℓ là một số thực thỏa mãn $1 < \ell < \infty$. Ta kí hiệu $\mathcal{W}_\ell$ là tập tất cả các hàm đo được không âm v trên $\mathbb{K}^d$ mà thỏa mãn $\int\limits_{\mathbb{K}^d} \frac{v(x)}{(1+|x|^d)^\ell} dx < \infty$.*

Định lý 3.2.4. *Cho ℓ là một số thực thỏa mãn $1 < \ell < \infty$ và v là một hàm đo được không âm trên $\mathbb{K}^d$ nhận giá trị trong $[0; +\infty]$. Khi đó điều kiện cần và đủ để v thuộc lớp $\mathcal{W}_\ell$ là tồn tại một hàm u đo được, không âm, hữu hạn hầu khắp nơi trên $\mathbb{K}^d$, nhận giá trị trong $[0; +\infty]$, thỏa mãn*

$$\int\limits_{\mathbb{K}^d} |Mf|^\ell v dx \leq C \int\limits_{\mathbb{K}^d} |f|^\ell u dx \tag{3.3}$$

với mọi $f \in L^\ell(u)$. Ở đây C là một hằng số dương chỉ phụ thuộc vào ℓ, q và d.

Nhận xét 3.2.5. *Trường hợp $\mathbb{R}^d$, nếu kí hiệu $w(x) = (1 + |x|^d)^{1-\ell}$ và $v_1 = \max\{v, 1\}$ thì hàm u mà Wo-Sang Young sử dụng là $u = w^{-3} M(wv_1)$. Trong khi đó, nhóm tác giả Angel E. Gatto và Cristian E. Gutiérrez sử dụng hàm $u(x) = \mathcal{M}_0 v + (1 + |x|)^a$ trong đó $a > d(\ell - 1)$ và $\mathcal{M}_0 v(x) = \sup\limits_{\substack{x \in B_r \\ r < |x|+1}} \dfrac{1}{|B_r|} \int\limits_{B_r} |v(t)| dt$, với B_r là hình cầu tâm 0, bán kính r. Như đã trình bày trong phần mở đầu của chương, hai hàm u nói trên không chuyển sang trường địa phương được.*

Hệ quả 3.2.6. *Giả sử rằng ℓ là một số thực mà $1 < \ell < \infty$ và ω là một hàm thuộc lớp $\mathcal{A}_\ell$. Khi đó ω cũng thuộc lớp $\mathcal{W}_\ell$.*

Kết luận và kiến nghị

Những kết quả chính của Luận án

1. Xây dựng được lớp các hàm trọng Muckenhoupt trên trường địa phương. Qua đó giải quyết được bài toán về tìm điều kiện cần và đủ của hàm trọng để toán tử Hardy-Littlewood M và dạng véctơ của nó là loại yếu và mạnh (ℓ, ℓ) với $1 \leq \ell < \infty$.

2. Đưa ra một điều kiện cần và một điều kiện đủ cho cặp hàm trọng (u, v) để toán tử cực đại Hardy-Littlewood M thỏa mãn bất đẳng thức trọng chuẩn loại yếu ngược. Chúng tôi ứng dụng kết quả đó vào lớp hàm $L \log^+ L$ với trọng của Zygmund để nhận được một điều kiện cần cho tính khả tích của hàm cực đại Hardy-Littlewood.

3. Chúng tôi đưa ra một lớp toán tử tích phân cực đại mới trên trường địa phương và chứng minh được rằng nếu toán tử đó là xác định như là một toán tử loại mạnh (ℓ, ℓ), với $1 < \ell < \infty$ nào đó, thì toán tử đó là loại yếu $(1, 1)$. Một cận yếu của toán tử này cũng được chúng tôi chỉ ra.

