VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM
VIỆN TOÁN HỌC

MAI VIẾT THUẬN

TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA MỘT SỐ LỚP HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN HÀM VÀ ỨNG DỤNG TRONG LÝ THUYẾT ĐIỀU KHIỂN

Chuyên ngành: Toán giải tích
Mã số: 62 46 01 02

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HÀ NỘI–2014

Luận án được hoàn thành tại:
Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam

Người hướng dẫn khoa học: **GS. TSKH. Vũ Ngọc Phát**

Phản biện 1:

Phản biện 2:

Phản biện 3:

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm Luận án cấp Viện họp tại Viện Toán học-Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam
....

....

....

Vào hồi.......giờ........ngày........tháng ....năm..........

Có thể tìm luận án tại:
- Thư viện Quốc gia Hà Nội
- Thư viện Viện Toán học

Mở đầu

Lý thuyết ổn định Lyapunov được hình thành sau khi A.M. Lyapunov, nhà toán học người Nga, công bố và bảo vệ thành công luận án tiến sĩ có nhan đề "Bài toán tổng quan về tính ổn định của chuyển động" tại trường Đại học tổng hợp Kharkov năm 1892. Luận án được viết bằng tiếng Nga, rồi sau đó được dịch sang nhiều thứ tiếng khác. Trong công trình của mình, A.M. Lyapunov đã xây dựng nền móng cho lý thuyết ổn định, đặc biệt là đưa ra hai phương pháp nghiên cứu tính ổn định của các hệ phương trình vi phân thường. Đó là phương pháp số mũ Lyapunov và phương pháp hàm Lyapunov. Từ đó đến nay lý thuyết ổn định Lyapunov vẫn đang là một lý thuyết phát triển rất sôi động của Toán học và trở thành một bộ phận nghiên cứu không thể thiếu trong lý thuyết hệ thống và ứng dụng. Đến những năm 60 của thế kỉ XX, cùng với sự phát triển của lý thuyết điều khiển, người ta cũng bắt đầu nghiên cứu tính ổn định của các hệ điều khiển hay còn gọi bài toán ổn định hóa các hệ điều khiển. Vì vậy việc nghiên cứu tính ổn định và tính ổn định hóa của các hệ phương trình vi phân và điều khiển bằng cả hai phương pháp do Lyapunov đề xuất mà đặc biệt là phương pháp hàm Lyapunov đã và đang trở thành một hướng nghiên cứu thời sự thu hút sự quan tâm của nhiều nhà nghiên cứu trong nước và quốc tế như V.N. Phat, N.H. Du, N.K. Son, P.H.A. Ngoc, V.H. Linh, N.D. Phu, K. Gu, V.L. Kharitonov, J. Chen, J.K. Hale, S.M. Verduyn Lunel, X.X. Liao, L. Wang, P. Yu, T. Yoshizawa, ...

Chúng ta biết rằng độ trễ thời gian thường xuyên xuất hiện trong các hệ thống động lực như trong hệ thống sinh học, hệ thống hóa học và mạng lưới điện. Ngoài ra, độ trễ thời gian còn là nguyên nhân trực tiếp dẫn đến tính không ổn định và hiệu suất kém (poor performance) của các hệ động lực. Vì thế lớp hệ phương trình vi phân có trễ đã thu hút được nhiều sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà khoa học có thể kể đến như V.N. Phat, P.H.A. Ngoc, K. Gu, V.L. Kharitonov, J. Chen, V. Kolmanovskii, A. Myshkis, J.P. Richard. Để có thể ứng dụng tốt hơn trong thực tiễn, người ta không chỉ quan tâm tới việc tìm ra các tiêu chuẩn ổn định của các hệ có trễ mà còn phải đánh giá được "độ" ổn định của các hệ đó. Vì vậy, tính ổn định mũ và ổn định hóa được dạng mũ của các lớp hệ phương trình vi phân và điều khiển có trễ đã và đang được nhiều nhà nghiên cứu quan tâm trong những năm gần đây. Trong luận án này, chúng tôi sử dụng phương pháp hàm Lyapunov–Krasovskii để nghiên cứu bài toán ổn định mũ và ổn định hóa được dạng mũ, bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho một số lớp phương trình vi phân có trễ theo hai hướng chính sau:
1. Nghiên cứu mở rộng, cải tiến hàm Lyapunov–Krasovskii để tìm kiếm các tiêu chuẩn ổn định mới, mở rộng các tiêu chuẩn đã có.
2. Nghiên cứu tính ổn định mũ, ổn định hóa được dạng mũ và bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho một số lớp hệ có cấu trúc tổng quát hơn, có nhiều ứng dụng hơn trong thực tiễn.

Lớp hệ đầu tiên được nghiên cứu trong luận án là mô hình mạng nơ ron mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ hỗn hợp:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -Ax(t) + W_0 f(x(t)) + W_1 g(x(t-h(t))) \\ \qquad\qquad + W_2 \int_{t-k(t)}^{t} c(x(s))\, ds + Bu(t), \\ x(t) = \phi(t), t \in [-d, 0], \quad d = \max\{h_2, k\}, \end{cases} \tag{0.1}$$

trong đó $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]^\top \in \mathbb{R}^n$ là véctơ trạng thái của hệ nơ ron, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là véctơ điều khiển; $A = \mathrm{diag}(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n), \overline{a}_i > 0$, là ma trận đường chéo dương; W_0, W_1, W_2, B là các ma trận thực cho trước có số chiều thích hợp, còn $f(.), g(.), c(.)$ là các hàm kích hoạt của hệ, $h(t), k(t)$ là các hàm trễ của hệ thỏa mãn điều kiện $0 \le h_1 \le h(t) \le h_2$, $0 \le k(t) \le k$.

Mô hình mạng nơ ron (neural networks) được nghiên cứu đầu tiên bởi L.O. Chua và L. Yang và mô hình này đã nhận được nhiều sự quan tâm của nhiều nhà nghiên cứu trong những năm qua do những ứng dụng rộng lớn của nó trong xử lý tín hiệu, xử lý hình ảnh, tối ưu hóa và các lĩnh vực khác. Hơn nữa, như S. Xu và các cộng sự đã chỉ ra, độ trễ thời gian thường là nguyên nhân dẫn đến sự không ổn định và hiệu suất kém của mô hình mạng nơ ron. Vì vậy, bài toán ổn định và ổn định hóa mô hình mạng nơ ron mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ đã trở thành một vấn đề thời sự và nhận được sự quan tâm của nhiều nhà nghiên cứu (có thể kể đến một số các nhà khoa học như Y. Chen, S. Fei, H. Gao, L. Guo, L. Hu, J. Lam, T. Li, V.N. Phat, F. Souza, J. Tian, S. Xu, K. Zhang, Y. Zhang, W.X. Zheng, X. Zhou,...). Đã có khá nhiều điều kiện đủ cho tính ổn định mũ cho mô hình mạng nơ ron mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ được đề xuất. Trong trường hợp đơn giản nhất, S. Xu và các cộng sự (năm 2005) đã nghiên cứu bài toán ổn định cho mô hình mạng nơ ron mô tả bởi hệ phương trình vi phân không chắc chắn có trễ hằng và với một hàm kích hoạt. Bằng cách sử dụng phương pháp hàm Lyapunov–Krasovskii và giải các bất đẳng thức ma trận tuyến tính (LMIs), các tác giả đã đưa ra một điều kiện đủ cho tính ổn định tiệm cận cho nghiệm cân bằng của lớp hệ này. Một năm sau, bằng cách tiếp cận dùng phương pháp hàm Lyapunov–Krasovskii kết hợp với sử dụng bất đẳng thức tích phân được đề xuất bởi K. Gu (năm 2000), Y. Liu và các cộng sự (năm 2006), đã đưa ra một điều kiện đủ cho tính ổn định mũ của mô hình mạng nơ ron mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ hỗn hợp (có trễ dạng rời rạc và trễ dạng tích phân), có các hàm kích hoạt khác nhau với độ trễ là hằng số. Mặt khác, trong các nghiên cứu gần đây, các tác giả cố gắng mở rộng mô hình mạng nơ ron mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ sang trường hợp mô hình mạng nơ ron mô tả bởi hệ phương trình vi phân có độ trễ rời rạc biến thiên, tức là $h = h(t)$, trong trường hợp cận dưới của độ trễ $h(t)$ là 0, tức là $0 \leq h(t) \leq h_1$, với h_1 là một số dương cho trước. Tuy nhiên, các kết quả này đều phải dựa trên một giả thiết hạn chế là hàm trễ khả vi và có đạo hàm $\dot{h}(t) \leq \mu < 1$ (chẳng hạn như kết quả của O.M. Kwon và các cộng sự (năm 2008), T. Li cùng các cộng sự (năm 2008), J.H. Park (năm 2006)). Trong các công trình của Y. Chen cùng các cộng sự (năm 2010), K. Ma cùng các cộng sự (năm 2009), J. Tian và S. Zhong (năm 2011), D. Yue cùng các cộng sự (năm 2008), bằng các kỹ thuật khác nhau các tác giả đưa ra các điều kiện đủ cho tính ổn định tiệm cận và tính ổn định mũ cho mô hình mạng nơ ron mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ biến thiên. Điều đáng chú ý trong các tiêu chuẩn này là các tác giả đã khắc phục được điều kiện độ trễ có đạo hàm nhỏ hơn 1, tức là $\dot{h}(t) \leq \mu < 1$, tuy nhiên các tác giả vẫn phải giả thiết độ trễ là hàm khả vi và thỏa mãn điều kiện $\dot{h}(t) \leq \delta$, với δ là một số thực dương cho trước và cận dưới của độ trễ $h(t)$ là 0. Vì vậy vấn đề tìm kiếm tiêu chuẩn ổn định mũ cho mô hình mạng nơ ron mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ biến thiên và không đòi hỏi tính khả vi của hàm trễ là một vấn đề thời sự thu hút sự quan tâm của nhiều nhà nghiên cứu. Q. Song (năm 2008) đã đưa ra một điều kiện đủ cho tính ổn định mũ cho mô hình mạng nơ ron mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ dạng rời rạc thông qua việc giải bất đẳng thức ma trận tuyến tính. Sau đó một thời gian ngắn, X. Zhu và Y. Wang (năm 2009) đã mở rộng kết quả trên cho mô hình mạng nơ ron mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ hỗn hợp với độ trễ biến thiên. Chú ý rằng trong các tiêu chuẩn mà Q. Song và X. Zhu cùng cộng sự đề xuất không đòi hỏi tính khả vi của độ trễ, tuy nhiên các tác giả vẫn giả thiết độ trễ là hàm bị chặn có cận dưới là 0. Suốt những năm vừa qua có rất nhiều kết quả của các nhà khoa học nghiên cứu về bài toán ổn định cho mô hình mạng nơ ron mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ. Trong khi đó một bài toán quan trọng không kém là bài toán ổn định hóa lớp hệ này chỉ có một vài kết quả được công bố (có thể kể đến kết quả của J. Cao cùng các cộng sự (năm 2007), M. Liu (2007), X. Lou và B. Cui (2006), V.N. Phat và H. Trinh (2010)). Trong đó, kết quả của V.N. Phat và H. Trinh là đáng quan tâm hơn cả. Trong nghiên cứu này, các tác giả đã nghiên cứu bài toán ổn định hóa được dạng mũ cho mô hình mạng nơ ron mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ hỗn hợp với độ trễ biến thiên và các hàm kích hoạt khác nhau. Bằng cách cải tiến hàm Lyapunov–Krasovskii, kết hợp với sử dụng kỹ thuật bất đẳng thức ma trận tuyến tính, hai tác giả đã thiết kế một điều khiển ngược để ổn định hóa được dạng mũ cho lớp hệ này. Tuy nhiên, khi nghiên cứu kết quả đó, chúng tôi nhận thấy điều kiện của hai tác giả đưa ra vẫn đòi hỏi độ trễ rời rạc là hàm khả vi và cận dưới của độ trễ là 0. Trong các bài toán kỹ thuật, như các tác giả H. Gao cùng các cộng sự (năm 2008), C.Y. Kao và B. Lincoln (năm 2004) đã chỉ ra, độ trễ có thể nằm trong một khoảng cho trước có cận dưới không nhất thiết là 0, tức là độ trễ $h(t)$ thỏa mãn $0 < h_1 \leq h(t) \leq h_2$, với h_1, h_2 là các số thực dương cho trước và để cho ngắn gọn, ta sẽ gọi độ trễ mà thỏa mãn điều kiện này là *trễ biến thiên dạng khoảng (interval time-varying delay)*. Từ đó bài toán ổn định mô hình mạng nơ ron mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ biến thiên dạng khoảng đã thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà nghiên cứu (có thể kể đến kết quả của J. Chen cùng các cộng sự (năm 2012), L. Hu cùng các cộng sự (năm 2008), F. Souza cùng cộng sự (năm 2010), J. Tian và X. Zhou (năm 2010)). Trong các nghiên cứu đó, các tác giả đều nghiên cứu bài toán ổn định cho mô hình mạng nơ ron mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ biến thiên dạng khoảng và độ trễ được giả thiết là hàm khả vi và điều này gây hạn chế rất nhiều trong các bài toán thực tế. Từ những phân tích trên, ta thấy vấn đề tìm kiếm tiêu chuẩn ổn định mũ và ổn định hóa được dạng mũ cho mô hình mạng nơ ron mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ hỗn hợp với độ trễ biến thiên dạng khoảng và độ trễ là các hàm liên tục không nhất thiết khả vi là vấn đề nghiên cứu có tính thời sự. Với ý tưởng đó, trong luận án này, bằng cách xây dựng hàm Lyapunov–Krasovskii mới trong đó có chứa các cận trên và cận dưới của hàm trễ kết hợp với các kỹ thuật đánh giá mới, chúng tôi tìm được một điều kiện đủ mới cho tính ổn định mũ và ổn định hóa được dạng mũ cho mô hình mạng nơ ron mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ hỗn hợp với các hàm kích hoạt khác nhau.

