VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

VIỆN TOÁN HỌC

TRẦN VĂN THẮNG

ĐỐI NGẪU LIÊN HỢP CHO BÀI TOÁN TỐI ƯU ĐA MỤC TIÊU VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: Toán Ứng dụng

Mã số: 62 46 01 12

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HÀ NỘI-NĂM 2014

Mở đầu

Theo G. Dantzig, lý thuyết đối ngẫu được phỏng đoán bởi J. V. Neumann trong lý thuyết trò chơi ngay sau khi G. Dantzig trình bày các vấn đề về quy hoạch tuyến tính. Năm 1951, một chứng minh đầy đủ về đối ngẫu cho bài toán quy hoạch tuyến tính đã được công bố lần đầu bởi A. W. Tucker và nhóm của ông. Từ đó lý thuyết đối ngẫu đã trở trành một chương quan trọng của lý thuyết tối ưu, cả về phương diện lý thuyết lẫn tính toán và ứng dụng thực tế và thu hút nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu, trong đó đáng chú ý là các công trình của A. W. Tucker, R. T. Rockafellar, Y. Sawaragi và ở Việt Nam là các công trình của các tác giả Hoàng Tụy, Phạm Hữu Sách, Đinh Thế Lục, Phan Thiên Thạch, Vũ Ngọc Phát, Nguyễn Định, ... Ban đầu lý thuyết đối ngẫu được xây dựng cho các bài toán tối ưu tuyến tính bởi A. W. Tucker và nhóm của ông, sau đó các nhà toán học đã mở rộng cho trường hợp phi tuyến, tối ưu đa mục tiêu và cả trong tối ưu đa trị. Lý thuyết đối ngẫu được đưa ra thực sự có ý nghĩa và có nhiều ứng dụng khi nó đảm bảo được đối ngẫu mạnh. Tuy nhiên, trong trường hợp tổng quát việc có được đối ngẫu mạnh là rất khó khăn. Cho đến nay các nhà toán học mới chỉ đưa ra được đối ngẫu mạnh cho một số lớp các bài toán thỏa mãn một số điều kiện nào đó. Đã có nhiều kết quả quan trọng về đối ngẫu cho các bài toán tối ưu, các kết quả này chủ yếu có được dựa trên lý thuyết đối ngẫu Lagrange và đối ngẫu liên hợp dựa vào các phép biến đổi liên hợp như phép biến đổi liên hợp

Fenchel, phép biến đổi tựa liên hợp và một số phép biến đổi liên hợp khác.

Với bài toán tối ưu vô hướng, các nhà toán học đã thu được đối ngẫu mạnh cho lớp các bài toán tối ưu lồi bởi đối ngẫu Lagrange hay đối ngẫu Fenchel như các kết của các tác giả: R. T. Rockafellar, H.W. Kuhn và A. W. Tucker, H. Tụy. Trong trường hợp bài toán tối ưu không lồi, một số kết quả hay được nói đến là của Phan Thiên Thạch.

Với bài toán tối ưu đa mục tiêu, việc thu được đối ngẫu mạnh trở nên khó khăn hơn. Cho đến nay các phương pháp chủ yếu là dựa trên lý thuyết đối ngẫu Lagrange và đối ngẫu Fenchel bằng cách vô hướng hóa hàm mục tiêu hay nhúng bài toán ban đầu vào trong lớp các bài toán tối ưu được nhiễu bởi các tham số. Các bài toán đối ngẫu được xây dựng bởi các phương pháp trên thường là bài toán tối ưu vô hướng hay tối ưu đa trị, do đó sơ đồ đối ngẫu thu được thường là không đối xứng. Ngoài ra, trong nhiều kết quả để có đối ngẫu mạnh thì bài toán ban đầu phải là bài toán tối ưu lồi.

Trong lý thuyết đối ngẫu liên hợp, bài toán đối ngẫu của một bài toán gốc trong không gian X:

$$\max(\min)\{f(x)| \quad A \subset X\}$$

được xây dựng trong không gian đối ngẫu X^*:

$$\max(\min)\{g(p)| \quad A^* \subset X^*\},$$

trong đó g là hàm liên hợp của f và A^* là tập liên hợp của A sao cho hai bài toán liên quan chặt chẽ với nhau, thể hiện qua việc nghiên cứu bài toán đối ngẫu sẽ cung cấp thông tin về bài toán gốc hay để giúp cho việc giải bài toán gốc dễ dàng hơn trong trường hợp tốt nhất. Hiện nay, đối ngẫu liên hợp Fenchel được sử dụng một cách rộng rãi và phổ biến trong tối ưu lồi. Đối với lớp các bài toán tổng quát hơn, một số kết quả được kể ra ở đây là của Phan Thiên Thạch, tác giả đã đưa ra đối ngẫu mạnh cho lớp các bài toán tựa lồi dựa trên phép biến đổi tựa liên hợp của hàm $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ được xác định bởi:

$$f^H(p) = \begin{cases} -\inf\{f(x) :\ p^T x \geq 1\} & \text{nếu } p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ -\sup\{f(x) :\ x \in \mathbb{R}^n\} & \text{nếu } p = 0. \end{cases}$$

Các kết quả này đã được công bố trong các công trình được nhiều người biết đến và được nhiều nhà toán học trích dẫn. Tiếp tục các nghiên cứu của mình về đối ngẫu liên hợp, năm 2003, Phan Thiên Thạch áp dụng phép biến đổi tựa liên hợp dạng

$$f^{\natural}(p) = \frac{1}{\{\sup\{f(x) :\ p^T x \leq 1, x \geq 0\}} \tag{1}$$

cho lớp các bài toán quy hoạch tuyến tính và chỉ ra rằng bài toán đối ngẫu của bài toán cực đại một hàm tuyến tính không giảm trên tập lồi trong $\mathbb{R}^n_+$ là bài toán sản xuất Leontief. Chú ý rằng, trong trường hợp tuyến tính, bài toán đối ngẫu được lập bởi lý thuyết đối ngẫu Lagrange hay đối ngẫu Fenchel là trùng nhau và cũng là bài toán quy hoạch tuyến tính. Kết quả khác biệt này giúp Phan Thiên Thạch chỉ ra các đặc trưng cho tính phi dư thừa trong bài toán sản xuất Leontief dựa trên mối liên hệ đối ngẫu giữa nguyên liệu sản xuất và giá nguyên liệu, chẳng hạn như sự tồn tại giá đặc trưng để đưa ràng buộc tài nguyên về ràng buộc đơn giản hơn về vốn sản xuất. Kết quả mở đầu này còn mở ra cho ta những ứng dụng rộng hơn.

