VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM
VIỆN TOÁN HỌC

NGUYỄN HỮU SÁU

TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA HỆ ĐỘNG LỰC TUYẾN TÍNH SUY BIẾN CÓ TRỄ

Chuyên ngành: Phương trình vi phân và tích phân
Mã số: 9 46 01 03

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HÀ NỘI - 2017

Lời mở đầu

Lý thuyết ổn định các hệ phương trình vi phân là một trong những hướng nghiên cứu quan trọng, có nhiều ứng dụng trong thực tế, kĩ thuật. Các công trình nghiên cứu về lý thuyết ổn định được bắt đầu từ những năm cuối thế kỉ XIX bởi nhà toán học người Nga A. M. Lyapunov công bố và bảo vệ thành công luận án tiến sĩ có nhan đề " Bài toán tổng quát về tính ổn định của chuyển động". Trong công trình của mình A. M. Lyapunov đã nghiên cứu và tìm ra khái niệm tổng quát về tính ổn định của chuyển động, mà sau này nó đã trở thành nền móng quan trọng cho việc phân tích các hệ động lực trong toán học, cơ học, sinh thái học, kinh tế học, điều khiển tự động. Trong mười năm trở lại đây, các hệ động lực mô tả bởi các hệ phương trình suy biến có trễ nhận được nhiều sự quan tâm đặc biệt với hai lý do chính sau. Một là, các bài toán xuất phát từ thực tế thường được mô tả bởi các hệ phương trình suy biến có ứng dụng trong kinh tế (Leontief dynamic model), ứng dụng trong mạng lưới điện ([1]), trong cơ học ([3]). Hai là, hầu hết các quá trình vật lý, sinh học, hóa học, kinh tế, mạng lưới điện, lò phản ứng hạt nhân đều liên quan đến độ trễ thời gian. Không những vậy, độ trễ thời gian còn là nguyên nhân trực tiếp dẫn đến tính không ổn định và hiệu suất kém (poor performance) của các hệ động lực. Vì vậy lớp hệ phương trình có trễ đã thu hút được nhiều sự quan tâm nghiên cứu của các nhà khoa học. Do đó, giải quyết được bài toán về sự ổn định của hệ phương trình suy biến có trễ sẽ góp phần giải quyết được nhiều bài toán thực tiễn có tính ứng dụng cao.

Hệ dương là những hệ động lực mô tả bằng các hệ phương trình vi phân, phương trình rời rạc trong đó trạng thái của hệ sẽ không âm với những điều kiện ban đầu không âm. Hệ dương xuất hiện nhiều trong lĩnh vực về khoa học và công nghệ như các quá trình sinh học, hóa học, trong các mô hình dân số, trong cơ học, kinh tế học (xem [5]). Lý thuyết hệ dương liên hệ chặt chẽ với lý thuyết ma trận không âm (tức là các ma trận có phần tử trong ma trận là các số không âm), hầu hết những tính chất cơ bản của hệ dương thu được vào đầu thế kỷ XX đều dựa trên định lý Perron-Frobenius, và lý thuyết về ma trận không âm (xem [15]). Trong những năm gần đây mặc dù đạt được nhiều kết quả nghiên cứu về bài toán ổn định và ổn định hóa hệ dương có trễ thông thường, nổi bật trong số đó là các nghiên cứu của P.H.A. Ngọc [16], D. Efimov [4], D. Napp [17], E. Virnik [18], X. Liu [13]. Tuy nhiên với hệ suy biến dương, đặc biệt là hệ suy biến dương có trễ bài toán ổn định và ổn định hóa hệ dương vẫn là bài toán mang tính thời sự và nhận được nhiều sự quan tâm nghiên cứu gần đây. Với ý tưởng đó, trong luận án này, chúng tôi sử dụng phương pháp quy nạp toán học, bài toán quy hoạch tuyến tính, phân tích ma trận SVD (Singular Value Decomposition). Chúng tôi đưa hệ suy biến ban đầu về hệ mới gồm một hệ phương trình có trễ thông thường và một hệ ràng buộc đại số tương ứng. Trên cơ sở các kĩ thuật mới, chúng tôi thu được một số điều kiện cần và đủ để đảm bảo hệ suy biến có trễ là hệ dương, đồng thời thiết lập các điều kiện đủ đảm bảo tính chất ổn định của hệ suy biến dương có trễ tương ứng. Chúng tôi cũng đưa ra các điều kiện đủ cho tính ổn định hóa được dạng mũ của hệ điều khiển suy biến dương có trễ, các điều kiện được viết dưới dạng bài toán quy hoạch tuyến tính. Ngoài phần mở đầu, kết luận, danh mục các kí hiệu, danh mục các công trình khoa học của tác giả, tài liệu tham khảo, luận án gồm 3 chương như sau:

Chương 1 là chương kiến thức chuẩn bị, gồm 3 mục. Mục 1.1 giới thiệu bài toán ổn định, bài toán ổn định hóa cho hệ phương trình có trễ thông thường. Mục 1.2 giới thiệu hệ phương trình tuyến tính suy biến, công thức nghiệm cho hệ phương trình suy biến tuyến tính có trễ. Mục 1.3 nhắc lại một số bổ đề sẽ được sử dụng trong các chương sau của luận án.

Chương 2 nghiên cứu bài toán ổn định mũ và ổn định hóa được dạng mũ cho lớp hệ phương trình vi phân suy biến dương có trễ. Mục 2.1 trình bày các điều kiện cần và đủ đảm bảo hệ phương trình vi phân suy biến có trễ là hệ dương, tiếp đến là tiêu chuẩn cho tính ổn định mũ của hệ suy biến dương có trễ tương ứng. Mục 2.2 đưa ra các tiêu chuẩn cho tính ổn định hóa của hệ phương trình vi phân suy biến dương có trễ.

Chương 3 nghiên cứu bài toán ổn định mũ và ổn định hóa được dạng mũ cho lớp hệ phương trình rời rạc suy biến dương có trễ. Mục 3.1 trình bày các điều kiện cần và đủ đảm bảo hệ rời rạc suy biến có trễ là hệ dương, tiếp đến là một số điều kiện cần và đủ đảm bảo cho tính ổn định mũ của hệ suy biến dương có trễ tương ứng. Mục 3.2 đưa ra các điều kiện dưới dạng bài toán quy hoạch tuyến tính cho bài toán ổn định hóa hệ rời rạc suy biến dương có trễ.

Chương 1

Cơ sở toán học

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số khái niệm và kết quả về hệ phương trình có trễ, tìm hiểu về bài toán ổn định và ổn định hoá hệ có trễ, hệ suy biến, công thức nghiệm của hệ suy biến có trễ. Chúng tôi cũng trình bày một số mô hình hệ suy biến dương và các kết quả bổ trợ sẽ được sử dụng trong chứng minh các kết quả chính của luận án cho các chương sau. Kiến thức sử dụng trong chương này được tham khảo trong [2, 10].

1.1 Bài toán ổn định và ổn định hóa cho hệ phương trình có trễ

1.1.1 Bài toán ổn định

Trong mô tả toán học của một quá trình vật chất, một giả thuyết thường thấy là quá trình hoạt động của hệ chỉ phụ thuộc vào trạng thái hiện tại, giả thuyết này được áp dụng rộng rãi cho lớp các hệ động lực. Tuy nhiên, có những trạng thái mà giả thuyết này không còn thỏa mãn và việc sử dụng các mô hình cổ điển trong việc phân tích và thiết kế hệ thống dẫn tới một kết quả yếu, độ chính xác không cao. Trong trường hợp này, sẽ tốt hơn khi ta xem xét hoạt động của hệ dựa cả vào những thông tin trạng thái trước đó. Để mô tả một cách chính xác các quá trình này, người ta thường miêu tả chúng bằng các phương trình vi phân có trễ. Giả sử h là một số thực không âm. Ký hiệu $\mathcal{C} = C([-h,0],\mathbb{R}^n)$ và $PC([-h,0],\mathbb{R}^n)$ lần lượt là không gian các hàm liên tục và liên tục từng khúc trên đoạn $[-h,0]$, nhận giá trị trong không gian $\mathbb{R}^n$ và chuẩn của một phần tử $\phi \in \mathcal{C}$ hoặc $PC([-h,0],\mathbb{R}^n)$ được cho bởi $\|\phi\|_C = \sup_{-h\le\theta\le 0}\|\phi(\theta)\|$. Với $t_0 \in \mathbb{R}, \sigma \ge 0$ và $x \in C([t_0-h, t_0+\sigma],\mathbb{R}^n)$, hàm $x_t \in \mathcal{C}, t \in [t_0, t_0+\sigma]$, được xác định bởi $x_t(s) := x(t+s), s \in [-h,0]$. Như vậy, x_t là đoạn quỹ đạo trên đoạn $[t-h,t]$ của hàm $x(.)$ với chuẩn trong $\mathcal{C}$ được xác định bởi $\|x_t\| := \sup_{s\in[-h,0]}\|x(t+s)\|$. Cho $D \subset \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C}$ là một tập mở và hàm $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Phương trình vi phân có trễ trên D

là phương trình dạng

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \quad t \geq 0. \tag{1.1}$$

Phương trình này kí hiệu là $RFDE(f)$. Một hàm $x(t)$ được gọi là nghiệm của phương trình vi phân có trễ (1.1) trên $[t_0 - h, t_0 + \sigma)$ nếu tồn tại $t_0 \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ sao cho $x(t) \in C([t_0 - h, t_0 + \sigma), \mathbb{R}^n), (t, x_t) \in D$ và $x(t)$ thỏa mãn phương trình (1.1) với mọi $t \in [t_0, t_0 + \sigma)$. Cho trước $t_0 \in \mathbb{R}, \phi \in \mathcal{C}$, ta nói $x(t_0, \phi, f)$ là một nghiệm của phương trình (1.1) với hàm điều kiện ban đầu ϕ tại t_0 hoặc đơn giản là một nghiệm đi qua điểm (t_0, ϕ) nếu tồn tại một số $\sigma > 0$ sao cho $x(t_0, \phi, f)$ là nghiệm của hệ (1.1) trên $[t_0 - h, t_0 + \sigma)$ và $x_{t_0} = \phi$. Khi t_0 đã rõ, để cho đơn giản trong cách viết, từ nay về sau ta ký hiệu $x(t, \phi)$ thay cho $x(t_0, \phi, f)(t)$.

