VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM
VIỆN TOÁN HỌC

NGÔ THỊ NGOAN

NGUYÊN LÝ HASSE CHO NHÓM ĐẠI SỐ TRÊN TRƯỜNG TOÀN CỤC

Chuyên ngành: Đại số và Lý thuyết số
Mã số: 62 46 01 04

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HÀ NỘI-2017

Luận án được hoàn thành tại:

Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam

Người hướng dẫn khoa học:

GS. TS. Nguyễn Quốc Thắng

Phản biện 1: ....

Phản biện 2: ....

Phản biện 3: ....

Luận án sẽ được bảo vệ trước hội đồng chấm Luận án cấp Viện họp tại

Viện Toán học - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam vào hồi ....giờ....... ngày........tháng.........năm 2017.

Có thể tìm luận án tại:

- Thư viện Quốc gia Hà nội
- Thư viện Viện Toán học

Mở đầu

Một trong những kết quả quan trọng của Lý thuyết Số là Định lý Hasse-Minkowski, được phát biểu như sau: "*Cho V là tập tất cả các chốn trên trường số hữu tỉ $\mathbb{Q}$, f là một dạng toàn phương n biến trên $\mathbb{Q}$. Với mỗi $v \in V$, $\mathbb{Q}_v$ ký hiệu cho trường đầy đủ của $\mathbb{Q}$ tại v. Khi đó, f biểu diễn 0 không tầm thường trên $\mathbb{Q}$ khi và chỉ khi f biểu diễn 0 không tầm thường địa phương khắp nơi* (*trên mọi bao đầy đủ $\mathbb{Q}_v$*)". Định lý này sau có các tên gọi khác là nguyên lý Hasse mạnh hay nguyên lý địa phương-toàn cục mạnh cho dạng toàn phương. Như một hệ quả, người ta chứng minh được rằng, *nếu f, g là hai dạng toàn phương trên $\mathbb{Q}$, tương đương khắp nơi trên mọi bao đầy đủ $\mathbb{Q}_v$ thì chúng cũng tương đương trên $\mathbb{Q}$*. Định lý này còn được gọi là nguyên lý Hasse yếu cho các dạng toàn phương. Nguyên lý Hasse (mạnh, yếu) đã đóng vai trò thực sự quan trọng trong Lý thuyết Số, đặc biệt là trong lý thuyết số học của các dạng (toàn phương, dạng hecmit và phản hecmit). Chuyển sang ngôn ngữ hình học, Định lý Hasse-Minkovski nói rằng một siêu mặt xạ ảnh xác định bởi một dạng toàn phương hạng ≥ 2 có điểm hữu tỉ trên $\mathbb{Q}$ khi và chỉ khi nó có điểm hữu tỉ trên tất cả các bao đầy đủ của $\mathbb{Q}$. Nói cách khác, nguyên lý Hasse (nguyên lý địa phương-toàn cục) là đúng cho các siêu mặt xạ ảnh bậc hai trên $\mathbb{Q}$.

Một cách tổng quát, một đa tạp đại số X xác định trên một trường toàn cục k. Ta nói rằng nguyên lý Hasse được thỏa mãn cho X nếu như $X(k) \neq \emptyset$ *khi và chỉ khi* $X(k_v) \neq \emptyset$ *với mọi chốn v của k*. Tổng quát hơn, cho đối tượng X xác định trên k và P là một tính chất của X. Ta nói rằng nguyên lý địa phương-toàn cục được thỏa mãn trên X đối với tính chất P nếu như *X có tính chất P trên k khi và chỉ khi X có tính chất P trên k_v với mọi chốn v của k*.

Khẳng định tương tự cho nhóm Brauer trong lý thuyết các đại số đơn tâm đã được chứng minh bởi Brauer-Hasse-Noether và trở thành kết quả quan trọng của Lý thuyết Số hiện đại.

Một trong những lý do của tính hiệu quả của nguyên lý địa phương toàn cục là trên các trường địa phương, ta có thể sử dụng nhiều công cụ khác nhau (đại số, hình học, tô pô, giải tích) để nghiên cứu các đối tượng. Đồng thời, trong nhiều trường hợp việc tìm lời giải cho bài toán trên trường địa phương thuận lợi hơn nhiều so với việc tìm lời giải của chúng trên trường toàn cục. Vì thế việc nghiên cứu tính đúng đắn của nguyên lý địa phương-toàn cục trong số học của các đa tạp đại số nói chung và nhóm đại số nói riêng là rất quan trọng.

Việc nghiên cứu các mở rộng đại số vô hạn của trường địa phương hay toàn cục đóng vai trò quan trọng. Chẳng hạn như việc nghiên cứu mở rộng không rẽ nhánh cực đại của một trường địa phương đã cho, hay mở rộng abel cực đại của một trường toàn cục đã cho. Đó là các mở rộng đại số vô hạn của các trường tương ứng. Nói chung, số học của các mở rộng đại số vô hạn của các trường địa phương và toàn cục có những bí hiểm (theo cách nói của Tsfasman và Vladuts) và rất được quan tâm nghiên cứu. Một trong những nguyên lý địa phương-toàn cục nổi tiếng và là một trong những kết quả quan trọng trong Lý thuyết Số là Định lý Hasse-Minkowski. Việc nghiên cứu kết quả tương tự của Định lý Hasse-Minkowski cho dạng toàn phương trên mở rộng các đại số vô hạn của trường toàn cục đã được đề cập đến lần đầu trong công trình của K. Koziol và M. Kula.

Luận án đặt ra mục tiêu khảo sát một số nguyên lý địa phương-toàn cục liên quan đến tính chất phân rã của nhóm đại số trên trường toàn cục, liên quan đến không gian thuần nhất xạ ảnh của chúng. Đồng thời, luận án cũng đặt ra mục tiêu khảo sát nguyên lý địa phương-toàn cục cho các dạng (toàn phương, hecmit, phản hecmit) xác định trên các trường toàn cục vô hạn.

Một trong những tính chất quan trọng của nhóm đại số G là tính chất phân rã (hoặc tựa phân rã) của G. Từ lâu, tính chất phân rã đã được định nghĩa cho nhóm đại số tuyến tính giải được. Sau đó, tính chất phân rã và tựa phân rã được định nghĩa cho nhóm liên thông reductive. Trong luận án này, chúng tôi đưa ra khái niệm về tính chất phân rã và tựa phân rã cho nhóm đại số tuyến tính liên thông bất kì, chúng kế thừa và kết hợp được các khái niệm về tính chất (tựa-)phân rã của hai lớp nhóm trên.

Tính chất phân rã và tựa phân rã của nhóm đại số thể hiện tính đơn giản nhất có thể về mặt cấu trúc của chúng. Do đó, một vấn đề được đặt ra là khảo sát các tính chất này thông qua cách tiếp cận địa phương-toàn cục. Việc nghiên cứu tính chất (tựa-)phân rã của các nhóm cũng có liên quan mật thiết với việc nghiên cứu tính chất số học và nguyên lý Hasse của một số đối tượng hình học (cụ thể ở đây là các không gian thuần nhất của nhóm đại số).

