

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

VIỆN TOÁN HỌC

-----

**Trần Thị Thu Hương**

**ĐẶC TRƯNG KHÔNG GIAN TRẠNG THÁI VÀ  
TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA MỘT SỐ HỆ  
SANDPILE MODEL MỞ RỘNG**

**Chuyên ngành: Cơ sở Toán học cho Tin học**

**Mã số: 62 46 01 10**

**Cán bộ hướng dẫn: PGS.TS. Phan Thị Hà Dương, Viện Toán học**

**LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC**

Hà Nội, 2014

Đặc trưng không gian trạng thái và tính ổn định  
của một số hệ Sandpile Model mở rộng

Trần Thị Thu Hương

Chuyên ngành: Cơ sở Toán học của Tin học

Mã số: 62 46 01 10

Cán bộ hướng dẫn: PGS.TS. Phan Thị Hà Dương, Viện Toán học

Ngày 27 tháng 3 năm 2014

# Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi dưới sự hướng dẫn của PGS. TS. Phan Thị Hà Dương. Các kết quả viết chung với các tác giả khác đã được sự nhất trí của đồng tác giả khi đưa vào luận án. Các kết quả nghiên cứu trong luận án là mới và chưa từng được ai công bố trong bất kì công trình nào khác.

Tác giả

Trần Thị Thu Hương

# Lời cảm ơn

Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành và sâu sắc nhất tới cô giáo tôi, PGS. TS. Phan Thị Hà Dương - người thầy, người đồng nghiệp mà tôi rất mực kính trọng, yêu quý và đầy lòng biết ơn. Chính sự say mê, niềm nhiệt huyết trong công tác nghiên cứu Toán của cô đã truyền cảm hứng cho tôi ngay từ khi mới bước chân vào Viện Toán. Dưới sự hướng dẫn của cô, theo thời gian, tôi đã trưởng thành và vững tin hơn rất nhiều trên con đường nghiên cứu của mình. Với tôi, cô còn là người bạn lớn có thể chia sẻ những khó khăn không những trong công việc mà trong cả cuộc sống.

Tôi xin gửi lời cảm ơn tới các thầy, các đồng nghiệp, những người đã giúp tôi trong trao đổi khoa học, thảo luận, đóng góp ý kiến, động viên tinh thần,...: GS. Lê Tuấn Hoa, GS. Ngô Việt Trung, GS. Nguyễn Việt Dũng, Ths. Phạm Văn Trung, GS. Robert Cori, PGS. Phạm Trà Ân, GS. Ngô Đắc Tân, TS. Lê Công Thành, TS. Lê Mạnh Hà, TS. Đỗ Phan Thuận, GS. Dominique Rossin, PGS. Trương Xuân Đức Hà, ThS. Hoàng Phi Dũng, CN. Phùng Văn Doanh.

Tôi xin cảm ơn bạn tôi, TS. Phạm Thị Anh Lê, người đã đọc kỹ bản thảo và sửa rất nhiều lỗi diễn đạt, chính tả và đánh máy.

Tôi xin gửi lời cảm ơn tới các cơ quan, tổ chức: Trung tâm đào tạo sau đại học, Viện Toán học, Viện Khoa học và công nghệ Việt Nam, Quỹ Nafosted, VIASM (Viện nghiên cứu cao cấp về Toán), LIA Formath Vietnam, đã tài trợ và tạo điều kiện thuận lợi cho công tác nghiên cứu, trao đổi khoa học của tôi trong thời gian làm luận án. Đặc biệt, tôi xin cảm ơn Viện Toán học đã cho tôi làm việc trong một môi trường bình đẳng, thân thiện, hòa nhã, vui vẻ và lành mạnh.

Luận án dành tặng ba mẹ tôi và hai cháu (Bin và Tóc): những người có thể không hiểu nội dung luận án nhưng chỉ cần nhìn thấy họ, tôi đã thấy cả bầu trời và

là nguồn động viên lớn nhất giúp tôi hoàn thành luận án đúng kỳ hạn.

Luận án còn tặng cho những ai yêu Toán.

# Mục lục

Mục lục	1
Danh mục hình vẽ	3
Danh mục ký hiệu	6
Tóm tắt	7
Abstract	8
Mở đầu	9
<b>1 Hệ động lực rời rạc</b>	<b>13</b>
1.1 Các kiến thức chuẩn bị . . . . .	13
1.1.1 Đồ thị . . . . .	13
1.1.2 Phân hoạch của số tự nhiên, tập thứ tự bộ phận và dàn . . . . .	18
1.1.3 Ngôn ngữ . . . . .	24
1.2 Một số hệ động lực rời rạc . . . . .	25
1.2.1 Các kiến thức chung về hệ động lực rời rạc . . . . .	25
1.2.2 Hệ CFG . . . . .	28
1.2.3 Hệ SPM . . . . .	34
<b>2 Hệ SPM: Tính ổn định</b>	<b>40</b>
2.1 Hệ E-SPM . . . . .	41
2.2 Cấu trúc không gian trạng thái của các phân hoạch trơn . . . . .	43
2.3 Độ dài đường đi giữa hai phân hoạch trơn trong hệ E-SPM . . . . .	46

2.4	Kết luận chương . . . . .	57
<b>3</b>	<b>Hệ SPM đối xứng song song</b>	<b>58</b>
3.1	Một số mở rộng của hệ SPM . . . . .	59
3.1.1	Hệ SPM song song (P-SPM) . . . . .	59
3.1.2	Hệ SPM đối xứng (S-SPM) . . . . .	60
3.2	Hệ SPM đối xứng song song (PS-SPM): Trạng thái ổn định . . . . .	64
3.3	Kết luận chương . . . . .	81
<b>4</b>	<b>Các hệ mở rộng CFG có dấu và SPM đối xứng</b>	<b>82</b>
4.1	Hệ mở rộng CFG có dấu (S-CFG) . . . . .	83
4.2	Các mở rộng S-SPM và S-CFG trên đường thẳng . . . . .	84
4.2.1	Sự đẳng cấu . . . . .	85
4.2.2	Trạng thái ổn định . . . . .	86
4.3	Các mở rộng trên đồ thị vòng: $SPM(C_n)$ , $CFG(C_n)$ , $S-SPM(C_n)$ và $S-CFG(C_n)$ . . . . .	93
4.3.1	Các hệ $SPM(C_n)$ và $CFG(C_n)$ ; $S-SPM(C_n)$ và $S-CFG(C_n)$ : Sự đẳng cấu . . . . .	93
4.3.2	Cấu trúc không gian và đặc trưng trạng thái . . . . .	98
4.3.3	Trạng thái ổn định của hệ $S-CFG(C_n)$ . . . . .	103
4.4	Kết luận chương . . . . .	109
	<b>Kết luận</b>	<b>110</b>
	<b>Danh mục các công trình</b>	<b>113</b>
	<b>Tài liệu tham khảo</b>	<b>113</b>

# Danh sách hình vẽ

1.1	Đồ thị đầy đủ $K_4$ . . . . .	17
1.2	Biểu đồ Ferrer của phân hoạch $(4, 3, 2, 2, 2, 1)$ . . . . .	18
1.3	Biểu đồ Hasse của một số tập thứ tự . . . . .	21
1.4	Dàn và không phải dàn . . . . .	22
1.5	Dàn phân phối địa phương trên nhưng không phân phối địa phương dưới . . . . .	23
1.6	Đồ thị quỹ đạo của CFG . . . . .	30
1.7	Luật rơi phải . . . . .	36
1.8	Không gian trạng thái của SPM(6) và SPM(30) . . . . .	36
2.1	Không gian trạng thái của hệ E-SPM . . . . .	43
2.2	Không gian trạng thái của hệ E-SPM . . . . .	45
2.3	Biểu đồ Ferrer . . . . .	48
2.4	Cột trơn và đường chéo . . . . .	48
2.5	Biểu đồ năng lượng . . . . .	52
2.6	Đường đi dài nhất . . . . .	54
2.7	Đường đi dài nhất giữa hai phân hoạch trơn . . . . .	55
2.8	Phản ví dụ cho $e_a(i, j) = e_b(i, j)$ . . . . .	56
3.1	Không gian trạng thái của: (a): SPM(6); (b): PS-SPM(6) . . . . .	60
3.2	Dãy đơn đỉnh . . . . .	61
3.3	Không gian trạng thái của hệ S-SPM(5) . . . . .	63
3.4	Khai triển SPM . . . . .	64
3.5	Không gian trạng thái của hệ PS-SPM(5) . . . . .	65



3.6	Thủ tục Atom trên $(4, 3, 2, 1)$ . . . . .	68
3.7	Thủ tục đan xen trên $(9)$ . . . . .	70
3.8	Thủ tục giả đan xen trên $(13)$ . . . . .	74
3.9	Cột đối xứng . . . . .	75
3.10	Đường đi từ $(20)$ tới trạng thái ổn định $(1123(4)3321)$ . . . . .	80
4.1	CFG có dấu . . . . .	84
4.2	Trọng số của các ký tự 0 của một từ trong $\mathcal{LS}$ . . . . .	91
4.3	Không gian trạng thái của S-SPM( $C_4, 4$ ) . . . . .	96
4.4	Dàn con SPM( $C_3, 10$ ) của dàn SPM(10) . . . . .	101

# Danh mục ký hiệu

$\mathbf{Alt}^t(a)$	Áp dụng thủ tục đạn xen $t$ bước trên $a$ .....	71
$\mathbf{Atom}^t(a)$	Áp dụng thủ tục Atom $t$ bước trên $a$ .....	67
<b>CFG</b>	Chip Firing Game .....	28
$\mathbf{CFG}(G)$	Hệ CFG trên đồ thị $G$ .....	28
$\mathbf{CFG}(G, \mathcal{O})$	Hệ CFG trên $G$ xuất phát từ trạng thái $\mathcal{O}$ .....	29
$\mathbf{CFG}(G, k)$	Hệ CFG trên $G$ xuất phát từ các trạng thái có trọng số $k$ .....	29
$\delta$	Ánh xạ lấy hiệu đẳng cấu giữa hệ SPM và CFG .....	38
<b>E-SPM</b>	Hệ SPM mở rộng với luật thêm hạt .....	41
$\mathcal{LS}$	Ngôn ngữ ổn định trên $\{1,0\}$ .....	87
$\mathbf{PAlt}^t(a)$	Áp dụng thủ tục giả đạn xen $t$ bước trên $a$ .....	73
<b>P-SPM</b> ( $N$ )	Hệ SPM song song xuất phát từ ( $N$ ) .....	59
<b>PS-SPM</b> ( $N$ )	Hệ SPM đối xứng song song xuất phát từ ( $N$ ) .....	65
<b>SE-SPM</b>	Tập các phân hoạch trơn cảm sinh từ hệ E-SPM .....	44
<b>SPM</b>	Sandpile Model .....	34
$\mathbf{SPM}(N)$	Hệ SPM xuất phát từ ( $N$ ) .....	35
<b>S-SPM</b> ( $N$ )	Hệ SPM đối xứng xuất phát từ ( $N$ ) .....	62

$a^{\downarrow i}$	Dãy thu được từ $a$ bằng thêm một hạt vào cột $i$ .....	42
$a_{<i}(a_{>i})$	Dãy bên trái (phải) thực sự của $a$ tại $i$ .....	61
$d$	Ánh xạ lấy hiệu đẳng cấu giữa hệ S-SPM và S-CFG trên đường thẳng ...	85
$d^n$	Ánh xạ lấy hiệu trên đồ thị vòng $C_n$ .....	96
$E(a)$	Năng lượng của $a$ .....	49
$e_a(i, j)$	Năng lượng của hạt $(i, j)$ trong $a$ .....	49
$FP(\mathbf{S-CFG}(C_n, k))$	Tập trạng thái ổn định của S-CFG( $C_n, k$ ) .....	105

# Tóm tắt

Luận án trình bày một số mở rộng của hai hệ động lực rời rạc Sandpile model (SPM) và Chip firing game (CFG). Hai hệ này đã được nghiên cứu rất nhiều trong những năm gần đây bằng nhiều cách tiếp cận khác nhau. Chúng tôi nghiên cứu bài toán đạt được, cấu trúc không gian và thời gian đạt được trên các hệ mở rộng này.

Mở rộng thêm hạt trên hệ SPM: Nghiên cứu sự ổn định của hệ dưới tác động từ bên ngoài bằng việc bổ sung luật thêm hạt vào các cột hợp lý mỗi khi hệ đạt tới trạng thái ổn định duy nhất. Chúng tôi chỉ ra rằng có thể thu được tất cả các phân hoạch trơn bằng cách này. Từ đó chứng minh cấu trúc dàn của các phân hoạch trơn trong mối liên quan với dàn Young. Hơn nữa, nhờ giới thiệu khái niệm năng lượng chúng tôi mô tả được sự biến thiên của hệ thông qua các đại lượng được tính toán tường minh là đường đi ngắn nhất và dài nhất.

Mở rộng hệ SPM thành hệ đối xứng song song (PS-SPM): Các cột có thể rơi sang cả hai phía (tính đối xứng) và các cột có thể rơi thì rơi đồng thời (tính song song), chúng tôi đã chỉ ra hệ SPM đối xứng song song và hệ SPM đối xứng có tập trạng thái ổn định có cùng hình dạng. Chứng minh này mang tính xây dựng nhờ chỉ ra tường minh con đường áp dụng luật PS-SPM kết hợp giữa các thủ tục đan xen, giả đan xen và tắt định một cách hợp lý.

Mở rộng hệ CFG thành hệ CFG có dấu: Các đỉnh trong hệ CFG có thể chứa một số âm các chip và các đỉnh chứa chip đủ âm cũng có thể bắn. Chúng tôi chỉ ra các đẳng cấu giữa hệ SPM đối xứng và hệ CFG có dấu trong hai trường hợp khi đồ thị nền là đường thẳng vô hạn và đồ thị vòng. Nhờ việc kết hợp nghiên cứu giữa hai hệ này, chúng tôi đặc trưng cho các trạng thái của các hệ và đưa ra một số tính toán tổ hợp liên quan đến số trạng thái ổn định của chúng.

# Abstract

The manuscript presents some generalizations of two discrete dynamical systems: Sandpile model (SPM) and Chip firing game (CFG), which have recently received great attentions in mathematics, physics and theoretical computer science. We focus on the reachabilities, the time to reach stable configurations and the configuration spaces on these systems.

We study the stability of the SPM where grains can be added from outside on random columns. We prove that the infinite set of all stable configurations have a lattice structure which is a sublattice of Young lattice. Moreover, by using the concept of "energy" for each stable configuration, we give the formulae for the smallest and the greatest time to reach stable configurations.

We investigate a generalization of the SPM, called the parallel symmetric sandpile model, where columns can fall on either the left or the right (symmetric model) and at each step, all fallable columns will fall (parallel model). We prove that although the parallel model produces really less number of fixed points than that by the sequential model, the forms of fixed points of the two models coincide. Moreover, our proof is a constructive one which gives a nearly shortest way to reach a given fixed point form.

We present an extension of the CFG, called signed chip firing game, by allowing a negative number of chips at some vertices and negative vertices can fire. We show the isomorphism between symmetric sandpile model and signed chip firing game when the supported graph is either cycles or the infinite graph. Therefore, we give a characterization of reachable configurations and of fixed points of each model. At the end, we give explicit formulae for the number of their fixed points.

# Mở đầu

Lý thuyết hệ động lực đã được nghiên cứu nhiều trong các lĩnh vực khác nhau như Toán học, Vật lý, Sinh học, Hóa học. Hệ động lực là một quá trình tiến hóa theo thời gian và được mô tả bằng các trạng thái và các luật vận động. Một hệ động lực là rời rạc nếu thời gian là trong  $\mathbb{Z}$ . Trên hệ động lực rời rạc người ta quan tâm đến một số vấn đề sau: sự hội tụ của hệ, cấu trúc (thứ tự, dàn, nhóm) của không gian các trạng thái của hệ, tính đạt được của hệ (khi nào một trạng thái đạt được từ một trạng thái khác bằng cách áp dụng một số lần luật vận động), sự ổn định của hệ dưới các tác động, ... Trong luận án này, chúng tôi nghiên cứu các vấn đề trên cho một số mở rộng của hai hệ động lực CFG (Chip firing game) và hệ SPM (Sandpile model).

Hệ CFG được giới thiệu bởi Bak, Tang và Wiesenfeld khi nghiên cứu các hệ đột biến có tổ chức trong tự nhiên vào năm 1987 [3]. Năm 1991, Bjorner, Lovász và Shor [7] đã mô hình hóa hệ bằng Toán học và sử dụng lý thuyết ngôn ngữ để nghiên cứu sự hội tụ của hệ. Theo đó, hệ CFG được định nghĩa trên một đa đồ thị có hướng  $G = (V, E)$ , được gọi là đồ thị nền. Mỗi trạng thái của hệ là một sự phân bố chip trên  $V$ . Luật vận động là luật bắn: một đỉnh có thể bắn nếu chứa số chip ít nhất bằng số bậc đi ra của nó, và khi bắn nó sẽ cho tất cả các đỉnh dọc theo các cạnh đi ra này một chip. Năm 1997, Biggs nghiên cứu sự hội tụ của hệ CFG dưới tên gọi khác là "dollar game" và đã chỉ ra các điều kiện hội tụ của hệ phụ thuộc vào tổng số chip của trạng thái ban đầu [5]. Tiếp theo, Phan và các đồng nghiệp nghiên cứu cấu trúc không gian các trạng thái của hệ CFG trên đồ thị nền không có thành phần đóng không tầm thường. Các tác giả chứng minh hệ có cấu trúc dàn phân phối địa phương dưới [27, 32]. Sau đó, Dhar et. al. [17] và Cori và Rossin [11] nghiên cứu cấu

trúc nhóm trên một lớp các trạng thái ổn định đặc biệt (được gọi là các trạng thái đột biến) của hệ CFG trên đồ thị vô hướng có đỉnh chìm, và thực hiện nhiều tính toán tổ hợp liên quan đến lý thuyết đồ thị như số cây bao trùm, ma trận Laplace. Điều này cũng được nghiên cứu sâu hơn và mở rộng cho đồ thị có hướng nhờ sử dụng các công cụ của đại số [28]. Hơn nữa, gần đây hệ CFG còn được sử dụng như là một công cụ trong nghiên cứu một số vấn đề về đại số liên quan đến các định lý Riemann-Roch, đa thức Tutte, giả thuyết về  $h$ -vector của Stanley [4, 36, 38].

Hệ SPM và một số hệ khác liên quan đã được giới thiệu và nghiên cứu trong các lĩnh vực khác nhau: trong bối cảnh về dàn các phân hoạch của các số tự nhiên bởi Brylawsky [8]; từ góc nhìn của Vật lý để nghiên cứu hiện tượng tự đột biến có tổ chức (SOC) bởi Bak, Tang và Wiesenfeld [3]; từ cách tiếp cận của Tổ hợp bởi Anderson et. al., Spencer, Goles và Kiwi [1, 23, 43]. Hệ SPM là hệ động lực rời rạc, trong đó mỗi trạng thái (thường được gọi là các cột cát) là một dãy giảm dần. Luật vận động là luật rơi, tức là khi một cột cát có độ cao lớn hơn cột bên phải của nó ít nhất là 2 đơn vị (thường được gọi là hạt) thì nó sẽ cho hàng xóm đó một hạt. Năm 1993, Goles và Kiwi đã chứng minh rằng hệ SPM có thể được mã hóa như một hệ CFG trên đồ thị nên là nửa đường thẳng vô hạn. Nhờ vậy, hệ SPM kế thừa một số tính chất tổng quát của hệ CFG như sự hội tụ, cấu trúc dàn. Ngoài ra, do là một CFG trên đồ thị đặc biệt nên nó cũng có một số tính chất đặc trưng như các trạng thái đạt được từ một cột duy nhất đều được đặc tả và do vậy trạng thái ổn định duy nhất cũng được xác định tường minh. Hơn nữa, chúng ta cũng có thể tính được thời gian để hệ hội tụ đến trạng thái ổn định duy nhất [23, 26, 27, 31]. Bên cạnh đó, hệ SPM và một số biến thể của nó còn được sử dụng để tính toán hoặc sinh tổ hợp các lớp con của các phân hoạch như phân hoạch trơn, phân hoạch chặt và có thể dùng để chứng minh một số đẳng thức tổ hợp [8, 33, 34, 35].

Mục đích của luận án:

1. Nghiên cứu quá trình tự ổn định của hệ SPM dưới tác động từ bên ngoài. Nhắc lại rằng các hệ trong tự nhiên ngoài sự vận động nội tại bên trong còn bị tác động bởi các yếu tố từ bên ngoài. Mỗi khi hệ ổn định, một tác động nhỏ từ bên ngoài sẽ phá vỡ sự ổn định của hệ và làm cho hệ tiếp tục vận động với luật nội tại. Để đo sự biến thiên của hệ dưới tác động bên ngoài này, chúng tôi quan tâm tới sự

chuyển đổi giữa các trạng thái ổn định và thời gian chuyển đổi giữa chúng.

2. Đề xuất các hệ mở rộng trên các hệ SPM và CFG để mô tả tốt hơn hoặc phù hợp với các mục đích khác nhau của các hệ trong thực tế. Với các hệ mở rộng này, chúng tôi quan tâm đến đặc trưng các trạng thái, trạng thái ổn định; cấu trúc không gian; sự hội tụ; thời gian hội tụ và các tính toán tổ hợp trên các trạng thái của hệ.

Với mục tiêu này, luận án trình bày bốn chương chính. Trước đó, một số kiến thức chuẩn bị và các kết quả đã được nghiên cứu liên quan đến luận án trên hai hệ SPM và CFG được trình bày trong Chương 1.

Chương 2: Nghiên cứu tính ổn định của hệ SPM dưới tác động từ bên ngoài. Chúng tôi xét hệ SPM có bổ sung *luật thêm*: mỗi khi hệ đạt đến một trạng thái ổn định duy nhất, thì một hạt sẽ được thêm vào một cột, và hệ lại tiếp tục vận động với luật rơi nội tại để đạt đến một trạng thái ổn định khác, và tiếp tục quá trình này. Chúng tôi quan tâm đến tập tất cả các trạng thái ổn định thu được bằng cách như vậy. Các kết quả trong phần này là: sinh ra tập tất cả các phân hoạch trơn bằng hệ động lực; chứng minh rằng tập các phân hoạch trơn có cấu trúc dàn và là dàn con của dàn Young (dàn các phân hoạch với quan hệ thứ tự bao hàm). Thêm vào đó, bằng việc đưa ra khái niệm "năng lượng", chúng tôi cũng tính thời gian để hệ đạt đến một trạng thái ổn định cho trước. Trong hệ này vì thời gian của mỗi con đường đến một trạng thái ổn định là khác nhau nên việc đánh giá thời gian sẽ thông qua thời gian ngắn nhất và dài nhất. Đây cũng là cơ sở để khảo sát sự biến thiên của hệ dưới tác động từ bên ngoài.

Chương 3: Nghiên cứu một mở rộng của hệ SPM thành hệ SPM đối xứng song song. Trong đó một cột có thể rơi sang bên phải hoặc bên trái nếu hiệu độ cao tương ứng ít nhất là 2 (hệ mở rộng SPM đối xứng) và các cột có thể rơi (trái hoặc phải) sẽ rơi đồng thời (hệ mở rộng SPM song song). Hệ SPM đối xứng được nghiên cứu bởi Formenti et. al [22] và bởi Phan [40]. Trong khi Formenti et. al xem xét hình dạng của các trạng thái mà không quan tâm tới vị trí của cột khởi đầu (tức là, các trạng thái sai khác nhau một phép tịnh tiến trên đường thẳng sẽ được đồng nhất với nhau), Phan xét các trạng thái của nó cùng với vị trí của cột khởi đầu. Cả hai đều đưa ra đặc trưng cho các hình dạng của các trạng thái và tính toán tổ hợp các



dạng ổn định (hình dạng của trạng thái ổn định) của hệ. Hệ SPM đối xứng hội tụ tới nhiều trạng thái ổn định. Bên cạnh đó, các nghiên cứu về các hệ song song cũng rất được quan tâm, ví dụ hệ SPM song song đã được nghiên cứu bởi Durand-Lose [20]. Trong hệ này, trạng thái ổn định chính là trạng thái ổn định của hệ SPM và thời gian để hệ hội tụ đến trạng thái ổn định đó là tuyến tính. Trong chương này, chúng tôi chứng minh mặc dù trạng thái ổn định của hệ SPM đối xứng song song là một tập con của tập trạng thái ổn định của hệ SPM đối xứng, nhưng dạng ổn định của chúng lại trùng nhau (Định lý 3.2.1). Chứng minh của chúng tôi mang tính kiến thiết. Hơn nữa, chúng tôi cũng đưa ra một đánh giá gần chính xác cho thời gian ngắn nhất để hệ SPM đối xứng song song hội tụ tới một trạng thái ổn định.

Chương 4: Nghiên cứu một mở rộng của hệ SPM và hệ CFG thành các hệ SPM đối xứng và CFG có dấu tương ứng và mối liên hệ giữa chúng. Mục 4.2 đưa ra các mở rộng trên đường thẳng và mục 4.3 là trên đồ thị vòng. Chúng tôi mở rộng bằng cách thêm luật cho các hệ như sau. Với hệ SPM, một cột có thể rơi sang bên phải hoặc bên trái nó nếu hiệu độ cao tương ứng ít nhất là 2. Với hệ CFG, các đỉnh có thể chứa một số âm các chip và các đỉnh đủ âm chip cũng có thể bắn như các đỉnh đủ dương chip. Bằng cách mở rộng như trên, việc mô tả các hệ trong thực tế sẽ tốt hơn. Hơn nữa, hệ CFG có dấu có thể được sử dụng để mã hóa hệ SPM đối xứng. Với mỗi đối tượng nghiên cứu khác nhau chúng tôi sẽ hoặc là làm trên hệ SPM rồi chuyển các kết quả sang hệ CFG hoặc ngược lại. Chẳng hạn, bài toán đặc trưng các trạng thái sẽ được thực hiện trên hệ SPM và bài toán tính toán tổ hợp số các trạng thái ổn định sẽ được thực hiện trên hệ CFG. Các kết quả đạt được khi đồ thị nền là đường thẳng và đồ thị vòng là: mã hóa hệ SPM đối xứng bởi hệ CFG có dấu; đặc trưng trạng thái; đưa ra các tính toán tổ hợp cho số trạng thái định theo độ dài và theo trọng số. Từ đây chúng tôi cũng chỉ ra rằng mở rộng hệ CFG theo cách này là một mở rộng tự nhiên, và có thể được áp dụng cho những nghiên cứu khác.

# Chương 1

## Hệ động lực rời rạc

Chương này nhắc lại các kiến thức chuẩn bị, một số hướng nghiên cứu và các kết quả đã biết về hai hệ được nghiên cứu chính trong luận án: Hệ SPM (Sandpile model) và hệ CFG (Chip firing game).

### 1.1 Các kiến thức chuẩn bị

Luận án tập trung nghiên cứu hai hệ động lực rời rạc được quan tâm rất nhiều: hệ SPM (Sand pile model) và hệ CFG (Chip firing game). Hai hệ này được định nghĩa trên một đồ thị nền. Các kết quả trên hai hệ có liên quan nhiều đến một số tính toán tổ hợp trên các phân hoạch của số tự nhiên, cấu trúc thứ tự, cấu trúc dàn trên không gian các trạng thái của các hệ. Bởi vậy, trong phần này chúng tôi sẽ trình bày các kiến thức cơ sở về đồ thị, tập thứ tự, dàn, ngôn ngữ,... được tham khảo chủ yếu trong [2, 13, 18, 37, 44, 45].

#### 1.1.1 Đồ thị

Trước hết, chúng tôi trình bày các khái niệm cho đồ thị vô hướng sau đó sẽ đề cập tương tự cho đồ thị có hướng.

**Định nghĩa 1.1.1 (Đa đồ thị vô hướng).** Một *đa đồ thị vô hướng* là một cặp có thứ tự  $G = (V, E)$ , trong đó  $V$  là một tập hợp khác rỗng, được gọi là tập *đỉnh*

của  $G$ , và  $E$  là một đa tập trong tập các cặp không phân biệt thứ tự  $\{u, v\}$ , với  $u, v \in V$ , được gọi là tập *cạnh* của  $G$ .

Cho  $G$  là một đa đồ thị vô hướng. Nếu  $e = \{u, v\} \in E$  thì các đỉnh  $u, v$  được gọi là các đầu mút của  $e$  và  $u$  *liên thuộc* với  $e$ , hơn nữa, hai đỉnh  $u, v$  được gọi là *liên kề*, hay *hàng xóm* của nhau. Nếu  $e = \{u, u\}$  thì  $e$  được gọi là một khuyên. *Bậc* của một đỉnh  $u \in V$ , ký hiệu là  $\deg(u)$ , là số các cạnh của  $G$  liên thuộc với  $u$ , trong đó các khuyên tại  $u$  được tính hai lần. Ta cũng thường ký hiệu cạnh  $\{u, v\}$  ngắn gọn là  $uv$ .

Trong trường hợp tập cạnh  $E$  là một đa tập trong tập các cặp có phân biệt thứ tự  $V \times V$ , thì  $G = (V, E)$  được gọi là một *đa đồ thị có hướng* và các phần tử thuộc  $E$  đôi khi còn gọi là các cung. Với  $e = (u, v) \in E$  thì  $u$  được gọi là đỉnh đầu và  $v$  được gọi là đỉnh cuối của  $e$  và ta nói cạnh  $e$  đi từ  $u$  đến  $v$ . *Bậc đi ra* và *bậc đi vào* của đỉnh  $u \in V$  là số các cạnh đi ra từ  $u$  và đi vào  $u$  tương ứng, được ký hiệu lần lượt là  $\deg^+(u)$  và  $\deg^-(u)$ .

Nếu giữa hai đỉnh  $u, v \in V$  của đồ thị  $G = (V, E)$  (có hướng hoặc vô hướng) có nhiều nhất một cạnh thì đồ thị  $G$  được gọi là *đơn đồ thị* (có hướng hoặc vô hướng tương ứng).

Một *đồ thị con* của  $G$  là một đồ thị thu được từ  $G$  bằng cách xóa bớt đi một số đỉnh (và các cạnh liên thuộc với các đỉnh đó) và một số cạnh của  $G$ . Một *đồ thị con bao trùm* của  $G$  nếu nó có tập đỉnh trùng với tập đỉnh của  $G$ . *Đồ thị con cảm sinh* bởi tập đỉnh  $V' \subseteq V$  của  $G$ , ký hiệu là  $G[V']$ , là một đồ thị con của  $G$  với tập đỉnh là  $V'$  và tập các cạnh là tất cả các cạnh của  $G$  mà có hai đầu mút thuộc  $V'$ .