Lớp hệ thứ hai được nghiên cứu trong luận án là lớp hệ điều khiển có trễ biến thiên dạng khoảng với nhiễu phi tuyến

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Dx(t-h(t)) + f(t, x(t)) + g(t, x(t-h(t))) + Bu(t), \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-h_2, 0], \end{cases} \tag{0.2}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véctơ trạng thái, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là véctơ điều khiển, A, D, B là các ma trận thực cho trước có số chiều thích hợp, trễ $h(t)$ biến thiên dạng khoảng thỏa mãn điều kiện $0 < h_1 \leq h(t) \leq h_2$, với h_1, h_2 là những số thực cho trước. Trong các bài toán kỹ thuật, nhiễu phi tuyến $f(t, x(t))$ và $g(t, x(t-h(t)))$ thường được giả thiết thỏa mãn một trong hai điều kiện sau. Đó là, hoặc chúng là các hàm thỏa mãn điều kiện tăng trưởng $f^{\mathsf{T}}(t, x(t))f(t, x(t)) \leq a^2x^{\mathsf{T}}(t)F^{\mathsf{T}}Fx(t), g^{\mathsf{T}}(t, x(t-h(t)))g(t, x(t-h(t))) \leq d^2x^{\mathsf{T}}(t-h(t))G^{\mathsf{T}}Gx(t-h(t))$, trong đó F, G là các ma trận thực cho trước và a, d là các số cho trước hoặc $f(t, x(t))$ và $g(t, x(t-h(t)))$ biểu diễn được dưới dạng $f(t, x(t)) = E_1F_1(t)H_1x(t), g(t, x(t-h(t))) = E_2F_2(t)H_2x(t-h(t))$, trong đó E_1, E_2, H_1, H_2 là các ma trận thực cho trước có số chiều thích hợp, còn $F_1(t), F_2(t)$ là các ma trận thực không biết nhưng chúng thỏa mãn điều kiện $F_i^{\mathsf{T}}(t)F_i(t) \leq I,\ i = 1, 2$.

Trong trường hợp các nhiễu phi tuyến được giả thiết thỏa mãn điều kiện tăng trưởng, đã có một số kết quả nghiên cứu cho tính ổn định tiệm cận cho lớp hệ trên (khi $u(t) = 0$) được đề xuất trong trường hợp độ trễ là các hàm khả vi liên tục, có cận dưới là 0 (có thể kể đến kết quả của Q.L. Han (năm 2004), O.M. Kwon, J.H. Park và S.M. Lee (năm 2008)). Gần đây, các tác giả R. Rakkiyappan, P. Balasubramaniam và R. Krishnasamy (năm 2011) đã đưa ra một điều kiện đủ cho tính ổn định tiệm cận cho lớp hệ phương trình vi phân trung tính có nhiễu phi tuyến có trễ biến thiên dạng khoảng với độ trễ là các hàm khả vi. Tuy nhiên bài toán ổn định hóa được dạng mũ cho lớp hệ điều khiển có nhiễu phi tuyến với độ trễ biến thiên dạng khoảng vẫn chưa được quan tâm nghiên cứu nhiều và theo như hiểu biết của chúng tôi vẫn chưa có công trình nào công bố về vấn đề này. Dựa trên ý tưởng đó, trong luận án này, chúng tôi nghiên cứu bài toán ổn định hóa được dạng mũ cho lớp hệ điều khiển nói trên trong trường hợp nhiễu phi tuyến thỏa mãn điều kiện tăng trưởng. Vấn đề khó khăn nhất khi giải bài toán này là phải tìm được một điều khiển ngược $u(t) = Kx(t), K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ nào đó sao cho với điều khiển ngược này hệ điều khiển trên là ổn định mũ. Bằng cách xây dựng hàm Lyapunov–Krasovskii mới có chứa tích phân bội ba kết hợp với công thức Newton–Leibniz, chúng tôi đưa ra một vài kiện đủ mới cho tính ổn định hóa được dạng mũ cho lớp hệ điều khiển trên với điều khiển ngược ổn định hóa được xác định một cách tường minh thông qua việc tìm một nghiệm của bất đẳng thức ma trận tuyến tính trong cả hai trường hợp: độ trễ biến thiên dạng khoảng và là hàm khả vi; độ trễ biến thiên dạng khoảng và là hàm không khả vi.

Trường hợp các nhiễu phi tuyến biểu diễn được dưới dạng $f(t, x(t)) = E_1F_1(t)H_1x(t)$, $g(t, x(t-h(t))) = E_2F_2(t)H_2x(t-h(t))$, hệ (0.2) được viết lại dưới dạng

$$\dot{x}(t) = [A + E_1F_1(t)H_1]x(t) + [D + E_2F_2(t)H_2]x(t-h(t)) + Bu(t). \tag{0.3}$$

Hệ (0.3) được gọi là hệ điều khiển không chắc chắn có trễ trên trạng thái. Lớp hệ này đã nhận được sự quan tâm của nhiều nhà nghiên cứu (có thể kể đến kết quả của T. Botmart cùng các cộng sự (năm 2011), L.V. Hien, V.N. Phat (năm 2009), O.M. Kwon, J.H. Park (năm 2006), T. Li cùng các cộng sự (năm 2008)). Bằng cách sử dụng phương pháp hàm Lyapunov kết hợp với kỹ thuật biến đổi mô hình (model transformation) cùng với công thức Newton–Leibniz, L.V. Hien và V.N. Phat đã đưa ra một điều kiện đủ cho tính ổn định mũ và ổn định hóa được dạng mũ cho lớp hệ tuyến tính không chắc chắn có trễ. Tuy nhiên, điều kiện của các tác giả còn giả thiết độ trễ là hàm khả vi và cận dưới của độ trễ là 0. Cũng bằng cách tiếp cận sử dụng phương pháp hàm Lyapunov nhưng không dùng phép biến đổi mô hình, T. Li cùng các cộng sự (năm 2008), đã đưa ra một điều kiện đủ cho tính ổn định tiệm cận và ổn định hóa được cho lớp hệ tuyến tính không chắc chắn có trễ với độ trễ biến thiên dạng khoảng và là hàm khả vi có đạo hàm bị chặn. Thông qua ví dụ số, T. Li và các cộng sự cũng chỉ ra rằng kết quả của họ là tốt hơn các kết quả nghiên cứu đã có. Khi phân tích kết quả của T. Li cùng các cộng sự, chúng tôi nhận thấy hàm Lyapunov–Krasovskii được chọn còn đơn giản, một số đánh giá còn chặt và chưa đưa ra được các chỉ số ổn định mũ. Vì vậy, theo hướng nghiên cứu thứ nhất, bằng cách xây dựng hàm Lyapunov–Krasovskii mới có chứa tốc độ ổn định mũ α, các cận trên và cận dưới của độ trễ, tích phân bội ba, chúng tôi đưa ra một vài điều kiện đủ mới cho tính ổn định hóa được dạng mũ cho lớp hệ (0.3) trong trường hợp độ trễ biến thiên dạng khoảng và là hàm khả vi hoặc không khả vi. Đồng thời, thông qua ví dụ số, chúng tôi cũng chỉ ra rằng biên của độ trễ trong kết quả của chúng tôi là tốt hơn kết quả của T. Li và các cộng sự.

Trong các bài toán kỹ thuật, ngoài việc tìm cách thiết kế một hệ thống điều khiển làm cho hệ điều khiển không những ổn định mà còn đảm bảo một mức độ đầy đủ về hiệu suất (guarantees an adequate level of performance). Dựa trên ý tưởng đó, năm 1972, hai nhà toán học S.S.L. Chang và T.K.C. Peng đã đưa ra bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ điều khiển. Trong bài toán này, ngoài việc thiết kế một bộ điều khiển để đảm bảo cho hệ thống điều khiển là ổn định, ta còn phải dựa trên điều khiển đó để tìm một cận trên của hàm chi phí toàn phương (the integral quadratic cost function). Đến năm 1994, I.R. Petersen và cộng sự D.C. McFarlane đã đưa ra một mô hình toán học tường minh cho bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ thống điều khiển được mô tả dưới dạng hệ phương trình vi phân thường có nhiễu cấu trúc (uncertain systems):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [A + D_1\Delta(t)E_1]\,x(t) + [B + D_1\Delta(t)E_2]\,u(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{0.4}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véctơ trạng thái, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là véctơ điều khiển. Các ma trận A, B, D_1, E_1, E_2 là các ma trận thực cho trước có số chiều thích hợp. Còn $\Delta(t)$ là ma trận không biết trước nhưng thỏa mãn điều kiện $\Delta^{\mathsf{T}}(t)\Delta(t) \leq I$. Liên hệ với hệ (0.4), hàm chi phí toàn phương được xét là

$$J = \int_0^{+\infty} \left[x^{\mathsf{T}}(t)R_1x(t) + u^{\mathsf{T}}(t)R_2u(t)\right] dt, \tag{0.5}$$

trong đó $R_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}, R_2 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ là các ma trận thực đối xứng, xác định dương cho trước. Khi đó bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho lớp hệ (0.4) được phát biểu như sau: *Xét hệ phương trình vi phân* (0.4) *với hàm chi phí toàn phương* (0.5), *nếu tồn tại một luật điều khiển* *ngược $u^*(t)$ và một số dương J^* sao cho với mọi nhiễu $\Delta(t)$, hệ đóng tương ứng, tức là hệ thu được khi ta thay $u(t) = g(x(t))$ vào hệ (0.4), là ổn định tiệm cận và giá trị của hàm chi phí toàn phương thỏa mãn đánh giá $J \le J^*$, thì J^* được gọi là giá trị đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ (0.4) và $u^*(t)$ được gọi là luật điều khiển ngược đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ (0.4).* Bằng cách giải phương trình Riccati đại số, hai tác giả đã đưa ra một tiêu chuẩn cho bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ trên với luật điều khiển ngược được cho bởi công thức $u(t) = Kx(t)$, với $K = -(\epsilon R_2 + E_2^\top E_2)^{-1}(\epsilon B^\top P + E_2^\top E_1)$ và giá trị đảm bảo điều khiển cho hệ (0.4) là $J^* = x_0^\top P x_0$, trong đó $\epsilon > 0$ cùng với một ma trận đối xứng, xác định dương P là nghiệm của phương trình Riccati đại số được xét trong công trình của các tác giả đó. Dựa trên ý tưởng đó, đã có một số các công trình nghiên cứu bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho lớp hệ phương trình sai phân có trễ (có thể kể đến kết quả của W.H. Chen cùng các cộng sự (năm 2004), X. Guan cùng các cộng sự (năm 1999), P. Shi cùng các cộng sự (năm 2003), L. Yu và F. Gao (năm 2001)) và lớp hệ có thời gian liên tục có trễ (có thể kể đến các công trình của E.F. Costa và V.A. Oliveira (năm 2002), C.H. Lien (năm 2007), J.H. Park (năm 2005), L. Yu và J. Chu (năm 1999)) được công bố. Chú ý rằng trong các kết quả đã công bố cho bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho các lớp hệ phương trình vi phân có thời gian liên tục, các lớp hệ được nghiên cứu có cấu trúc đơn giản và độ trễ hoặc là hằng số hoặc là hàm khả vi liên tục. Vì vậy việc tìm các tiêu chuẩn mới cho bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho các lớp hệ có cấu trúc phức tạp hơn, có độ trễ biến thiên dạng khoảng và là các hàm liên tục nhưng không nhất thiết khả vi là một nghiên cứu có tính thời sự, có ý nghĩa về mặt khoa học. Trong Chương 3 của luận án, chúng tôi nghiên cứu bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho một số lớp hệ phương trình vi phân có cấu trúc phức tạp với độ trễ tổng quát hơn.

Trước tiên, chúng tôi nghiên cứu bài toán đảm bảo tri phí điều khiển cho lớp hệ điều khiển có trễ hỗn hợp trên cả biến trạng thái và biến điều khiển với độ trễ là các hàm liên tục nhưng không nhất thiết khả vi:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h_1(t)) + A_2\int_{t-k_1(t)}^{t} x(s)\,ds \\ \qquad\quad +B_0u(t) + B_1u(t-h_2(t)) + B_2\int_{t-k_2(t)}^{t} u(s)\,ds \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-d, 0], \quad d = \max\{h_{1\max}, h_{2\max}, k_1, k_2\}, \end{cases} \tag{0.6}$$

trong đó đó $x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m$ tương ứng là các véctơ trạng thái và véctơ điều khiển; $\phi(t) \in C^1([-d,0], R^n)$ là hàm ban đầu với chuẩn được cho bởi công thức: A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2 là các ma trận thực cho trước; các hàm trễ $h_i(t), k_i(t), i = 1, 2$, là các hàm liên tục không nhất thiết khả vi, thỏa mãn điều kiện: $0 \le h_{i\min} \le h_i(t) \le h_{i\max}, 0 \le k_i(t) \le k_i, i = 1, 2$, trong đó $h_{i\min}, h_{i\max}, k_i, i = 1, 2$ là các số thực cho trước. J.P. Richard (năm 2003) đã tổng kết những kết quả nghiên cứu gần đây về hệ phương trình vi phân có trễ và đưa ra bốn bài toán mở, một trong số đó có bài toán ổn định hóa các hệ phương trình vi phân có trễ trên điều khiển mà không dựa trên giả thiết về tính điều khiển được của hệ. Bằng cách mở rộng lớp hàm Lyapunov–Krasovskii của O.M. Kwon và J.H. Park (năm 2006) cùng với một vài đánh giá mới, P.T. Nam và V.N. Phat (năm 2009) đã đưa ra một điều kiện đủ cho tính ổn định hóa được dạng mũ cho lớp hệ điều khiển tuyến tính không chắc chắn có trễ trên trạng thái và điều khiển với độ trễ là hằng số không biết trước. Bài toán ổn định hóa trở nên khó khăn hơn nhưng thú vị hơn và có nhiều ứng dụng hơn khi xét hệ điều khiển có trễ hỗn hợp trên cả biến trạng thái và biến điều khiển với độ trễ là các hàm liên tục không nhất thiết khả vi. Đặc biệt, bài toán đó càng trở lên khó khăn hơn khi ta đưa thêm yêu cầu về đảm bảo chi phí điều khiển, nhất là cho lớp hệ phương trình vi phân có trễ hỗn hợp trên cả biến trạng thái và biến điều khiển với độ trễ là các hàm khác nhau, độ trễ là hàm liên tục nhưng không nhất thiết khả vi. Bởi vì, ta cần phải thiết kế một điều khiển ngược $u(t) = Kx(t), K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ để hệ đó không những là ổn định hóa được dạng mũ mà giá trị của hàm chi phí toàn phương $J = \int_0^{+\infty}[x^\top(t)Qx(t) + u^\top(t)Ru(t)]\,dt$ phải nhỏ hơn một số thực dương J^* nào đó. Bằng cách xây dựng hàm Lyapunov–Krasovskii mới trong đó có chứa tốc độ hội tụ mũ α của hệ, kết hợp với công thức Newton–Leibniz, bất đẳng thức ma trận Cauchy, chúng tôi tìm ra một điều kiện đủ cho sự tồn tại một điều khiển ngược đảm bảo chi phí điều khiển cho lớp hệ có trễ hỗn hợp trên biến trạng thái và biến điều khiển với độ trễ biến thiên. Điều kiện mà chúng tôi đề xuất không đòi hỏi tính điều khiển được của hệ cũng như tính khả vi của độ trễ.