Trong lý thuyết nhóm đại số, các nhóm kinh điển (nhóm tự đẳng cấu của các dạng toàn phương, hecmit, phản hecmit) đóng vai trò rất quan trọng. Để nghiên cứu số học của các nhóm đó, thì việc nghiên cứu số học của các dạng tương ứng là một điều bắt buộc. Người ta đã biết tương tự của Định lý Hasse-Minkovski cho các dạng hecmit hoặc phản hecmit (Định lý Landherr, Định lý Kneser). Tiếp nối việc nghiên cứu về các nguyên lý địa phương-toàn cục cho các nhóm đại số, chúng tôi nghiên cứu các nguyên lý địa phương-toàn cục cho các dạng xác định trên các trường toàn cục vô hạn.

Luận án được chia làm 4 chương. Trong Chương 1, chúng tôi nhắc lại một số kiến thức cơ bản đã biết sẽ được sử dụng trong luận án như: Dạng toàn phương, dạng hecmit trên trường địa phương và trường toàn cục, các kết quả kinh điển về các nguyên lý địa phương-toàn cục, kiến thức cơ sở về nhóm đại số trên một trường và sự phân loại nhóm đơn. Các kết quả mới của chúng tôi được trình bày trong các Chương 2, Chương 3 và Chương 4.

Trong Chương 2 chúng tôi chứng minh các nguyên lý địa phương-toàn cục cho tính chất phân rã của nhóm đại số cho các trường hợp riêng: xuyến đại số, nhóm giải được, nhóm reductive. Và sau đó chúng tôi chứng minh kết quả tổng quát là nguyên lý địa phương-toàn cục cho tính chất phân rã, tính chất tựa phân rã của nhóm đại số tuyến tính liên thông xác định trên một trường toàn cục k. Cụ thể, chúng tôi đã chứng minh được:

Định lý 2.3.1 *Cho k là trường hàm toàn cục, G là một nhóm đại số tuyến tính liên thông xác định trên k. Khi đó G phân rã trên k nếu và chỉ nếu G phân rã trên k_v, với mọi $v \in V$.*

Định lý 2.4.1 *Cho k là trường toàn cục, G là nhóm đại số tuyến tính liên thông xác định trên k. Nếu G là tựa phân rã trên k_v với mọi v thì G là tựa phân rã trên k.*

Chương 3 nghiên cứu về nguyên lý Hasse mạnh cho không gian thuần nhất của nhóm reductive liên thông trên trường toàn cục và một số ứng dụng; nguyên lý Hasse cho tính chất nâng lớp đối đồng điều. Một kết quả chính của chương là Định lý sau đây.

Định lý 3.1.4 *Cho X là một không gian thuần nhất xạ ảnh của một nhóm nửa đơn G, X và G cùng xác định cùng xác định trên một trường hàm toàn cục k. Khi đó nguyên lý Hasse là đúng cho X.*

Trong Chương 4 chúng tôi mở rộng việc nghiên cứu nguyên lý Hasse kinh điển cho trường hợp các mở rộng đại số tùy ý của các trường toàn cục và thiết lập một số nguyên lý địa phương-toàn cục cho các dạng hecmit kiểu A, kiểu C, các dạng phản hecmit kiểu D trên các trường đó. Chẳng hạn kết quả cho các dạng kiểu A là định lý sau.

Định lý 4.4.1 (Nguyên lý Hasse mạnh) *Cho k là một trường toàn cục vô hạn có đặc số khác 2, V_k là tập tất cả các chốn của k. Gọi h là dạng hecmit không suy biến ứng với phép đối hợp J loại hai trên một đại số chia được D tâm $K = k(\sqrt{a})$, $k = K^J$. Khi đó, h biểu diễn 0 trên k nếu và chỉ nếu nó biểu diễn 0 địa phương khắp nơi.*

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Trong Chương này chúng tôi nhắc lại một số kiến thức cơ sở và một số kết quả đã biết cần sử dụng trong luận án.

Mục 1.1 nhắc lại một số khái niệm tổng quát về dạng toàn phương.

Mục 1.2 trình bày lại sự phân loại các dạng toàn phương trên trường địa phương và trường toàn cục, trong đó có Định lý Hasse-Minkowski và Định lý địa phương-toàn cục dạng yếu.

Mục 1.3 và 1.4 chúng tôi nêu lại một số khái niệm về phép đối hợp, đại số đơn tâm, đại số quaternion và dạng (phản-)hecmit trên một thể D tâm K ứng với phép đối hợp J; những kết quả về sự phân loại địa phương và toàn cục cho dạng hecmit kiểu A, C, cho dạng phản hecmit kiểu D.

Mục 1.5 và 1.6 chúng tôi trình bày lại một số khái niệm vắn tắt về nhóm đại số trên một trường, một số khái niệm về chỉ dẫn của Tits và một số khái niệm liên quan

Mục 1.7 trình bày một số kí hiệu và kết quả về đối đồng điều Galois.

Chương 2

Một số tính chất phân rã và nguyên lý địa phương-toàn cục

Trong chương này chúng tôi trình bày những nghiên cứu về nguyên lý địa phương-toàn cục cho tính chất phân rã của nhóm đại số tuyến tính liên thông trên trường toàn cục. Nghiên cứu được bắt đầu từ những trường hợp đặc biệt là: nhóm tuyến tính liên thông giải được (xuyến đại số, nhóm lũy đơn); nhóm lũy đơn liên thông; tổng quát đến tính chất phân rã của nhóm đại số tuyến tính liên thông và mở rộng hơn đến tính chất tựa phân rã.

Trong cả chương này ta luôn ký hiệu k là một trường toàn cục, $V = V_k$ là tập các chốn của k.

2.1 Nguyên lý địa phương-toàn cục cho tính chất phân rã của nhóm giải được

Lớp nhóm đầu tiên ta xét là nhóm giải được. Theo kết quả của Conrad, với một k-nhóm liên thông giải được G, tồn tại duy nhất một nhóm con chuẩn tắc liên thông cực đại phân rã trên k. Nếu kí hiệu nhóm này là G_{split} thì G là phân rã trên k nếu và chỉ nếu $G = G_{split}$. Chúng tôi có kết quả sau.

Định lý 2.1.1 *Cho k là một trường toàn cục và G là một k-nhóm liên thông giải được. Khi đó G là phân rã trên k nếu và chỉ nếu G phân rã trên k_v với mọi $v \in V$.*

Chứng minh định lý này dùng một số kết quả của Tits, Conrad, Oesterlé.

2.2 Nguyên lý địa phương-toàn cục cho tính chất phân rã của nhóm reductive

Chúng ta có nguyên lý địa phương-toàn cục sau đây cho tính phân rã của nhóm liên thông reductive.

Định lý 2.2.1 *Cho k là trường toàn cục, G là k-nhóm reductive liên thông. Khi đó G là phân rã trên k nếu và chỉ nếu G cũng phân rã trên k_v, với mọi $v \in V$.*

Chứng minh được đưa ra ở đây sử dụng một số tính chất về số học và đối đồng điều của trường toàn cục. Ta đưa về các trường hợp xuyến (đã có trong mục 2,1) và nhóm hầu đơn tuyệt đối (xét riêng từng trường hợp bằng cách sử dụng sơ đồ Dynkin của G theo kí hiệu và phân loại của Tits). Trong chứng minh cần sử dụng đến các kết quả của Harder và bổ đề sau.