Một *đường đi có hướng* độ dài  $k$  từ đỉnh  $u$  đến đỉnh  $v$  trong  $G$  là dãy  $v_0, \dots, v_k$  sao cho  $v_0 = u, v_k = v, v_i \in V$  và  $(v_i, v_{i+1}) \in E$  với mọi  $i = 0, \dots, k - 1$ . Khi đó, đỉnh  $u$  được gọi là đỉnh đầu và đỉnh  $v$  được gọi là đỉnh cuối của đường đi. *Đường đi đơn* là một đường đi mà không có hai cạnh nào được lặp lại. Một *chu trình* của  $G$  là một đường đi sao cho đỉnh đầu và đỉnh cuối của nó là trùng nhau.

Các khái niệm đường đi và chu trình trong trường hợp vô hướng được định nghĩa một cách tương tự.

Đồ thị  $G$  (có hướng hoặc vô hướng) được gọi là *liên thông* nếu giữa hai đỉnh tùy ý của  $G$  đều có một đường đi vô hướng (nếu là đồ thị có hướng thì không xét đến

hướng của các cạnh). Đồ thị có hướng được gọi là *liên thông mạnh* nếu giữa hai đỉnh tùy ý của nó có một đường đi có hướng.

Tập  $S \subseteq V$  được gọi là một *thành phần liên thông* của đồ thị vô hướng  $G = (V, E)$  nếu  $G[S]$  là liên thông và với mọi  $S' \supsetneq S$  thì  $G[S']$  không liên thông.

Tập  $S \subseteq V$  được gọi là một *thành phần liên thông mạnh* của đồ thị có hướng  $G = (V, E)$  nếu  $G[S]$  là liên thông mạnh và với mọi  $S' \supsetneq S$  thì  $G[S']$  không liên thông mạnh.

Tập  $S \subseteq V$  được gọi là một *thành phần đóng* (closed component) của đồ thị có hướng  $G$  nếu  $S$  là một thành phần liên thông mạnh và không tồn tại cạnh nào của  $G$  đi ra từ một đỉnh trong  $S$ .

Tiếp theo, chúng tôi nhắc lại khái niệm của một dạng đồ thị đặc biệt được nghiên cứu và ứng dụng rất nhiều trong tin học bởi cấu trúc đơn giản của nó, được gọi là cây.

**Định nghĩa 1.1.2 (Cây).** Một đồ thị vô hướng, liên thông, không có chu trình được gọi là một *cây*.

Dễ thấy rằng trong một cây thì số đỉnh nhiều hơn số cạnh đúng là 1. Hơn nữa, ta có các điều kiện tương đương thường được sử dụng để chứng minh tính chất cây như sau:

**Định lý 1.1.1.** Cho  $G = (V, E)$  là một đồ thị vô hướng và  $|V| = n$ . Các mệnh đề sau là tương đương:

- i)  $G$  là một cây.
- ii)  $G$  là liên thông và  $|E| = |V| - 1$ .
- iii)  $G$  không có chu trình và  $|E| = |V| - 1$ .
- iv) Giữa hai đỉnh của  $G$  tồn tại duy nhất một đường đi đơn.
- v)  $G$  không có chu trình và nếu thêm bất kỳ cạnh nào vào  $G$  thì đồ thị nhận được sẽ có một chu trình đơn.

vi)  $G$  liên thông và nếu xóa bỏ bất kỳ cạnh nào của  $G$  thì đồ thị nhận được không còn liên thông nữa.

**Định nghĩa 1.1.3 (Cây bao trùm).** Cho  $G$  là một đồ thị vô hướng. Một *cây bao trùm* của  $G$  là một đồ thị con bao trùm của  $G$  sao cho nó là một cây.

Có rất nhiều bài toán liên quan đến cây bao trùm của một đồ thị. Trong đó, bài toán nổi tiếng nhất là tính số cây bao trùm của một đồ thị cho trước. Số này thực chất được cho bởi định thức của ma trận biểu diễn đồ thị, được gọi là ma trận Laplace. Bên cạnh đó, ma trận Laplace cùng với ma trận liên kề (ma trận biểu diễn sự liên kề nhau của các đỉnh trong đồ thị) cũng được dùng như là một công cụ để nghiên cứu nhiều bất biến cũng như các tính chất của đồ thị. Trong phần 1.2.2, chúng tôi cũng sẽ sử dụng các ma trận này để mô tả luật vận động của hệ CFG và dùng để nghiên cứu các tính chất nhóm cho hệ CFG này.

**Định nghĩa 1.1.4 (Ma trận liên kề).** Cho  $G = (V, E)$  là một đa đồ thị (có hướng hoặc vô hướng) với  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ . *Ma trận liên kề* của  $G$  là ma trận  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ , trong đó  $a_{ij}$  là số các cạnh đi từ  $v_i$  tới  $v_j$ .

**Định nghĩa 1.1.5 (Ma trận Laplace).** Cho  $G = (V, E)$  là một đa đồ thị (có hướng hoặc vô hướng) với  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ . *Ma trận Laplace* của  $G$  được cho bởi:

$$\Delta = D - A,$$

trong đó  $D$  là ma trận đường chéo với các phần tử trên đường chéo  $d_{ii}$  là số bậc (bậc đi ra) của đỉnh  $v_i$  và  $A$  là ma trận liên kề của  $G$ .

Từ định nghĩa, ta thấy tổng các phần tử trong một hàng của ma trận Laplace luôn bằng 0. Do vậy,  $\Delta$  luôn có một vector riêng là 0 ứng với giá trị riêng là  $(1, 1, \dots, 1)$ . Hơn nữa, trong trường hợp  $G$  là vô hướng thì các ma trận liên kề và ma trận Laplace của  $G$  là các ma trận đối xứng. Ta ký hiệu ma trận  $\Delta^*$  là ma trận rút gọn của  $\Delta$  bằng cách xóa đi hàng và cột thứ  $n$ . Định lý sau còn được gọi là định lý Kirchhoff.

**Định lý 1.1.2 (Định lý Matrix-Tree).** Cho  $G$  là một đa đồ thị vô hướng có ma trận Laplace  $\Delta$ . Khi đó, số cây bao trùm của  $G$  đúng bằng định thức của ma trận Laplace rút gọn  $\Delta^*$ .

Một cách tương tự, chúng ta cũng có một phiên bản khác của Định lý 1.1.2 cho trường hợp  $G$  là đa đồ thị có hướng và có một đỉnh đặc biệt  $s$  (thường gọi là *đỉnh chìm*) mà không có cạnh đi ra từ nó. Trong đó, cây bao trùm sẽ có gốc tại  $s$ . *Cây bao trùm có gốc  $s$*  là cây bao trùm của  $G$  (khi bỏ qua hướng) sao mọi đỉnh khác  $s$  đều có đường có hướng đi duy nhất tới  $s$ . Ký hiệu  $\Delta^{(s)}$  là ma trận Laplace rút gọn theo  $s$  của  $G$  bằng cách xóa hàng và cột tương ứng với  $s$ . Định lý được phát biểu lại như sau:

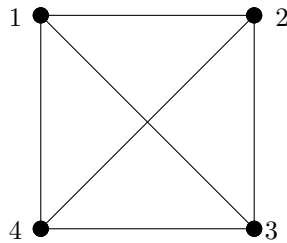
**Định lý 1.1.3 (Định lý Matrix-Tree, cho đồ thị có hướng).** *Cho  $G$  là một đa đồ thị có hướng và có duy nhất một đỉnh chìm  $s$ . Khi đó, số cây bao trùm có gốc tại  $s$  của  $G$  đúng bằng định thức của ma trận Laplace rút gọn  $\Delta^{(s)}$ .*

**Ví dụ 1.1.1.** Với đồ thị đầy đủ bốn đỉnh  $K_4$  như Hình 1.1. Ta có

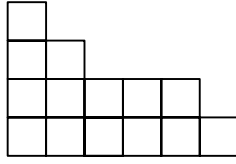
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad \Delta^* = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ta có  $|\Delta^*| = 9$  và do đó  $K_4$  có 9 cây bao trùm.



Hình 1.1: Đồ thị đầy đủ  $K_4$



Hình 1.2: Biểu đồ Ferrer của phân hoạch  $(4, 3, 2, 2, 2, 1)$

### 1.1.2 Phân hoạch của số tự nhiên, tập thứ tự bộ phận và dàn

Trong phần này chúng tôi sẽ trình bày các kiến thức cơ sở về phân hoạch, tập thứ tự và cấu trúc dàn của một tập thứ tự [2, 13, 44].

**Định nghĩa 1.1.6 (Phân hoạch).** (i) Một *phân hoạch* (partition) là một dãy các số nguyên không âm  $a = (a_1, a_2, \dots, a_k)$  sao cho  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k > 0$  (quy ước,  $a_j = 0$  với mọi  $j > k$ ). Khi đó,  $a_i$  là các *phần* của  $a$ ; và  $k$  là *độ dài* của  $a$ , ký hiệu  $l(a) = k$ . Chúng ta nói rằng  $a$  là một phân hoạch của một số tự nhiên  $n$ , hay  $n$  là *trọng số* của  $a$ , và viết  $w(a) = n$ , nếu  $\sum_{i=1}^k a_i = n$ .

(ii) Một phân hoạch  $a$  được gọi là *trơn* nếu  $a_i - a_{i+1} \leq 1$  với mọi  $i = 1, 2, \dots, k$ .

(iii) Một phân hoạch  $a$  được gọi là *chật* nếu  $a_i - a_{i+1} \geq 1$  với mọi  $i = 1, 2, \dots, k$ .

Các biểu diễn hình học cho các phân hoạch thì không chỉ hữu ích về mặt trực quan mà còn được sử dụng để giải thích một cách dễ dàng cho nhiều tính chất của phân hoạch. Một trong những cách biểu diễn phổ biến được trình bày ở đây là biểu đồ Ferrer.

Cho  $a = (a_1, \dots, a_k)$  là một phân hoạch. *Biểu đồ Ferrer* biểu diễn  $a$  thành các cột liên tiếp nhau, trong đó cột thứ  $i$  gồm  $a_i$  ô vuông xếp chồng lên nhau. Hình 1.2 minh họa biểu đồ Ferrer của phân hoạch  $(4, 3, 2, 2, 2, 1)$ .

Bây giờ, nếu trong biểu đồ Ferrer của  $a$ , chúng ta quay các hàng thành các cột thì ta sẽ thu được một biểu đồ Ferrer của một phân hoạch khác. Phân hoạch này được gọi là *phân hoạch đối ngẫu* của  $a$ , ký hiệu là  $a^*$ . Chính xác hơn, các thành phần của  $a^*$  được xác định như sau:

$$a_i^* = |\{a_j : a_j \geq i\}|.$$

Ví dụ, đối ngẫu của phân hoạch  $(4, 3, 2, 2, 2, 1)$  trong Hình 1.2 là  $(6, 5, 2, 1)$ . Hơn nữa, từ định nghĩa dễ thấy rằng nếu  $a$  là một phân hoạch chặt thì  $a^*$  là một phân hoạch trơn và ngược lại.

Có rất nhiều nghiên cứu khác nhau về phân hoạch của các số tự nhiên [2, 44]. Đặc biệt, các nghiên cứu liên quan đến các tính toán tổ hợp trên các phân hoạch hoặc trên lớp con của các phân hoạch như phân hoạch trơn, phân hoạch chặt, ... cho đến nay cũng rất được quan tâm. Phần 1.2.3 sẽ cho thấy các trạng thái của hệ SPM có thể biểu diễn như các phân hoạch. Do vậy, việc nghiên cứu các hệ SPM cũng góp phần làm rõ một số tính chất của các phân hoạch. Hơn nữa, Chương 2 cũng sẽ trình bày một số kết quả liên quan đến các phân hoạch trơn và dàn Young.

Tiếp theo chúng tôi trình bày về tập thứ tự và dàn [13, 44].

**Định nghĩa 1.1.7 (Tập thứ tự bộ phận).** Cho  $P$  là một tập hợp khác rỗng. Một *thứ tự bộ phận* trên  $P$  là phép toán hai ngôi  $\leq_P$  (hay  $\leq$  trong trường hợp  $P$  đã rõ và không có nhầm lẫn) sao cho với mọi  $x, y, z \in P$ :

- i)  $x \leq x$  (*tính phản xạ*)
- ii) nếu  $x \leq y$  và  $y \leq x$ , thì  $x = y$  (*tính phản đối xứng*)
- iii) nếu  $x \leq y$  và  $y \leq z$ , thì  $x \leq z$  (*tính bắc cầu*).

Khi đó,  $(P, \leq_P)$  được gọi là một *tập thứ tự bộ phận* hay còn gọi là *tập được sắp*.

**Ví dụ 1.1.2.** 1. Cho  $X$  là một tập tùy ý. Tập lũy thừa  $\mathcal{P}(X)$  bao gồm tất cả các tập con của  $X$ , được sắp bởi quan hệ bao hàm, tức là với  $A, B \in \mathcal{P}(X)$  thì ta định nghĩa  $A \leq B$  nếu  $A \subseteq B$ .

2. Tập tất cả các phân hoạch của các số tự nhiên với phép toán hai ngôi được cho bởi *quan hệ bao hàm*, ký hiệu  $\leq_C$ , tức là  $a \leq_C b$  nếu  $a_i \geq b_i$  với mọi  $i$ , là một tập thứ tự bộ phận.

3. Tập tất cả các phân hoạch của các số tự nhiên với phép toán hai ngôi cho bởi *thứ tự trội (dominance order)*, ký hiệu  $\leq_D$ , tức là  $a \leq_D b$  nếu  $\sum_{t=1}^i a_t \leq \sum_{t=1}^i b_t$  với mọi  $i = 1, 2, \dots, \min\{l(a), l(b)\}$ , là một tập thứ tự bộ phận.



Cho  $(P, \leq_P)$  là một tập thứ tự. Tập  $(P', \leq_P)$ , với  $P' \subseteq P$ , được gọi là tập *thứ tự con* của  $P$ . Một phần tử  $x$  được gọi là *phủ*  $y$  hay  $y$  *bị phủ* bởi  $x$  nếu  $x \geq y$  và  $x \geq z \geq y$  thì  $x = z$  hoặc  $y = z$ . *Phần tử lớn nhất* (*nhỏ nhất*) của  $P$  là phần tử  $m \in P$  sao cho  $m \geq x$  ( $m \leq x$  tương ứng) với mọi  $x \in P$ .

Tập thứ tự  $(P, \leq)$  được gọi là một *xích* (chain) nếu với mọi  $x, y \in P$  thì ta đều có  $x \leq y$  hoặc  $y \leq x$ . Khi  $P$  là một xích thì ta cũng gọi  $|P|$  là độ dài của xích  $P$ . Hơn nữa,  $P$  được gọi là một *phản xích* (antichain) nếu với mọi  $x, y \in P$  mà  $x \leq y$  thì  $x = y$ . Nói cách khác, trong một xích thì giữa hai phần tử tùy ý đều so sánh được với nhau trong khi một phản xích thì hai phần tử nào cũng không so sánh được với nhau.

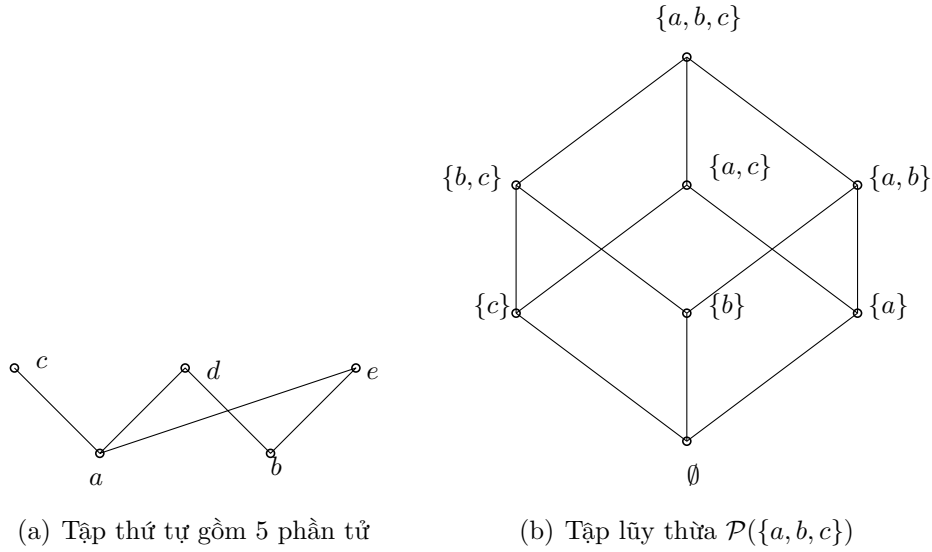
Một tập thứ tự hữu hạn  $(P, \leq)$  được biểu diễn bởi *biểu đồ Hasse* nhờ quan hệ phủ như là một đồ thị như sau: Các đỉnh là các phần tử của  $P$  và được sắp theo thứ tự từ dưới lên trên mặt phẳng theo quan hệ phủ trên  $P$ , tức là nếu  $x$  bị phủ bởi  $y$  thì  $x$  nằm dưới  $y$  trên mặt phẳng và nối một cạnh từ  $x$  tới  $y$ .

- Ví dụ 1.1.3.** 1. Hình 1.3(a) minh họa biểu đồ Hasse của tập thứ tự  $P = \{a, b, c, d, e\}$ , trong đó  $a \leq c$ ,  $a \leq d$ ,  $a \leq e$ ,  $b \leq d$ ,  $b \leq e$ .
2. Hình 1.3(b) minh họa biểu đồ Hasse của tập lũy thừa  $\mathcal{P}(X)$  với  $|X| = 3$  trong Ví dụ 1.1.2(1). Khi  $|X| = n$  thì biểu đồ Hasse của  $\mathcal{P}(X)$  còn được gọi là một *siêu khối* (*hypercube*)  $n$  chiều.

Một trong các lớp quan trọng của các tập thứ tự được ứng dụng nhiều trong các hệ tin học là lớp các dàn.

Cho  $(P, \leq)$  là một tập thứ tự bộ phận và  $x, y \in P$ . Khi đó,  $z \in P$  là *chặn trên* của  $x$  và  $y$  nếu  $z \geq x$  và  $z \geq y$ . *Chặn trên nhỏ nhất* của  $x$  và  $y$  là phần tử chặn trên  $z$  của  $x$  và  $y$  sao cho với mọi phần tử chặn trên  $w$  của  $x$  và  $y$  ta có  $w \geq z$ . Một cách đối ngẫu, ta cũng có các khái niệm cho *chặn dưới* và *chặn dưới lớn nhất*. Chặn trên nhỏ nhất và chặn dưới lớn nhất của  $x$  và  $y$  nếu tồn tại thì duy nhất và được ký hiệu bởi  $\sup(x, y)$  (hay  $x \vee y$ ) và  $\inf(x, y)$  (hay  $x \wedge y$ ) tương ứng. Với  $x \leq y$ , ký hiệu  $[x, y] = \{z \in P : x \leq z \leq y\}$  là tất cả các phần tử kẹp giữa  $x$  và  $y$ .

**Định nghĩa 1.1.8 (Dàn).** Một tập thứ tự  $(P, \leq)$  được gọi là một *dàn* (lattice) nếu



Hình 1.3: Biểu đồ Hasse của một số tập thứ tự

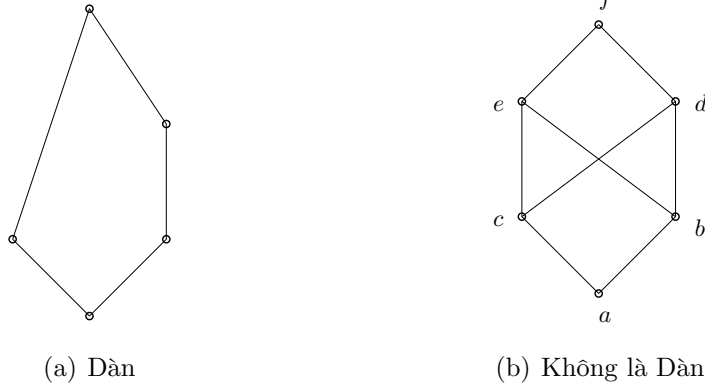
với mọi  $x, y \in P$  tồn tại duy nhất chặn dưới lớn nhất và chặn trên nhỏ nhất của  $x$  và  $y$ . Khi đó, chúng ta có thể nói rõ hơn rằng  $(P, \vee, \wedge)$  là một dàn.

Ngoài ra, người ta cũng định nghĩa dàn một cách tiên đề theo các phép toán hai ngôi  $\vee, \wedge$  và thỏa mãn một số điều kiện, tuy nhiên chúng tôi không đề cập tới định nghĩa này ở đây. Hình 1.4 minh họa một ví dụ về dàn và không là dàn. Ta có thể thấy trong Hình 1.4(b), hai phần tử  $b$  và  $c$  không tồn tại chặn trên nhỏ nhất.

- Ví dụ 1.1.4.**
1. Tập các số nguyên dương  $\mathbb{N}_0$  với quan hệ  $\leq$  là quan hệ chia hết, tức là  $a \leq b$  nếu  $a$  chia hết  $b$ . Khi đó,  $(\mathbb{N}_0, \leq)$  lập thành một dàn, trong đó  $\sup(a, b) = \text{lcm}(a, b)$  và  $\inf(a, b) = \text{gcd}(a, b)$ . Dàn này là một dàn vô hạn với phần tử nhỏ nhất là 1.
  2. Tập tất cả các phân hoạch của số tự nhiên với quan hệ bao hàm trong Ví dụ 1.1.2(2) là một dàn, trong đó  $\sup(a, b) = c$  với  $c_i = \min\{a_i, b_i\}$  và  $\inf(a, b) = d$  với  $d_i = \max\{a_i, b_i\}$ . Dàn này được gọi là *dàn Young*.
  3. Tập tất cả các phân hoạch của số tự nhiên với quan hệ thứ tự trội trong Ví dụ 1.1.2(3) là một dàn, trong đó  $\inf(a, b) = c$  với

$$c_i = \max\left\{\sum_{j \geq i} a_j, \sum_{j \geq i} b_j\right\} - \sum_{j > i} c_j,$$

và  $\sup(a, b) = \inf\{u : u \geq a, u \geq b\}$ . Dàn này còn được gọi là *dàn Brouwer*, ký hiệu là  $L_B$ .



Hình 1.4: Một ví dụ về dàn và không phải dàn

Lý thuyết dàn là một trong các đối tượng nghiên cứu cơ bản trong Toán học và được áp dụng rất nhiều trong Tin học. Một trong các tính chất của dàn là cho trước hai phần tử, chúng ta có thể tìm được phần tử đầu tiên lớn hơn (nhỏ hơn) chúng.

Một trong những lớp dàn có nhiều ứng dụng là lớp các dàn phân phối. Cụ thể, phần 1.2.2 sẽ trình bày kết quả nói rằng không gian trạng thái của hệ CFG trong trường hợp hội tụ sẽ là một dàn phân phối địa phương dưới và phân bậc.

**Định nghĩa 1.1.9 (Dàn phân phối).** Cho  $(P, \vee, \wedge)$  là một dàn. Khi đó,  $P$  là *dàn phân phối* nếu một trong hai điều kiện tương đương sau thỏa mãn:

i)  $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$  với mọi  $x, y, z \in P$ ;

ii)  $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$  với mọi  $x, y, z \in P$ .

Một *dàn con* của dàn  $P$  là một tập con  $P' \subseteq P$  sao cho với mọi  $u, v \in P'$  thì  $u \wedge v \in P'$  và  $u \vee v \in P'$  (trong đó các phép toán  $\wedge$  và  $\vee$  là lấy trên dàn  $P$ ). Một phần tử  $x$  của dàn  $P$  được gọi là *bất khả quy giao* (*meet-irreducible*) nếu  $x$  không thể là chặn dưới lớn nhất của một số hữu hạn các phần tử thực sự lớn hơn  $x$  trong  $P$ . Một cách đối ngẫu, ta cũng có khái niệm *bất khả quy hợp* (*join-irreducible*). Chú ý rằng nếu  $x$  không là bất khả quy giao thì  $x$  có thể có nhiều hơn một biểu diễn thành giao của các phần tử bất khả quy trong  $P$ . Chúng ta quan tâm đến lớp các

dàn khi mà biểu diễn này là duy nhất. Lớp các dàn như vậy còn được gọi là lớp dàn phân phối địa phương trên.

**Định nghĩa 1.1.10 (Dàn phân phối địa phương trên).** Một dàn  $(P, \vee, \wedge)$  được gọi là *dàn phân phối địa phương trên* (upper locally distributive) nếu với mỗi phần tử  $x \in P$  có duy nhất một biểu diễn của  $x$  thành giao của các phần tử bất khả quy giao trong  $P$ . Một cách đối ngẫu, chúng ta cũng có khái niệm *dàn phân phối địa phương dưới* (lower locally distributive).

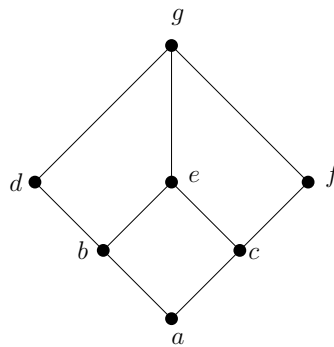
Một tính chất quan trọng của dàn phân phối địa phương trên (dưới) hay được dùng trong các chứng minh của hệ CFG là với mỗi phần tử  $x \in P$ , và nếu  $z_1, z_2, \dots, z_k$  là tất cả các phần tử phủ  $x$  thì tập

$$\{y \in P : x \leq y \leq z_1 \vee z_2 \vee \dots \vee z_k\}$$

lập thành một siêu khối chiều  $k$ . Hơn nữa, một dàn là phân phối nếu và chỉ nếu nó đồng thời là phân phối địa phương trên và địa phương dưới. Hình 1.5 minh họa một dàn là phân phối địa phương trên nhưng không là phân phối địa phương dưới vì đoạn

$$[d \wedge e \wedge f, g] = [a, g] = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

không phải là một siêu khối 3 chiều.



Hình 1.5: Dàn phân phối địa phương trên nhưng không phân phối địa phương dưới

**Định nghĩa 1.1.11 (Dàn phân bậc).** Một dàn được gọi là *phân bậc* nếu với mọi  $x, y \in P$  và  $x \leq y$  thì tất cả các xích từ  $x$  đến  $y$  đều có độ dài bằng nhau.

Nhận xét rằng để kiểm tra một tập thứ tự hữu hạn có phải là một dàn hay không, đôi khi chúng ta rất dễ thấy sự tồn tại của phần tử  $\inf(x, y)$  nhưng sự tồn tại của phần tử  $\sup(x, y)$  thì nhiều khi lại không thật sự rõ ràng và tường minh. Nếu mọi cặp phần tử của  $P$  đều tồn tại chặn dưới lớn nhất thì ta nói rằng  $P$  là một *nửa dàn giao*. Một cách đối ngẫu cho *nửa dàn hợp*. Mệnh đề sau rất hữu ích để nhận biết tập đó có là dàn không trong nhiều trường hợp.

**Mệnh đề 1.1.1** ([44]). *Cho  $P$  là một nửa dàn giao (hợp) hữu hạn và  $P$  có phần tử phần tử lớn nhất (nhỏ nhất, tương ứng). Khi đó,  $P$  là một dàn.*

### 1.1.3 Ngôn ngữ

Trong một số nghiên cứu mở đầu về CFG thì lý thuyết ngôn ngữ đã được dùng như là một công cụ mạnh để nghiên cứu tính chất hội tụ của CFG. Về sau, khi nghiên cứu về hệ SPM đối xứng, hệ SPM song song [20, 21, 39] thì lý thuyết ngôn ngữ cũng được sử dụng để đặc tả không gian trạng thái của các hệ này. Chúng tôi sẽ không đi sâu vào lý thuyết ngôn ngữ mà chỉ trình bày một số khái niệm cơ bản [37] sẽ được dùng trong các chương tiếp theo.

**Định nghĩa 1.1.12 (Bảng chữ cái).** Một *bảng chữ cái* là một tập hợp hữu hạn  $A$ , trong đó mỗi phần tử của  $A$  được gọi là một *ký tự* và dãy hữu hạn các phần tử của  $A$  được gọi là một *từ*.

Một dãy trống còn được gọi là *từ rỗng*. Tập hợp tất cả các từ trên  $A$  được ký hiệu là  $A^*$ . Trên  $A^*$  ta trang bị phép toán hai ngôi thu được bằng cách ghép hai từ như sau:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)(b_1, b_2, \dots, b_m) = (a_1, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m),$$

trong đó  $a_i, b_i \in A$ ,  $m, n \geq 0$ .

Phép toán hai ngôi này, có tính chất kết hợp, cho phép chúng ta viết từ dưới dạng liền  $a_1 a_2 \dots a_n$  thay vì  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

Cho  $w = a_1 a_2 \dots a_n \in A^*$ . *Từ ngược*  $w^{-1} = a_n a_{n-1} \dots a_1$  của  $w$  là từ viết các ký tự của  $w$  theo thứ tự ngược lại. Một *từ con* hay *dãy con*  $a_{k_1} a_{k_2} \dots a_{k_t}$  ( $1 \leq k_1 \leq$

$k_2 \leq \dots \leq n$ ) của  $w$  là từ thu được từ  $w$  bằng cách xóa đi một số ký tự. Một *đoạn con* hay *nhân tử*  $a_i a_{i+1} \dots a_j$  ( $1 \leq i \leq j$ ) của  $w$  là từ con với các thứ tự liên nhau trong  $w$ . Một *ngôn ngữ* trên  $A$  là một tập con của  $A^*$ .

**Ví dụ 1.1.5.** 1. Cho  $A = \{0, 1\}$ , ta có  $A^*$  là tập các xâu nhị phân. Tập các xâu nhị phân bắt đầu bởi 00 là một ngôn ngữ trên  $A$ .

2. Mỗi phân hoạch  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  cho tương ứng một dãy  $(d_1, d_2, \dots, d_k)$  bằng cách lấy hiệu hai phần liên tiếp của phân hoạch, tức là  $d_i = a_i - a_{i+1}$ . Khi đó, tập các phân hoạch trơn có thể xem như là một ngôn ngữ trên bảng chữ cái  $\{0, 1\}$ .

