VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM
VIỆN TOÁN HỌC

Bùi Thế Hùng

SỰ TỒN TẠI NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN TỰA CÂN BẰNG VÀ BAO HÀM THỨC TỰA BIẾN PHÂN PARETO

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - 2014

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

VIỆN TOÁN HỌC

Bùi Thế Hùng

SỰ TỒN TẠI NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN TỰA CÂN BẰNG VÀ BAO HÀM THỨC TỰA BIẾN PHÂN PARETO

Chuyên ngành: Toán Giải tích
Mã số: 62 46 01 02

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
GS.TSKH. NGUYỄN XUÂN TẤN

Hà Nội - 2014

Mở đầu

Năm 1994, E. Blum và W. Oettli lần đầu tiên đưa ra và nghiên cứu bài toán cân bằng vô hướng. Từ bài toán này ta có thể suy ra các bài toán khác nhau trong lý thuyết tối ưu như bài toán tối ưu, bài toán bất đẳng thức biến phân, bài toán bù, bài toán cân bằng Nash, bài toán điểm yên ngựa, bài toán điểm bất động, ... Chính vì vậy, bài toán này được nhiều người quan tâm nghiên cứu, ta có thể kể đến E. Blum, W. Oettli, Ky Fan, Browder, Minty, Bianchi, S. Schaible, Hadjisavvas, ... Sau đó rất nhiều tác giả đã mở rộng bài toán trên cho trường hợp ánh xạ mục tiêu là ánh xạ véctơ đơn trị, ánh xạ mục tiêu là ánh xạ véctơ đa trị. Năm 2007, L. J. Lin và N. X. Tấn đã phát biểu bài toán tựa cân bằng đa trị loại I và phân loại các bài toán dựa vào thứ tự sinh bởi nón trên không gian tuyến tính với ánh xạ mục tiêu là ánh xạ ba biến, ánh xạ ràng buộc là ánh xạ hai biến, cụ thể: Giả sử X, Y, Z là các không gian tôpô tuyến tính; D, K là các tập con không rỗng của X, Z, tương ứng; C là nón nhọn trong Y và $S : D \times K \to 2^D, T : D \times K \to 2^K, F : K \times D \times D \to 2^Y$ là các ánh xạ đa trị với giá trị không rỗng, xét các bài toán tựa cân bằng sau đây:

1. Bài toán tựa cân bằng lý tưởng trên loại I, kí hiệu $(UIQEP)_I$, tìm $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho $\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y})$ và

$$F(\bar{y}, \bar{x}, x) \subseteq C \text{ với mọi } x \in S(\bar{x}, \bar{y}).$$

2. Bài toán tựa cân bằng lý tưởng dưới loại I, kí hiệu $(LIQEP)_I$, tìm $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho $\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y})$ và

$$F(\bar{y}, \bar{x}, x) \cap C \neq \emptyset \text{ với mọi } x \in S(\bar{x}, \bar{y}).$$

3. Bài toán tựa cân bằng yếu trên loại I, kí hiệu $(UWQEP)_I$, tìm $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho $\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y})$ và

$$F(\bar{y}, \bar{x}, x) \not\subseteq -\operatorname{int} C \text{ với mọi } x \in S(\bar{x}, \bar{y}).$$

4. Bài toán tựa cân bằng yếu dưới loại I, kí hiệu $(LWQEP)_I$, tìm $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho $\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y})$ và

$$F(\bar{y}, \bar{x}, x) \cap (-\operatorname{int} C) = \emptyset \text{ với mọi } x \in S(\bar{x}, \bar{y}).$$

5. Bài toán tựa cân bằng Pareto trên loại I, kí hiệu $(UPQEP)_I$, tìm $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho $\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y})$ và

$$F(\bar{y}, \bar{x}, x) \not\subseteq -C \backslash \{0\} \text{ với mọi } x \in S(\bar{x}, \bar{y}).$$

6. Bài toán tựa cân bằng Pareto dưới loại I, kí hiệu $(LPQEP)_I$, tìm $(\bar{x},\bar{y}) \in D \times K$ sao cho $\bar{x} \in S(\bar{x},\bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x},\bar{y})$ và

$$F(\bar{y},\bar{x},x) \cap (-C\backslash\{0\}) = \emptyset \text{ với mọi } x \in S(\bar{x},\bar{y}).$$

Các bài toán trên là mở rộng một cách tự nhiên của bài toán cân bằng vô hướng. Cho đến nay có nhiều kết quả về sự tồn tại nghiệm của các bài toán $(UIQEP)_I$, $(LIQEP)_I$ với những giả thiết khác nhau. Tuy nhiên các bài toán $(UPQEP)_I$ và $(UWQEP)_I$ rất ít được xét đến. Các cách mở rộng bài toán cân bằng vô hướng chưa cho ta nhìn một cách tổng thể, thống nhất các bài toán trong lý thuyết tối ưu. Năm 2010, T. T. T. Duong - N. X. Tan đã nghiên cứu bài toán tựa cân bằng tổng quát loại I với ánh xạ đa trị, không phụ thuộc vào nón trong không gian tuyến tính: Giả sử X, Y, Z là các không gian tuyến tính; D, K lần lượt là các tập con không rỗng của X, Z, tương ứng và các ánh xạ đa trị $S : D \times K \to 2^D, T : D \times K \to 2^K, F : K \times D \times D \times D \to 2^Y$ với giá trị không rỗng. Bài toán tựa cân bằng tổng quát loại I, kí hiệu $(GQEP)_I$, tìm $(\bar{x},\bar{y}) \in D \times K$ sao cho $\bar{x} \in S(\bar{x},\bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x},\bar{y})$ và

$$0 \in F(\bar{y},\bar{x},\bar{x},x) \text{ với mọi } x \in S(\bar{x},\bar{y}).$$

Các tác giả cũng chỉ ra một số bài toán khác trong lý thuyết tối ưu có thể đưa được về bài toán $(GQEP)_I$, chẳng hạn như: bài toán tựa tối ưu loại I, bài toán quan hệ tựa biến phân loại I, bài toán bao hàm thức tựa biến phân lý tưởng loại I, bài toán tựa cân bằng véctơ lý tưởng loại I, bài toán quan hệ tựa biến phân suy rộng loại I. Như vậy bài toán $(GQEP)_I$ cho ta nhìn một cách tổng thể, thống nhất một số bài toán trong lý thuyết tối ưu. Bằng việc sử dụng định lý điểm bất động Himmelberg, các tác giả đã đưa ra một số điều kiện đủ cho sự tồn tại nghiệm của bài toán. Tuy nhiên điều kiện đặt lên đối với các ánh xạ ràng buộc S, T là tương đối nặng, cụ thể ở đây ánh xạ S là liên tục compắc, ánh xạ T liên tục acylic. Một lớp lớn các bài toán loại II trong lý thuyết tối ưu được chúng tôi liên kết qua một mô hình rất tổng quát mà chúng tôi gọi là bài toán tựa cân bằng tổng quát loại II, kí hiệu $(GQEP)_{II}$: Tìm $\bar{x} \in D$ sao cho $\bar{x} \in P_1(\bar{x})$ và

$$0 \in F(y,x,\bar{x}) \text{ với mọi } x \in P_2(\bar{x}) \text{ và } y \in Q(\bar{x},x),$$

ở đó X, Y, Z là các không gian tuyến tính; D, K lần lượt là các tập con không rỗng của X, Z, tương ứng và các ánh xạ $P_1, P_2 : D \to 2^D, Q : D \times D \to 2^K, F : K \times D \times D \to 2^Y$ với giá trị không rỗng.

Năm 2002, A. Gurraggio- N. X. Tan lần đầu tiên đưa ra và nghiên cứu bài toán tựa tối ưu loại I (kí hiệu $(QOP)_I$): Tìm $(\bar{x},\bar{y}) \in D \times K$ sao cho $\bar{x} \in S(\bar{x}), \bar{y} \in T(\bar{x})$ và

$$F(\bar{y},\bar{x},\bar{x}) \leq F(\bar{y},\bar{x},x) \text{ với mọi } x \in S(\bar{x}),$$

ở đó X, Z là các không gian tuyến tính; D, K là các tập con không rỗng của X, Z, tương ứng; $S : D \to 2^D, T : D \to 2^K$ là các ánh xạ đa trị với giá trị không rỗng và $F: K \times D \times D \to \mathbb{R}$ là hàm vô hướng. Bài toán $(QOP)_I$ là mở rộng của bài toán tối ưu và bài toán cân bằng, do vậy nó bao hàm rất nhiều bài toán khác trong lý thuyết tối ưu. Năm 2004, N. X. Tan mở rộng bài toán trên cho trường hợp F là ánh xạ véctơ đa trị:

7. Bài toán bao hàm thức tựa biến phân lý tưởng trên loại I, kí hiệu là $(UIQVIP)_I$, tìm $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho $\bar{x} \in S(\bar{x}), \bar{y} \in T(\bar{x})$ và

$$F(\bar{y}, \bar{x}, x) \subseteq F(\bar{y}, \bar{x}, \bar{x}) + C \text{ với mọi } x \in S(\bar{x}).$$