Bổ đề 2.2.5 *Cho k là một trường số, G là một k-nhóm hầu đơn dạng đặc biệt* E_6*,* E_7*,* E_8*. Nếu G là phân rã trên k_v với mọi v thì G là nhóm đẳng hướng trên k.*

2.3 Nguyên lý địa phương-toàn cục cho tính chất phân rã của nhóm đại số tuyến tính liên thông

Cho G là một nhóm đại số tuyến tính liên thông xác định trên một trường toàn cục k. Ta nói rằng G được là *phân rã trên k* (hay *k-phân rã*), nếu căn lũy đơn $R_u(G)$ xác định và phân rã trên k và nhóm reductive $G/R_u(G)$ xác định và phân rã trên k. Khái niệm về sự phân rã của G mà chúng tôi đưa ra, được kết hợp từ khái niệm phân rã của nhóm giải được và nhóm reductive. Với định nghĩa đó, nguyên lý Hasse cho tính chất phân rã cũng được thỏa mãn trên lớp nhóm này.

Định lý 2.3.1 *Cho k là một trường toàn cục và G là một k-nhóm đại số tuyến tính liên thông. Giả sử G phân rã trên k_v với mọi chốn v của k. Khi đó G cũng phân rã trên k.*

2.4 Nguyên lý địa phương-toàn cục cho tính chất tựa phân rã của nhóm đại số tuyến tính liên thông

Tiếp nối việc nghiên cứu nguyên lý địa phương - toàn cục cho tính phân rã của nhóm đại số tuyến tính liên thông, chúng tôi khảo sát nguyên lý địa phương - toàn cục cho tính chất tựa phân rã của nhóm đại số tuyến tính liên thông. Nhắc lại rằng, một k-nhóm đại số tuyến tính liên thông G là tựa phân rã trên k nếu $R_u(G)$ xác định trên k và nhóm reductive $G/R_u(G)$ có một nhóm con Borel xác định trên k.

Một câu hỏi tự nhiên được đặt ra:

Với nhóm đại số tuyến tính liên thông G là tựa phân rã trên k_v với mọi v, liệu rằng G có tựa phân rã trên k?

Chúng tôi có câu trả lời trong định lý sau đây.

Định lý 2.4.1 *Cho k là trường toàn cục, G là nhóm đại số tuyến tính liên thông xác định trên k. Nếu G là tựa phân rã trên k_v với mọi v thì G là tựa phân rã trên k.*

Để chứng minh định lý này, chúng tôi đưa về chứng minh cho trường hợp G là k-nhóm hầu đơn tuyệt đối và sử dụng các kết quả của J.Tits (1966), G.Harder (1967) và N.Q.Thắng (2008).

Chương 3

Nguyên lý Hasse cho không gian thuần nhất trên trường toàn cục

3.1 Nguyên lý Hasse cho không gian thuần nhất xạ ảnh. Chứng minh thứ nhất

Trong mục này chúng tôi chứng minh kết quả sau đây.

Định lý 3.1.4 *Cho X là một không gian thuần nhất xạ ảnh của một nhóm nửa đơn G, X và G cùng xác định trên một trường hàm toàn cục k. Khi đó nguyên lý Hasse được thỏa mãn trên X.*

Kết hợp một định lý của Harder với Định lý 3.1.3 trên ta được kết quả sau.

Định lý 3.1.5 *Cho k là một trường toàn cục, G là một nhóm đại số tuyến tính liên thông, giả sử G là reductive nếu $char.k > 0$ và X là một không gian thuần nhất xạ ảnh của G. Khi đó nguyên lý Hasse được thỏa mãn trên X.*

Chứng minh của Định lý 3.1.5 được đưa về chứng minh kết quả sau.

Mệnh đề 3.1.6 *Cho G là một nhóm hầu đơn xác định trên một trường toàn cục k. Nếu G có một k_v-nhóm con parabolic P_v kiểu $\Theta = \Omega_{i_1} \cup \ldots \cup \Omega_{i_s}$ với mọi chốn v của k, thì G cũng có một k-nhóm con parabolic P kiểu $\Theta = \Omega_{i_1} \cup \ldots \cup \Omega_{i_s}$.*

Chú ý.

(1) Chứng minh của Định lý 3.1.5 ở trên cho trường hợp trường số là một chứng minh mới của kết quả cổ điển của Harder.

(2) Định lý 3.1.5 đã được chứng minh bởi Colliot-Thélène, Gille và Parimala cho những trường k có kiểu hình học.

3.2 Chứng minh thứ hai của Định lý 3.1.5

Trong mục này chúng tôi đưa một chứng minh khác cho Định lý 3.1.4, cho trường toàn cục với đặc số bất kỳ (không sử dụng phân loại của Tits). Nó dựa trên các kết quả về luật thuận nghịch đối với đối đồng điều bậc một H^1 và lý thuyết của Kottwitz (1984, 1986).

Trước hết, chúng ta nhắc lại về luật thuận nghịch. Kí hiệu Br(.) là nhóm Brauer của (.). Định lý nổi tiếng Albert - Hasse - Brauer - Noether nói rằng có dãy khớp

$$0 \to \mathrm{Br}(k) \xrightarrow{j} \bigoplus_v \mathrm{Br}(k_v) \xrightarrow{\sum inv_v} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to 0,$$

trong đó inv_v ký hiệu ánh xạ bất biến Hasse với mỗi v. Tính khớp tại $Br(k)$ (tức là tính đơn ánh của j) đã được biết như nguyên lý Hasse đối với các nhóm Brauer. Và tính khớp tại $\bigoplus_v \mathrm{Br}(k_v)$ được biết đến như "luật thuận nghịch" đối với đại số đơn tâm trên k. Ta cũng có thể viết dãy khớp trên thành

$$0 \to \mathrm{H}^2_{flat}(k, \mathbf{G}_m) \to \bigoplus_v \mathrm{H}^2_{flat}(k_v, \mathbf{G}_m) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to 0.$$

Một câu hỏi được đặt ra là có hay không luật thuận nghịch cho H^n đối với nhóm đại số tuyến tính xác định trên trường toàn cục. Chính xác hơn câu hỏi được đặt ra là, nếu G là một nhóm đại số tuyến tính giao hoán xác định trên một trường toàn cục k, với số nguyên n cho trước, có tồn tại hay không một dãy khớp các nhóm giao hoán

$$0 \to Ш^n(G) \to \mathrm{H}^n_{flat}(k, G) \to \prod_v \mathrm{H}^n_{flat}(k_v, G) \to \mathcal{A}_G,$$

với $\mathcal{A}_G$ là một nhóm giao hoán phụ thuộc hàm tử vào G. Trong trường hợp G không giao hoán, câu hỏi đặt ra là có tồn tại hay không một dãy khớp các tập điểm

$$0 \to Ш^1(G) \to \mathrm{H}^n_{flat}(k, G) \to \prod_v \mathrm{H}^n_{flat}(k_v, G) \to \mathcal{A}_G,$$

với tập điểm $\mathcal{A}_G$ phụ thuộc hàm tử vào G.