Trong luận án này, chúng tôi trình bày một số kết quả mới khi nghiên cứu mở rộng sơ đồ đối ngẫu liên hợp dựa trên phép biến đổi tựa liên hợp dạng (1) cho lớp các bài toán rộng hơn bao gồm các bài toán tối ưu vô hướng và tối ưu đa mục tiêu phi tuyến, đồng thời ứng dụng kết quả đối ngẫu đã đạt được vào nghiên cứu một số bài toán trong kinh tế. Luận án bao gồm 3 chương.

Chương 1 "Phép biến đổi tựa liên hợp" nghiên cứu các điều kiện đặc trưng cho lớp hàm thỏa mãn tính phản xạ và đóng kín qua phép biến đổi tựa liên hợp. Kết quả này giúp chúng ta thu được tính đối xứng của đối ngẫu cho cặp bài toán gốc-đối ngẫu sẽ được trình bày trong chương 2. Nhận thấy các hàm tuyến tính không giảm trên $\mathbb{R}^n_+$ và hàm sản xuất Leontief đều là những trường hợp riêng của lớp hàm đa diện lõm thuần nhất dương và đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^n$, chúng tôi đã chứng minh được rằng lớp hàm này thỏa mãn tính phản xạ, đóng kín qua phép biến đổi tựa liên hợp và đây là sự mở rộng gần nhất cho lớp hàm tuyến tính đã được xét trước đó. Một kết quả mở rộng hơn cũng được đưa ra khi chúng tôi chứng minh được rằng lớp các hàm nửa liên tục trên, tựa lõm và đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^n$, là lớp hàm tổng quát thỏa mãn tính phản xạ đối với phép biến đổi tựa liên hợp. Lớp các hàm này bao hàm phần lớn các hàm sản xuất trong các mô hình kinh tế, chẳng hạn như các hàm sản xuất Leontief, Cobb-Douglas, Leontief mở rộng, Cobb-Douglas mở rộng, ... Chương này cũng đưa ra khái niệm tựa dưới vi phân và chứng minh một số tính chất của tựa dưới vi phân để phục vụ cho việc chứng minh các kết quả về đối ngẫu ở các chương sau.

Chương 2 "Đối ngẫu liên hợp cho các bài toán tối ưu" trình bày điều kiện cần và đủ tối ưu dưới dạng mở rộng của nguyên lý Fermat cho bài toán tối ưu vô hướng. Từ những kết quả mới về phép biến đổi tựa liên hợp đã trình bày trong Chương 1, chúng tôi đưa ra sơ đồ đối ngẫu liên hợp cho lớp các bài toán tối ưu vô hướng và tối ưu đa mục tiêu với giả thiết mục tiêu là các hàm đa diện lõm, thuần nhất dương, đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^n$ và tổng quát hơn nữa khi xét với các hàm mục tiêu chỉ tựa lõm, liên tục và đơn điệu tăng chặt trên $\mathbb{R}^n_+$. Kết quả, chúng ta thu được đối ngẫu mạnh, đối xứng và bài toán đối ngẫu của bài toán tối ưu đa mục tiêu cũng là bài toán tối ưu đa mục tiêu. Ngoài ra, chúng tôi còn đưa ra được đẳng thức đối ngẫu giúp đặc trưng cho cặp nghiệm hữu hiệu của các bài toán tối ưu đa mục tiêu gốc và đối ngẫu.

Chương 3 "Ứng dụng" trình bày ứng dụng sơ đồ đối ngẫu liên hợp vào nghiên cứu một số bài toán sản xuất trong kinh tế. Nhờ đối ngẫu liên hợp chúng tôi chứng minh được bài toán tìm phương án sản xuất với một ràng buộc phân bố nguồn lực (bài toán giải hệ phi tuyến) tương đương với bài toán cực đại một hàm lõm chặt trên một đa diện lồi. Điều này giúp chỉ ra rằng bài toán với một ràng buộc phân bố nguồn lực có một nghiệm duy nhất và được giải bởi bài toán tối ưu lồi đơn giản hơn. Bài toán mở rộng tìm phương án sản xuất với k ($k > 1$) ràng buộc phân bố nguồn lực tương đương với bài toán tối ưu đa mục tiêu với các mục tiêu là các hàm sản xuất Cobb-Douglas, kết quả này giúp chúng ta quy một lớp các bài toán tối ưu không lồi với các ràng buộc phân bố nguồn lực về bài toán tối ưu trên tập nghiệm hữu hiệu Pareto của một bài toán tối ưu đa mục tiêu. Bài toán được quy về đã được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu và có thể được giải bởi một số thuật toán đã biết. Bằng phương pháp tiếp cận của P. T. Thạch, H. Konno và D. Yokota, chúng tôi quy bài toán tối ưu trên tập nghiệm hữu hiệu Pareto về bài toán cực đại hàm tựa lồi trên một tập lồi compắc trong $\mathbb{R}^k_+$ và do đó ta có thể giải bài toán này bằng phương pháp xấp xỉ ngoài. Với phương pháp tiếp cận khác, dựa trên quy hoạch hai cấp và lý thuyết tối ưu đơn điệu của Hoàng Tụy, chúng tôi chỉ ra bài toán tối ưu với các ràng buộc phân bố nguồn lực tương đương với một bài toán cơ bản của tối ưu đơn điệu.

Các kết quả trong luận án đã được báo cáo và thảo luận tại:

- Hội nghị Tối ưu và Tính toán khoa học, Ba Vì, Hà Nội (2010).

- Hội nghị Tối ưu và Tính toán khoa học, Ba Vì, Hà Nội (2011).

- Đại hội Toán học toàn quốc, Nha Trang, Khánh Hòa (2013).

- Seminar của Phòng Tối ưu và Điều khiển, Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.

- Hội nghị nghiên cứu sinh hàng năm tại Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.