Định lý 1.1. (Định lý tồn tại nghiệm địa phương, [8]) *Giả sử Ω là một tập mở của $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$ và $f^0 \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Nếu $(t_0, \phi) \in \Omega$ thì tồn tại nghiệm của phương trình $RFDE(f^0)$ đi qua điểm (t_0, ϕ). Tổng quát hơn, nếu $W \subset \Omega$ là tập compact và $f^0 \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ cho trước, thì tồn tại một lân cận $V \subset \Omega$ của W sao cho $f^0 \in C^0(V, \mathbb{R}^n)$, tồn tại một lân cận $U \subset C^0(V, \mathbb{R}^n)$ và $\alpha > 0$ sao cho với mọi $(t_0, \phi) \in W, f \in U$, tồn tại nghiệm $x(t_0, \phi, f)$ của phương trình $RFDE(f)$ đi qua điểm (t_0, ϕ) tồn tại trên $[t_0 - h, t_0 + \alpha]$.*

Định lý 1.2. (Định lý tồn tại duy nhất nghiệm địa phương, [8]) *Giả sử Ω là một tập mở của $\mathbb{R} \times \mathcal{C}, f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ liên tục và $f(t, \phi)$ là Lipschitz theo ϕ trong mỗi tập con compact của Ω. Nếu $(t_0, \phi) \in \Omega$ thì tồn tại duy nhất nghiệm đi qua điểm (t_0, ϕ) của phương trình $RFDE(f)$.*

Định lý 1.3. (Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm toàn cục, [10]) *Cho $f : [0, +\infty) \times PC([-h, 0], \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ thỏa mãn các điều kiện sau:*

(i) Với bất kỳ $H > 0$, tồn tại $M(H) > 0$ sao cho

$$\|f(t, \phi)\| \leq M(H), \quad (t, \phi) \in [0, +\infty) \times PC([-h, 0], \mathbb{R}^n) \quad \text{và} \quad \|\phi\|_C \leq H;$$

(ii) Hàm $f(t, \phi)$ là hàm liên tục theo cả hai biến trên tập $[0, +\infty) \times PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$;

(iii) Hàm $f(t, \phi)$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo biến thứ hai, tức là tồn tại hằng số Lipschitz $L(H) > 0$ sao cho

$$\|f(t, \phi_1) - f(t, \phi_2)\| \leq L(H)\|\phi_1 - \phi_2\|_C,$$

với mọi $t \geq 0, \phi_i \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n), \|\phi_i\|_C \leq H, i = 1, 2.$

(iv)

$$\|f(t, \phi)\| \leq \eta(\|\phi\|_C), \quad t \geq 0, \quad \phi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n),$$

trong đó $\eta(r), r \in [0, +\infty)$ là hàm liên tục, không giảm và sao cho với $r_0 \geq 0$ bất kỳ điều kiện sau thỏa mãn

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{r_0}^{R} \frac{dr}{\eta(r)} = +\infty.$$

Khi đó, với $t_0 \geq 0$ và $\phi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ cho trước, hệ (1.1) có duy nhất nghiệm $x(t_0, \phi, f)$ xác định trên $[t_0 - h, +\infty)$.

Định nghĩa 1.1. ([8]) Giả sử $f(t, 0) = 0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$.

- Nghiệm $x(t) = 0$ của phương trình (1.1) được gọi là ổn định nếu với bất kì $t_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$ sao cho nếu $||\phi||_C \leq \delta$ thì $||x(t; t_0, \phi)||_C \leq \varepsilon$ với $t \geq t_0$.

- Nghiệm $x(t) = 0$ của phương trình (1.1) được gọi là ổn định tiệm cận nếu nó ổn định và tồn tại $b_0 = b_0(t_0) > 0$ sao cho nếu $||\phi||_C \leq b_0$ thì $\lim_{t \to \infty} x(t; t_0, \phi) = 0$.

Trong luận án quan tâm đến tính $\alpha-$ ổn định mũ của lớp hệ phương trình vi phân có trễ nên chúng tôi nhắc lại định nghĩa sau.

Định nghĩa 1.2. ([10]) Giả sử $f(t, 0) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$ và $\alpha > 0$ cho trước. Khi đó, nghiệm $x(t) = 0$ của phương trình (1.1) được gọi là $\alpha-$ ổn định mũ nếu tồn tại hằng số $M > 0$ sao cho mọi nghiệm $x(t; t_0, \phi)$ của hệ (1.1) thỏa mãn

$$||x(t; t_0, \phi)|| \leq M e^{-\alpha(t - t_0)} ||\phi||_C, \quad \forall t \geq t_0.$$

1.1.2 Bài toán ổn định hóa

Xét hệ điều khiển có trễ

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t, u(t)), \quad t \geq 0, \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-h, 0], \end{cases} \tag{1.2}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái, $u \in L_2([0, +\infty), \mathbb{R}^m)$ là véc tơ điều khiển, $h \geq 0$ là hằng số trễ, $\phi \in C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ là hàm điều kiện ban đầu, $f : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ là hàm véc tơ cho trước thỏa mãn điều kiện, $f(t, 0, 0) = 0, t \geq 0$.

Định nghĩa 1.3. Hệ điều khiển (1.2) gọi là ổn định hóa được nếu tồn tại hàm điều khiển $u(t) = g(x(t))$ sao cho hệ đóng

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t, g(x(t))), \quad t \geq 0, \tag{1.3}$$

là ổn định tiệm cận. Trong trường hợp này, hàm $u(t) = g(x(t))$ gọi là hàm điều khiển ngược ổn định hóa hệ thống.

Định nghĩa 1.4. Cho số $\alpha > 0$. Hệ điều khiển (1.2) gọi là $\alpha-$ ổn định hóa được dạng mũ nếu tồn tại hàm điều khiển $u(t) = g(x(t))$ sao cho hệ đóng (1.3) là $\alpha-$ổn định mũ, tức là tồn tại hằng số $N > 0$ sao cho mọi nghiệm $x(t; t_0, \phi)$ của hệ đóng (1.3) thỏa mãn đánh giá

$$\|x(t; t_0, \phi)\| \leq N\|\phi\|e^{-\alpha(t-t_0)}, \quad t \geq t_0.$$

1.1.3 Bài toán ổn định hệ rời rạc

Trong mục này chúng tôi sẽ đề cập tới các hệ phương trình với biến thời gian rời rạc. Khác với trước, ở đây tốc độ thay đổi của trạng thái hệ thống không phải là $\dot{x}(t)$, mà là tốc độ trung bình $\frac{x(k+T)-x(k)}{T}$. Nếu lấy $T = 1$ (đơn vị thời gian) thì tốc độ đó là $x(k+1) - x(k)$ khi đó phương trình hệ thống trở thành

$$x(k+1) - x(k) = f(k, x(k), x(k-h)),\ k \in \mathbb{N},$$

trong đó $x(k) \in \mathbb{R}^n, \quad k \in \mathbb{N}$. Như vậy, ta sẽ xét phương trình rời rạc tổng quát dạng

$$\begin{cases} x(k+1) = f(k, x(k), x(k-h)), \quad k \in \mathbb{N}, \\ x(k) = \phi(k), \quad k \in \{-h, -(h-1), ..., 0\}, \end{cases} \tag{1.4}$$

trong đó $x(k) \in \mathbb{R}^n,\ k,\, h \in \mathbb{N},\ f : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ là hàm véc tơ cho trước thỏa mãn điều kiện $f(k, 0, 0) = 0,\ k \in \mathbb{N}$. $\phi(\cdot) : \{-h, \cdots, 0\} \to \mathbb{R}^n$ là hàm ban đầu với chuẩn xác định bởi $\|\phi\| = \max\limits_{k\in\{-h,-(h-1),...,0\}} \|\phi(k)\|$.

Định nghĩa 1.5. Giả sử $f(k, 0, 0) = 0$ với mọi $k \in \mathbb{N}$.

- Nghiệm $x(k) = 0$ của phương trình (1.4) được gọi là ổn định nếu với bất kì $k_0 \geq 0,\ \varepsilon > 0$, tồn tại $\delta = \delta(k_0, \varepsilon)$ sao cho nếu $||\phi|| \leq \delta$ thì $||x(k; k_0, \phi)|| \leq \varepsilon$ với $k \geq k_0$.
- Nghiệm $x(k) = 0$ của phương trình (1.4) được gọi là ổn định tiệm cận nếu nó ổn định và tồn tại $b_0 = b_0(k_0) > 0$ sao cho nếu $||\phi|| \leq b_0$ thì $\lim\limits_{k\to\infty} x(k; k_0, \phi) = 0$.
- Nghiệm $x(k) = 0$ của phương trình (1.4) được gọi là ổn dịnh mũ nếu tồn tại các số dương $M > 0,$ và $\alpha \in (0, 1)$ sao cho

$$\|x(k; \phi)\| \leq M\|\phi\|\alpha^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

1.1.4 Bài toán ổn định hóa hệ rời rạc

Xét hệ điều khiển có trễ

$$\begin{cases} x(k+1) = f(k, x(k), x(k-h), u(k)), \quad k \in \mathbb{N}, \\ x(k) = \phi(k), \quad k \in \{-h, -(h-1), ..., 0\}, \end{cases} \tag{1.5}$$

trong đó $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ là véc tơ điều khiển $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ là hàm véc tơ cho trước thỏa mãn điều kiện, $f(k, 0, 0, 0) = 0$, $k \in \mathbb{N}$.

Định nghĩa 1.6. Hệ điều khiển (1.5) gọi là ổn định hóa được nếu tồn tại hàm điều khiển $u(k) = g(x(k))$ sao cho hệ đóng

$$x(k+1) = f(k, x(k), x(k-h), g(x(k))), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{1.6}$$

là ổn định tiệm cận. Trong trường hợp này, hàm $u(k) = g(x(k))$ gọi là hàm điều khiển ngược ổn định hóa hệ thống.