Kottwitz đã đưa ra câu trả lời cho câu hỏi trên. Cụ thể, với mỗi nhóm liên thông reductive G xác định trên một trường địa phương hoặc trường toàn cục, Kottwitz đã đưa ra một nhóm, được ký hiệu $\mathcal{A}(G)$ và ông đã thiết lập luật thuận nghịch cho $\mathrm{H}^1_{flat}(k, G)$ tương ứng với $\mathcal{A}(G)$ trong trường hợp trường số (1986), (và trong trường hợp trường hàm toàn cục kết quả này được thiết lập bởi N.Q.Thắng (2011)), và đồng thời các tác giả cũng chứng minh rằng ta có đẳng cấu chính tắc $\mathcal{A}(G) \cong Pic(G)^D = \mathrm{Hom}(Pic(G), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, (nhóm đối ngẫu theo Pontragin của $Pic(G)$).

Chứng minh thứ hai của Định lý 3.1.4 được đưa về chứng minh mệnh đề tương đương sau.

Mệnh đề 3.2.1 *Cho $\bar{G}^q$ nhóm phụ hợp nửa đơn tựa phân rã xác định trên k, P là một k-nhóm con parabolic của $\bar{G}^q$. Giả sử một phần tử $x \in \mathrm{H}^1_{flat}(k, \bar{G}^q)$ có địa phương hóa tại v thuộc vào ảnh của ánh xạ tự nhiên*

$$\mathrm{H}^1_{flat}(k_v, P) \to \mathrm{H}^1_{flat}(k_v, \bar{G}^q)$$

với mọi $v \in V$. Khi đó x thuộc vào ảnh của $\mathrm{H}^1_{flat}(k, P)$ trong $\mathrm{H}^1_{flat}(k, \bar{G}^q)$.

Để chứng minh Mệnh đề 3.2.1, ta sử dụng các bổ đề sau.

Bổ đề 3.2.2 *Cho G là một nhóm nửa đơn xác định trên k, S là một k-xuyến phân rã. Khi đó*
(1) Nếu P là một k-nhóm con parabolic của G với một k-nhóm Levi $Z_G(S)$, thì $\mathrm{H}^1_{flat}(k, P) \to \mathrm{H}^1_{flat}(k, G)$ là đơn ánh.
(2) Nếu k là một trường toàn cục và G thỏa mãn nguyên lý Hasse về đối đồng điều, thì P và $Z_G(S)$ cũng vậy.

Bổ đề 3.2.3 *Cho G là một k-nhóm nửa đơn, P là một k-nhóm con parabolic của G, $P = M.R_u(P)$ là một phân tích Levi của P xác định trên k. Khi đó các ánh xạ tự nhiên $M \to P$, $P \to G$ và $M \to G$ cảm sinh các đơn ánh $\mathcal{A}(M) \to \mathcal{A}(P)$, $\mathcal{A}(P) \to \mathcal{A}(G)$ và $\mathcal{A}(M) \to \mathcal{A}(G)$.*

Bổ đề 3.2.4 (R.E. Kottwit (1986), N.Q.Thang(2011) *Cho k là một trường toàn cục, G là một nhóm liên thông reductive xác định trên k. Khi đó tồn tại một dãy khớp*

$$0 \to Ш^1(G) \to \mathrm{H}^1_{flat}(k, G) \to \oplus_v \mathrm{H}^1_{flat}(k_v, G) \overset{\Sigma_G}{\to} \mathcal{A}(G),$$

có tính hàm tử trong G.

3.3 Một số áp dụng của Định lý 3.1.5

Tiếp theo là một số áp dụng của nguyên lý địa phương-toàn cục liên quan đến hạng tương đối (chiều của xuyến con phân rã cực đại) của một nhóm liên thông reductive G xác định trên trường toàn cục k.

Gọi T là một k-xuyến cực đại của G, T_s là một xuyến con cực đại k-phân rã của T, khi đó $T = T_aT_s$ là tích hầu trực tiếp của một k-xuyến không đẳng hướng T_a của T với T_s. Đặt $s := \dim(T_s), a := \dim(T_a)$ và $r := rank_k(G)$ là k-hạng của G, khi đó $n := s + a = \dim(T)$ là hạng của G và ta nói rằng T có dạng (a, s). Rõ ràng là $r \geq s$. Với mỗi chốn v của k, ký hiệu $r_v := rank_{k_v}(G)$ thì ta có $r_v \geq r$ với mọi v. Ta có những câu hỏi liên quan đến r_v:

(a) *Liệu rằng với số nguyên không âm c và với mọi v, ta có $r_v = c$, có suy ra được $r = c$?*

(b) *Nếu có $r_v > 0$ với mọi v có suy ra $r > 0$?*

(c) *Nếu k là một trường toàn cục và nếu G có k_v-xuyến cực đại dạng (a, s) tại mọi chốn v của k, G có k-xuyến cực đại dạng (a, s)?*

(d) *Có thể xảy ra đẳng thức $min_v\ r_v = r$ không?*

Chú ý 3.3.1 Có thể nói rằng những câu hỏi này liên quan mật thiết đến những kết quả trong mục trước. Chẳng hạn, nếu G có một xuyến cực đại T dạng $(0, n)$ trên trường k, thì G phân rã trên k. Do đó ta có câu trả lời khẳng định trong trường hợp này.

Định lý 3.3.2 *Cho k là một trường toàn cục, G là một k-nhóm hầu đơn tuyệt đối, c là một số nguyên không âm.*
(i) Nếu $r_v = c$ với mọi v, thì $r = c$.
(ii) Cho G có sơ đồ Dynkin khác với ${}^1\mathrm{A}_n$, hoặc ${}^1\mathrm{E}_6$ (và k là một trường số thực). Với mỗi chốn v của k, ký hiệu $r_v := rank_{k_v}(G)$. Nếu $r_v > 0$ với mọi v thì $r > 0$.
(iii) Tồn tại trường toàn cục k và những k-nhóm hầu đơn dạng ${}^1\mathrm{A}_n$ hoặc ${}^1\mathrm{E}_6$ mà không thỏa mãn nguyên lý địa phương-toàn cục đối với tính đẳng hướng trên k.

3.4 Nguyên lý Hasse cho các không gian thuần nhất chính

Xét một cấu xạ $G \overset{\alpha}{\to} H$ giữa các k-nhóm đại số. Khi đó ta có ánh xạ $\mathrm{H}^1(k, G) \overset{\alpha_*}{\to} \mathrm{H}^1(k, H)$. Ta nói một lớp đẳng cấu của không gian thuần nhất $[P] \in \mathrm{H}^1(k, H)$ được nâng lên thành lớp đẳng cấu của không gian thuần nhất $[Q] \in \mathrm{H}^1(k, G)$ nếu $[P] = \alpha^*([Q])$. Khi đó ta còn nói lớp đối đồng điều $[P] \in \mathrm{H}^1(k, H)$ được *nâng lên tới* $\mathrm{H}^1(k, G)$. Trong mục này chúng tôi trình bày kết quả về nguyên lý địa phương- toàn cục cho tính chất nâng các không gian thuần nhất chính. Ta kí hiệu H^i_{ab} là nhóm đối đồng điều aben bậc i của G.