Các kết quả chính của luận án đã được công bố ở tạp chí Journal of Mathematical Analysis and Applications, tạp chí Journal of Global Optimization và một bài báo đã được gửi đăng.

Chương 1

Phép biến đổi tựa liên hợp

Ở chương này, sau một số kiến thức chuẩn bị, chúng tôi trình bày các kết quả đã đạt được về điều kiện để một hàm thỏa mãn tính phản xạ và chứng minh một số tính chất của tựa dưới vi phân.

Nội dung của Chương này dựa trên các bài báo [1] và [3] trong danh mục các công trình của tác giả.

1.1 Một số kiến thức chuẩn bị

1.2 Phép biến đổi tựa liên hợp

Phần này, chúng tôi đưa ra một số kết quả về phép biến đổi tựa liên hợp của hàm f. Từ đây cho đến hết chương ta luôn giả thiết rằng $f(x)$ là hàm số không âm, nhận giá trị hữu hạn trên $\mathbb{R}^n_+$ và $f(x) > 0 \ \forall x > 0$.

Định nghĩa 1.2.1. Hàm $f^\natural$ được gọi là *tựa liên hợp* của f nếu

$$f^\natural(p) = \frac{1}{\sup\{f(x) : \ p^T x \leq 1, x \geq 0\}} \quad \forall p \in \mathbb{R}^n_+$$

(quy ước $\frac{1}{+\infty} = 0$).

Mệnh đề 1.2.2. *Cho $x \in \mathbb{R}^n_+$ và $p \in \mathbb{R}^n_+$. Nếu $p^T x \leq 1$, thì*

$$f(x)f^{\natural}(p) \leq 1. \tag{1.1}$$

Định nghĩa 1.2.4. Hàm số f được gọi là *có tính phản xạ* đối với phép biến đổi tựa liên hợp nếu $(f^{\natural})^{\natural} = f$, nghĩa là:

$$f(x) = \frac{1}{\sup\{f^{\natural}(p): \ p^T x \leq 1, p \geq 0\}} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n_+.$$

Định lý 1.2.6. *Nếu f là hàm lõm đa diện, thuần nhất dương và đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^n$, thì hàm tựa liên hợp của f cũng là hàm lõm đa diện, thuần nhất dương và đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^n$. Hơn nữa, $(f^{\natural})^{\natural} = f$.*

Kết quả được phát biểu trong Định lý 1.2.6 là sự mở rộng của phép biến đổi tựa liên hợp cho lớp hàm tuyến tính và được trình bày ở bài báo [1] trong danh mục các công trình của tác giả.

Mệnh đề 1.2.8. *Hàm $f^{\natural}$ là tựa lõm và đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^n_+$.*

Định lý sau cho ta điều kiện tổng quát để một hàm số thỏa mãn tính phản xạ qua phép tựa liên hợp.

Định lý 1.2.10. *Nếu f là hàm tựa lõm, nửa liên tục trên và đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^n_+$, thì f có tính phản xạ qua phép biến đổi tựa liên hợp.*

Mệnh đề 1.2.11. *Nếu f liên tục trên $\mathbb{R}^n_+$, thì $f^{\natural}$ nửa lên tục trên tại mọi $p \geq 0$ và nửa liên tục dưới tại mọi $p > 0$.*

Ký hiệu F_γ và ${F^*}_\gamma$ tương ứng là các tập mức trên của f và $f^{\natural}$ tại $\gamma > 0$.

Mệnh đề 1.2.12. *Cho f là hàm liên tục, tựa lõm và đơn điệu tăng chặt trên $\mathbb{R}^n_+$. Khi đó, với mọi $\gamma > 0$ sao cho $F_\gamma \neq \emptyset$, $F^*_{\frac{1}{\gamma}}$ và F_γ là liên hợp trên của nhau.*

1.3 Tựa dưới vi phân

Trong phần này, để xây dựng điều kiện tối ưu cho bài toán tối ưu không lồi, chúng tôi đưa ra khái niệm tựa dưới gradient và chứng minh một số tính chất phục vụ cho việc thiết lập các kết quả trong các chương sau.

Định nghĩa 1.3.1. Véctơ $p \in \mathbb{R}^n_+$ được gọi là *tựa dưới gradient* của f tại $\overline{x}$ nếu

$$p^T\overline{x} = 1 \text{ và } f(\overline{x})f^\natural(p) \geq 1.$$

Tập gồm các tựa dưới gradient của f tại $\overline{x}$ được gọi là tựa dưới vi phân của f tại $\overline{x}$, ký hiệu bởi $\partial^\natural f(\overline{x})$.

Định lý 1.3.3. *Cho f liên tục, tựa lõm và đơn điệu tăng chặt trên $\mathbb{R}^n_+$. Khi đó, $\partial^\natural f(x)$ là tập lồi khác rỗng tại mọi $x > 0$. Ngoài ra,*

$$p \in \partial^\natural f(x) \Leftrightarrow x \in \partial^\natural f^\natural(p).$$

Mệnh đề 1.3.4. *Nếu f là hàm liên tục, tựa lõm, đơn điệu tăng chặt trên $\mathbb{R}^n_+$, thì điều kiện đủ để $p \in \partial^\natural f(x)$ là $p^T x = 1$ và $p^T z \geq 1 \quad \forall z \in F_{f(x)}$.*

Mệnh đề 1.3.5. *Cho f là hàm liên tục, tựa lõm và đơn điệu tăng chặt trên $\mathbb{R}^n_+$. Khi đó, với mọi $\overline{x} > 0$ chúng ta có*

$$-p \in \partial(-f(\overline{x})) \setminus \{0\} \Rightarrow \frac{1}{p^T\overline{x}}p \in \partial^\natural f(\overline{x}),$$

trong đó $\partial(-f(\overline{x}))$ là tập dưới vi phân của $-f$ tại $\overline{x}$.

Mệnh đề 1.3.7. *Cho f là hàm liên tục, tựa lõm và đơn điệu tăng chặt trên $\mathbb{R}^n_+$. Nếu f khả vi tại $\overline{x} > 0$ thỏa mãn $\nabla f(\overline{x}) \neq 0$, thì*

$$\frac{1}{\nabla f(\overline{x})^T\overline{x}}\nabla f(\overline{x}) \in \partial^\natural f(\overline{x}),$$

trong đó $\nabla f(\overline{x})$ là gradient của f tại $\overline{x}$.