## 1.2 Một số hệ động lực rời rạc

Phần này giới thiệu hai hệ động lực rời rạc được sử dụng trong luận án là hệ CFG (Chip Firing Game) và hệ SPM (Sandpile Model). Trước hết, phần 1.2.1 nhắc lại một số đối tượng và thuật ngữ chung liên quan đến các hệ động lực rời rạc. Sau đó chúng tôi sẽ trình bày chi tiết về bối cảnh, các vấn đề nghiên cứu, một số kết quả đã có cho mỗi hệ lần lượt trong các phần 1.2.2 và phần 1.2.3. Các tài liệu tham khảo chính là các bài báo [3, 6, 7, 11, 16, 19, 23, 24, 26, 27, 31, 32, 33, 28].

### 1.2.1 Các kiến thức chung về hệ động lực rời rạc

Trước hết, định nghĩa hình thức của hệ động lực rời rạc được phát biểu như sau

**Định nghĩa 1.2.1 (Hệ động lực rời rạc).** *Hệ động lực rời rạc*  $S$  là một cặp  $S = (\mathcal{C}, \mathcal{R})$ , trong đó

- $\mathcal{C}$  là một tập hợp khác rỗng, được gọi là *không gian trạng thái* của hệ  $S$ .
- $\mathcal{R}$  là tập các hàm  $\phi : \mathbb{N} \times \mathcal{C} \rightarrow 2^{\mathcal{C}}$  thỏa mãn  $\phi(0, c) = c$  và  $\phi(t_2, \phi(t_1, c)) = \phi(t_1 + t_2, c)$  với mọi  $t_1, t_2 \in \mathbb{N}$  và  $c \in \mathcal{C}$ . Khi đó,  $\mathcal{R}$  còn được gọi là *luật vận động* của hệ  $S$ .

Trong luận án này chúng tôi sẽ nghiên cứu rất nhiều hệ động lực rời rạc khác nhau. Bởi vậy, để đơn giản các ký hiệu chúng tôi sẽ dùng tên đặt cho một hệ để chỉ tập không gian trạng thái của hệ đó.

Lý thuyết hệ động lực trước tiên được đưa ra để giải thích một số hiện tượng trong tự nhiên. Do đó, cho mục đích trực quan đôi khi chúng ta cũng dùng cách mô tả nó như là một quá trình tiến hóa theo thời gian. Tập hợp các trạng thái có thể có của hệ được gọi là *không gian trạng thái* của hệ đó. Quá trình tiến hóa theo thời gian của hệ được xem như các phép biến đổi từ không gian trạng thái của hệ vào chính nó và thường được gọi là *luật vận động*. Hệ động lực là rời rạc nếu thời gian chúng ta lấy là trong  $\mathbb{Z}$ . Một trạng thái  $b$  được gọi là *phần tử kế tiếp* của trạng thái  $a$ , được ký hiệu là  $a \rightarrow b$ , nếu  $b$  có thể thu được từ  $a$  bằng việc áp dụng một bước luật vận động. Hơn nữa,  $b$  được gọi là *đạt được* từ  $a$ , ký hiệu  $a \rightsquigarrow b$ , nếu  $b$  thu được từ  $a$  bằng áp dụng luật vận động một số lần. Thông thường thì mỗi hệ xuất phát trong tự nhiên đều có xu hướng tuân theo một số luật nào đó sao cho hệ trở nên ổn định nhất. Chúng tôi quan tâm đến các hệ xuất phát từ một trạng thái, được gọi là *trạng thái khởi đầu*, và sau đó nghiên cứu không gian gồm tất cả các trạng thái đạt được từ trạng thái ban đầu này. Theo đó, một hệ hoàn toàn được xác định bởi luật vận động và trạng thái khởi đầu. Để hiểu một hệ người ta thường quan tâm đến các trạng thái hoặc một số các trạng thái đặc biệt của hệ đó. Một *trạng thái ổn định* (hay *điểm cố định*) của hệ là trạng thái đạt được từ trạng thái ban đầu và trên đó chúng ta không thể áp dụng được luật vận động. *Đồ thị quỹ đạo* của một hệ là một đồ thị có hướng, trong đó các đỉnh của nó là các trạng thái đạt được, các cạnh là các cặp  $(a, b)$  thỏa mãn  $b$  là phần tử kế tiếp của  $a$ .

Cho trước một hệ  $S$ , để nghiên cứu cấu trúc không gian trạng thái của hệ  $S$ , người ta định nghĩa một quan hệ 2 ngôi  $\leq_S$  được cảm sinh từ quan hệ đạt được trên không gian các trạng thái của nó như sau:  $b \leq_S a$  nếu  $a \rightsquigarrow b$ . Quan hệ này phụ thuộc vào luật vận động của hệ và những hệ khác nhau có thể sẽ có các quan hệ khác nhau. Dễ thấy rằng quan hệ hai ngôi này có tính chất phản xạ và bắc cầu. Tuy nhiên, nhìn chung đây không phải là một quan hệ thứ tự, vì một trạng thái có thể đạt được từ chính nó và tạo ra vòng lặp trong đồ thị quỹ đạo của hệ và không thỏa mãn tính phản đối xứng. Mặc dù vậy, trong nhiều hệ đã được nghiên cứu, chẳng

hạn hai hệ SPM và CFG trên một số lớp các đồ thị, quan hệ hai ngôi cảm sinh này là một quan hệ thứ tự và hơn nữa trong một số trường hợp nó còn là một dàn.

Trong thực tế chúng ta cũng gặp những hệ bề ngoài rất khác nhau (các trạng thái khác nhau, luật vận động cũng khác nhau) nhưng sự biến thiên theo thời gian của chúng lại khá giống nhau. Do đó, với những hệ tương tự nhau, chúng ta chỉ cần nghiên cứu một hệ và rút ra các kết luận tương tự cho hệ còn lại. Người ta gọi các hệ tương tự nhau như vậy là các *hệ đẳng cấu*.

**Định nghĩa 1.2.2 (Đẳng cấu hệ động lực).** Hai hệ động lực được gọi là *đẳng cấu* nếu tồn tại một song ánh giữa các không gian trạng thái của chúng và song ánh này bảo toàn luật vận động.

Các nghiên cứu của chúng tôi được trình bày trong Chương 4.3 sẽ chỉ ra sự đẳng cấu giữa hệ SPM đối xứng và hệ CFG có dấu trên đồ thị vòng. Nhờ vậy, có những tính chất không dễ nghiên cứu trên hệ CFG lại có thể dễ dàng suy ra được từ việc nghiên cứu trên hệ SPM và ngược lại.

Mặc dù hệ động lực rời rạc được nghiên cứu rất nhiều và với nhiều mô hình cụ thể khác nhau có thể có nhiều ứng dụng trong thực tế. Tuy nhiên, trong khuôn khổ của luận án, chúng tôi tập trung vào các vấn đề sau đây trên các hệ mở rộng của hai hệ SPM, CFG và đã thu được một số kết quả nhất định:

1. Sự hội tụ, tính dừng của hệ.
2. Cấu trúc đại số, cấu trúc thứ tự, cấu trúc dàn trên không gian trạng thái của hệ.
3. Cho trước hai trạng thái, khi nào một trạng thái đạt được từ trạng thái còn lại?
4. Cho trước một trạng thái (trạng thái ổn định), tính thời gian (số lần áp dụng luật vận động) để tới được trạng thái (trạng thái ổn định) đó.
5. Đặc trưng cho các trạng thái đạt được, các trạng thái ổn định khi hệ có một (một lớp) trạng thái khởi đầu.



6. Sự ổn định của hệ nếu có tác động từ bên ngoài. Tính thời gian để hệ ổn định trở lại.

## 1.2.2 Hệ CFG

Phần này trình bày sự hội tụ, cấu trúc dàn, cấu trúc nhóm của hệ CFG trong trường hợp tuần tự trên đồ thị có hướng. Các kết quả được tham khảo trong [7, 11, 23, 32, 36].

### 1.2.2.1 Sự hội tụ và cấu trúc dàn của hệ CFG

Hệ CFG được giới thiệu bởi Bak, Tang và Wiesenfeld khi nghiên cứu các hệ đột biến có tổ chức trong tự nhiên vào năm 1988 [3]. Sau đó hệ được mô hình hóa bằng Toán học và được nghiên cứu nhờ sử dụng lý thuyết ngôn ngữ bởi Bjorner, Lovász và Shor vào năm 1991 [7]. Từ đó đến nay hệ này càng ngày càng được nghiên cứu bằng nhiều công cụ khác nhau như lý thuyết đồ thị, lý thuyết ngôn ngữ, Đại số, tổ hợp, lý thuyết Ôtomat và có rất nhiều ứng dụng trong Khoa học máy tính, Toán học, Kinh tế, Tổ hợp [7, 11, 17, 23, 32]. Trong những năm gần đây hệ còn được sử dụng như một công cụ trong các nghiên cứu về Đại số thuần túy liên quan đến các định lý Riemann-Roch, đa thức Tutte, giả thuyết Stanley, ...

Bjorner, Lovász và Shor [7] đã đưa ra định nghĩa hệ CFG, được phát biểu như sau

**Định nghĩa 1.2.3 (Hệ CFG).** Cho  $G = (V, E)$  là một đa đồ thị (có hướng hoặc vô hướng). Hệ CFG (*Chip firing game*) được định nghĩa trên  $G$  ( $G$  được gọi là *đồ thị nền* của hệ), ký hiệu là  $CFG(G)$ , là một hệ động lực rời rạc. Trong đó, mỗi trạng thái là một phân bố chip trên  $V$  và luật vận động là *luật bắn*. Luật bắn như sau: tại mỗi bước một *đỉnh bắn được* sẽ *bắn*. Ở đây, một đỉnh bắn được nếu chứa số chip ít nhất là số bậc (bậc đi ra) của nó và khi bắn nó sẽ cho tất cả các đỉnh dọc theo các cạnh đi ra này một chip.

Tại mỗi thời điểm, nếu luật bắn chỉ áp dụng cho một đỉnh bắn được thì ta có *hệ CFG tuần tự* hay *CFG* và nếu luật bắn áp dụng cho tất cả các đỉnh bắn được thì ta

có hệ CFG song song. Trong luận án, chúng tôi quan tâm đến hệ CFG tuần tự. Dễ dàng nhận thấy rằng tổng số chip trên tất cả các đỉnh của hệ được bảo toàn trong suốt quá trình vận động. Nghiên cứu hành vi, tính hội tụ của CFG nhìn chung là rất phức tạp. Vì vậy, người ta thường quan tâm đến các hệ CFG xuất phát từ một trạng thái khởi đầu  $\mathcal{O}$ , ký hiệu là  $CFG(G, \mathcal{O})$ ; hoặc xuất phát từ một lớp các trạng thái khởi đầu có tổng số chip trên tất cả các đỉnh là  $k$ , ký hiệu là  $CFG(G, k)$  ( $k$  được gọi là *trọng số* của hệ). Tính hội tụ của hệ CFG trên đồ thị vô hướng theo tổng số chip của nó được biết đến nhờ định lý sau:

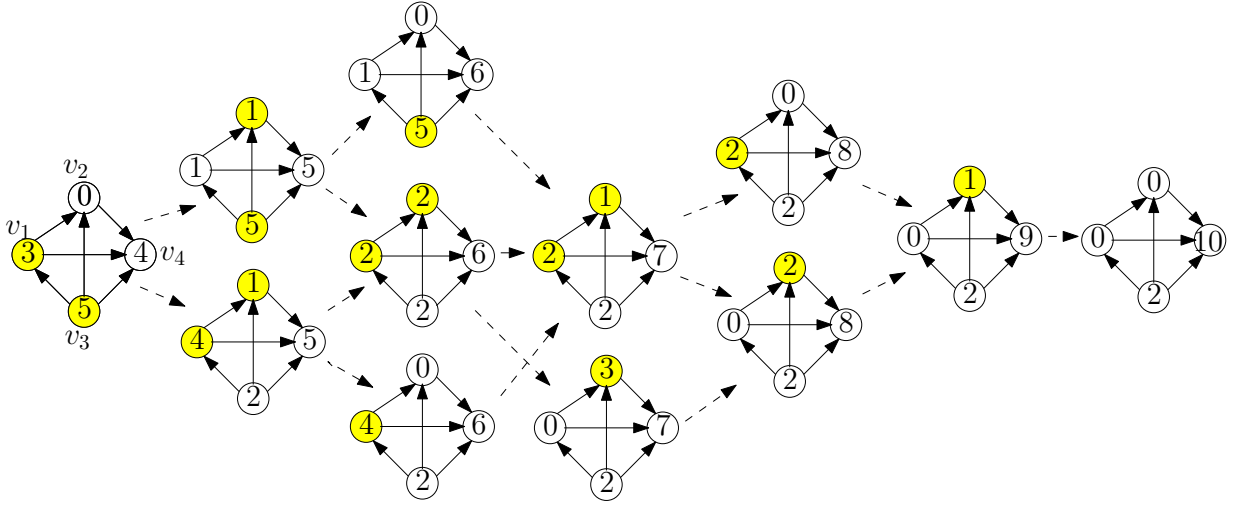
**Định lý 1.2.1** ([7]). *Cho  $G$  là một đồ thị vô hướng và  $k$  là một số nguyên dương, ta có*

- i) Nếu  $k > 2|V| - |E|$  thì hệ  $CFG(G, k)$  không dừng;*
- ii) Nếu  $|E| \leq k \leq 2|V| - |E|$  thì tồn tại các trạng thái  $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$  có trọng số  $k$  sao cho hệ  $CFG(G, \mathcal{O}_1)$  là dừng và hệ  $CFG(G, \mathcal{O}_2)$  là không dừng;*
- iii) Nếu  $|E| > k$  thì hệ  $CFG(G, k)$  dừng.*

Hình 1.6 chỉ ra không gian trạng thái của một hệ CFG trên một đồ thị 4 đỉnh. Từ hình này ta thấy hệ hội tụ (dừng) và đạt tới một trạng thái ổn định duy nhất. Đỉnh  $v_4$  là một đỉnh đặc biệt, nó đóng vai trò giống như là đỉnh thu thập các chip và là nguyên nhân làm cho hệ hội tụ.

Mặt khác, Định lý 1.2.1 cho thấy có những trạng thái khởi đầu làm cho hệ CFG không dừng. Từ đó nảy sinh vấn đề nghiên cứu lớp các đồ thị (có hướng hoặc vô hướng) để hệ CFG là dừng với mọi trạng thái khởi đầu. Nhắc lại rằng hệ CFG có quan hệ hai ngôi  $\leq_{CFG}$  cảm sinh từ quan hệ đạt được, tức là  $b \leq_{CFG} a$  nếu  $b$  thu được từ  $a$  bằng áp dụng một số hữu hạn lần luật bắn tại các đỉnh. Khi đó, dãy các đỉnh tại đó áp dụng luật bắn này được gọi là một *dãy bắn* từ  $a$  đến  $b$ . Các kết quả còn lại trong mục này được tham khảo trong [32] sẽ liên quan đến tính hội tụ, cấu trúc không gian trạng thái của hệ CFG có trạng thái khởi đầu.

**Định lý 1.2.2.** *Cho  $G$  là đồ thị có hướng liên thông không có thành phần đóng và  $\mathcal{O} \in CFG(G)$ . Khi đó,  $(CFG(G, \mathcal{O}), \leq_{CFG})$  là một tập có thứ tự, và do đó hệ là dừng.*



Hình 1.6: Đồ thị quỹ đạo của CFG

Định lý này cho thấy để hệ CFG hội tụ, thông thường người ta hay xét các đồ thị  $G$  có một đỉnh đặc biệt không bao giờ bắn được gọi là *đỉnh chìm*. Trong phần sau chúng tôi sẽ trình bày cấu trúc nhóm của hệ  $CFG(G)$  với  $G$  có một đỉnh chìm.

Cho  $G = (V, E)$ ,  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ ,  $a, b \in CFG(G)$  và  $b \leq_{CFG} a$ . Giả sử có một dãy bắn  $s$  các đỉnh để thu được  $b$  từ  $a$ . Ta ký hiệu  $|s|_i$  là số lần áp dụng luật bắn tại đỉnh  $v_i$  trong suốt quá trình bắn  $s$ . Bổ đề sau nói rằng dù bắn theo cách nào thì số lần bắn một đỉnh  $v_i$  trong các dãy bắn từ  $a$  đến  $b$  đều là như nhau. Đây cũng là cơ sở để hệ CFG có tính chất phân bậc.

**Bổ đề 1.2.1.** Cho  $a, b \in CFG(G)$  và  $b \leq_{CFG} a$ . Khi đó nếu  $s$  và  $t$  là hai dãy bắn các đỉnh để thu được  $b$  từ  $a$  thì  $|s|_i = |t|_i$  với mọi  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Bổ đề này cho phép định nghĩa *vectơ bắn* (*shot-vector*) giữa hai trạng thái như sau: Cho  $a, b \in CFG(G)$ . Vectơ bắn giữa  $a$  và  $b$  là dãy

$$k(a, b) = (k_1(a, b), \dots, k_n(a, b)),$$

trong đó  $k_i(a, b)$  là số lần bắn đỉnh  $v_i$  trong mọi dãy bắn để thu được  $b$  từ  $a$ . Khi đó, bài toán đặt được trong hệ CFG xuất phát từ một trạng thái khởi đầu có lời giải được đặc trưng bởi quan hệ bao hàm  $\leq_C$  (xem Ví dụ 1.1.2(2)) như sau.

**Định lý 1.2.3.** Cho  $a, b \in CFG(G, \mathcal{O})$ . Khi đó,

$$b \leq_{CFG} a \iff k(\mathcal{O}, b) \geq_C k(\mathcal{O}, a).$$

Từ đây, Định lý 1.2.2 được làm mạnh hơn như sau

**Định lý 1.2.4.** Cho  $G$  là đồ thị có hướng và không có thành phần đóng. Tập thứ tự  $(CFG(G, \mathcal{O}), \leq_{CFG})$  lập thành một dàn phân bậc và hệ quả là hệ hội tụ tới một điểm cố định duy nhất. Hơn nữa, với  $a, b \in CFG(G, \mathcal{O})$  thì trạng thái  $c$  thỏa mãn  $k_i(\mathcal{O}, c) = \max(k_i(\mathcal{O}, a), k_i(\mathcal{O}, b))$  với mọi  $i = 1, 2, \dots, n$ , là phân tử infimum của  $a$  và  $b$ .

Định lý 1.2.4 cho thấy phần tử  $\inf(a, b)$  có thể tính được tường minh thông qua các thành phần của  $a$  và  $b$ , tuy nhiên phần tử  $\sup(a, b)$  lại không dễ tính.

### 1.2.2.2 Các trạng thái đột biến và cấu trúc nhóm trên hệ CFG

Với các đồ thị  $G$  mà hệ CFG hội tụ thì ngoài điểm cố định một số các trạng thái ổn định đặc biệt khác, gọi là các *trạng thái đột biến* (*critical configuration*), cũng được quan tâm. Trên tập hợp các trạng thái đặc biệt này, người ta trang bị phép toán cộng, được ký hiệu  $\oplus$ , và chứng minh rằng cùng với phép toán  $\oplus$  tập các trạng thái đột biến của hệ  $CFG(G)$  có cấu trúc của một nhóm. Hơn nữa, nhóm này được chứng minh là đẳng cấu với nhóm sandpile của đồ thị được nghiên cứu rất nhiều trong đại số và lý thuyết đồ thị. Cấu trúc nhóm trên hệ CFG sẽ được trình bày sau đây được tham khảo từ [11, 28].

Nội dung còn lại của phần này,  $G$  luôn được giả thiết là đa đồ thị có hướng với  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ , mọi đỉnh  $v_i \neq v_n$  đều có đường đi tới  $v_n$  và  $v_n$  không có cạnh đi ra. Khi đó,  $v_n$  được gọi là *đỉnh chìm* (sink) của  $G$ .

Nhắc lại rằng  $A = (a_{ij})$  là ma trận liên kề của  $G$  với  $a_{ij}$  là số cạnh đi từ đỉnh  $v_i$  tới đỉnh  $v_j$  và  $\Delta = D - A$  là ma trận Laplace của  $G$ . Trước hết, ta nhận thấy luật vận động của một hệ CFG cũng có thể được mô tả thông qua ma trận Laplace. Cụ thể, nếu trạng thái  $b$  thu được từ trạng thái  $a$  bằng việc bắn đỉnh  $v_i$  thì

$$b = a - \Delta_i,$$

trong đó  $\Delta_i$  là hàng thứ  $i$  của  $\Delta$ . Mặt khác, do  $v_n$  là chìm nên nó không bao giờ bắn và lúc này nó đóng vai trò thu thập các chip được chuyển đến nhờ việc bắn những đỉnh khác. Chúng ta quan tâm tới các trạng thái của hệ mà không cần tính

đến số chip tại  $v_n$ . Trạng thái mà không tính đến số chip ở đỉnh  $v_n$  được gọi là *trạng thái chip*. Một trạng thái chip là ổn định nếu mọi đỉnh khác  $v_n$  đều không thể bắn. Người ta mong muốn đồng nhất các trạng thái chip trước và sau khi cháy một đỉnh (một dãy các đỉnh) như là các trạng thái tương đương. Điều này dẫn tới việc xem xét nhóm thương  $\mathbb{Z}^{n-1}/H$ , trong đó  $H = \langle \Delta_1^{(n)}, \Delta_2^{(n)}, \dots, \Delta_{n-1}^{(n)} \rangle$  là nhóm con sinh bởi các véc tơ hàng của ma trận  $\Delta^{(n)}$  (ma trận rút gọn của  $\Delta$  bằng cách bỏ đi hàng và cột thứ  $n$ ). Như vậy, hai trạng thái  $a \sim b$  nếu

$$a - b \in \langle \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1}, e_n \rangle,$$

trong đó  $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$  là véc tơ đơn vị thứ  $n$ . Dễ thấy,  $a \sim b$  nếu

$$a^* - b^* \in \langle \Delta_1^{(n)}, \Delta_2^{(n)}, \dots, \Delta_{n-1}^{(n)} \rangle,$$

trong đó  $a^*$  và  $b^*$  là các trạng thái chip (hay các vectơ chiều trong  $\mathbb{Z}^{n-1}$ ) của  $a$  và  $b$  tương ứng.

**Định nghĩa 1.2.4 (Nhóm Sandpile).** *Nhóm Sandpile* của  $G$  là nhóm thương

$$\mathcal{SP}(G) = \mathbb{Z}^{n-1} / \langle \Delta_1^{(n)}, \Delta_2^{(n)}, \dots, \Delta_{n-1}^{(n)} \rangle.$$

Theo Định lý 1.2.4, với mọi trạng thái khởi đầu hệ CFG( $G$ ) đều hội tụ tới duy nhất một trạng thái ổn định. Tức là, nếu xuất phát từ một trạng thái  $a$  thì sau một hồi bắn ta thu được trạng thái ổn định duy nhất, được ký hiệu là  $a^\circ$ . Quá trình bắn từ  $a$  tới  $a^\circ$  còn gọi là quá trình *ổn định hóa*.

**Định nghĩa 1.2.5 (Toán tử thêm chip).** *Toán tử thêm chip*  $E_v$  là ánh xạ từ tập các trạng thái chip vào chính nó được xác định như sau:

$$E_v(a) = (a + 1_v)^\circ,$$

trong đó  $a + 1_v$  là trạng thái thu được từ  $a$  bằng việc thêm một chip vào đỉnh  $v$ .

Ta định nghĩa lớp các trạng thái đặc biệt nhờ toán tử thêm chip như sau

**Định nghĩa 1.2.6 (Trạng thái đột biến).** Một trạng thái chip  $a$  được gọi là *truy cập được* (accessible) nếu từ một trạng thái chip tùy ý ta có thể thu được  $a$  bằng

một tổ hợp áp dụng phép toán thêm chip và lựa chọn bản các đỉnh. Hơn nữa, nếu  $a$  truy cập được và ổn định thì  $a$  được gọi là một *trạng thái (chip) đột biến* (critical configuration).

Ký hiệu  $Crit(G)$  là tập các trạng thái đột biến của hệ  $CFG(G)$ . Kết quả sau đây nói rằng cấp của nhóm sandpile đúng bằng số các trạng thái đột biến chip của hệ CFG.

**Mệnh đề 1.2.2** ([28]). *Mỗi lớp tương đương của nhóm sandpile  $\mathcal{SP}(G)$  chứa duy nhất một phần tử của  $Crit(G)$ .*

Tiếp theo chúng ta chỉ ra rằng trên  $Crit(G)$  cũng tồn tại một cấu trúc nhóm. Cấu trúc nhóm này đẳng cấu với cấu trúc nhóm sandpile. Do đó, chúng ta có thể đồng nhất hai nhóm.

Ta định nghĩa phép toán cộng  $\oplus$  trên  $Crit(G)$  như sau: Cho  $a, b \in Crit(G)$  là các trạng thái đột biến thì

$$a \oplus b = (a + b)^o.$$

Chú ý rằng với  $a, b$  là các trạng thái chip tùy ý, do hệ  $CFG(G)$  là hội tụ tới duy nhất một trạng thái ổn định nên

$$a + b \rightsquigarrow a^o + b \rightsquigarrow a^o + b^o \rightsquigarrow (a^o + b^o)^o.$$

Bởi vậy,  $(a + b)^o = (a^o + b^o)^o$ . Phép toán  $\oplus$  đóng trên tập các trạng thái đột biến vì giả sử  $a, b \in Crit(G)$  và  $c$  là một trạng thái chip tùy ý thì

$$(c + (c + \alpha + \beta))^o = ((c + \alpha) + (c + \beta))^o = ((c + \alpha)^o + (c + \beta)^o)^o = (a + b)^o,$$

trong đó  $\alpha$  và  $\beta$  là các trạng thái chip thỏa mãn  $(c + \alpha)^o = a$  và  $(c + \beta)^o = b$  (do  $a, b$  là các trạng thái đột biến), tức là  $a \oplus b \in Crit(G)$ .

**Định lý 1.2.5** ([28]). *Tập tất cả các trạng thái đột biến của hệ  $CFG(G)$  cùng với phép cộng  $\oplus$  lập thành một nhóm giao hoán. Hơn nữa, nhóm này đẳng cấu nhóm với nhóm Sandpile  $\mathcal{SP}(G)$ . Hệ quả là số các cây bao trùm có gốc tại  $v_n$  của  $G$  bằng số các trạng thái đột biến của hệ  $CFG(G)$ .*

Do đẳng cấu này, từ nay về sau ta cũng dùng thuật ngữ "nhóm Sandpile" để chỉ nhóm các trạng thái đột biến.

Ngoài ra, phần tử đơn vị (trạng thái đột biến trong lớp tương đương của  $[0]$ ) trong nhóm sandpile cũng rất được quan tâm. Có nhiều cách tính phần tử đơn vị, nhưng công thức dưới đây cho ta một cách tính hiệu quả. Lấy  $\sigma$  là trạng thái chip sao cho  $\sigma_i = 2 \deg^+(v_i) - 2$  với  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ . Khi đó phần tử đơn vị  $I$  được cho bởi  $I = (\sigma - \sigma^o)^o$ . Do  $G$  có đỉnh chìm  $s$  và mọi đỉnh khác đều có đường đi có hướng đến  $s$  nên  $\deg^+(v_i) \geq 1$  với mọi  $i \neq n$  và do đó trạng thái chip  $\sigma, \sigma - \sigma^o$  là xác định.

Từ hệ quả của Định lý 1.2.5 cũng có nhiều người quan tâm đến việc xây dựng các song ánh trực tiếp từ tập các cây bao trùm có gốc tới tập các trạng thái đột biến của hệ CFG trên đồ thị. Trong trường hợp  $G$  là đồ thị vô hướng và có một đỉnh không bao giờ bắn (tương đương với đỉnh chìm), một họ song ánh được đưa ra bởi Cori và Le Borgne [12]. Hàm sinh cho số các trạng thái đột biến theo trọng số được định giá bởi đa thức Tutte tại  $P_G(1, y)$  bởi Merino. Nhờ đó, tác giả đã chứng minh được một giả thuyết của Stanley về  $h$ -vectơ của một matroid đối đồ thị (co-graphic matroid). Việc nghiên cứu các trạng thái đột biến của hệ CFG cũng được xem như là một công cụ cho một số lĩnh vực trong Toán học. Thêm vào đó, người ta cũng quan tâm nhiều đến các trạng thái đột biến có tổng số chip là ít nhất.

### 1.2.3 Hệ SPM

Hệ SPM và một số hệ liên quan đã được giới thiệu và nghiên cứu trong nhiều lĩnh vực khác nhau: trong bối cảnh về dàn các phân hoạch của các số tự nhiên bởi Brylawsky [8], từ góc nhìn của Vật lý để nghiên cứu hiện tượng tự đột biến có tổ chức bởi Bak, Tang và Wiesenfeld [3] và từ cách tiếp cận của Tổ hợp bởi Anderson và đồng nghiệp [1], Spencer [43], và bởi Goles và Kiwi [23]. Một cách trực giác, hệ SPM là hệ động lực rời rạc, trong đó mỗi trạng thái (thường được gọi là các cột cát) của nó được biểu diễn bởi một phân hoạch của một số tự nhiên  $n$ , tức là một dãy  $a = (a_1, a_2, \dots, a_k)$  sao cho  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k$  và  $\sum_{i=1}^k a_i = n$ . Luật vận động là luật rơi, tức là khi một cột cát có độ cao lớn hơn (một mức nào đó) hàng xóm bên phải của nó thì sẽ cho hàng xóm đó một đơn vị.

Brylawsky đã đưa ra hệ SPM có thêm luật trượt [8], tức là

$$(a_1, \dots, p+1, \underbrace{p, \dots, p}_k, p-1, \dots) \rightarrow (a_1, \dots, \underbrace{p, \dots, p}_{k+2}, \dots),$$

để nghiên cứu cấu trúc của tập các phân hoạch của số tự nhiên  $n$ . Đồng thời tác giả đã chứng minh rằng cấu trúc thứ tự cảm sinh bởi hệ động lực này lập thành một dàn và đẳng cấu với dàn các phân hoạch  $L_B$  với quan hệ thứ tự trội (Ví dụ 1.1.4(3)). Tiếp theo, Goles và KiWi nghiên cứu hệ SPM chỉ có luật rơi và trạng thái xuất phát có các hạt cát tập trung ở một cột duy nhất. Họ cũng chỉ ra cấu trúc thứ tự cảm sinh trên hệ này có cấu trúc dàn và là một dàn con của dàn  $L_B$  [23].