Định nghĩa 1.7. Cho số $\alpha \in (0, 1)$. Hệ điều khiển (1.5) gọi là $\alpha-$ ổn định hóa được dạng mũ nếu tồn tại hàm điều khiển $u(k) = g(x(k))$ sao cho hệ đóng (1.6) là $\alpha-$ ổn định mũ, tức là tồn tại hằng số $M > 0$ sao cho mọi nghiệm $x(k, \phi)$ của hệ đóng (1.6) thỏa mãn

$$\|x(k; \phi)\| \leq M\|\phi\|\alpha^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

1.2 Hệ suy biến tuyến tính

1.2.1 Hệ suy biến

Dựa vào các mô hình không gian trạng thái ta có thể mô tả một quá trình, hiện tượng vật lý, thông thường sử dụng các phương trình vi phân thường, việc phân tích và tổng hợp hệ thống là những đặc điểm nòng cốt trong lý thuyết điều khiển hiện đại được phát triển từ cuối những năm 1950 đầu những năm 1960. Để có được một mô hình trạng thái, ta cần chọn một vài biến đặc trưng như về tốc độ, cân nặng, nhiệt độ và gia tốc, những biến này có đủ khả năng mô tả tầm quan trọng của hệ thống đang xét. Dựa vào các đặc tính, quy luật của các quá trình, một vài phương trình sẽ được thiết lập thông qua mối quan hệ giữa các biến. Ta mô hình toán học hóa hệ thống bằng việc sử dụng các hệ phương trình vi phân hoặc các hệ đại số. Hệ đó có cấu tạo như sau

$$f(\dot{x}(t), x(t), t) = 0, \quad t \geq 0, \tag{1.7}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là trạng thái của hệ, $x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$, f là hàm véc tơ của $x(t)$, $\dot{x}(t)$ và t với số chiều phù hợp. Khi ma trận Jacobian $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$ là suy biến ta nhận được hệ phương trình vi phân suy biến. Một trường hợp đặc biệt của hệ (1.7) được quan tâm là

$$E\dot{x}(t) = H(x(t), t), \quad t \geq 0,$$

trong đó H là hàm véc tơ của $x(t)$ và t với số chiều thích hợp, E là ma trận hằng số, suy biến. Các hệ có cấu tạo được mô tả như trên nói chung được gọi là hệ suy biến. Trong nhiều bài báo, hệ suy biến còn được gọi là hệ mô tả các biến, hệ trạng thái tổng quát, hệ phương trình vi phân đại số. Hệ suy biến xuất hiện trong rất nhiều hệ thống như các hệ kỹ thuật, hệ thống điện, hàng không vũ trụ, hệ kinh tế xã hội, công nghệ sinh học ([1, 2, 11]). Các ví dụ về hệ suy biến được trình bày chi tiết bởi Kunkel và V. Mehrmann.

1.2.2 Công thức nghiệm của phương trình vi phân suy biến có trễ

Xét hệ suy biến tuyến tính có trễ

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h), & t \geq 0, \\ x(t) = \varphi(t), & t \in [-h, 0], \end{cases} \tag{1.8}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái. Ma trận $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận có $rank(E) = r \leq n$, $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là các ma trận thực cho trước, $h > 0$ là độ trễ hằng số. $\varphi(t) \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ là hàm điều kiện ban đầu.

Định nghĩa 1.8. ([2])

i) Cặp ma trận (E, A_0) gọi là chính quy nếu tồn tại số $\lambda \in \mathbb{C}$ sao cho $det(A_0 - \lambda E) \neq 0$.

ii) Cặp ma trận (E, A_0) gọi là impulse-free nếu thỏa mãn $deg(det(zE - A_0)) = rank(E) = r$.

Nhận xét 1.1. Giả sử (E, A_0) chính quy, khi đó tồn tại hai ma trận khả nghịch $P, Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (Bổ đề 1-2.2, [2]) sao cho $PEQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}$, trong đó $r = rank(E) \leq n$, $N \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$ lũy linh chỉ số ν, với ν là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn $N^\nu = 0$, $N^{\nu-1} \neq 0$. Khi đó chỉ số của hệ (1.8) là chỉ số lũy lĩnh ν của N. Khi $N = 0$ hệ (1.8) có chỉ số 1, từ Bổ đề 2.2 trong [11] suy ra hệ (1.8) impulse-free. Ngược lại nếu $rank(E) = r < n$ và hệ (1.8) impulse-free, từ Bổ đề 2.2 trong [11] hệ (1.8) có chỉ số 1. Tuy nhiên nếu $rank(E) = n$ (E khả nghịch) khi đó hệ (1.8) impulse-free (vì $deg(det(zE - A_0)) = rank(E) = n$) và có chỉ số 0.

Dựa vào tính chất chính quy và impulse-free của cặp ma trận (E, A_0) chúng ta chỉ ra rằng hệ (1.8) có thể đưa về các dạng tương đương dễ nghiên cứu hơn sau đây. Xét hệ (1.8), giả sử rằng cặp ma trận (E, A_0) là chính quy và impulse-free khi đó tồn tại hai ma trận không suy biến P và Q (Bổ đề 2.2, trang 13, [11]) sao cho với phép biến đổi $y(t) = Q^{-1}x(t) = [y_1(t), y_2(t)]$, với $y_1(t) \in \mathbb{R}^r$, $y_2(t) \in \mathbb{R}^{n-r}$, hệ (1.8) viết dưới dạng hệ phương trình vi phân đại số

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = A_{01}y_1(t) + A_{11}y_1(t-h) + A_{12}y_2(t-h), \quad y_1(t) = \psi_1(t), \\ y_2(t) = -A_{13}y_1(t-h) - A_{14}y_2(t-h), \quad y_2(t) = \psi_2(t), \end{cases} \tag{1.9}$$

trong đó ta kí hiệu $PA_1Q = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{13} & A_{14} \end{pmatrix}$. Ta gọi hệ (1.9) là phân rã của hệ (1.8). Thay điều kiện ban đầu $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))$, $t \in [-h, 0]$ vào phương trình thứ hai của hệ (1.9) ta có

$$\psi_2(0) + A_{13}\psi_1(-h) + A_{14}\psi_2(-h) = 0. \tag{1.10}$$

Khi $t \in [-h, 0]$ thì $t-h \in [-h, 0]$, vì vậy $y_i(t-h) = \psi_i(t-h)$, $i = 1, 2$ thay vào phương trình phương trình thứ nhất của hệ (1.9) ta được

$$\dot{y}_1(t) = A_{01}y_1(t) + A_{11}\psi_1(t-h) + A_{12}\psi_2(t-h),$$

là phương trình vi phân thường với điều kiện ban đầu $y_1(0) = \psi_1(0)$. Phương trình này có nghiệm

$$y_1(t) = e^{A_{01}t}y_1(0) + \int_0^t e^{A_{01}(t-s)}\big[A_{11}\psi_1(s-h) + A_{12}\psi_2(s-h)\big]\, ds,\ t \in [0, h]. \tag{1.11}$$

Từ phương trình thứ hai của hệ (1.9) và $y_i(t-h) = \psi_1(t-h)$, $i = 1, 2$, $t \in [0, h]$ ta thu được

$$y_2(t) = -A_{13}\psi_1(t-h) - A_{14}\psi_2(t-h), \quad t \in [-h, 0]. \tag{1.12}$$

Kết hợp (1.11) và (1.12) ta có

$$\begin{aligned} y(t) = &\begin{pmatrix} e^{A_{01}t} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y(0) + \int_0^t \begin{pmatrix} e^{A_{01}(t-s)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \psi(s-h)ds \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -A_{13} & -A_{14} \end{pmatrix} \psi(t-h),\ t \in [0, h]. \end{aligned}$$

Tương tự ta sẽ tìm được nghiệm $y(t)$ trên các đoạn $[h, 2h]$, $[2h, 3h]$, ... Như vậy ta tìm được nghiệm của hệ phương trình (1.8) dưới dạng sau

$$\begin{aligned} x(t) = &\, Q \begin{pmatrix} e^{A_{01}t} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}x(0) \\ &+ \int_0^t Q \begin{pmatrix} e^{A_{01}(t-s)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}\, x(s-h)ds \\ &+ Q \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -A_{13} & -A_{14} \end{pmatrix} Q^{-1}x(t-h),\ t \geq 0. \end{aligned}$$

Bổ đề 1.4. *([6]) Với mọi hàm liên tục $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))$ thỏa mãn điều kiện tương thích* (1.10) *tồn tại duy nhất hàm $y(t)$ xác định và liên tục trên $[-h, \infty)$ thỏa mãn hệ* (1.9) *trên $[0, \infty)$, và điều kiện ban đầu $y(t) = \psi(t)$, $t \in [-h, 0]$.*

1.2.3 Công thức nghiệm của phương trình rời rạc suy biến có trễ

Xét hệ phương trình rời rạc có trễ sau

$$\begin{cases} Ex(k+1) = A_0x(k) + A_1x(k-\tau), \quad k \in \mathbb{N}, \\ x(k) = \varphi(k), \quad k \in \{-\tau, -(\tau-1), ..., 0\}, \end{cases} \tag{1.13}$$

trong đó $x(k) \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N}$ là véc tơ trạng thái, các ma trận $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là các ma trận thực cho trước, ma trận $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận suy biến với $rank(E) = r < n$; $0 < \tau \in \mathbb{N}$. $\varphi(\cdot) : \{-\tau, \cdots, 0\} \to \mathbb{R}^n$ là hàm ban đầu với chuẩn xác định bởi $\|\varphi\| = \max_{k\in\{-\tau,-(\tau-1),...,0\}} \|\varphi(k)\|$. Trong trường hợp E là ma trận đơn vị, hệ (1.13) luôn tìm được nghiệm bởi công thức truy hồi liên tiếp. Tuy nhiên nếu E là ma trận suy biến khi đó ta cần sử dụng tới tính chính quy của cặp ma trận (E, A_0) để có thể xây dựng được công thức nghiệm.

Định nghĩa 1.9. ([2]) Cặp ma trận (E, A_0) gọi là causal nếu thỏa mãn $deg(det(zE - A_0)) = rank(E) = r$.