Chương 2

Đối ngẫu liên hợp cho các bài toán tối ưu

Chương này trình bày sơ đồ đối ngẫu liên hợp cho các bài toán tối ưu không lồi bao gồm các bài toán tối ưu vô hướng và tối ưu đa mục tiêu. Các định lý đối ngẫu yếu và mạnh cũng được đưa ra cùng với các đẳng thức đặc trưng cho cặp nghiệm của các bài toán tối ưu.

Nội dung của Chương này dựa trên các bài báo [1] và [3] trong danh mục các công trình của tác giả.

2.1 Đối ngẫu liên hợp cho bài toán tối ưu vô hướng

Trong phần này, chúng tôi đưa ra điều kiện cần và đủ tối ưu dưới dạng nguyên lý Fermat mở rộng và đối ngẫu cho bài toán tối ưu vô hướng sau đây.

$$\max\{f(x): \quad x \in X\}, \tag{2.1}$$

trong đó f là hàm liên tục, tựa lõm, đơn điệu tăng chặt, hữu hạn, không âm trên $\mathbb{R}^n_+$; X là tập chuẩn tắc, lồi, compắc với phần trong khác rỗng trong $\mathbb{R}^n_+$.

Định lý 2.1.2. *Điều kiện cần và đủ để $\overline{x} \in X$ là nghiệm tối ưu của bài toán* (2.1) *là*

$$0 \in \partial^\natural f(\overline{x}) - N(\overline{x}, X). \tag{2.2}$$

Kí hiệu P là liên hợp dưới của X. Bài toán đối ngẫu của bài toán (2.1) được định nghĩa như sau:

$$\max\{f^\natural(p) : \quad p \in P\}. \tag{2.3}$$

Vì X và P là liên hợp dưới của nhau đồng thời f thỏa mãn tính phản xạ, nên bài toán (2.1) cũng là bài toán đối ngẫu của (2.3). Điều này có nghĩa là sơ đồ đối ngẫu mà chúng ta đưa ra thỏa mãn tính đối xứng.

Định lý 2.1.8. *Với mọi $x \in X$ và $p \in P$ ta có $f(x)f^\natural(p) \leq 1$.*

Đối ngẫu mạnh được phát biểu trong định lý sau.

Định lý 2.1.9. *Cho $\overline{x} \in X$ và $\overline{p} \in P$. Khi đó, $\overline{x}$ là nghiệm tối ưu của* (2.1) *và $\overline{p}$ là nghiệm tối ưu của* (2.3) *nếu và chỉ nếu*

$$f(\overline{x})f^\natural(\overline{p}) = 1. \tag{2.4}$$

Nhận xét 2.1.10. Định lý đối ngẫu mạnh cho cặp bài toán (2.1) và (2.3) trong trường hợp f là hàm đa diện, lõm, thuần nhất dương và đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^n_+$ đã được chúng tôi chứng minh một cách đơn giản hơn trong bài báo [1] trong danh mục các công trình của tác giả.

Từ kết quả của Định lý 2.1.9, chúng ta có thể nói (2.4) là đẳng thức đối ngẫu cho các bài toán (2.1) và (2.3). Do đó, chúng ta có đối ngẫu mạnh cho lớp bài toán tối ưu không lồi (2.1) đã xét.

Hệ quả 2.1.11. *Cho $\overline{x} \in X$ và $\overline{p} \in P$. Khi đó, $\overline{x}$ là nghiệm tối ưu của* (2.1) *và $\overline{p}$ là nghiệm tối ưu của* (2.3) *nếu và chỉ nếu*

$$\overline{p} \in \partial^\natural f(\overline{x}).$$

2.2 Đối ngẫu liên hợp cho bài toán tối ưu đa mục tiêu

$$\max(f_1(x), f_2(x), ..., f_k(x)) \tag{2.5}$$
$$x \in X.$$

trong đó $f_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; X là một tập con trong $\mathbb{R}^n$.

Giả sử $\mathbb{R}^n$ là tích Đề các của các không gian $\mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, 2, ..., k$ $(k \geq 1)$

$$\mathbb{R}^n = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{R}^{n_i},$$

trong đó $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ và $n_i \geq 1$ $i = 1, 2, ..., k$. Đặt $x = (x^1, x^2, ..., x^k)$, trong đó $x^i \in \mathbb{R}_+^{n_i}$ với mọi $i = 1, 2, ..., k$. Từ đây cho đến hết chương, chúng ta luôn xét bài toán (2.5) với giả thiết $f_i(x) = f_i(x^i)$, f_i là hàm hữu hạn trên $\mathbb{R}_+^{n_i}$ thỏa mãn tính liên tục, tựa lõm, đơn điệu tăng, thuần nhất và $f_i(x^i) > 0$ $\forall x^i \in \mathbb{R}_{++}^{n_i}$, $i = 1, 2, ..., k$; X là tập chuẩn tắc, lồi, compắc có phần trong khác rỗng trong $\mathbb{R}_+^n$. Vì f_i liên tục ở trên $\mathbb{R}_+^{n_i}$ với mọi $i = 1, 2, ..., k$ và X là tập compắc nên bài toán (2.5) có nghiệm hữu hiệu.

Bài toán đối ngẫu của (2.5) được định nghĩa bởi

$$\max(f_1^{\natural}(p^1), f_2^{\natural}(p^2), ..., f_k^{\natural}(p^k)) \tag{2.6}$$
$$p = (p^1, p^2, ..., p^k) \in P,\ p^i \in \mathbb{R}_+^{n_i},\ i = 1, 2, ..., k,$$

trong đó $f_i^{\natural}$ là hàm tựa liên hợp của f_i trên $\mathbb{R}_+^{n_i}$ với mọi $i = 1, 2, ..., k$ và P là liên hợp dưới của X. Bài toán đối ngẫu là giải được vì $f_i^{\natural}$ nửa liên tục trên ở trên $\mathbb{R}^{n_i}_+$ với mọi $i = 1, 2, ..., k$ và P compắc. Do X cũng là liên hợp dưới của P và f_i phản xạ với mọi $i = 1, 2, ..., k$, nên sơ đồ đối ngẫu cho bài toán tối ưu đa mục tiêu là đối xứng.