### 1.2.3.1 Đặc trưng cho các trạng thái và đặc trưng cho điểm dừng của hệ SPM

Tiếp theo chúng tôi sẽ tóm tắt một số kết quả của hệ SPM [1, 23, 24, 26, 27, 31]. Trước hết, định nghĩa của hệ được phát biểu như sau

**Định nghĩa 1.2.7 (Hệ SPM).** Cho  $N$  là một số tự nhiên. Hệ  $\text{SPM}(N)$  là hệ động lực rời rạc sao cho:

- (i) Trạng thái khởi đầu là  $(N)$ ;
- (ii) Luật vận động là *luật SPM tuần tự* như sau:

a) Luật rơi:

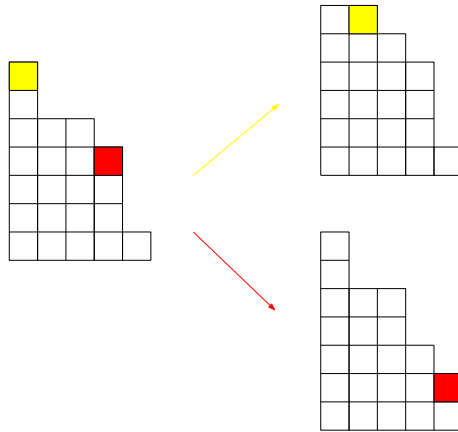
- Vị trí  $i$  có thể rơi nếu  $a_i - a_{i+1} \geq 2$ ;
- Áp dụng luật rơi tại vị trí  $i$  có thể rơi là:

$$(a_1, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_k) \rightarrow (a_1, \dots, a_i - 1, a_{i+1} + 1, \dots, a_k).$$

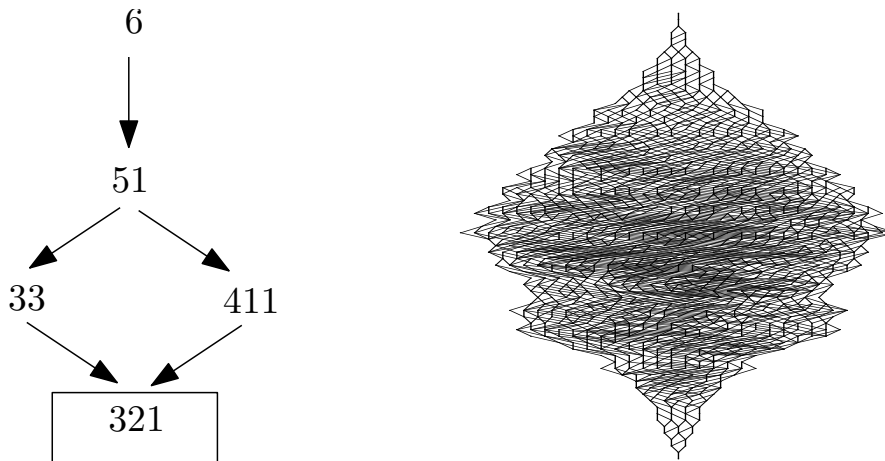
b) Luật tuần tự: Mỗi bước áp dụng luật rơi tại một vị trí.

Trong Chương 3 chúng tôi sẽ trình bày hệ SPM bằng cách mở rộng luật rơi, trong đó một cột có thể rơi sang cả cột bên trái nó nếu nó cao hơn hàng xóm đó ít nhất là 2. Hệ mở rộng này còn được gọi là hệ SPM đối xứng. Bởi vậy, luật rơi trong trường hợp này đôi khi chúng tôi sẽ phân biệt và gọi nó là *luật rơi phải*.





Hình 1.7: Luật rơi phải



Hình 1.8: Không gian trạng thái của SPM(6) và SPM(30)

- Ví dụ 1.2.1.** 1. Hình 1.7 minh họa luật rơi của hệ SPM, chẳng hạn sau bước rơi tại cột thứ 4 ta thu được trạng thái  $(7, 5, 5, 3, 2)$ .
2. Hình 1.8 minh họa không gian trạng thái của hệ SPM(6) và SPM(30). Ta quan sát thấy các hệ này là hội tụ tới một trạng thái ổn định duy nhất. Hệ SPM(6) có trạng thái ổn định là  $(3, 2, 1)$ . Điều này thực tế được suy ra từ Mệnh đề 1.2.3 bên dưới.

Chú ý rằng bất kỳ số tự nhiên  $N$  nào đều được viết duy nhất dưới dạng sau

$$N = \frac{1}{2}p(p+1) + p', \quad 0 \leq p' \leq p.$$

**Mệnh đề 1.2.3** ([23]). Cho  $N$  là một số tự nhiên. Hệ  $SPM(N)$  hội tụ tới duy nhất một trạng thái ổn định

$$\pi = (p, p-1, \dots, p'+1, p', p', p'-1, \dots, 2, 1).$$

Thời gian giữa hai trạng thái trong hệ không phụ thuộc vào việc chọn thứ tự của các cột có thể rơi và thời gian để hệ tới trạng thái ổn định là

$$T(SPM(N), \pi) = \binom{p+1}{3} + pp' - \binom{p'}{2}.$$

Hệ quả,  $T(SPM(N), \pi)$  có đánh giá theo  $N$  là  $\mathcal{O}(N^{3/2})$ .

Mặt khác, đặc trưng cho các trạng thái của hệ SPM, được trình bày dưới đây, cũng được đưa ra trong [26]. Trước hết, ta ký hiệu

$$SPM = \cup_{N=0}^{\infty} SPM(N)$$

là tập tất cả các trạng thái đạt được của các hệ SPM xuất phát từ một cột có tùy ý các hạt. Cho  $a = (a_1, \dots, a_k)$  là một phân hoạch của một số tự nhiên. Ta nói  $a$  có một *bước bằng* tại  $i$  hay  $a_i a_{i+1}$  là một *bước bằng* (*plateau*) nếu  $a_{i+1} > 0$ , và  $a_i = a_{i+1}$ , được gọi là một *bước dốc* (*cliff*) nếu  $a_i - a_{i+1} \geq 2$  và được gọi là một *bậc thang* (*step*) nếu  $a_i - a_{i+1} = 1$ . Các định nghĩa này được mở rộng bằng cách nói rằng  $a$  có một cầu thang (đoạn bằng hoặc đoạn dốc) trong khoảng  $[i, j]$  nếu và chỉ nếu  $a$  có các bậc thang (bước bằng hoặc bước dốc tương ứng) tại  $t$ , với mọi  $i \leq t \leq j$ . Đặc trưng trạng thái của hệ SPM như sau

**Mệnh đề 1.2.4** ([26]). Cho  $a$  là một phân hoạch của một số tự nhiên. Khi đó,  $a$  là một phần tử của  $SPM$  nếu và chỉ nếu  $a$  không chứa đoạn con nào có dạng  $p, p, p-1, \dots, p-r+1, p-r, p-r$  hoặc  $p, p, p$  trong đó  $p > r \geq 1$ .

### 1.2.3.2 Hệ SPM và hệ CFG trên đường thẳng

Để mã hóa hệ SPM bởi một CFG chúng tôi định nghĩa đồ thị nền  $G$  của CFG như sau:  $G = (V, E)$  là một đồ thị đường thẳng có hướng và có vô hạn đỉnh về bên phải, ký hiệu là  $L^+$ , với  $V = \mathbb{N}$ ,  $E = \{(i, j) : |i - j| = 1, i, j \geq 1\} \cup \{(1, 0)\}$  và đỉnh 0 là đỉnh chìm.

Cho  $a = (a_1, a_2, \dots, a_k)$  là một trạng thái của SPM (quy ước  $a_i = 0$  với  $i \geq k$ ), ta định nghĩa trạng thái  $\delta(a)$  của CFG trên  $L^+$  tương ứng với  $a$  bằng cách lấy các hiệu của hai phần liên tiếp nhau về bên phải như sau: Với các đỉnh  $i$  không phải đỉnh chìm ( $i \neq 0$ ) thì  $i$  chứa  $\delta(i) = (a_i - a_{i+1})$  chip và tại đỉnh chìm thì  $\delta(0) = 0$ . Như vậy, với mỗi trạng thái  $a$  chỉ có hữu hạn  $\delta(i)$  trên  $V$  khác 0. Để thấy rằng các đỉnh không chìm của  $V$  có bậc là 2 và việc rơi từ cột  $i$  sang cột  $i + 1$  trên hệ SPM tương đương với việc cháy đỉnh  $i$  trên  $L^+$  của CFG.

**Mệnh đề 1.2.5** ([23]). *Cho  $N$  là số tự nhiên. Khi đó, hai hệ động lực  $SPM(N)$  và  $CFG(L^+, \mathcal{O}_N)$  là đẳng cấu, trong đó  $\mathcal{O} = (0, N, 0, 0, \dots)$ .*

Chúng tôi kết thúc chương này bằng phần thảo luận về các vấn đề được quan tâm khi nghiên cứu hệ SPM và CFG dưới đây.

## Thảo luận

Các nghiên cứu đã được trình bày ở trên cho thấy hệ SPM có thể được mã hóa bởi hệ CFG. Do đó, hệ SPM tự động thừa kế các kết quả mang tính phổ quát trên hệ CFG như cấu trúc dàn nửa phân phối địa phương dưới. Ngoài ra, hệ SPM (hay CFG trên nửa đường thẳng) còn có thêm một số tính chất đặc trưng nữa, chẳng hạn, tất cả các trạng thái của hệ SPM đều được đặc tả và thời gian đến trạng thái ổn định duy nhất cũng được tính bằng một công thức tường minh trong khi với hệ CFG tổng quát, các tính chất này không đạt được. Hơn nữa, để đảm bảo tính hội tụ của hệ CFG ta luôn giả thiết đồ thị nền có một đỉnh chìm, mặc dù điều này không cần phải đề cập tới cho hệ SPM. Với các lý do này, người ta cũng quan tâm đến các hệ CFG trên lớp các đồ thị đặc biệt như các lưới hữu hạn, cây, ... và cũng đạt được rất nhiều kết quả thú vị [36].

Hệ SPM cũng được nghiên cứu một cách độc lập với hệ CFG. Như đã thấy, các trạng thái của hệ SPM là các dãy giảm và được biểu diễn bằng các phân hoạch của số tự nhiên, và các điểm dừng được biểu diễn bằng các phân hoạch trơn. Hệ SPM cũng được sử dụng để nghiên cứu các lớp con của các phân hoạch và liên quan nhiều đến các tính toán tổ hợp trên các lớp này. Ngoài ra, do đặc thù hệ SPM được định nghĩa trên nửa đường thẳng, việc mở rộng SPM trên lớp các đồ thị khác cũng được

quan tâm theo các hướng mô tả gần với thực tế. Với việc mở rộng ngưỡng rơi của một cột cát (chênh lệch độ cao của nó với cột bên cạnh), người ta có thể nghiên cứu các lớp phân hoạch khác nhau, điển hình là các phân hoạch chặt. Với việc cho phép một cột rơi sang hai phía (phải và trái), người ta nghiên cứu các dãy đơn đỉnh. Và ngoài ra, với việc cho phép tất cả các luật được thực hiện một cách đồng thời, người ta có thể nghiên cứu các hệ động lực song song.

Việc mã hóa và nghiên cứu mối liên hệ qua lại giữa hệ SPM và CFG cũng được quan tâm, đặc biệt khi nghiên cứu các trạng thái ổn định của những hệ này, chúng ta có thể sử dụng một công cụ mạnh như lý thuyết ngôn ngữ để đưa ra các tính toán tổ hợp trên đó.

Trong chương tiếp theo, chúng tôi sẽ trình bày về sự ổn định của hệ SPM khi có tác động từ bên ngoài.

## Chương 2

# Hệ SPM: Tính ổn định

Như đã đề cập ở chương trước, các hệ trong tự nhiên ngoài sự vận động nội tại bên trong thì mỗi hệ còn bị tác động bởi các yếu tố bên ngoài. Các nghiên cứu về tác động bên ngoài cũng đã được Dhar, Cori và Rossin [11, 15, 28, 42] thực hiện trên hệ CFG. Chúng liên quan đến các trạng thái đột biến của hệ và cấu trúc nhóm. Ngoài ra, Latapy và Phan nghiên cứu việc thêm hạt trong hệ SPM, nhưng hạn chế việc thêm hạt vào cột đầu tiên. Nhờ đó, các tác giả đã chỉ ra cấu trúc đệ quy trên không gian trạng thái của hệ và chứng minh nó có liên quan đến rất nhiều tính toán tổ hợp trên tập các phân hoạch của số tự nhiên [31]. Trong chương này, chúng tôi xét hệ SPM với luật bổ sung sau: mỗi khi hệ đạt đến một trạng thái ổn định duy nhất, thì một hạt sẽ được thêm vào một cột hợp lý một cách ngẫu nhiên, và hệ lại tiếp tục vận động với luật rơi nội tại để đạt đến một trạng thái ổn định khác và cứ tiếp tục như vậy. Chúng tôi nghiên cứu tập tất cả các trạng thái ổn định thu được bằng cách này. Các kết quả là chứng minh được hệ sinh ra tập tất cả các phân hoạch trơn và tập hợp này cùng với thứ tự cảm sinh bởi hệ động lực là một dàn con của dàn Young. Thêm vào đó, phần 2.3 đưa ra cách tính thời gian để hệ đạt đến một trạng thái ổn định nhờ sử dụng khái niệm "năng lượng" cho các hạt trong hệ. Chú ý rằng, trong hệ CFG hội tụ thì mọi đường đi từ một trạng thái đến một trạng thái khác đều có độ dài (thời gian) là như nhau. Nhưng trong hệ SPM chúng tôi nghiên cứu này thì chúng là khác nhau. Bởi vậy, chúng tôi đánh giá thời gian nhờ tính toán đường đi ngắn nhất và dài nhất. Đây cũng là cơ sở để đánh giá sự biến thiên của hệ

dưới tác động từ bên ngoài. Các kết quả của chương này được trình bày trong [41].

## 2.1 Hệ E-SPM

Trước hết, chúng tôi nhắc lại phân hoạch của số tự nhiên.

Một phân hoạch của số tự nhiên  $n$  là một dãy  $a = (a_1, a_2, \dots, a_k)$  sao cho  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k > 0$  và  $a_1 + \dots + a_k = n$ . Khi đó,  $n$  được gọi là trọng số của  $a$ , ký hiệu là  $w(a)$  và  $k$  được gọi là độ dài của  $a$ , ký hiệu  $l(a) = k$ . *Phân hoạch trơn* là một phân hoạch sao cho tất cả các hiệu giữa hai phần liên tiếp nhau của nó không vượt quá 1. Dễ thấy ta không thể áp dụng luật rơi của hệ SPM tại bất cứ cột nào của phân hoạch trơn. Từ định nghĩa ta có thể coi một trạng thái của hệ *SPM* như một phân hoạch và một trạng thái ổn định như một phân hoạch trơn. Do đó, trong suốt chương này chúng ta nói phân hoạch (phân hoạch trơn) tức là trạng thái (trạng thái ổn định tương ứng).

**Định nghĩa 2.1.1 (Hệ E-SPM).** *Hệ SPM mở rộng*, được ký hiệu là *E-SPM* (*Extended Sandpile Model*), là một hệ động lực rời rạc, trong đó các trạng thái của nó là các phân hoạch của số các số tự nhiên với trạng thái khởi đầu là  $(0)$ . Hệ gồm hai luật vận động như sau:

- (i) *Luật rơi (luật nội tại)*: một hạt ở cột thứ  $i$  có thể rơi xuống cột thứ  $(i + 1)$  nếu hiệu độ cao của cột  $i$  và  $i + 1$  ít nhất là 2.
- (ii) *Luật thêm (luật bên ngoài)*: một hạt có thể được thêm vào một cột của một phân hoạch trơn sao trạng thái thu được vẫn là một phân hoạch.

Chúng tôi cũng ký hiệu E-SPM là *không gian trạng thái của hệ E-SPM*. Giống như mọi hệ động lực rời rạc, chúng ta có quan hệ hai ngôi cảm sinh bởi hệ này:  $a \geq_{\text{E-SPM}} b$  nếu  $b$  có thể thu được từ  $a$  bằng việc áp dụng một dãy các luật vận động của hệ E-SPM. Toàn bộ chương 2 sẽ nghiên cứu tập thứ tự cảm sinh bởi quan hệ này, nên để cho đơn giản chúng tôi viết  $\geq$  thay vì  $\geq_{\text{E-SPM}}$ . Dễ thấy, quan hệ này lập thành một quan hệ thứ tự bộ phận. Lưu ý rằng một *đường đi* trong hệ là một đường đi trong đồ thị quỹ đạo của hệ, tức là một dãy phép dịch chuyển. Chúng ta

quy ước, đường đi chỉ gồm một phần tử (không có dịch chuyển nào) có độ dài là 0. Để tìm hiểu sự biến thiên của hệ dưới tác động từ bên ngoài, chúng tôi quan tâm tới mối liên quan giữa các phân hoạch trơn trong hệ. Ký hiệu  $a^{\downarrow i}$  là dãy thu được từ  $a$  bằng việc thêm một hạt vào cột (phần) thứ  $i$  của  $a$ .

Hình 2.1 minh họa một số phần tử đầu tiên của hệ E-SPM. Từ hình vẽ ta thấy chẳng hạn phân hoạch 221 là một phân hoạch trơn và có ba cột có thể thêm một đơn vị: cột thứ nhất, thứ ba và thứ tư. Chúng ta không thêm vào cột thứ hai vì nếu không, 231 không là một phân hoạch. Nếu thêm vào cột thứ nhất, thứ ba và thứ tư thì ta lần lượt thu được các phân hoạch 321, 222 và 2211, trong đó trạng thái 222 là không ổn định với luật rơi vì cột thứ ba có thể rơi để thu được trạng thái ổn định trong bước tiếp theo 2211. Nhận xét rằng hệ E-SPM không chứa tất cả các phân hoạch của các số tự nhiên, chẳng hạn với  $n = 5$  thì hệ E-SPM không chứa các phân hoạch 5, 41, 32. Ngoài ra dễ thấy có những phân hoạch không trơn cũng là phần tử của E-SPM. Tuy nhiên, chúng tôi sẽ chứng minh rằng E-SPM chứa tất cả các phân hoạch trơn.

**Mệnh đề 2.1.1.** *Tất cả các phân hoạch trơn đều là các trạng thái của hệ E-SPM.*

*Chứng minh.* Mệnh đề được chứng minh bằng quy nạp theo số các hạt. Giả sử rằng tất cả các phân hoạch trơn của  $n$  đều đạt được từ (0).

Lấy  $a = (a_1, \dots, a_k)$  là một phân hoạch trơn tùy ý của  $n + 1$ .

Lấy  $j$  là chỉ số đầu tiên sao cho  $a_{j-1} = a_j = a_{j+1} + 1$  (quy ước  $a_{k+1} = 0$  và  $a_0 = \infty$ ), trong trường hợp không có  $j$  nào thỏa mãn điều kiện này thì ta lấy  $j = 1$ . Nói cách khác  $j$  là chỉ số của bước bằng cuối cùng của đoạn bằng đầu tiên trong  $a$  và nếu  $a$  không có đoạn bằng nào thì  $j = 1$ .

Chọn  $b = (b_1, \dots, b_k)$  sao cho  $b_i = a_i$  với  $i \neq j$  và  $b_j = a_j - 1$ . Khi đó,  $b$  là một phân hoạch trơn vì  $0 \leq b_i - b_{i+1} = a_i - a_{i+1} \leq 1$  nếu  $i \neq j, j - 1$  (do  $a$  là một phân hoạch trơn) và  $b_j - b_{j+1} = a_j - 1 - a_{j+1} = 0$  và  $b_{j-1} - b_j = a_{j-1} - a_j + 1 = 1$  nếu  $j \neq 1$ . Trong trường hợp  $j = 1$  thì  $a$  là một cầu thang, và do đó bớt một đơn vị của phần đầu tiên của  $a$  đi thì cũng là một phân hoạch trơn, tức là  $b$  là phân hoạch trơn.

Theo giả thiết quy nạp  $b$  đạt được từ (0) bằng dãy các luật vận động. Mặt khác,





mối quan hệ giữa chúng. Do Mệnh đề 2.1.1, thực chất chúng tôi quan tâm đến tất cả các phân hoạch trơn trong mối liên quan giữa chúng với nhau trong hệ E-SPM. Cụ thể chúng tôi sẽ chứng minh rằng không gian trạng thái của các phân hoạch trơn với thứ tự cảm sinh  $\leq_S$  bởi hệ E-SPM lập thành một dàn, hơn nữa, nó còn là một dàn con của dàn Young.

Ký hiệu tập thứ tự con các phân hoạch trơn cảm sinh bởi tập thứ tự E-SPM là  $(SE\text{-}SPM, \leq_S)$ . Dễ thấy rằng nếu  $a, b$  là các phân hoạch trơn thì  $b$  bị phủ bởi  $a$  hay theo ngôn ngữ của hệ động lực thì  $b$  là phần tử kế tiếp của  $a$  trên hệ SE-SPM nếu  $a \leq_S b$  và  $w(b) - w(a) = 1$ . Cấu trúc của tập các phân hoạch trơn sẽ được mô tả sau đây.

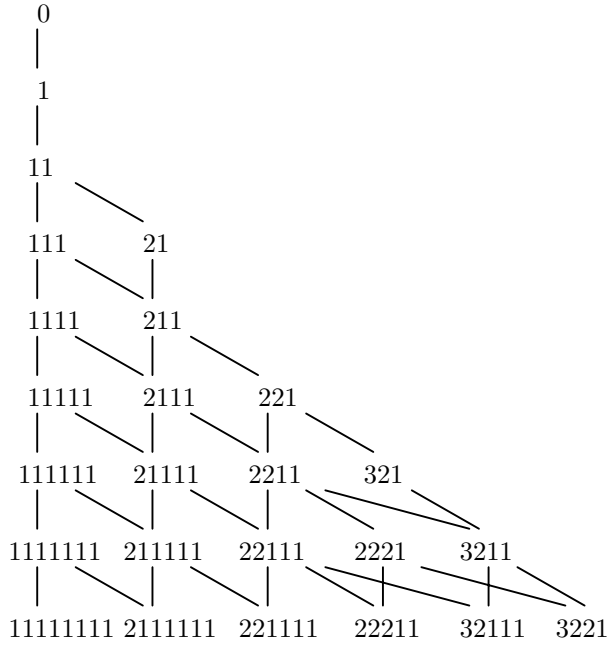
Trước hết, chúng tôi sẽ phân tích sự di chuyển của một hạt khi nó được thêm vào một phân hoạch trơn. Cho  $a = (a_1, \dots, a_k)$  là một phân hoạch trơn, một hạt được thêm vào cột thứ  $i$  của  $a$  với điều kiện  $a_i < a_{i-1}$ . Sau đó, nếu  $a_i = a_{i+1}$ , hạt này sẽ đứng yên tại cột  $i$  và không di chuyển được nữa theo luật rơi. Ngược lại, hạt sẽ di chuyển theo đoạn cầu thang từ  $i$  tới một vị trí mới  $j > i$  sau một số bước áp dụng luật rơi sao cho  $(a_i, a_{i+1}, \dots, a_j)$  là một dãy giảm liên tiếp các số nguyên và  $a_j = a_{j+1}$ . Nghĩa là hạt sẽ rơi cho đến khi nó chạm vào bước cuối cùng trong đoạn cầu thang xuất phát từ  $i$  của  $a$ . Cuối cùng, hạt sẽ dừng lại ở cột  $j$  và không di chuyển được nữa. Trong quá trình thực hiện luật rơi để đến một phân hoạch trơn tiếp theo thì việc thêm hạt này giữ nguyên tất cả các phần của  $a$  ngoại trừ  $a_j$ . Nói cách khác, phân hoạch  $b$  thu được từ dãy các bước dịch chuyển là một phân hoạch trơn mà thu được từ  $a$  bằng cách thêm trực tiếp một hạt vào cột  $j$  của  $a$ . Điều này khẳng định kết quả sau:

**Bổ đề 2.2.1.** *Trong hệ SE-SPM, một phân hoạch trơn  $b$  là một phần tử kế tiếp của phân hoạch trơn  $a$  nếu và chỉ nếu  $b$  có thể thu được từ  $a$  bằng việc thêm một hạt vào một cột của  $a$ .*

Do vậy, quan hệ thứ tự  $\leq_S$  có thể được hiểu như đặc trưng dưới đây:

**Mệnh đề 2.2.2.** *Tập thứ tự bộ phân  $(SE\text{-}SPM, \leq_S)$  được sắp bởi quan hệ bao hàm.*

Hình 2.2 minh họa các phần tử đầu tiên của hệ SE-SPM.



Hình 2.2: Các phần tử đầu tiên của hệ SE-SPM

Để kết thúc phần này, chúng tôi trình bày sự liên quan giữa tập thứ tự  $(SE-SPM, \leq_S)$  và dàn Young (Ví dụ 1.1.4(2)). Do đặc trưng của thứ tự bao hàm, tập thứ tự bộ phận  $(SE-SPM, \leq_S)$  là một tập thứ tự con của tập thứ tự trên dàn Young. Điều này còn được làm mạnh hơn bằng việc chứng minh nó thực chất cũng có cấu trúc dàn và là dàn con của dàn Young.

**Định lý 2.2.1.** *Tập  $(SE-SPM, \leq_S)$  là một dàn con của dàn Young.*

*Chứng minh.* Cần chứng minh rằng với hai phân hoạch trơn tùy ý  $a$  và  $b$ , hai phần tử  $sup(a, b)$  và  $inf(a, b)$  được lấy trong dàn Young cũng là các phân hoạch trơn. Thật vậy, giả sử  $a = (a_1, a_2, \dots, a_k)$  và  $b = (b_1, b_2, \dots, b_l)$ . Theo định nghĩa của dàn Young thì phần tử tối đại và tối tiểu của  $a$  và  $b$  được tính như sau:

$$sup\{a, b\} = (\min\{a_1, b_1\}, \min\{a_2, b_2\}, \dots, \min\{a_t, b_t\}),$$

$$inf\{a, b\} = (\max\{a_1, b_1\}, \max\{a_2, b_2\}, \dots, \max\{a_h, b_h\}),$$

trong đó  $t = \min\{k, l\}$  và  $h = \max\{k, l\}$ .

Ta nhận thấy rằng với mọi  $i = 1, 2, \dots, h - 1$ , ta có:

$$\min\{a_{i+1}, b_{i+1}\} \leq a_{i+1} \leq a_i + 1 \leq \max\{a_i + 1, b_i + 1\}$$

$$\text{và } \min\{a_{i+1}, b_{i+1}\} \leq b_{i+1} \leq b_i + 1 \leq \max\{a_i + 1, b_i + 1\}.$$

Do vậy,

$$\min\{a_{i+1}, b_{i+1}\} \leq \min\{a_i + 1, b_i + 1\} = 1 + \min\{a_i, b_i\},$$

và

$$\max\{a_{i+1}, b_{i+1}\} \leq \max\{a_i + 1, b_i + 1\} = 1 + \max\{a_i, b_i\}.$$

Điều này khẳng định  $\sup\{a, b\}$  và  $\inf\{a, b\}$  là các phân hoạch trơn và định lý được chứng minh.  $\square$

## 2.3 Độ dài đường đi giữa hai phân hoạch trơn trong hệ E-SPM

Trong phần trước, chúng ta đã biết rằng để đi từ một phân hoạch trơn này đến một phân hoạch trơn khác trong hệ E-SPM có thể có nhiều cách áp dụng luật vận động hay nhiều đường đi trong đồ thị quỹ đạo của hệ. Mỗi cách áp dụng có thể tốn nhiều hay ít bước phụ thuộc vào vị trí của cột mà luật thêm được áp dụng. Do đó hệ này không có tính chất phân bậc. Tuy nhiên tiếp theo chúng tôi sẽ chứng minh rằng đường đi ngắn nhất giữa hai phân hoạch trơn có độ dài chỉ phụ thuộc vào trọng số của chúng. Trong khi đó, bài toán sẽ phức tạp hơn đối với đường đi dài nhất. Chúng tôi sẽ đưa ra công thức tường minh cho độ dài của đường đi dài nhất này nhờ sử dụng khái niệm "năng lượng" cho mỗi phân hoạch trơn.

**Định lý 2.3.1.** *Cho  $a$  và  $b$  là các phân hoạch trơn và  $b \leq_S a$ . Khi đó*

- (i) *Độ dài của đường đi ngắn nhất trong hệ E-SPM từ (0) đến  $a$  là  $w(a)$ .*
- (ii) *Độ dài của đường đi ngắn nhất trong hệ E-SPM từ  $a$  đến  $b$  là  $w(b) - w(a)$ .*

*Chứng minh.* Chúng ta chỉ cần chứng minh cho khẳng định (ii), khẳng định (i) là một trường hợp đặc biệt của (ii).

Để thấy độ dài của mọi đường đi từ  $a$  tới  $b$  đều ít nhất là  $w(b) - w(a)$  do chúng ta phải áp dụng ít nhất một lần luật thêm tại mỗi bước thêm để tăng trọng số của

a. Nếu  $w(a) = w(b)$  thì hiển nhiên  $a = b$  do quan hệ bao hàm và khẳng định là đúng. Do vậy, ta giả thiết  $b <_S a$  suy ra  $w(b) > w(a)$ .

Tiếp theo chúng ta sẽ xây dựng một đường đi từ  $a$  tới  $b$  có độ dài đúng bằng  $w(b) - w(a)$ . Để làm được điều này chỉ cần tìm một phân hoạch trơn  $b'$  có trọng số  $w(b) - 1$  sao cho  $b$  thu được trực tiếp từ  $b'$  bằng áp dụng một lần luật vận động và  $b'$  vẫn nhỏ hơn  $a$  (theo thứ tự bao hàm). Lấy  $\ell$  là chỉ số đầu tiên sao cho  $b_\ell > a_\ell$ , và lấy  $j \geq \ell$  là chỉ số nhỏ nhất sao cho  $b_j = b_{j+1} + 1$ . Trước hết, ta chứng minh rằng chỉ số  $j$  này luôn tồn tại. Thật vậy, nếu  $b$  có một đoạn bằng bắt đầu từ  $b_\ell$  (tức là phải có  $b_\ell = b_{\ell+1}$ ) thì chỉ số cuối cùng của đoạn bằng này là chỉ số  $j$  cần tìm ở trên. Ngược lại, ta có  $b_\ell = b_{\ell+1} + 1$ , do đó  $\ell$  chính là chỉ số  $j$  cần tìm.