8. Bài toán bao hàm thức tựa biến phân lý tưởng dưới loại I, kí hiệu là $(LIQVIP)_I$, tìm $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho $\bar{x} \in S(\bar{x}), \bar{y} \in T(\bar{x})$ và

$$F(\bar{y}, \bar{x}, \bar{x}) \subseteq F(\bar{y}, \bar{x}, x) - C \text{ với mọi } x \in S(\bar{x}),$$

trong đó D, K là các tập con không rỗng của X, Z; C là nón trong không gian tuyến tính Y và $S: D \to 2^D, T: D \to 2^K, F: K \times D \times D \to 2^Y$ là các ánh xạ đa trị với giá trị không rỗng. Bằng phương pháp vô hướng hóa các phần tử của cơ sở compắc yếu* B của nón cực C' và sử dụng định lý tách tập lồi, tác giả đã đưa ra một số điều kiện đủ cho sự tồn tại nghiệm của các bài toán $(UIQVIP)_I$ và $(LIQVIP)_I$. Tuy nhiên, một số điều kiện tương đối nặng như nón cực C' của nón C có cơ sở compắc yếu*, ánh xạ đa trị F với giá trị không rỗng lồi compắc và F là C- giống như tựa lồi đối với biến thứ ba. Năm 2007, L. J. Lin- N. X. Tan đã mở rộng bài toán trên cho trường hợp ánh xạ ràng buộc S, T là các ánh xạ hai biến và các tác giả đã đưa ra điều kiện đủ cho sự tồn tại nghiệm, một số điều kiện được giảm nhẹ hơn như nón C chỉ cần lồi đóng, tuy nhiên tính giống như tựa lồi theo nón đối với biến thứ ba của ánh xạ F chưa được khắc phục.

Một mở rộng bài toán tối ưu theo hướng khác đã được D. T. Luc- N. X. Tan đưa ra vào năm 2004: Tìm $\bar{x} \in D$ sao cho $\bar{x} \in P_1(\bar{x})$ và

$$F(y, \bar{x}, \bar{x}) \leq F(y, x, \bar{x}) \text{ với mọi } x \in P_2(\bar{x}) \text{ và } y \in Q(\bar{x}, x),$$

trong đó D, K là các tập con không rỗng của các không gian X, Z; các ánh xạ đa trị $P_1, P_2: D \to 2^D, Q: D \times D \to 2^K$ với giá trị không rỗng và $F: K \times D \times D \to \mathbb{R}$ là hàm vô hướng. Ta gọi bài toán trên là bài toán tựa tối ưu loại II, kí hiệu là $(QOP)_{II}$. Sau đó các tác giả mở rộng bài toán $(QOP)_{II}$ cho trường hợp F là ánh xạ véctơ đa trị:

9. Bài toán bao hàm thức tựa biến phân lý tưởng trên loại II, kí hiệu là $(UIQVIP)_{II}$, tìm $\bar{x} \in D$ sao cho $\bar{x} \in P_1(\bar{x})$ và

$$F(y, x, \bar{x}) \subseteq F(y, \bar{x}, \bar{x}) + C \text{ với mọi } x \in P_2(\bar{x}) \text{ và } y \in Q(\bar{x}, x).$$

10. Bài toán bao hàm thức tựa biến phân lý tưởng dưới loại II, kí hiệu là $(LIQVIP)_{II}$, tìm $\bar{x} \in D$ sao cho $\bar{x} \in P_1(\bar{x})$ và

$$F(y, \bar{x}, \bar{x}) \subseteq F(y, x, \bar{x}) - C \text{ với mọi } x \in P_2(\bar{x}) \text{ và } y \in Q(\bar{x}, x),$$

trong đó D, K là các tập con không rỗng của X, Z; C là nón trong không gian tuyến tính Y và $P_1, P_2 : D \to 2^D, Q : D \times D \to 2^K, F : K \times D \times D \to 2^Y$ là các ánh xạ đa trị với giá trị không rỗng. Bằng phương pháp vô hướng hóa bởi các phần tử của tập bị chặn $\Gamma \subseteq Y^*$ và sử dụng định lý tách tập lồi các tác giả đã thiết lập một số điều kiện đủ cho sự tồn tại nghiệm của bài toán trên. Tuy nhiên một số điều kiện mà các tác giả đưa ra là tương đối nặng như F có giá trị C-lồi đóng và F là (Q, C)-giống như tựa lồi theo đường chéo. Năm 2007, N. X. Hai- P. Q. Khanh đã thiết lập một số điều kiện cho sự tồn tại nghiệm của bài toán bao hàm thức tựa biến phân lý tưởng loại II. Bằng công cụ là Bổ đề Fan- KKM, các tác giả đã giảm nhẹ một số điều kiện như nón C chỉ cần đóng và ánh xạ mục tiêu không cần có giá trị C-lồi. Tuy nhiên kết quả đó vẫn chỉ chứng minh cho trường hợp ánh xạ mục tiêu F là (Q, C)-giống như tựa lồi theo đường chéo.

Cho đến nay có rất nhiều kết quả cho sự tồn tại nghiệm của các bài toán bao hàm thức tựa biến phân lý tưởng loại I và loại II, cùng với các hệ của chúng. Tuy nhiên điều kiện đặt lên ánh xạ đa trị là tương đối nặng và bài toán bao hàm thức tựa biến phân cho trường hợp Pareto chưa được xét đến.

Mục đích của luận án là nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của bài toán tựa cân bằng Pareto và yếu loại I, bài toán tựa cân bằng tổng quát loại II, bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto loại I và loại II. Luận án viết dựa trên 05 bài báo, trong đó 03 bài đã đăng trên các tạp chí *Advances in Nonlinear Variational Inequalities* và *Acta Math. Vietnamica*; 02 bài dạng tiền ấn phẩm.

Luận án gồm ba chương nội dung:

Chương 1 của luận án dành cho việc trình bày một số kiến thức cơ sở về giải tích đa trị như khái niệm ánh xạ đa trị, nón trong không gian tuyến tính, tính liên tục theo nón của ánh xạ đa trị, tính lồi theo nón của ánh xạ đa trị cùng một số tính chất liên quan. Ngoài ra chúng tôi cũng đưa ra một số điều kiện cho sự không rỗng của nón cực chặt (Mệnh đề 1.2.10 và Mệnh đề 1.2.12). Đây là điều kiện mà chúng tôi đặt lên các bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto ở chương 3.

Chương 2 dành cho nghiên cứu bài toán tựa cân bằng Pareto loại I, bài toán tựa cân bằng yếu loại I và bài toán tựa cân bằng tổng quát loại II. Kết quả đầu tiên đạt được ở chương này là Định lý 2.1.8 chỉ ra sự tồn tại nghiệm của bài toán tựa cân bằng Pareto loại I mà ở đó chúng tôi sử dụng tính chất giả đơn điệu mạnh theo nón của ánh xạ đa trị. Ngoài ra, chúng tôi còn chứng minh được cho cả hai trường hợp ánh xạ mục tiêu lồi theo nón và ánh xạ mục tiêu giống như tựa lồi theo nón. Bằng việc sử dụng Bổ đề Fan- KKM, chúng tôi chỉ ra sự tồn tại nghiệm của bài toán tựa cân bằng tổng quát loại II (Định lý 2.2.3 và Định lý 2.2.6) và từ đó các bài toán tựa cân bằng Pareto (Hệ quả 2.2.8) và bài toán tựa cân bằng yếu (Hệ quả 2.2.9 và Hệ quả 2.2.11) cũng được nghiên cứu.

Chương 3 của luận án dành cho việc nghiên cứu bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto loại I và loại II. Các kết quả trước đây hầu như chỉ xét bài toán bao hàm thức tựa biến phân cho trường hợp lý tưởng và chỉ ra sự tồn tại nghiệm trong trường hợp ánh xạ đa trị giống như tựa lồi theo nón, còn trường hợp lồi theo nón cho đến nay vẫn chưa được xét đến. Trong chương này, bằng phương pháp vô hướng hóa bài toán bởi một phần tử của nón cực chặt, chúng tôi thiết lập một số điều kiện đủ cho sự tồn tại nghiệm của bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto loại I (Định lý 3.1.1, Định lý 3.1.2, Định lý 3.1.8, Định lý 3.1.9, Định lý 3.1.10, Định lý 3.1.11) và bài toán bao hàm thức tựa biến phân loại II (Định lý 3.3.3, Định lý 3.3.5, Định lý 3.3.8, Định lý 3.3.9). Các kết quả mà chúng tôi thiết lập cho cả hai trường hợp ánh xạ lồi theo nón và giống như tựa lồi theo nón. Hơn nữa, chúng tôi đưa ra một số điều kiện đủ cho sự tồn tại nghiệm của các bài toán liên quan khác như bài toán tựa cân bằng Pareto và bài toán tựa tối ưu Pareto.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số khái niệm và kết quả quen biết về giải tích đa trị, được dùng xuyên suốt trong luận án như ánh xạ đa trị và các tính chất của ánh xạ đa trị, nón cực và các tính chất không rỗng của nó, một số định lý điểm bất động. Chương 1 bao gồm các mục:

1.1. Khái niệm ánh xạ đa trị
1.2. Tính không rỗng của nón cực chặt
1.3. Một số tính chất của ánh xạ đa trị
1.4. Định lý điểm bất động và các vấn đề liên quan

Trong mục 1.2 chúng tôi trình bày một số điều kiện đủ cho sự không rỗng của nón cực chặt. Trước hết ta nhắc lại khái niệm nón cực chặt của một nón trong không gian tuyến tính: Cho C là nón nhọn trong không gian tuyến tính Y. Gọi Y^* là *không gian đối ngẫu tôpô* của Y. *Nón cực chặt* của C được định nghĩa bởi

$$C'^{+} = \big\{\xi \in Y^* : \langle \xi, c\rangle > 0 \text{ với mọi } c \in C\backslash\{0\}\big\}.$$

Các mệnh đề dưới đây là điều kiện đủ cho tính không rỗng của nón cực chặt.