Tương tự với trường hợp hệ suy biến liên tục, ở đây chúng tôi chỉ xét tới trường hợp cặp ma trận (E, A_0) thỏa mãn các điều kiện chính quy và causal. Khi đó tồn tại hai ma trận không suy biến P và Q (xem Bổ đề 2.10, trang 22, [11]) sao cho với phép biến đổi $y(k) = Q^{-1}x(k) = [y_1(k), y_2(k)]$ trong đó $y_1(k) \in \mathbb{R}^r$, $y_2(k) \in \mathbb{R}^{n-r}, k \in \mathbb{N}$ hệ (1.13) viết dưới dạng sau

$$\begin{cases} y_1(k+1) = A_{01}y_1(k) + A_{11}y_1(k-\tau) + A_{12}y_2(k-\tau), \quad y_1(s) = \psi_1(s), \\ y_2(k) = -A_{13}y_1(k-\tau) - A_{14}y_2(k-\tau), \quad y_2(s) = \psi_2(s), s \in \{-\tau, -(\tau-1), ..., 0\}, \end{cases} \tag{1.14}$$

vậy ta thu được công thức nghiệm sau

$$\begin{cases} y_1(k) = A_{01}^k\, y_1(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A_{01}^{k-1-i}\big[A_{11}\, y_1(i-\tau) + A_{12}\, y_2(i-\tau))\big], \\ y_2(k) = -A_{13}y_1(k-\tau) - A_{14}y_2(k-\tau). \end{cases} \tag{1.15}$$

Qua một số bước biến đổi và từ (1.15) ta thu được nghiệm của hệ phương trình (1.13) cho bởi

$$\begin{cases} x(k) = \overline{A}_{01}^k P_1 x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \overline{A}_{01}^{k-1-i} \bar{A}_1 x(i-\tau) + \bar{A}_2 x(k-\tau), \\ x(k) = \varphi(k), \quad k \in \{-\tau, -(\tau-1), ..., 0\}, \end{cases}$$

trong đó

$$\overline{A}_{01} = Q \begin{bmatrix} A_{01} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1},\ P_1 = Q \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1},$$

$$\bar{A}_1 = Q \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}, \quad \bar{A}_2 = Q \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -A_{13} & -A_{14} \end{bmatrix} Q^{-1}.$$

1.3 Một số bổ đề bổ trợ

Bổ đề 1.5. *([5]) Cho ma trận $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Khi đó $e^{At} \succ 0$ với $t \geq 0$ khi và chỉ khi ma trận A là ma trận Metzler. Hơn nữa, ma trận nghịch đảo của một ma trận dương là dương nếu và chỉ nếu nó là ma trận Monomial.*

Bổ đề 1.6. *([2]) (E, A_0) là cặp ma trận chính quy khi và chỉ khi tồn tại hai ma trận khả nghịch P, Q sao cho*

$$PEQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}, \quad PA_0Q = \begin{pmatrix} A_{01} & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix},$$

trong đó $A_{01} \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $N \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$ là ma trận lũy linh.

Bổ đề 1.7. *([11]) Giả sử rằng cặp ma trận (E, A_0) là chính quy, khi đó với hai ma trận P, Q sao cho Bổ đề 1.6 được thỏa mãn thì cặp ma trận (E, A_0) là impulse-free khi và chỉ khi $N = 0$.*

Bổ đề 1.8. *([7]) (Singular Value Decomposition) Cho ma trận $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ với $rank(E) = r \leq n$. Khi đó tồn tại hai ma trận trực giao $U \in \mathbb{R}^{n\times n}, V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sao cho*

$$E = U\Sigma V^T,$$

trong đó Σ là ma trận đường chéo, với các phần tử trên đường chéo chính là $\sigma_1, \sigma_2, ...\sigma_r, 0, ..., 0$. $\sigma_1 \geq \sigma_2, ... \geq \sigma_r > 0$.

Bổ đề 1.9. *Cho $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận suy biến với $rank(E) = r$. Khi đó tồn tại hai ma trận không suy biến P, Q sao cho $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = PEQ$.*

Nhận xét 1.2. Cho các ma trận vuông $E \in \mathbb{R}^{n\times n}, A_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}, A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ và $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, với $rank(E) = r < n$. Khi đó, từ Bổ đề 1.8 và Bổ đề 1.9 luôn tồn tại ma trận khả nghịch P, Q sao cho ta có phân tích sau đây:

$$PEQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} := \tilde{E}, \quad PA_0Q = \begin{bmatrix} A_{01} & A_{02} \\ A_{03} & A_{04} \end{bmatrix} := \tilde{A}_0,$$

$$PA_1Q = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{13} & A_{14} \end{bmatrix} := \tilde{A}_1, \quad PB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} := \tilde{B}.$$

Như vậy từ bộ ma trận (E, A_0, A_1, B) ta có thể đưa về dạng $(\tilde{E}, \tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \tilde{B})$ qua hai ma trận khả nghịch P, Q được xác định như sau:

- *Bước 1:* Sử dụng phân tích SVD đưa ma trận E về dạng $E = U\Sigma V^T$
- *Bước 2:* Ma trận P, Q được xác định

$$P = U^T,\ Q = V\ \mathrm{diag}(\sigma_1^{-1}, ..., \sigma_r^{-1}, 1, ..., 1).$$

Chương 2

Tính ổn định và ổn định hóa cho hệ phương trình vi phân suy biến dương có trễ

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu bài toán ổn định và ổn định hóa cho một số lớp hệ phương trình vi phân suy biến dương có trễ. Trước tiên chúng tôi chứng minh các điều kiện cần và đủ đảm bảo hệ suy biến có trễ là hệ dương, tiếp đó bài toán ổn định cho hệ suy biến dương được nghiên cứu. Thông qua việc giải bài toán quy hoạch tuyến tính chúng tôi tìm được hàm điều khiển để giải bài toán ổn định hóa cho hệ phương trình vi phân suy biến dương có trễ. Nội dung của chương này dựa trên bài báo [1,3] trong các công trình liên quan đến luận án.

2.1 Tiêu chuẩn ổn định của hệ phương trình vi phân suy biến dương có trễ

Xét hệ suy biến có trễ sau

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h), \quad t \geq 0, \\ x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-h, 0], \end{cases} \tag{2.1}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái, $h > 0, A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ma trận $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ suy biến, giả sử rằng $rank(E) = r < n$, $\varphi(t) \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ là hàm điều kiện ban đầu tương thích.

Định nghĩa 2.1. [2]

- Hệ (2.1) được gọi là chính quy và impulse-free nếu cặp ma trận (E, A_0) là chính quy và impulse-free.

- Cho $\alpha > 0$. Nghiệm $x(t) = 0$ của hệ (2.1) được gọi là $\alpha-$ ổn định mũ nếu tồn tại hằng số $M > 0$ sao cho với mọi hàm ban đầu tương thích $\varphi(t)$ thì nghiệm $x(t, \varphi)$ của hệ (2.1) thỏa mãn điều kiện

$$\| x(t, \varphi) \| \leq Me^{-\alpha t} \| \varphi \|, \quad \forall t \geq 0.$$

Định nghĩa 2.2. [5] Hệ (2.1) được gọi là dương nếu với điều kiện ban đầu tương thích $\varphi : [-h,\, 0] \to \mathbb{R}^n_{0,+}$, thì nghiệm $x(t) \succeq 0$ với mọi $t \geq 0$.

Chú ý rằng từ điều kiện chính quy và impulse-free của cặp ma trận (E, A_0) suy ra tồn tại hai ma trận không suy biến P, Q (Bổ đề 2.3, trang 13, [11]) sao cho

$$PEQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}, \quad PA_0Q = \begin{pmatrix} A_{01} & A_{02} \\ A_{03} & A_{04} \end{pmatrix}, \quad PA_1Q = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{13} & A_{14} \end{pmatrix},$$

với $det(A_{04}) \neq 0$. Qua phép biến đổi $y(t) = Q^{-1}x(t) = [y_1(t), y_2(t)]$ trong đó $y_1(t) \in \mathbb{R}^r$, $y_2(t) \in \mathbb{R}^{n-r}$, hệ (2.1) đưa về hệ phương trình vi phân đại số

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = \overline{A}_{01}y_1(t) + \overline{A}_{11}y_1(t-h) + \overline{A}_{12}y_2(t-h), \quad y_1(t) = \psi_1(t), \\ y_2(t) = -A_{04}^{-1}\big[A_{03}y_1(t) + A_{13}y_1(t-h) + A_{14}y_2(t-h)\big], \quad y_2(t) = \psi_2(t), \end{cases} \tag{2.2}$$

trong đó $\overline{A}_{01} = A_{01} - A_{02}A_{04}^{-1}A_{03}, \overline{A}_{11} = A_{11} - A_{02}A_{04}^{-1}A_{13}, \overline{A}_{12} = A_{12} - A_{02}A_{04}^{-1}A_{14}$.

Mệnh đề 2.1. *Giả sử cặp ma trận (E, A_0) là chính quy và impulse-free, Q là ma trận Monomial. Khi đó hệ (2.1) là dương nếu và chỉ nếu hệ (2.2) là dương.*

Sau đây chúng tôi đưa ra điều kiện cần và đủ để hệ suy biến có trễ (2.2) là hệ dương.

Định lý 2.2. *Giả sử rằng các điều kiện trong Mệnh đề 2.1 được thỏa mãn, khi đó hệ (2.2) là dương nếu và chỉ nếu $\overline{A}_{01}$ là ma trận Metzler và $\overline{A}_1 \succeq 0$, $-A_{04}^{-1}A_{03} \succeq 0$, trong đó*

$$\overline{A}_{01} = A_{01} - A_{02}A_{04}^{-1}A_{03}, \quad \overline{A}_1 = \begin{bmatrix} \overline{A}_{11} & \overline{A}_{12} \\ -A_{04}^{-1}A_{13} & -A_{04}^{-1}A_{14} \end{bmatrix}.$$

Nhận xét 2.1. Từ Định lý 2.2 ta thấy việc kiểm tra hệ (2.2) là hệ dương thông qua việc kiểm tra các ma trận $\overline{A}_{01}$ là ma trận Metzler và $\overline{A}_1 \succeq 0$, $-A_{04}^{-1}A_{03} \succeq 0$. Việc này rất dễ kiểm tra theo định nghĩa ma trận Metzler và ma trận không âm.

Định lý dưới đây cho chúng ta một điều kiện đủ cho tính ổn định mũ của lớp hệ phương trình vi phân suy biến dương có trễ hệ (2.1).

Định lý 2.3. *Giả sử rằng cặp ma trận (E, A_0) thỏa mãn điều kiện chính quy và impulse-free, Q là ma trận Monomial, các ma trận $\overline{A}_{01}$, $\overline{A}_{11}$, $\overline{A}_{12}$, A_{03}, A_{04}, A_{13}, A_{14} được xác định trong (2.2) thỏa mãn các điều kiện: $\|A_{04}^{-1}A_{14}\| < 1$, tồn tại véc tơ $\lambda \gg 0$ sao cho $\lambda^T[\alpha\tilde{E} + \overline{A}_0 + \overline{A}_1 e^{\alpha h}] \preceq 0$, trong đó*

$$\tilde{E} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \overline{A}_0 = \begin{bmatrix} \overline{A}_{01} & 0 \\ -A_{04}^{-1}A_{03} & -I_{n-r} \end{bmatrix}, \overline{A}_1 = \begin{bmatrix} \overline{A}_{11} & \overline{A}_{12} \\ -A_{04}^{-1}A_{13} & -A_{04}^{-1}A_{14} \end{bmatrix}.$$

Khi đó, hệ (2.1) là ổn định mũ.