Với chỉ số  $j$  này, ta lấy  $b'$  sao cho  $b' = (b_1, \dots, b_{j-1}, b_j - 1, b_{j+1}, \dots, b_k)$ . Dễ thấy  $b'$  là một phân hoạch. Ta chứng minh  $b'$  là một phân hoạch trơn. Thật vậy, với  $j = 1$  thì hiển nhiên  $b'$  là một phân hoạch trơn vì khi đó  $\ell = 1$  và  $b_1 = b_2 + 1$ . Với  $j > 1$ , do  $\ell$  là chỉ số đầu tiên sao cho  $b_\ell > a_\ell$  nên ta phải có  $b_{\ell-1} = b_\ell$ , nếu không thì  $a$  không phải là một phân hoạch trơn vì

$$a_{\ell-1} = b_{\ell-1} = b_\ell + 1 \geq a_\ell + 2.$$

Do đó  $b_{j-1} = b_j$  và  $b'$  là phân hoạch trơn. Hơn nữa, dễ thấy  $b = b'^{\downarrow j}$ . Ta cần chứng minh  $b' \leq_S a$ . Ta có  $b'_i = b_i \geq a_i$  với mọi  $i \neq j$ . Mặt khác, do định nghĩa của  $\ell$  và  $j$  thì

$$b_j = b_{j-1} = \dots = b_\ell \geq a_\ell + 1 \geq a_j + 1.$$

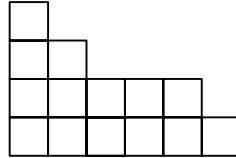
Do đó  $b'_j = b_j - 1 \geq a_j$ . Theo định nghĩa của quan hệ bao hàm thì  $b' \leq_S a$ .  $\square$

Tiếp theo chúng tôi tính độ dài đường đi dài nhất tới một phân hoạch trơn trong hệ E-SPM.

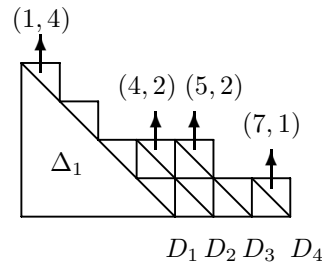
Nhắc lại rằng mỗi trạng thái của hệ E-SPM được biểu diễn bằng một phân hoạch, hay chính xác hơn là bởi biểu đồ Ferrers, trong đó mỗi hạt được biểu diễn bởi một ô  $(i, j)$  với  $i$  và  $j$  là các chỉ số cột và hàng tương ứng. Ký hiệu  $F(a)$  là biểu đồ Ferrer của phân hoạch  $a = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ , và viết  $(i, j) \in F(a)$  với tất cả các ô  $(i, j)$  sao cho  $1 \leq i \leq k$  và  $1 \leq j \leq a_i$  (xem Hình 2.3). Ta nói rằng  $i$  là một *cột* *trơn* của  $a$  nếu  $i = 1$  hoặc  $a_i = a_{i-1}$  với  $i > 1$ . Với mỗi ô  $(i, j)$ , chúng tôi định nghĩa

đường chéo  $D(i, j)$  là tập tất cả các ô  $(i', j')$  của  $F(a)$  nằm trên đường chéo chứa ô  $(i, j)$ , tức là  $i' + j' = i + j$  và  $1 \leq j' \leq a_{i'}$ .

Hình 2.4 minh họa các cột trơn  $(1, 4, 5, 7)$  và các đường chéo tương ứng  $D(1, 4)$ ,  $D(4, 2)$ ,  $D(5, 2)$ ,  $D(7, 1)$  của phân hoạch trơn  $(4, 3, 2, 2, 2, 1, 1)$ .



Hình 2.3: Biểu đồ Ferrer của phân hoạch  $(4, 3, 2, 2, 2, 1, 1)$



Hình 2.4: Các cột trơn và các đường chéo tương ứng của  $(4, 3, 2, 2, 2, 1, 1)$

*Nhận xét 2.3.1.* Để tính độ dài của đường đi dài nhất giữa hai phân hoạch trơn, chúng ta xét sự di chuyển của các hạt. Khi một hạt được thêm vào một phân hoạch trơn, nó sẽ trượt (rơi liên tiếp) xuống một vị trí mới cho tới khi thu được phân hoạch trơn, sau đó hạt này sẽ đứng im và không di chuyển nữa trong mọi bước thêm hạt tiếp theo. Ngoài ra, việc thêm một hạt vào một phân hoạch trơn thực chất chỉ gây ra sự di chuyển duy nhất của nó còn các hạt khác không di chuyển trong quá trình vận động với luật rơi để thu được phân hoạch trơn tiếp theo. Khi áp dụng luật rơi một bước, các hạt sẽ dịch chuyển sang bên phải một cột. Do vậy, số bước di chuyển của một hạt cho tới khi nó dừng ở một vị trí nhất định chỉ phụ thuộc vào vị trí của cột mà nó được thêm. Như vậy, với vị trí cho trước của một ô trong một phân hoạch trơn, số bước di chuyển phù hợp với luật thêm hay rơi trong hệ E-SPM của hạt được thêm vào để có thể rơi một số bước và dừng lại ở ô đó không vượt quá vị

trí cột của nó. Điều này cho phép định nghĩa tốt khái niệm năng lượng một cách hình thức cho mỗi ô trong biểu diễn biểu đồ Ferrer của phân hoạch tròn như sau.

**Định nghĩa 2.3.1 (Năng lượng).** Cho  $a$  là một phân hoạch tròn.

- (i) *Năng lượng của hạt*  $(i, j) \in F(a)$ , được ký hiệu là  $e_a(i, j)$ , là số bước di chuyển lớn nhất có thể, xét trong mọi đường đi trên hệ E-SPM xuất phát từ  $(0)$  đến  $a$ , của hạt được thêm vào để đạt tới vị trí  $(i, j)$  trong  $a$ .
- (ii) *Năng lượng*  $E(a)$  của  $a$  là  $E(a) = \sum_{(i,j) \in F(a)} e_a(i, j)$ .

Nhắc lại rằng trong vật lý năng lượng của một vật để đo khả năng (ngưỡng) di chuyển nội tại của vật đó. Bởi vậy, khái niệm năng lượng chúng tôi đưa ra ở đây cho các hạt, do đó cả các phân hoạch tròn, cũng phù hợp với khái niệm năng lượng đã quen biết trong vật lý.

Kết quả chính trong phần này là chứng minh độ dài của đường đi dài nhất để tới được một phân hoạch tròn đúng bằng năng lượng của phân hoạch tròn đó. Trước hết chúng tôi sẽ tính năng lượng của một phân hoạch tròn dựa vào các thành phần của nó.

**Bổ đề 2.3.1.** Cho  $a = (a_1, a_2, \dots, a_k)$  là một phân hoạch tròn, ta có:

- (i)  $e_a(i, j) = i + 1 - \min\{r : a_r + r = i + j \text{ hoặc } a_r < a_{r-1} \text{ và } a_r + r \geq j + i - 1\}$  với mọi  $(i, j) \in F(a)$ .
- (ii) Nếu  $(i, j) \in F(a)$  và  $(i - 1, j + 1) \in F(a)$  thì

$$e_a(i - 1, j + 1) = e_a(i, j) - 1.$$

*Chứng minh.* (i) Ta biết rằng mỗi khi một hạt được thêm vào một cột của một phân hoạch tròn, nó sẽ rơi theo đường chéo (cầu thang) từ đỉnh của cột được thêm và chỉ dừng lại khi tính chất của đường chéo bị phá vỡ. Do quan hệ bao hàm trong phân hoạch tròn, để một hạt được thêm vào tại một bước trung gian nào đó đạt tới vị trí  $(i, j)$  trong  $F(a)$  thì hạt được thêm đó tại các bước trung gian phải nằm trên đường chéo  $D(i, j)$  và cột nhận hạt đó phải đứng trước cột  $i$ . Tức là hạt cần được thêm vào

một cột của một trạng thái trung gian và cột này chứa hạt (kể cả hạt được thêm) nằm trên đường chéo  $D(i, j)$ . Kết hợp với phần nhận xét 2.3.1 về sự di chuyển của hạt được thêm trong hệ E-SPM thì trạng thái

$$a' = \sqcup\{(i', j') \in F(a) : i' + j' \leq i + j - 1\} \sqcup\{(i', j') \in F(a) : i' + j' = i + j \text{ và } i' \geq i + 1\}$$

phải là một trạng thái trung gian trên mọi con đường đến được  $a$  để có thể thêm hạt và hạt đó trượt tới ô  $(i, j)$ . Hơn nữa, nếu gọi  $r$  là cột được thêm vào  $a'$  để hạt sau khi rơi một số lần có thể tới được vị trí  $(i, j)$  của  $a$  thì  $r$  phải thỏa mãn:  $a_r + r \geq i + j - 1$  (do quan hệ bao hàm). Xét hai trường hợp:

1.  $a_r + r \geq i + j$ : luôn có thể thêm vào cột  $r$  được.
2.  $a_r + r = i + j - 1$ : để có thể thêm được vào cột  $r$  thì  $a_r < a_{r-1}$  (do quan hệ bao hàm).

Như vậy để có số bước di chuyển lớn nhất cho một hạt đặt ở vị trí  $(i, j)$ , chúng ta phải tìm một chỉ số cột nhỏ nhất  $r_a(i, j)$  trong số tất cả các cột  $r$  ở trên. Do đó

$$r_a(i, j) = \min\{r : a_r + r \geq i + j \text{ hoặc } a_r < a_{r-1} \text{ và } a_r + r = j + i - 1\}.$$

Cuối cùng, nếu một hạt được thêm vào cột  $r$  và dịch chuyển tới cột  $i$  thì độ dài đường đi trong đồ thị quỹ đạo sẽ gồm một bước thêm một hạt và  $i - r$  bước áp dụng luật rơi. Do vậy  $e_a(i, j) = i + 1 - r_a(i, j)$ .

(ii) Là hệ quả trực tiếp của định nghĩa của  $r_a(i, j)$ . □

Chúng tôi mong muốn tính một cách tường minh năng lượng tổng thể của một phân hoạch tron  $a = (a_1, \dots, a_k)$ . Giả sử  $1 = i_1 < i_2 < \dots < i_\ell$  là tất cả các cột tron của  $a$ . Để đơn giản ta ký hiệu  $D_i$  là đường chéo  $D(i, a_i)$  của  $a$ . Hiển nhiên, chúng ta có thể phân tích biểu đồ Ferrers  $F(a)$  của  $a$  dưới dạng hợp rời sau:

$$F(a) = \Delta_1 \sqcup D_2 \sqcup \dots \sqcup D_\ell, \quad (*)$$

trong đó  $\Delta_1$  là tập tất cả các ô  $(i, j)$  của  $F(a)$  nằm dưới và nằm trên đường chéo  $D_1$ , tức là  $i, j \leq 1$  và  $i + j \leq a_1 + 1$ . Năng lượng của  $a$  có thể được tính bằng tổng năng lượng của mỗi thành phần trong hợp rời trên của  $F(a)$ .

**Mệnh đề 2.3.2.** Cho  $a = (a_1, \dots, a_k)$  là một phân hoạch trơn, và  $1 = i_1 < i_2 < \dots < i_\ell$  là tập tất cả các cột trơn của  $a$ . Ta có:

$$E(a) = \frac{a_1(a_1 + 1)(a_1 + 2)}{6} + \sum_{r=2}^{\ell} i_r a_{i_r} - \sum_{r=3}^{\ell} i_{r-1} a_{i_r} + \sum_{r=2}^{\ell} \frac{a_{i_r}(a_{i_r} - 1)}{2}.$$

*Chứng minh.* Để chứng minh điều này, chúng ta sẽ tính năng lượng mỗi phần trong khai triển hợp rời \* của  $F(a)$  (xem Ví dụ 2.3.1).

- Với mỗi ô  $(i, j) \in \Delta_1$ , ta có  $j \leq 1 + a_{i_1} - i$  và  $e_a(i, j) = i$ , bởi vậy:

$$\sum_{(i,j) \in \Delta_1} e_a(i, j) = \sum_{i=1}^{a_1} i(a_1 - i + 1) = \frac{a_1(a_1 + 1)(a_1 + 2)}{6}.$$

- Với  $D_2$ . Ta có  $e(i_2, a_{i_2}) = i_2$  vì nếu một hạt được thêm vào cột 1, nó có thể rơi đến ô  $(i_2, a_{i_2})$ . Hơn nữa, theo Lemma 2.3.1(ii), năng lượng của các ô trên đường chéo  $D_2$  từ ô  $(i_2, a_{i_2})$  đến ô  $(i_2 + a_{i_2} - 1, 1)$  là dãy tăng liên tiếp các số tự nhiên bắt đầu từ  $i_2$ . Do vậy:

$$\sum_{(i,j) \in D_2} e_a(i, j) = \sum_{i=0}^{a_{i_2}-1} (i_2 + i) = i_2 a_{i_2} + \frac{a_{i_2}(a_{i_2} - 1)}{2}.$$

- Với  $D_r$  trong đó  $3 \leq r \leq \ell$ . Chúng ta quan tâm tới cột nhỏ nhất mà trên đó một hạt có thể được thêm vào tại một bước trung gian để di chuyển tới vị trí  $(i_r, a_{i_r})$ . Theo định nghĩa của cột trơn, với mọi  $s < i_{r-1}$ , ta đều có  $a_s + s < a_{i_r} + i_r - 1$ , bởi vậy chúng ta không thể thêm một hạt nào vào cột  $s$  để tiếp theo đó nó rơi đến  $(i_r, a_{i_r})$  được. Xét cột  $i_{r-1}$ , để di chuyển một hạt tới vị trí  $(i, j)$ , chúng ta có thể thêm một hạt tại vị trí duy nhất  $(i_{r-1}, a_{i_{r-1}} + 1)$ . Nhưng lúc này, độ cao của cột  $i_{r-1}$  lớn hơn độ cao của cột  $i_{r-1} - 1$  do tính trơn của cột  $i_{r-1}$ , và điều này là vô lý. Bởi vậy chúng ta xét cột  $s$  với  $s \geq i_{r-1} + 1$ . Có hai khả năng xảy ra như sau:

- nếu  $i_r = i_{r-1} + 1$ , chúng ta sẽ thêm trực tiếp một hạt vào vị trí  $i_r$ ,
- với các trường hợp khác, chúng ta thêm một hạt vào cột  $i_{r-1} + 1$ .



Điều này kéo theo là trong bất cứ trường hợp nào thì cột tốt nhất có thể để thêm một hạt luôn là  $i_{r-1} + 1$ . Bởi vậy, theo Bổ đề 2.3.1

$$e(i_r, a_{i_r}) = i_r + 1 - (i_{r-1} + 1) = i_r - i_{r-1}.$$

Sử dụng một lập luận tương tự như trong trường hợp của  $D_2$ , ta thu được:

$$\sum_{(i,j) \in D_r} e_a(i, j) = \sum_{i=0}^{a_{i_r}-1} (i_r - i_{r-1} + i) = (i_r - i_{r-1})a_{i_r} + \frac{a_{i_r}(a_{i_r} - 1)}{2}.$$

Do vậy, năng lượng tổng thể của  $a$  là:

$$\begin{aligned} E(a) &= \sum_{(i,j) \in \Delta_1} e_a(i, j) + \sum_{(i,j) \in D_2} e_a(i, j) + \sum_{r=3}^{\ell} \sum_{(i,j) \in D_r} e_a(i, j) \\ &= \frac{a_1(a_1 + 1)(a_1 + 2)}{6} + i_2 a_{i_2} + \frac{a_{i_2}(a_{i_2} - 1)}{2} + \sum_{r=3}^{\ell} \left( (i_r - i_{r-1})a_{i_r} + \frac{a_{i_r}(a_{i_r} - 1)}{2} \right) \\ &= \frac{a_1(a_1 + 1)(a_1 + 2)}{6} + \sum_{r=2}^{\ell} i_r a_{i_r} - \sum_{r=3}^{\ell} i_{r-1} a_{i_r} + \sum_{r=2}^{\ell} \frac{a_{i_r}(a_{i_r} - 1)}{2}. \end{aligned}$$

□

**Ví dụ 2.3.1.** Năng lượng mỗi ô của phân hoạch trơn  $b = (4, 3, 2, 2, 2, 1, 1)$  được minh họa trong Hình 2.5. Chẳng hạn, với ô  $(4, 2)$ , ta có thể thêm hạt vào cột đầu tiên để trượt đến vị trí này trong  $b$ , tức là  $r_b(4, 2) = 1$  và do đó  $e_b(4, 2) = 4$ . Lấy tổng năng lượng trong các ô ta có  $E(b) = 34$ . Định lý bên dưới khẳng định rằng đây cũng chính là độ dài của đường đi dài nhất từ  $(0)$  đến  $b$ .

1						
1	2					
1	2	3	4	1		
1	2	3	4	5	2	2

Hình 2.5: Biểu đồ năng lượng của  $b = (4, 3, 2, 2, 2, 1, 1)$

Bây giờ chúng ta trình bày kết quả chính trong phần này.

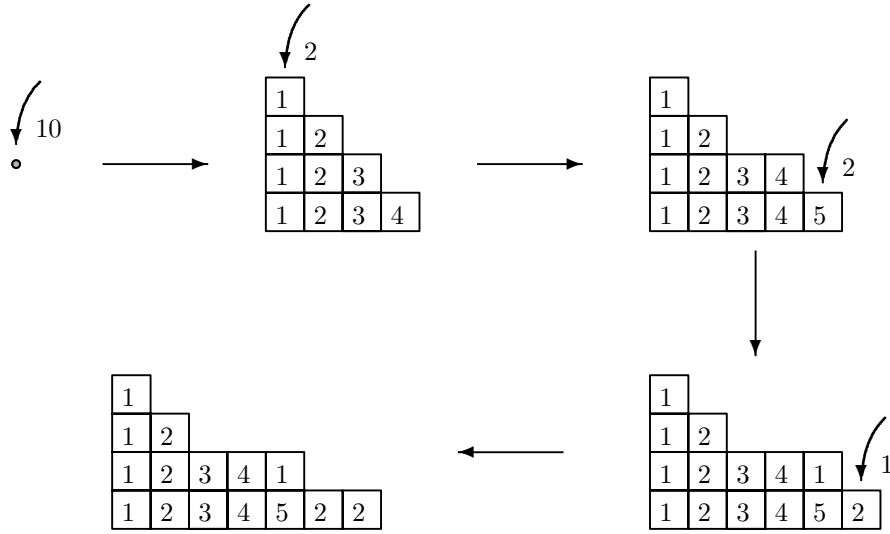
**Định lý 2.3.2.** Cho  $a$  là một phân hoạch trơn. Khi đó, độ dài của đường đi dài nhất từ  $(0)$  tới  $a$  đúng bằng  $E(a)$ .

*Chứng minh.* Theo định nghĩa năng lượng của hạt, để đi đến một ô ở vị trí  $(i, j)$  của  $a$  thì một hạt phải tốn nhiều nhất là  $e_a(i, j)$  bước di chuyển. Bởi vậy, độ dài của một đường đi tùy ý từ  $(0)$  tới  $a$  không vượt quá tổng số bước di chuyển của mỗi hạt trong biểu đồ Ferrer của  $a$  và do đó không vượt quá  $E(a)$ . Để chứng minh định lý chúng ta chỉ cần chỉ ra một đường đi tường minh để thêm các hạt vào từ  $(0)$  sao cho độ dài của nó đúng bằng  $E(a)$ . Để làm được điều này, chúng ta sẽ liên tiếp lấp đầy các phần trong khai triển của  $F(a)$  (xem Ví dụ 2.3.2). Cụ thể như sau:

- Với  $\Delta_1$ : Chúng ta sẽ luôn thêm vào cột 1 mỗi khi thu được một phân hoạch trơn, cho tới khi thu được  $\Delta_1$ . Như vậy, số bước để thu được  $\Delta_1$  bằng cách này là  $\frac{a_1(a_1+1)(a_1+2)}{6}$ . Dễ dàng kiểm tra bằng cách này mỗi hạt đặt tại ô  $(i, j)$  trong  $\Delta_1$  đều cần chính xác là  $e_a(i, j)$  bước dịch chuyển.
- Với  $D_2$ : Chúng ta sẽ lặp lại việc thêm  $a_{i_2}$  hạt luôn luôn vào vị trí cột 1 của  $\Delta_1$  và cuối cùng thu được  $\Delta_1 \sqcup D_2$ . Hơn nữa, mỗi hạt được thêm sẽ rơi dọc theo đường chéo  $D_2$ , và theo cách này một hạt đặt tại ô  $(i, j)$  trong  $D_2$  sẽ cần đúng  $e_a(i, j)$  bước di chuyển.
- Với  $D_r (3 \leq r \leq \ell)$ : Theo quy nạp, giả sử  $\Delta_1 \sqcup D_2 \sqcup \dots \sqcup D_{r-1}$  đã được lấp đầy. Chúng ta cũng lặp lại việc thêm  $a_{i_r}$  hạt luôn luôn vào cột  $i_{r-1} + 1$  của  $\Delta_1 \sqcup D_2 \dots \sqcup D_{r-1}$ . Tương tự như giải thích ở trên thì chúng ta sẽ thu được phân hoạch trơn  $\Delta_1 \sqcup D_2 \sqcup \dots \sqcup D_r$ . Theo cách này thì mỗi hạt đặt tại một vị trí  $(i, j)$  trong  $D_r$  sẽ cần đúng  $e_a(i, j)$  bước dịch chuyển.

Chúng ta đã xây dựng được một đường đi từ  $(0)$  tới  $a$ , trong đó số bước dịch chuyển của mỗi hạt đều đúng bằng năng lượng của hạt đó. Vì vậy độ dài của đường đi này đúng bằng năng lượng  $E(a)$  của  $a$ .  $\square$

**Ví dụ 2.3.2.** Hình 2.6 minh họa đường đi dài nhất từ  $(0)$  tới  $(4, 3, 2, 2, 2, 1, 1)$ . Mỗi ký hiệu  $\xrightarrow{k}$  tại cột  $i$  để chỉ  $k$  hạt được thêm lần lượt vào cột  $i$  trong các bước thêm. Như vậy, chúng ta luôn thêm vào cột đầu tiên trong 10 bước thêm đầu tiên để thu



Hình 2.6: Đường đi dài nhất từ  $(0)$  tới  $(4, 3, 2, 2, 2, 1, 1)$

được trạng thái tron  $(4, 3, 2, 1)$ . Hai bước thêm tiếp theo cũng vào cột đầu tiên xuất phát từ  $(4, 3, 2, 1)$ . Với việc thêm hạt đầu tiên sẽ thu được  $(5, 3, 2, 1)$ . Phân hoạch này sẽ thực hiện luật rơi 4 lần để thu được phân hoạch tron  $(4, 3, 2, 1, 1)$ . Với việc thêm hạt thứ hai vào cột đầu của  $(4, 3, 2, 1, 1)$  sẽ thu được  $(5, 3, 2, 1, 1)$ . Phân hoạch này sẽ thực hiện luật rơi 3 để thu được  $(4, 3, 2, 2, 1)$ . Cứ tiếp tục theo con đường này ta thu được phân hoạch tron  $(4, 3, 2, 2, 2, 1, 1)$  mong muốn.

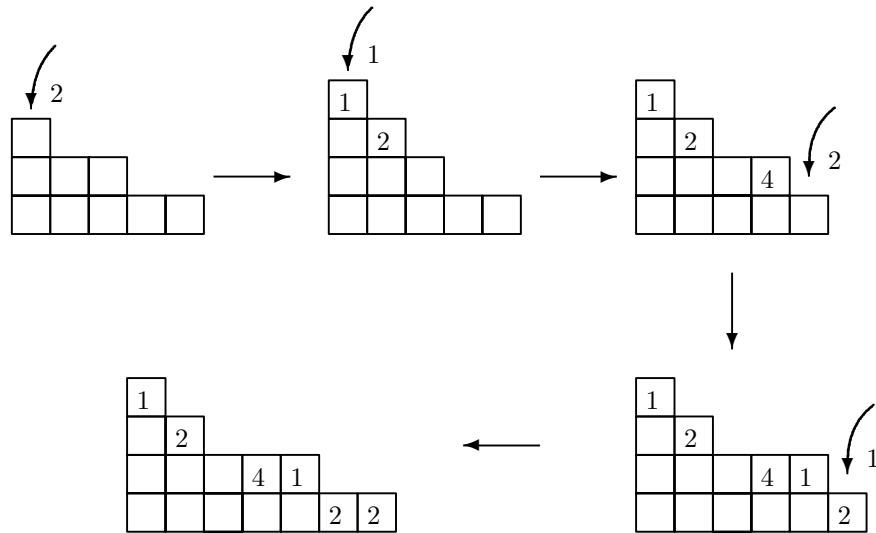
Từ định lý này chúng ta cũng có thể nghiên cứu đường đi dài nhất giữa hai phân hoạch tron.

**Hệ quả 2.3.3.** Cho  $b \leq_S a$  là các phân hoạch tron. Khi đó, độ dài của đường đi dài nhất từ  $a$  tới  $b$  là

$$\sum_{(i,j) \in F(b) - F(a)} e_b(i, j).$$

*Chứng minh.* Ý tưởng chứng minh hoàn toàn tương tự như chứng minh của Định lý 2.3.2. Trước hết, do định nghĩa năng lượng và quan hệ bao hàm trên tập các phân hoạch tron trong hệ E-SPM nên độ dài của mọi đường đi từ  $a$  đến  $b$  không vượt quá tổng bước di chuyển của mỗi hạt trong  $b$  nằm ngoài  $a$ . Để chứng minh tính dài nhất, chúng ta xử lý mỗi phần trong khai triển của  $F(b)$  và thêm vào các hạt còn thiếu để lấp đầy mỗi phần đó (xem Ví dụ 2.3.3). Chính xác hơn, chiến thuật sẽ như

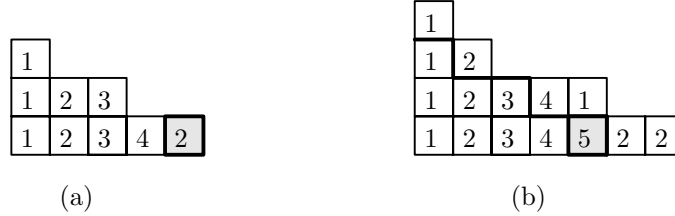
sau. Giả sử  $i_1, \dots, i_\ell$  là các cột trơn của  $b$ . Gọi  $n_i(a)$  và  $n_i(b)$  là số hạt của  $F(a)$  và  $F(b)$  nằm trên đường chéo  $D_i(b)$  ( $i = 2, \dots, \ell$ ) trong khai triển của  $F(b)$  tương ứng và  $n_1(a)$ ,  $n_1(b)$  là số hạt của  $F(a)$  và  $F(b)$  nằm dưới hoặc trên đường chéo  $\Delta_1(b)$ . Xuất phát từ  $a$ , ta luôn luôn thêm  $n_1(b) - n_1(a)$  hạt vào cột 1 để lấp đầy  $\Delta_1(b)$ . Sau đó, thêm  $n_2(b) - n_2(a)$  hạt vào cột 1 của phân hoạch trơn vừa thu được để lấp đầy  $D_2(b)$ . Tiếp theo, với mỗi  $3 \leq r \leq \ell$ , ta sẽ thêm  $n_r(b) - n_r(a)$  hạt vào cột  $i_{r-1} + 1$  của phân hoạch trơn cuối cùng của bước trước đó để lấp đầy  $D_r(b)$ . Dễ dàng kiểm tra được rằng số các bước dịch chuyển của mỗi hạt thuộc  $b$  mà không thuộc  $a$  đúng bằng năng lượng của nó trong  $b$ . Điều này hoàn thiện chứng minh.  $\square$



Hình 2.7: Đường đi dài nhất từ  $a = (3, 2, 2, 1, 1)$  tới  $b = (4, 3, 2, 2, 2, 1, 1)$

**Ví dụ 2.3.3.** Hình 2.7 minh họa đường đi dài nhất từ  $a = (3, 2, 2, 1, 1)$  tới  $b = (4, 3, 2, 2, 2, 1, 1)$ . Mỗi ký hiệu  $\xrightarrow{k}$  tại cột  $i$  minh họa  $k$  hạt được thêm vào cột  $i$  trong các bước thêm. Các số trong mỗi ô là năng lượng của các hạt được thêm vào xuất phát từ  $a$ . Chẳng hạn, từ phân hoạch  $(4, 3, 2, 2, 1)$  (thứ ba từ trái sang phải), ta thêm hai hạt vào cột thứ 5 trong hai bước thêm tiếp theo. Với bước thêm đầu tiên, ta thu được  $(4, 3, 2, 2, 2)$  và nó sẽ rơi để đến phân hoạch trơn  $(4, 3, 2, 2, 1, 1)$ . Do vậy, hạt thêm này sẽ ứng với ô  $(1, 6)$  trong  $b$  và có năng lượng là 2 (gồm một bước thêm và một bước rơi). Với bước thêm thứ hai cũng vào cột thứ 5 của  $(4, 3, 2, 2, 1, 1)$  ta

thu được  $(4, 3, 2, 2, 2, 1)$ , là phân hoạch tròn, và không rơi nữa. Do đó, hạt thêm này sẽ ứng với ô  $(2, 5)$  trong  $b$  và có năng lượng là 1 (gồm một bước thêm). Cứ như vậy, độ dài của đường đi dài nhất từ  $a$  tới  $b$  là 12.



Hình 2.8: Phản ví dụ cho  $e_a(i, j) = e_b(i, j)$

Chú ý rằng, độ dài của đường đi dài nhất từ  $a$  tới  $b$  không bằng  $E(b) - E(a)$  vì ta không có  $e_a(i, j) = e_b(i, j)$  với mọi  $(i, j) \in F(a)$  (do  $a$  và  $b$  có các cột tròn với các chỉ số rất khác nhau). Hơn nữa, dễ thấy  $e_b(i, j) \geq e_a(i, j)$ . Do đó, độ dài của đường đi dài nhất từ  $a$  tới  $b$  không bao giờ vượt quá  $E(b) - E(a)$ . Điều này ngược lại với kết quả trong trường hợp đường đi ngắn nhất mà đẳng thức xảy ra.