Định nghĩa 3.4.1 *Nếu với mọi nhóm G liên thông reductive ta đều có Δ là toàn ánh, thì k được gọi (theo C.D. González-Avilés) là trường (kiểu) Douai.*

Chú ý 3.4.2 Tất cả các trường địa phương và trường toàn cục đều là trường kiểu Douai.

Định lý 3.4.3 *Cho k là một trường kiểu Douai có chiều đối đồng điều Galois ≤ 2 thỏa mãn $\mathrm{H}^1_{flat}(k, H) = 0$ với mọi k-nhóm đơn liên nửa đơn liên thông H. Giả sử $1 \to G_1 \to G_2 \xrightarrow{\pi} G_3 \to 1$ là một dãy khớp các k-nhóm liên thông reductive. Khi đó một lớp đối đồng điều $p \in \mathrm{H}^1_{flat}(k, G_3)$ có thể nâng lên tới $\mathrm{H}^1_{flat}(k, G_2)$ nếu và chỉ nếu $ab^1_{G_3}(p) \in \mathrm{H}^1_{ab}(k, G_3)$ có thể nâng lên tới $\mathrm{H}^1_{ab}(k, G_2)$. Đặc biệt, ánh xạ $\mathrm{H}^1_{flat}(k, G_2) \to \mathrm{H}^1_{flat}(k, G_3)$ là toàn ánh nếu và chỉ nếu ánh xạ $\mathrm{H}^1_{ab}(k, G_2)) \to \mathrm{H}^1_{ab}(k, G_3))$ là toàn ánh.*

Hệ quả 3.4.4 *Với giả thiết như trong Định lý trên, nếu ta giả sử thêm rằng $\mathrm{H}^2_{flat}(k, G_1^{tor}) = 0$ thì ánh xạ $\mathrm{H}^1_{flat}(k, G_2) \to \mathrm{H}^1_{flat}(k, G_3)$ là toàn ánh.*

Định lý sau đây là nguyên lý địa phương- toàn cục cho tính chất nâng các lớp đối đồng điều, và đây là một mở rộng của kết quả của Borovoi (1993) cho trường số sang trường hợp trường hàm toàn cục.

Định lý 3.4.5 *Cho k là một trường hàm toàn cục, V là tập tất cả các chốn của k. Giả sử $1 \to G_1 \to G_2 \xrightarrow{\pi} G_3 \to 1$ là một dãy khớp các k-nhóm liên thông reductive. Giả sử rằng $Ш^2(G_1^{tor}) = 0$. Khi đó mỗi lớp đối đồng điều $p \in \mathrm{H}^1_{flat}(k, G_3)$ nâng địa phương khắp nơi (tức là được nâng tới một lớp thuộc $\mathrm{H}^1_{flat}(k_v, G_2)$) với mọi $v \in V$, cũng được nâng toàn cục.*

Từ đó ta có hệ quả sau đây.

Hệ quả 3.4.6 *Cho k là một trường hàm toàn cục, V là tập tất cả các chốn của k. Giả sử $1 \to G_1 \to G_2 \xrightarrow{\pi} G_3 \to 1$ là một dãy khớp các k-nhóm liên thông reductive. Giả sử $dim(G_1^{tor}) \leq 1$). Khi đó mỗi lớp đối đồng điều $p \in \mathrm{H}^1_{flat}(k, G_3)$ nâng địa phương khắp nơi (tức là được nâng tới một lớp thuộc $\mathrm{H}^1_{flat}(k_v, G_2)$) với mọi $v \in V$, cũng được nâng toàn cục.*

Chương 4

Nguyên lý Hasse trên trường toàn cục vô hạn cho các dạng

Mục tiêu của chương này là nghiên cứu nguyên lý Hasse (kinh điển) trên các mở rộng đại số vô hạn của trường toàn cục. Cụ thể chúng ta sẽ mở rộng một số nguyên lý Hasse kinh điển cho trường hợp mở rộng đại số vô hạn của trường toàn cục. Ta cần chú ý rằng các kết quả số học nhận được có thể rất khác nhau phụ thuộc vào trường mà ta xem xét. Chẳng hạn, nếu k là bao đóng đại số của một trường toàn cục thì phần lớn các kết quả về nguyên lý địa phương- toàn cục là hiển nhiên.
Chú ý rằng, mối quan hệ *toàn cục* $\leftrightarrow$ *các bao đầy đủ* trong bài toán kinh điển ở đây được thay bởi mối quan hệ *toàn cục* $\leftrightarrow$ *các địa phương hóa*. Ở đây, với một chốn v của một mở rộng đại số vô hạn k của một trường toàn cục L, trường địa phương hóa tương ứng với v là một trường con $k(v)$ chứa trong bao đầy đủ k_v của k tại v (xem định nghĩa ở dưới). Để phân biệt hai cách tiếp cận, nguyên lý thể hiện mối quan hệ *toàn cục* $\leftrightarrow$ *các bao đầy đủ* được gọi là *nguyên lý Hasse kinh điển*, còn nguyên lý thể hiện qua mối quan hệ *toàn cục* $\leftrightarrow$ *các địa phương hóa* ta sẽ gọi đơn giản là *nguyên lý Hasse*.

Kết quả chính của chương này là thiết lập một số nguyên lý địa phương-toàn cục cho các dạng hecmit (phản hecmit) trên các mở rộng đại số vô hạn của trường toàn cục.

4.1 Dạng toàn phương trên trường địa phương hóa và toàn cục vô hạn

Trường địa phương hóa

Cho F là một trường toàn cục. Ta gọi một mở rộng đại số vô hạn k của F là một *trường toàn cục vô hạn.* Với cặp k, F như vậy, cho v là một định giá của k và k_v là trường đầy đủ của k tại v. Có khá nhiều kết quả về số học của trường toàn cục không còn đúng trên các mở rộng đại số vô hạn. Một trong những trở ngại chính là với mở rộng hữu hạn L của F chứa trong k, với một chốn w trên trường L có thể có vô hạn mở rộng tới k.

Các hạn chế của v lên các mở rộng trung gian hữu hạn L của F ($F \subset L \subset k$) sinh ra các bao đầy đủ L_v chứa trong bao đầy đủ k_v và ký hiệu $\mathcal{C}$ là tập tất cả các L_v như vậy. Ta nói rằng (theo Neukirch) một trường k' gọi là một *địa phương hóa của k tại v*, nếu k' là giới hạn thuận của tất cả các mở rộng thuộc $\mathcal{C}$ và ký hiệu nó bởi $k(v)$. Ta gọi các trường như vậy là các *trường địa phương hóa.*

Ta có thể mô tả $k(v)$ trong bổ đề sau.