Nhận xét 2.2. Ma trận Q trong Định lý 2.3 là ma trận Monomial để đảm bảo hệ (2.2) là hệ dương tương đương với hệ (2.1) là dương. Tuy nhiên, nếu chỉ cần điều kiện đủ để đảm bảo hệ (2.1) là hệ dương thì $Q \succeq 0$ mà không cần là ma trận Monomial. Với $h > 0, \alpha > 0$ cho trước, điều kiện $\lambda^T[\alpha\tilde{E} + \overline{A}_0 + \overline{A}_1 e^{\alpha h}] \preceq 0$ trong Định lý 2.3 là hệ bất phương trình tuyến tính đối với ẩn λ do đó có thể đưa về bài toán quy hoạch hoạch tuyến tính để tìm λ.

Nhận xét 2.3. Điều kiện đủ đảm bảo hệ (2.1) ổn định mũ trong Định lý 2.3 là độc lập vào độ trễ theo nghĩa sau: Cho $h > 0$, giả sử tồn tại $\lambda \in \mathbb{R}^n_+$, $\alpha > 0$ sao cho thỏa mãn điều kiện

$$\lambda^T[\alpha\tilde{E} + \overline{A}_0 + \overline{A}_1 e^{\alpha h}] \preceq 0,$$

và $\|A_{04}^{-1}A_{14}\| < 1$. Như vậy theo Định lý 2.3 hệ (2.1) là ổn định mũ. Khi đó với mọi $0 < h_1 \neq h$ thì hệ (2.1) cũng ổn định mũ với trễ h_1. Thật vậy, ta sẽ chứng minh rằng tồn tại số $\alpha_1 > 0$ sao cho

$$\lambda^T[\alpha_1\tilde{E} + \overline{A}_0 + \overline{A}_1 e^{\alpha_1 h_1}] \preceq 0.$$

Nếu độ trễ h_1 thỏa mãn $0 < h_1 < h$ thì dễ dàng chứng minh được

$$\lambda^T[\alpha\tilde{E} + \overline{A}_0 + \overline{A}_1 e^{\alpha h_1}] \preceq \lambda^T[\alpha\tilde{E} + \overline{A}_0 + \overline{A}_1 e^{\alpha h}] \preceq 0,$$

vậy ta có hệ (2.1) với độ trễ h_1 là ổn định mũ. Nếu $0 < h < h_1$ thì tồn tại số $\alpha_1 > 0$ sao cho $\alpha_1 h_1 = \alpha h$. Vì $0 < h < h_1$ nên ta có $\dfrac{h_1}{h} > 1$. Mặt khác vì $\alpha_1 h_1 = \alpha h$ nên ta có $\dfrac{\alpha}{\alpha_1} = \dfrac{h_1}{h} > 1$, từ đây suy ra $\alpha_1 < \alpha$. Vì $\tilde{E} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \succeq 0$ nên ta thu được

$$\alpha_1\tilde{E} + \overline{A}_0 + \overline{A}_1 e^{\alpha_1 h_1} \preceq \alpha\tilde{E} + \overline{A}_0 + \overline{A}_1 e^{\alpha h},$$

bất đẳng thức này tương đương với

$$\alpha\tilde{E} + \overline{A}_0 + \overline{A}_1 e^{\alpha h} - [\alpha_1\tilde{E} + \overline{A}_0 + \overline{A}_1 e^{\alpha_1 h_1}] \succeq 0. \tag{2.3}$$

Nhân trái hai vế của bất đẳng thức (2.3) với véc tơ $\lambda^T \in \mathbb{R}^n_+$ ta thu được

$$\lambda^T[\alpha\tilde{E} + \overline{A}_0 + \overline{A}_1 e^{\alpha h}] - \lambda^T[\alpha_1\tilde{E} + \overline{A}_0 + \overline{A}_1 e^{\alpha_1 h_1}] \succeq 0. \tag{2.4}$$

Bất đẳng thức (2.4) tương đương với

$$\lambda^T[\alpha\tilde{E} + \overline{A}_0 + \overline{A}_1 e^{\alpha h}] \succeq \lambda^T[\alpha_1\tilde{E} + \overline{A}_0 + \overline{A}_1 e^{\alpha_1 h_1}]. \tag{2.5}$$

Từ bất đẳng thức $\lambda^T[\alpha\tilde{E} + \overline{A}_0 + \overline{A}_1 e^{\alpha h}] \preceq 0$ kết hợp với (2.5) ta thu được

$$\lambda^T[\alpha_1\tilde{E} + \overline{A}_0 + \overline{A}_1 e^{\alpha_1 h_1}] \preceq 0.$$

Nhận xét 2.4. Khi ma trận E trong hệ (2.1) là ma trận đơn vị ta nhận được phương trình vi phân có trễ thông thường, điều kiện cần và đủ để hệ dương là ma trận A_0 Metzler và $A_1 \succeq 0$. Tuy nhiên khi E là ma trận suy biến, điều này không còn đúng nữa, như ta thấy trong Định lý 2.2 điều kiện đảm bảo hệ (2.1) dương trở nên phức tạp hơn rất nhiều, ta cần thêm cặp (E, A_0) là chính quy và impulse-free, ngoài ra việc chứng minh tính ổn định mũ của hệ cũng trở nên khó khăn và phức tạp.

Nhận xét 2.5. Định lý 2.3 cho ta một điều kiện đủ đảm bảo tính ổn định mũ của hệ suy biến (2.1), tuy nhiên với những hệ suy biến không thỏa mãn điều kiện chính quy, impulse-free thì định lý không còn đúng nữa, ngoài ra ta có thể chỉ ra rằng tồn tại những hệ suy biến dương thỏa mãn điều kiện chính quy và impulse-free nhưng không ổn định mũ. Để giải quyết hạn chế này ta xét bài toán ổn định hóa hệ suy biến dương có trễ.

Nhận xét 2.6. Các điều kiện về tính ổn định mũ cho hệ (2.1) trong bài báo [14] được phát biểu theo điều kiện về phổ của ma trận $\Delta(\lambda) := \lambda E - A_0 - A_1 e^{-\lambda h}$. Hệ (2.1) ổn định mũ nếu $\sup\{Re(\lambda) : \; det\Delta(\lambda) = 0\} < 0$ ([14]). Tuy nhiên, điều kiện này dựa trên giải phương trình đặc trưng tìm giá trị riêng là phi tuyến (không như hệ suy biến tuyến tính không có trễ mà ở đó phương trình đặc trưng là tuyến tính) nên không dễ dàng giải được. Các điều kiện đủ trong Định lý 2.3 được phát biểu thông qua các bất phương trình tuyến tính mà dễ dàng giải được dựa trên phương pháp giải bài toán quy hoạch tuyến tính.

2.2 Tiêu chuẩn ổn định hóa của hệ phương trình vi phân suy biến dương có trễ

Để giải bài toán ổn định hóa cho lớp hệ phương trình vi phân có trễ ta có thể thiết kế các hàm điều khiển *"không nhớ"* (memoryless controllers) dạng $u(t) = Kx(t)$. Mặc dù lớp điều khiển *"không nhớ"* dễ thiết kế hơn nhưng nó được chỉ ra rằng lớp điều khiển này trở nên bảo thủ (conservative), kém hiệu quả hơn trong trường hợp trễ nhỏ. Vì vậy việc thiết kế các hàm điều khiển sử dụng thông tin trên trạng thái hiện tại và quá khứ có thể cho hiệu quả tốt hơn hàm điều khiển *"không nhớ"*. Trong phần này trình bày kết quả nghiên cứu bài toán ổn định hóa cho hệ phương trình vi phân suy biến dương có trễ sử dụng hàm điều khiển có nhớ (memory state feedback control). Xét hệ điều khiển suy biến có trễ có dạng sau

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + Bu(t), \quad t \geq 0, \\ x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-h, 0], \end{cases} \tag{2.6}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là véc tơ điều khiển, $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, và ma trận $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là suy biến có rank $E = r < n$, độ trễ $h > 0$.

Định nghĩa 2.3. Cho số $\alpha > 0$. Hệ (2.6) ($u(t) = 0$) được gọi là $\alpha-$ ổn định mũ nếu hệ là chính quy, impulse-free và tồn tại số dương $N > 0$ sao cho mọi nghiệm $x(t,\varphi)$ của hệ thỏa mãn điều kiện

$$\|x(t,\varphi)\| \leq Ne^{-\alpha t}\|\varphi\|, \quad \forall t \geq 0.$$

Định nghĩa 2.4. Cho số $\alpha > 0$. Hệ (2.6) gọi là $\alpha-$ ổn định hóa được dạng mũ, nếu tồn tại hàm điều khiển ngược $u(t) = Kx(t) + Fx(t-h)$, $K,\ F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sao cho hệ đóng tương ứng

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = (A_0 + BK)x(t) + (A_1 + BF)x(t-h), \quad t \geq 0 \\ x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-h, 0], \end{cases}$$

là $\alpha-$ ổn định mũ.

Với hệ suy biến (2.6) không có điều kiện chính quy, impulses-free trên cặp ma trận (E, A_0) ta sẽ dùng phân tích SVD để đưa hệ (2.6) về hệ mới như sau: Theo giả thiết ma trận suy biến E có $rank(E) = r < n$, áp dụng Bổ đề 1.9 tồn tại hai ma trận khả nghịch P, Q sao cho ta có phân tích $PEQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Đặt

$$PEQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} := \tilde{E}, \quad PA_0Q = \begin{bmatrix} A_{01} & A_{02} \\ A_{03} & A_{04} \end{bmatrix} := \tilde{A}_0,$$

$$PA_1Q = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{13} & A_{14} \end{bmatrix} := \tilde{A}_1, \quad PB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} := \tilde{B}.$$

Qua phép đổi biến $y(t) = Q^{-1}x(t) = [\, y_1(t),\ y_2(t)\,]$ trong đó $y_1(t) \in \mathbb{R}^r$, $y_2(t) \in \mathbb{R}^{n-r}$, thì hệ (2.6) đưa về dạng sau

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = & A_{01}y_1(t) + A_{02}y_2(t) + A_{11}y_1(t-h) + A_{12}y_2(t-h) + B_1u(t), \\ y_1(t) = & \phi_1(t), \quad t \in [-h, 0], \\ 0 = & A_{03}y_1(t) + A_{04}y_2(t) + A_{13}y_1(t-h) + A_{14}y_2(t-h) + B_2u(t), \\ y_2(t) = & \phi_2(t), \qquad t \in [-h, 0], \end{cases} \tag{2.7}$$

trong đó $Q^{-1}\varphi(t) = [\phi_1(t), \phi_2(t)]$. Sử dụng hàm điều khiển ngược

$$u(t) = K_1y_1(t) + K_2y_2(t) + F_1y_1(t-h) + F_2y_2(t-h), \tag{2.8}$$

trong đó $K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \end{bmatrix}$, $K_1, F_1 \in \mathbb{R}^{m\times r}$, $K_2, F_2 \in \mathbb{R}^{m\times(n-r)}$, khi đó hệ (2.7) đưa về dạng sau

