VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM
VIỆN TOÁN HỌC

HOÀNG THẾ TUẤN

VỀ MỘT SỐ VẤN ĐỀ ĐỊNH TÍNH CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN PHÂN THỨ

Chuyên ngành: Phương trình vi phân và tích phân
Mã số: 62.46.01.03

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HÀ NỘI - 2016

Luận án được hoàn thành tại:

Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam

Người hướng dẫn khoa học:

TSKH. Đoàn Thái Sơn
GS. TSKH. Nguyễn Đình Công

Phản biện 1: ....
....

Phản biện 2: ....
....

Phản biện 3: ....
....

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm Luận án cấp Viện họp tại Viện Toán học - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam vào hồi...giờ ngày...tháng...năm 2017.

Có thể tìm luận án tại:

- Thư viện Quốc gia Hà nội
- Thư viện Viện Toán học

Lời mở đầu

Trong những năm gần đây, lý thuyết giải tích phân thứ nhận được sự quan tâm ngày một nhiều của cả cộng đồng làm toán lý thuyết lẫn toán ứng dụng. Một trong những lý do là người ta có thể mô hình hóa các bài toán xuất hiện trong những lĩnh vực khoa học, công nghệ khác nhau từ Vật lý, Hóa học, Sinh học, Tài chính đến Khoa học xã hội bằng phương trình vi phân phân thứ.

Đã có nhiều công trình liên quan đến các phương diện khác nhau của lý thuyết này được công bố. Nổi bật trong số đó là các tuyển tập của K. Oldham và J. Spenier (1974), S. Samko, O. Marichev và A. Kilbas (1993) và gần đây có thêm các chuyên khảo đáng chú ý của I. Podlubny (1999) và K. Diethelm (2010).

Một điều đáng ngạc nhiên là cho tới nay, lý thuyết định tính cho các phương trình vi phân phân thứ còn chưa được phát triển đầy đủ. Lý do là các phương trình vi phân phân thứ không sinh ra toán tử có tính chất nửa nhóm. Vì vậy, chúng ta không thể xây dựng được hệ động lực theo nghĩa cổ điển cho các phương trình này và áp dụng trực tiếp được các phương pháp đã có trong lý thuyết phương trình vi phân thường, xem N.D. Cong và H.T. Tuan (2016).

Luận án này đề cập đến các chủ điểm sau trong lý thuyết định tính của phương trình vi phân phân thứ: số mũ Lyapunov, tính chất ổn định tiệm cận, không ổn định và sự tồn tại của các đa tạp ổn định. Luận án gồm bốn chương.

Chương 1 nhắc lại vắn tắt một số kiến thức cơ bản của lý thuyết giải tích phân thứ: tích phân phân thứ, đạo hàm phân thứ và phương trình vi phân phân thứ. Ngoài ra, trong chương này chúng ta cũng giới thiệu hàm Mittag-Leffler và công thức biến thiên hằng số. Đây là những công cụ chủ yếu để nghiên cứu dáng điệu nghiệm cho các phương trình vi phân phân thứ ở các chương kế tiếp.

Chương 2 nghiên cứu số mũ Lyapunov cho phương trình vi phân phân thứ tuyến tính thuần nhất với hệ số biến thiên. Chương này gồm 3 phần. Phần 2.1 nói về số mũ Lyapunov cho các phương trình phân thứ. Trước hết, trong Mục 2.1.1, chúng ta chứng minh rằng số mũ Lyapunov cổ điển cho các nghiệm không tầm thường của phương trình vi phân phân thứ tuyến tính với hệ số liên tục, bị chặn luôn không âm. Sau đó, trong Mục 2.1.2, chúng ta xây dựng một khái niệm số mũ mới (số mũ Lyapunov phân thứ) và dùng số mũ này để đặc trưng tính ổn định nghiệm của các phương trình vi phân phân thứ tuyến tính. Phần 2.2 được giành để mô tả cấu trúc phổ Lyapunov phân thứ cho nghiệm xuất phát từ mặt cầu đơn vị trong không gian Euclide d-chiều của các phương trình vi phân phân thứ tuyến tính. Như một ví dụ minh họa, phần cuối của chương chúng ta tính tường minh số mũ Lyapunov phân thứ cho các nghiệm không tầm thường của phương trình vi phân phân thứ tuyến tính hai chiều hệ số hằng bất kì.

Chương 3 thảo luận về tính ổn định tiệm cận, tính không ổn định cho điểm cân bằng của một lớp phương trình vi phân phân thứ tương đối tổng quát. Cụ thể, chúng ta phát biểu các định lí về tính ổn định tiệm cận, không ổn định cho nghiệm tầm thường của phương trình vi phân phân thứ trong các không gian Euclide hữu hạn chiều.

Chương cuối giới thiệu kết quả về sự tồn tại của đa tạp ổn định địa phương gần điểm cân bằng hyperbolic của phương trình vi phân phân thứ phi tuyến trong các không gian Euclide hữu hạn chiều tùy ý.

Chương 1

Giới thiệu tóm tắt về phương trình vi phân phân thứ

1.1 Giải tích phân thứ

Chương này được dành để nhắc lại những kiến thức cơ bản của lý thuyết giải tích phân thứ. Trước tiên, chúng ta giới thiệu khái niệm tích phân phân thứ. Hiểu theo một nghĩa nào đó, tích phân phân thứ là một mở rộng tự nhiên của khái niệm tích phân lặp thông thường. Cụ thể, cho $\alpha > 0$ và $[a, b] \subset \mathbb{R}$, chúng ta định nghĩa *tích phân phân thứ Riemann–Liouville cấp* α của hàm $x : [a, b] \to \mathbb{R}$ là

$$I_{a+}^{\alpha} x(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} x(\tau)\, d\tau, \quad t \in (a, b],$$

ở đây *hàm Gamma* $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}_{>0}$ có biểu diễn

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} \exp(-t)\, dt.$$

Cùng với tích phân phân thứ, đạo hàm phân thứ là một trong hai khái niệm then chốt của phép tính vi–tích phân phân thứ. Có nhiều loại đạo hàm phân thứ đã được xây dựng. Tuy nhiên, trong luận án này chúng ta chỉ nghiên cứu đạo hàm phân thứ Caputo. Sau đây chúng ta nhắc lại định nghĩa của loại đạo hàm quan trọng này.