Bổ đề 4.1.1 *Đặt $k = \cup_n L_n$, là hợp của một dãy tăng những mở rộng hữu hạn của F, tất cả đều chứa trong k.*

$$F = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_n \subset \cdots \subset k,$$

và v là một chốn của k. Cố định một phép nhúng $k \hookrightarrow k_v$. và đặt $v_n = v|_{L_n}$ là hạn chế của v đến L_n. Khi đó $k(v)$ là hợp của một dãy tăng các mở rộng con hữu hạn trên F_v

$$F_v = L_{0,v_0} \subset L_{1,v_1} \subset \cdots \subset L_{n,v_n} \subset \cdots \subset k_v.$$

Đặc biệt, nếu v là chốn thực (tương ứng phức), thì $k(v) = k_v \simeq \mathbb{R}$ (tương ứng $k(v) = k_v \simeq \mathbb{C}$).

Phân loại địa phương của các dạng toàn phương trên các trường địa phương (vô hạn) hoặc tựa hữu hạn

Cho k là một mở rộng đại số vô hạn của một trường hữu hạn (hoặc địa phương) F có đặc số khác 2, f là một dạng toàn phương chính quy trên k với chiều n (tức là số biến là n). Dựa vào kết quả đã biết của Springer, chúng tôi có kết quả sau đây.

Định lý 4.1.4 (*a*) *Cho F là mở rộng đại số trên một trường hữu hạn có đặc số khác 2. Khi đó, mỗi dạng toàn phương có hạng $n \geq 3$ đều là đẳng hướng trên F. Vì vậy, hai dạng toàn phương trên F là tương đương trên F nếu chúng có cùng chiều và cùng định thức.*

(*b*) *Cho k là một trường địa phương hóa ứng với một định giá phi Acsimet của một trường toàn cục vô hạn, κ là trường thặng dư của k có đặc số $\neq 2$. Khi đó mọi dạng toàn phương có hạng $n \geq 5$ đều là đẳng hướng trên k.*

4.2 Định lý Hasse về chuẩn và Định lý Hasse-Brauer-Noether

Cho k là một trường toàn cục vô hạn, V_k là tập tất cả các chốn của k. Ở đây chúng tôi khảo sát hai nguyên lý địa phương-toàn cục kinh điển của Lý thuyết Số trên các trường toàn cục, gọi là Định lý Hasse về chuẩn và Định lý Brauer-Hasse-Noether. Chúng ta có mở rộng sau đây của Định lý Hasse về chuẩn (cho dạng toàn phương).

Mệnh đề 4.2.1 *Cho k là một trường toàn cục vô hạn.*
(1) *Đặt $K = k(\sqrt{a})$ là một mở rộng bậc hai của k. Khi đó một phần tử $b \in k$ là chuẩn của một phần tử thuộc K nếu và chỉ nếu địa phương khắp nơi b cũng vậy.*
(2) *Cho $D = (a, b/k)$ là một đại số quaternion trên k. Khi đó D là tầm thường nếu và chỉ nếu nó là tầm thường địa phương khắp nơi.*

Định lý Brauer-Hasse-Noether là một trong những kết quả nổi tiếng của lý thuyết trường lớp toàn cục. Một trong các phát biểu như sau.

Định lý 4.2.5 *Cho k là một trường toàn cục.*
(1) *Nếu A là một đại số đơn tâm chiều n trên tâm k của nó thì với hầu hết chốn $v \in V_k$, A_v là tầm thường, tức là $A_v \simeq M_n(k_v)$.*
(2) *Ta có dãy khớp sau*

$$0 \to Br(k) \to \oplus_v Br(k_v) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0.$$

Ở đây chúng tôi sẽ chứng minh một phần mở rộng của định lý này cho trường hợp trường toàn cục vô hạn. Chúng tôi chứng minh định lý bằng cách áp dụng Bổ đề của König.
Định lý 4.2.6 (Nguyên lý Hasse cho nhóm Brauer) *Cho k là một trường toàn cục vô hạn. Khi đó đồng cấu chính tắc $Br(k) \to \prod_v Br(k(v))$ là đơn ánh.*

Tiếp theo ta xét các đại số đơn tâm với phép đối hợp trên các trường địa phương hoặc toàn cục vô hạn. Từ các kết quả đã chứng minh ta suy ra kết quả sau.

Mệnh đề 4.2.8 *Cho k là một trường địa phương hoặc toàn cục vô hạn. Nếu A là một k-đại số đơn tâm với phép đối hợp không tầm thường loại 1 thì hoặc là $A \simeq M_n(D)$, với D là một đại số quaternion chia được, hoặc A là tầm thường trên k.*

Nhận xét 4.2.9

(1) Sẽ rất thú vị nếu các kết quả tương tự cho đại số đơn tâm trên các trường địa phương và toàn cục vẫn đúng trên các trường địa phương và toàn cục vô hạn. Tuy nhiên, có những kết quả không còn đúng, và có lẽ cần có một nghiên cứu hệ thống về vấn đề này.
(2) Nếu $char.k > 0$, và với một trường toàn cục $L \subset k$ mà mở rộng k/L là thuần túy không tách thì ta biết rằng mỗi chốn $v \in V_L$ có duy nhất một mở rộng tới k, vậy mỗi k-đại số đơn tâm là tầm thường trừ một số hữu hạn các chốn.

Tuy vậy, ta có kết quả sau.

Mệnh đề 4.2.10 *Không phải mọi đại số đơn tâm trên một trường toàn cục vô hạn là hầu hết tầm thường địa phương khắp nơi* (*trên* $k(v)$) (*nghĩa là tầm thường trừ một số hữu hạn chốn*).

4.3 Lý thuyết địa phương của các dạng hecmit và phản hecmit

Gọi K là một trường hensel với định giá rời rạc v, R vành nguyên của K (đối với v) với phần tử đơn trị hóa π, ideal cực đại $\mathfrak{p} = (\pi)$ và trường thặng dư $F := R/\mathfrak{p}$. Gọi V là một không gian vectơ trái hữu hạn chiều trên một đại số chia được D tâm K và h là một dạng hecmit đối với phép đối hợp J của D. Đặt $D^{\pm} := \{x \in D \mid x^J = \pm x\}$. Ta vẫn ký hiệu v là mở rộng (duy nhất) của định giá v tới D, và ký hiệu R_D (tương ứng $\mathfrak{p}_D$) là vành nguyên (tương ứng iđêan cực đại) của D. Gọi $\bar{D} := R_D/\mathfrak{p}_D$ là đại số thặng dư tương ứng. Cho f là một dạng (phản-) hecmit không suy biến đối với phép đối hợp J trên D. Đặt K_0 là tập các phần tử J-cố định của K. Với mỗi phần tử J-đối xứng (tương ứng J-phản đối xứng) $d \in D^*$, ta đặt $J_d : x \mapsto dx^J d^{-1}$. Khi đó J_d cũng là một phép đối hợp trên D. Nếu J là loại một (hoặc tương ứng loại hai), thì $K = K_0$ (tương ứng K/K_0 là một mở rộng bậc hai tách được) và J cảm sinh một phép đối hợp $\bar{J}$ trên $\bar{D}$. Ta có hai trường hợp ngoại lệ:

1) K/K_0 là một mở rộng bậc hai rẽ nhánh, J là phép đối hợp loại hai và $D = K$;
2) $D = (a, \pi/K)$ là một đại số quaternion, a là đơn vị, $K = K_0$, J là phép đối hợp loại một và $\dim(D^+) = 1$.