Hình 2.8 minh họa bảng năng lượng của  $a = (3, 2, 2, 1, 1)$  và bảng năng lượng của  $b = (4, 3, 2, 2, 2, 1, 1)$ . Theo đó,  $2 = e_a(5, 1) \neq e_b(5, 1) = 5$  và  $E(b) - E(a) = 15$  trong khi độ dài lớn nhất từ  $a$  đến  $b$  trong Ví dụ 2.3.3 là 12.

Thêm vào đó, đường đi có độ dài lớn nhất từ  $(0)$  tới  $a$  là duy nhất. Thật vậy, từ chứng minh của Định lý 2.3.2, một hạt  $G$  tại vị trí  $(i, j)$  trên đường chéo  $D_r$  với  $r \geq 2$  ( $\Delta_1$  tương ứng) có đúng  $e_a(i, j)$  dịch chuyển nếu và chỉ nếu  $G$  được thêm vào cột  $i_{r-1} + 1$  (cột 1 tương ứng) và sau đó nó rơi theo đường chéo và dừng lại ở vị trí  $(i, j)$ . Bởi vậy, đường chéo  $D_{r-1}$  luôn luôn phải được lấp đầy trước khi đường chéo  $D_r$  được bổ sung thêm hạt. Hơn nữa, hạt ở vị trí  $(i + 1, j - 1)$  phải có mặt trước khi thêm hạt  $G$ . Theo đệ quy thì đường đi có độ dài lớn nhất từ  $(0)$  tới  $a$  được xác định bằng cách xây dựng tường minh như trong chứng minh của Định lý 2.3.2 là duy nhất.

Tuy nhiên, có thể có nhiều đường đi có độ dài lớn nhất từ  $a$  tới  $b$ . Chẳng hạn, nếu ta lấy  $a = (2, 2, 1, 1, 1)$  và  $b = (2, 2, 2, 1, 1, 1)$ . Theo Hệ quả 2.3.3 ta có  $l(a, b) = 2$ . Hơn nữa, hai đường đi sau đều có độ dài 2:

$$a = (2, 2, 1, 1, 1) \rightarrow (2, 2, 2, 1, 1) \rightarrow (2, 2, 2, 1, 1, 1) = b$$

$$\text{và } a = (2, 2, 1, 1, 1) \rightarrow (2, 2, 1, 1, 1) \rightarrow (2, 2, 2, 1, 1, 1) = b.$$

## 2.4 Kết luận chương

Trong chương này chúng tôi trình bày hệ E-SPM, qua đó nghiên cứu sự ổn định của hệ SPM dưới tác động bởi luật thêm hạt mỗi khi hệ đạt tới trạng thái ổn định. Chúng tôi đã thu được các kết quả sau:

1. Sinh ra tất cả các phân hoạch trơn bằng hệ động lực E-SPM.
2. Chứng minh được các phân hoạch trơn có cấu trúc dàn con của dàn Young được đặc tả bởi quan hệ thứ tự trội.
3. Tính toán thời gian ngắn nhất và dài nhất để tới một phân hoạch trơn trong hệ E-SPM bằng sử dụng khái niệm năng lượng.

## Chương 3

# Hệ SPM đối xứng song song

Hệ SPM được giới thiệu với luật rơi nội tại nhằm giải thích một số hiện tượng tự nhiên như lở tuyết, lở cát, ... Sau đó, với các mục đích khác nhau người ta cho phép hệ có thêm một số luật khác ngoài luật rơi nội tại. Chẳng hạn, nghiên cứu tính ổn định thì hệ bổ sung luật thêm hạt từ bên ngoài như đã trình bày trong Chương 2. Nghiên cứu các phân hoạch của số tự nhiên nhờ hệ động lực, Brylawsky [8] đã bổ sung thêm luật trượt cho hệ. Nghiên cứu các trạng thái ổn định và cho mục đích xử lý song song, Durand-Lose giới thiệu hệ mở rộng SPM song song, ký hiệu P-SPM, trong đó tại mỗi bước bất cứ cột nào rơi được đều rơi [20]. Để giải thích sự rơi của các hệ trong thực tế tốt hơn, Formenti et. al. [22] và Phan [40] mở rộng hệ SPM sao cho các cột có thể rơi sang cả hai phía (trái hoặc phải). Hệ này được gọi là SPM đối xứng, ký hiệu S-SPM. Trong chương này chúng tôi trình bày hai mở rộng của hệ SPM và qua đó giới thiệu một hệ mở rộng SPM đối xứng, song song. Cụ thể, phần 3.1 sẽ trình bày một số kết quả trên hệ P-SPM [20] và hệ S-SPM [22, 40]. Với hệ P-SPM, trạng thái ổn định chính là trạng thái ổn định của hệ SPM và thời gian để hệ hội tụ đến trạng thái ổn định đó là tuyến tính. Với hệ S-SPM, hệ hội tụ tới nhiều trạng thái ổn định. Trong khi Formenti et. al xem xét hình dạng của các trạng thái mà không quan tâm tới vị trí của cột khởi đầu (tức là, các trạng thái sai khác nhau một phép tịnh tiến trên đường thẳng sẽ được đồng nhất với nhau), Phan xét các trạng thái của nó cùng với vị trí của cột khởi đầu. Cả hai đều đưa ra đặc trưng cho các hình dạng của các trạng thái và tính toán tổ hợp các dạng ổn định (hình

dạng của trạng thái ổn định) của hệ. Phần 3.2 là đóng góp của chúng tôi nhằm giới thiệu hệ mở rộng SPM đối xứng song song với luật vận động thừa kế từ hệ SPM đối xứng và thực hiện sự rơi một cách đồng thời (song song). Không gian trạng thái của hệ SPM đối xứng song song là một không gian con thực sự của hệ SPM đối xứng. Hơn nữa, bao hàm thực sự này cũng đúng cho tập các trạng thái ổn định của hai hệ. Kết quả chính của chúng tôi là Định lý 3.2.1 nói rằng tập trạng thái ổn định của hai hệ mở rộng này có cùng hình dạng. Các kết quả này được trình bày trong [21, 47].

### 3.1 Một số mở rộng của hệ SPM

Phần này trình bày các kết quả cho hai hệ mở rộng của hệ SPM: hệ SPM song song (Parallel sandpile model) và hệ SPM đối xứng (Symmetric sandpile model) đã được nghiên cứu trong [20, 22, 24, 26, 40].

#### 3.1.1 Hệ SPM song song (P-SPM)

Hệ SPM song song (Parallel sandpile model) được giới thiệu bởi Durand-Lose [20].

**Định nghĩa 3.1.1 (Hệ P-SPM( $N$ )).** Hệ SPM song song, ký hiệu P-SPM( $N$ ), là hệ động lực rời rạc sao cho:

- i) Trạng thái khởi đầu là ( $N$ );
- ii) Luật vận động là luật P-SPM song song như sau: Mỗi bước áp dụng luật rơi tại tất cả vị trí có thể rơi.

Ta cũng ký hiệu P-SPM( $N$ ) là không gian trạng thái của hệ P-SPM( $N$ ) và

$$\text{P-SPM} = \cup_{N \geq 0} \text{P-SPM}(N).$$

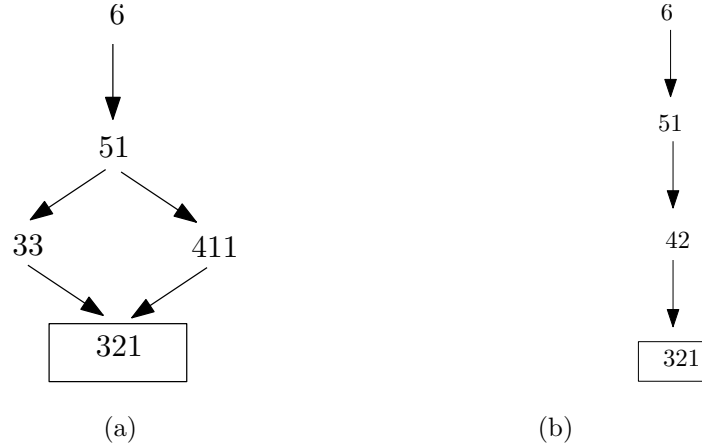
*Nhận xét 3.1.1.* - Ta có bao hàm sau

$$\text{P-SPM}(N) \subseteq \text{SPM}(N).$$

Hơn nữa, mỗi trạng thái ổn định trong hệ P-SPM cũng là một trạng thái ổn định trong hệ SPM.



- Trong khi hệ  $SPM(N)$  là không tất định (vì tại mỗi bước có thể có nhiều cột có thể rơi), hệ  $P\text{-}SPM(N)$  là tất định. Cả hai hệ hội tụ tới cùng một trạng thái ổn định.



Hình 3.1: Không gian trạng thái của: (a):  $SPM(6)$ ; (b):  $PS\text{-}SPM(6)$

Kết quả dưới đây cho ta đánh giá về thời gian tới trạng thái ổn định trong hệ  $P\text{-}SPM$ .

**Định lý 3.1.1** ([20]). *Cho  $N$  là một số nguyên dương. Thời gian để tới được trạng thái ổn định trong hệ  $P\text{-}SPM(N)$  là  $\mathcal{O}(N)$ .*

Nhận xét rằng Mệnh đề 1.2.3 cho thấy thời gian để tới được trạng thái ổn định trong hệ  $SPM(N)$  (tuần tự) là  $\mathcal{O}(N^{3/2})$ . Trong khi đó, Định lý 3.1.1 cho ta thời gian trong hệ song song là tuyến tính.

### 3.1.2 Hệ $SPM$ đối xứng ( $S\text{-}SPM$ )

Phần này trình bày một mở rộng gần đây của hệ  $SPM$  trong đó các cột không chỉ rơi sang phải mà còn có thể rơi sang trái. Hệ này được gọi là hệ  $SPM$  đối xứng hay  $S\text{-}SPM$  và được giới thiệu bởi Forment *et.al.* [22] và Phan [40]. Trước hết, chúng tôi nhắc lại một số định nghĩa.

**Định nghĩa 3.1.2.** Cho  $n$  và  $k$  là các số nguyên dương.

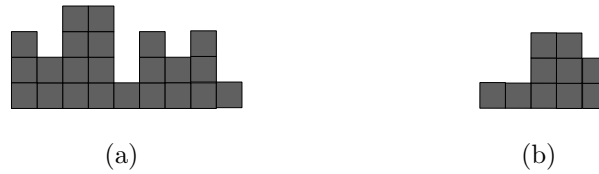
- (i) Một dãy các số nguyên dương  $a = (a_1, a_2, \dots, a_k)$  được gọi là *đơn đỉnh* độ dài  $k$  nếu tồn tại một chỉ số  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  sao cho  $a_1 \leq \dots \leq a_{i-1} \leq a_i \geq a_{i+1} \geq \dots \geq a_k$  (quy ước  $a_0 = a_{k+1} = 0$ ). Các đại lượng được xác định bởi

$$h(a) = \max\{a_i\}_{i=1}^k \quad \text{và} \quad w(a) = \sum_{i=1}^k a_i$$

được gọi là *độ cao* và *trọng số* của  $a$  một cách tương ứng.

- (ii) *Nghịch đảo* của dãy  $a = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ , ký hiệu  $a^{-1}$ , là dãy  $(a_k, a_{k-1}, \dots, a_1)$ .
- (iii) *Lũy thừa cấp  $n$*  của dãy  $a$ , ký hiệu  $a^n$ , là dãy thu được từ  $a$  bằng cách viết liền  $n$  lần dãy  $a$

Cũng giống như phân hoạch, các dãy đơn đỉnh cũng được biểu diễn dưới dạng biểu đồ Ferrer. Trong đó, cột thứ  $i$  trong biểu đồ Ferrer của  $a$  gồm  $a_i$  ô vuông xếp chồng lên nhau (xem Hình 3.2). Các phần  $a_i$  được gọi là độ cao của cột thứ  $i$ .



Hình 3.2: (a) Dãy không đơn đỉnh (b) Dãy đơn đỉnh

Cho  $a = (a_1, \dots, a_k)$  có độ dài  $k$  và  $1 \leq i \leq k$ . Ký hiệu

$$a_{<i} = (a_1, \dots, a_{i-1}) \quad \text{và} \quad a_{>i} = (a_{i+1}, \dots, a_k),$$

là các dãy trái và phải của  $a$  tại  $i$ .

Nhận xét: *Một dãy đơn đỉnh được đánh dấu* là một cặp  $(a, i)$  trong đó  $a = (a_1, \dots, a_k)$  là dãy đơn đỉnh và  $i$  là một vị trí được đánh dấu với  $1 \leq i \leq k$ . Để đơn giản, ta cũng viết  $(a_1 \dots (a_i) \dots a_k)$  trong đó phần  $a_i$  được đặt trong dấu ngoặc đơn thay cho  $(a, i)$ . *Dạng của một dãy đơn đỉnh được đánh dấu  $(a, i)$*  là dãy đơn đỉnh  $a$ . Ví dụ,  $13(3)7762$  là dãy đơn đỉnh được đánh dấu với dạng là  $(1, 3, 3, 7, 7, 6, 2)$  và vị trí đánh dấu là  $i = 3$ .

Nhắc lại, hệ SPM có luật rơi phải như sau nếu  $a_i - a_{i+1} \geq 2$  thì áp dụng luật rơi phải tại  $i$  là

$$(a_1, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_k) \rightarrow (a_1, \dots, a_i - 1, a_{i+1} + 1, \dots, a_k).$$

Ta định nghĩa *luật rơi trái* như sau: nếu  $a_i - a_{i-1} \geq 2$  thì áp dụng luật rơi trái tại  $i$  là

$$(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, \dots, a_k) \rightarrow (a_1, \dots, a_{i-1} + 1, a_i - 1, \dots, a_k).$$

Hệ SPM đối xứng được định nghĩa như sau [22, 40]

**Định nghĩa 3.1.3 (Hệ SPM đối xứng).** Cho  $N$  là một số tự nhiên. *Hệ SPM đối xứng* trọng số  $N$ , ký hiệu S-SPM( $N$ ), là hệ động lực rời rạc trong đó:

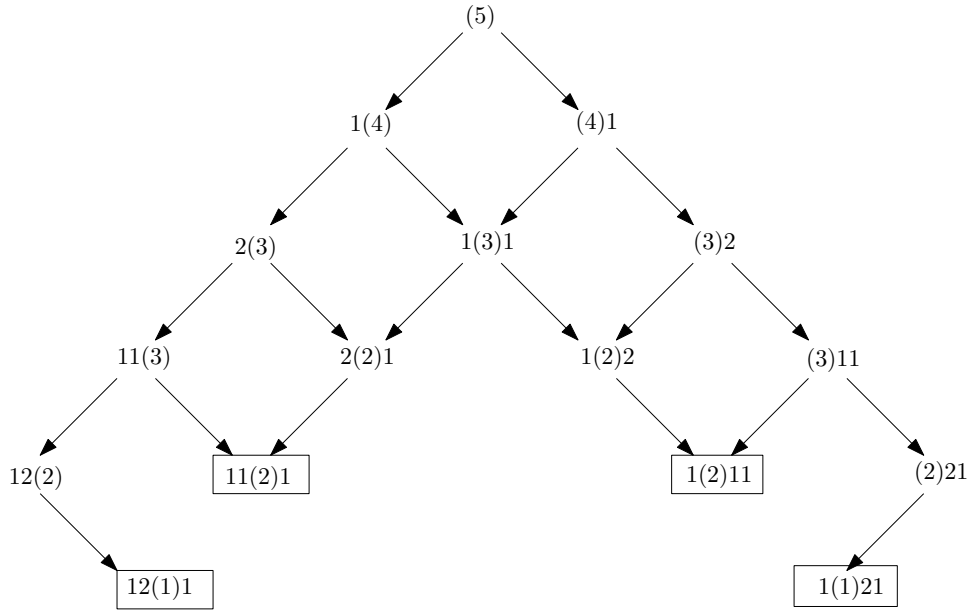
- i) Trạng thái khởi đầu là  $(N)$ . Các trạng thái của hệ là các dãy đơn đỉnh được đánh dấu, trong đó vị trí được đánh dấu là vị trí của cột khởi đầu.
- ii) Luật vận động là *luật S-SPM tuần tự* như sau: tại mỗi bước áp dụng luật rơi phải hoặc trái tại một vị trí.

Bên cạnh các nghiên cứu về trạng thái đạt được của các hệ, người ta cũng quan tâm tới *dạng trạng thái* (dạng của dãy đơn đỉnh được đánh dấu) đạt được. Các nghiên cứu về dạng trạng thái của hệ S-SPM được đưa ra bởi Formenti et. al. [22]. Các nghiên cứu về cả dạng trạng thái cùng với vị trí của nó được đưa ra bởi Phan [40].

*Nhận xét 3.1.2.* i) Khác với hệ SPM, mỗi dạng trạng thái của hệ S-SPM là một dãy đơn đỉnh và không nhất thiết là phân hoạch. Không gian trạng thái của SPM là một không gian con của S-SPM. Tuy nhiên, vẫn có thể áp dụng luật rơi trái vào một trạng thái ổn định của SPM và do đó trạng thái ổn định của SPM không là trạng thái ổn định của S-SPM.

- ii) Trong khi hệ SPM( $N$ ) chỉ có duy nhất một trạng thái ổn định và không gian trạng thái của nó với thứ tự cảm sinh lập thành một dàn thì hệ S-SPM( $N$ ) lại có nhiều trạng thái ổn định và không gian trạng thái không có cấu trúc dàn. Tuy nhiên quan hệ hai ngôi cảm sinh trên hệ S-SPM vẫn là một quan hệ thứ tự.

- iii) Hệ S-SPM( $N$ ) không đơn định vì có nhiều cột có thể rơi hơn nữa có những cột có thể rơi sang cả hai phía.
- iv) Khác với hệ SPM và P-SPM trong đó cột đầu tiên luôn là cột cao nhất, vị trí cột cao nhất của hệ S-SPM có thể thay đổi trong quá trình vận động. Cột cao nhất không nhất thiết là vị trí được đánh dấu.



Hình 3.3: Không gian trạng thái của hệ S-SPM(5).

Mệnh đề sau cho ta cấu trúc thứ tự trên hệ S-SPM.

**Mệnh đề 3.1.1** ([22, 40]). *Quan hệ hai ngôi  $\leq_{S-SPM}$  được cảm sinh từ quan hệ đạt được trong hệ S-SPM( $N$ ) là một quan hệ thứ tự. Hệ quả là hệ S-SPM( $N$ ) dừng sau một số lần áp dụng luật vận động.*

**Ví dụ 3.1.1.** Hình 3.3 minh họa không gian trạng thái của hệ SPM đối xứng xuất phát từ (5). Hệ S-SPM(5) có 4 trạng thái ổn định: 11(2)1, 1(1)21, 1(2)11, 12(1)1 và có 2 dạng ổn định là: 1121 và 1211; trong đó 11(2)1 và 1(1)21 có cùng dạng 1121 và 1(2)11 và 12(1)1 có cùng dạng 1211.

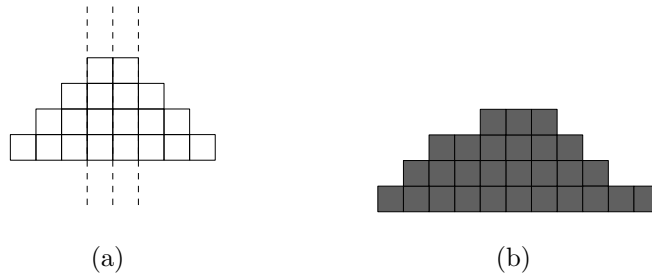
Mặt khác, ta biết rằng một phần tử thuộc SPM nếu giữa hai bước bằng liên tiếp phải có ít nhất một bước dốc (Mệnh đề 1.2.4). Chúng tôi giới thiệu một đặc trưng

cho dạng các trạng thái của hệ S-SPM trong [22, 40]. Trước hết, chúng tôi trình bày lại định nghĩa sau:

**Định nghĩa 3.1.4 (Khai triển SPM).** Dãy đơn đỉnh  $a = (a_1, a_2, \dots, a_k) \in \mathbb{N}^k$  được gọi là có *khai triển SPM (SPM decomposition)* nếu tồn tại  $1 \leq i \leq k$  sao cho các dãy  $(a_i, a_{i-1}, \dots, a_1)$  và  $(a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_k)$  là các phần tử của SPM.

Dễ thấy rằng một dãy có thể có nhiều hơn một khai triển SPM, chẳng hạn Hình 3.4(a) cho thấy dãy  $(1, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 1)$  có ba khai triển SPM tại các vị trí 3, 4 và 5. Định lý dưới đây chỉ ra đặc trưng của tất cả các dạng trạng thái của hệ S-SPM.

**Định lý 3.1.2** ([22], [40]). *Một dãy đơn đỉnh  $a$  là một dạng trạng thái của hệ S-SPM( $N$ ) nếu và chỉ nếu  $a$  có một khai triển SPM.*



Hình 3.4: (a) Dãy đơn đỉnh với các vị trí tại đó có khai triển SPM (b) Dãy đơn đỉnh không có khai triển SPM

Hơn nữa, các tác giả cũng đưa ra công thức tường minh cho số dạng ổn định của hệ S-SPM.

**Định lý 3.1.3** ([22, 40]). *Cho  $N$  là một số tự nhiên. Số dạng ổn định của hệ S-SPM( $N$ ) là  $[\sqrt{N}]$ . Hơn nữa, nếu  $P$  là một dạng ổn định của S-SPM( $N$ ) thì  $P$  có độ cao hoặc  $[\sqrt{N}]$  hoặc  $[\sqrt{N}] - 1$ .*

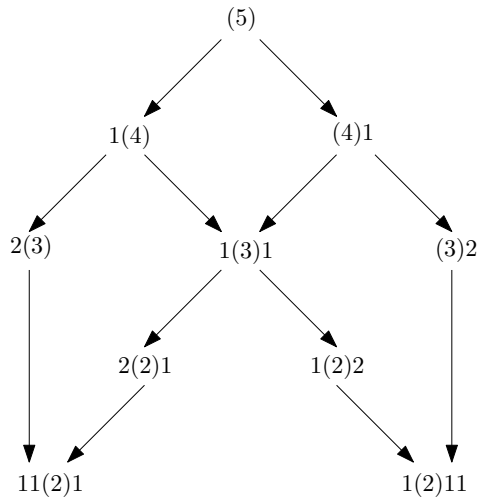
## 3.2 Hệ SPM đối xứng song song (PS-SPM): Trạng thái ổn định

Phần này giới thiệu một mở rộng khác của hệ SPM gọi là hệ SPM đối xứng song song. Theo đó, hệ thừa kế luật S-SPM của hệ SPM đối xứng (các cột có thể rơi sang

phải hoặc trái), và thực hiện chúng một cách đồng thời tại mỗi bước. Kết quả chính trong chương này là chứng minh tập dạng ổn định của hai hệ PS-SPM và S-SPM trùng nhau. Hơn nữa, chúng tôi còn chỉ ra tường minh một dãy áp dụng luật vận động PS-SPM để thu được một dạng ổn định cho trước của hệ S-SPM.

**Định nghĩa 3.2.1 (Hệ SPM đối xứng song song).** Cho  $N$  là số nguyên dương. Hệ SPM đối xứng song song, ký hiệu là PS-SPM( $N$ ), là hệ động lực rời rạc trong đó

- i) Trạng thái khởi đầu là  $(N)$ ; Các trạng thái là các dãy đơn đỉnh được đánh dấu, trong đó vị trí được đánh dấu là vị trí của cột khởi đầu.
- ii) Luật vận động là luật PS-SPM song song như sau: tại mỗi bước, áp dụng luật rơi phải hoặc luật rơi trái tại tất cả các vị trí có thể.



Hình 3.5: Không gian trạng thái của hệ PS-SPM(5)

Ký hiệu không gian trạng thái có thể của hệ PS-SPM là

$$\text{PS-SPM} = \cup_{N \geq 0} \text{PS-SPM}(N).$$

*Nhận xét 3.2.1.* 1. Không giống như hệ P-SPM, hệ PS-SPM không đơn định (vì mặc dù tại mỗi bước các cột rơi cùng một lúc, nhưng chúng có thể có hai hướng và phải chọn một hướng để rơi);

2. Áp dụng luật PS-SPM một lần có thể xem như áp dụng tổ hợp một số lần luật S-SPM. Do vậy,

$$\text{PS-SPM}(N) \subseteq \text{S-SPM}(N).$$

Hơn nữa, mỗi trạng thái ổn định của PS-SPM( $N$ ) cũng là một trạng thái ổn định của S-SPM( $N$ ). Điều ngược lại nhìn chung không đúng (Ví dụ 3.2.1).

**Ví dụ 3.2.1.** Hình 3.3 cho thấy hệ S-SPM(5) có 4 trạng thái ổn định: 12(1)1, 11(2)1, 1(2)11, 1(1)21. Hình 3.5 chỉ ra hệ PS-SPM(5) có 2 trạng thái ổn định: 1(2)11 và 11(2)1. Tuy nhiên, cả hai hệ đều có hai dạng ổn định là 1211 và 1121. Điều này là một hệ quả của Định lý 3.2.1, kết quả chính của chúng tôi trong chương này.

**Định lý 3.2.1.** *Tập dạng ổn định của hệ PS-SPM( $N$ ) và của hệ S-SPM( $N$ ) là trùng nhau. Hệ quả, hệ PS-SPM( $N$ ) có  $\lceil \sqrt{N} \rceil$  dạng ổn định.*

Chứng minh của định lý là rất dài và gồm nhiều bước. Chúng tôi trình bày dưới đây ý tưởng và các bước chính. Chi tiết của các chứng minh sẽ được hoàn thiện trong các bổ đề.

*Các bước chính của chứng minh.* Với mỗi trạng thái ổn định  $P$  của S-SPM( $N$ ), chúng tôi xây dựng một dãy áp dụng luật PS-SPM để thu được trạng thái ổn định có cùng hình dạng với  $P$  từ trạng thái khởi đầu ( $N$ ). Do chỉ quan tâm tới hình dạng của  $P$  mà không quan tâm tới vị trí, chúng tôi có thể giả sử cột trung tâm của  $P$  đặt tại 0 (khái niệm “cột trung tâm”, một trong các cột cao nhất, sẽ được trình bày sau). Trong quá trình xây dựng này, cột 0 luôn luôn là một trong các cột cao nhất. Bởi vậy, việc chọn hướng áp dụng luật PS-SPM tại mỗi bước chỉ phụ thuộc vào việc chọn hướng rơi của cột 0.

Với  $P$  có tính chất đối xứng, tức là  $(P_{<0})^{-1} = P_{>0}$ , con đường xây dựng là áp dụng thủ tục đan xen (Alternating Procedure) như sau: Cột 0 rơi sang phải tại các bước lẻ, và rơi sang trái tại các bước chẵn. Xuất phát từ ( $N$ ), thủ tục này sẽ hội tụ tới  $P$  (Hệ quả 3.2.4).

Với  $P$  không đối xứng. Giả sử cột 0 là cột trung tâm của  $P$ , tức là cột 0 thỏa mãn tính chất  $P_0 = h(P)$  và

$$|w(P_{>0}) - w(P_{<0})| = \min_i |w(P_{>i}) - w(P_{<i})|.$$

Không mất tính tổng quát, giả thiết rằng  $w(P_{>0}) - w(P_{<0}) > 0$ . Đặt

$$d = w(P_{>0}) - w(P_{<0}).$$

Dãy áp dụng luật PS-SPM gồm 3 thủ tục như sau:

- i) Thủ tục giả đan xen (Pseudo-Alternating Procedure): Áp dụng thủ tục này từ  $(N)$  để thu được trạng thái  $Q = (1, 2, \dots, d-1, (N-d^2), d, d-1, \dots, 2, 1)$  có tính chất  $w(Q_{>0}) - w(Q_{<0}) = d$  (Bổ đề 3.2.6).
- ii) Thủ tục đan xen (Alternating Procedure): Áp dụng thủ tục này từ  $Q$  cho đến khi không thể áp dụng được nữa để thu được trạng thái  $R$ . Bổ đề 3.2.9 khẳng định rằng  $R$  có độ cao  $h(P)$ .
- iii) Thủ tục tắt định: Từ  $R$ , tại mỗi bước sẽ không có bất cứ cột nào có thể rơi sang cả hai phía. Bổ đề 3.2.10 khẳng định rằng thủ tục này sẽ hội tụ tới  $P$ .

Giống như trường hợp đối xứng, chúng tôi khẳng định rằng cuối cùng sẽ thu được  $P$  thông qua các bổ đề 3.2.8, 3.2.9 và 3.2.10.  $\square$

Để trình bày chứng minh, chúng tôi trình bày các thủ tục trên. Thủ tục sau đây được thực hiện trên tập phân hoạch của số tự nhiên.

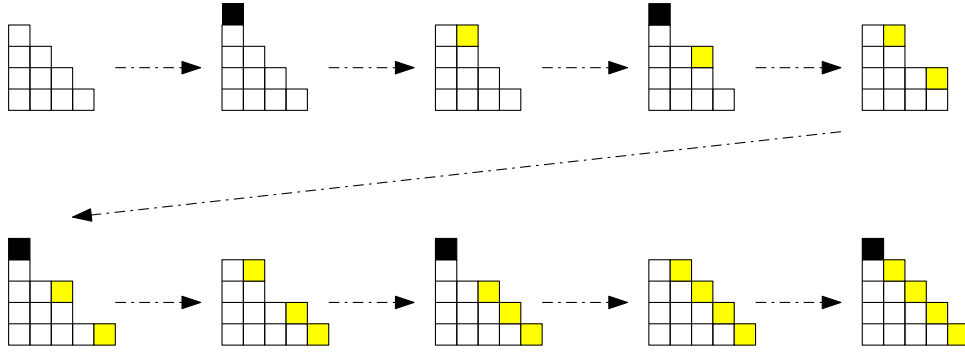
**Định nghĩa 3.2.2 (Thủ tục Atom (Atom Procedure)).** Cho  $t$  là số nguyên không âm và  $a$  là một phân hoạch. *Thủ tục Atom (Atom Procedure)  $t$  bước trên  $a$*  là một dãy  $t$  phép dịch chuyển bắt đầu từ  $a$  như sau:

- (i) Luật P-SPM được áp dụng tại mỗi bước.
- (ii) Một hạt được thêm vào cột đầu tiên tại bước chẵn và không có hạt nào được thêm vào tại bước lẻ.