Mệnh đề 1.2.10. *Giả sử Y là không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương và C là nón lồi không tầm thường trong Y. Khi đó nếu $C'^{+} \neq \emptyset$ thì $\operatorname{cl} C \cap (-C) = \{0\}$. Hơn nữa, nếu Y là hữu hạn chiều thì điều ngược lại của khẳng định trên cũng đúng.*

Nhận xét 1.2.11. Từ mệnh đề trên ta khẳng định mọi nón C lồi đóng nhọn trong không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương hữu hạn chiều đều có $C'^{+} \neq \emptyset$.

Mệnh đề 1.2.12. *Giả sử Y là không gian lồi địa phương Hausdorff và C là nón lồi không tầm thường trong Y. Khi đó C có cơ sở B với $0 \notin \operatorname{cl} B$ nếu và chỉ nếu $C'^{+} \neq \emptyset$.*

Nhận xét 1.2.13. Từ mệnh đề trên, nếu Y là không gian lồi địa phương Hausdorff và nón C có cơ sở lồi compắc yếu* thì $C'^{+} \neq \emptyset$.

Chương 2

Bài toán tựa cân bằng

Bài toán cân bằng có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau như tài chính, kinh tế, phân tích hệ thống, giao thông, tối ưu hóa, ... Bài toán này được hình thành từ khái niệm hữu hiệu mà Edgeworth và Pareto đưa ra từ cuối thế kỷ 19 và có mối quan hệ mật thiết với rất nhiều bài toán khác trong lý thuyết tối ưu. Cho đến nay người ta đã tìm ra nhiều cách chứng minh sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng. Đầu tiên người ta thường sử dụng các định lý điểm bất động kiểu Brouwer, Kakutani, Ky Fan, Browder. Sau đó người ta chỉ ra rằng Định lý điểm bất động Brouwer tương đương với Định lý về tương giao hữu hạn của các tập compắc, Định lý không tương thích của Hoàng Tụy và Định lý KKM. Trong chương này chúng tôi đưa ra một số điều kiện đủ cho sự tồn tại nghiệm của bài toán tựa cân bằng Pareto trên loại I, bài toán tựa cân bằng yếu trên loại I và bài toán tựa cân bằng tổng quát loại II. Các công cụ mà chúng tôi sử dụng ở đây chủ yếu là Bổ đề Fan- KKM, Định lý điểm bất động Fan- Browder và Định lý điểm bất động Ky Fan.

2.1 Bài toán tựa cân bằng Pareto và yếu loại I

2.1.1 Bài toán

Giả sử X, Y và Z là các không gian tôpô tuyến tính. Gọi $D \subseteq X, K \subseteq Z$ là các tập con không rỗng và $C \subseteq Y$ là nón nhọn trong Y. Cho các ánh xạ đa trị $S : D \times K \to 2^D, T : D \times K \to 2^K, F : K \times D \times D \to 2^Y$ với giá trị không rỗng. Ta xét các bài toán tựa cân bằng sau đây:

1. Bài toán tựa cân bằng Pareto trên loại I, kí hiệu $(UPQEP)_I$, tìm $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho

(i) $\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y})$;

(ii) $F(\bar{y}, \bar{x}, x) \not\subseteq -C\backslash\{0\}$ với mọi $x \in S(\bar{x}, \bar{y})$.

2. Bài toán tựa cân bằng yếu trên loại I, kí hiệu $(UWQEP)_I$, tìm $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho

(i) $\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y})$;

(ii) $F(\bar{y}, \bar{x}, x) \not\subseteq -\operatorname{int}(C)$ với mọi $x \in S(\bar{x}, \bar{y})$.

Các bài toán trên là mở rộng tự nhiên của bài toán cân bằng vô hướng trong trường hợp F là ánh xạ đơn trị vô hướng và C là nón octhant dương.

2.1.2 Sự tồn tại nghiệm

Trong phần này chúng tôi sử dụng tính giả đơn điệu theo nón của ánh xạ đa trị để nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của các bài toán $(UPQEP)_I$ và $(UWQEP)_I$.

Định nghĩa 2.1.1. Cho $F : D \times D \to 2^Y, C : D \to 2^Y$ là các ánh xạ đa trị. Ta nói rằng:

(i) F là C- *giả đơn điệu (pseudomonotone)* nếu với mỗi $x, y \in D$

$$F(y, x) \not\subseteq -\operatorname{int} C(y) \Rightarrow F(x, y) \subseteq -C(x).$$

(ii) F là C- *giả đơn điệu mạnh (strong pseudomonotone)* nếu với mỗi $x, y \in D$

$$F(y, x) \not\subseteq -C(y)\setminus\{0\} \Rightarrow F(x, y) \subseteq -C(x).$$

Nhận xét 2.1.2. Trong trường hợp $Y = \mathbb{R}, C = \mathbb{R}_+$ và F là ánh xạ đơn trị thì khái niệm trên trở về khái niệm giả đơn điệu thông thường.

Định lý 2.1.8. *Giả sử D và K là các tập con không rỗng, lồi, compắc của không gian lồi địa phương Hausdorff X và Z, tương ứng; C là nón lồi đóng nhọn trong không gian tôpô tuyến tính Y. Giả sử F là ánh xạ đa trị với giá trị không rỗng thỏa mãn $F(y, x, x) \cap C \neq \emptyset$ với mọi $(x, y) \in D \times K$. Khi đó các điều kiện dưới đây là đủ để bài toán $(UPQEP)_I$ có nghiệm:*

(i) *S là ánh xạ liên tục với giá trị không rỗng, lồi, đóng;*

(ii) *T là ánh xạ nửa liên tục trên với giá trị không rỗng, lồi, đóng;*

(iii) *Với mỗi $(x, y) \in D \times K$, ánh xạ $F(y, ., x) : D \to 2^Y$ là C- hemi liên tục trên;*

(iv) *Với mỗi $y \in K$, $F(y, ., .) : D \times D \to 2^Y$ là C- giả đơn điệu mạnh;*

(v) *Với mỗi $(x, y) \in D \times K$, ánh xạ $F(y, x, .) : D \to 2^Y$ là C- lồi dưới (hoặc C- giống như tựa lồi dưới);*

(vi) *F là C- liên tục dưới.*

Ví dụ 2.1.9. Xét bài toán $(PQEP)_I$ với $X = Z = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}^2, D = K = [0, 1], C = \mathbb{R}^2_-$ và các ánh xạ $S(x, y) = T(x, y) = [0, 1], F(y, x, z) = \{(x - z, y)\}$, với mọi $(x, y, z) \in D \times K \times D$. Dễ dàng kiểm tra được các giả thiết của Định lý 2.1.8 được thỏa mãn và $\bar{x} = 1, \bar{y} \in [0, 1]$ là nghiệm của bài toán $(UPQEP)_I$. Hơn nữa, với $x < 1$ bài toán $(UPQEP)_I$ không có nghiệm.

Nhận xét 2.1.10. Giả thiết (iv) trong Định lý 2.1.8 không thể bỏ đi được. Ví dụ dưới đây minh họa cho điều khẳng định đó.

Ví dụ 2.1.11. Xét bài toán $(PQEP)_I$ với $X = Z = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}^2, D = K = [0, 1], C = \mathbb{R}^2_-$, $S(x, y) = T(x, y) = [0, 1]$ với mọi $(x, y) \in D \times K$ và ánh xạ đa trị $F : K \times D \times D \to 2^{\mathbb{R}^2}$ bởi

$$F(y, x, z) = [0, x] \times [yz, 1] \text{ với mọi } (y, x, z) \in K \times D \times D.$$

Dễ dàng kiểm tra được các giả thiết của Định lý 2.1.8 được thỏa mãn, trừ giả thiết (iv) và bài toán $(UPQEP)_I$ không có nghiệm.

Một cách hoàn toàn tương tự chúng tôi cũng thiết lập điều kiện đủ cho sự tồn tại nghiệm của bài toán $(UWEQP)_I$.

Định lý 2.1.12. *Giả sử D và K là các tập con không rỗng, lồi, compắc của không gian lồi địa phương Hausdorff X và Z, tương ứng; C là nón lồi đóng trong không gian tôpô tuyến tính Y. Giả sử ánh xạ F với giá trị không rỗng thỏa mãn $F(y,x,x) \nsubseteq -\operatorname{int}(C)$ với mọi $(x,y) \in D \times K$. Khi đó các điều kiện dưới đây là đủ để bài toán $(UWEQP)_I$ có nghiệm:*

(i) *S là ánh xạ liên tục với giá trị không rỗng, lồi, đóng;*

(ii) *T là ánh xạ nửa liên tục trên với giá trị không rỗng, lồi, đóng;*

(iii) *Với mỗi $(x,y) \in D \times K$, ánh xạ $F(y,.,x) : D \to 2^Y$ là C- hemi liên tục dưới;*

(iv) *Với mỗi $y \in K$, $F(y,.,.) : D \times D \to 2^Y$ là C- giả đơn điệu;*

(v) *Với mỗi $(x,y) \in D \times K$, $F(y,x,.) : D \to 2^Y$ là C- lồi dưới;*

(vi) *F là C- liên tục dưới.*

Nhận xét 2.1.13. Giả thiết (vi) trong Định lý 2.1.8 và Định lý 2.1.12 có thể thay bởi giả thiết sau:

(vi') Tập $\{(x,y,z) \in D \times K \times D : F(y,x,z) \subseteq -C\}$ là đóng trong $D \times K \times D$.