Với số thực dương α cho trước, *đạo hàm phân thứ Caputo cấp* α của hàm $x : [a, b] \to \mathbb{R}$ được định nghĩa là

$${}^{C}D_{a+}^{\alpha} x(t) := I_{a+}^{m-\alpha} D^m x(t), \qquad t \in (a, b],$$

ở đây $m := \lceil \alpha \rceil$ là số nguyên nhỏ nhất lớn hơn hoặc bằng α và $D^m = \frac{d^m}{dx^m}$ là đạo hàm thông thường cấp m. Với một hàm véc tơ $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_d(t))^{\mathrm{T}}$, đạo hàm phân thứ Caputo của $x(t)$ được định nghĩa theo từng thành phần như sau:

$${}^{C}D_{a+}^{\alpha} x(t) := ({}^{C}D_{a+}^{\alpha} x_1(t), \ldots, {}^{C}D_{a+}^{\alpha} x_d(t))^{\mathrm{T}}.$$

Từ đây trở về sau, chúng ta luôn mặc định α là cấp phân thứ của của đạo hàm và hạn chế xét α trong khoảng $(0, 1)$.

Xét bài toán giá trị đầu phân thứ trên nửa đường thẳng thực $\mathbb{R}_{\geq 0}$:

$$^{C}D^{\alpha}_{0+}x(t) = f(t, x(t)), \quad t > 0, \tag{1.1}$$

$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^d, \tag{1.2}$$

ở đây $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^d$. Hàm $\varphi(\cdot, x_0) : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^d$ liên tục trên $\mathbb{R}_{\geq 0}$ được gọi là nghiệm của bài toán giá trị đầu (1.1), (1.2), nếu $\varphi(\cdot, x_0)$ thỏa mãn (1.1) với mọi $t > 0$ và $\varphi(0, x_0) = x_0$. Tương tự như trong lý thuyết phương trình vi phân thường, chúng ta có định lí sau về sự tồn tại và duy nhất nghiệm toàn cục của phương trình (1.1).

Định lý 1.1 (Định lí tồn tại duy nhất nghiệm toàn cục)**.** *Giả sử $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ là một hàm liên tục và thỏa mãn*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L(t)\|x - y\|, \quad \forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^d,$$

ở đây $L : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ là một hàm liên tục. Khi đó, với điều kiện đầu tùy ý $x_0 \in \mathbb{R}^d$, bài toán giá trị đầu (1.1), (1.2)*, có nghiệm toàn cục duy nhất trên $\mathbb{R}_{\geq 0}$.*

Chứng minh. Chứng minh hoàn toàn tương tự Định lí 2 trong Baleanu (2010). □

1.2 Hàm Mittag-Leffler

Xét bài toán giá trị ban đầu phân thứ trên $\mathbb{R}_{\geq 0}$:

$$^{C}D^{\alpha}_{0+}x(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^d, \tag{1.3}$$

ở đây $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$. Theo Định lí 1.1, với bất kì $x_0 \in \mathbb{R}^d$, bài toán giá trị đầu (1.3), $x(0) = x_0$, có nghiệm toàn cục duy nhất $\varphi(\cdot, x_0)$ xác định trên $[0, \infty)$. Bằng tính toán tương tự như trong chứng minh của Định lí 4.3 trong Diethelm (2010), người ta thu được công thức tường minh của $\varphi(\cdot, x_0)$ như sau

$$\varphi(t, x_0) = E_\alpha(t^\alpha A)x_0,$$

trong đó $E_\alpha : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ là hàm Mittag-Leffler một tham số nhận giá trị ma trận có biểu diễn

$$E_\alpha(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \forall A \in \mathbb{R}^{d \times d}.$$

Vì các hàm Mittag-Leffler xuất hiện một cách tự nhiên trong lý thuyết phương trình vi phân phân thứ giống như hàm mũ xuất hiện trong lý thuyết phương trình vi phân thường, việc nghiên cứu các tính chất của nó sẽ cho chúng ta nhiều thông tin về dáng điệu nghiệm của các phương trình vi phân phân thứ. Sau đây chúng ta nhắc lại định nghĩa của hàm rất quan trọng này. Với $\beta \in \mathbb{C}$ bất kì, một hàm $E_{\alpha,\beta} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ xác định bởi

$$E_{\alpha,\beta}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad z \in \mathbb{C},$$

được gọi là *hàm Mittag-Leffler hai tham số*. Khi $\beta = 1$, để làm đơn giản kí hiệu, chúng ta viết E_α thay vì $E_{\alpha,1}$ và gọi E_α là *hàm Mittag-Leffler một tham số*. Các hàm Mittag-Leffler nhận giá trị ma trận được định nghĩa hoàn toàn tương tự, tức là

$$E_{\alpha,\beta}(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad A \in \mathbb{C}^{d \times d}.$$

1.3 Công thức biến thiên hằng số

Để nghiên cứu các tính chất nghiệm của phương trình vi phân phân thứ, đặc biệt là các phương trình hệ số hằng, một trong những công cụ được sử dụng phổ biến là công thức biến thiên hằng số. Công thức này là cầu nối giữa nghiệm của một phương trình không thuần nhất với một phương trình tuyến tính hệ số hằng thuần nhất liên kết với nó. Cụ thể, xét phương trình vi phân phân thứ cấp $\alpha \in (0,1)$ trên $\mathbb{R}_{\geq 0}$:

$$^{C}D^{\alpha}_{0+}x(t) = Ax(t) + f(x(t)), \tag{1.4}$$

ở đây $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ và $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ là một hàm liên tục Lipschitz thỏa mãn $f(0) = 0$. Chúng ta có biểu diễn sau cho nghiệm của (1.4).

Định lý 1.2 (Công thức biến thiên hằng số cho nghiệm của phương trình vi phân phân thứ)**.** *Giả sử f là hàm liên tục Lipschitz toàn cục trên $\mathbb{R}^d$ với hệ số Lipschitz L và $f(0) = 0$. Khi đó, với mọi $x_0 \in \mathbb{R}^d$, bài toán giá trị đầu (1.4), $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^d$, có nghiệm toàn cục duy nhất $\varphi(\cdot, x_0)$. Hơn nữa, nghiệm này thỏa mãn công thức biến thiên hằng số:*

$$\varphi(t, x_0) = E_\alpha(t^\alpha A)x_0 + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha A)f(\varphi(\tau, x_0))\, d\tau \tag{1.5}$$

với mọi $t \geq 0$.