Định lý 2.2.10. *Với mọi $x \in X$ và $p \in P$, chúng ta có*

$$\sum_{i=1}^{k} f_i(x^i) f_i^{\natural}(p^i) \leq 1. \tag{2.7}$$

Mệnh đề 2.2.11. *Cho $\overline{x} \in X$ và $\overline{p} \in P$. Nếu cặp $(\overline{x}, \overline{p})$ thỏa mãn đẳng thức*

$$\sum_{i=1}^{k} f_i(\overline{x}^i) f_i^{\natural}(\overline{p}^i) = 1, \tag{2.8}$$

thì $\overline{x}$ là nghiệm hữu hiệu yếu Pareto của (2.5) *và $\overline{p}$ là nghiệm hữu hiệu yếu Pareto của* (2.6).

Chúng ta có định lý đối ngẫu mạnh sau.

Định lý 2.2.14. *Nếu $\overline{x}$ là nghiệm hữu hiệu yếu Pareto của* (2.5), *thì tồn tại véctơ $\overline{p} \in P$ sao cho $(\overline{x}, \overline{p})$ thỏa mãn đẳng thức (2.8). Tương tự, nếu $\overline{p}$ là nghiệm hữu hiệu yếu Pareto của* (2.6), *thì tồn tại véctơ $\overline{x} \in X$ sao cho $(\overline{x}, \overline{p})$ thỏa mãn đẳng thức* (2.8).

Nhận xét 2.2.15. Trong trường hợp f_i là hàm đa diện, lõm, thuần nhất và đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^{n_i}$ với mọi $i = 1, 2, ..., k$, thì Định lý 2.2.14 có thể được chứng minh chỉ dựa trên các công cụ của Giải tích lồi.

Kết quả của Định lý 2.2.14 và Mệnh đề 2.2.11 chỉ ra rằng (2.8) là đẳng thức đối ngẫu giúp đặc trưng cho cặp nghiệm hữu hiệu yếu Pareto cho các bài toán tối ưu đa mục tiêu (2.5) và (2.6). Do đó, Định lý 2.2.14 được xem là định lý đối ngẫu mạnh của các bài toán tối ưu đa mục tiêu này.

Chương 3

Ứng dụng

Trong chương này, chúng tôi ứng dụng sơ đồ đối ngẫu liên hợp được trình bày trong Chương 2 để nghiên cứu một số bài toán sản xuất trong kinh tế.

Nội dung của chương này dựa trên bài báo [2] trong danh mục các công trình của tác giả.

3.1 Bài toán với một ràng buộc phân bố nguồn lực

Cho m véctơ $a^i \in \mathbb{R}^n_{++},\ i = 1, \ldots, m$ và $\alpha \in \mathbb{R}^n_+$ sao cho

$$\alpha^i_j > 0 \ \forall j = 1, \ldots, n; \quad \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1. \tag{3.1}$$

Xét bài toán tìm các véctơ $x \in \mathbb{R}^n_+$ và $p \in \mathbb{R}^n_+$, thỏa mãn hệ các đẳng thức và bất đẳng thức sau:

$$x = \sum_{i=1}^{m} \theta_i a^i, \ \theta_i \geq 0 \ i = 1, 2, \ldots, m, \ \sum_{i=1}^{m} \theta_i = 1, \tag{3.2}$$

$$p_j \geq 0 \ j = 1, 2, \ldots, n, \ p^T a^i \leq 1 \ i = 1, 2, \ldots, m, \tag{3.3}$$

$$p_j x_j \ = \ \alpha_j \ \ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.4}$$

Bài toán này có thể gặp trong việc lập kế hoạch hoạt động của một công ty có m nhà máy để sản xuất n hàng hoá khác nhau. Để sản xuất các hàng hoá này, một nguồn lực nhất định có tổng bằng 1 được phân bố cho các nhà máy. Giả sử a^i, $\min_{j=1,\ldots,n} a^i_j > 0$ là véctơ đặc trưng cho năng lực của nhà máy thứ i, nghĩa là nhà máy thứ i chạy hết công suất có thể sản xuất được a^i_j đơn vị hàng hóa thứ j, $j = 1, \ldots, n$. Số p_j biểu thị phần nguồn lực được phân bố cho việc sản xuất một đơn vị hàng hóa thứ j và x_j là tổng lượng hàng hóa thứ j cần sản xuất bởi cả công ty. Khi đó, $p_j x_j$ là tổng nguồn lực được phân bố cho việc sản xuất hàng hóa thứ j, tức là giá vốn sản xuất lượng hàng hóa thứ j. Để đảm bảo khả năng cạnh tranh trên thị trường, cần thiết rằng $p_j x_j = \alpha_j, j = 1, \ldots, n$, trong đó $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ là các số cho trước. Bài toán đặt ra là tìm một phương án hoạt động khả thi, tức là tìm một véctơ $(x, p) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$, thỏa mãn hệ (3.2)-(3.4). Véctơ α được gọi là véctơ phân bố nguồn lực.

Ký hiệu X là tập các véctơ $x \in \mathbb{R}^n_+$, thỏa mãn (3.2) và P là tập các véctơ $p \in \mathbb{R}^n_+$, thỏa mãn (3.3). Dễ thấy cả X và P là các miền lồi đa diện. Nghiệm của hệ (3.2)-(3.4) là các véctơ $(x, p) \in X \times P$, thỏa mãn các đẳng thức (3.4). Vì (3.4) là các đẳng thức phi tuyến, nên (3.2)-(3.4) là hệ phi tuyến. Điều này dẫn đến việc giải hệ này là không đơn giản. Sau đây, ta sẽ chỉ ra rằng hệ (3.2)-(3.4) tương đương với một bài toán tối ưu lồi. Ngoài ra, ta còn chỉ ra rằng hệ này có một lời giải duy nhất $(x, p) \in X \times P$.