Trong phần cuối của luận án, chúng tôi nghiên cứu bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho lớp hệ điều khiển tuyến tính có trễ trên biến trạng thái và biến quan sát với độ trễ biến thiên dạng khoảng:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Dx(t - h_1(t)) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t - h_2(t)), \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-d, 0], \end{cases} \tag{0.7}$$

ở đó $d = \max\{\overline{h}_1, \overline{h}_2\}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véctơ trạng thái; $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là véctơ điều khiển; $y(t) \in \mathbb{R}^r$ là véctơ quan sát; A, D, B, C là các ma trận thực cho trước có số chiều thích hợp; Các hàm trễ $h_1(t), h_2(t)$ thỏa mãn điều kiện: $0 < h_1 < h_1(t) \leq \overline{h}_1, 0 < h_2 < h_2(t) \leq \overline{h}_2$, trong đó $h_1, h_2, \overline{h}_1, \overline{h}_2$ là những số dương cho trước. Chú ý rằng trong bài toán này, chúng tôi xét trường hợp các hàm trễ là các hàm liên tục không nhất thiết khả vi và cận dưới của hàm trễ là thực sự lớn hơn 0. Khác với bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho lớp hệ có trễ hỗn hợp trên cả biến trạng thái và biến điều khiển vừa được xét ở trên, trong bài toán này, chúng tôi sẽ thiết kế một bộ điều khiển phản hồi đầu ra động (dynamic output feedback controllers):

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = A_1\xi(t) + B_1 y(t), \quad t \geq 0, \\ \xi(t) = 0, \quad t \in [-d, 0], \\ u(t) = C_1\xi(t), \end{cases}$$

ở đó $\xi(t) \in \mathbb{R}^n$; A_1, B_1, C_1 là các ma trận hằng chưa biết sẽ được xác định sau, để nghiên cứu bài toán đảm bảo giá trị điều khiển cho lớp hệ điều khiển tuyến tính có trễ trên biến trạng thái và biến quan sát ở trên. Cách tiếp cận dùng phương pháp hàm Lyapunov–Krasovskii kết hợp với bất đẳng thức ma trận tuyến tính là một phương pháp phổ biến và hiệu quả để thiết kế một bộ điều khiển phản hồi đầu ra động làm ổn định hóa hoặc mạnh hơn nữa là đảm bảo chi phí điều khiển cho các hệ phương trình vi phân có trễ. Mặc dù đã có một số kết quả về bài toán thiết kế một bộ điều khiển phản hồi đầu ra động để ổn định hóa hệ có trễ hoặc nhằm đảm bảo chi phí điều khiển cho các hệ phương trình vi phân có trễ được công bố (có thể kể đến kết quả của U. Baser và B. Kizilsac (năm 2007), E.F. Costa và V.A. Oliveira (năm 2002), M.C. De Oliveira cùng các cộng sự (năm 2000), J.H. Park cùng các cộng sự (năm 2004), S.W. Yun cùng các cộng sự (năm 2010)), tuy nhiên trong các kết quả này đều phải dựa trên một giả thiết hạn chế là độ trễ hoặc là hằng số biết trước hoặc độ trễ là hàm khả vi và quan sát đầu ra độc lập với độ trễ. Theo như hiểu biết của chúng tôi, cho đến nay vẫn chưa có một công trình nào nghiên cứu về việc thiết kế một bộ phản hồi đầu ra động để đảm bảo chi phí điều khiển cho lớp hệ điều khiển tuyến tính có trễ trên biến trạng thái và biến quan sát với độ trễ biến thiên dạng khoảng và là các hàm liên tục không nhất thiết khả vi được công bố. Vì lý do đó, bằng cách xây dựng hàm Lyapunov–Krasovskii mới kết hợp với các kỹ thuật đánh giá mới, chúng tôi đưa ra một điều kiện đủ cho sự tồn tại một bộ phản hồi đầu ra động để đảm bảo chi phí điều khiển cho lớp hệ phương trình vi phân tuyến tính có trễ trên biến trạng thái và biến quan sát (0.7).

Một điều đáng chú ý là các điều kiện đủ cho tính ổn định mũ và ổn định hóa được dạng mũ cho một số lớp hệ phương trình vi phân hàm được nghiên cứu trong luận án (mô hình mạng nơ ron mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ biến thiên hỗn hợp, hệ điều khiển có trễ biến thiên dạng khoảng với nhiễu phi tuyến), điều kiện đủ cho sự tồn tại một điều khiển ngược đảm bảo chi phí điều khiển cho lớp hệ điều khiển có trễ hỗn hợp trên cả biến trạng thái và biến điều khiển (0.6), tiêu chuẩn cho sự tồn tại một bộ phản hồi đầu ra động đảm bảo chi phí điều khiển cho lớp hệ điều khiển tuyến tính có trễ biến thiên trên biến trạng thái và biến quan sát (0.7), đều được đưa về việc tìm nghiệm của các bất đẳng thức ma trận tuyến tính. Từ những năm 1990, nhiều tác giả đã đưa ra nhiều phương pháp, chẳng hạn như phương pháp điểm trong của Nesterov và Nemirovskii, để giải bất đẳng thức ma trận tuyến tính. Sau này (năm 1995) các tác giả A. Nemirovskii, A.J. Laub và M. Chilali đã đưa ra một phần mềm gọi là hộp công cụ LMI-toolbox trong Matlab để giải các loại bất đẳng thức ma trận tuyến tính. Hơn nữa, trong công trình của mình các tác giả P. Gahinet cùng các cộng sự (1995) và M.V. Kothare cùng các cộng sự (1996) đã khẳng định rằng bài toán bất đẳng thức ma trận tuyến tính có thể giải được trong thời gian đa thức (LMI problems can be solved in polynomial time) và thuật toán là ổn định. Do đó các điều kiện đưa về dưới dạng các bất đẳng thức ma trận tuyến tính đã được đông đảo các nhà khoa học trên thế giới chấp nhận, các điều kiện cho dưới dạng các bất đẳng thức ma trận tuyến tính là dễ áp dụng và không hạn chế tính thực hành của các kết quả.

Luận án gồm phần mở đầu, 3 chương và phần kết luận.

Chương 1 là chương kiến thức chuẩn bị, gồm 3 mục. Mục 1.1 giới thiệu bài toán ổn định, bài toán ổn định hóa cho hệ phương trình vi phân thường. Mục 1.2 giới thiệu bài toán ổn định và bài toán ổn định hóa cho hệ phương trình vi phân có trễ. Mục 1.3 nhắc lại một số kiến thức về bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho lớp hệ điều khiển tuyến tính ôtônôm, lớp hệ điều khiển tuyến tính không chắc chắn có trễ. Đồng thời, trong mục này chúng tôi cũng đưa ra định nghĩa về bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho lớp hệ điều khiển có trễ dạng tổng quát. Mục 1.4 nhắc lại 3 bổ đề sẽ được sử dụng trong các chương sau của luận án.

Chương 2 nghiên cứu bài toán ổn định mũ và ổn định hóa được dạng mũ cho mô hình mạng nơ ron mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ hỗn hợp với độ trễ là các hàm liên tục không nhất thiết khả vi. Ngoài ra, trong chương này chúng tôi nghiên cứu tính ổn định hóa được dạng mũ cho lớp hệ điều khiển có trễ biến thiên dạng khoảng với nhiễu phi tuyến. Mục 2.1 trình bày một tiêu chuẩn cho tính ổn định mũ và một tiêu chuẩn cho tính ổn định hóa được dạng mũ cho mô hình mạng nơ ron mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ hỗn hợp. Mục 2.2 nghiên cứu tính ổn định hóa được dạng mũ cho lớp hệ điều khiển có trễ biến thiên dạng khoảng với nhiễu phi tuyến.

Chương 3 nghiên cứu bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho một số lớp hệ phương trình vi phân hàm. Mục 3.1 đưa ra một điều kiện đủ cho việc tồn tại một điều khiển ngược đảm bảo chi phí điều khiển cho lớp hệ điều khiển có trễ hỗn hợp trên cả biến trạng thái và biến điều khiển với độ trễ là các hàm liên tục nhưng không nhất thiết khả vi. Mục 3.2 đưa ra một điều kiện đủ cho sự tồn tại một bộ điều khiển phản hồi đầu ra động (dynamic output feedback controllers) đảm bảo chi phí điều khiển cho lớp hệ điều khiển tuyến tính có trễ trên biến trạng thái và biến quan sát với độ trễ biến thiên dạng khoảng và là các hàm liên tục nhưng không nhất thiết khả vi.

Các kết quả chính của luận án đã được báo cáo và thảo luận tại các hội nghị, hội thảo khoa học, xê mi na sau:

- Hội nghị Toàn quốc lần thứ ba về Ứng dụng toán học, Đại học Bách khoa Hà Nội, tháng 12, 2010.

- Hội thảo Một số hướng nghiên cứu mới trong Toán học hiện đại và Ứng dụng, Đại học Hồng Đức, Thanh Hóa, tháng 5, 2011.
- Xê mi na tại School of Engineering, Deakin University, Australia, từ 10/2011 tới 12/2011.
- Hội thảo Quốc gia lần thứ mười về Tối ưu và Tính toán khoa học, Ba Vì, Hà Nội, tháng 4, 2012.
- Hội thảo Quốc tế lần thứ 5 về High Performance Scientific Computing, Hanoi, March 5–9, 2012.
- Xê mi na tại Phòng Tối ưu và Điều khiển, Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.
- Các hội nghị đánh giá Nghiên cứu sinh của Viện Toán học, tháng 10, 2010, tháng 10, 2012 và tháng 10, 2013.
- Xê mi na tại khoa Toán - Tin, trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.

Chương 1
Cơ sở toán học

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số khái niệm và kết quả về tính ổn định và ổn định hóa được của các hệ phương trình vi phân thường; hệ phương trình vi phân có trễ. Chúng tôi cũng trình bày một số kết quả bổ trợ sẽ được sử dụng trong chứng minh các kết quả chính của luận án cho các chương sau.

Mục 1.1 giới thiệu bài toán ổn định, bài toán ổn định hóa cho hệ phương trình vi phân thường.

Mục 1.2 giới thiệu bài toán ổn định và bài toán ổn định hóa cho hệ phương trình vi phân có trễ.

Mục 1.3 nhắc lại một số kiến thức về bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho lớp hệ điều khiển tuyến tính ôtônôm, lớp hệ điều khiển tuyến tính không chắc chắn có trễ. Đồng thời, trong mục này chúng tôi cũng đưa ra định nghĩa về bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho lớp hệ điều khiển có trễ dạng tổng quát.

Mục 1.4 nhắc lại 3 bổ đề sẽ được sử dụng trong các chương sau của luận án.

Chương 2
Tính ổn định và ổn định hóa được dạng mũ cho một số lớp hệ phương trình vi phân có trễ biến thiên

Chương này trình bày một số kết quả về tính ổn định mũ và ổn định hóa được dạng mũ cho mô hình mạng nơ ron mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ hỗn hợp với độ trễ là các hàm liên tục nhưng không nhất thiết khả vi. Ngoài ra, chúng tôi trình bày một vài tiêu chuẩn cho tính ổn định hóa được dạng mũ cho lớp hệ điều khiển có trễ biến thiên dạng khoảng với nhiễu phi tuyến. Chương này tổng hợp các kết quả được chúng tôi công bố trên các tạp chí *Vietnam Journal of Mathematics* và *IMA Journal of Mathematical Control and Information.*

2.1. Tính ổn định và ổn định hóa được dạng mũ cho mô hình mạng nơ ron mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ biến thiên

Xét mô hình mạng nơ ron mô tả bởi hệ phương trình vi phân có độ trễ biến thiên hỗn hợp:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -Ax(t) + W_0 f(x(t)) + W_1 g(x(t-h(t))) + W_2 \int_{t-k(t)}^{t} c(x(s))\, ds \\ x(t) = \phi(t), t \in [-d, 0], \quad d = \max\{h_2, k\}, \end{cases} \tag{2.1}$$

ở đó $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^n$ là véctơ trạng thái của mạng nơ ron; $\phi(t) \in C^1([-d, 0], \mathbb{R}^n)$ là hàm điều kiện ban đầu với chuẩn xác định bởi $\|\phi\|_{C^1} = \sup_{t\in[-d,0]}\{\|\phi(t)\|, \|\dot{\phi}(t)\|\}$; $A = \mathrm{diag}(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n), \overline{a}_i > 0$, là ma trận đường chéo chính dương; W_0, W_1, W_2 là các ma trận thực cho trước có số chiều thích hợp và

$$\begin{aligned} f(x(t)) &= [f_1(x_1(t)), f_2(x_2(t)), \ldots, f_n(x_n(t))]^{\mathsf{T}}, \\ g(x(t)) &= [g_1(x_1(t)), g_2(x_2(t)), \ldots, g_n(x_n(t))]^{\mathsf{T}}, \\ c(x(t)) &= [c_1(x_1(t)), c_2(x_2(t)), \ldots, c_n(x_n(t))]^{\mathsf{T}} \end{aligned}$$

là các hàm kích hoạt thỏa mãn điều kiện tăng trưởng sau với các hệ số tăng trưởng $a_i > 0, b_i > 0, c_i > 0$:

$$\begin{aligned} |f_i(\xi)| &\le a_i|\xi|, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \forall \xi \in \mathbb{R}, \\ |g_i(\xi)| &\le b_i|\xi|, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \forall \xi \in \mathbb{R}, \\ |c_i(\xi)| &\le c_i|\xi|, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \forall \xi \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Các hàm trễ $h(t), k(t)$ thỏa mãn các điều kiện

$$0 \le h_1 \le h(t) \le h_2; \quad 0 \le k(t) \le k, \quad \forall t \ge 0,$$

trong đó h_1, h_2, k là các số thực cho trước.

Mô hình mạng nơ ron mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ biến thiên hỗn hợp (2.1) với các hàm kích hoạt $f(x(t)), g(x(t-h(t))), c(x(t))$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz và điều kiện tăng trưởng (2.2) là tồn tại duy nhất nghiệm trên khoảng $[0, +\infty)$ theo như Định lý 1.2 trang 9, Chương 1 cuốn sách chuyên khảo Time-Delay Systems: Lyapunov Functionals and Matrices của V.L. Kharitonov xuất bản năm 2013.