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = & (A_{01} + B_1K_1)y_1(t) + (A_{02} + B_1K_2)y_2(t) + (A_{11} + B_1F_1)y_1(t-h) \\ & \quad +(A_{12} + B_1F_2)y_2(t-h), \\ 0 = & (A_{03} + B_2K_1)y_1(t) + (A_{04} + B_2K_2)y_2(t) + (A_{13} + B_2F_1)y_1(t-h) \\ & \quad +(A_{14} + B_2F_2)y_2(t-h). \end{cases} \tag{2.9}$$

Mệnh đề 2.4. *Giả sử ma trận $Q \succeq 0$. Nếu hệ (2.7) là $\alpha-$ ổn định hóa được dạng mũ với hàm điều khiển ngược (2.8), thì hệ (2.6) là $\alpha-$ ổn định hóa được dạng mũ với hàm điều khiển ngược $u(t) = KQ^{-1}x(t) + FQ^{-1}x(t-h)$.*

Định lý sau đây cho ta một điều kiện đủ để giải bài toán ổn định hóa cho hệ suy biến liên tục có trễ. Ta kí hiệu: $\tilde{A}_0 = [a_{ij}^{(0)}]_{n\times n}$, $\tilde{A}_1 = [a_{ij}^{(1)}]_{n\times n}$, b_i^T là véc tơ hàng thứ i của ma trận $\tilde{B}$.

Định lý 2.5. *Cho số $\alpha > 0$. Giả sử rằng tồn tại các véc tơ $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $k_j,\ f_j \in \mathbb{R}^m,\ j = 1, 2, ..., n$ sao cho các bất đẳng thức sau thỏa mãn*

$$\begin{cases} a_{ij}^{(0)}\beta_j + b_i^T k_j \geq 0, & i, j = 1, ..., n,\ i \neq j, \\ a_{ij}^{(1)}\beta_j + b_i^T f_j \geq 0, & i, j = 1, ..., n, \end{cases} \tag{2.10}$$

$$\big(\alpha\tilde{E} + \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 e^{\alpha h}\big)\beta + \tilde{B}\Big(\sum_{i=1}^{n} k_i + e^{\alpha h}\sum_{j=1}^{n} f_i\Big) \ll 0. \tag{2.11}$$

Khi đó hệ (2.6) là dương và $\alpha-$ ổn định hóa được dạng mũ. Ngoài ra, điều khiển ngược ổn định hóa hệ (2.6) cho bởi công thức

$$u(t) = KQ^{-1}x(t) + FQ^{-1}x(t-h), \quad t \geq 0,$$

trong đó

$$K = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{\beta_1} & \frac{k_2}{\beta_2} & \cdots & \frac{k_n}{\beta_n} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \frac{f_1}{\beta_1} & \frac{f_2}{\beta_2} & \cdots & \frac{f_n}{\beta_n} \end{bmatrix}.$$

Nhận xét 2.7. Gần đây các kết quả nghiên cứu bài toán ổn định, ổn định hóa hệ dương có trễ [12, 17] thu được các điều kiện dưới dạng bài toán quy hoạch tuyến tính tương tự như điều kiện (2.10), (2.11). Các điều kiện này là có thể giải được thông qua các thuật toán giải bài toán quy hoạch tuyến tính.

Nhận xét 2.8. Định lý 2.5 cho ta một điều kiện đủ dưới dạng bài toán quy hoạch tuyến tính, thông qua việc giải bài toán quy hoạch tuyến tính này để tìm được một hàm điều khiển ngược đảm bảo hệ đóng tương ứng của hệ (2.6) thỏa mãn các điều kiện sau:

- Hệ đóng tương ứng là chính quy và impulse-free.
- Hệ đóng tương ứng là hệ dương.
- Hệ đóng tương ứng là $\alpha-$ ổn định mũ.

Nhận xét 2.9. Ta có thể xây dựng hàm điều khiển ngược cho bài toán ổn định hóa thông qua các bước sau đây:

- *Bước 1:* Xác định hai ma trận khả nghịch P, Q, trong đó ma trận $Q \succeq 0$, sao cho các ma trận (E, A_0, A_1, B) của hệ ban đầu có phân tích thành các ma trận $(\tilde{E},\, \tilde{A}_0,\, \tilde{A}_1,\, \tilde{B})$.
- *Bước 2:* Tìm các véc tơ $\beta \in \mathbb{R}^n_+,\ k_j,\ f_j \in \mathbb{R}^m$, $j = 1, 2, ..., n$, sao cho các điều kiện (2.10) -(2.11) của Định lý 2.5 được thỏa mãn bằng việc sử dụng các thuật toán giải bài toán quy hoạch tuyến tính..
- *Bước 3:* Xây dựng các ma trận K, F cho bởi công thức
$$K = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{\beta_1} & \frac{k_2}{\beta_2} & ... & \frac{k_n}{\beta_n} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \frac{f_1}{\beta_1} & \frac{f_2}{\beta_2} & ... & \frac{f_n}{\beta_n} \end{bmatrix}.$$
- *Bước 4:* Xác định hàm điều khiển ngược cho bởi :
$$u(t) = KQ^{-1}x(t) + FQ^{-1}x(t-h).$$

Chương 3

Tính ổn định và ổn định hóa cho hệ phương trình rời rạc suy biến dương có trễ

Trong chương này trình bày một số kết quả về tính ổn định và ổn định hóa cho một số lớp hệ phương trình rời rạc suy biến dương có trễ. Trước tiên chúng tôi chứng minh một số điều kiện cần và đủ đảm bảo hệ rời rạc suy biến có trễ là hệ dương, tiếp đó điều kiện cần và đủ của bài toán ổn định được nghiên cứu. Thông qua việc giải bài toán quy hoạch tuyến tính chúng tôi sẽ tìm được hàm điều khiển để giải bài toán ổn định hóa cho hệ rời rạc suy biến dương có trễ. Nội dung của chương này dựa trên các bài báo ([2], [4]) trong công trình liên quan đến luận án.

3.1 Tiêu chuẩn ổn định của hệ rời rạc suy biến dương có trễ biến thiên

Xét hệ suy biến rời rạc có trễ:

$$\begin{cases} Ex(k+1) = A_0x(k) + A_1x(k-h(k)), \quad k \in \mathbb{N}, \\ x(k) = \varphi(k), \quad k \in \{-\tau,\, -(\tau-1),\, ..., 0\}, \end{cases} \tag{3.1}$$

trong đó $x(k) \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N}$ là véc tơ trạng thái, các ma trận $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ma trận $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận suy biến, giả sử rằng rank $E = r < n$; $h(k) \in \mathbb{N}$ là hàm trễ thỏa mãn điều kiện $0 < h(k) \le \tau$; $k,\, \tau \in \mathbb{N}$; $\varphi(\cdot) : \{-\tau, \cdots, 0\} \to \mathbb{R}^n$ là hàm điều kiện ban đầu tương thích với chuẩn được xác định bởi $\|\varphi\| = \max\limits_{k\in\{-\tau,-(\tau-1),...,0\}} \|\varphi(k)\|$.

Định nghĩa 3.1. ([5]) Hệ (3.1) gọi là hệ dương nếu với hàm ban đầu tương thích $\varphi(\cdot) \succeq 0$ thì nghiệm $x(k;\varphi) \succeq 0$ với mọi $k \in \mathbb{N}$.

Định nghĩa 3.2. ([2])

i) Hệ (3.1) gọi là chính quy nếu cặp ma trận (E, A_0) là chính quy.

ii) Hệ (3.1) gọi là causal nếu thỏa mãn $deg(det(zE - A_0)) = rank(E) = r$.

Định nghĩa 3.3. Cho $\alpha \in (0,1)$. Hệ (3.1) gọi là $\alpha-$ ổn định mũ nếu tồn tại các số dương $M > 0$ sao cho với điều kiện ban đầu tương thích $\varphi(\cdot)$ thì nghiệm $x(k;\, \varphi)$ thỏa mãn

$$\|x(k;\varphi)\| \leq M\|\varphi\|\alpha^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Từ điều kiện chính quy và causal của hệ (3.1), theo Bổ đề 1.7 suy ra tồn tại hai ma trận khả nghịch P, Q sao cho ta có phân tích

$$PEQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}, \quad PA_0Q = \begin{pmatrix} A_{01} & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}, \quad PA_1Q = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{13} & A_{14} \end{pmatrix}.$$

Bằng tính toán và các phép biến đổi ma trận, ta có nghiệm của hệ (3.1) cho bởi

$$\begin{cases} x(k) = \overline{A}_{01}^k P_1 x(0) + \sum\limits_{i=0}^{k-1} \overline{A}_{01}^{k-1-i} \bar{A}_1 x(i - h(i)) + \bar{A}_2 x(k - h(k)), \\ x(k) = \varphi(k), \quad k \in \{-\tau, -(\tau-1), ..., 0\}, \end{cases} \tag{3.2}$$

trong đó

$$\overline{A}_{01} = Q \begin{bmatrix} A_{01} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}, \; P_1 = Q \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1},$$

$$\bar{A}_1 = Q \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}, \quad \bar{A}_2 = Q \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -A_{13} & -A_{14} \end{bmatrix} Q^{-1}.$$

Mệnh đề 3.1. *Giả sử rằng hệ* (3.1) *thỏa mãn điều kiện chính quy và causal. Với* $x(k;\varphi)$ *là nghiệm của hệ* (3.1)*. Khi đó ta có các tính chất sau:*

(i) $P_1 x(k;\varphi) = x(k;\varphi) - \bar{A}_2 x(k - h(k);\varphi), \forall k \in \mathbb{N}.$

(ii) $x(k+1;\varphi) = \overline{A}_{01} x(k;\varphi) + \bar{A}_1 x(k - h(k);\varphi) + \bar{A}_2 x(k+1-h(k+1);\varphi), k \in \mathbb{N}.$

(iii) $x(k;\alpha\varphi) = \alpha x(k;\varphi), \; \forall \alpha > 0, k \in \mathbb{N}.$

Tiếp đến chúng tôi đưa ra điều kiện cần và đủ để đảm bảo cho hệ (3.1) là hệ dương.