4. Giải quyết trọn vẹn một bài toán trọng Muckenhoupt trên trường địa phương. Chúng tôi đưa ra một lớp hàm trọng mới $\mathcal{W}_\ell$ và chứng minh được rằng: điều kiện cần và đủ để $v \in \mathcal{W}_\ell$ là tồn tại một hàm đo được không âm, hữu hạn hầu khắp nơi u sao cho M bị chặn từ $L^\ell(u)$ vào $L^\ell(v)$.

Các kết quả nhận được là mới, có ý nghĩa khoa học và nằm trong vấn đề đang được nhiều nhà toán học trên thế giới và trong nước quan tâm nghiên cứu.

Những vấn đề cần tiếp tục nghiên cứu

Nghiên cứu bài toán đặc trưng trọng Muckenhoupt cho trường hợp toán tử cực đại với giá trị véctơ. Nghiên cứu các bài toán đặc trưng trọng cho các toán tử tích phân kì dị, tích phân dao động, các toán tử tích phân cực đại trên trường địa phương, trong các không gian hàm khác nhau.

Lời cảm ơn

Luận án được thực hiện và hoàn thành tại Viện Toán học thuộc Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam, dưới sự hướng dẫn tận tình và nghiêm khắc của GS.TSKH Nguyễn Minh Chương. Thầy đã hướng dẫn và truyền thụ cho tác giả những kinh nghiệm trong học tập, nghiên cứu khoa học. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và kính trọng sâu sắc đối với Thầy.

Trong quá trình nghiên cứu và hoàn thành luận án, tác giả luôn nhận được sự giúp đỡ, góp ý của GS.TSKH Hà Huy Khoái, GS.TSKH Nguyễn Mạnh Hùng, PGS.TSKH Nguyễn Minh Trí, PGS.TS Hà Tiến Ngoạn, TS. Nguyễn Văn Ngọc, TS. Cung Thế Anh, TS. Nguyễn Văn Cơ. Tác giả xin chân thành cảm ơn sự quan tâm giúp đỡ của các Thầy.

Tác giả xin chân thành cảm ơn các thầy, cô giáo cùng các anh chị em nghiên cứu sinh, cao học trong xemina "*Toán tử giả vi phân, sóng nhỏ trên các trường thực, $p-$adic*", xemina của Phòng Phương trình vi phân đã tạo một môi trường học tập và nghiên cứu thuận lợi giúp tác giả hoàn thành luận án này. Tại đây tác giả đã nhận được nhiều chỉ dẫn, góp ý cũng như môi trường nghiên cứu sôi nổi và thân thiện, điều không thể thiếu trong quá trình nghiên cứu, hoàn thành luận án của tác giả.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban lãnh đạo Viện Toán học, Trung tâm Đào tạo sau đại học cùng toàn thể cán bộ, công nhân viên Viện Toán học đã tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tác giả trong quá trình thực hiện luận án.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn Trường THPT Chuyên Đại học Sư phạm đã tạo điều kiện giúp đỡ, động viên tác giả trong suốt thời gian làm nghiên cứu sinh và thực hiện Luận án.

Tác giả xin chân thành cảm ơn bạn bè, đồng nghiệp, đặc biệt là cha mẹ, vợ và các con cùng những người thân trong gia đình, đã giúp đỡ động viên tác giả trong suốt thời gian thực hiện Luận án.

Các kết quả của luận án đã được báo cáo tại

- Xemina Phòng phương trình vi phân - Viện Toán học.

- Xemina "*Toán tử giả vi phân, sóng nhỏ trên các trường thực, $p-$adic*" của Viện toán học.

- Hội nghị nghiên cứu sinh các năm 2008, 2009, 2010 của Viện Toán học.

Danh mục công trình công bố

1. NGUYEN MINH CHUONG, HA DUY HUNG (2010), *Maximal functions and weighted norm inequalities on local fields*, Applied and Computational Harmonic Analysis, **29**, 272-286.

2. NGUYEN MINH CHUONG, HA DUY HUNG (2010), *A Muckenhoupt's weight problem and vector valued maximal inequalities over local fields*, $p-$adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications, **2**, No.4, 305-321.