Chương 2

Số mũ Lyapunov cho phương trình vi phân phân thứ

Bài toán quan trọng trong lý thuyết định tính của phương trình vi phân là nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của các nghiệm. Đối với trường hợp phương trình tuyến tính thuần nhất hệ số hằng, dáng điệu các nghiệm được mô tả đầy đủ thông qua phần thực các giá trị riêng của ma trận hệ số và bội của chúng. Với phương trình tuyến tính thuần nhất có hệ số tuần hoàn, Lý thuyết Floquet được sử dụng để mô tả cặn kẽ dáng điệu của tất cả các nghiệm, xem L.Ya. Adrianova (1995). Ngoài các trường hợp kể trên, thông tin về nghiệm của hệ còn tương đối sơ lược. Để nghiên cứu hệ tuyến tính hệ số biến thiên, phương pháp số mũ đặc trưng được đề xuất bởi Lyapunov, xem Adrianova (1995) và Oseledec (1968), là một công cụ có hiệu lực mạnh và phạm vi áp dụng rộng. Ý tưởng chính của phương pháp này là so sánh độ tăng trưởng hay suy giảm của nghiệm với hàm mũ. Độ tăng trưởng (suy giảm) được xác định thông qua số mũ đặc trưng (ngày nay gọi là số mũ Lyapunov cổ điển). Người ta biết rằng một hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất trong không gian Euclide d-chiều $\mathbb{R}^d$ có nhiều nhất d số mũ Lyapunov phân biệt. Tập tất cả các số mũ này cùng với bội của chúng được gọi là phổ Lyapunov. Nhiều tính chất quan trọng của hệ như tính ổn định, tính hyperbolic, tính rẽ nhánh,...v.v, có thể được đặc trưng bởi phổ Lyapunov của nó.

Xét phương trình vi phân phân thứ Caputo cấp $\alpha \in (0, 1)$

$$ {}^{C}D^{\alpha}_{0+}x(t) = A(t)x(t), \tag{2.1}$$

ở đây $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ và $A : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^{d\times d}$ là một hàm liên tục, bị chặn, tức là tồn tại một hằng số $M > 0$ sao cho

$$M := \sup_{t\geq 0} \|A(t)\| < \infty. \tag{2.2}$$

Mục đích chính của chương này là xây dựng lý thuyết số mũ Lyapunov cho (2.1).

2.1 Phổ Lyapunov cho phương trình vi phân phân thứ

Trong phần này, chúng ta thảo luận về số mũ Lyapunov cổ điển và số mũ Lyapunov phân thứ cho nghiệm của phương trình vi phân phân thứ tuyến tính (2.1).

2.1.1 Số mũ Lyapunov cổ điển cho phương trình vi phân phân thứ

Chúng ta nhắc lại ở đây khái niệm số mũ Lyapunov cổ điển (đôi khi được gọi tắt là số mũ Lyapunov) cho một hàm vectơ. *Số mũ Lyapunov cổ điển* của hàm $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^d$ được định nghĩa là

$$\chi(f) := \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|f(t)\|.$$

Khác với số mũ Lyapunov cho phương trình vi phân thường, định lí sau chỉ ra rằng số mũ Lyapunov của các nghiệm không tầm thường bất kì của phương trình vi phân phân thứ (2.1) luôn không âm.

Định lý 2.1. *Mọi nghiệm không tầm thường của* (2.1) *đều có số mũ Lyapunov không âm. Cụ thể,*

$$\chi(\varphi(\cdot, x_0)) \geq 0, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}.$$

2.1.2 Số mũ Lyapunov phân thứ cho phương trình vi phân phân thứ

Khi định nghĩa số mũ Lyapunov cổ điển, người ta đã sử dụng hàm log (là hàm ngược của hàm mũ) để thu được tốc độ tăng trưởng hay suy giảm so với hàm mũ của một hàm số cho trước. Trong lý thuyết phương trình vi phân phân thứ, hàm Mittag-Leffler một tham số đóng vai trò tương tự như hàm mũ đối với phương trình vi phân thường. Điều này gợi ý cho chúng ta sử dụng hàm ngược của hàm Mittag-Leffler thực một tham số để mở rộng khái niệm số mũ Lyapunov cổ điển cho nghiệm của phương trình phân thứ.

Xét hàm Mittag-Leffler một tham số nhận giá trị thực $E_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Từ Định lí 7.3 trong Diethelm (2010), người ta biết rằng hàm này đơn điệu tăng và có các giới hạn tại vô cực là

$$\lim_{x\to-\infty} E_\alpha(x) = 0 \quad \text{và} \quad \lim_{x\to\infty} E_\alpha(x) = +\infty.$$

Do đó, nó có ánh xạ ngược. Kí hiệu $\log_\alpha^M : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ là hàm ngược của $E_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Hiển nhiên $\log_\alpha^M$ cũng là một hàm liên tục và đơn điệu tăng. Bây giờ chúng ta định nghĩa số mũ Lyapunov phân thứ của một hàm tùy ý.

Định nghĩa 2.2. Cho $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^d$ là một hàm nhận giá trị vectơ bất kì. Số mũ Lyapunov phân thứ cấp α của f được định nghĩa bởi

$$\chi_\alpha(f) = \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t^\alpha} \log_\alpha^M(\|f(t)\|). \tag{2.3}$$

Tập hợp tất cả các số mũ Lyapunov phân thứ cho các nghiệm không tầm thường của phương trình (2.1) được môt tả như sau.

Định lý 2.3 (Phổ Lyapunov phân thứ của hệ phân thứ)**.** *Chúng ta định nghĩa* Phổ Lyapunov phân thứ *của* (2.1) *là tập*

$$\Sigma_\alpha := \Big\{\chi_\alpha(\varphi(\cdot, x_0)) : x_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}\Big\}.$$

Khi đó, những phát biểu sau đây đúng.

(i) $\Sigma_\alpha \subset (-\infty, M]$.

(ii) *Tập* $\Sigma_\alpha \cap \mathbb{R}_{\geq 0}$ *chứa nhiều nhất* d *phần tử phân biệt và chúng được kí hiệu là* $\lambda_j < \lambda_{j-1} < \cdots < \lambda_1$, *ở đây* $0 \leq j \leq d$.

(iii) *Nếu* $\Sigma_\alpha \cap \mathbb{R}_{<0} \neq \emptyset$, *thì* $\mathbb{R}_{<0} \subset \Sigma_\alpha$.

Ngoài ra, các tập

$$S := \{x_0 \in \mathbb{R}^d : \chi_\alpha(\varphi(\cdot, x_0)) < 0\} \tag{2.4}$$

và

$$E_i := \{x_0 \in \mathbb{R}^d : \chi_\alpha(\varphi(\cdot, x_0)) \leq \lambda_i\}, \quad i = 1, \ldots, j,$$

là các không gian con tuyến tính trong $\mathbb{R}^d$, *thỏa mãn quan hệ bao hàm thức* $S =: E_{j+1} \subsetneq E_j \subsetneq E_{j-1} \subsetneq \cdots \subsetneq E_1$. *Thêm vào đó, với mọi* $i = 1, \ldots, j$,

$$\chi_\alpha(\varphi(\cdot, x_0)) = \lambda_i \quad \textit{khi và chỉ khi} \quad x_0 \in E_i \setminus E_{i+1}. \tag{2.5}$$