2.1.3 Hệ các bài toán tựa cân bằng

Giả sử D, K, C, S, T cho như mục 2.1.1 và $G : K \times D \times D \longrightarrow 2^Y, H : D \times K \times K \longrightarrow 2^Y$ là các ánh xạ đa trị với giá trị không rỗng. Xét các bài toán sau:

1. Hệ các bài toán tựa cân bằng Pareto, kí hiệu $(SPQEP)$, tìm $(\bar{x},\bar{y}) \in D\times K$ sao cho $\bar{x} \in S(\bar{x},\bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x},\bar{y})$ và

$$G(\bar{y},\bar{x},x) \nsubseteq -C\backslash\{0\} \text{ với mọi } x \in S(\bar{x},\bar{y}),$$

$$H(\bar{x},\bar{y},y) \nsubseteq -C\backslash\{0\} \text{ với mọi } y \in T(\bar{x},\bar{y}).$$

2. Hệ các bài toán tựa cân bằng yếu, kí hiệu $(SWQEP)$, tìm $(\bar{x},\bar{y}) \in D \times K$ sao cho $\bar{x} \in S(\bar{x},\bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x},\bar{y})$ và

$$G(\bar{y},\bar{x},x) \nsubseteq -\operatorname{int}(C) \text{ với mọi } x \in S(\bar{x},\bar{y}),$$

$$H(\bar{x},\bar{y},y) \nsubseteq -\operatorname{int}(C) \text{ với mọi } y \in T(\bar{x},\bar{y}).$$

Các định lý dưới đây cho ta điều kiện đủ để các bài toán trên có nghiệm.

Định lý 2.1.14. *Giả sử D và K là các tập con không rỗng, lồi, compắc của các không gian lồi địa phương Hausdorff X và Z, tương ứng; C là nón lồi đóng nhọn trong không gian tôpô tuyến tính Y. Giả sử các ánh xạ G, H với giá trị* *không rỗng thỏa mãn điều kiện $G(y,x,x) \cap C \neq \emptyset, H(x,y,y) \cap C \neq \emptyset$ với mọi $(x,y) \in D \times K$. Khi đó, các điều kiện dưới đây là đủ để bài toán (SPQEP) có nghiệm:*

(i) *S, T là các ánh xạ liên tục với giá trị không rỗng, lồi, đóng;*

(ii) *Với mỗi $(x,y) \in D \times K$, $G(y,.,.), H(x,.,.)$ là C- giả đơn điệu mạnh;*

(iii) *Với mỗi $(x,y) \in D \times K$, $G(y,x,.) : D \to 2^Y, H(x,y,.) : K \to 2^Y$ là C-lồi dưới (hoặc C- giống như tựa lồi dưới);*

(iv) *Với mỗi $(x,y) \in D \times K$, $G(y,.,x), H(x,.,y)$ là C-hemi liên tục trên;*

(v) *G, H là C- liên tục dưới.*

Định lý 2.1.15. *Giả sử D và K là các tập con không rỗng, lồi, compắc của các không gian lồi địa phương Hausdorff X và Z, tương ứng; C là nón lồi đóng trong không gian tôpô tuyến tính Y. Giả sử các ánh xạ G, H với giá trị không rỗng thỏa mãn điều kiện $G(y,x,x) \not\subseteq -\operatorname{int}(C), H(x,y,y) \not\subseteq -\operatorname{int}(C)$ với mọi $(x,y) \in D \times K$. Các điều kiện dưới đây là đủ để bài toán (SWQEP) có nghiệm:*

(i) *S, T là các ánh xạ liên tục với giá trị không rỗng, lồi, đóng;*

(ii) *Với mỗi $(x,y) \in D \times K$, $G(y,.,.), H(x,.,.)$ là C- giả đơn điệu;*

(iii) *Với mỗi $(x,y) \in D \times K$, $G(y,x,.) : D \to 2^Y, H(x,y,.) : K \to 2^Y$ là C-lồi dưới;*

(iv) *Với mỗi $(x,y) \in D \times K$, $G(y,.,x), H(x,.,y)$ là C-hemi liên tục dưới;*

(v) *G, H là C- liên tục dưới.*

Tiếp theo, chúng tôi sử dụng kết quả trên chỉ ra sự tồn tại nghiệm của bài toán điểm tựa yên ngựa Pareto. Trước hết ta phát biểu bài toán điểm tựa yên ngựa Pareto: Giả sử $D \subseteq X, K \subseteq Z$ là các tập không rỗng và $f : D \times K \longrightarrow Y$ là ánh xạ đơn trị, $S : D \times K \longrightarrow 2^D, T : D \times K \longrightarrow 2^K$ là các ánh xạ đa trị. Xét bài toán điểm tựa yên ngựa Pareto sau: Tìm $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho $\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y})$ và

$$f(x, \bar{y}) \notin f(\bar{x}, \bar{y}) - C \backslash \{0\} \text{ với mọi } x \in S(\bar{x}, \bar{y}),$$

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \notin f(\bar{x}, y) - C \backslash \{0\} \text{ với mọi } y \in T(\bar{x}, \bar{y}).$$

Hệ quả 2.1.16. *Giả sử D, K, S, T cho như Định lý 2.1.14 và C là nón lồi đóng nhọn trong Y thỏa mãn $Y = C + (-C)$. Hơn nữa, giả sử các điều kiện sau thỏa mãn:*

(i) *Ánh xạ f là $(-C)$- liên tục và C- liên tục;*

(ii) *Với mỗi $(x,y) \in D \times K$, ánh xạ $f(.,y) : D \longrightarrow Y$ là C- lồi dưới (hoặc C- giống như tựa lồi dưới) và $f(x,.) : K \longrightarrow Y$ là C- lồi trên (hoặc C- giống như tựa lồi trên).*

Khi đó bài toán điểm tựa yên ngựa Pareto có nghiệm.

Trong trường hợp $Y = \mathbb{R}, C = \mathbb{R}_+$, ta thu được kết quả sau.

Hệ quả 2.1.17. *Giả sử D, K, S, T cho như trong Hệ quả 2.1.16. Hơn nữa, giả sử rằng:*

(i) *Ánh xạ $f : D \times K \to \mathbb{R}$ là liên tục;*

(ii) *Với mỗi $(x, y) \in D \times K$, ánh xạ $f(., y) : D \longrightarrow \mathbb{R}$ là lõm (hoặc tựa lõm) và $f(x, .) : K \longrightarrow \mathbb{R}$ là lồi (hoặc tựa lồi).*

Khi đó tồn tại $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho $\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y})$ và

$$\max_{x \in S(\bar{x},\bar{y})} \min_{y \in T(\bar{x},\bar{y})} f(x, y) = \min_{y \in T(\bar{x},\bar{y})} \max_{x \in S(\bar{x},\bar{y})} f(x, y).$$

2.2 Bài toán tựa cân bằng tổng quát loại II

Trong xuyên suốt phần này, ta luôn giả thiết X là không gian lồi địa phương Hausdorff thực và Y, Z là các không gian tôpô tuyến tính.

2.2.1 Bài toán

Giả sử $D \subseteq X, K \subseteq Z$ là các tập con không rỗng. Cho các ánh xạ đa trị $P_1 : D \to 2^D, P_2 : D \to 2^D, Q : D \times D \to 2^K$ và $F : K \times D \times D \to 2^Y$ với giá trị không rỗng, ta xét bài toán sau: Tìm $\bar{x} \in D$ sao cho $\bar{x} \in P_1(\bar{x})$ và

$$0 \in F(y, \bar{x}, t) \text{ với mọi } t \in P_2(\bar{x}) \text{ và } y \in Q(\bar{x}, t).$$

Bài toán trên được gọi là bài toán tựa cân bằng tổng quát loại II và được kí hiệu là $(GQEP)_{II}$. Bài toán này có mối quan hệ chặt chẽ với một số bài toán trong lý thuyết tối ưu như bài toán tựa tối ưu loại II, bài toán tựa cân bằng lý tưởng loại II, bài toán bao hàm thức tựa biến phân lý tưởng loại II, bài toán quan hệ tựa biến phân loại II, ...

2.2.2 Sự tồn tại nghiệm

Trước hết ta nhắc lại khái niệm ánh xạ $Q - KKM$.

Định nghĩa 2.2.1. Cho $F : K \times D \times D \to 2^Y, Q : D \times D \to 2^K$ là ánh xạ đa trị. Ta nói rằng F là Q- KKM nếu với mọi tập hữu hạn $\{t_1, t_2, ..., t_n\} \subseteq D$ và $x \in \text{co}\{t_1, t_2, ..., t_n\}$, tồn tại chỉ số $j \in \{1, 2, ..., n\}$ sao cho $0 \in F(y, x, t_j)$ với mọi $y \in Q(x, t_j)$.