Cho số $\alpha > 0$, các ma trận đối xứng xác định dương P, Q, R, S, các ma trận đường chéo chính dương D_1, D_2, D_3 và các ma trận tự do N_1, N_2, N_3, N_4. Đặt

$$
\begin{aligned}
&G = \mathrm{diag}\{b_i, i = 1, \ldots, n\}, \quad H = \mathrm{diag}\{c_i, i = 1, \ldots, n\}\\
&F = \mathrm{diag}\{a_i, i = 1, \ldots, n\}, \quad c^2 = \max\{c_i^2, i = 1, 2, \ldots, n\},\ \lambda = \lambda_{\min}(P),\\
&\Lambda = \lambda_{\max}(P) + h_1\lambda_{\max}(Q) + \frac{1}{2}h_2^3\lambda_{\max}(R) + \frac{1}{2}(h_2 - h_1)^2(h_2 + h_1)\lambda_{\max}(S)\\
&\qquad + \frac{1}{2}c^2k^2\lambda_{\max}(D_2),\\
&\Xi_{11} = Q + 2\alpha P - e^{-2\alpha h_2}R + FD_0F + kHD_2H - A^{\mathsf{T}}N_1 - N_1^{\mathsf{T}}A,\\
&\Xi_{12} = -A^{\mathsf{T}}N_2 + e^{-2\alpha h_2}R,\ \Xi_{14} = -A^{\mathsf{T}}N_4 + P - N_1^{\mathsf{T}},\ \Xi_{22} = -e^{-2\alpha h_2}R - e^{-2\alpha h_2}S + GD_1G,\\
&\Xi_{33} = -e^{-2\alpha h_1}Q - e^{-2\alpha h_2}S,\ \Xi_{44} = h_2^2R + (h_2 - h_1)^2S - N_4 - N_4^{\mathsf{T}}.
\end{aligned}
$$

Định lý dưới đây cho chúng ta một điều kiện đủ cho tính ổn định mũ cho mô hình mạng nơ ron mô tả bởi hệ phương trình vi phân có độ trễ biến thiên hỗn hợp (2.1).

Định lý 2.1 *Cho số $\alpha > 0$. Giả sử rằng các ma trận hệ số của hệ (2.1) thỏa mãn điều kiện: tồn tại các ma trận đối xứng xác định dương P, Q, R, S, ba ma trận đường chéo chính dương D_0, D_1, D_2 và các ma trận N_1, N_2, N_3, N_4 sao cho bất đẳng thức ma trận tuyến tính sau được thỏa mãn*

$$
\Xi = \begin{bmatrix}
\Xi_{11} & \Xi_{12} & -A^{\mathsf{T}}N_3 & \Xi_{14} & N_1^{\mathsf{T}}W_0 & N_1^{\mathsf{T}}W_1 & kN_1^{\mathsf{T}}W_2\\
* & \Xi_{22} & e^{-2\alpha h_2}S & -N_2^{\mathsf{T}} & N_2^{\mathsf{T}}W_0 & N_2^{\mathsf{T}}W_1 & kN_2^{\mathsf{T}}W_2\\
* & * & \Xi_{33} & -N_3^{\mathsf{T}} & N_3^{\mathsf{T}}W_0 & N_3^{\mathsf{T}}W_1 & kN_3^{\mathsf{T}}W_2\\
* & * & * & \Xi_{44} & N_4^{\mathsf{T}}W_0 & N_4^{\mathsf{T}}W_1 & kN_4^{\mathsf{T}}W_2\\
* & * & * & * & -D_0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & -D_1 & 0\\
* & * & * & * & * & * & -ke^{-2\alpha k}D_2
\end{bmatrix} < 0. \tag{2.3}
$$

Khi đó hệ (2.1) là $\alpha-$ổn định mũ. Hơn nữa, nghiệm bất kì $x(t, \phi)$ của hệ (2.1) thỏa mãn đánh giá mũ sau:

$$
\|x(t, \phi)\| \le \sqrt{\frac{\Lambda}{\lambda}}\|\phi\|_{C^1}e^{-\alpha t}, \quad \forall t \ge 0.
$$

Tiếp theo, chúng tôi xét bài toán ổn định hóa dạng mũ cho mô hình mạng nơ ron mô tả bởi hệ điều khiển có trễ biến thiên hỗn hợp sau:

$$
\begin{cases}
\dot{x}(t) = -Ax(t) + W_0f(x(t)) + W_1g(x(t - h(t)))\\
\qquad + W_2\int_{t-k(t)}^{t} c(x(s))\,ds + Bu(t)\\
x(t) = \phi(t), t \in [-d, 0], \quad d = \max\{h_2, k\},
\end{cases} \tag{2.4}
$$

trong đó $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là véctơ điều khiển; $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ là ma trận thực cho trước, các ma trận hệ số A, W_0, W_1, W_2 và các hàm kích hoạt $f(x(t)), g(x(t - h(t))), c(x(t))$ được xác định như ở mục trước.

Mô hình mạng nơ ron mô tả bởi hệ điều khiển có trễ biến thiên hỗn hợp (2.1) với các hàm kích hoạt $f(x(t)), g(x(t - h(t))), c(x(t))$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz và điều kiện tăng trưởng (2.2) với điều khiển ngược được thiết kế dưới dạng $u(t) = Kx(t)$ là tồn tại và duy nhất nghiệm trên khoảng $[0, +\infty)$ (xem trong trang 9, chương 1, cuốn sách chuyên khảo của V.L. Kharitonov năm 2013).

Định nghĩa 2.1 Cho số $\alpha > 0$. Hệ (2.4) là $\alpha-$ổn định hóa được dạng mũ nếu tồn tại ma trận $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sao cho với hàm điều khiển ngược $u(t) = Kx(t)$, hệ đóng tương ứng

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -[A - BK]x(t) + W_0 f(x(t)) + W_1 g(x(t - h(t))) \\ \qquad\quad +W_2 \int_{t-k(t)}^{t} c(x(s))\, ds \\ x(t) = \phi(t), t \in [-d, 0], \quad d = \max\{h_2, k\}, \end{cases} \tag{2.5}$$

là $\alpha-$ổn định mũ.

Cho số $\alpha > 0$, các ma trận đối xứng xác định dương $M, \overline{P}, \overline{Q}, \overline{R}, \overline{S}$, các ma trận đường chéo chính dương X_0, X_1, X_2 và một ma trận Y. Đặt

$$\begin{aligned}
&\Lambda_1 = \lambda_{\min}(M^{-1}\overline{P}M^{-1}),\\
&\Lambda_2 = \lambda_{\max}(M^{-1}\overline{P}M^{-1}) + h_1\lambda_{\max}(M^{-1}\overline{Q}M^{-1}) + \frac{1}{2}h_2^3\lambda_{\max}(M^{-1}\overline{R}M^{-1})\\
&\qquad + \frac{1}{2}(h_2 - h_1)^2(h_2 + h_1)\lambda_{\max}(M^{-1}\overline{S}M^{-1}) + \frac{1}{2}c^2k^2\lambda_{\max}(X_2^{-1}),\\
&\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & (-MA^{\mathsf T} + Y^{\mathsf T}B^{\mathsf T}) & \Psi_{14} \\ * & \Psi_{22} & e^{-2\alpha h_2}\overline{S} & -M \\ * & * & \Psi_{33} & -M \\ * & * & * & \Psi_{44} \end{bmatrix},\\
&\Psi_{11} = \overline{Q} + 2\alpha\overline{P} - e^{-2\alpha h_2}\overline{R} - MA^{\mathsf T} - AM + BY + Y^{\mathsf T}B^{\mathsf T},\\
&\Psi_{12} = -MA^{\mathsf T} + Y^{\mathsf T}B^{\mathsf T} + e^{-2\alpha h_2}\overline{R},\ \Psi_{13} = -MA^{\mathsf T} + Y^{\mathsf T}B^{\mathsf T},\\
&\Psi_{14} = -MA^{\mathsf T} + Y^{\mathsf T}B^{\mathsf T} + \overline{P} - M,\ \Psi_{22} = -e^{-2\alpha h_2}\overline{R} - e^{-2\alpha h_2}\overline{S},\\
&\Psi_{33} = -e^{-2\alpha h_1}\overline{Q} - e^{-2\alpha h_2}\overline{S},\ \Psi_{44} = h_2^2\overline{R} + (h_2 - h_1)^2\overline{S} - 2M,\\
&\Psi_{55} = X_0 - 2M,\ \Psi_{66} = X_1 - 2M,\ \Psi_{77} = ke^{-2\alpha k}(X_2 - 2M).
\end{aligned}$$

Định lý sau cho một tiêu chuẩn ổn định hóa được dạng mũ cho hệ (2.4).

Định lý 2.2 *Cho số $\alpha > 0$. Giả sử rằng các ma trận hệ số của hệ (2.4) thỏa mãn điều kiện sau: tồn tại các ma trận đối xứng, xác định dương $M, \overline{P}, \overline{Q}, \overline{R}, \overline{S}$, ba ma trận đường chéo chính dương X_0, X_1, X_2, và một ma trận Y, sao cho bất đẳng thức ma trận tuyến tính sau được thỏa mãn*

$$\begin{bmatrix}
\Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} & \Psi_{14} & W_0M & W_1M & kW_2M & MF & kMH & 0\\
* & \Psi_{22} & e^{-2\alpha h_2}\overline{S} & -M & W_0M & W_1M & kW_2M & 0 & 0 & MG\\
* & * & \Psi_{33} & -M & W_0M & W_1M & kW_2M & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & \Psi_{44} & W_0M & W_1M & kW_2M & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & \Psi_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & \Psi_{66} & 0 & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & * & \Psi_{77} & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & * & * & -X_0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & * & * & * & -kX_2 & 0\\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & -X_1
\end{bmatrix} < 0. \tag{2.6}$$

Khi đó hệ (2.4) là $\alpha-$ổn định hóa được dạng mũ với điều khiển ngược cho bởi

$$u(t) = YM^{-1}x(t), \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Hơn nữa, nghiệm bất kì $x(t, \phi)$ của hệ đóng (2.5) thỏa mãn đánh giá dạng mũ:

$$\|x(t, \phi)\| \le \sqrt{\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}}e^{-\alpha t}\|\phi\|_{C^1}, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

2.2. Tính ổn định hóa được dạng mũ cho hệ phương trình vi phân có trễ biến thiên với nhiễu phi tuyến

Xét hệ điều khiển có trễ biến thiên dạng khoảng với nhiễu phi tuyến

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Dx(t-h(t)) + f(t,x(t)) + g(t,x(t-h(t))) + Bu(t) \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-h_2, 0], \end{cases} \tag{2.7}$$

ở đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véctơ trạng thái; $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là véctơ điều khiển; A, D và B là các ma trận thực cho trước có số chiều thích hợp và $\phi(t) \in C^1([-h_2, 0], \mathbb{R}^n)$ là hàm điều kiện ban đầu với chuẩn cho bởi $\|\phi\|_{C^1} = \sup\limits_{t\in[-h_2,0]} \{\|\phi(t)\|, \|\dot{\phi}(t)\|\}$. Độ trễ $h(t)$ là hàm biến thiên dạng khoảng

$$0 < h_1 \le h(t) \le h_2, \tag{2.8}$$

ở đó h_1 và h_2 lần lượt là cận dưới và cận trên của hàm trễ. Trong mục này, chúng tôi xét hàm trễ $h(t)$ thỏa mãn một trong hai điều kiện (i) hoặc (ii) như sau.

(i) $\dot{h}(t) \le \delta < 1$ trong đó δ là một số thực dương.

(ii) $h(t)$ là hàm liên tục nhưng không khả vi.

Đồng thời chúng tôi cũng nghiên cứu hai dạng thường gặp của các nhiễu phi tuyến $f(t, x(t))$, $g(t, x(t-h(t)))$. Đó là

(i) Nhiễu phi tuyến $f(t,x(t)), g(t,x(t-h(t)))$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz toàn cục sao cho

$$f^{\mathsf{T}}(t,x(t))f(t,x(t)) \le a^2 x^{\mathsf{T}}(t)F^{\mathsf{T}}Fx(t), \tag{2.9}$$

$$g^{\mathsf{T}}(t,x(t-h(t)))g(t,x(t-h(t))) \le d^2 x^{\mathsf{T}}(t-h(t))G^{\mathsf{T}}Gx(t-h(t)), \tag{2.10}$$

trong đó F và G là các ma trận hằng cho trước có số chiều thích hợp, a và d là các số thực dương cho trước.

(ii) Nhiễu phi tuyến $f(t,x(t)), g(t,x(t-h(t)))$ được biểu diễn dưới dạng

$$f(t,x(t)) = \Delta A(t)x(t), \tag{2.11}$$

$$g(t,x(t-h(t))) = \Delta D(t)x(t-h(t)), \tag{2.12}$$

trong đó

$$\Delta A(t) = E_1F_1(t)H_1, \quad \Delta D(t) = E_2F_2(t)H_2, \tag{2.13}$$

với E_1, E_2, H_1, H_2 là các ma trận thực cho trước có số chiều thích hợp, và $F_1(t), F_2(t)$ là các ma trận thực không biết nhưng chúng thỏa mãn điều kiện

$$F_i^{\mathsf{T}}(t)F_i(t) \le I, \ i = 1, 2. \tag{2.14}$$

Trong mục này, ta sẽ thiết kế một điều khiển ngược $u(t) = Kx(t)$ sao cho hệ đóng sau

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \big(A + BK\big)x(t) + Dx(t-h(t)) + f(t,x(t)) + g(t,x(t-h(t))), \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-h_2, 0] \end{cases} \tag{2.15}$$

là $\alpha-$ổn định mũ.

Chú ý rằng với giả thiết các nhiễu phi tuyến $f(t,x(t))$ và $g(t,x(t-h(t)))$ hoặc thỏa mãn thỏa mãn điều kiện Lipschitz toàn cục và các điều kiện (2.9)-(2.10) thì hệ điều khiển có trễ biến thiên với nhiễu phi tuyến (2.7) là tồn tại duy nhất nghiệm trên khoảng $[0, +\infty)$ theo như Định lý 1.2 trang 9, Chương 1 cuốn sách chuyên khảo Time-Delay Systems: Lyapunov Functionals and Matrices của V.L. Kharitonov xuất bản năm 2013.

Trước hết, ta nghiên cứu bài toán ổn định hóa được dạng mũ cho lớp hệ điều khiển có trễ biến thiên dạng khoảng với nhiễu phi tuyến (2.7) trong trường hợp nhiễu phi tuyến thỏa mãn điều kiện tăng trưởng (2.9) và (2.10).