Đặt

$$f(x) = \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j}, \quad g(p) = \prod_{j=1}^{n} p_j^{\alpha_j}. \tag{3.5}$$

Xét các bài toán

$$\max\{f(x) : \quad x \in X\}, \tag{3.6}$$

$$\max\{g(p) : \quad p \in P\}. \tag{3.7}$$

Với $x > 0$ và $p > 0$, đặt

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla} f(x) &= \frac{1}{\nabla f(x)^T x} \nabla f(x), \\ \tilde{\nabla} g(p) &= \frac{1}{\nabla g(p)^T p} \nabla g(p), \end{aligned}$$

trong đó $\nabla f(x)$ là gradient của f tại x, $\nabla g(p)$ là gradient của g tại p.

Định lý sau cho thấy rằng các bài toán (3.6) và (3.7) là đối ngẫu của nhau.

Định lý 3.1.3. *Nếu $\overline{x}$ là nghiệm của bài toán* (3.6)*, thì $\tilde{\nabla} f(\overline{x})$ là nghiệm của* (3.7)*. Đảo lại, nếu $\overline{p}$ là nghiệm của* (3.7)*, thì $\tilde{\nabla} g(\overline{p})$ là nghiệm của bài toán* (3.6).

Định lý 3.1.4. *Nếu $(\overline{x}, \overline{p})$ là nghiệm của hệ* (3.2)-(3.4)*, thì $\overline{x}$ là nghiệm của* (3.6) *và $\overline{p}$ là nghiệm của* (3.7)*. Đảo lại, nếu $\overline{x}$ là nghiệm của* (3.6)*, thì $(\overline{x}, \overline{p})$ với $\overline{p} = \tilde{\nabla} f(\overline{x})$ là nghiệm của hệ* (3.2)-(3.4)*; nếu $\overline{p}$ là nghiệm của* (3.7)*, thì $(\overline{x}, \overline{p})$ với $\overline{x} = \tilde{\nabla} g(\overline{p})$ là nghiệm của hệ* (3.2)-(3.4).

Dễ thấy các bài toán (3.6) và (3.7) tương ứng tương đương với các bài toán cực đại hàm lõm sau:

$$\max\{\ln(f(x)) : \ x \in X\}, \tag{3.8}$$

$$\max\{\ln(g(p)) : \ p \in P\}. \tag{3.9}$$

Các hàm $\ln(f(x))$ và $\ln(g(p))$ là lõm chặt trên $\mathbb{R}^n_{++}$, nên nghiệm của các bài toán (3.6) và (3.7) là tồn tại duy nhất. Do đó, từ Định lý 3.1.4 chúng ta khẳng định nghiệm của hệ (3.2)-(3.4) là tồn tại và duy nhất, đồng thời nghiệm này có được bằng cách giải bài toán (3.8) hoặc (3.9). Chú ý rằng các bài toán (3.8) và (3.9) tương đương với các bài toán tối ưu lồi, nên việc giải các bài toán này đơn giản hơn việc giải hệ phi tuyến (3.2)-(3.4).

3.2 Bài toán với ràng buộc phân bố nhiều nguồn lực

Trong phần này, chúng ta xét bài toán mở rộng của (3.2)-(3.4) khi công ty có $k \geq 1$ nguồn lực được sử dụng để sản xuất n sản phẩm trong m nhà máy, với μ_r là giá trị của nguồn lực thứ r ($r = 1, \dots, k$). Không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết rằng $\sum_{r=1}^{k} \mu_r = 1$.

Giả sử α_j^r là phần nguồn lực thứ r được phân bố cho việc sản xuất sản phẩm thứ j và toàn bộ các nguồn lực được sử dụng hết, khi đó ta có

$$0 \leq \alpha_j^r \leq 1, \quad \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^r = 1 \qquad r = 1, \dots, k. \tag{3.10}$$

Véctơ $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}_+^n$ với $\alpha_j = \sum_{r=1}^{k} \mu_r \alpha_j^r$ (tổng giá trị các nguồn lực được sử dụng để sản xuất sản phẩm thứ j), $j = 1, \dots, n$, được gọi là *véctơ phân bố các nguồn lực*. Đặt Δ là tập gồm tất cả các véctơ phân bố các nguồn lực, nghĩa là

$$\Delta = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}_+^n |\ \alpha = \sum_{r=1}^{k} \mu_r \alpha^r,\ \sum_{r=1}^{k} \mu_r = 1, \mu_r \geq 0 \quad r = 1, 2, \dots, k \right\}. \tag{3.11}$$

Ứng với mỗi véctơ phân bố các nguồn lực $\alpha \in \Delta$, véctơ $x \in \mathbb{R}_+^n$ thỏa mãn (3.2)-(3.4) sẽ được gọi là một phương án sản xuất. Véctơ $p = (p_1, \dots, p_n)$ với p_j là tổng giá trị các nguồn lực được sử dụng để sản xuất một đơn vị hàng hóa thứ j (tức là giá vốn sản xuất của đơn vị hàng hóa thứ j) sẽ được gọi là véctơ chi phí sản xuất đơn vị.

Bài toán đặt ra là tìm phương án sản xuất $x \in \mathbb{R}^n_+$ và véctơ chi phí sản xuất đơn vị $p \in \mathbb{R}^n_+$, thỏa mãn $(p_1x_1, \dots, p_nx_n) \in \Delta$, trong đó Δ được cho bởi (3.11). Điều đó có nghĩa là chúng ta cần giải hệ sau:

$$x = \sum_{i=1}^{m} \theta_i a^i, \ \theta_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m, \ \sum_{i=1}^{m} \theta_i = 1, \tag{3.12}$$

$$p_j \geq 0 \ j = 1, 2, \dots, n, \ p^T a^i \leq 1 \quad i = 1, 2, \dots, m, \tag{3.13}$$

$$p_j x_j = \alpha_j \quad j = 1, 2, \dots, n, \tag{3.14}$$

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \ \Delta. \tag{3.15}$$

Sau đây, chúng ta sẽ chỉ ra rằng việc giải hệ (3.12)-(3.15) được quy về việc giải một trong hai bài toán tối ưu đa mục tiêu.