2.1.3 Mối liên hệ giữa số mũ Lyapunov phân thứ và tính ổn định nghiệm của phương trình vi phân phân thứ tuyến tính

Trong mục này, chúng ta thiết lập một mối liên hệ giữa phổ Lyapunov phân thứ và tính ổn định của phương trình phân thứ tuyến tính. Trước khi phát biểu kết quả chính, chúng ta nhắc lại ở đây khái niệm về tính ổn định của phương trình (2.1). Nghiệm tầm thường của phương trình (2.1) được gọi là *ổn định* nếu với bất kì $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\|\varphi(t, x_0)\| \leq \varepsilon \quad \text{miễn là } \|x_0\| < \delta.$$

Nghiệm tầm thường này được gọi là *ổn định tiệm cận* nếu nó ổn định và tồn tại một số $\widehat{\delta} > 0$ sao cho

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t, x_0) = 0 \quad \text{miễn là } \|x_0\| < \widehat{\delta}.$$

Định lý 2.4 (Mối quan hệ giữa phổ Lyapunov phân thứ và tính ổn định)**.** *Xét phương trình* (2.1). *Khi đó, những phát biểu sau đây đúng:*

(i) nếu nghiệm tầm thường của phương trình (2.1) *ổn định, thì* $\Sigma_\alpha \subset (-\infty, 0]$;

(ii) nếu $\Sigma_\alpha \subset (-\infty, 0)$, *thì nghiệm tầm thường của phương trình* (2.1) *ổn định tiệm cận.*

2.2 Cấu trúc phổ Lyapunov phân thứ của các nghiệm xuất phát từ mặt cầu đơn vị trong không gian Euclide $\mathbb{R}^d$

Trong phần này, chúng ta sẽ mô tả cấu trúc của tập các số mũ Lyapunov phân thứ của các nghiệm xuất phát từ mặt cầu đơn vị trong không gian pha của (2.1). Kí hiệu mặt cầu đơn vị trong $\mathbb{R}^d$ là $\mathbb{S}^{d-1} := \{x \in \mathbb{R}^d \text{ và } \|x\| = 1\}$ và định nghĩa

$$\Lambda_\alpha := \Big\{\chi_\alpha(\varphi(\cdot, x_0)) : x_0 \in \mathbb{S}^{d-1}\Big\}.$$

Ngoài ra, nếu tập các số mũ Lyapunov phân thứ âm của (2.1) là khác rỗng, chúng ta đặt

$$a = \inf\{\chi_\alpha(\varphi(\cdot, x)) : x \in S \cap \mathbb{S}^{d-1}\}, \quad b = \sup\{\chi_\alpha(\varphi(\cdot, x)) : x \in S \cap \mathbb{S}^{d-1}\}.$$

Kết quả sau chỉ ra cấu trúc của tập Λ_α.

Định lý 2.5 (Phổ Lyapunov phân thứ của các nghiệm xuất phát từ mặt cầu đơn vị)**.** *Tập các số mũ Lyapunov phân thứ của các nghiệm xuất phát từ mặt cầu đơn vị* $\mathbb{S}^{d-1}$ *của phương trình* (2.1) *được mô tả như sau:*

$$\Lambda_\alpha = \begin{cases} [a, b] \cup \{\lambda_1, \dots, \lambda_j\}, & \textit{nếu } S \neq \emptyset, \\ \{\lambda_1, \dots, \lambda_j\}, & \textit{trong trường hợp ngược lại,} \end{cases}$$

ở đây S*,* $\lambda_1, \dots, \lambda_j$*, được định nghĩa trong* Định lí 2.3.

2.3 Số mũ Lyapunov phân thứ của các nghiệm của phương trình vi phân phân thứ tuyến tính hệ số hằng hằng hai chiều

Trong phần này, chúng ta tính tường minh số mũ Lyapunov phân thứ của tất cả các nghiệm không tầm thường của phương trình vi phân phân thứ tuyến tính hệ số hằng 2–chiều tùy ý:

$$^{C}D^{\alpha}_{0+}x(t) = Ax(t), \tag{2.6}$$

ở đây ma trận hệ số $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ là một trong các dạng sau:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r\cos\psi & -r\sin\psi \\ r\sin\psi & r\cos\psi \end{pmatrix}.$$

Để tiện cho việc tính toán, chúng ta trang bị trên $\mathbb{R}^2$ chuẩn max $\|\cdot\|$, tức là $\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ với mọi $x = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2$ và quy ước $\frac{a}{0} = \infty$ với a dương tùy ý.

Định lý 2.6 (Số mũ Lyapunov phân thứ của phương trình hai chiều tuyến tính hệ số hằng)**.** *Cho* $\varphi(\cdot, x)$ *là nghiệm của bài toán giá trị ban đầu* (2.6)*,* $x(0) = x = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$*. Khi đó, những khẳng định sau đây đúng.*

(i) Giả sử $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$*, với* $\lambda \geq \gamma$*. Chúng ta có,*

$$\chi_\alpha(\varphi(\cdot, x)) = \begin{cases} \gamma, & \textit{nếu } x_1 = 0, \gamma \geq 0, \\ \frac{\gamma}{|x_2|}, & \textit{nếu } x_1 = 0, \gamma < 0, \\ \lambda, & \textit{nếu } x_2 = 0, \lambda \geq 0, \\ \frac{\lambda}{|x_1|}, & \textit{nếu } x_2 = 0, \lambda < 0, \\ \lambda, & \textit{nếu } x_1 x_2 \neq 0, \lambda \geq 0, \\ \max\left\{\frac{\lambda}{|x_1|}, \frac{\gamma}{|x_2|}\right\} & \textit{nếu } x_1 x_2 \neq 0, \lambda < 0. \end{cases}$$

(ii) Nếu $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, *thì*

$$\chi_\alpha(\varphi(\cdot, x)) = \begin{cases} \lambda, & \textit{nếu } \lambda \geq 0, \\ \max\left\{\frac{\lambda}{|x_2|}, \frac{-\lambda^2}{|x_2|}\right\}, & \textit{nếu } x_1 = 0, \lambda < 0, \\ \frac{\lambda}{|x_1|}, & \textit{nếu } x_2 = 0, \lambda < 0, \\ \max\left\{\frac{-\lambda^2}{|x_2 - \lambda x_1|}, \frac{\lambda}{|x_2|}\right\} & \textit{nếu } x_1 x_2 \neq 0, \lambda < 0. \end{cases}$$

(iii) Nếu $A = \begin{pmatrix} r\cos\psi & -r\sin\psi \\ r\sin\psi & r\cos\psi \end{pmatrix}$, *với* $r \in \mathbb{R}_{>0}$ *và* $\psi \in [-\pi, \pi)$, *thì*

$$\chi_\alpha(\varphi(\cdot, x)) = \begin{cases} r\left(\cos\frac{\psi}{\alpha}\right)^\alpha, & \textit{nếu } |\psi| < \dfrac{\alpha\pi}{2}, \\ 0, & \textit{nếu } |\psi| = \dfrac{\alpha\pi}{2}, \\ -\dfrac{r}{\omega}, & \textit{nếu } |\psi| > \dfrac{\alpha\pi}{2}, \end{cases}$$

ở đây $\omega := \max\{|x_1\cos\psi + x_2\sin\psi|, |x_2\cos\psi - x_1\sin\psi|\}$.