Cho số $\alpha > 0$, các ma trận đối xứng, xác định dương $P, Q_1, Q_2, Q_3, S_1, S_2, S_3, S_4, R_1, R_2$ và ma trận Y. Đặt

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lambda_{\min}(P^{-1}),\\
\Lambda &= \lambda_{\max}(P^{-1}) + h_1\lambda_{\max}(P^{-1}Q_1P^{-1}) + h_2\lambda_{\max}(P^{-1}Q_2P^{-1})\\
&\quad + (h_2-h_1)\lambda_{\max}(P^{-1}Q_3P^{-1}) + \frac{1}{2}h_1^2\big[\lambda_{\max}(P^{-1}S_1P^{-1}) + \lambda_{\max}(P^{-1}S_3P^{-1})\big]\\
&\quad + \frac{1}{2}(h_2^2-h_1^2)\big[\lambda_{\max}(P^{-1}S_2P^{-1}) + \lambda_{\max}(P^{-1}S_4P^{-1})\big]\\
&\quad + \frac{1}{6}h_1^3\lambda_{\max}(P^{-1}R_1P^{-1}) + \frac{1}{6}(h_2^3-h_1^3)\lambda_{\max}(P^{-1}R_2P^{-1}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Xi_{11} &= AP + PA^{\mathsf{T}} + BY + Y^{\mathsf{T}}B^{\mathsf{T}} + 2\alpha P + 2I + Q_1 + Q_2 + h_1S_3 + (h_2-h_1)S_4\\
&\quad - \frac{1}{h_1}e^{-2\alpha h_1}S_1 - 2e^{-4\alpha h_1}R_1 - 2\frac{h_2-h_1}{h_2+h_1}e^{-4\alpha h_2}R_2,\\
\Xi_{22} &= -(1-\delta)e^{-2\alpha h_2}Q_2 - \frac{2}{h_2-h_1}e^{-2\alpha h_2}S_2,\ \Xi_{33} = -e^{-2\alpha h_2}Q_3 - \frac{1}{h_2-h_1}e^{-2\alpha h_2}S_2,\\
\Xi_{44} &= e^{-2\alpha h_1}Q_3 - e^{-2\alpha h_1}Q_1 - \frac{1}{h_1}e^{-2\alpha h_1}S_1 - \frac{1}{h_2-h_1}e^{-2\alpha h_2}S_2,\\
\Xi_{55} &= -\frac{1}{h_1}e^{-2\alpha h_1}S_3 - \frac{2}{h_1^2}e^{-4\alpha h_1}R_1,\ \Xi_{66} = -\frac{1}{h_2-h_1}e^{-2\alpha h_2}S_4 - \frac{2}{h_2^2-h_1^2}e^{-4\alpha h_2}R_2,\\
\Xi_{77} &= h_1S_1 + (h_2-h_1)S_2 + \frac{1}{2}h_1^2R_1 + \frac{1}{2}(h_2^2-h_1^2)R_2 + 2I - 2P,\\
\Xi_{14} &= \frac{1}{h_1}e^{-2\alpha h_1}S_1,\ \Xi_{15} = \frac{2}{h_1}e^{-4\alpha h_1}R_1,\ \Xi_{16} = \frac{2}{h_2+h_1}e^{-4\alpha h_2}R_2,\\
\Xi_{17} &= PA^{\mathsf{T}} + Y^{\mathsf{T}}B^{\mathsf{T}},\ \Xi_{23} = \Xi_{24} = \frac{1}{h_2-h_1}e^{-2\alpha h_2}S_2.
\end{aligned}$$

Định lý sau đây cho ta một tiêu chuẩn ổn định hóa được dạng mũ cho lớp hệ điều khiển có trễ biến thiên dạng khoảng với nhiễu phi tuyến (2.7) trong trường hợp các nhiễu phi tuyến thỏa mãn điều kiện tăng trưởng (2.9), (2.10) và độ trễ $h(t)$ là hàm biến thiên dạng khoảng thỏa mãn điều kiện (2.8) và điều kiện $\dot{h}(t) \le \delta < 1$.

Định lý 2.3 *Cho $\alpha > 0, h_2 > h_1 > 0, 0 \le \delta < 1$. Giả sử rằng các ma trận hệ số của hệ (2.7) thỏa mãn điều kiện sau: tồn tại các ma trận thực đối xứng, xác định dương $P, Q_1, Q_2, Q_3, S_1, S_2, S_3, S_4, R_1, R_2$ và một ma trận Y sao cho bất đẳng thức ma trận tuyến tính sau được thỏa mãn*

$$\begin{bmatrix}
\Xi_{11} & DP & 0 & \Xi_{14} & \Xi_{15} & \Xi_{16} & \Xi_{17} & a^2PF^{\mathsf{T}} & 0\\
* & \Xi_{22} & \Xi_{23} & \Xi_{24} & 0 & 0 & PD^{\mathsf{T}} & 0 & d^2PG^{\mathsf{T}}\\
* & * & \Xi_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & \Xi_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & \Xi_{55} & 0 & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & \Xi_{66} & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & * & \Xi_{77} & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & * & * & -\frac{1}{2}a^2I & 0\\
* & * & * & * & * & * & * & * & -\frac{1}{2}d^2I
\end{bmatrix} < 0. \qquad (2.16)$$

Khi đó hệ (2.7) là $\alpha-$ổn định hóa được dạng mũ. Ngoài ra, điều khiển ngược ổn định hóa hệ (2.7) được cho bởi công thức

$$u(t) = YP^{-1}x(t), \quad t \geq 0,$$

và nghiệm bất kì $x(t,\phi)$ của hệ đóng thỏa mãn đánh giá sau

$$\|x(t,\phi)\| \leq \sqrt{\frac{\Lambda}{\lambda}} e^{-\alpha t}\|\phi\|_{C^1}, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Chú ý rằng khi độ trễ $h(t)$ là biến thiên dạng khoảng và là hàm không khả vi, bằng cách đặt $\overline{Q_2} = 0$ trong $V_2(t,x_t)$, trong hàm Lyapunov–Krasovskii được chọn để chứng minh Định lý 2.3, ta có hệ quả sau đây được suy ra trực tiếp từ định lý đó.

Hệ quả 2.1 *Cho $\alpha > 0, h_2 > h_1 > 0$. Giả sử rằng các ma trận hệ số của hệ (2.7) thỏa mãn điều kiện sau: tồn tại các ma trận đối xứng, xác định dương $P, Q_1, Q_3, S_1, S_2, S_3, S_4, R_1, R_2$ và một ma trận Y sao cho bất đẳng thức ma trận tuyến tính sau được thỏa mãn*

$$\begin{bmatrix} \hat{\Xi}_{11} & DP & 0 & \Xi_{14} & \Xi_{15} & \Xi_{16} & \Xi_{17} & a^2PF^{\mathsf{T}} & 0 \\ * & \hat{\Xi}_{22} & \Xi_{23} & \Xi_{24} & 0 & 0 & PD^{\mathsf{T}} & 0 & d^2PG^{\mathsf{T}} \\ * & * & \Xi_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Xi_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Xi_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \Xi_{66} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \Xi_{77} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\frac{1}{2}a^2I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\frac{1}{2}d^2I \end{bmatrix} < 0, \tag{2.17}$$

trong đó

$$\begin{aligned} \hat{\Xi}_{11} &= AP + PA^{\mathsf{T}} + BY + Y^{\mathsf{T}}B^{\mathsf{T}} + 2\alpha P + 2I + Q_1 + h_1S_3 + (h_2-h_1)S_4 \\ &\quad - \frac{1}{h_1}e^{-2\alpha h_1}S_1 - 2e^{-4\alpha h_1}R_1 - 2\frac{h_2-h_1}{h_2+h_1}e^{-4\alpha h_2}R_2, \\ \hat{\Xi}_{22} &= -\frac{2}{h_2-h_1}e^{-2\alpha h_2}S_2. \end{aligned}$$

Khi đó hệ (2.7) là $\alpha-$ổn định hóa được dạng mũ. Ngoài ra, điều khiển ngược ổn định hóa hệ (2.7) được cho bởi

$$u(t) = YP^{-1}x(t), \quad t \geq 0,$$

và nghiệm bất kì $x(t,\phi)$ của hệ đóng thỏa mãn đánh giá sau

$$\|x(t,\phi)\| \leq \sqrt{\frac{\Lambda_1}{\lambda}} e^{-\alpha t}\|\phi\|_{C^1}, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

trong đó

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \lambda_{\max}(P^{-1}) + h_1\lambda_{\max}(P^{-1}Q_1P^{-1}) + (h_2-h_1)\lambda_{\max}(P^{-1}Q_3P^{-1}) \\ &\quad + \frac{1}{2}h_1^2\big[\lambda_{\max}(P^{-1}S_1P^{-1}) + \lambda_{\max}(P^{-1}S_3P^{-1})\big] \\ &\quad + \frac{1}{2}(h_2^2-h_1^2)\big[\lambda_{\max}(P^{-1}S_2P^{-1}) + \lambda_{\max}(P^{-1}S_4P^{-1})\big] \\ &\quad + \frac{1}{6}h_1^3\lambda_{\max}(P^{-1}R_1P^{-1}) + \frac{1}{6}(h_2^3-h_1^3)\lambda_{\max}(P^{-1}R_2P^{-1}). \end{aligned}$$

Tiếp theo, chúng tôi nghiên cứu bài toán ổn định hóa được dạng mũ cho lớp hệ điều khiển có trễ biến thiên dạng khoảng với nhiễu phi tuyến trong trường hợp các nhiễu phi tuyến $f(t,x(t)), g(t,x(t-h(t)))$ thỏa mãn điều kiện (2.11), (2.12), tương ứng, trong cả hai trường hợp độ trễ $h(t)$ là hàm khả vi và độ trễ $h(t)$ là hàm liên tục nhưng không khả vi.

Hệ (2.15) có nhiễu phi tuyến thỏa mãn các điều kiện (2.11) và (2.12) được viết lại dưới dạng tương đương sau:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [A + E_1F_1(t)H_1 + BK]x(t) + [D + E_2F_2(t)H_2]x(t-h(t)), \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-h_2, 0], \end{cases} \tag{2.18}$$

Hệ điều khiển có trễ biến thiên (2.18) được gọi là hệ điều khiển tuyến tính không chắc chắn có trễ biến thiên. Bây giờ, ta nghiên cứu bài toán ổn định hóa được dạng mũ cho lớp hệ (2.18) trong trường hợp độ trễ $h(t)$ là hàm khả vi thỏa mãn điều kiện $\dot{h}(t) \le \delta < 1$.

Cho các số $\alpha > 0, \epsilon_1 > 0, \epsilon_2 > 0, h_2 > h_1 > 0, 0 \le \delta < 1$, các ma trận đối xứng, xác định dương $P, Q_1, Q_2, Q_3, S_1, S_2, S_3, S_4, R_1, R_2$ và một ma trận Y. Đặt

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11} &= AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top + 2\alpha P + Q_1 + Q_2 + h_1S_3 + (h_2-h_1)S_4 \\
&\quad + \epsilon_1E_1E_1^\top + \epsilon_2E_2E_2^\top - \frac{1}{h_1}e^{-2\alpha h_1}S_1 - 2e^{-4\alpha h_1}R_1 - 2\frac{h_2-h_1}{h_2+h_1}e^{-4\alpha h_2}R_2, \\
\Gamma_{22} &= -(1-\delta)e^{-2\alpha h_2}Q_2 - \frac{2}{h_2-h_1}e^{-2\alpha h_2}S_2,\ \Gamma_{33} = -e^{-2\alpha h_2}Q_3 - \frac{1}{h_2-h_1}e^{-2\alpha h_2}S_2, \\
\Gamma_{44} &= e^{-2\alpha h_1}Q_3 - e^{-2\alpha h_1}Q_1 - \frac{1}{h_1}e^{-2\alpha h_1}S_1 - \frac{1}{h_2-h_1}e^{-2\alpha h_2}S_2, \\
\Gamma_{55} &= -\frac{1}{h_1}e^{-2\alpha h_1}S_3 - \frac{2}{h_1^2}e^{-4\alpha h_1}R_1,\ \Gamma_{66} = -\frac{1}{h_2-h_1}e^{-2\alpha h_2}S_4 - \frac{2}{h_2^2-h_1^2}e^{-4\alpha h_2}R_2, \\
\Gamma_{77} &= h_1S_1 + (h_2-h_1)S_2 + \frac{1}{2}h_1^2R_1 + \frac{1}{2}(h_2^2-h_1^2)R_2 + \epsilon_1E_1E_1^\top + \epsilon_2E_2E_2^\top - 2P, \\
\Gamma_{14} &= \frac{1}{h_1}e^{-2\alpha h_1}S_1,\ \Gamma_{15} = \frac{2}{h_1}e^{-4\alpha h_1}R_1,\ \Gamma_{16} = \frac{2}{h_2+h_1}e^{-4\alpha h_2}R_2, \\
\Gamma_{17} &= PA^\top + Y^\top B^\top, \Gamma_{23} = \Gamma_{24} = \frac{1}{h_2-h_1}e^{-2\alpha h_2}S_2.
\end{aligned}$$

Định lý 2.4 *Cho $\alpha > 0, h_2 > h_1 > 0, 0 \le \delta < 1$. Giả sử rằng các ma trận hệ số của hệ (2.18) thỏa mãn điều kiện sau: tồn tại các số dương ϵ_1, ϵ_2, các ma trận đối xứng, xác định dương $P, Q_1, Q_2, Q_3, S_1, S_2, S_3, S_4, R_1, R_2$ và một ma trận Y sao cho bất đẳng thức ma trận tuyến tính sau được thỏa mãn*

$$\begin{bmatrix}
\Gamma_{11} & DP & 0 & \Gamma_{14} & \Gamma_{15} & \Gamma_{16} & \Gamma_{17} & PH_1^\top & 0 \\
* & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} & \Gamma_{24} & 0 & 0 & PD^\top & 0 & PH_2^\top \\
* & * & \Gamma_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & \Gamma_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & \Gamma_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & \Gamma_{66} & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & \Gamma_{77} & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & -\frac{1}{2}\epsilon_1 I & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & -\frac{1}{2}\epsilon_2 I
\end{bmatrix} < 0. \tag{2.19}$$

Khi đó hệ (2.18) là $\alpha-$ổn định hóa được dạng mũ. Ngoài ra, điều khiển ngược ổn định hóa hệ (2.18) cho bởi

$$u(t) = YP^{-1}x(t), \quad t \ge 0,$$

và nghiệm bất kì $x(t,\phi)$ của hệ thỏa mãn đánh giá sau

$$\|x(t,\phi)\| \le \sqrt{\frac{\Lambda}{\lambda}}e^{-\alpha t}\|\phi\|_{C^1}, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Khi thông tin về đạo hàm của độ trễ là không biết hoặc độ trễ là hàm liên tục nhưng không khả vi, bằng cách đặt $\overline{Q_2} = 0$ trong $V_2(t, x_t)$ của hàm Lyapunov–Krasovskii được xây dựng trong chứng minh Định lý 2.4, ta có hệ quả sau đây được suy ra trực tiếp từ định lý đó.