Ta định nghĩa

$$\begin{aligned} f_r(x) &= \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j^r} \quad r = 1, 2, \dots, k, \\ g_r(p) &= \prod_{j=1}^{n} p_j^{\alpha_j^r} \quad r = 1, 2, \dots, k. \end{aligned}$$

Xét bài toán tối ưu đa mục tiêu

$$\begin{aligned} & f_r(x) \ \rightarrow \ \max \quad r = 1, 2, \dots, k, \\ & x \in X, \end{aligned} \tag{3.16}$$

và bài toán đối ngẫu

$$\begin{aligned} & g_r(p) \ \rightarrow \ \max \quad r = 1, 2, \dots, k, \\ & p \in P, \end{aligned} \tag{3.17}$$

trong đó X là tập các véctơ x thỏa mãn (3.12) và P là tập các véctơ p thỏa mãn (3.13).

Bổ đề 3.2.1. *$\overline{x} \in X$ là nghiệm hữu hiệu Pareto của (3.16) nếu và chỉ nếu tồn tại $\mu \in \mathbb{R}^k_+$ sao cho $\overline{x}$ là nghiệm tối ưu của bài toán*

$$\max\{\prod_{r=1}^{k} f_r(x)^{\mu_r} | \ \ x \in X\}. \tag{3.18}$$

Bổ đề 3.2.2. *$\overline{p} \in P$ là nghiệm hữu hiệu Pareto của* (3.17) *nếu và chỉ nếu tồn tại $\mu \in \mathbb{R}^k_+$ sao cho $\overline{p} \in P$ là nghiệm tối ưu của bài toán*

$$\max\{\prod_{r=1}^{k} g_r(p)^{\mu_r} | \ \ p \in P\}. \tag{3.19}$$

Cho $\overline{x}$ là nghiệm hữu hiệu Pareto của (3.16) và $\overline{p}$ là nghiệm hữu hiệu Pareto của (3.17). Khi đó, $(\overline{x}, \overline{p})$ được gọi là *cặp nghiệm hữu hiệu Pareto gốc-đối ngẫu* nếu tồn tại $\mu \in \mathbb{R}^k_+$ sao cho $\overline{x}$ là nghiệm hữu hiệu Pareto của (3.18) và $\overline{p}$ là nghiệm hữu hiệu Pareto của (3.19).

Định lý sau chỉ ra (3.18) và (3.19) là đối ngẫu liên hợp của nhau.

Định lý 3.2.3. *Cho $(\overline{x}, \overline{p})$ là nghiệm của hệ* (3.12)-(3.15)*. Khi đó, $(\overline{x}, \overline{p})$ là cặp nghiệm hữu hiệu Pareto gốc-đối ngẫu.*

Định lý 3.2.4. *Giả sử $(\overline{x}, \overline{p})$ là cặp nghiệm hữu hiệu Pareto gốc-đối ngẫu. Khi đó, $(\overline{x}, \overline{p})$ là nghiệm của hệ* (3.12)-(3.15).

3.3 Tối ưu với các ràng buộc phân bố nguồn lực

Xét bài toán

$$\max \ q(x) \tag{3.20}$$

$$x = \sum_{i=1}^{m} \theta_i a^i, \ \theta_i \geq 0 \ i = 1, 2, \ldots, m, \ \sum_{i=1}^{m} \theta_i = 1, \tag{3.21}$$

$$p_j \geq 0 \ j = 1, 2, \ldots, n, \ p^T a^i \leq 1 \ i = 1, 2, \ldots, m, \tag{3.22}$$

$$p_j x_j = \alpha_j \ j = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.23}$$

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \ \Delta. \tag{3.24}$$

trong đó $q(x)$ là hàm lõm liên tục trên $\mathbb{R}^n_+$ sao cho $q(x) > 0 \quad \forall x > 0$.

Nếu $q(x)$ là hàm biểu diễn lợi ích của công ty tại phương án sản xuất $x \in \mathbb{R}^n_+$ thì (3.20) - (3.24) trở thành bài toán tìm phương án sản xuất sao cho lợi ích của công ty là lớn nhất.

Ký hiệu X_E là tập gồm các phương án sản xuất, lúc này bài toán (3.20)-(3.24) được viết lại như sau:

$$\max\{q(x)| \quad x \in X_E\}. \tag{3.25}$$

Theo Định lý 3.2.3 và Định lý 3.2.4, X_E cũng chính là tập nghiệm hữu hiệu Pareto của bài toán tối ưu đa mục tiêu (3.16). Do đó, (3.25) là bài toán tối ưu trên tập nghiệm hữu hiệu Pareto của bài toán tối ưu đa mục tiêu.

Đặt

$$\begin{aligned} M &= \left\{\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k) \in \mathbb{R}^n_+ | \ \max_{x\in X} \prod_{r=1}^{k} f_r^{\eta_r}(x) \le 3\right\}, \\ h(\eta) &= \max\left\{q(x)| \ \prod_{r=1}^{k} f_r^{\eta_r}(x) \ge 3, \ x \in X\right\} \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^n_+. \end{aligned}$$

Bổ đề 3.3.1. *M là tập lồi, compắc và khác rỗng trong $\mathbb{R}^k_+$.*
Bổ đề 3.3.2. *Hàm h là nửa liên tục trên và tựa lồi ở trên $\mathbb{R}^k_+$.*

Bây giờ chúng ta sẽ chứng minh rằng bài toán (3.25) tương đương với bài toán cực đại hàm tựa lồi trên tập lồi compắc sau.

$$\max\{h(\eta): \ \eta \in M\}. \tag{3.26}$$

Định lý 3.3.3. *Giá trị tối ưu của các bài toán (3.25) và (3.26) là bằng nhau: $q^* = h^*$. Ngoài ra, nếu η^* là nghiệm tối ưu của (3.26) thì điểm cực đại x^* của hàm $\prod_{r=1}^{k} f_r^{\eta_r^*}(x)$ trên X là nghiệm tối ưu của (3.25).*

Như vậy, bài toán tối ưu không lồi phức tạp (3.25) trong không gian n chiều có thể được biến đổi về bài toán đơn giản hơn (3.26) trong không gian k chiều. Trong thực tế thì k thường nhỏ hơn nhiều so với n, do đó chúng ta có thể giải bài toán sau biến đổi (3.26) bằng phương pháp xấp xỉ ngoài.

3.4 Quy hoạch hai cấp và tối ưu đơn điệu

Trong phần này, chúng tôi sẽ chỉ ra rằng bài toán (3.26) tương đương với bài toán cơ bản của tối ưu đơn điệu.