Chương 3

Tính ổn định của phương trình vi phân phân thứ

3.1 Đặt bài toán

Ở Chương 2, chúng ta đã tìm hiểu dáng điệu tiệm cận cho các nghiệm gần điểm gốc của phương trình phân thứ tuyến tính hệ số biến thiên. Tuy nhiên trên thực tế, người ta hay gặp các phương trình phi tuyến hơn là tuyến tính. Vì vậy, chương này sẽ được dành để thảo luận về các phương trình phi tuyến. Cụ thể, xét phương trình vi phân phân thứ Caputo xác định trên $\mathbb{R}_{\geq 0}$:

$$ {}^{C}D^{\alpha}_{0+}x(t) = F(x(t)) \tag{3.1} $$

với cấp phân thứ α thỏa mãn $\alpha \in (0,1)$ và $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ là một hàm phi tuyến. Một trong những bài toán cơ bản nhất của lý thuyết định tính cho các phương trình phi tuyến là nghiên cứu tính ổn định của (3.1). Để giải bài toán này, được gợi mở bởi hai phương pháp đề xuất bởi Lyapunov cho các phương trình vi phân thường (cấp phân thứ $\alpha = 1$), người ta thường sử dụng một trong hai cách tiếp cận sau.

Phương pháp tuyến tính hóa: giả sử $x^* \in \mathbb{R}^d$ là một trạng thái cân bằng của F, tức là $F(x^*) = 0$. Nếu F đủ trơn, chúng ta có thể tuyến tính hóa nó tại x^* và nghiên cứu phương trình tuyền tính hóa thu được từ (3.1)

$$ {}^{C}D^{\alpha}_{0+}x(t) = DF(x^*)(x - x^*). \tag{3.2} $$

Từ tính chất ổn định của nghiệm x^* đối với phương trình (3.2), người ta dự đoán tính chất tương tự của nghiệm này đối với (3.1). Cách làm như thế có điểm hợp lý vì thật ra phương trình (3.1) có thể được xem là một mô hình nhiễu địa phương bậc cao của (3.2) trong một lân cận của điểm cân bằng đang xét. Do đó, với những giả thiết đủ tốt về độ trơn của F, với cùng điều kiện đầu, dáng điệu các nghiệm tương ứng của hai phương trình nói trên phải khác nhau không nhiều.

Phương pháp hàm Lyapunov: ý tưởng chủ đạo của phương pháp này là đi tìm một hàm $V : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, ở đây Ω là tập mở, bị chặn chứa x^* và có các tính chất:

(i) $V(x^*) = 0$, $V(x) > 0$, $\forall x \in \Omega \setminus \{x^*\}$;

(ii) đạo hàm $\sum_{1 \leq k \leq d} \frac{\partial V(x)}{\partial x_k} F_k(x)$ dọc theo hướng của trường vectơ F âm trong $\Omega \setminus \{x^*\}$.

Người ta gọi V là hàm Lyapunov của (3.1). Nếu xây dựng được hàm Lyapunov, dáng điệu tiệm cận các nghiệm của (3.1) xuất phát gần x^* sẽ được mô tả đầy đủ. Một ví dụ mà ở đó hàm Lyapunov (cho các phương trình vi phân thường) tương đối dễ tìm là các hệ Cơ học, Điện tử, xem Smale (1974). Trong các hệ này, năng lượng chính là một hàm Lyapunov và điều kiện xác định âm của đạo hàm $\sum_{1\leq k\leq d} \frac{\partial V(x)}{\partial x_k} F_k(x)$ dọc theo trường vectơ tiếp xúc phản ánh sự tiêu hao của năng lượng dọc các quỹ đạo có thời điểm bắt đầu nằm trong $\Omega \setminus \{x^*\}$.

Đã có nhiều công bố về phương pháp hàm Lyapunov cho phương trình vi phân phân thứ, xem C. Li và F. Zhang (2011) và các tài liệu tham khảo trong đó. Tuy nhiên, theo quan điểm của chúng tôi, phương pháp này có vẻ không đủ tốt để áp dụng cho các phương trình phân thứ. Nguyên nhân là do việc tìm các hàm Lyapunov phân thứ trên thực tế quá khó khăn, thậm chí ngay cả đối với những trường hợp rất đơn giản. Trong khi đó, công trình đầu tiên sử dụng phương pháp tuyến tính hóa để nghiên cứu tính ổn định của phương trình vi phân phân thứ là E. Ahmed và cộng sự (2007). Sau đó, nhiều tác giả đã cố gắng chứng minh định lí cơ bản của lý thuyết tuyến tính hóa. Chúng ta kể ra đây một số tác giả tiêu biểu: X.J. Wen và cộng sự (2008), D. Qian và đồng sự (2010), L. Chen và đồng sự (2012), R. Zhang và đồng sự (2015).

Bên cạnh việc nghiên cứu tính ổn định, giống như trong phương trình vi phân thường và lý thuyết điều khiển, bài toán xác định tính không ổn định cũng là một chủ đề quan trọng. Những người đầu tiên quan tâm tới tính không ổn định của phương trình vi phân phân thứ là J. Audounet, D. Matignon và G. Montseny (2001).

Trong chương này, sử dụng phương pháp tuyến tính hóa, chúng ta sẽ thu được các định lí ổn định tuyến tính hóa và không ổn định cho một lớp phương trình vi phân phân thứ phi tuyến không phụ thuộc thời gian trên các không gian hữu hạn chiều tùy ý.

Cụ thể, xét phương trình vi phân phân thứ Caputo cấp $\alpha \in (0,1)$:

$$^{C}D^{\alpha}_{0+}x(t) = Ax(t) + f(x(t)), \tag{3.3}$$

ở đây $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ và $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ là một hàm liên tục Lipschitz địa phương trong một lân cận của gốc và thỏa mãn các điều kiện:

$$f(0) = 0 \quad \text{và} \quad \lim_{r\to 0} \ell_f(r) = 0, \tag{3.4}$$

trong đó

$$\ell_f(r) := \sup_{\substack{\|x\|,\|y\|\leq r\\ x\neq y}} \frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|x - y\|}. \tag{3.5}$$

Vì f là liên tục Lipschitz địa phương, bài toán giá trị ban đầu (3.3), $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^d$ có duy nhất nghiệm địa phương theo thời gian t. Kí hiệu $\varphi : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $t \mapsto \varphi(t, x_0)$, là nghiệm của bài toán này trên khoảng tồn tại cực đại $I = [0, t_{\max}(x_0))$, $0 < t_{\max}(x_0) \leq \infty$. Chúng ta nhắc lại dưới đây khái niệm về tính ổn định, không ổn định và ổn định tiệm cận của (3.3).