Hệ quả 2.2 *Cho $\alpha > 0, h_2 > h_1 > 0$. Giả sử rằng các ma trận hệ số của hệ (2.18) thỏa mãn điều kiện: tồn tại các số thực dương ϵ_1, ϵ_2, các ma trận đối xứng, xác định dương $P, Q_1, Q_3, S_1, S_2, S_3, S_4, R_1, R_2$, và một ma trận Y sao cho bất đẳng thức ma trận tuyến tính sau được thỏa mãn*

$$\begin{bmatrix} \hat{\Gamma}_{11} & DP & 0 & \Gamma_{14} & \Gamma_{15} & \Gamma_{16} & \Gamma_{17} & PH_1^{\mathsf{T}} & 0 \\ * & \hat{\Gamma}_{22} & \Gamma_{23} & \Gamma_{24} & 0 & 0 & PD^{\mathsf{T}} & 0 & PH_2^{\mathsf{T}} \\ * & * & \Gamma_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Gamma_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Gamma_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \Gamma_{66} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \Gamma_{77} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\frac{1}{2}\epsilon_1 I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\frac{1}{2}\epsilon_2 I \end{bmatrix} < 0, \qquad (2.20)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_{11} &= AP + PA^{\mathsf{T}} + BY + Y^{\mathsf{T}}B^{\mathsf{T}} + 2\alpha P + Q_1 + h_1 S_3 + (h_2 - h_1)S_4 + \epsilon_1 E_1 E_1^{\mathsf{T}} \\ &\quad + \epsilon_2 E_2 E_2^{\mathsf{T}} - \frac{1}{h_1}e^{-2\alpha h_1}S_1 - 2e^{-4\alpha h_1}R_1 - 2\frac{h_2 - h_1}{h_2 + h_1}e^{-4\alpha h_2}R_2, \\ \hat{\Gamma}_{22} &= -\frac{2}{h_2 - h_1}e^{-2\alpha h_2}S_2. \end{aligned}$$

Khi đó hệ (2.18) là $\alpha-$ổn định hóa được dạng mũ. Ngoài ra, điều khiển ngược ổn định hóa hệ (2.18) được cho bởi công thức

$$u(t) = YP^{-1}x(t), \quad t \geq 0,$$

và nghiệm bất kì $x(t, \phi)$ của hệ (2.18) thỏa mãn đánh giá sau

$$\|x(t, \phi)\| \leq \sqrt{\frac{\Lambda_1}{\lambda}}e^{-\alpha t}\|\phi\|_{C^1}, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Ví dụ 2.1 sau đây sẽ minh họa cho tính ưu việt của tiêu chuẩn chúng tôi đề xuất so với các kết quả đã được công bố bởi T. Li và các cộng sự (năm 2008).

Ví dụ 2.1 Xét hệ điều khiển tuyến tính không chắc có trễ (2.18):

$$\dot{x}(t) = [A + E_1 F_1(t) H_1]x(t) + [D + E_2 F_2(t) H_2]x(t - h(t)) + Bu(t),$$

trong đó $h(t)$ là là hàm liên tục nhưng không khả vi và là độ trễ biến thiên dạng khoảng, tức là $h(t)$ thỏa mãn điều kiện $h_1 < h(t) \leq h_2$, với

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -2 & -0.5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, E_1 = E_2 = 0.2I, H_1 = I, H_2 = 0.$$

Cho $h_1 = 0.3$, giá trị lớn nhất của cận trên h_2 của độ trễ mà với giá trị đó hệ (2.18) là ổn định hóa được bởi một điều khiển ngược ổn định hóa được đưa ra trong công trình của T. Li cùng các các cộng sự (năm 2008) là $h_2 = 0.9$. Tuy nhiên, bằng cách áp dụng Hệ quả 2.2 với tốc độ mũ α cho trước là $\alpha = 0.001$, giá trị lớn nhất thu được của cận trên h_2 của độ trễ là

Bảng 2.1. Giá trị lớn nhất của h_2 với $h_1 = 0.3$ cho trước để hệ ổn định hóa được

Phương pháp	h_1	h_2	Ma trận điều khiển K
T. Li cùng các cộng sự (2008)	0.3	0.9	$[-70.22 \quad -33.14]$
Hệ quả 2.2 ($\alpha = 0.001$)	0.3	1.22	$[-0.0060 \quad -1.0487]$
Hệ quả 2.2 ($\alpha = 0.296$)	0.3	0.9	$[-0.0015 \quad -1.0164]$

$h_2 = 1.22$. Ngoài ra, nếu cho $h_1 = 0.3$ và $h_2 = 0.9$ như trong công trình của T. Li cùng các cộng sự thì bằng cách áp dụng Hệ quả 2.2 ta có hệ (2.18) là ổn định hóa được với tốc độ mũ $\alpha = 0.296$. Bảng 2.1 dưới đây cho ta kết quả so sánh giữa kết quả của Hệ quả 2.2 với kết quả của T. Li cùng các cộng sự. Từ bảng 2.1, có thể thấy rằng kết quả của chúng tôi là tốt hơn kết quả của các tác giả đó.

Trong trường hợp cho $\alpha = 0.001, h_1 = 0.3, h_2 = 1.22$, chúng tôi tìm được một nghiệm của bất đẳng thức ma trận tuyến tính (2.20) là $\epsilon_1 = 1.1345 \times 10^3, \epsilon_2 = 16.6876$ và các ma trận

$$
\begin{aligned}
&P = \begin{bmatrix} 288.2003 & -33.0327 \\ -33.0327 & 190.0667 \end{bmatrix}, Q_1 = \begin{bmatrix} 3.7758 & -6.7049 \\ -6.7049 & 23.8409 \end{bmatrix}, Q_3 = \begin{bmatrix} 17.6632 & 19.1953 \\ 19.1953 & 72.8241 \end{bmatrix},\\
&S_1 = \begin{bmatrix} 411.1875 & -25.3731 \\ -25.3731 & 148.7446 \end{bmatrix}, S_2 = \begin{bmatrix} 432.1371 & -43.1242 \\ -43.1242 & 249.3136 \end{bmatrix}, S_3 = \begin{bmatrix} 15.6575 & -11.8170 \\ -11.8170 & 52.9336 \end{bmatrix},\\
&S_4 = \begin{bmatrix} 4.8929 & -8.5002 \\ -8.5002 & 30.2842 \end{bmatrix}, R_1 = \begin{bmatrix} 16.0543 & -3.3676 \\ -3.3676 & 23.8945 \end{bmatrix}, R_2 = \begin{bmatrix} 7.8087 & -16.7842 \\ -16.7842 & 47.9581 \end{bmatrix},\\
&Y = [32.9266 \quad -199.1300].
\end{aligned}
$$

Do đó, theo Hệ quả 2.2 hệ (2.18) là 0.001−ổn định mũ và nghiệm bất kì $x(t,\phi)$ của hệ đóng (2.18) thỏa mãn đánh giá

$$\|x(t,\phi)\| \le 2.0677e^{-0.001t}\|\phi\|_{C^1}.$$

Ngoài ra, điều khiển ngược ổn định hóa hệ (2.7) được cho bởi công thức

$$u(t) = YP^{-1}x(t) = [-0.0060 \quad -1.0487]\, x(t).$$

Chương 3
Bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho một số lớp hệ phương trình vi phân có trễ

Chương này trình bày một số kết quả về bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho một số lớp hệ điều khiển có trễ biến thiên, bao gồm: hệ điều khiển có trễ biến thiên hỗn hợp trên cả biến trạng thái và biến điều khiển và hệ điều khiển tuyến tính có trễ thiên dạng khoảng trên biến trạng thái và biến quan sát. Chương này tổng hợp các kết quả được chúng tôi công bố trên các tạp chí *Journal of Optimization Theory and Applications* và *Applied Mathematics and Computation.*

3.1. Bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho lớp hệ phương trình vi phân có trễ hỗn hợp trên cả biến trạng thái và biến điều khiển

Xét hệ điều khiển có trễ hỗn hợp biến thiên trên cả biến trạng thái và biến điều khiển:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h_1(t)) + A_2\int_{t-k_1(t)}^{t} x(s)\,ds \\ \qquad\quad +B_0u(t) + B_1u(t-h_2(t)) + B_2\int_{t-k_2(t)}^{t} u(s)\,ds \\ x(t) = \phi(t), \quad t\in[-d,0], \quad d=\max\{h_{1\max}, h_{2\max}, k_1, k_2\}, \end{cases} \tag{3.1}$$

trong đó $x(t)\in\mathbb{R}^n, u(t)\in\mathbb{R}^m$ là các véctơ trạng thái và véctơ điều khiển tương ứng; $\phi(t)\in C^1([-d,0],\mathbb{R}^n)$ là hàm ban đầu với chuẩn được cho bởi công thức: $\|\phi\|_{C^1} = \sup_{-d\le t\le 0}\{\|\phi(t)\|, \|\dot{\phi}(t)\|\}$; A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2 là các ma trận thực cho trước có số chiều thích hợp; các hàm trễ $h_i(t), k_i(t), i=1,2,$ là hàm liên tục thỏa mãn điều kiện:

$$0\le h_{i\min}\le h_i(t)\le h_{i\max},\ 0\le k_i(t)\le k_i, \quad i=1,2.$$

Cho số $\alpha>0$. Nhắc lại rằng hệ (3.1), trong đó $u(t)=0$, là $\alpha-$ổn định mũ nếu tồn tại hằng số $\beta>1$ sao cho nghiệm bất kì $x(t,\phi)$ của hệ thỏa mãn điều kiện:

$$\|x(t,\phi)\|\le\beta e^{-\alpha t}\|\phi\|_{C^1}, \quad \forall t\ge 0.$$

Cho số $\alpha>0$. Nhắc lại rằng hệ (3.1) là $\alpha-$ổn định hóa được dạng mũ nếu tồn tại một điều khiển ngược $u(t)=Kx(t), K\in\mathbb{R}^{m\times n}$ sao cho nghiệm bất kì $x(t,\phi)$ của hệ đóng sau

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [A_0+B_0K]x(t) + A_1x(t-h_1(t)) + A_2\int_{t-k_1(t)}^{t} x(s)\,ds \\ \qquad\quad +B_1Kx(t-h_2(t)) + B_2K\int_{t-k_2(t)}^{t} x(s)\,ds \\ x(t) = \phi(t), \quad t\in[-d,0]. \end{cases} \tag{3.2}$$

là $\alpha-$ổn định mũ.
Với điều khiển ngược được thiết kế dưới dạng $u(t)=Kx(t)$ thì hệ đóng (3.2) là tồn tại duy nhất nghiệm trên khoảng $[0,+\infty)$ theo như Định lý 1.2 trang 9, Chương 1, cuốn sách chuyên khảo Time-Delay Systems: Lyapunov Functionals and Matrices của V.L. Kharitonov xuất bản năm 2013.

Ta xét hàm chi phí toàn phương sau:

$$J = \int_0^{+\infty} [x^\top(t)Qx(t) + u^\top(t)Ru(t)]\,dt, \tag{3.3}$$

ở đó $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ và $R \in \mathbb{R}^{m\times m}$ là các ma trận thực, đối xứng, xác định dương cho trước.

Mục đích chính của mục này là ta sẽ thiết kế một điều khiển ngược ổn định hóa $u(t) = Kx(t), K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sao cho nghiệm bất kì của hệ đóng (3.2) là $\alpha-$ổn định mũ và hàm chi phí toàn phương (3.3) thỏa mãn điều kiện $J \le J^*$, với J^* là một hằng số dương nào đó.

Cho số $\alpha > 0$, các ma trận đối xứng, xác định dương $Q, R, N, P, Q_1, Q_2, R_1, R_2, S_1, S_2, T_1, T_2$ và các ma trận tự do $Y, M_i, Z_i, i = 1, \dots, 4$. Để thuận tiện cho việc trình bày các kết quả chính của mục này, ta đặt:

$$\begin{aligned}
&h_{\text{imed}} = \frac{1}{2}\Big(h_{\text{imin}} + h_{\text{imax}}\Big), i = 1,2, \quad \delta_i = \frac{1}{2}\Big(h_{\text{imax}} - h_{\text{imin}}\Big), i = 1,2,\\
&\lambda = [\lambda_{\min}(P)].[\lambda_{\max}(N)]^{-2},\\
&\Lambda = [\lambda_{\min}(N)]^{-2}\Bigg(\lambda_{\max}(P) + h_{1\text{med}}\lambda_{\max}(Q_1) + h_{2\text{med}}\lambda_{\max}(Q_2)\\
&\qquad + \frac{k_1^2}{2}\lambda_{\max}(T_1) + \frac{k_2^2}{2}\lambda_{\max}(T_2) + \frac{1}{2}h_{1\text{med}}^2\lambda_{\max}(R_1)\\
&\qquad + \frac{1}{2}h_{2\text{med}}^2\lambda_{\max}(R_2) + 2\delta_1 h_{1\text{med}}\lambda_{\max}(S_1) + 2\delta_2 h_{2\text{med}}\lambda_{\max}(S_2)\Bigg),\\
&H_1 = [h_{1\text{med}}M_1 \quad h_{1\text{med}}M_2 \quad h_{1\text{med}}M_3 \quad h_{1\text{med}}M_4]^\top,\\
&H_2 = [h_{2\text{med}}Z_1 \quad h_{2\text{med}}Z_2 \quad h_{2\text{med}}Z_3 \quad h_{2\text{med}}Z_4]^\top,\\
&H_3 = \Big[\delta_1 NA_1^\top \quad \delta_1 NA_1^\top \quad \delta_1 NA_1^\top \quad \delta_1 NA_1^\top\Big]^\top,\\
&H_4 = \Big[\delta_2 Y^\top B_1^\top \quad \delta_2 Y^\top B_1^\top \quad \delta_2 Y^\top B_1^\top \quad \delta_2 Y^\top B_1^\top\Big]^\top,\\
&H_5 = \Big[k_1 NA_2^\top \quad k_1 NA_2^\top \quad k_1 NA_2^\top \quad k_1 NA_2^\top\Big]^\top,\\
&H_6 = \Big[k_2 Y^\top B_2^\top \quad k_2 Y^\top B_2^\top \quad k_2 Y^\top B_2^\top \quad k_2 Y^\top B_2^\top\Big]^\top,\\
&H_7 = [QN \quad 0 \quad 0 \quad 0]^\top, H_8 = [RY \quad 0 \quad 0 \quad 0]^\top,\\
&\Xi = \begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & \Xi_{13} & \Xi_{14}\\ * & \Xi_{22} & \Xi_{23} & \Xi_{24}\\ * & * & \Xi_{33} & \Xi_{34}\\ * & * & * & \Xi_{44}\end{bmatrix},\\
&\Xi_{11} = 2\alpha P + Q_1 + Q_2 + k_1T_1 + k_2T_2 + M_1^\top + M_1 + Z_1^\top + Z_1\\
&\qquad + A_0N + NA_0^\top + B_0Y + Y^\top B_0^\top,\\
&\Xi_{12} = M_2 + Z_2 - M_1^\top + NA_0^\top + A_1N + Y^\top B_0^\top,\\
&\Xi_{13} = M_3 + Z_3 - Z_1^\top + B_1Y + NA_0^\top + Y^\top B_0^\top,\\
&\Xi_{14} = P + M_4 + Z_4 + NA_0^\top + Y^\top B_0^\top - N,\\
&\Xi_{22} = -e^{-2\alpha h_{1\text{med}}}Q_1 - M_2^\top - M_2 + A_1N + NA_1^\top,\\
&\Xi_{23} = -M_3 - Z_2^\top + NA_1^\top + B_1Y, \quad \Xi_{24} = -M_4 + NA_1^\top - N,\\
&\Xi_{33} = -e^{-2\alpha h_{2\text{med}}}Q_2 - Z_3^\top - Z_3 + B_1Y + Y^\top B_1^\top, \quad \Xi_{34} = -Z_4 + Y^\top B_1^\top - N,\\
&\Xi_{44} = h_{1\text{med}}R_1 + h_{2\text{med}}R_2 + 2\delta_1S_1 + 2\delta_2S_2 - 2N,\\
&\Xi_{55} = -h_{1\text{med}}e^{-2\alpha h_{1\text{med}}}R_1, \quad \Xi_{66} = -h_{2\text{med}}e^{-2\alpha h_{2\text{med}}}R_2,\\
&\Xi_{77} = -\delta_1 e^{-2\alpha(h_{1\text{med}}+\delta_1)}S_1, \quad \Xi_{88} = -\delta_2 e^{-2\alpha(h_{2\text{med}}+\delta_2)}S_2.
\end{aligned}$$