Định lý 2.2.3. *Các điều kiện dưới đây là đủ để bài toán $(GQEP)_{II}$ có nghiệm:*

(i) *D là tập không rỗng, lồi, compắc;*

(ii) *P_1 nửa liên tục trên với giá trị không rỗng, lồi, đóng;*

(iii) *P_2 với giá trị không rỗng thỏa mãn $P_2^{-1}(x)$ là mở và $\text{co}(P_2(x)) \subseteq P_1(x)$ với mọi $x \in D$;*

(iv) *Với mỗi* $t \in D$ *cố định, tập*

$$B_t = \{x \in D : 0 \in F(y, x, t) \text{ với mọi } y \in Q(x, t)\}$$

là đóng trong D*;*

(v) F *là ánh xạ* $Q - KKM$.

Ví dụ 2.2.4. Xét bài toán $(GQEP)_{II}$ với $X = Y = Z = \mathbb{R}, D = K = [0, 1]$, $P_1(x) = P_2(x) = Q(x, t) = [0, 1]$ với mọi $x, t \in [0, 1]$ và $F : K \times D \times D \to 2^Y$ xác định bởi

$$F(y, x, t) = \begin{cases} [0, x], & \text{nếu } x \leq t, \\ [x, 1], & \text{trong trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

Dễ dàng kiểm tra được tất cả các giả thiết của Định lý 2.2.3 được thỏa mãn và $\bar{x} = 1$ là nghiệm duy nhất của bài toán $(GQEP)_{II}$.

Nhận xét 2.2.5. Với mỗi $t \in D$, tập B_t trong Định lý 2.2.3 là đóng nếu các điều kiện dưới đây thỏa mãn:

(i) Với mỗi $x' \in D$, ánh xạ $Q(., x') : D \to 2^K$ nửa liên tục dưới với giá trị không rỗng, compắc;

(ii) Ánh xạ đa trị F đóng đối với biến thứ nhất và thứ hai.

Định lý sau cho ta điều kiện đủ để bài toán $(GQEP)_{II}$ có nghiệm mà ở đó điều kiện đối với ánh xạ đa trị P_2 được giảm nhẹ hơn.

Định lý 2.2.6. *Giả sử* D, P_1, Q *và* F *thỏa mãn các điều kiện* (i), (ii), (iv) *và* (v) *của Định lý 2.2.3 và*

(iii') $P_2 : D \to 2^D$ *là ánh xạ đa trị nửa liên tục dưới với giá trị không rỗng sao cho* $\mathrm{co}(P_2(x)) \subseteq P_1(x)$ *với mọi* $x \in D$.

Khi đó bài toán $(GQEP)_{II}$ *có ít nhất một nghiệm.*

Ví dụ 2.2.7. Xét bài toán $(GQEP)_{II}$ với $X = Y = Z = \mathbb{R}, D = K = [0, 1]$, $P_1(x) = Q(x, t) = [0, 1], P_2(x) = [0, x]$, với mọi $x, t \in [0, 1]$ và ánh xạ đa trị $F : K \times D \times D \to 2^Y$ xác định bởi

$$F(y, x, t) = \begin{cases} [0, x], & \text{nếu } x \leq t, \\ [x, 1], & \text{trong trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

Dễ thấy ánh xạ P_2 không có tính chất ảnh ngược tại mỗi điểm là mở nên không thể áp dụng Định lý 2.2.3. Tuy nhiên P_2 là ánh xạ nửa liên tục dưới và các giả thiết của Định lý 2.2.6 được thỏa mãn và bài toán $(GQEP)_{II}$ có nghiệm $\bar{x} = 1$.

2.2.3 Bài toán tựa cân bằng

Trong phần này chúng tôi áp dụng các kết quả thu được ở trên vào sự tồn tại nghiệm của bài toán tựa cân bằng Pareto và bài toán tựa cân bằng yếu.

Các hệ quả sau cho ta điều kiện đủ để bài toán tựa cân bằng Pareto và yếu có nghiệm.

Hệ quả 2.2.8. *Giả sử D là tập không rỗng, lồi, compắc và $P : D \to 2^D$ là ánh xạ liên tục với giá trị không rỗng, lồi, đóng. Hơn nữa, giả sử $G : D \times D \to 2^Y$ là ánh xạ đa trị với giá trị không rỗng và $C : D \to 2^Y$ là ánh xạ nón với giá trị lồi, thỏa mãn $G(x, x) \cap C(x) \neq \emptyset$ với mọi $x \in D$. Giả sử các điều kiện sau xảy ra:*

(i) *Với mỗi $t \in D$, tập*

$$A_t = \{x \in D : G(t, x) \subseteq -C(t)\}$$

là đóng trong D;

(ii) *Với mỗi $t \in D, G(., t) : D \to 2^Y$ là C-hemi liên tục trên;*

(iii) *G là C- giả đơn điệu mạnh;*

(iv) *G là C- lồi dưới theo đường chéo (hoặc C- giống như tựa lồi dưới theo đường chéo) đối với biến thứ hai.*

Khi đó tồn tại $\bar{x} \in D$ sao cho $\bar{x} \in P(\bar{x})$ và

$$G(\bar{x}, t) \not\subseteq -C(\bar{x})\backslash\{0\} \text{ với mọi } t \in P(\bar{x}).$$

Hệ quả 2.2.9. *Giả sử D là tập không rỗng, lồi, compắc và $P : D \to 2^D$ là ánh xạ liên tục với giá trị không rỗng, lồi, đóng. Hơn nữa, giả sử $G : D \times D \to 2^Y$ là ánh xạ đa trị với giá trị không rỗng và $C : D \to 2^Y$ là ánh xạ nón với giá trị lồi, thỏa mãn $F(x, x) \not\subseteq -\operatorname{int} C(x)$ với mọi $x \in D$. Giả sử các điều kiện sau xảy ra:*

(i) *Với mỗi $t \in D$, tập*

$$A_t = \{x \in D : G(t, x) \subseteq -C(t)\}$$

là đóng trong D;

(ii) *Với mỗi $t \in D, G(., t) : D \to 2^Y$ là C-hemi liên tục dưới;*

(iii) *G là C- giả đơn điệu;*

(iv) *G là C- lồi dưới theo đường chéo đối với biến thứ hai.*

Khi đó tồn tại $\bar{x} \in D$ sao cho $\bar{x} \in P(\bar{x})$ và

$$G(\bar{x}, t) \not\subseteq -\operatorname{int} C(\bar{x}) \text{ với mọi } t \in P(\bar{x}).$$

Nhận xét 2.2.10. Với mỗi $t \in D$, tập A_t trong Hệ quả 2.2.8 và Hệ quả 2.2.9 là đóng nếu các điều kiện sau xảy ra:

(i) Ánh xạ nón C với giá trị không rỗng, lồi, đóng.

(ii) Ánh xạ $G(t, .) : D \to 2^Y$ là $C(t)$-liên tục dưới.

Tiếp theo, chúng tôi chỉ ra sự tồn tại nghiệm của bài toán tựa cân bằng yếu mà không sử dụng tính giả đơn điệu.

Hệ quả 2.2.11. *Giả sử Y là không gian định chuẩn; $D, P_i, i = 1, 2$ cho như trong Định lý 2.2.3 (hoặc Định lý 2.2.6); $C : D \to 2^Y$ là ánh xạ nón nửa liên tục dưới với giá trị lồi đóng và $G : D \times D \to 2^Y$ là ánh xạ đa trị với giá trị không rỗng, compắc sao cho với mỗi $t \in D$, ánh xạ $G(., t) : D \to 2^Y$ là $(-C)$-liên tục trên. Hơn nữa, giả sử các điều kiện sau thỏa mãn:*

(i) $G(x, x) \not\subseteq -\operatorname{int} C(x)$ *với mọi* $x \in D$;

(ii) *G là C- lồi dưới theo đường chéo (hoặc C- giống như tựa lồi dưới theo đường chéo) đối với biến thứ hai.*

Khi đó tồn tại $\bar{x} \in D$ sao cho $\bar{x} \in P_1(\bar{x})$ và

$$G(\bar{x}, t) \not\subseteq -\operatorname{int} C(\bar{x}) \text{ với mọi } t \in P_2(\bar{x}).$$

Chương 3

Bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto

Trong chương 3 chúng tôi thiết lập các điều kiện đủ để bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto loại I và loại II có nghiệm. Mỗi một loại chúng tôi phân thành hai lớp khác nhau, đó là lớp bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto trên và lớp bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto dưới. Trong xuyên suốt chương này, chúng tôi luôn giả thiết C là nón nhọn trong không gian tuyến tính Y sao cho nón cực chặt C'^{+} không rỗng.

3.1 Bao hàm thức tựa biến phân Pareto loại I

Trong mục này, ta luôn giả thiết X, Z là các không gian lồi địa phương Hausdorff thực và Y là không gian tôpô tuyến tính.