Định nghĩa 3.1. Nghiệm tầm thường của phương trình (3.3) được gọi là:

- *ổn định* nếu với bất kì $\varepsilon > 0$, tồn tại số $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho với mọi $\|x_0\| < \delta$, chúng ta có $t_{\max}(x_0) = \infty$ và

$$\|\varphi(t, x_0)\| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq 0;$$

- *không ổn định* nếu nó không thỏa mãn điều kiện ổn định;
- *hút* nếu tồn tại $\widehat{\delta} > 0$ sao cho $\lim_{t\to\infty} \varphi(t, x_0) = 0$ nếu $\|x_0\| < \widehat{\delta}$.

Nghiệm tầm thường của (3.3) được gọi là *ổn định tiệm cận* nếu nó thỏa mãn cả hai điều kiện ổn định và hút.

Kết quả chính của chương này là các điều đủ để nghiệm tầm thường của hệ (3.3) ổn định tiệm cận hoặc không ổn định.

3.2 Các kết quả chính

Giả sử $\{\widehat{\lambda}_1, \ldots, \widehat{\lambda}_m\}$ là tất cả các giá trị riêng phân biệt của ma trận $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$. Chúng ta định nghĩa phổ của A là tập $\sigma(A) := \{\widehat{\lambda}_1, \ldots, \widehat{\lambda}_m\}$. Nếu $\sigma(A)$ thỏa mãn điều kiện

$$\sigma(A) \subset \Lambda_\alpha^s, \tag{3.6}$$

trong đó $\Lambda_\alpha^s = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg(\lambda)| > \frac{\alpha\pi}{2}\}$, chúng ta nói *phổ của A thỏa mãn điều kiện ổn định.* Trong trường hợp $\sigma(A)$ thỏa mãn

$$\sigma(A) \cap \Lambda_\alpha^u \neq \emptyset \tag{3.7}$$

với $\Lambda_\alpha^u = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg(\lambda)| < \frac{\alpha\pi}{2}\}$, chúng ta nói *phổ của A thỏa mãn điều kiện không ổn định.*

Kết quả chính của chương này là định lí sau đây.

Định lý 3.2. *Xét phương trình* (3.3)*. Giả sử f là liên tục Lipschitz toàn cục và thỏa mãn điều kiện* (3.4)*. Khi đó:*

(i) nếu phổ $\sigma(A)$ thỏa mãn điều kiện ổn định (3.6)*, thì nghiệm tầm thường của* (3.3) *là ổn định tiệm cận;*

(ii) nếu phổ $\sigma(A)$ thỏa mãn điều kiện không ổn định (3.7)*, thì nghiệm tầm thường của* (3.3) *là không ổn định.*

Nếu thay giả thiết hàm f liên tục Lipschitz toàn cục bằng giả thiết f liên tục Lipschitz địa phương quanh điểm gốc, chúng ta thu được một phiên bản mạnh hơn Định lí 3.2 như sau.

Định lý 3.3. *Xét phương trình* (3.3)*. Giả sử f là liên tục Lipschitz địa phương quanh điểm gốc và thỏa mãn điều kiện* (3.4)*. Khi đó:*

(i) nếu phổ $\sigma(A)$ thỏa mãn điều kiện ổn định (3.6)*, thì nghiệm tầm thường của* (3.3) *là ổn định tiệm cận;*

(ii) nếu phổ $\sigma(A)$ thỏa mãn điều kiện không ổn định (3.7)*, thì nghiệm tầm thường của* (3.3) *là không ổn định.*

Chương 4

Đa tạp ổn định của phương trình vi phân phân thứ

4.1 Đặt bài toán và phát biểu kết quả chính

Xét phương trình vi phân phân thứ cấp $\alpha \in (0,1)$:

$$^{C}D^{\alpha}_{0+}x(t) = Ax(t) + f(x(t)), \tag{4.1}$$

trong đó $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ và $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ là liên tục Lipschitz địa phương quanh một lân cận của gốc và thỏa mãn

$$f(0) = 0 \quad \text{và} \quad \lim_{r\to 0} \ell_f(r) = 0. \tag{4.2}$$

Trong Chương 3 (xem Định lí 3.3), chúng ta đã thu được các khẳng định sau:

- nếu $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg(\lambda)| > \frac{\alpha\pi}{2}\}$, thì nghiệm tầm thường của phương trình (4.1) là ổn định tiệm cận;
- nếu $\sigma(A) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg(\lambda)| < \frac{\alpha\pi}{2}\} \neq \emptyset$, thì nghiệm tầm thường của phương trình (4.1) là không ổn định.

Nói một cách khác, chúng ta đã chỉ ra dáng điệu tiệm cận cho các nghiệm của phương trình (4.1) xuất phát gần điểm cân bằng khi phương trình tuyến tính hóa của nó ổn định tiệm cận hoặc không ổn định.

Trong chương này, bằng cách thêm vào giả thiết về tính hyperbolic cho ma trận A, tức là giả sử phổ $\sigma(A)$ thỏa mãn

$$\sigma(A) \subset \Lambda^s_\alpha \cup \Lambda^u_\alpha, \quad \sigma(A) \cap \Lambda^u_\alpha \neq \emptyset, \tag{4.3}$$

ở đây nhắc lại rằng $\Lambda^s_\alpha = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg(\lambda)| > \frac{\alpha\pi}{2}\}$ và $\Lambda^u_\alpha = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg(\lambda)| < \frac{\alpha\pi}{2}\}$. Chúng ta sẽ mô tả cấu trúc các nghiệm hội tụ về 0 của hệ (4.1). Cụ thể, chúng ta chứng minh sự tồn tại và chỉ ra cấu trúc của đối tượng sau.

Định nghĩa 4.1. Cho $U \subseteq \mathbb{R}^d$ là một lân cận tùy ý của điểm gốc. *Đa tạp ổn định* của (4.1) trong U được định nghĩa bởi

$$\mathcal{W}^s(U) := \Big\{x \in U : \varphi(t,x) \in U \text{ với } t \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ và } \lim_{t\to\infty} \varphi(t,x) = 0\Big\},$$

trong đó $\varphi(\cdot,x)$ là nghiệm của (4.1) thỏa mãn điều kiện đầu $\varphi(0,x) = x$.

Kết quả chính của chương này là định lí sau.