Sau đây chúng tôi trình bày sự phân loại cho các dạng trên các trường địa phương hóa.

I. Lý thuyết địa phương cho các dạng kiểu A

Chúng tôi bắt đầu với định lý phân loại cho các dạng kiểu A trên các trường địa phương, mở rộng kết quả M. Kneser tới trường hợp các mở rộng vô hạn của các trường địa phương, chúng tôi có kết quả sau.

Định lý 4.3.4 *Cho k là một trường địa phương hóa phi Acsimet với trường thặng dư có đặc số khác 2, D là một k-đại số chia được tâm K và phép đối hợp J loại hai không tầm thường trên K ($k = K^J$) và h là một dạng hecmit không suy biến hạng n ứng với phép đối hợp J và giá trị trong D. Khi đó $D = K$, vì vậy h là tương đương Morita với một dạng toàn phương chiều $2n$ trên k.*

Hệ quả 4.3.5 *Với giả thiết như trong Định lý 4.3.4, mọi dạng hecmit h chiều $n \geq 3$ là đẳng hướng trên k.*

II. Lý thuyết địa phương cho các dạng kiểu C

Cho D là một đại số chia được tâm k, f là một dạng J-hecmit không suy biến nhận giá trị trong D, trong đó J là phép đối hợp loại một của D. giả sử rằng J có kiểu đối xứng, tức là không gian D^+ các phần tử J-đối xứng của D có chiều $d(d-1)/2$, với $d = deg(D)$. Bây giờ ta giả sử k là một trường địa phương hóa phi Acsimet của một trường toàn cục vô hạn với trường thặng dư có đặc số khác 2. Cho f là một dạng hecmit không suy biến có chiều n nhận giá trị trong một đại số chia được xác định trên k. Khi đó, ta biết rằng $f, D, \ldots$ được xác định trên một trường địa phương phi Acsimet (hữu hạn) L. Ký hiệu d là định thức của f, tức là ảnh trong k^*/k^{*2} của định thức của ma trận biểu diễn f. Chúng ta có kết quả sau.

Mệnh đề 4.3.6 *Cho k là một trường địa phương hóa phi Acsimet của một trường toàn cục vô hạn với trường thặng dư có đặc số khác 2, f là một dạng hecmit không suy biến nhận giá trị trong một đại số quaternion chia được D với phép đối hợp chuẩn J trên k. Khi đó, nếu $\dim(f) \geq 2$, thì f là đẳng hướng.*

III. Lý thuyết địa phương cho các dạng kiểu D

Cho k là một trường địa phương hóa phi Acsimet của một trường toàn cục vô hạn với trường thặng dư có đặc số khác 2. D là một đại số chia được tâm L, f là một dạng phản hecmit không suy biến nhận giá trị trong D ứng với phép đối hợp loại một J của D. Giả sử rằng J là dạng trực giao, (tức là không gian D^+ các phần tử $J-$đối xứng của D có chiều $d(d-1)/2$, với $d = deg(D)$). Vì D có phép đối hợp loại một, và có cấp 2 trong nhóm Brauer $Br(k)$, nên chỉ số của D trùng với cấp của nó (theo Mệnh đề 4.2), vậy D là một đại số quaternion trên k. Giả sử rằng J là phép đối hợp chuẩn của D. Khi đó ta có các kết quả sau đây tương tự kết quả của Tsukamoto.

Định lý 4.3.7 *Cho k là một trường địa phương hóa phi Acsimet với trường thặng dư có đặc số khác 2, h là một dạng phản hecmit không suy biến nhận giá trị trong một đại số quaternion chia được $D = (a, b/k)$ với phép đối hợp chuẩn J trên k. Khi đó nếu* $\dim(h) \geq 4$, *thì h là đẳng hướng.*

Định lý 4.3.8 *Cho k là một trường địa phương hóa phi Acsimet có đặc số khác 2, D là một đại số quaternion chia được với phép đối hợp chuẩn J trên k, h là một dạng phản hecmit không suy biến chiều n nhận giá trị trong D ứng với J. Giả sử thêm rằng trường thặng dư có đặc số khác 2. Khi đó ta có các khẳng định sau.*
(1) *Với mỗi $d \in k^*, d \not\equiv -1 (mod.k^{*2})$ luôn tồn tại một dạng phản hecmit có định thức là d. Nếu $n =$ $\dim(h) > 1$, với mỗi $d \in k^*$ có một dạng chiều n có định thức $d \in k^*$.*
(2) *Nếu $n = 1$, lớp đẳng cự của h được xác định bởi định thức $det(h)$.*
Nếu $n = 2$, h là đẳng hướng nếu và chỉ nếu $det(h) = 1(mod.k^{*2})$.
(3) *Các dạng phản hecmit không suy biến là đẳng cự nếu và chỉ nếu chúng có cùng chiều và cùng định thức.*
(4) *Nếu $n = 3$, h là không đẳng hướng nếu và chỉ nếu $det(h) = -1(mod.k^{*2})$.*

4.4 Nguyên lý Hasse và phân loại toàn cục

Trong mục này chúng tôi chứng minh một số nguyên lý Hasse mạnh cho các dạng trên trường toàn cục vô hạn.

Dạng kiểu A

Định lý 4.4.1 (Nguyên lý Hasse mạnh). *Cho k là một trường toàn cục vô hạn có đặc số khác 2, V_k là tập tất cả các chốn của k. Gọi h là dạng hecmit không suy biến ứng với phép đối hợp J loại hai trên một đại số chia được D tâm $K = k(\sqrt{a})$, $k = K^J$. Khi đó, h biểu diễn 0 trên k nếu và chỉ nếu nó biểu diễn 0 địa phương khắp nơi.*

Chứng minh định lý dựa vào kết quả sau đây.

Bổ đề 4.4.2 *Cho k là một trường toàn cục có đặc số khác 2, D là một đại số chia* *được tâm $K = k(\sqrt{a})$ và một phép đối hợp J loại 2, trong đó $k = K^J$. Cho h là dạng J-(phản) hecmit không suy biến nhận giá trị trong D. Nếu* $\dim(h) \geq 3$*, thì tồn tại một tập hữu hạn S những chốn của k, sao cho h là đẳng hướng trên k_v với mọi $v \notin S$.*

Dạng kiểu C

Mệnh đề 4.4.3 (Nguyên lý Hasse mạnh). *Cho k là một trường toàn cục vô hạn có đặc số khác 2, D là một đại số chia được trên k ứng với phép đối hợp J loại 1. Giả sử f là một dạng hecmit kiểu* C*không suy biến chiều n nhận giá trị trong D. Nếu f biểu diễn 0 địa phương khắp nơi thì f cũng biểu diễn 0 trên k.*

Các dạng kiểu D

Cho k là một trường toàn cục vô hạn có đặc số khác 2, h là một dạng J-phản hecmit không suy biến có kiểu D nhận giá trị trong một đại số chia được D. Ta biết rằng D là một đại số quaternion chia được tâm k và phép đối hợp chuẩn J. Trên các trường toàn cục, Kneser đã chứng minh nguyên lý Hasse mạnh cho dạng h với số chiều ≥ 3. Ta có kết quả tương tự như định lý trên khi k là trường toàn cục vô hạn.