3.1.1 Bài toán

Cho D và K là các tập con không rỗng của X và Z, tương ứng và C là một nón nhọn trong Y. Cho các ánh xạ đa trị $S : D \to 2^D, T : D \to 2^K, F : K \times D \times D \to 2^Y$, xét các bài toán sau:

1. Bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto trên loại I, kí hiệu $(UPQVIP)_I$, tìm $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho $\bar{x} \in S(\bar{x}), \bar{y} \in T(\bar{x})$ và

$$F(\bar{y}, \bar{x}, x) \not\subseteq F(\bar{y}, \bar{x}, \bar{x}) - C \backslash \{0\} \text{ với mọi } x \in S(\bar{x}).$$

2. Bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto dưới loại I, kí hiệu $(LPQVIP)_I$, tìm $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho $\bar{x} \in S(\bar{x}), \bar{y} \in T(\bar{x})$ và

$$F(\bar{y}, \bar{x}, \bar{x}) \not\subseteq F(\bar{y}, \bar{x}, x) + C \backslash \{0\} \text{ với mọi } x \in S(\bar{x}).$$

Các bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto bao hàm các bài toán tựa tối ưu véctơ Pareto đơn trị trong trường hợp F là ánh xạ đơn trị và nó còn bao hàm các bài toán tựa cân bằng Pareto trong trường hợp $F(y, x, x) = \{0\}$ với mọi $(x, y) \in D \times K$.

3.1.2 Sự tồn tại nghiệm

Trước tiên bằng việc vô hướng hóa bài toán bởi phần tử của C'^{+}, chúng tôi thu được kết quả dưới đây.

Định lý 3.1.1. *Giả sử D và K là các tập con không rỗng, lồi, compắc và các ánh xạ đa trị S, T và F thỏa mãn các điều kiện sau:*

(i) *Ánh xạ đa trị S với giá trị không, rỗng lồi và $S^{-1}(x)$ mở, với mọi $x \in D$;*

(ii) *Ánh xạ đa trị T nửa liên tục trên với giá trị không rỗng, lồi, đóng và tập $W = \{(x, y) \in D \times K : x \in S(x), y \in T(x)\}$ đóng trong $D \times K$;*

(iii) *Ánh xạ đa trị F với giá trị không rỗng, compắc sao cho với mỗi $x' \in D$, ánh xạ $F(., ., x') : K \times D \to 2^Y$ là $(-C)$- liên tục trên và ánh xạ $G : K \times D \to 2^Y$ định nghĩa bởi $G(y, x) = F(y, x, x)$ là C- liên tục dưới;*

(iv) *Với mỗi $y \in K$, ánh xạ $F(y, ., .) : D \times D \to 2^Y$ là C- lồi dưới theo đường chéo (hoặc C- giống như tựa lồi dưới theo đường chéo) đối với biến thứ hai.*
Khi đó bài toán $(UPQVIP)_I$ có ít nhất một nghiệm.

Sử dụng kỹ thuật chứng minh của D. T. Luc, chúng tôi thu được kết quả dưới đây mà ở đó điều kiện của ánh xạ ràng buộc S được giảm nhẹ.

Định lý 3.1.2. *Giả sử D và K là các tập con không rỗng, lồi, compắc. Hơn nữa, giả sử các giả thiết* (iii), (iv) *của Định lý 3.1.1 được thỏa mãn và*

(i') *S nửa liên tục dưới với giá trị không rỗng, lồi, đóng;*

(ii') *T nửa liên tục trên với giá trị không rỗng, lồi, đóng.*
Khi đó bài toán $(UPQVIP)_I$ có nghiệm.

Ví dụ 3.1.3. Xét bài toán $(UPQVIP)_I$, với $X = Z = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}^2, D = K = [0, 1], C = \mathbb{R}^2_-, S(x) = T(x) = [0, 1]$ và $F(y, x, x') = [0, x + y] \times [x', 1]$, với mọi $(y, x, x') \in K \times D \times D$. Ta dễ dàng kiểm tra được tất cả các giả thiết trong Định lý 3.1.1 được thỏa mãn và $\{(1, y) : y \in [0, 1]\}$ là tập nghiệm của $(UPQVIP)_I$. Hơn nữa, với $x < 1$ thì bài toán $(UPQVIP)_I$ không có nghiệm.

Ngoài ra một số ví dụ khẳng định một số giả thiết trong Định lý 3.1.2 không thể bỏ đi được, chẳng hạn như: S có giá trị đóng, F có giá trị compắc, F là $(-C)$-liên tục trên đối với biến thứ nhất và thứ hai (Ví dụ 3.1.5, Ví dụ 3.1.6, Ví dụ 3.1.7).

Một cách hoàn toàn tương tự chúng tôi cũng thiết lập các điều kiện đủ cho sự tồn tại nghiệm của bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto dưới loại I.

Định lý 3.1.8. *Giả sử D và K là các tập con không rỗng, lồi, compắc. Khi đó các điều kiện dưới đây là đủ để bài toán $(LPQVIP)_I$ có nghiệm:*

(i) *Ánh xạ S với giá trị không, rỗng lồi và $S^{-1}(x)$ mở, với mọi $x \in D$;*

(ii) *Ánh xạ đa trị T nửa liên tục trên với giá trị không rỗng, lồi, đóng và tập $W = \{(x, y) \in D \times K : x \in S(x), y \in T(x)\}$ đóng trong $D \times K$;*

(iii) *Ánh xạ đa trị F với giá trị không rỗng, compắc sao cho với mỗi $x' \in D$, ánh xạ $F(.,.,x') : K \times D \to 2^Y$ là $(-C)$- liên tục dưới và ánh xạ $G : K \times D \to 2^Y$ định nghĩa bởi $G(y, x) = F(y, x, x)$ là C- liên tục trên;*

(iv) *Với mỗi $y \in K$, ánh xạ đa trị $F(y,.,.) : D \times D \to 2^Y$ là C- giống như tựa lồi trên theo đường chéo đối với biến thứ hai.*

Định lý 3.1.9. *Giả sử D và K là các tập con không rỗng, lồi, compắc. Hơn nữa, giả sử các giả thiết* (iii), (iv) *của Định lý 3.1.7 được thỏa mãn và*

(i') *S nửa liên tục dưới với giá trị không rỗng, lồi, đóng;*

(ii') *T nửa liên tục trên với giá trị không rỗng, lồi, đóng.*

Khi đó bài toán $(LPQVIP)_I$ có nghiệm.

Tiếp theo, bằng việc sử dụng nguyên lý ánh xạ KKM và định lý điểm bất động Ky Fan, chúng tôi mở rộng bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto loại I cho trường hợp ánh xạ ràng buộc S và T là ánh xạ hai biến.

Định lý 3.1.10. *Giả sử các điều kiện sau thỏa mãn*

(i) *D và K là các tập con không rỗng, lồi, compắc;*

(ii) *$S : D \times K \to 2^D$ là ánh xạ liên tục với giá trị không rỗng, lồi, đóng;*

(iii) *$T : D \times K \to 2^K$ là ánh xạ nửa liên tục trên với giá trị không rỗng, lồi, đóng;*

(iv) *$F : K \times D \times D \to 2^Y$ là $(-C)$- liên tục trên và C- liên tục dưới với giá trị không rỗng, compắc;*

(v) *Với mỗi $(x, y) \in D \times K$, ánh xạ $F(y, x, .) : D \to 2^Y$ là C- lồi dưới (hoặc C- giống như tựa lồi dưới).*

Khi đó tồn tại $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho $\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y})$ và

$$F(\bar{y}, \bar{x}, x) \not\subseteq F(\bar{y}, \bar{x}, \bar{x}) - C\backslash\{0\} \text{ với mọi } x \in S(\bar{x}, \bar{y}).$$

Định lý 3.1.11. *Giả sử rằng các điều kiện sau thỏa mãn:*

(i) *D và K là các tập con không rỗng, lồi, compắc;*

(ii) *$S : D \times K \to 2^D$ là ánh xạ liên tục với giá trị không rỗng, lồi, đóng;*

(iii) *$T : D \times K \to 2^K$ là ánh xạ nửa liên tục trên với giá trị không rỗng, lồi, đóng;*

(iv) *$F : K \times D \times D \to 2^Y$ là C- liên tục trên và $(-C)$- liên tục dưới với giá trị không rỗng, compắc;*

(v) *Với mỗi $(x, y) \in D \times K$, $F(y, x, .) : D \to 2^Y$ là C- giống như tựa lồi trên.*

Khi đó tồn tại $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho $\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y})$ và

$$F(\bar{y}, \bar{x}, \bar{x}) \not\subseteq F(\bar{y}, \bar{x}, x) + C\backslash\{0\} \text{ với mọi } x \in S(\bar{x}, \bar{y}).$$

3.2 Một số bài toán liên quan loại I

Trong phần này chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của các bài toán tựa cân bằng Pareto và các bài toán tựa tối ưu Pareto với ánh xạ đa trị.

3.2.1 Bài toán tựa cân bằng loại I

Hai hệ quả dưới đây là điều kiện đủ để bài toán tựa cân bằng trên loại I có nghiệm, trong đó giả thiết về tính giả đơn điệu của ánh xạ mục tiêu trong Chương 2 chúng tôi không sử dụng.

Hệ quả 3.2.1. *Giả sử D, K, C, S, T và F thỏa mãn các điều kiện của Định lý 3.1.1 và $F(y, x, x) \cap C \neq \emptyset$ với mọi $(x, y) \in D \times K$. Khi đó tồn tại $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho $\bar{x} \in S(\bar{x}), \bar{y} \in T(\bar{x})$ và*

$$F(\bar{y}, \bar{x}, x) \not\subseteq -C \backslash \{0\} \text{ với mọi } x \in S(\bar{x}).$$

Hệ quả 3.2.2. *Giả sử D, K, C, S, T và F thỏa mãn các điều kiện của Định lý 3.1.2 và $F(y, x, x) \cap C \neq \emptyset$ với mọi $(x, y) \in D \times K$. Khi đó tồn tại $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho $\bar{x} \in S(\bar{x}), \bar{y} \in T(\bar{x})$ và*

$$F(\bar{y}, \bar{x}, x) \not\subseteq -C \backslash \{0\} \text{ với mọi } x \in S(\bar{x}).$$

Các hệ quả sau cho ta điều kiện đủ để bài toán tựa cân bằng dưới loại I có nghiệm. Các bài toán này cho đến nay gần như chưa được xét đến.