Cho $x \in X$ là một phương án sản xuất ứng với véctơ phân bố nguồn lực $\alpha = \sum_{r=1}^{k} \mu_r \alpha^r \in \Delta$. Một hàm lợi ích v có thể phụ thuộc vào cả x và μ, chẳng hạn $v(\mu, x) = q(x) - c(\mu, x)$, trong đó $q(x)$ là tổng doanh thu dựa trên giá bán và $c(\mu, x)$ là tổng chi phí hoạt động (bao gồm chi phí sản xuất và chi phí chung).

Bây giờ, chúng ta xét bài toán cực đại hàm $v(\mu, x)$ trên tập các véctơ $(\mu, x) \in \mathbb{R}^k_+ \times X$ sao cho $x \in \operatorname{argmax}_{x' \in X} \prod_{r=1}^{k} f_r^{\mu_r}(x')$, nghĩa là

$$v(\mu, x) \ \rightarrow \ \max, \tag{3.27}$$

$$\mu \in \mathbb{R}^k_+, \ x \in X \tag{3.28}$$

$$x \in \ \operatorname{argmax}_{x \in X} \prod_{r=1}^{k} f_r^{\mu_r}(x). \tag{3.29}$$

Ta đặt

$$G = \{(\mu, t) |\ t \geq \max_{x \in X} \prod_{r=1}^{k} f_r^{\mu_r}(x)\} \tag{3.30}$$

$$F(\mu, t) = \max\{v(\mu, x) |\ x \in X, \ t \leq \prod_{r}^{k} f_r^{\mu_r}(x)\}. \tag{3.31}$$

Bổ đề 3.4.1. *Quy hoạch hai cấp* (3.27)-(3.29) *tương đương với bài toán tối ưu sau:*

$$\max\{F(\mu, t) |\ (\mu, t) \in G\}. \tag{3.32}$$

Đặt

$$\overline{G} := \{\mu \in \mathbb{R}^k_+ |\ \prod_{r=1}^k f_r^{\mu_r}(x)\} \leq \bar{t}\ \forall x \in X\}, \tag{3.33}$$

$$\overline{F}(\mu) := \max\{v(\mu, x)|\ \prod_{r=1}^k f_r^{\mu_r}(x) \geq \bar{t},\ x \in X\ \}. \tag{3.34}$$

Chúng ta có định lý sau.

Định lý 3.4.2. *Quy hoạch hai cấp* (3.27)-(3.29) *tương đương với bài toán tối ưu đơn điệu sau:*

$$\max\{\overline{F}(\mu)|\ \mu \in \overline{G}\}. \tag{3.35}$$

Nhận xét 3.4.3. Ở đây, chúng ta thấy rằng (3.35) là bài toán tối ưu đơn điệu cơ bản. Bởi vậy, bài toán (3.35) có thể được giải bằng các phương pháp đã biết của tối ưu đơn điệu. Đặc biệt, khi $v(\mu, x) = q(x)$ ta có $\overline{F}(\mu) = \max\{q(x)|\ \prod_{r=1}^k f_r^{\mu_r}(x) \geq \bar{t},\ x \in X\}$. Vì $3 \leq \max_{x\in X} \prod_{r=1}^k f_r^{\mu_r}(x)$, nên ta có thể lấy $\bar{t} = 3$. Trong trường hợp này, bài toán (3.35) trùng với bài toán (3.26), do đó nó có thể được giải bởi phương pháp xấp xỉ ngoài như đã chỉ ra trong Mục 3.3.

Kết luận của luận án

Trong luận án này chúng tôi đã thu được những kết quả chính sau.

1. Lớp các hàm tựa lõm, nửa liên tục trên và đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^n_+$ thỏa mãn tính tự liên hợp đối với phép biến đổi tựa liên hợp, đưa ra khái niệm tựa dưới vi phân và chứng minh một số tính chất về khái niệm mới này.

2. Đưa ra điều kiện cần và đủ tối ưu dưới dạng nguyên lý Fermat mở rộng và xây dựng sơ đồ đối ngẫu mạnh, đối xứng cho bài toán tối ưu vô hướng không lồi.

3. Đưa ra đối ngẫu mạnh và đối xứng cho bài toán tối ưu đa mục tiêu không lồi. Ngoài ra, chúng tôi còn đưa ra đẳng thức đối ngẫu giúp đặc trưng cho cặp nghiệm hữu hiệu yếu Pareto của bài toán gốc và đối ngẫu.

4. Trên cơ sở của các kết quả đã đạt được về đối ngẫu liên hợp, chúng tôi áp dụng vào nghiên cứu các bài toán sản xuất trong kinh tế và thu được các kết quả sau:
   a) Bài toán với một ràng buộc phân bố nguồn lực tương đương với bài toán tối ưu lồi.
   b) Bài toán với nhiều ràng buộc phân bố nguồn lực tương đương với bài toán tối ưu lồi đa mục tiêu.
   c) Bài toán tối ưu không lồi với ràng buộc về phân bố nguồn lực được quy về bài toán cực đại hàm tựa lồi trên tập lồi compắc hay về bài toán cơ bản của tối ưu đơn điệu.

Danh mục công trình của tác giả liên quan đến luận án

[1] P. T. Thach and T. V. Thang, Conjugate duality for vector-maximization problems, *J. Math. Anal. Appl.*, 1(2011)94-102.

[2] P. T. Thach and T. V. Thang, Problems with resource allocation constraints and optimization over the efficient set, *J. Glob. Optim.*, 58(2014) 481-495.

[3] T. V. Thang, Conjugate duality in nonconvex optimization problems and optimization over the weakly efficient set (đã gửi đăng).

Công trình được hoàn thành tại
Viện Toán học-Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam

Người hướng dẫn khoa học: TS. Phan Thiên Thạch
GS. Hoàng Tụy

Phản biện 1:...
Phản biện 2:...
Phản biện 3:...

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án cấp viện

họp tại:..

Vào hồi ....giờ........ngày.......tháng........năm..........

Có thể tìm hiểu luận án tại:
-Thư viện Quốc gia Việt Nam
-Thư viện Viện Toán học