Định lý 4.2 (Định lí đa tạp ổn định cho phương trình vi phân phân thứ)**.** *Xét phương trình* (4.1)*. Giả sử A là hyperbolic và f là hàm liên tục Lipschitz địa phương trong một lân cận của gốc, thỏa mãn điều kiện* (4.2)*. Khi đó, tồn tại $r > 0$ sao cho đa tạp ổn định địa phương $\mathcal{W}^s(B_{\mathbb{R}^d}(0,r))$ của* (4.1) *là đồ thị của hàm liên tục Lipschitz $g : B_{\mathbb{R}^{d^s}}(0,r) \to B_{\mathbb{R}^{d^u}}(0,r)$ thỏa mãn các tính chất sau:*

(i) $g(0) = 0$*;*

(ii) ánh xạ g liên tục Lipschitz.

4.2 Phác thảo chứng minh kết quả chính

Chứng minh của kết quả chính 4.2 được thực hiện thông qua ba bước:

- **Bước 1:** Làm nhỏ đường chéo phụ của dạng chuẩn Jordan.
- **Bước 2:** Xây dựng toán tử Lyapunov–Perron.
- **Bước 3:** Mô tả cấu trúc của đa tạp ổn định.

4.2.1 Làm nhỏ đường chéo phụ của dạng chuẩn Jordan

Giả sử $\hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_m$ là tất cả các giá trị riêng phân biệt của A. Chúng ta tìm được một ma trận không suy biến $T \in \mathbb{C}^{d\times d}$ chuyển A thành dạng Jordan, tức là,

$$T^{-1}AT = \mathrm{diag}(A_1, \ldots, A_n),$$

ở đây với $i = 1, \ldots, n$, khối A_i có dạng

$$A_i = \lambda_i \,\mathrm{id}_{d_i\times d_i} + \eta_i \, N_{d_i\times d_i},$$

trong đó $\eta_i \in \{0,1\}$, $\lambda_i \in \{\hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_m\}$, và ma trận lũy linh $N_{d_i\times d_i}$ có biểu diễn

$$N_{d_i\times d_i} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{d_i\times d_i}.$$

Đánh số lại các giá trị riêng của A là λ_i, $i = 1, \ldots, n$, sao cho tồn tại chỉ số $k \in \{1, \ldots, n\}$ thỏa mãn

$$|\arg(\lambda_1)|, \ldots, |\arg(\lambda_k)| < \frac{\alpha\pi}{2} < |\arg(\lambda_{k+1})|, \ldots, |\arg(\lambda_n)|.$$

Cho trước số dương γ nhỏ tùy ý. Đặt $P_i := \mathrm{diag}(1, \gamma, \ldots, \gamma^{d_i-1})$, $i = 1, \ldots, n$, chúng ta có

$$P_i^{-1}A_iP_i = \lambda_i \,\mathrm{id}_{d_i\times d_i} + \gamma_i \, N_{d_i\times d_i},$$

$\gamma_i \in \{0, \gamma\}$. Từ đây, lấy $P := \mathrm{diag}(P_1, \dots, P_n)$ và sử dụng phép đổi biến $y := (TP)^{-1}x$, phương trình (4.1) trở thành

$$^{C}D^{\alpha}_{0+}x(t) = \mathrm{diag}(J_1, \dots, J_n)x(t) + h(x(t)), \tag{4.4}$$

với $J_i := \lambda_i \mathrm{id}_{d_i \times d_i}$, $i = 1, \dots, n$ và hàm h được định nghĩa bởi

$$h(x) := \mathrm{diag}(\gamma_1 N_{d_1 \times d_1}, \dots, \gamma_n N_{d_n \times d_n})x + (TP)^{-1} f(TPx). \tag{4.5}$$

Chú ý 4.3. Sự tồn tại đa tạp ổn định của hệ (4.4) kéo theo sự tồn tại đa tạp ổn định của hệ (4.1). Do đó, từ đây chúng ta sẽ chỉ xét hệ (4.4).

4.2.2 Xây dựng toán tử Lyapunov–Perron

Cho trước vectơ $x^s = (x^{k+1}, \dots, x^n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^{d^s} = \mathbb{C}^{d_{k+1}} \times \cdots \times \mathbb{C}^{d_n}$ tùy ý, toán tử $\mathcal{T}_{x^s} : C_\infty(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathbb{C}^d) \to C(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathbb{C}^d)$ được định nghĩa bởi

$$\mathcal{T}_{x^s}\xi(t) = ((\mathcal{T}_{x^s}\xi)^1(t), \dots, (\mathcal{T}_{x^s}\xi)^n(t))^{\mathrm{T}},$$

trong đó

$$\begin{aligned}(\mathcal{T}_{x^s}\xi)^i(t) = & \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha J_i) h^i(\xi(\tau))\, d\tau \\ & - \lambda_i^{\frac{1}{\alpha}-1} E_\alpha(t^\alpha J_i) \int_0^\infty \exp(-\lambda_i^{\frac{1}{\alpha}}\tau) h^i(\xi(\tau))\, d\tau\end{aligned}$$

với $i = 1, \dots, k$ và

$$(\mathcal{T}_{x^s}\xi)^i(t) = E_\alpha(t^\alpha J_i)x^i + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha J_i) h^i(\xi(\tau))\, d\tau$$

với $i = k+1, \dots, n$, được gọi là *toán tử Lyapunov–Perron phù hợp với phương trình* (4.4).

4.2.3 Mô tả cấu trúc của đa tạp ổn định

Bước then chốt trong quá trình chứng minh sự tồn tại của đa tạp ổn định của (4.4) là ước lượng toán tử Lyapunov–Perron. Dựa vào các tính chất cơ bản của hàm Mittag-Leffler, chúng ta có kết quả sau.

Mệnh đề 4.4. *Xét phương trình* (4.4). *Khi đó, tồn tại một hằng số $C(\alpha, \bar{\lambda})$ phụ thuộc vào $\alpha, \bar{\lambda} := (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ và số $\hat{\varepsilon} > 0$ đủ nhỏ độc lập với $C(\alpha, \bar{\lambda})$ sao cho đánh giá sau đúng*

$$\begin{aligned}\|\mathcal{T}_{x^s}\xi - \mathcal{T}_{\widehat{x}^s}\widehat{\xi}\|_\infty \leq & \max_{k+1 \leq i \leq n} \sup_{t \geq 0} |E_\alpha(\lambda_i t^\alpha)| \|x^s - \widehat{x}^s\| \\ & + C(\alpha, \bar{\lambda})\, \ell_h(\max(\|\xi\|_\infty, \|\widehat{\xi}\|_\infty)) \|\xi - \widehat{\xi}\|_\infty \end{aligned} \tag{4.6}$$

với mọi $x^s, \widehat{x}^s \in \mathbb{R}^{d^s}$ và $\xi, \widehat{\xi} \in B_{C_\infty}(0, \hat{\varepsilon})$. Do đó, trong $B_{C_\infty}(0, \hat{\varepsilon})$ toán tử $\mathcal{T}_{x^s}$ đặt chỉnh và thỏa mãn

$$\|\mathcal{T}_{x^s}\xi - \mathcal{T}_{x^s}\widehat{\xi}\|_\infty \leq C(\alpha, \bar{\lambda})\, \ell_h(\max\{\|\xi\|_\infty, \|\widehat{\xi}\|_\infty\}) \|\xi - \widehat{\xi}\|_\infty. \tag{4.7}$$

Theo kết quả trình bày ở trên, chúng ta thấy rằng hằng số $C(\alpha, \bar{\lambda})$ trong Mệnh đề 4.4 độc lập với tham số γ. Do đó, từ đây chúng ta cho γ nhận giá trị là

$$\gamma := \frac{1}{3C(\alpha, \bar{\lambda})}.$$

Với giá trị này của γ, tồn tại một hình cầu có tâm tại gốc và bán kính đủ nhỏ trong không gian $C_\infty(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathbb{C}^d)$ để toán tử Lyapunov–Perron phù hợp với (4.1) co trên đó.