Hệ quả 3.2.3. *Giả sử D, K, C, S, T và F thỏa mãn các điều kiện của Định lý 3.1.8 và $F(y, x, x) \subseteq C$ với mọi $(x, y) \in D \times K$. Khi đó tồn tại $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho $\bar{x} \in S(\bar{x}), \bar{y} \in T(\bar{x})$ và*

$$F(\bar{y}, \bar{x}, x) \cap (-C \backslash \{0\}) = \emptyset \text{ với mọi } x \in S(\bar{x}).$$

Hệ quả 3.2.4. *Giả sử D, K, C, S, T và F thỏa mãn các điều kiện của Định lý 3.1.9 và $F(y, x, x) \subseteq C$ với mọi $(x, y) \in D \times K$. Khi đó tồn tại $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho $\bar{x} \in S(\bar{x}), \bar{y} \in T(\bar{x})$ và*

$$F(\bar{y}, \bar{x}, x) \cap (-C \backslash \{0\}) = \emptyset \text{ với mọi } x \in S(\bar{x}).$$

3.2.2 Bài toán tựa tối ưu loại I

Giả sử Y là không gian tuyến tính với nón nhọn C và A là tập con không rỗng của Y. Tập các điểm hữu hiệu Pareto của A đối với nón C, kí hiệu là $\mathrm{PMin}(A \mid C)$, xác định như sau:

$$\mathrm{PMin}(A \mid C) = \{x \in A : \text{không tồn tại } y \in A \text{ sao cho } x - y \in C \backslash \{0\}\}.$$

Hệ quả sau là điều kiện đủ cho sự tồn tại nghiệm của bài toán tựa tối ưu Pareto đa trị.

Hệ quả 3.2.8. *Giả sử D, K, C, S, T và F thỏa mãn các điều kiện của Định lý 3.1.8 (hoặc Định lý 3.1.9). Khi đó tồn tại $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho $\bar{x} \in S(\bar{x}), \bar{y} \in T(\bar{x})$ và*

$$F(\bar{y}, \bar{x}, \bar{x}) \cap \mathrm{PMin}(F(\bar{y}, \bar{x}, S(\bar{x})) \mid C) \neq \emptyset.$$

3.3 Bao hàm thức tựa biến phân Pareto loại II

Trong phần này ta luôn giả thiết X là không gian lồi địa phương Hausdorff và Y, Z là các không gian tôpô tuyến tính.

3.3.1 Bài toán

Giả sử D, K là các tập con không rỗng của X và Z, tương ứng và C là nón nhọn trong Y. Cho các ánh xạ đa trị

$$P_1, P_2 : D \to 2^D,$$

$$Q : D \times D \to 2^K,$$

$$F : K \times D \times D \to 2^Y,$$

với giá trị không rỗng, xét các bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto sau đây:

1. Bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto trên loại II, kí hiệu $(UPQVIP)_{II}$, tìm $\bar{x} \in D$ sao cho $\bar{x} \in P_1(\bar{x})$ và

$$F(y, x, \bar{x}) \not\subseteq F(y, \bar{x}, \bar{x}) - C\backslash\{0\} \text{ với mọi } x \in P_2(\bar{x}) \text{ và } y \in Q(x, \bar{x}).$$

2. Bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto dưới loại II, kí hiệu $(LPQVIP)_{II}$, tìm $\bar{x} \in D$ sao cho $\bar{x} \in P_1(\bar{x})$ và

$$F(y, \bar{x}, \bar{x}) \not\subseteq F(y, x, \bar{x}) + C\backslash\{0\} \text{ với mọi } x \in P_2(\bar{x}) \text{ và } y \in Q(x, \bar{x}).$$

Ở đây các ánh xạ đa trị P_1, P_2, Q gọi là ánh xạ ràng buộc và ánh xạ đa trị F gọi là ánh xạ mục tiêu của bài toán.

3.3.2 Sự tồn tại nghiệm

Bằng phương pháp vô hướng hóa bởi một phần tử của C'^{+} và sử dụng Định lý điểm bất động Fan- Browder, ta thu được kết quả sau.

Định lý 3.3.3. *Giả sử D là tập không rỗng, lồi, compắc và K là tập không rỗng. Các điều kiện dưới đây là đủ để bài toán $(UPQVIP)_{II}$ có nghiệm:*

(i) P_1 *nửa liên tục trên với giá trị không rỗng, lồi, đóng;*

(ii) *P_2 với giá trị không rỗng, $P_2^{-1}(x)$ là tập mở và* $\mathrm{co}(P_2(x)) \subseteq P_1(x)$ *với mọi $x \in D$;*

(iii) *Với mỗi $x \in D$, ánh xạ $Q(x,.) : D \to 2^K$ nửa liên tục dưới với giá trị không rỗng, compắc;*

(iv) *Ánh xạ F với giá trị không rỗng, compắc sao cho với mỗi $x' \in D$, $F(., x', .) : K \times D \to 2^Y$ là $(-C)$-liên tục trên và ánh xạ $G : K \times D \to 2^Y$ định nghĩa bởi $G(y, x) = F(y, x, x)$ là C-liên tục dưới;*

(v) *Với mỗi $y \in K$, $F(y, ., .) : D \times D \to 2^Y$ là C-lồi dưới theo đường chéo đối với biến thứ nhất (hoặc F là (Q, C)- giống như tựa lồi dưới theo đường chéo đối với biến thứ hai).*

Ví dụ 3.3.4. Xét bài toán $(UPQVIP)_{II}$ với $X = Z = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}^2, D = [0, 1], K = (-1, 2], C = \mathbb{R}^2_-, P_1(x) = P_2(x) = [0, 1], Q(x, x') = [0, x']$ và ánh xạ mục tiêu $F(y, x, x') = [x'y, 1] \times [x, 1]$, với mọi $(y, x, x') \in K \times D \times D$. Ta dễ dàng kiểm tra được tất cả các giả thiết trong Định lý 3.3.3 được thỏa mãn và $\bar{x} = 1$ là nghiệm duy nhất của $(UPQVIP)_{II}$.

Định lý dưới đây được thiết lập cho sự tồn tại nghiệm của bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto trên loại II với giả thiết ánh xạ P_2 được giảm nhẹ.

Định lý 3.3.5. *Giả sử D là tập không rỗng, lồi, compắc, K là tập không rỗng và các ánh xạ P_1, P_2, Q, F thỏa mãn các điều kiện* (i), (iii), (iv), (v) *của Định lý 3.3.3 và*

(ii') *P_2 nửa liên tục dưới với giá trị không rỗng và* $\mathrm{co}(P_2(x)) \subseteq P_1(x)$ *với mọi $x \in D$.*

Khi đó bài toán $(UPQVIP)_{II}$ có ít nhất một nghiệm.

Nhận xét 3.3.6. Định lý 3.3.3 và Định lý 3.3.5 cho ta điều kiện đủ để bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto trên loại II có nghiệm. Các điều kiện của ánh xạ ràng buộc P_1, P_2 trong các định lý đó nhẹ hơn các ánh xạ ràng buộc S, T trong Định lý 3.1.1 và Định lý 3.1.2.

Ví dụ 3.3.7. Xét bài toán $(UPQVIP)_{II}$ với $X = Z = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}^2, D = [0, 1], K = (-1, 2], C = \mathbb{R}^2_-, P_1(x) = [0, 1], P_2(x) = [0, x], Q(x, x') = [0, x']$ và ánh xạ mục tiêu $F(y, x, x') = [x'y, 1] \times [x, 1]$, với mọi $(y, x, x') \in K \times D \times D$. Dễ thấy ánh xạ P_2 không có tính chất ảnh ngược tại mỗi điểm là mở nên không thể áp dụng Định lý 3.3.3. Tuy nhiên P_2 là ánh xạ nửa liên tục dưới và các giả thiết của Định lý 3.3.5 được thỏa mãn và bài toán $(UPQVIP)_{II}$ có nghiệm $\bar{x} = 1$.

Các định lý dưới đây là điều kiện đủ để bài toán $(LPQVIP)_{II}$ có nghiệm.