Ký hiệu  $\text{Atom}^t(a)$  là trạng thái thu được từ  $a$  sau  $t$  bước áp dụng thủ tục Atom.

**Ví dụ 3.2.2.** Hình 3.6 minh họa thủ tục Atom trên cầu thang  $(4, 3, 2, 1)$ . Trong đó, các hạt màu đen được thêm vào tại các bước lẻ. Sau 9 bước áp dụng thủ tục này ta thu được cầu thang  $(5, 4, 3, 2, 1)$ .





Hình 3.6: Thủ tục Atom trên  $(4, 3, 2, 1)$

Ký hiệu  $s(k) = (k, k - 1, \dots, 2, 1)$  là cầu thang  $k$  bậc. Nhắc lại rằng, hệ SPM (tuần tự) đẳng cấu với hệ CFG trên nửa đường thẳng thông qua ánh xạ  $\delta$  bằng cách lấy hiệu hai phần liên tiếp. Bổ đề sau đặc trưng tất cả các trạng thái đạt được từ một cầu thang bằng thủ tục Atom.

**Bổ đề 3.2.1.** Cho  $k, t$  là các số nguyên dương sao cho  $0 \leq t \leq 2k + 1$ . Khẳng định sau đây đúng

- (i) Nếu  $0 \leq t \leq k$  thì  $\delta(\text{Atom}^t(s(k)))$  có dạng  $((0, 2)^{\frac{t}{2}}, 1^{k-t})$  với  $t$  chẵn và  $(2, (0, 2)^{\frac{t-1}{2}}, 1^{k-t})$  với  $t$  lẻ.
- (ii) Nếu  $k + 1 \leq t \leq 2k + 1$  thì  $\delta(\text{Atom}^t(s(k)))$  có dạng  $(0, (2, 0)^{k+1-\frac{t-1}{2}}, 1^{t-k})$  với  $t$  lẻ và  $((2, 0)^{k+1-\frac{t}{2}}, 1^{t-k})$  với  $t$  chẵn.

Hệ quả là độ cao của  $\text{Atom}^t(s(k))$  bằng  $k + 1$  với  $t$  lẻ và  $k$  với  $t$  chẵn.

*Chứng minh.* Ta chứng minh bằng quy nạp theo  $t$ . Với  $t = 0$  ta có  $\text{Atom}^0(s(k)) = (k, k - 1, \dots, 2, 1)$  và  $\delta(\text{Atom}^0(s(k))) = (1^k)$  nghiệm đúng mệnh đề.

Với  $t = 1$ . Theo định nghĩa thủ tục Atom ta có  $\text{Atom}^1(s(k)) = (k + 1, k - 1, \dots, 2, 1)$  và  $\delta(\text{Atom}^1(s(k))) = (2, 1^{k-1})$  nghiệm đúng mệnh đề. Giả sử khẳng định đúng đến bước  $t$ . Xét các trường hợp sau:

*Trường hợp 1.*  $t \neq k$  và  $t$  lẻ. Ta có

$$\delta(\text{Atom}^t(s(k))) = (2, (0, 2)^{\frac{t-1}{2}}, 1^{k-t}) \text{ nếu } t < k$$

và

$$\delta(\text{Atom}^t(s(k))) = ((2, 0)^{k+1-\frac{t}{2}}, 1^{t-k}) \text{ nếu } t \geq k+1.$$

Vì  $t+1$  chẵn nên tại bước này chúng ta chỉ áp dụng luật P-SPM và không thêm hạt. Do đó,

$$\delta(\text{Atom}^{t+1}(s(k))) = ((0, 2)^{\frac{t+1}{2}}, 1^{k-t-1}) \text{ nếu } t < k$$

và

$$\delta(\text{Atom}^{t+1}(s(k))) = (0, (2, 0)^{k+1-\frac{t+1}{2}}, 1^{t-k+1}) \text{ nếu } t \geq k+1,$$

một cách tương ứng.

*Trường hợp 2.*  $t \neq k$  và  $t$  chẵn. Theo định nghĩa của thủ tục Atom, một hạt được thêm vào cột đầu tiên tại bước  $t+1$ . Do đó, nó sẽ biến  $(0, 2)^{\frac{t}{2}}, 1^{k-t}$  ( $((2, 0)^{\frac{t-1}{2}}, 1^{k-t})$  tương ứng) thành  $(0, (2, 0)^{k+1-\frac{t-1}{2}}, 1^{t-k})$  ( $((2, 0)^{k+1-\frac{t}{2}}, 1^{t-k})$  tương ứng).

*Trường hợp 3.*  $t = k$ . Ta có

$$\delta(\text{Atom}^t(s(k))) = ((0, 2)^k) \text{ nếu } t \text{ lẻ}$$

và

$$\delta(\text{Atom}^t(s(k))) = (0, (2, 0)^{\frac{k+1}{2}}) \text{ nếu } t \text{ chẵn.}$$

Ta cũng có

$$\delta(\text{Atom}^{k+1}(s(k))) = (2, (0, 2)^{\frac{k}{2}}, 1)$$

và

$$\delta(\text{Atom}^{k+1}(s(k))) = ((2, 0)^{\frac{k}{2}}, 1), \text{ tương ứng.}$$

Nhận xét rằng nếu ảnh bởi  $\delta$  của một phân hoạch có dạng  $((0, 2)^l, 1^m)$  thì phân hoạch đó có độ cao  $2l + m$ . Phần còn lại của bổ đề là hiển nhiên.  $\square$

**Hệ quả 3.2.2.** *Thủ tục Atom biến cầu thang  $k$  bậc  $(k, k-1, \dots, 2, 1)$  thành cầu thang  $k+1$  bậc  $(k+1, k, \dots, 2, 1)$  sau  $2k+1$  phép dịch chuyển.*

Tiếp theo, chúng tôi giới thiệu hai thủ tục nữa được thực hiện trên các dãy đơn đỉnh.

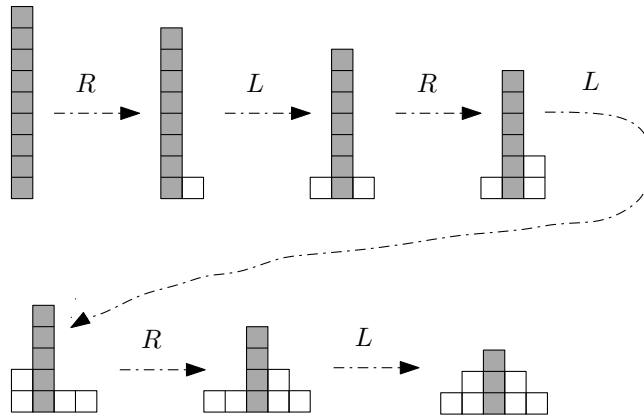
**Định nghĩa 3.2.3 (Thủ tục đan xen (Alternating Procedure)).** Cho  $a$  là một dãy đơn đỉnh có cột cao nhất đặt tại vị trí 0 và cột này đủ cao để luôn luôn rơi xuống được hai cột bên cạnh. Một *thủ tục đan xen (Alternating Procedure)* là một dãy áp dụng luật PS-SPM sao cho

- (i) Tại các bước lẻ, cột 0 rơi sang bên phải;
- (ii) Tại các bước chẵn, cột 0 rơi sang bên trái.

*Nhận xét 3.2.2.* 1. Chúng ta không thể áp dụng thủ tục đan xen vô hạn bước trên một trạng thái cho trước. Khi cột 0 không thể rơi sang bên trái tại bước chẵn hoặc không thể rơi sang phải tại bước lẻ thì thủ tục này sẽ dừng.

2. Tại tất cả các bước trong thủ tục đan xen, tất cả các cột ngoại trừ cột 0 chỉ có một hướng để rơi (do tính đơn đỉnh). Hơn nữa, theo định nghĩa, tại mỗi bước cột 0 cũng chọn duy nhất một hướng để rơi. Bởi vậy, thủ tục này là tất định.

3. Cột 0 giảm đúng một đơn vị sau mỗi bước áp dụng thủ tục đan xen. Hệ quả là sau  $t$  bước, cột 0 giảm đúng  $t$  đơn vị.



Hình 3.7: Thủ tục đan xen trên (9)

**Ví dụ 3.2.3.** Hình 3.7 minh họa 6 bước đầu tiên của thủ tục đan xen trên (9). Mũi tên cùng với hướng  $R$  hoặc  $L$  (Phải hoặc Trái) tương ứng với hướng rơi của cột 0 (cột màu đen). Từ đây ta cũng nhận thấy rằng không thể áp dụng nhiều hơn 6 bước

thủ tục đan xen trên (9) vì trạng thái cuối cùng trong quá trình này là 12321 có cột 0 với độ cao 3 không thể rơi phải.

Ký hiệu  $\text{Alt}^t(a)$  là trạng thái thu được từ  $a$  sau  $t$  bước áp dụng thủ tục đan xen. Các điều sau đây là hiển nhiên

$$(\text{Alt}^t(a))_{>0} = \text{Atom}^t(a_{>0}),$$

và

$$((\text{Alt}^t(a))_{<0})^{-1} = \text{Atom}^{t-1}((a'_{<0})^{-1}),$$

trong đó  $(a'_{<0})^{-1}$  thu được từ  $(a_{<0})^{-1}$  bằng áp dụng một bước luật P-SPM.

Mặt khác, áp dụng  $t$  bước thủ tục đan xen trên  $a$  cũng giống như áp dụng  $t-1$  bước thủ tục Atom trên  $a'_{<0}$  và  $t$  bước thủ tục Atom trên  $a_{>0}$ . Cụ thể, nếu trạng thái khởi đầu là một cột thì sau một số bước áp dụng thủ tục đan xen, trọng số của phần bên trái và bên phải tại 0 sai khác nhau nhiều nhất là 1. Ta có bổ đề sau

**Bổ đề 3.2.3.** Cho  $n, k$  là các số nguyên dương sao cho  $n \geq k^2$  và  $a = (1, 2, \dots, k-1, n-k^2+k, k-1, \dots, 2, 1)$  là một dãy đơn đỉnh trọng số  $n$ . Khi đó,  $a$  đạt được từ  $(n)$  sau  $k^2 - k$  bước trong thủ tục đan xen.

*Chứng minh.* Ta chứng minh khẳng định bằng quy nạp theo  $k$ . Với  $k=1$ , thì trạng thái  $(n)$  đạt được từ chính nó. Giả sử trạng thái  $(1, 2, \dots, t-1, n-t^2+t, t-1, \dots, 2, 1)$  đạt được từ  $(n)$  sau  $t^2 - t$  bước trong thủ tục đan xen. Tức là  $\text{Alt}^{t^2-t}(n) = (1, 2, \dots, t-1, n-t^2+t, t-1, \dots, 2, 1)$ .

Ta có

$$\left( (\text{Alt}^{t^2-t}(n))_{<0} \right)^{-1} = (\text{Alt}^{t^2-t}((n)))_{>0} = s(t-1).$$

Theo Hệ quả 3.2.2 và nhận xét trên ta chỉ cần chứng minh thủ tục đan xen có thể thực hiện được trên  $\text{Alt}^{t^2-t}(a)$  trong  $2t$  bước với  $n \geq (t+1)^2$ .

Thật vậy, với  $1 \leq i \leq 2t$ , từ Bổ đề 3.2.1 ta có

$$h\left(\text{Atom}^{i-1}\left((\text{Alt}^{t^2-t}(a))_{<0}\right)^{-1}\right) \leq t,$$

và

$$h\left(\text{Atom}^{i-1}\left(\text{Alt}^{t^2-t}(a)\right)_{>0}\right) \leq t.$$

Mặt khác, do  $n \geq (t+1)^2$  ta có

$$n - (t^2 - t) - (i - 1) \geq n - (t^2 - t) - (2t - 1) = n - t^2 - t + 1 \geq t + 2.$$

Bởi vậy, sau  $i - 1$  bước trong thủ tục đan xen, cột 0 của  $\text{Alt}^{t^2-t}(a)$  vẫn có thể rơi. Điều này hoàn thành chứng minh.  $\square$

**Hệ quả 3.2.4.** Cho  $k$  nguyên dương. Khi đó, dãy đơn đỉnh  $(1, 2, \dots, k-1, (k), k-1, \dots, 2, 1)$  đạt được từ  $(k^2)$  trong hệ PS-SPM bằng thủ tục đan xen.

Ký hiệu  $s(n, k) = (1, 2, \dots, k-2, k-1, (n-k^2), k, k-1, \dots, 2, 1)$  là dãy đơn đỉnh với cột 0 có độ cao  $n-k^2$ , phần bên trái bởi 0 là một cầu thang  $k-1$  bậc và phần bên phải bởi 0 là cầu thang  $k$  bậc. Ta có bổ đề sau

**Bổ đề 3.2.5.** Cho  $n, k$  là các số nguyên dương thỏa mãn  $n \geq (k+1)^2 + (k+1)$ . Khi đó, thủ tục đan xen biến đổi trạng thái  $s(n, k)$  thành trạng thái  $s(n, k+1)$  sau  $2k+1$  bước.

*Chứng minh.* Theo Bổ đề 3.2.1, chỉ cần chứng minh rằng cột 0 của  $s(n, k)$  có độ cao đủ lớn để có thể rơi trong  $2k+1$  bước. Khẳng định này được chứng minh bằng quy nạp theo số bước thực hiện. Với  $1 \leq t \leq 2k$  ta có

$$h(\text{Atom}^t(s(n, k)_{>0})) \leq k+1 \quad \text{and} \quad h(\text{Atom}^t((s(n, k)_{<0})^{-1})) \leq k+1.$$

Vì  $n \geq (k+1)^2 + (k+1)$  nên

$$\begin{aligned} n - k^2 - (t-1) &\geq n - k^2 - (2k-1) \\ &\geq (k+1) + 2 \\ &\geq h(\text{Atom}^t(s(n, k)_{>0})) + 2, \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} n - k^2 - (t-1) &\geq (k+1) + 2 \\ &\geq h(\text{Atom}^t((s(n, k)_{<0})^{-1})) + 2. \end{aligned}$$

Điều này suy ra cột 0 của  $s(n, k)$  có thể rơi tại bước  $t$  và thủ tục đan xen được thực hiện trong  $2k$  bước.

Mặt khác, theo Bổ đề 3.2.1 ta có

$$(\text{Alt}^{2k}(s(n, k)))_{>0} = \text{Atom}^{2k}(s(n, k)_{>0}) = (k, k, \dots, 2, 1)$$

và

$$\left( (\text{Alt}^{2k}(s(n, k)))_{<0} \right)^{-1} = \text{Atom}^{2k-1} \left( (s(n, k)_{<0})^{-1} \right) = (k, k-1, \dots, 2, 1),$$

(vì  $(s(n, k)_{<0})^{-1}$  là ổn định, sau một bước dụng luật P-SPM trên  $(s(n, k)_{<0})^{-1}$  ta thu được chính nó).

Ngoài ra,

$$h(\text{Alt}^{2k}(s(n, k))) = (n - k^2) - 2k \geq k + 2 = h\left( (\text{Alt}^{2k}(s(n, k)))_{>0} \right) + 2.$$

Bởi vậy, chúng ta có thể áp dụng thủ tục đan xen trên  $s(n, k)$  trong  $2k + 1$  bước và thu được  $s(n, k + 1)$ .  $\square$

Tiếp theo, chúng tôi trình bày tiếp một thủ tục nữa được thực hiện trên các dãy đơn đỉnh.

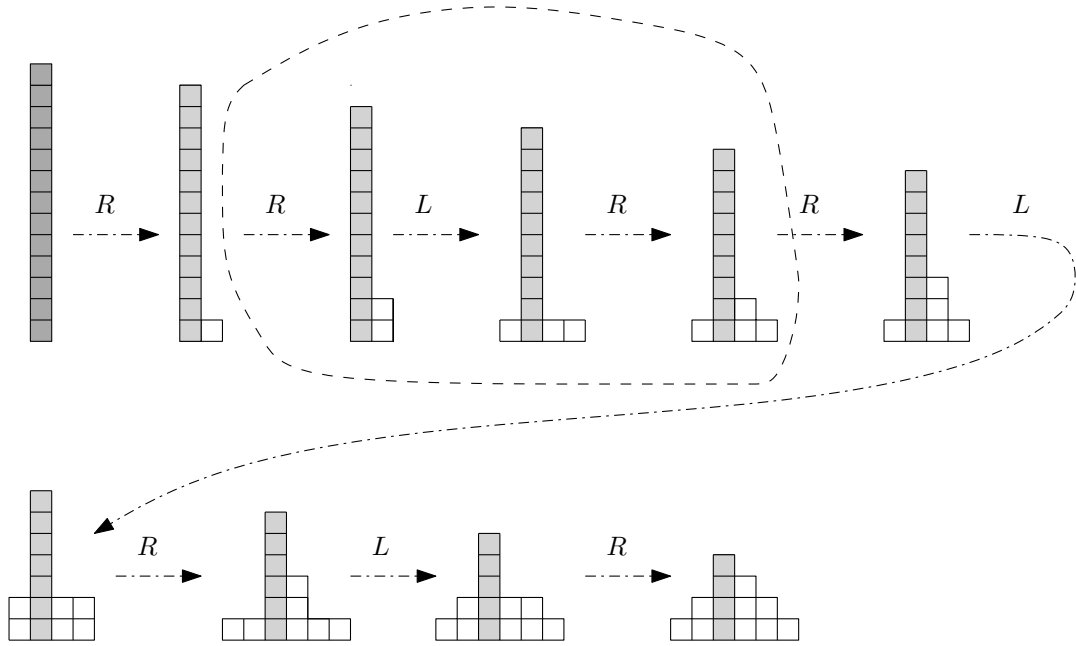
**Định nghĩa 3.2.4 (Thủ tục giả đan xen (Pseudo-Alternating Procedure)).**

Cho  $t$  là số nguyên dương và  $a$  là một dãy đơn đỉnh. Giả sử rằng cột cao nhất của  $a$  đặt tại 0 và nó đủ cao để có thể rơi sang hai phía. *Thủ tục giả đan xen (Pseudo-Alternating Procedure)*  $t$  bước trên  $a$  là dãy  $t$  phép dịch chuyển bởi luật PS-SPM bắt đầu từ  $a$  sao cho thủ tục đan xen được áp dụng từ bước  $i^2 + 1$  tới bước  $(i + 1)^2$  (với  $i = 0, 1, \dots, [\sqrt{t}] - 1$ ) và từ bước  $[\sqrt{t}]^2 + 1$  tới bước  $t$ .

Nhận xét rằng thủ tục giả đan xen là tích của các thủ tục đan xen, tuy nhiên nó không phải là một thủ tục đan xen (xem Hình 3.8).

Ký hiệu  $\text{PAlt}^t(a)$  là trạng thái thu được từ  $a$  sau  $t$  bước trong thủ tục giả đan xen.

**Ví dụ 3.2.4.** Hình 3.8 chỉ ra 9 bước trong thủ tục đan xen bắt đầu từ (13). Vùng được bao bởi các đường gạch ngang minh họa thủ tục đan xen được áp dụng từ bước 2 tới bước 4 tương ứng với trường hợp  $i = 1$  trong định nghĩa. Cũng chú ý rằng thủ tục giả đan xen này không thể thực hiện được trên (13) nhiều hơn 9 bước mặc dù sau 9 bước đầu tiên cột màu đen có độ cao 4 vẫn có thể rơi sang bên trái nhưng không thể rơi sang bên phải.



Hình 3.8: Thủ tục giả đơn xen trên (13)

**Bổ đề 3.2.6.** Cho  $n, k$  là các số nguyên dương sao cho  $n \geq (k+1)^2 + (k+1)$ . Thủ tục giả đơn xen biến trạng thái  $(n)$  thành trạng thái  $(1, 2, \dots, k, n - (k+1)^2, k+1, k, \dots, 2, 1)$  sau  $(k+1)^2$  bước.

*Chứng minh.* Ta chứng minh bằng quy nạp theo  $k$ . Với  $k = 1$  thì trạng thái  $(n-1, 1)$  đạt được từ  $(n)$ , trong đó cột 0 rơi sang phải theo thủ tục giả đơn xen. Giả sử  $\text{PAlt}^{t^2}((n)) = (1, 2, \dots, t-1, n-t^2, t, t-1, \dots, 2, 1)$  với  $t \leq k$ . Ta cần chứng minh trạng thái  $a = (1, 2, \dots, t, n-(t+1)^2, t+1, \dots, 2, 1)$  cũng đạt được từ  $(n)$  nếu  $n \geq (t+1)^2 + (t+1)$ . Do tính tất định của thủ tục giả đơn xen, điều này tương đương với việc chỉ ra rằng  $a$  thu được từ  $\text{PAlt}^{t^2}((n))$  sau  $2t+1$  bước trong thủ tục đơn xen. Điều này thực chất được suy ra từ Bổ đề 3.2.5.  $\square$

Cho dạng ổn định  $P = (p_1, p_2, \dots, p_k)$  của hệ S-SPM. Đặt

$$\text{Div}^i(P) = |w(P_{<i}) - w(P_{>i})|,$$

và

$$\text{Div}(P) = \min_{1 \leq i \leq k} \{\text{Div}^i(P)\}.$$

Ta gọi  $Div(P)$  là *độ đối xứng* của  $P$ . Một cột  $i$  của  $P$  thỏa mãn  $Div^i(P) = Div(P)$  được gọi là *cột đối xứng* của  $P$ .



Hình 3.9: Cột đối xứng

**Ví dụ 3.2.5.** Hình 3.9 minh họa các cột đối xứng (các cột màu đen) của hai dạng ổn định  $P = (1, 2, 3, 4, 5, 5, 4, 3, 3, 2, 1)$  và  $P' = (1, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 4, 3, 2, 2, 1)$ . Theo đó,  $P$  có cột đối xứng là cột 6 và  $P'$  có hai cột đối xứng là cột 6 và 7. Hơn nữa,  $Div(P) = Div^6(P) = 2$  và  $Div(P') = Div^6(P') = Div^7(P') = 5$ .

Ta có bổ đề sau

**Bổ đề 3.2.7.** Cho  $P = (p_1, p_2, \dots, p_k)$  là một dạng ổn định của S-SPM và  $h = h(P)$ . Khi đó tồn tại một chỉ số  $i$  của  $P$  sao cho  $p_i = h$  và  $Div^i(P) \leq h$ . Hơn nữa, tại chỉ số  $i$  này ta có  $Div^i(P) = Div(P)$ .

*Chứng minh.* Đặt  $t = \min\{i : p_i = h\}$ . Vì  $P$  là một trạng thái ổn định của S-SPM nên

$$\frac{h(h-1)}{2} \leq w(P_{<t}) \leq \frac{h(h-1)}{2} + h - 1,$$

và

$$\frac{h(h-1)}{2} \leq w(P_{>t}) \leq \frac{h(h-1)}{2} + 3h,$$

trong đó  $\frac{h(h-1)}{2}$ ,  $\frac{h(h-1)}{2} + h - 1$ ,  $\frac{h(h-1)}{2} + 3h$  tương ứng là trọng số của các trạng thái tương ứng  $(1, 2, \dots, h-1)^{-1}$ ,  $(1, 2, \dots, h-1, h-1)^{-1}$  và  $(h, h, h, h-1, \dots, 2, 1)$ . Do đó,  $0 \leq |P_{<t} - P_{>t}| \leq 3h$ . Xét các trường hợp sau

*Trường hợp 1.* Nếu  $0 \leq |P_{<t} - P_{>t}| \leq h$  thì  $t$  là vị trí cần tìm.

*Trường hợp 2.* Nếu  $h+1 \leq |P_{>t} - P_{<t}| \leq 3h$ , ta khẳng định rằng  $t+1$  là vị trí cần tìm. Trước hết, ta chứng minh  $p_{t+1} = h$ . Giả sử phản chứng rằng  $p_{t+1} \leq h-1$ , ta có

$$\frac{h(h-1)}{2} \leq w(P_{>t}) \leq \frac{h(h-1)}{2} + h - 1.$$



Do đó,  $|P_{>t} - P_{<t}| \leq h - 1$  mâu thuẫn với điều kiện  $|P_{<t} - P_{>t}| \geq h + 1$ . Bởi vậy  $p_{t+1} = h$  và do đó

$$P_{>t} \geq \frac{h(h-1)}{2} + h \geq P_{<t}.$$

Mặt khác, vì  $P_{<(t+1)} = P_{<t} + h$  và  $P_{>(t+1)} = P_{>t} - h$  nên

$$|P_{>(t+1)} - P_{<(t+1)}| = |P_{>t} - P_{<t} - 2h| \leq h.$$

Cuối cùng, ta chứng minh  $Div^i(P) = Div(P)$  bằng việc chỉ ra rằng với mọi trí trí khác  $t$  thì  $Div^t(P) \geq h$ . Chỉ cần xét các vị trí  $t$  sao cho  $p_t \leq h - 1$ . Xét hai phần bên trái và bên phải của  $P$  bởi chỉ số  $t$ . Ta thấy rằng phần chứa cột có độ cao  $h$  có trọng số ít nhất  $\frac{h(h+1)}{2}$  tương ứng với dãy  $(h, h-1, \dots, 1)$  và phần còn lại có trọng số nhiều nhất là  $\frac{h(h-1)}{2}$  tương ứng với dãy  $(h-1, \dots, 2, 1)$ . Do đó,

$$Div^t(P) \geq \frac{h(h+1)}{2} - \frac{h(h-1)}{2} \geq h.$$

□

Chúng tôi trình bày chứng minh chi tiết của Định lý 3.2.1

*Chứng minh Định lý 3.2.1.* Nhắc lại một số ký hiệu chúng tôi đã sử dụng trong ý tưởng chính của chứng minh Định lý 3.2.1:

$$d = Div(P) \quad \text{và} \quad h = h(P).$$

Dãy áp dụng luật PS-SPM được chỉ ra trong phần ý tưởng chứng minh để thu được  $P$  từ  $(N)$  đặt tại 0 được mô tả chính xác như sau.

- (1) Áp dụng thủ tục giả đan xen từ bước 0 đến bước  $d^2$ .
- (2) Áp dụng thủ tục đan xen từ bước  $d^2 + 1$  đến bước  $N - h$ .
- (3) Áp dụng thủ tục tắt định từ bước  $N - h + 1$  (từ bước này không có cột nào có thể rơi sang cả hai phía).

Chú ý rằng cách xây dựng này cũng áp dụng được cho cả  $P$  đối xứng và  $P$  không đối xứng. Hơn nữa, ta không thể thực hiện thủ tục giả đan xen và thủ tục đan xen

một cách vô hạn lần trên một trạng thái cho trước. Điều tiếp theo sẽ chỉ ra rằng chúng ta có thể thực hiện  $d^2$  bước trong thủ tục giả đơn xen trên  $(N)$ ; sau đó, có thể thực hiện  $(N - h - d^2)$  bước trong thủ tục đơn xen trên  $\text{PAlt}^{d^2}(N)$ ; cuối cùng, chúng ta thu được  $P$  trong thủ tục tắt định cuối cùng. Những khẳng định này sẽ được chứng minh trong 3 bổ đề tiếp theo đây.

**Bổ đề 3.2.8.** *Có thể thực hiện được  $d^2$  bước trong thủ tục giả đơn xen trên  $(N)$ .*

*Chứng minh.* Theo bổ đề 3.2.6, chỉ cần chứng minh  $N \geq d^2 + d$ . Vì  $P$  là ổn định và có độ cao  $h$  với độ đối xứng  $d$  nên  $P$  phải chứa ít nhất  $h^2 + d$  hạt tương ứng với trạng thái  $(1, 2, \dots, h-1, h, h-1, \dots, d+1, d, d, \dots, 2, 1)$ . Theo Bổ đề 3.2.7, ta có  $d \leq h$  và do đó  $N \geq d^2 + d$  và

$$\text{PAlt}^{d^2}((N)) = s(N, d).$$

□

**Bổ đề 3.2.9.** *Có thể thực hiện được  $(N - h - d^2)$  bước trong thủ tục đơn xen trên  $\text{PAlt}^{d^2}((N))$ .*

*Chứng minh.* Ngược lại, giả sử rằng  $t$  là bước đầu tiên mà tại đó thủ tục đơn xen không thể thực hiện được với  $1 \leq t \leq N - d^2 - h$ . Theo Bổ đề 3.2.1 và định nghĩa của thủ tục đơn xen, chúng ta có các điều sau:

$$\begin{aligned} (\text{Alt}^i(s(N, k)))_0 &= N - d^2 - i, \\ (\text{Alt}^i(s(N, k)))_{-1} &\leq h + 1 \quad \text{và} \quad (\text{Alt}^i(s(N, k)))_1 \leq h + 1, \end{aligned}$$

với mọi  $i = 1, 2, \dots, t - 1$ .

Đặt  $\text{Alt}^{t-1}(s(N, d)) = b$ . Vì thủ tục đơn xen không thể thực hiện được trên  $\text{PAlt}^{d^2}((N))$  tại bước  $t$  nên ta phải có

$$b_0 \leq b_{-1} + 1 \leq h + 2 \quad \text{với } t \text{ chẵn}$$

và

$$b_0 \leq b_1 + 1 \leq h + 2 \quad \text{với } t \text{ lẻ}.$$

Kết hợp với giả thiết phản chứng rằng  $t \leq N - d^2 - h$ , ta suy ra trong cả hai trường hợp ta đều có

$$h + 1 \leq N - d^2 - t + 1 = b_0 \leq h + 2.$$

Do đó, hoặc  $N - d^2 - t + 1 = h + 1$  hoặc  $N - d^2 - t + 1 = h + 2$ .