Định lý 3.2. *Giả sử hệ* (3.1) *là chính quy và causal. Khi đó các phát biểu sau là tương đương.*

(i) *Hệ* (3.1) *là hệ dương .*

(ii) $\bar{A}_2 \succeq 0$, *tồn tại các ma trận* $H_1 \succeq 0$, $H_2 \succeq 0$ *sao cho:*

$$\overline{A}_{01} = H_1 P_1; \quad \bar{A}_1 = H_1 \bar{A}_2 + H_2.$$

Nhận xét 3.1. Chú ý rằng Định lý 3.2 là kết quả mở rộng cho kết quả [17] trong trường hợp hệ không có trễ và causal. Thật vậy, xét hệ suy biến không có trễ $Ex(k+1) = A_0 x(k)$ thì điều kiện cần và đủ để hệ này là hệ dương được chứng minh trong bài báo ([17], Định lý 3.3) là tồn tại một ma trận H sao cho $H \succeq 0$, và thỏa mãn điều kiện $\hat{E}^D\hat{A}_0 = H\hat{E}^D\hat{E}$, trong đó ma trận $\hat{A}_0$ và $\hat{E}$ được xác định bởi $\hat{E} = (\lambda E - A_0)^{-1} E$, $\quad \hat{A}_0 = (\lambda E - A_0)^{-1} A_0$, với λ là số phức sao cho $det(\lambda E - A_0) \neq 0$. $\hat{E}^D$ là ma trận Drazin inverse của ma trận $\hat{E}$. Trong trường hợp (E, A_0) thỏa mãn điều kiện chính quy và causal, bằng các phép biến đổi ma trận (tham khảo [18]) ta thu được:

$$\hat{E} = Q\begin{bmatrix}(\lambda I_r - A_{01})^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Q^{-1}, \quad \hat{A}_0 = Q\begin{bmatrix}(\lambda I_r - A_{01})^{-1}A_{01} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Q^{-1}.$$

Ma trận Drazin inverse của ma trận $\hat{E}$ là $\hat{E}^D = Q\begin{bmatrix}\lambda I_r - A_{01} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Q^{-1}$. Do đó ta có $\hat{E}^D\hat{E} = Q\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Q^{-1}$, $\quad \hat{E}^D\hat{A}_0 = Q\begin{bmatrix}A_{01} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Q^{-1}$. Như vậy điều kiện $H \succeq 0$, $\hat{E}^D\hat{A}_0 = H\hat{E}^D\hat{E}$ là tương đương với điều kiện (ii) của Định lý 3.2 với $A_1 = 0$.

Nhận xét 3.2. Nếu ma trận Q là ma trận Monomial thì điều kiện (ii) của Định lý 3.2 sẽ tương đương với điều kiện sau: $A_{01} \succeq 0$, $A_{11} \succeq 0$, $A_{12} \succeq 0$, $A_{13} \preceq 0$, $A_{14} \preceq 0$.

Nhận xét 3.3. Điều kiện (ii) trong Định lý 3.2 là các hệ phương trình và bất phương trình tuyến tính với các ẩn H_1, H_2 do đó có thể đưa về bài toán quy hoạch tuyến tính để giải tương tự như kết quả trong [17].

Tiếp theo chúng tôi đưa ra một điều kiện cần và đủ để đảm bảo hệ (3.1) là hệ dương và ổn định mũ.

Định lý 3.3. *Giả sử cặp ma trận (E, A_0) thỏa mãn điều kiện chính quy và causal. Các ma trận $\overline{A}_{01}$, $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, P_1 được xác định trong* (2.2)*. Khi đó các phát biểu sau là tương đương:*

(i) *Hệ* (3.1) *là hệ dương và ổn định mũ .*

(ii) *Ma trận $\bar{A}_2 \succeq 0$, và tồn tại các ma trận $H_1 \succeq 0$, $H_2 \succeq 0$, véc tơ $p \gg 0$ và số $\delta \in (0,\, 1)$ sao cho*

$$\overline{A}_{01} = H_1 P_1, \quad \bar{A}_1 = H_1\bar{A}_2 + H_2. \tag{3.3}$$

$$\big(H_1 + H_2 + \bar{A}_2\big)p \preceq \delta\, p. \tag{3.4}$$

Nhận xét 3.4. Điều kiện (3.4) trong định lý là độc lập với độ trễ τ, mặc dù điều kiện (3.4) tương đương với điều kiện $\big(H_1 + H_2 + \bar{A}_2\big)p \preceq \alpha^{\tau+1}p$, với $\alpha \in (0, 1)$, vì $\alpha := \sqrt[\tau+1]{\delta}$. Tuy nhiên điều kiện $\big(H_1 + H_2 + \bar{A}_2\big)p \preceq \alpha^{\tau+1}p$ là độc lập với độ trễ vì nếu điều kiện này thỏa mãn với một giá trị τ nào đó thì điều kiện này cũng thỏa mãn với những giá trị τ khác.

Nhận xét 3.5. Điều kiện (3.4) trong Định lý 3.3 là không tuyến tính với các ẩn H_i, p, δ. Tuy nhiên, với (3.3), (3.4) ta có thể giải như sau: Vì điều kiện (3.3) là độc lập với p, δ nên trước tiên ta sẽ tìm nghiệm H_i từ ràng buộc (3.3), vậy điều kiện (3.4) chỉ còn lại ẩn p với δ cho trước. Ta có thể tìm các ẩn trong Định lý 3.3 cho bài toán ổn định thông qua các bước sau đây:

- *Bước 1:* Kiểm tra xem cặp ma trận (E, A_0) có thỏa mãn điều kiện chính quy và causal hay không (theo định nghĩa). Nếu không thỏa mãn dừng lại, nếu có chuyển sang Bước 2.

- *Bước 2:* Xác định hai ma trận khả nghịch P, Q, sao cho các ma trận (E, A_0, A_1) của hệ (3.1) có phân tích thành các ma trận như trong (3.2).

- *Bước 3:* Cho trước số $\delta \in (0, 1)$. Tìm các ma trận $H_1, H_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ và véc tơ $p \in \mathbb{R}^n_+$, sao cho các điều kiện (3.3) -(3.4) của Định lý 3.3 được thỏa mãn bằng việc sử dụng các thuật toán giải bài toán quy hoạch tuyến tính.

Nhận xét 3.6. Các bước để xác định P, Q trong Bước 2 của Nhận xét 3.5 như sau.

- *Bước 1:* Chọn số γ sao cho $det(\gamma\, E - A_0) \neq 0$. Chú ý rằng vì cặp (E, A_0) là chính quy nên tồn tại vô số γ để $det(\gamma\, E - A_0) \neq 0$ ngoại trừ hữu hạn các số là nghiệm của phương trình $det(\gamma\, E - A_0) = 0$.

- *Bước 2:* Đặt $\hat{E} = (\gamma E - A_0)^{-1}$, khi đó theo phân tích Jordan của ma trận, sẽ tồn tại ma trận khả nghịch $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sao cho

  $$T\hat{E}T^{-1} = \text{diag}(\hat{E}_1,\ \hat{E}_2),$$

  trong đó $\hat{E}_1 \in \mathbb{R}^{r\times r}$ là khả nghịch, $\hat{E}_2 \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$ là ma trận lũy linh.

- *Bước 3:* Tính P, Q như sau

  $$P = \text{diag}(\hat{E}_1^{-1},\ (\gamma\hat{E}_2 - I_{n-r})^{-1})\, T\, (\gamma E - A_0)^{-1};\ \ Q = T^{-1}.$$

Nhận xét 3.7. Định lý 3.3 cho ta một điều kiện cần và đủ đảm bảo tính ổn định mũ của hệ suy biến (3.1), tuy nhiên với những hệ suy biến không thỏa mãn điều kiện chính quy, causal thì định lý không còn đúng nữa. Để giải quyết hạn chế này tiếp theo chúng tôi xét bài toán ổn định hóa dạng mũ cho lớp hệ phương trình rời rạc suy biến dương có trễ .

3.2 Tiêu chuẩn ổn định hóa của hệ rời rạc suy biến dương có trễ

Trong phần này bài toán ổn định hóa hệ rời rạc suy biến dương có trễ được xét đến. Một điều kiện đủ dưới dạng bài toán quy hoạch tuyến tính cho ta xác định được hàm điều khiển sao cho hệ điều khiển là ổn định mũ. Xét hệ điều khiển mô tả bởi hệ phương trình suy biến sau

$$\begin{cases} Ex(k+1) = A_0x(k) + A_1x(k-h) + Bu(k), \quad k \in \mathbb{N}, \\ x(k) = \varphi(k), \quad k \in \{-h, -(h-1), ..., 0\}, \end{cases} \tag{3.5}$$

với $x(k) \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N}$ là véc tơ trạng thái, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ là véc tơ điều khiển, $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Ma trận $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là suy biến và $rank(E) = r < n$; $h > 0$, $\varphi(\cdot) : \{-h, \cdots, 0\} \to \mathbb{R}^n$ là hàm điều kiện ban đầu với $\|\varphi\| = \max\limits_{k\in\{-h,-(h-1),...,0\}} \|\varphi(k)\|$.

Định nghĩa 3.4. ([2])

i) Hệ (3.5) (với $u(k) = 0$) gọi là chính quy nếu cặp ma trận (E, A_0) là chính quy.

ii) Hệ (3.5) ($u(k) = 0$) gọi là causal nếu $deg(det(zE - A_0)) = rank(E) = r$.

Định nghĩa 3.5. Cho số $\alpha \in (0, 1)$. Hệ (3.5) (với $u(k) = 0$) gọi là $\alpha-$ ổn định mũ nếu hệ là chính quy, causal và tồn tại số dương $M > 0$ sao cho với điều kiện ban đầu tương thích $\varphi(\cdot)$ thì nghiệm $x(k; \varphi)$ thỏa mãn điều kiện

$$\|x(k; \varphi)\| \le M\|\varphi\|\alpha^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Định nghĩa 3.6. Cho số $\alpha \in (0, 1)$. Hệ (3.5) gọi là $\alpha-$ ổn định hóa được dạng mũ nếu tồn tại hàm điều khiển ngược $u(k) = Kx(k)$, $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sao cho hệ đóng tương ứng

$$\begin{cases} Ex(k+1) = (A_0 + BK)x(k) + A_1x(k-h), \quad k \in \mathbb{N} \\ x(k) = \varphi(k), \quad k \in \{-h, -(h-1), ..., 0\}, \end{cases}$$

là $\alpha-$ ổn định mũ.