Định lý 4.4.4 (Nguyên lý Hasse mạnh cho dạng phản hecmit). *Cho k là một trường toàn cục vô hạn có đặc số khác 2. D là một đại số quaternion chia được tâm k và phép đối hợp chuẩn J, h là một dạng J-phản hecmit không suy biến có kiểu* D *nhận giá trị trong D. Khi đó, nếu* $\dim(h) \geq 3$ *thì h thỏa mãn nguyên lý Hasse mạnh.*

Có hai chứng minh cổ điển của Định lý của Kneser trong trường hợp trường toàn cục (hữu hạn), một chứng minh do Kneser và chứng minh khác do Springer đưa ra. Cả hai chứng minh này đều dài và phức tạp. Theo định nghĩa về tính chất địa phương-toàn cục mới, chúng tôi đưa ra chứng minh thứ nhất bằng cách sử dụng các lập luận đã có trong trường hợp các dạng toàn phương và một số lập luận đã được sử dụng trong chứng minh của Springer. Chứng minh thứ hai có thể làm gần như chứng minh đã được đưa ra bởi Kneser. Chứng minh thứ nhất dựa vào bổ đề sau.

Bổ đề 4.4.5 *Giả sử k là một trường toàn cục có đặc số khác 2, D là một đại số quaternion chia được tâm k và phép đối hợp chuẩn J. Cho h là một dạng J-phản hecmit không suy biến nhận giá trị trong D. Nếu* $\dim(h) \geq 3$*, thì tồn tại tập hữu hạn S các chốn của k, để h là đẳng hướng trên k_v với mọi $v \notin S$.*

4.5 Nguyên lý Hasse yếu

Cũng giống như trong trường hợp trường toàn cục, nguyên lý Hasse yếu vẫn còn đúng cho các dạng hecmit kiểu A và C trên trường toàn cục vô hạn, cụ thể ta có kết quả sau đây:

Định lý 4.5.1 *Cho k là một trường toàn cục vô hạn có đặc số khác 2, V_k là tập các chốn của k và cho g, h hecmit không suy biến chiều n và có cùng kiểu khác với kiểu* B, D *trên một đại số chia được D ứng với phép đối hợp J (tâm K, $k = K^J$, nếu các dạng có kiểu* A). *Khi đó g và h tương đương trên k nếu và chỉ nếu chúng tương đương địa phương khắp nơi.*

Ta biết rằng trong trường hợp $n = 2$, nguyên lý Hasse mạnh (và yếu) có thể không đúng cho các dạng phản hecmit trên các trường toàn cục. Cụ thể là, nếu D là một đại số quaternion chia được trên trường toàn cục k, J là phép đối hợp chuẩn và D không phân rã tại đúng $s \geq 2$ chốn của k, thì với mỗi phần tử J-chéo (phản xứng) $\lambda \in D^*$, tồn tại đúng 2^{s-2} phần tử $\alpha \in k^*/k^{*2}$ sao cho $x^J \lambda x - \alpha y^J \lambda y$ biểu diễn 0 trên k_v địa phương khắp nơi, nhưng không biểu diễn 0 trên k. Tương tự, nguyên lý Hasse mạnh (hoặc yếu) cũng có thể không đúng cho dạng phản hecmit kiểu D trong trường hợp trường toàn cục vô hạn. Cụ thể là ta có mệnh đề sau.

Mệnh đề 4.5.2 (1) *Tồn tại một trường toàn cục vô hạn k có đặc số khác 2, một đại số quaternion chia được $D = (a, b/k)$ với phép đối hợp chuẩn J trên k sao cho D được xác định trên một trường toàn cục L (tức là, $a, b \in L$), trong đó $D \otimes K_v$ không tầm thường tại s ($s \geq 4$) chốn v của K với mọi mở rộng con hữu hạn $L \subset K \subset k$.*
(2) *Với mỗi trường k và đại số quaternion chia được D như vậy, với mỗi số tự nhiên n, tồn tại các các dạng phản hecmit g và h chiều n nhận giá trị trong D ứng với J, sao cho g và h đẳng cấu địa phương khắp nơi trên $k(v)$ nhưng không đẳng cấu trên k.*

KẾT LUẬN CỦA LUẬN ÁN

Luận án nghiên cứu nguyên lý Hasse cho nhóm đại số và các dạng toàn phương, hecmit và phản hecmit trên trường toàn cục và các mở rộng đại số vô hạn của chúng. Các kết quả chính là:

- Chứng minh nguyên lý địa phương-toàn cục cho tính chất phân rã của nhóm đại số tuyến tính liên thông trên trường toàn cục.

- Chứng minh nguyên lý địa phương-toàn cục cho tính chất tựa phân rã của nhóm đại số tuyến tính liên thông trên trường toàn cục.

- Chứng minh nguyên lý Hasse mạnh cho không gian thuần nhất của nhóm reductive liên thông trên trường hàm toàn cục, (mở rộng một kết quả đã biết của Harder).

- Chứng minh nguyên lý Hasse cho tính đẳng hướng cho một lớp rộng các nhóm hầu đơn và đưa ra phản ví dụ cho lớp nhóm hầu đơn còn lại.

- Chứng minh một số nguyên lý Hasse mạnh (theo nghĩa mới) cho các dạng (phản) hecmit trên trường toàn cục vô hạn đặc số khác 2 và đưa ra phản ví dụ đối với một số dạng hecmit.

CÁC CÔNG TRÌNH LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

1. N.T. Ngoan and N. Q. Thang(2014), *On some Hasse principle for algebraic groups over global fields*, Proc. Jap. Acad. Ser. A, v. 90, No.5 (2014), 73 - 78.

2. N.T. Ngoan and N. Q. Thang(2014), *On some Hasse principle for algebraic groups over global fields*, II, Proc. Jap. Acad. Ser. A, v. 90, No.8 (2014), 107 - 112.

3. N.T. Ngoan and N. Q. Thang(2016), *On some Hasse principle for Homogeneous Space of Algebraic Groups over Global Fields of Positive Characteristic*, Proc. of the Steklov Ins. Math, v. 292, 171-184.

4. N.T. Ngoan and N. Q. Thang(2016), *On some Hasse principles for algebraic groups over global fields*, preprint.

5. N.T. Ngoan and N. Q. Thang(2016), *On some Hasse principle for algebraic groups over infinite algebraic extensions of global fields*, preprint.

Các kết quả của luận án đã được báo cáo và thảo luận tại:

- Hội nghị Đại số-Tô pô-Hình học Toàn quốc tháng 12/2014.
- Hội nghị khoa học các thế hệ nghiên cứu sinh Viện Toán học tháng 10/2015.
- Xê mi na liên phòng Đại số Lý thuyết Số tại Viện Toán học.
- Các hội nghị đánh giá Nghiên cứu sinh của Viện Toán học, tháng 10/2011, tháng 10/2012, tháng 10/2013, tháng 10/2014, tháng 10/2015.
- Hội nghị Đại số-Hình học-Tô pô Toàn quốc tháng 11/2016.
- Xê mi na tại khoa Toán-Tin, trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.