Định lý sau đây đưa ra một điều kiện đủ cho sự tồn tại của một điều khiển ngược $u(t)$ đảm bảo cho hệ điều khiển có trễ hỗn hợp trên cả biến trạng thái và biến điều khiển (3.1) là $\alpha-$ổn định hóa được dạng mũ và giá trị của hàm chi phí toàn phương (3.3) thỏa mãn $J \leq J^*$.

Định lý 3.1 *Cho số $\alpha > 0$, các ma trận thực, đối xứng, xác định dương có số chiều thích hợp Q, R. Xét hệ điều khiển có trễ hỗn hợp trên cả biến trạng thái và biến điều khiển* (3.1) *với hàm chi phí toàn phương* (3.3)*. Giả sử rằng các ma trận hệ số của hệ* (3.1) *và hàm chi phí toàn phương* (3.3) *thỏa mãn điều kiện: tồn tại các ma trận đối xứng, xác định dương $N, P, Q_1, Q_2, R_1, R_2, S_1, S_2, T_1, T_2$ và các ma trận $Y, M_i, Z_i, i = 1, \ldots, 4,$ sao cho bất đẳng thức ma trận tuyến tính sau được thỏa mãn*

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} \Xi & H_1 & H_2 & H_3 & H_4 & H_5 & H_6 & H_7 & H_8 \\ * & \Xi_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Xi_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Xi_{77} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Xi_{88} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -k_1 e^{-2\alpha k_1} T_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -k_2 e^{-2\alpha k_2} T_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -Q & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -R \end{bmatrix} < 0. \tag{3.4}$$

Khi đó $u(t) = YN^{-1}x(t)$ là luật điều khiển ngược đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ (3.1) *và giá trị đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ* (3.1) *là:*

$$J \leq J^* = \Lambda \|\phi\|^2_{C^1}.$$

Nhận xét 3.1 Như đã phân tích trong phần mở đầu, việc giải bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho lớp hệ điều khiển có trễ hỗn hợp trên cả biến trạng thái và biến điều khiển với độ trễ là các hàm khác nhau, độ trễ là hàm liên tục nhưng không nhất thiết khả vi là rất khó khăn và phức tạp. Bởi vì, ta cần phải thiết kế một điều khiển ngược $u(t) = Kx(t), K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ để hệ điều khiển (3.1) không những là ổn định hóa được dạng mũ mà giá trị của hàm chi phí toàn phương $J = \int_0^{+\infty} [x^\top(t)Qx(t) + u^\top(t)Ru(t)]\, dt$ phải nhỏ hơn một số thực dương J^* nào đó. Bằng cách xây dựng hàm Lyapunov–Krasovskii mới trong đó có chứa tốc độ ổn định mũ α, các cận trên và cận dưới của độ trễ, các trung bình cộng và trung bình hiệu của cận trên của độ trễ, kết hợp với một vài đánh giá mới, chúng tôi đưa ra một tiêu chuẩn mới cho bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho lớp hệ điều khiển có trễ hỗn hợp biến thiên trên cả biến trạng thái và biến điều khiển với độ trễ biến thiên dạng khoảng và là các hàm liên tục nhưng không khả vi. Điều kiện đủ của chúng tôi được đưa ra dưới dạng các bất đẳng thức ma trận tuyến tính (LMIs). Tính tương thích của điều kiện dạng LMIs có thể kiểm tra được bằng phần mềm Matlab. Ngoài ra, trong điều kiện đủ mà chúng tôi đề xuất, điều khiển ngược ổn định hóa và các chỉ số ổn định Lyapunov được xác định một cách tường minh và có thể tính toán được bằng phần mềm Matlab.

3.2. Bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ phương trình vi phân tuyến tính có trễ biến thiên trên biến trạng thái và biến quan sát

Xét hệ điều khiển tuyến tính có trễ biến thiên trên biến trạng thái và biến quan sát

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Dx(t - h_1(t)) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t - h_2(t)), \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-d, 0], \end{cases} \tag{3.5}$$

ở đó $d = \max\{\overline{h}_1, \overline{h}_2\}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véctơ trạng thái; $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là véctơ điều khiển; $y(t) \in \mathbb{R}^r$ là véctơ quan sát; A, D, B, C là các ma trận thực cho trước có số chiều thích hợp; $\phi(t) \in C^1([-d, 0], \mathbb{R}^n)$ là hàm ban đầu với chuẩn xác định bởi

$$\|\phi\|_{C^1} = \sup_{t\in[-d,0]}\{\|\phi(t)\|, \|\dot{\phi}(t)\|\};$$

Các hàm trễ $h_1(t), h_2(t)$ thỏa mãn điều kiện:

$$0 < h_1 < h_1(t) \le \overline{h}_1, \quad 0 < h_2 < h_2(t) \le \overline{h}_2.$$

Chú ý rằng trong bài toán này, chúng tôi xét trường hợp các hàm trễ là các hàm liên tục không nhất thiết khả vi và cận dưới của hàm trễ là thực sự lớn hơn 0.

Trong mục này, chúng tôi sẽ thiết kế một bộ điều khiển phản hồi đầu ra động (dynamic output feedback controller) sau để ổn định hóa hệ điều khiển tuyến tính có trễ biến thiên trên biến trạng thái và biến quan sát (3.5):

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = A_1\xi(t) + B_1 y(t), \quad t \ge 0, \\ \xi(t) = 0, \quad t \in [-d, 0], \\ u(t) = C_1\xi(t), \end{cases} \tag{3.6}$$

ở đó $\xi(t) \in \mathbb{R}^n$; A_1, B_1, C_1 là các ma trận hằng chưa biết sẽ được xác định sau.

Liên kết với hệ điều khiển (3.5), ta xét hàm chi phí toàn phương sau:

$$J = \int_0^{+\infty} [x^{\mathsf{T}}(t)Qx(t) + u^{\mathsf{T}}(t)Ru(t)]\, dt, \tag{3.7}$$

với $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}, R \in \mathbb{R}^{m\times m}$ là các ma trận thực, đối xứng, xác định dương cho trước. Thay bộ điều khiển phản hồi đầu ra năng động (3.6) vào hệ (3.5), ta thu được hệ đóng sau:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \overline{A}z(t) + \overline{D}_1 z(t - h_1(t)) + \overline{D}_2 z(t - h_2(t)), \\ z(t) = \overline{\phi}(t), \quad t \in [-d, 0], \end{cases} \tag{3.8}$$

ở đó $z(t) = [x^{\mathsf{T}}(t) \quad \xi^{\mathsf{T}}(t)]^{\mathsf{T}}, \overline{\phi}(t) = [\phi^{\mathsf{T}}(t) \quad 0]^{\mathsf{T}}$ và

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} A & BC_1 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}, \quad \overline{D}_1 = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{D}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_1 C & 0 \end{pmatrix}.$$

Chú ý rằng hệ đóng (3.8) là tồn tại duy nhất nghiệm trên khoảng $[0, +\infty)$ theo như Định lý 1.2 trang 9, Chương 1, cuốn sách chuyên khảo Time-Delay Systems: Lyapunov Functionals and Matrices của V.L. Kharitonov xuất bản năm 2013.

Hàm chi phí toàn phương (3.7) trở thành:

$$J = \int_0^{+\infty} [x^{\mathsf{T}}(t)Qx(t) + \xi^{\mathsf{T}}(t)C_1^{\mathsf{T}}RC_1\xi(t)]\, dt. \tag{3.9}$$

Trong mục này, chúng tôi sẽ thiết kế một bộ phản hồi đầu ra động (3.6) cho hệ điều khiển tuyến tính có trễ biến thiên trên biến trạng thái và biến quan sát (3.5) và hàm chi phí toàn phương (3.7) sao cho hệ đóng (3.8) là $\alpha-$ổn định mũ và giá trị của hàm chi phí toàn phương (3.7) thỏa mãn $J \le J^*$, với J^* là một hằng số dương nào đó sẽ được xác định sau.

Cho số $\alpha > 0$, các ma trận đối xứng, xác định dương $P, Q_1, Q_2, U_1, U_2, R_1, R_2, H_1, H_2, S_i, W_i, i = 1, \dots, 4$ và một ma trận Y. Để thuận tiện cho việc trình bày kết quả chính của mục này, ta ký hiệu:

$$
\begin{aligned}
&\lambda = \lambda_{\min}(P^{-1}),\\
&\Lambda = \lambda_{\max}(P^{-1}) + h_1\lambda_{\max}(P^{-1}Q_1P^{-1}) + (\overline{h}_1 - h_1)\lambda_{\max}(P^{-1}Q_2P^{-1})\\
&\quad + \frac{1}{2}h_1^2\lambda_{\max}(P^{-1}S_1P^{-1}) + \frac{1}{2}(\overline{h}_1^2 - h_1^2)\lambda_{\max}(P^{-1}S_2P^{-1})\\
&\quad + \frac{1}{2}h_1^2\lambda_{\max}(P^{-1}S_3P^{-1}) + \frac{1}{2}(\overline{h}_1^2 - h_1^2)\lambda_{\max}(P^{-1}S_4P^{-1})\\
&\quad + \frac{1}{6}h_1^3\lambda_{\max}(P^{-1}R_1P^{-1}) + \frac{1}{6}(\overline{h}_1^3 - h_1^3)\lambda_{\max}(P^{-1}R_2P^{-1})\\
&\quad + h_2\lambda_{\max}(P^{-1}U_1P^{-1}) + (\overline{h}_2 - h_2)\lambda_{\max}(P^{-1}U_2P^{-1}) + \frac{1}{2}h_2^2\lambda_{\max}(P^{-1}W_1P^{-1})\\
&\quad + \frac{1}{2}(\overline{h}_2^2 - h_2^2)\lambda_{\max}(P^{-1}W_2P^{-1}) + \frac{1}{2}h_2^2\lambda_{\max}(P^{-1}W_3P^{-1})\\
&\quad + \frac{1}{2}(\overline{h}_2^2 - h_2^2)\lambda_{\max}(P^{-1}W_4P^{-1}) + \frac{1}{6}h_2^3\lambda_{\max}(P^{-1}H_1P^{-1}) + \frac{1}{6}(\overline{h}_2^3 - h_2^3)\lambda_{\max}(P^{-1}H_2P^{-1}),\\
&\Xi = (\Xi_{ij})_{15\times 15}, \quad \Xi_{ji} = \Xi_{ij}^{\mathsf{T}}, \quad \forall i \neq j,\\
&\Psi = \begin{bmatrix} QP & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}},\\
&\Xi_{11} = AP + PA^{\mathsf{T}} + 2\alpha P + Q_1 + U_1 + h_1S_3 + (\overline{h}_1 - h_1)S_4 + h_2W_3\\
&\qquad + (\overline{h}_2 - h_2)W_4 - \frac{1}{h_1}e^{-2\alpha h_1}S_1 - 2e^{-4\alpha h_1}R_1 - 2\frac{(\overline{h}_1 - h_1)}{(\overline{h}_1 + h_1)}e^{-4\alpha\overline{h}_1}R_2\\
&\qquad - \frac{1}{h_2}e^{-2\alpha h_2}W_1 - 2e^{-4\alpha h_2}H_1 - 2\frac{(\overline{h}_2 - h_2)}{(\overline{h}_2 + h_2)}e^{-4\alpha\overline{h}_2}H_2,\\
&\Xi_{22} = -\frac{2}{\overline{h_1} - h_1}e^{-2\alpha\overline{h}_1}S_2,\ \Xi_{33} = -\frac{2}{\overline{h_2} - h_2}e^{-2\alpha\overline{h}_2}W_2,\\
&\Xi_{44} = e^{-2\alpha h_1}Q_2 - e^{-2\alpha h_1}Q_1 - \frac{1}{h_1}e^{-2\alpha h_1}S_1 - \frac{1}{\overline{h}_1 - h_1}e^{-2\alpha\overline{h}_1}S_2,\\
&\Xi_{55} = -e^{-2\alpha\overline{h}_1}Q_2 - \frac{1}{\overline{h}_1 - h_1}e^{-2\alpha\overline{h}_1}S_2,\\
&\Xi_{66} = e^{-2\alpha h_2}U_2 - e^{-2\alpha h_2}U_1 - \frac{1}{h_2}e^{-2\alpha h_2}W_1 - \frac{1}{\overline{h}_2 - h_2}e^{-2\alpha\overline{h}_2}W_2,\\
&\Xi_{77} = -e^{-2\alpha\overline{h}_2}U_2 - \frac{1}{\overline{h}_2 - h_2}e^{-2\alpha\overline{h}_2}W_2, \Xi_{88} = -\frac{1}{h_1}e^{-2\alpha h_1}S_3 - \frac{2}{h_1^2}e^{-4\alpha h_1}R_1,\\
&\Xi_{99} = -\frac{1}{\overline{h}_1 - h_1}e^{-2\alpha\overline{h}_1}S_4 - \frac{2}{\overline{h}_1^2 - h_1^2}e^{-4\alpha\overline{h}_1}R_2, \Xi_{10,10} = -\frac{1}{h_2}e^{-2\alpha h_2}W_3 - \frac{2}{h_2^2}e^{-4\alpha h_2}H_1,\\
&\Xi_{11,11} = -\frac{1}{\overline{h}_2 - h_2}e^{-2\alpha\overline{h}_2}W_4 - \frac{2}{\overline{h}_2^2 - h_2^2}e^{-4\alpha\overline{h}_2}H_2,\\
&\Xi_{12,12} = h_1S_1 + (\overline{h}_1 - h_1)S_2 + \frac{1}{2}h_1^2R_1 + \frac{1}{2}(\overline{h}_1^2 - h_1^2)R_2 + h_2W_1 + (\overline{h}_2 - h_2)W_2\\
&\qquad\qquad + \frac{1}{2}h_2^2H_1 + \frac{1}{2}(\overline{h}_2^2 - h_2^2)H_2 - 2P,\\
&\Xi_{13,13} = Y + Y^{\mathsf{T}} + 2\alpha P + BRB^{\mathsf{T}},\ \Xi_{12} = DP,\ \Xi_{13} = 0,\ \Xi_{14} = \frac{1}{h_1}e^{-2\alpha h_1}S_1,\\
&\Xi_{15} = 0,\ \Xi_{16} = \frac{1}{h_2}e^{-2\alpha h_2}W_1,\ \Xi_{17} = 0,\ \Xi_{18} = \frac{2}{h_1}e^{-4\alpha h_1}R_1,\ \Xi_{19} = \frac{2}{\overline{h}_1 + h_1}e^{-4\alpha\overline{h}_1}R_2,
\end{aligned}
$$