Tương tự như với hệ liên tục, với hệ suy biến (3.5) không có điều kiện chính quy, causal trên cặp ma trận (E, A_0) ta sẽ dùng phân tích SVD để đưa hệ (3.5) về hệ mới như sau: Vì $rank(E) = r < n$, theo Bổ đề 1.9 tồn tại hai ma trận khả nghịch P, Q sao cho $PEQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Ta kí hiệu

$$PEQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} := \tilde{E}, \quad PA_0Q = \begin{bmatrix} A_{01} & A_{02} \\ A_{03} & A_{04} \end{bmatrix} := \tilde{A}_0,$$

$$PA_1Q = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{13} & A_{14} \end{bmatrix} := \tilde{A}_1, \quad PB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} := \tilde{B}.$$

Qua phép đổi biến $y(k) = Q^{-1}x(k) = [\, y_1(k),\ y_2(k)\,]$ trong đó $y_1(k) \in \mathbb{R}^r$, $y_2(k) \in \mathbb{R}^{n-r}$, hệ (3.5) đưa về dạng sau

$$\begin{cases} y_1(k+1) = & A_{01}y_1(k) + A_{02}y_2(k) + A_{11}y_1(k-h) + A_{12}y_2(k-h) + B_1u(k), \\ 0 = & A_{03}y_1(k) + A_{04}y_2(k) + A_{13}y_1(k-h) + A_{14}y_2(k-h) + B_2u(k), \\ y_1(k) = & \phi_1(k),\, y_2(k) = \phi_2(k),\, k \in \{-h,\, -(h-1),\, ...,\, 0\}, \end{cases} \tag{3.6}$$

trong đó $Q^{-1}\varphi(k) = [\phi_1^T(k), \phi_2^T(k)]^T$. Sử dụng hàm điều khiển ngược

$$u(k) = K_1y_1(k) + K_2y_2(k) \tag{3.7}$$

trong đó $K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$, $K_1 \in \mathbb{R}^{m\times r}$, $K_2 \in \mathbb{R}^{m\times(n-r)}$, và kí hiệu $A_{1,K} = A_{01} + B_1K_1$, $A_{2,K} = A_{02} + B_1K_2$, $A_{3,K} = A_{03} + B_2K_1$, $A_{4,K} = A_{04} + B_2K_2$, khi đó hệ (3.6) trở thành

$$\begin{cases} y_1(k+1) = & A_{1,K}y_1(k) + A_{2,K}y_2(k) + A_{11}y_1(k-h) + A_{12}y_2(k-h), \\ 0 = & A_{3,K}y_1(k) + A_{4,K}y_2(k) + A_{13}y_1(k-h) + A_{14}y_2(k-h). \end{cases} \tag{3.8}$$

Mệnh đề 3.4. *Giả sử $Q \succeq 0$. Nếu hệ (3.6) là $\alpha-$ ổn định hóa được dạng mũ với hàm điều khiển ngược (3.7), thì hệ (3.5) là $\alpha-$ ổn định hóa được dạng mũ với hàm điều khiển ngược $u(k) = KQ^{-1}x(k)$.*

Định lý sau cho một điều kiện đủ đảm bảo tính $\alpha-$ ổn định hóa được dạng mũ của hệ (3.5).

Định lý 3.5. *Cho số dương $0 < \alpha < 1$. Giả sử $\tilde{A}_1 \succeq 0$, và tồn tại các véc tơ $\beta = (\beta_1,\, \beta_2,\, ...,\, \beta_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $k_j \in \mathbb{R}^m$, $j = 1, 2, ..., n$, sao cho các bất đẳng thức sau thỏa mãn*

$$(\tilde{A}_0)_{(i,j)}\beta_j + (\tilde{B})_i^T k_j \geq 0; \quad 1 \leq i \neq j \leq n;\ i = j = 1, ..., r. \tag{3.9}$$

$$\big(\alpha^{-1}\tilde{A}_0 + \alpha^{-(h+1)}\tilde{A}_1 - \tilde{E}\big)\beta + \tilde{B}\alpha^{-1}\sum_{i=1}^{n} k_i \ll 0. \tag{3.10}$$

Khi đó hệ (3.5) là dương và $\alpha-$ ổn định hóa được dạng mũ. Hơn nữa, hàm điều khiển ngược ổn định hóa hệ (3.5) cho bởi:

$$u(k) = KQ^{-1}x(k) = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{\beta_1} & \frac{k_2}{\beta_2} & ... & \frac{k_n}{\beta_n} \end{bmatrix} Q^{-1}x(k).$$

Nhận xét 3.8. Định lý 3.5 cũng cho ta một điều kiện đủ cho bài toán ổn định hóa hệ suy biến rời rạc dương dưới dạng bài toán LP với các biến $\beta, k_j,\ j = 1, 2, ..., n$. Ta xây dựng hàm điều khiển ngược cho bài toán ổn định hóa thông qua các bước sau đây:

- *Bước 1:* Xác định hai ma trận khả nghịch P, Q , sao cho các ma trận (E, A_0, A_1, B) của hệ ban đầu có phân tích thành các ma trận $(\tilde{E},\ \tilde{A}_0,\ \tilde{A}_1,\ \tilde{B})$, sao cho $\tilde{A}_1 \succeq 0,\ Q \succeq 0$.

- *Bước 2:* Tìm các véc tơ $\beta \in \mathbb{R}^n_+,\ k_j \in \mathbb{R}^m,\ j = 1, 2, ..., n$, sao cho thỏa mãn các điều kiện (3.9), (3.10) (sử dụng Programming Optimal Toolbox).

- *Bước 3:* Xây dựng ma trận K cho bởi công thức

$$K = \left[\frac{k_1}{\beta_1}\ \frac{k_2}{\beta_2}\ ...\ \frac{k_n}{\beta_n}\right].$$

- *Bước 4:* Xác định hàm điều khiển ngược cho bởi $u(k) = KQ^{-1}x(k)$.

Kết luận

Luận án nghiên cứu tính ổn định và bài toán ổn định hóa cho một số hệ phương trình suy biến dương có trễ trong cả hai trường hợp liên tục và rời rạc.Những kết quả đã được chứng minh trong luận án và điểm mới của luận án so với các kết quả đã có là:

- Chứng minh các điều kiện cần và đủ cho tính dương của hệ suy biến tuyến tính có trễ và chứng minh điều kiện đủ cho tính ổn định mũ của hệ suy biến dương tương ứng.
- Đưa ra một số điều kiện đủ cho tính ổn định hóa được dạng mũ của hệ điều khiển tuyến tính liên tục và rời rạc suy biến dương có trễ dưới dạng bài toán quy hoạch tuyến tính.

Luận án mở ra một số vấn đề có thể tiếp tục nghiên cứu:

- Nghiên cứu bài toán ổn định và ổn định hóa cho các hệ phương trình tuyến tính không ôtônôm suy biến dương có trễ.
- Ứng dụng giải một số bài toán điều khiển H_∞, điều khiển tối ưu cho hệ phương trình suy biến dương có trễ.

Công trình liên quan đến luận án

[1]. V. N. Phat, N. H. Sau, On exponential stability of linear singular positive delayed systems, Applied Mathematics Letters, **38**(2014), 67-72 (SCI).

[2]. N. H. Sau, P. Niamsup, V. N. Phat, Positivity and stability analysis for linear implicit difference delay equations, Linear Algebra and its Applications, **510**(2016), 25-41 (SCI).

[3]. Nguyen H. Sau, Vu N. Phat, LP approach to exponential stabilization of singular linear positive time-delay systems via memory state feedback, Journal of Industrial and Management Optimization, 2017, doi: 10.3934/jimo.2017061 (SCIE).

[4]. N.H. Sau, V.N. Phat, New criteria for exponential stabilization of singular linear positive discrete-time delay systems, IMA Journal of Mathematical Control and Information (submitted).

Các kết quả liên quan đến luận án đã được tác giả báo cáo tại

1. Seminar của Phòng Tối ưu và điều khiển, Viện Toán học

2. Hội nghị nghiên cứu sinh của Viện Toán học (10/2014, 10/2015, 10/2016).

Tài liệu tham khảo

[1] S.L. Campbell, *Singular systems of differential equation,* Pitman, London, 1980.

[2] L. Dai, *Singular Control Systems, Lecture Notes in Control and Information Sciences,* Berlin: Springer-Verlag, 1989.

[3] D. L. Debeljković, I. Buzurović, L. Matija, Đ. Koruga, Non-lyapunov stability of singular systems: classical and modern approaches with application to automatic drug delivery, Contemporary Materials **1**(2013), 22-32.

[4] D. Efimov, A. Polyakov, & J. P. Richard, Interval observer design for estimation and control of time-delay descriptor systems, European Journal of Control, **23** (2015) 26-35.

[5] L. Farina , Rinaldi, *Positive Linear Systems,* New York: Wiley, 2000.

[6] E. Fridman, Stability of linear descriptor systems with delay: a Lyapunov-based approach, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **273** (2002), 24-44.

[7] G. H. Golub, C. F. V. Loan, *Matrix Computations*, Johns Hopkins University Press, Baltimore, third ed., 1996.

[8] J.K. Hale, *Theory of Functional Differential Equations,* Springer-Verlag, New York, 1977.

[9] T. Kaczorek , *Positive 1D and 2D Systems,* Springer-Verlag, London, 2002.

[10] V.L. Kharitonov, *Time-Delay Systems: Lyapunov Functionals and Matrices,* Birkhauser, 2013.

[11] J. Lam, S. Xu , *Robust Control and Filtering of Singular Systems,* Berlin: Springer (2006).

[12] X. Liu, Constrained control of positive systems with delays, IEEE Transactions on Automatic Control, **54** (2009), 1596-1600.

[13] X. Liu, W. Yu and L. Wang, Stability Analysis for Continuous-Time Positive Systems With Time-Varying Delays, in IEEE Transactions on Automatic Control, **55** (2010), 1024-1028.

[14] W. Michiels, Spectrum-based stability analysis and stabilisation of systems described by delay differential algebraic equations, IET Control Theory & Applications **5** (2011), 1829-1842.

[15] H. Minc, *Non-negative Matrices,* John Wiley & Sons, NY,1988.

[16] P.H.A. Ngoc, Stability of positive differential systems with delay, IEEE Transactions on Automatic Control, **58** (2013), 203-209.

[17] M. A. Rami, D. Napp, Positivity of discrete singular systems and their stability: An LP-based approach, Automatica, **50** (2014), 84-91.

[18] E. Virnik, Stability analysis of positive descriptor systems, Linear Algebra and its Applications, **429** (2008), 2640-2659.

[19] V. A. Yakubovich, G. A. Leonov, A. K. Gelig, *Stability of stationary sets in control systems with discontinuous nonlinearities.* Singapore: World Scientific, 2004.