Định lý 3.3.8. *Các điều kiện dưới đây là đủ để bài toán $(LPQVIP)_{II}$ có nghiệm:*

(i) *D là tập không rỗng, lồi, compắc và K là tập không rỗng;*

(ii) P_1 *là ánh xạ đa trị nửa liên tục trên với giá trị không rỗng, lồi, đóng;*

(iii) P_2 *với giá trị không rỗng,* $P_2^{-1}(x)$ *là tập mở và* $\text{co}(P_2(x)) \subseteq P_1(x)$ *với mọi* $x \in D$;

(iv) *Với mỗi* $x \in D$, *ánh xạ đa trị* $Q(x,.) : D \to 2^K$ *là nửa liên tục dưới với giá trị không rỗng, compắc;*

(v) *Ánh xạ đa trị* F *với giá trị không rỗng, compắc sao cho với mỗi* $x' \in D$, $F(., x', .) : K \times D \to 2^Y$ *là* $(-C)$*- liên tục dưới và ánh xạ* $G : K \times D \to 2^Y$ *định nghĩa bởi* $G(y, x) = F(y, x, x)$ *là* C*-liên tục trên;*

(vi) F *là* (Q, C)*- giống như tựa lồi trên theo đường chéo đối với biến thứ hai.*

Định lý 3.3.9. *Giả sử* D, K, P_1, Q *và* F *thỏa mãn các điều kiện* (i), (ii), (iv), (v) *và* (vi) *của Định lý 3.3.8 và*

(iii') $P_2 : D \to 2^D$ *là ánh xạ nửa liên tục dưới với giá trị không rỗng và* $\text{co}(P_2(x)) \subseteq P_1(x)$ *với mọi* $x \in D$.

Khi đó bài toán $(LPQVIP)_{II}$ *có ít nhất một nghiệm.*

Các hệ quả dưới đây thu được trực tiếp từ các định lý ở trên trong trường hợp $P_1 = P_2 = P$.

Hệ quả 3.3.10. *Giả sử các điều kiện sau thỏa mãn:*

(i) D *là tập không rỗng, lồi, compắc và* K *là tập không rỗng;*

(ii) $P : D \to 2^D$ *là ánh xạ liên tục với giá trị không rỗng, lồi, đóng;*

(iii) *Với mỗi* $x \in D$, *ánh xạ* $Q(x,.) : D \to 2^K$ *nửa liên tục dưới với giá trị không rỗng, compắc;*

(iv) *Ánh xạ* F *với giá trị không rỗng, compắc sao cho với mỗi* $x' \in D$, $F(., x', .) : K \times D \to 2^Y$ *là* $(-C)$*-liên tục trên và ánh xạ* $G : K \times D \to 2^Y$ *định nghĩa bởi* $G(y, x) = F(y, x, x)$ *là* C*-liên tục dưới;*

(v) *Với mỗi* $y \in K$, $F(y, ., .) : D \times D \to 2^Y$ *là* C*- lồi dưới theo đường chéo đối với biến thứ nhất (hoặc* F *là* (Q, C)*- giống như tựa lồi dưới theo đường chéo đối với biến thứ hai).*

Khi đó tồn tại $\bar{x} \in D$ *sao cho* $\bar{x} \in P(\bar{x})$ *và*

$$F(y, x, \bar{x}) \not\subseteq F(y, \bar{x}, \bar{x}) - C\backslash\{0\} \text{ với mọi } x \in P(\bar{x}) \text{ và } y \in Q(x, \bar{x}).$$

Hệ quả 3.3.11. *Giả sử các điều kiện sau thỏa mãn:*

(i) D *là tập không rỗng, lồi, compắc và* K *là tập không rỗng;*

(ii) $P : D \to 2^D$ *là ánh xạ liên tục với giá trị không rỗng, lồi, đóng;*

(iii) *Với mỗi* $x \in D$, *ánh xạ* $Q(x,.) : D \to 2^K$ *nửa liên tục dưới với giá trị không rỗng, compắc;*

(iv) *Ánh xạ đa trị* F *với giá trị không rỗng, compắc sao cho với mỗi* $x' \in D$, $F(., x', .) : K \times D \to 2^Y$ *là* $(-C)$*- liên tục dưới và ánh xạ* $G : K \times D \to 2^Y$ *định nghĩa bởi* $G(y, x) = F(y, x, x)$ *là* C*-liên tục trên;*

(v) *F là (Q,C)- giống như tựa lồi trên theo đường chéo đối với biến thứ hai. Khi đó tồn tại $\bar{x} \in D$ sao cho $\bar{x} \in P(\bar{x})$ và*

$$F(y,\bar{x},\bar{x}) \not\subseteq F(y,x,\bar{x}) + C\backslash\{0\} \text{ với mọi } x \in P(\bar{x}) \text{ và } y \in Q(x,\bar{x}).$$

3.4 Một số bài toán liên quan loại II

Tương tự như mục 3.2, trong phần này ta thiết lập một số điều kiện đủ cho sự tồn tại nghiệm của bài toán tựa cân bằng và bài toán tựa tối ưu.

3.4.1 Bài toán tựa cân bằng loại II

Hệ quả 3.4.1. *Giả sử D,K,C,P_1,P_2,Q và F thỏa mãn các điều kiện của Định lý 3.3.3 và $F(y,x,x) \cap C \neq \emptyset$ với mọi $(x,y) \in D \times K$. Khi đó tồn tại $\bar{x} \in D$ sao cho $\bar{x} \in P_1(\bar{x})$ và*

$$F(y,x,\bar{x}) \not\subseteq -C\backslash\{0\} \text{ với mọi } x \in P_2(\bar{x}) \text{ và } y \in Q(x,\bar{x}).$$

Hệ quả 3.4.2. *Giả sử D,K,C,P_1,P_2,Q và F thỏa mãn các điều kiện của Định lý 3.3.5 và $F(y,x,x) \cap C \neq \emptyset$ với mọi $(x,y) \in D \times K$. Khi đó tồn tại $\bar{x} \in D$ sao cho $\bar{x} \in P_1(\bar{x})$ và*

$$F(y,x,\bar{x}) \not\subseteq -C\backslash\{0\} \text{ với mọi } x \in P_2(\bar{x}) \text{ và } y \in Q(x,\bar{x}).$$

Hệ quả 3.4.3. *Giả sử D,K,C,P_1,P_2,Q và F thỏa mãn các điều kiện của Định lý 3.3.8 và $F(y,x,x) \subseteq C$ với mọi $(x,y) \in D \times K$. Khi đó tồn tại $\bar{x} \in D$ sao cho $\bar{x} \in P_1(\bar{x})$ và*

$$F(y,x,\bar{x}) \cap (-C\backslash\{0\}) = \emptyset \text{ với mọi } x \in P_2(\bar{x}) \text{ và } y \in Q(x,\bar{x}).$$

Hệ quả 3.4.4. *Giả sử D,K,C,P_1,P_2,Q và F thỏa mãn các điều kiện của Định lý 3.3.9 và $F(y,x,x) \subseteq C$ với mọi $(x,y) \in D \times K$. Khi đó tồn tại $\bar{x} \in D$ sao cho $\bar{x} \in P_1(\bar{x})$ và*

$$F(y,x,\bar{x}) \cap (-C\backslash\{0\}) = \emptyset \text{ với mọi } x \in P_2(\bar{x}) \text{ và } y \in Q(x,\bar{x}).$$

3.4.2 Bài toán tựa tối ưu loại II

Hệ quả 3.4.6. *Giả sử D,K,C,P và F thỏa mãn các điều kiện của Hệ quả 3.3.11 và $Q : D \to 2^K$ là nửa liên tục dưới với giá trị không rỗng, compắc. Khi đó tồn tại $\bar{x} \in D$ sao cho $\bar{x} \in P(\bar{x})$ và*

$$F(y,\bar{x},\bar{x}) \cap \mathrm{PMin}(F(y,P(\bar{x}),\bar{x}) \mid C) \neq \emptyset \text{ với mọi } y \in Q(\bar{x}).$$

Kết luận của luận án

Trong luận án này chúng tôi đã thu được những kết quả chính sau.

1. Thiết lập một số điều kiện đủ cho sự tồn tại nghiệm của bài toán tựa cân bằng Pareto và yếu loại I liên quan đến nón trong không gian tuyến tính và ánh xạ đa trị.

2. Thiết lập một số điều kiện đủ cho sự tồn tại nghiệm của bài toán tựa cân bằng tổng quát loại II với ánh xạ đa trị, không liên quan đến nón trong không gian tuyến tính.

3. Sử dụng Bổ đề Fan- KKM và định lý điểm bất động Ky Fan, chúng tôi đưa ra một số điều kiện đủ cho sự tồn tại nghiệm của bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto loại I.

4. Sử dụng phương pháp vô hướng hóa và định lý điểm bất động Fan- Browder, chúng tôi thiết lập một số điều kiện đủ cho sự tồn tại nghiệm của bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto loại II.

Danh mục công trình của tác giả liên quan đến luận án

1. B. T. Hung, N. X. Tan (2011), "On the existence of solutions to generalized quasi-equilibrium problems", *Advances in Nonlinear Variational Inequalities*, **14**, No. 1, 1-16.

2. B. T. Hung, N. X. Tan (2012), "On the existence of solutions to Pareto and weak quasivariational inclusion problems", *Advances in Nonlinear Variational Inequalities*, **15**, No. 2, 1-16.

3. B. T. Hung (2013), "On the existence of solutions to Pareto quasivariational inclusion problems of type I", Acta Math. Vietnamica., **38**, No.3, 447-459.

4. B. T. Hung, "On the existence of solutions to Pareto quasivariational inclusion problems of type II"(preprint).

5. B. T. Hung, "On the weak and Pareto quasi-equilibrium problems and their applications" (preprint).

Các kết quả trong luận án đã được báo cáo và thảo luận tại:

1. Hội nghị nghiên cứu sinh Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam (2009, 2010, 2011, 2012).

2. Hội thảo tối ưu và tính toán khoa học lần thứ 10, Ba Vì - Hà Nội (2012).

3. Seminar của Phòng Giải tích, Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.

4. Seminar của Phòng Tối ưu và điều khiển, Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.