$\Xi_{1,10} = \frac{2}{h_2} e^{-4\alpha h_2} H_1$, $\Xi_{1,11} = \frac{2}{\bar{h}_2 + h_2} e^{-4\alpha \bar{h}_2} H_2$, $\Xi_{1,12} = PA^{\mathsf{T}}$,

$\Xi_{1,13} = -BB^{\mathsf{T}}$, $\Xi_{1,14} = \Xi_{1,15} = 0, \Xi_{23} = 0$, $\Xi_{24} = \Xi_{25} = \frac{1}{\bar{h}_1 - h_1} e^{-2\alpha \bar{h}_1} S_2$,

$\Xi_{26} = \Xi_{27} = \Xi_{28} = \Xi_{29} = \Xi_{2,10} = \Xi_{2,11} = 0$,

$\Xi_{2,12} = PD^{\mathsf{T}}$, $\Xi_{2,13} = \Xi_{2,14} = \Xi_{2,15} = 0$, $\Xi_{34} = \Xi_{35} = 0, \Xi_{36} = \Xi_{37} = \frac{1}{\bar{h}_2 - h_2} e^{-2\alpha \bar{h}_2} W_2$,

$\Xi_{38} = \Xi_{39} = \Xi_{3,10} = \Xi_{3,11} = \Xi_{3,12} = \Xi_{3,13} = 0, \Xi_{3,14} = PC^{\mathsf{T}}, \Xi_{3,15} = 0$,

$\Xi_{45} = \Xi_{46} = \Xi_{47} = \Xi_{48} = \Xi_{49} = \Xi_{4,10} = \Xi_{4,11} = \Xi_{4,12} = \Xi_{4,13} = \Xi_{4,14} = \Xi_{4,15} = 0$,

$\Xi_{56} = \Xi_{57} = \Xi_{58} = \Xi_{59} = \Xi_{5,10} = \Xi_{5,11} = \Xi_{5,12} = \Xi_{5,13} = \Xi_{5,14} = \Xi_{5,15} = 0$,

$\Xi_{67} = ... = \Xi_{6,15} = 0$, $\Xi_{78} = ... = \Xi_{7,15} = 0$, $\Xi_{89} = ... = \Xi_{8,15} = 0$,

$\Xi_{9,10} = ... = \Xi_{9,15} = 0$, $\Xi_{10,11} = ... = \Xi_{10,15} = 0$,

$\Xi_{11,12} = ... = \Xi_{11,15} = 0$, $\Xi_{12,13} = -BB^{\mathsf{T}}$, $\Xi_{12,14} = \Xi_{12,15} = 0$,

$\Xi_{13,14} = 0$, $\Xi_{13,15} = PC^{\mathsf{T}}$, $\Xi_{14,14} = \Xi_{15,15} = -I$, $\Xi_{14,15} = 0$.

Định lý sau cho ta một điều kiện đủ cho sự tồn tại một bộ điều khiển phản hồi đầu ra động (3.6) đảm bảo cho hệ tuyến tính có trễ biến thiên trên biến trạng thái và biến quan sát (3.5) là $\alpha-$ổn định hóa được dạng mũ và hàm chi phí toàn phương (3.7) thỏa mãn điều kiện $J \le J^*$.

Định lý 3.2 *Cho số $\alpha > 0$, hai ma trận thực, đối xứng xác định dương Q, R. Xét hệ điều khiển tuyến tính* (3.5) *và hàm chi phí toàn phương* (3.7). *Giả sử rằng các ma trận hệ số của hệ* (3.5) *và hàm chi phí toàn phương* (3.7) *thỏa mãn điều kiện sau: tồn tại các ma trận đối xứng, xác định dương $P, Q_1, Q_2, U_1, U_2, R_1, R_2, H_1, H_2, S_i, W_i, i = 1, \dots, 4$, và một ma trận Y sao cho bất đẳng thức ma trận tuyến tính sau đây được thỏa mãn:*

$$\begin{bmatrix} \Xi & \Psi \\ \Psi^{\mathsf{T}} & -Q \end{bmatrix} < 0. \tag{3.10}$$

Khi đó có một bộ điều khiển phản hồi đầu ra động (3.6) *cho hệ* (3.5), *trong đó các ma trận A_1, B_1, C_1 được xác định bởi:*

$$A_1 = YP^{-1}, \quad B_1 = PC^{\mathsf{T}}, \quad C_1 = -B^{\mathsf{T}} P^{-1}.$$

Hơn nữa, giá trị đảm bảo chi phí điều khiển của hệ (3.5) *xác định bởi:*

$$J^* = \Lambda \|\phi\|^2_{C^1}.$$

Ví dụ 3.1 Xét hệ điều khiển tuyến tính có trễ biến thiên trên biến trạng thái và biến quan sát (3.5), trong đó:

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0.1 & -0.9 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -0.5 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.9 \\ -0.8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \end{bmatrix},$$

với

$$\begin{cases} h_1(t) = 0.1 + 0.3 \sin t & \text{nếu} \quad t \in \mathcal{I} = \cup_{k \ge 0} [2k\pi, (2k+1)\pi] \\ h_1(t) = 0.1 & \text{nếu} \quad t \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathcal{I}, \end{cases}$$
$$h_2(t) = 0.1 + 0.3\kappa(t),$$

trong đó $\kappa(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \sin(2^i t)$ là hàm Cellérier. Đó là một hàm liên tục nhưng không khả vi tại mọi điểm. Chú ý rằng các hàm trễ $h_1(t), h_2(t)$ là không khả vi, do đó, các tiêu chuẩn ổn định được đề xuất trong các công trình của các tác giả M.C. De Oliveira cùng các cộng sự (năm 2000), D. Fu cùng các cộng sự (năm 2009), J.H. Park cùng các cộng sự (năm 2004) là không áp dụng được cho lớp hệ được xét trong ví dụ này. Cho $\alpha = 1$,

$$Q = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, R = [1.5].$$

Ta có $h_1 = 0.1, \overline{h}_1 = 0.4, h_2 = 0.1, \overline{h}_2 = 0.4$. Sử dụng hộp công cụ bất đẳng thức ma trận tuyến tính trong Matlab, ta tìm được một nghiệm của bất đẳng thức ma trận (3.10) trong Định lý 3.2 là:

$$\begin{aligned}
P &= \begin{bmatrix} 1.1694 & 0.9763 \\ 0.9763 & 8.8587 \end{bmatrix}, \ Q_1 = \begin{bmatrix} 17.2453 & 15.8160 \\ 15.8160 & 100.6733 \end{bmatrix}, Q_2 = \begin{bmatrix} 15.4517 & 14.4884 \\ 14.4884 & 75.5063 \end{bmatrix}, \\
U_1 &= \begin{bmatrix} 0.5235 & 2.5245 \\ 2.5245 & 52.3380 \end{bmatrix}, \ U_2 = \begin{bmatrix} 7.5832 & 9.5533 \\ 9.5533 & 161.6656 \end{bmatrix}, \ R_1 = \begin{bmatrix} 0.6904 & 0.0228 \\ 0.0228 & 0.9457 \end{bmatrix}, \\
R_2 &= \begin{bmatrix} 0.1569 & 1.1703 \\ 1.1703 & 15.3105 \end{bmatrix}, \ H_1 = \begin{bmatrix} 0.4091 & 0.1564 \\ 0.1564 & 2.6638 \end{bmatrix}, \ H_2 = \begin{bmatrix} 0.1569 & 1.1703 \\ 1.1703 & 15.3105 \end{bmatrix}, \\
S_1 &= \begin{bmatrix} 1.5361 & 1.6940 \\ 1.6940 & 7.7595 \end{bmatrix}, \ S_2 = \begin{bmatrix} 2.6633 & 2.5927 \\ 2.5927 & 11.4131 \end{bmatrix}, \ S_3 = \begin{bmatrix} 4.5852 & 0.5598 \\ 0.5598 & 13.0816 \end{bmatrix}, \\
S_4 &= \begin{bmatrix} 2.2391 & 3.1311 \\ 3.1311 & 50.7949 \end{bmatrix}, \ W_1 = \begin{bmatrix} 2.6749 & 3.2836 \\ 3.2836 & 35.4138 \end{bmatrix}, \ W_2 = \begin{bmatrix} 0.2623 & -0.2928 \\ -0.2928 & 12.8799 \end{bmatrix}, \\
W_3 &= \begin{bmatrix} 6.7110 & 0.5143 \\ 0.5143 & 14.1273 \end{bmatrix}, \ W_4 = \begin{bmatrix} 2.2391 & 3.1311 \\ 3.1311 & 50.7949 \end{bmatrix}, \ Y = \begin{bmatrix} -94.1305 & 55.3449 \\ 35.6782 & -96.5021 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Bộ điều khiển phản hồi đầu ra động cho hệ (3.5) được xác định theo công thức (3.6) với

$$\begin{aligned}
A_1 &= YP^{-1} = \begin{bmatrix} -94.3933 & 16.6507 \\ 43.6168 & -15.7005 \end{bmatrix}, \\
B_1 &= PC^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} -0.6813 \\ 3.4530 \end{bmatrix}, \\
C_1 &= -B^{\mathsf{T}}P^{-1} = [-0.9306 \quad 0.1929].
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Do đó theo Định lý 3.2, hệ điều khiển tuyến tính có trễ biến thiên trên biến trạng thái và biến quan sát (3.5) là 1−ổn định hóa được dạng mũ dưới sự tác động của bộ điều khiển phản hồi đầu ra động (3.6). Ngoài ra, ta có nghiệm bất kì $x(t, \phi)$ của hệ đóng thỏa mãn đánh giá sau:

$$\|x(t, \phi)\| \le 8.8068e^{-t}\|\phi\|_{C^1},$$

và giá trị đảm bảo điều khiển cho hệ điều khiển tuyến tính có trễ biến thiên trên biến trạng thái và biến quan sát là:

$$J^* = 8.6323\|\phi\|^2_{C^1}.$$

KẾT LUẬN

Luận án này nghiên cứu tính ổn định mũ và ổn định hóa được dạng mũ cho mô hình mạng nơ ron mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ hỗn hợp, tính ổn định hóa được dạng mũ cho lớp hệ điều khiển có trễ biến thiên dạng khoảng với nhiễu phi tuyến. Đồng thời, chúng tôi cũng nghiên cứu bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho một số lớp hệ điều khiển có cấu trúc phức tạp và độ trễ biến thiên tổng quát. Cụ thể, luận án đã đạt được những kết quả sau:
1. Chứng minh được một số điều kiện đủ cho tính ổn định mũ và ổn định hóa được dạng mũ cho mô hình mạng nơ ron mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ hỗn hợp với độ trễ là các hàm liên tục nhưng không nhất thiết khả vi.
2. Đưa ra các điều kiện đủ cho tính ổn định hóa được dạng mũ cho hệ điều khiển có trễ biến thiên dạng khoảng với nhiễu phi tuyến.
3. Thiết lập một điều kiện đủ cho sự tồn tại một điều khiển ngược đảm bảo chi phí điều khiển cho lớp hệ điều khiển có trễ biến thiên hỗn hợp trên cả biến trạng thái và biến điều khiển với độ trễ là các hàm liên tục nhưng không nhất thiết khả vi.
4. Thiết kế được một bộ điều khiển phản hồi đầu ra động đảm bảo chi phí điều khiển cho lớp hệ điều khiển tuyến tính có trễ biến thiên trên biến trạng thái và biến quan sát với độ trễ biến thiên dạng khoảng và là các hàm liên tục không nhất thiết khả vi.

Luận án mở ra một số hướng tiếp tục nghiên cứu là:
1. Nghiên cứu tính ổn định mũ và ổn định hóa được dạng mũ cho các lớp hệ phương trình vi phân không ôtônôm có trễ hằng, trễ biến thiên.
2. Nghiên cứu bài toán ổn định mũ và ổn định hóa được dạng mũ cho một số lớp hệ phương trình vi phân hàm như hệ phương trình tích phân tổng quát, hệ phương trình vi phân trung tính có trễ.
3. Nghiên cứu bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho các hệ phương trình vi phân không ôtônôm có cấu trúc trễ mở rộng.

DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH ĐÃ CÔNG BỐ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

1. M.V. Thuan and V.N. Phat, Optimal guaranteed cost control of linear systems with mixed interval time-varying delayed state and control, *Journal of Optimization Theory and Applications,* **152** (2012) 394–412.

2. M.V. Thuan, V.N. Phat and H. Trinh, Dynamic output feedback guaranteed cost control for linear systems with interval time-varying delays in states and outputs, *Applied Mathematics and Computation,* **218** (2012) 10697–10707.

3. M.V. Thuan and V.N. Phat, New criteria for stability and stabilization of neural networks with mixed interval time-varying delays, *Vietnam Journal of Mathematics,* **40** (2012) 79–93.

4. M.V. Thuan, V.N. Phat, T. Fernando and H. Trinh, Exponential stabilization of time-varying delay systems with nonlinear perturbations, *IMA Journal of Mathematical Control and Information,* doi: 10.1093/imamci/dnt022, (2013), 24 pages.