Mệnh đề 4.5. *Xét phương trình* (4.4)*. Những khẳng định sau đúng.*

(i) Tồn tại $r^* \in (0, \hat{\varepsilon})$ sao cho

$$C(\alpha, \bar{\lambda})\, \ell_h(r^*) \leq \frac{2}{3}, \tag{4.8}$$

ở đây $\hat{\varepsilon}$ là tham số cho trước được chọn như trong Mệnh đề 4.4.

(ii) Cố định $r^* > 0$ thỏa mãn (4.8) *và chọn*

$$r := \frac{r^*}{3 \max_{k+1 \leq i \leq n} \sup_{t \geq 0} |E_\alpha(\lambda_i t^\alpha)|}. \tag{4.9}$$

Định nghĩa $B_{C_\infty}(0, r^*) := \{\xi \in C_\infty(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathbb{C}^d) : ||\xi||_\infty \leq r^*\}$. Khi đó, với bất kì $x^s \in B_{\mathbb{C}^{d^s}}(0, r)$, chúng ta có $\mathcal{T}_{x^s}(B_{C_\infty}(0, r^*)) \subset B_{C_\infty}(0, r^*)$ và

$$\|\mathcal{T}_{x^s}\xi - \mathcal{T}_{x^s}\widehat{\xi}\|_\infty \leq \frac{2}{3}\|\xi - \widehat{\xi}\|_\infty, \quad \forall \xi, \widehat{\xi} \in B_{C^\infty}(0, r^*).$$

Tiếp theo, chúng ta sẽ thiết lập một tương ứng 1–1 giữa các điểm bất kì nằm trên đa tạp ổn định địa phương của phương trình (4.4) và các điểm bất động của toán tử Lyapunov–Perron.

Mệnh đề 4.6. *Với bất kì $x = (x^u, x^s)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^d$, kí hiệu $\varphi_{\text{new}}(\cdot, x)$ là nghiệm của bài toán giá trị đầu* (4.4)*, $x(0) = x$. Khi đó, những phát biểu sau đúng.*

(i) Nếu $x \in \mathcal{W}^s_{\text{new}}(U)$, thì $\varphi_{\text{new}}(\cdot, x)$ là một điểm bất động của $\mathcal{T}_{x^s}$.

(ii) Giả sử $\xi(t) = (\xi^u(t), \xi^s(t))^{\mathrm{T}}$ là một điểm bất động của $\mathcal{T}_{x^s}$ thỏa mãn $\|\xi\|_\infty \leq r^*$, ở đây $x^s \in \mathbb{C}^{d^s}$ và r^* thỏa mãn (4.8)*. Khi đó, $\xi(t)$ là một nghiệm của* (4.4) *và $\lim_{t\to\infty} \xi(t) = 0$.*

Sử dụng Mệnh đề 4.4, Mệnh đề 4.5 và Mệnh đề 4.6 chúng ta mô tả được cấu trúc đa tạp ổn định của hệ (4.4). Từ nhận xét 4.3, chúng ta thu được chứng minh của Định lí 4.2.

Kết luận

Trong luận án này, chúng ta đã thu được các kết quả chính sau.

1. Chứng minh số mũ Lyapunov cổ điển cho các nghiệm không tầm thường bất kì của phương trình vi phân phân thứ tuyến tính với hệ số liên tục và bị chặn luôn không âm. Do đó, chỉ ra rằng số mũ Lyapunov cổ điển không thích hợp để đặc trưng tính ổn định nghiệm của các phương trình vi phân phân thứ.

2. Xây dựng một kiểu số mũ Lyapunov phù hợp cho các phương trình vi phân phân thứ và sử dụng nó để đặc trưng cho tính ổn định nghiệm của các phương trình vi phân tuyến tính hệ số biến thiên.

3. Sử dụng phương pháp tuyến tính hóa để chứng minh các định lí về tính ổn định tiệm cận, không ổn định cho điểm cân bằng của phương trình vi phân phân thứ không phụ thuộc thời gian trong các không gian Euclide hữu hạn chiều.

4. Chứng minh sự tồn tại của đa tạp ổn định gần điểm cân bằng hyperbolic cho phương trình vi phân phân thứ phi tuyến trong các không gian Euclide hữu hạn chiều tùy ý.

Công trình liên quan đến luận án

[1] N.D. Cong, T.S. Doan and H.T. Tuan. On fractional Lyapunov exponent for solutions of linear fractional differential equations. *Fract. Calc. Appl. Anal.,* **17** (2014), no. 2, 285–306.

[2] N.D. Cong, T.S. Doan, S. Siegmund and H.T. Tuan. On stable manifolds for planar fractional differential equations. *Applied Mathematics and Computation,* **226** (2014), 157–168.

[3] N.D. Cong, T.S. Doan, H.T. Tuan and S. Siegmund. Structure of the fractional Lyapunov spectrum for linear fractional differential equations. *Adv. Dyn. Syst. Appl.,* **9** (2014), no. 2, 149–159.

[4] N.D. Cong, T.S. Doan, S. Siegmund, H.T. Tuan. Linearized asymptotic stability for fractional differential equations. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, **39** (2016), 1–13.

[5] N.D. Cong, T.S. Doan, S. Siegmund and H.T. Tuan. On stable manifold for fractional differential equations in high-dimensional space. *Nonlinear Dynamics*, **86** (2016), 1885–1894.

[6] N.D. Cong, T.S. Doan, S. Siegmund, H. Tuan. An instability theorem of nonlinear fractional differential systems. To appear in *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series B.*

Các kết quả liên quan đến luận án đã được tác giả báo cáo tại

1. Seminar của Phòng Phương trình vi phân, Viện Toán học.

2. Hội nghị nghiên cứu sinh hằng năm của Viện Toán học (10/2014, 10/2015, 10/2016).