Mặt khác, vì  $w(P_{>0}) - w(P_{<0}) = d$  và  $w(P_{<0}) + w(P_{>0}) + h = N$  nên  $N - d - h$  chẵn. Bởi vậy,  $N - d^2 - t + 1 = h + 1$  nếu  $t$  chẵn và  $N - d^2 - t + 1 = h + 2$  nếu  $t$  lẻ. Xét các trường hợp sau

*Trường hợp 1.  $t$  chẵn.* Ta có  $b_0 = h + 1$  và  $b_{-1} \geq h$ . Vì không có hạt nào được thêm vào bên trái của  $\text{Alt}^{t-2}(s(N, d))$  tại bước  $t - 1$  nên

$$(\text{Alt}^{t-2}(s(N, d)))_{-1} \geq h.$$

Nhận xét rằng trong thủ tục đan xen, các phần bên trái và bên phải bởi 0 sẽ lấp đầy các cầu thang trước khi tạo ra các cầu thang mới có độ dài lớn hơn. Bởi vậy, kể từ bước  $d^2 + t - 2$ , phần bên trái phải chứa cầu thang  $(1, 2, \dots, h)$ . Điều này cũng đúng cho phần bên phải (vì trọng số của phần bên phải lớn hơn). Do đó, trong suốt quá trình áp dụng luật PS-SPM trên  $b$  một cách tùy ý, cột 0 của  $b$  không bao giờ rơi lại. Điều này dẫn đến cuối cùng của quá trình, chúng ta thu được các trạng thái ổn định có độ cao  $h + 1$ . Ta chứng minh điều này là vô lý. Giả sử  $P'$  là một trạng thái ổn định thu được bằng cách như vậy. Khi đó,  $w(P'_{>0}) - w(P'_{<0}) = d + 1$ , và theo Định lý 3.1.2,  $P$  và  $P'$  có biểu diễn như sau

$$P' = (1, 2, \dots, \alpha', \alpha' \dots, h + 1, \dots, \alpha' + d + 1, \alpha' + d + 1, \dots, 2, 1)$$

và

$$P = (1, 2, \dots, \alpha, \alpha \dots, h, \dots, \alpha + d, \alpha + d, \dots, 2, 1).$$

Vì  $w(P') = w(P)$  và  $P'_0 = P_0 + 1$  nên  $\alpha' = \alpha - 1$  và  $P'_{-1} = P'_1 = h$ . Do vậy,  $P_1 = P_{-1} = P_0 = h$  và  $P$  chứa ít nhất 3 đoạn bằng khác nhau trong số 4 đoạn bằng sau:  $P_{-h+\alpha-2}P_{-h+\alpha-1}$  có độ cao  $\alpha$ ,  $P_{-1}P_0$  có độ cao  $h$ ,  $P_0P_1$  có độ cao  $h$  và  $P_{h-\alpha-d+1}P_{h-\alpha-d+2}$  có độ cao  $\alpha + d$  (và  $h - \alpha - d \geq 0$ ). Điều này mâu thuẫn với điều kiện  $P$  là một dạng ổn định của S-SPM.

*Trường hợp 2.  $t$  lẻ.* Ta có

$$b_0 = h + 2 \quad \text{and} \quad b_1 = h + 1.$$

Vì không có hạt nào được thêm vào bên phải của  $\text{Alt}^{t-2}(s(N, d))$  tại bước  $t - 1$  nên

$$(\text{Alt}^{t-2}(s(N, d)))_1 \geq h + 1.$$

Do đó,

$$w(\text{Alt}^{t-2}(s(N, d))_{j>0}) \geq \frac{(h+1)(h+2)}{2},$$

và

$$\begin{aligned} w(P) = w(\text{Alt}^{t-2}(s(N, d))) &\geq (h+1)(h+2) - d + h + 2 \\ &\geq h^2 + 4h + 4 - d > h^2 + 3h. \end{aligned}$$

Điều này mâu thuẫn với điều kiện  $P$  là trạng thái ổn định của S-SPM( $N$ ) và có độ cao  $h$  (vì  $h^2 + 3h$  tương ứng với trạng thái  $(1, 2, \dots, h-1, h, h, h, h, h-1, \dots, 2, 1)$ ).  $\square$

Tổng kết lại, từ  $(N)$  chúng ta có thể thực hiện thủ tục giả đan xen trong  $d^2$  bước, sau đó thực hiện thủ tục đan xen trong  $N - d^2 - h$  bước. Như một hệ quả, ta thu được dãy đơn đỉnh trong đó tất cả các cột đều có độ cao nhiều nhất là  $h$ .

**Bổ đề 3.2.10.** *Thủ tục áp dụng dãy các luật PS-SPM trên trạng thái thu được sau các quá trình (1) và (2) ở trên là tất định. Hơn nữa, nó hội tụ tới  $P$ .*

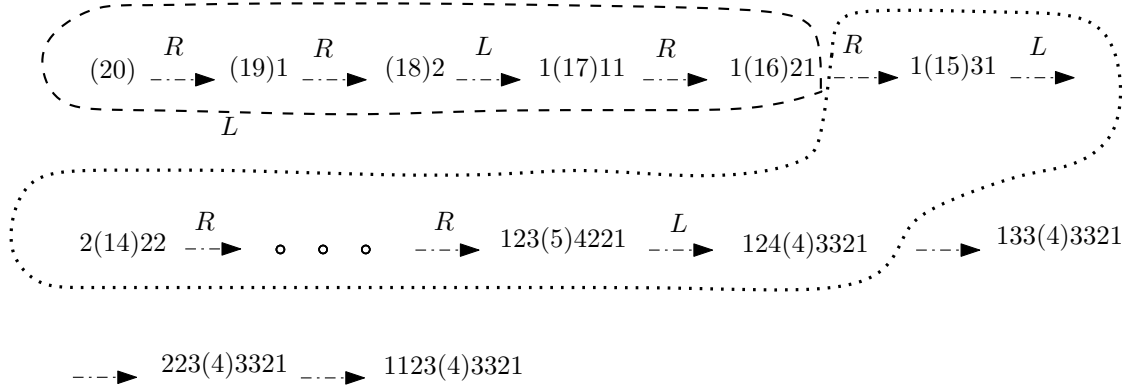
*Chứng minh.* Quá trình tất định là hiển nhiên vì tất cả các cột của trạng thái thu được sau hai quá trình ở trên đều có độ cao nhiều nhất là  $h$ . Hơn nữa, cột 0 của nó luôn có độ cao  $h$ . Do vậy, không có cột nào có thể rơi sang hai phía. Mặt khác, phần bên trái và phần bên phải bởi 0 vận động một cách độc lập theo luật P-SPM để đạt tới trạng thái ổn định duy nhất. Hiệu của hai phần này luôn luôn là  $d$  do quá trình thực hiện thủ tục giả đan xen. Bởi vậy, quá trình hội tụ về một trạng thái, chẳng hạn  $P'$ , có độ cao  $h$ , hiệu đối xứng  $d$  đạt được tại vị trí 0 và trọng số  $N$ . Ta có

$$N = w(P') = w(P'_{<0}) + P'_0 + w(P'_{>0}) = 2w(P'_{<0}) + h + d.$$

Bởi vậy,  $w(P'_{<0}) = \frac{N-d-h}{2}$ . Mặt khác, do  $P'$  là một trạng thái ổn định của S-SPM nên  $P'_{<0}$  là một trạng thái ổn định của SPM. Từ tính duy nhất của trạng thái ổn định của hệ SPM trong Mệnh đề 1.2.3 ta có  $P'_{<0}$  xác định duy nhất. Tương tự,  $P'_{>0}$  cũng xác định duy nhất. Bởi vậy  $P = P'$ . Điều này hoàn thiện chứng minh.  $\square$

Ba bổ đề trên hoàn thiện chứng minh định lý.  $\square$

**Ví dụ 3.2.6.** Hình 3.10 chỉ ra một con đường để thu được trạng thái ổn định  $(1123(4)3321)$  (có dạng  $112343321$ ) từ  $(20)$  bằng dãy áp dụng luật PS-SPM. Vùng khoanh bởi đường gạch ngang minh họa 4 bước áp dụng thủ tục giả đan xen để thu được  $s(20, 2)$  (tức là  $1(16)21$ ). Vùng khoanh bởi đường chấm minh họa 12 bước tiếp theo của thủ tục đan xen để thu được trạng thái có độ cao 4 tại cột 0 (đúng bằng độ cao của trạng thái ổn định cho trước). Cuối cùng, thủ tục tắt định gồm 3 bước áp dụng luật PS-SPM khi không có cột nào có thể rơi sang cả hai phía để thu được  $P$ .



Hình 3.10: Đường đi từ  $(20)$  tới trạng thái ổn định  $(1123(4)3321)$

Chú ý rằng các đánh giá bất đẳng thức trong các Bổ đề 3.2.3, 3.2.5, 3.2.6 và đặc biệt Bổ đề 3.2.9 là rất chặt. Hơn nữa, các thủ tục chúng tôi xây dựng ở trên nhìn chung không giao hoán với nhau. Đặc biệt khi cột trung tâm không đủ cao để phân phối các hạt cho các cột bên cạnh. Bởi vậy, điều này rất dễ dẫn đến trạng thái ổn định khác của S-SPM mà không phải trạng thái chúng ta mong muốn. Chẳng hạn, với dạng ổn định  $P = (122221)$  ta có  $h(P) = 2$ ,  $d(P) = 2$ . Nếu thực hiện con đường như trong chứng minh của Định lý 3.2.1, ta sẽ thu được  $P$ . Tuy nhiên, nếu thực hiện thủ tục đan xen trước trong 4 bước (tương ứng với  $N - d^2 - h$ ), ta thu được  $2(6)11$ ; sau đó trên  $2(6)11$  ta thực hiện được thủ tục giả đan xen:

$$2(6)11 \xrightarrow{R} 2(5)21 \xrightarrow{R} 11(4)31 \xrightarrow{L} 12(3)22.$$

Bởi vậy, tại bước thứ Tư cột độ cao 3 không thể rơi sang bên phải theo luật của thủ tục giả đan xen. Tức là, trong trường hợp này thủ tục giả đan xen chỉ thực hiện được tối đa 3 bước chứ không phải 4 bước (tương ứng với  $d^2$ ). Quá trình tắt định cuối cùng cho ta dạng ổn định 123211 mà không phải 122221 như mong đợi.

Cuối cùng, chúng tôi đưa ra một chặn trên cho đường đi ngắn nhất tới một trạng thái ổn định trong PS-SPM.

**Hệ quả 3.2.11.** Cho  $T_{PS-SPM}(N)$  là đường đi ngắn nhất tới một trạng thái ổn định trong PS-SPM( $N$ ). Khi đó,  $N - \lceil \sqrt{N} \rceil \leq T_{PS-SPM}(N) \leq N$ .

*Chứng minh.* Nhắc lại rằng nếu  $h$  là độ cao của một trạng thái ổn định trong PS-SPM( $N$ ) thì  $h = \lceil \sqrt{N} \rceil$  hoặc  $\lceil \sqrt{N} \rceil - 1$ . Do đó,  $T_{PS-SPM}(N) \geq N - h$ . Trong con đường được xây dựng ở trên, chúng ta cần  $N - h$  bước dịch chuyển trong thủ tục giả đan xen và thủ tục đan xen; chúng ta cần nhiều nhất là  $h$  phép dịch chuyển trong thủ tục tắt định để tới được một trạng thái ổn định của PS-SPM( $N$ ). Do vậy,  $T_{PS-SPM}(N) \leq N$ .  $\square$

### 3.3 Kết luận chương

Chương này nghiên cứu hệ mở rộng SPM đối xứng song song. Các kết quả là:

1. Giới thiệu hệ SPM đối xứng song song;
2. Chứng minh hệ SPM đối xứng song song và hệ SPM đối xứng có cùng dạng ổn định. Chứng minh mang tính chất kiến thiết;
3. Đưa ra một đánh giá về thời gian ngắn nhất tới một dạng ổn định trong hệ SPM đối xứng song.

## Chương 4

# Các hệ mở rộng CFG có dấu và SPM đối xứng

Nhắc lại rằng ở chương trước chúng tôi đã trình bày hệ mở rộng SPM đối xứng trong đó một cột có thể rơi sang phải hoặc sang trái. Chương này giới thiệu một mở rộng của hệ CFG bằng việc cho phép số các chip trên đỉnh của đồ thị nền có thể nhận giá trị âm [30]. Hơn nữa, các đỉnh chứa đủ âm các chip cũng có thể bắn được như là các đỉnh đủ dương. Tuy nhiên, khi một đỉnh đủ âm chip bắn thì nó sẽ nhận một chip từ mỗi đỉnh mà nó đi vào (hay hàng xóm của nó khi  $G$  là vô hướng). Hệ CFG mở rộng này được gọi là CFG có dấu (Signed chip firing game). Chúng tôi nghiên cứu hệ mở rộng này trên hai lớp đồ thị cụ thể là đường thẳng và đồ thị vòng trong mối liên quan đến các hệ SPM và S-SPM đã được trình bày trong các chương trước. Bằng việc chỉ ra các đẳng cấu tương ứng, chúng tôi đưa ra các đặc trưng trạng thái, đặc trưng trạng thái ổn định bằng ngôn ngữ và một số tính toán tổ hợp cho số các trạng thái ổn định theo độ dài và theo trọng số cho các hệ. Mục 4.2 sẽ trình bày về các mở rộng trên đường thẳng [46]. Mục 4.3 sẽ trình bày về các mở rộng trên đồ thị vòng [10].

## 4.1 Hệ mở rộng CFG có dấu (S-CFG)

Để đơn giản, chúng tôi xét một mở rộng của hệ CFG trên đồ thị nền là đa đồ thị vô hướng, không có khuyên  $G = (V, E)$ , trong đó  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ . Một phân bố các số nguyên trên mỗi đỉnh của  $G$  được gọi là một trạng thái. Cụ thể ta định nghĩa hệ CFG có dấu như sau:

**Định nghĩa 4.1.1 (CFG có dấu).** Hệ CFG có dấu trên một đa đồ thị vô hướng  $G$ , ký hiệu là S-CFG( $G$ ), được cho bởi:

- i) Trạng thái là dãy các số nguyên trên  $a \in \mathbb{Z}^n$  trên tập đỉnh của  $G$ .
- ii) Một đỉnh  $v_i$  của trạng thái  $a$  là bắn được nếu  $|a_i| \geq \deg(v_i)$ . Khi  $v_i$  bắn thì nó sẽ cho mỗi lân cận một chip nếu  $a_i \geq \deg(v_i)$  và nhận từ mỗi lân cận của nó một chip nếu  $a_i \leq -\deg(v_i)$ . Hơn nữa, chúng ta cũng gọi luật bắn áp dụng cho đỉnh chứa chip dương (âm) là *luật cho* (*luật nhận* tương ứng).

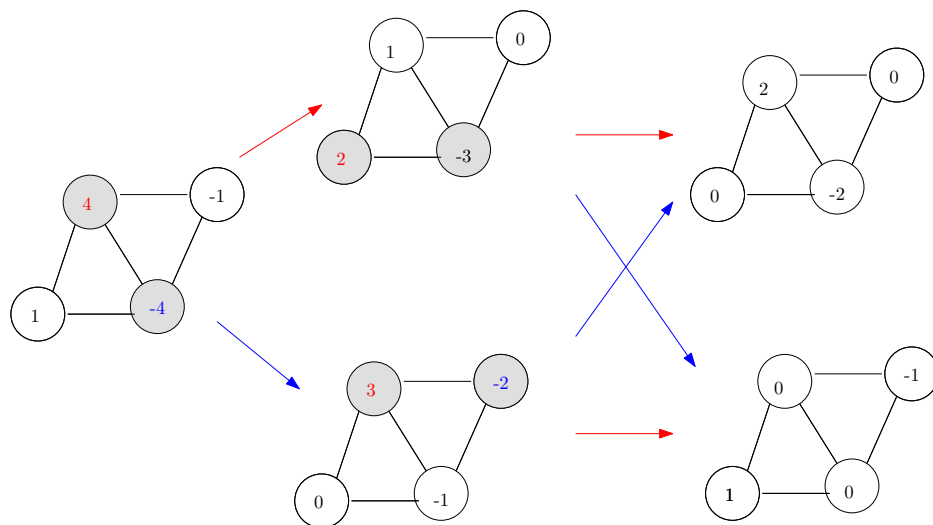
*Nhận xét 4.1.1.* i) Ta có thể viết lại luật bắn tại đỉnh  $v_i$  gọn hơn như sau: Nếu  $|a_i| \geq \deg(v_i)$  và  $a \xrightarrow{i} b$  thì  $b_i = a_i - \text{sign}(a_i) \deg(v_i)$  và  $b_j = a_j + \text{sign}(a_i) e_{ij}$  với mọi  $v_j \neq v_i$  và  $e_{ij}$  là số cạnh đi từ  $v_i$  tới  $v_j$ .

- ii) Hệ CFG có dấu (các đỉnh có thể chứa một số âm chip) cũng có thể được hiểu như một hệ CFG tô màu (các đỉnh chứa một số dương chip) trong đó chúng ta có hai loại chip màu xanh và màu đỏ. Các đỉnh sẽ chứa một số chip có cùng màu. Trạng thái là sự phân bố các chip được tô bởi một trong hai màu trên các đỉnh của  $G$ . Một đỉnh  $v_i$  là bắn được nếu nó chứa ít nhất là  $\deg(v_i)$  chip (không phân biệt màu). Khi bắn, nó sẽ cho mỗi lân cận một chip và nếu một đỉnh chứa chip của màu nào đó nhận một chip khác màu thì hai chip khác màu đó sẽ triệt tiêu nhau.

Hình 4.1 minh họa quá trình bắn của hệ S-CFG trên đồ thị hình thoi bắt đầu từ một trạng thái và kết thúc bằng hai trạng thái ổn định.

*Nhận xét 4.1.2.* 1. Việc bắn hai đỉnh trong S-CFG không giao hoán như hệ CFG. Bởi vì việc bắn của đỉnh  $i$  có thể ngăn cản khả năng bắn được của đỉnh  $j$  nếu đỉnh  $j$  chứa chip khác màu (khác dấu) với đỉnh  $i$ .





Hình 4.1: CFG có dấu

2. Nếu  $a \rightsquigarrow b$  thì  $a - b$  được biểu diễn như một tổ hợp tuyến tính của các vector hàng của ma trận Laplace  $\Delta$  của  $G$ . Nói cách khác, ta vẫn có  $a - b \in \langle \Delta_1, \dots, \Delta_n \rangle$ .
3. Hệ S-CFG hầu như không có cấu trúc dàn và khi hệ hội tụ thì thường có nhiều hơn một trạng thái ổn định.

Như đã trình bày trong phần 1.2.3, hệ SPM có thể được xem như một hệ CFG bằng cách thay thế số hạt tại mỗi đỉnh bằng hiệu của độ cao ở cột đó và cột liền kề bên phải. Tiếp theo, chúng tôi chỉ ra rằng giống như hệ SPM, hệ SPM đối xứng cũng được mã hóa như một hệ S-CFG trên đường thẳng. Nhờ đó, một số tính toán tương minh trên tập trạng thái ổn định theo tổng số hạt và theo độ dài được đưa ra. Mặc dù điều này có thể khó thực hiện hơn khi làm trực tiếp trên hệ SPM đối xứng thay vì chuyển qua hệ S-CFG.

## 4.2 Các mở rộng S-SPM và S-CFG trên đường thẳng

Phần này trình bày hệ mở rộng CFG có dấu với đồ thị nền là đường thẳng vô hạn về hai phía. Chúng tôi chứng minh rằng với cách mở rộng hệ CFG như thế này, hệ

SPM đối xứng sẽ đẳng cấu với một hệ CFG có dấu trên đường thẳng. Nhờ đó, chúng tôi đưa ra được một đặc trưng ngôn ngữ cho các dạng ổn định của hệ CFG có dấu trên đường thẳng. Đồng thời, sử dụng đẳng cấu giữa hai hệ và đặc trưng ngôn ngữ trên hệ CFG có dấu, chúng tôi cũng thu được một số tính toán tổ hợp cho số các dạng ổn định của hệ SPM đối xứng với độ dài và trọng số cho trước. Điều này cũng góp phần đưa ra một chứng minh khác cho số dạng ổn định của hệ SPM đối xứng theo trọng số đã được cho bởi Formenti et. al [22]. Các kết quả đưa ra dựa trên [46].

### 4.2.1 Sự đẳng cấu

Để xây dựng mã hóa (đẳng cấu) giữa hệ S-SPM bằng hệ S-CFG, chúng tôi định nghĩa đồ thị nền của S-CFG như sau:  $G = (V, E)$  trong đó,  $V = \mathbb{Z}$  và  $E = \{(i, j) : |i - j| = 1\}$ . Cho đơn giản ta ký hiệu đồ thị này là  $L$ . Khi đó,  $L$  là đồ thị gồm vô hạn đỉnh về hai phía. Tuy nhiên, một trạng thái trên S-CFG chỉ có hữu hạn các phần khác không. Luật vận động là luật bản của hệ S-CFG như định nghĩa trong phần 4.1.

Nhận xét rằng, đồ thị  $L$  này khác so với đồ thị  $L^+$  trong phần mã hóa SPM bởi CFG (Phần 1.2.3). Thật vậy, trong khi  $L^+$  có đỉnh chìm tại 0 thì  $L$  không có đỉnh chìm. Mặc dù có sự khác nhau về đồ thị nền và số chip tại một số đỉnh của hệ S-CFG có thể âm nhưng ta sẽ thấy ánh xạ giữa hai hệ là không thay đổi.

Cho  $a, b$  là hai trạng thái. Ký hiệu  $a \xrightarrow{i,r} b$  ( $a \xrightarrow{i,l} b$ ) nếu  $b$  thu được từ  $a$  bằng áp dụng một bước luật rơi sang phải (trái tương ứng) tại cột thứ  $i$  trong hệ S-SPM. Tương tự,  $a \xrightarrow{i,+} b$  ( $a \xrightarrow{i,-} b$ ) nếu  $b$  thu được từ  $a$  bằng áp dụng một bước luật cho (luật nhận tương ứng) tại đỉnh  $i$  trong hệ S-CFG( $L$ ).

Xét  $a = (a_1, \dots, a_k) \in \text{S-SPM}(N)$ , trạng thái  $d(a)$  tương ứng với  $a$  trong S-CFG( $L$ ) được xác định như sau:

$$d(a) = (a_1 - a_0, a_2 - a_1, a_3 - a_2, \dots, a_{k+1} - a_k),$$

quy ước  $a_0 = a_{k+1} = 0$ . Dễ thấy ánh xạ  $d$  này là đối của ánh xạ  $\delta$  đã định nghĩa trong phần mã hóa hệ SPM bởi hệ CFG trong phần 1.2.3. Tuy nhiên, do việc định nghĩa lại này không ảnh hưởng đến ý nghĩa ( $d$  hay  $\delta$  đều là cách lấy hiệu hai cột liên tiếp nhau) và mục đích của việc mã hóa. Trong phần tính toán số các trạng thái ổn

định các của hệ, việc lấy hiệu  $d$  này thuận tiện hơn cho chúng tôi trong trình bày. Điều dễ thấy sau đây chỉ ra sự liên quan giữa luật vận động của hai hệ S-SPM và S-CFG( $L$ ):

- i) Nếu  $a \xrightarrow{i,r} b$  thì  $d(a) \xrightarrow{i+1,-} d(b)$
- ii) Nếu  $a \xrightarrow{i,l} b$  thì  $d(a) \xrightarrow{i+1,+} d(b)$ .

Chẳng hạn,

$$a = (1, 1, 2, 8, 4, 3, 3, 1) \in \text{S-SPM}(23)$$

thì

$$d(a) = (1, 0, 1, 6, -4, -1, 0, -2, -1) \in \text{S-CFG}(L),$$

và luật rơi sang bên phải của cột thứ 4 có độ cao 8 của  $a$  sẽ tương ứng với việc bắn đỉnh 5 có  $-4$  chip bằng luật nhận trong  $d(a)$ .

Từ các nhận xét trên, ta rút ra mệnh đề sau

**Mệnh đề 4.2.1.** *Cho  $N$  là số tự nhiên và  $\mathcal{O}_N = (N, -N, 0, \dots)$ . Dưới ánh xạ  $d$ , các hệ S-SPM( $N$ ) và hệ S-CFG( $L, \mathcal{O}_N$ ) là đẳng cấu.*

## 4.2.2 Trạng thái ổn định

Trong phần này chúng tôi quan tâm đến hình dạng và các tổ hợp đếm hình dạng của các trạng thái ổn định trên hệ SPM đối xứng và hệ CFG có dấu trên đường thẳng. Chúng ta sẽ đồng nhất dạng trạng thái của các hệ với một dãy số nguyên với phần tử đầu khác không. Hai trạng thái được xem là như nhau nếu chúng sai khác nhau một phép tịnh tiến các đỉnh. Nhờ đẳng cấu trong phần 4.2.1, chúng tôi thực hiện các tính toán hoặc trên hệ SPM đối xứng hoặc trên hệ CFG có dấu và suy ra kết quả cho hệ còn lại.

Trước hết chúng tôi trình bày một đặc trưng cho dạng ổn định của hệ S-CFG( $L, \mathcal{O}_N$ ) bằng ngôn ngữ.

Do đẳng cấu từ Mệnh đề 4.2.1, với mỗi  $u \in \text{S-CFG}(L)$  ta có thể xem  $w(u_i) = \sum_{j=1}^i u_j$  là trọng số của phần  $u_i$  và đó chính là độ cao của cột thứ  $i$  của  $d^{-1}(u)$  trong hệ S-SPM tương ứng. Hơn nữa, nếu  $a \in \text{S-SPM}$  là ổn định thì  $d(a) \in \text{S-CFG}(L)$  là ổn

định và mỗi phần của  $d(a)$  sẽ nhận các giá trị trong  $\{0, 1, -1\}$ . Ký hiệu  $\mathcal{A} = \{0, 1, \bar{1}\}$  là tập từ vựng, trong đó  $\bar{1}$  được hiểu như  $-1$ . Ta có định nghĩa sau

**Định nghĩa 4.2.1 (Ngôn ngữ ổn định).** *Ngôn ngữ ổn định  $\mathcal{LS}$  trên  $\mathcal{A}$  là tập các từ  $u$  thỏa mãn các tính chất sau:*

- (i)  $u$  bắt đầu từ 1 và kết thúc bởi  $\bar{1}$ .
- (ii) Số lần xuất hiện trong  $u$  của ký tự 1 đúng bằng số lần xuất hiện của  $\bar{1}$ .
- (iii)  $u$  tránh các từ con sau: 0000;  $\bar{1}1$ ; 1001;  $\bar{1}00\bar{1}$ .

**Ví dụ 4.2.1.** Ta có,  $u = 110101\bar{1}\bar{1}0\bar{1}\bar{1} \notin \mathcal{LS}$  (vì  $u$  chứa từ con 1001) và  $u' = 11010\bar{1}\bar{1}0\bar{1} \in \mathcal{LS}$ .  $\ell(u') = 9$ .

Ta có  $w(u'_4) = w(u'_5) = 3$ ;  $w(u) = 15$ . Hơn nữa,  $d^{-1}(u') = (1, 2, 2, 3, 3, 2, 1, 1) \in \text{S-SPM}(15)$ .

Mệnh đề dưới đây cho phép đặc tả tất cả dạng ổn định của hệ S-CFG( $L, \mathcal{O}_N$ ). Để đơn giản ta ký hiệu

$$\text{S-CFG}(L, \mathcal{O}) = \cup_{N=0}^{\infty} \text{S-CFG}(L, \mathcal{O}_N).$$

**Mệnh đề 4.2.2.** *Cho  $a$  là một dãy đơn đỉnh có trọng số  $N$ . Khi đó,  $a$  là một dạng ổn định của hệ S-SPM( $N$ ) nếu và chỉ nếu  $d(a) \in \mathcal{LS}$ . Nói cách khác,  $\mathcal{LS}$  là tập tất cả dạng ổn định của hệ S-CFG( $L, \mathcal{O}$ ).*

*Chứng minh.* Vì  $a$  ổn định trong S-SPM nên  $|a_i - a_{i+1}| \leq 1$  với mọi  $i$  và do đó cột đầu tiên khác không và cột cuối cùng khác không của  $a$  có một hạt. Do đó,  $d(a)$  bắt đầu bởi 1 và kết thúc bởi  $\bar{1}$ , và  $d(a) \in \{0, 1, \bar{1}\}^*$ .

Mặt khác,  $a$  là đơn đỉnh nên số bước đi lên bằng số bước đi xuống trong  $a$ , bởi vậy số lần xuất hiện của 1 và  $\bar{1}$  trong  $d(a)$  là bằng nhau.

Cuối cùng, do  $a \in \text{S-SPM}$  nên  $a$  có khai triển SPM, tại  $i$  chẳng hạn, trong đó  $a_{\leq i}^{-1}$  và  $a_{> i}$  là các phần tử của SPM. Bởi vậy,  $a_{\leq i}^{-1}$  và  $a_{> i}$  không thể có nhiều hơn hai bước bằng. Theo định nghĩa của  $d$ , mỗi bước bằng trong  $a$  tương ứng với một lần có mặt của chữ cái 0 trong  $d(a)$ . Hơn nữa, do khai triển tại  $i$  của  $a$  nên  $d(a_{\leq i}) \in \{1, 0\}^*$  và  $d(a_{> i}) \in \{\bar{1}, 0\}^*$ . Do đó,  $d(a)$  không chứa dãy con 1001 (tương ứng với việc có hai

bước bằng trong  $a_{\leq i}$ ) và dãy con  $\bar{1}00\bar{1}$  (tương ứng với việc có hai bước bằng trong  $a_{> i}$ ).

Ngoài ra, do  $a$  có nhiều nhất ba bước bằng (mỗi phần  $a_{\leq i}^{-1}$  và  $a_{> i}$  có nhiều nhất một bước bằng và cho phép có thể có một bước bằng tại điểm phân tách  $i$ ) nên  $d(a)$  có tối đa 3 sự xuất hiện của 0, nghĩa là  $d(a)$  tránh từ con 0000.

Điều ngược lại là hiển nhiên do định nghĩa của  $d$  và Định lý 3.1.2.  $\square$

Mục tiêu tiếp theo của chúng tôi là tính số dạng ổn định của hệ S-SPM với độ dài và trọng số cho trước.

**Định lý 4.2.1.** *Cho  $l$  là số nguyên dương. Khi đó, số dạng ổn định độ dài  $l$  của hệ S-SPM là*

$$(i) \quad k^2 \text{ nếu } l = 2k + 1;$$

$$(ii) \quad k^2 + 1 \text{ nếu } l = 2k + 2.$$

*Chứng minh.* Theo Mệnh đề 4.2.2, ta chỉ việc đếm số phần tử của  $\mathcal{LS}$  có độ dài  $l$ . Lấy  $u \in \mathcal{LS}$  và  $\ell(u) = l$ . Vì  $u$  tránh từ con  $\bar{1}1$  nên số các từ  $u$  này chính là số cách chèn các ký tự 0 vào trong từ chỉ gồm các từ 1 và  $\bar{1}$ , trong đó các ký tự 1 đứng trước các ký tự  $\bar{1}$ , thỏa mãn định nghĩa 4.2.1. Xét các trường hợp sau:

*Trường hợp 1.*  $l = 2k + 1$ . Vì  $u$  tránh dãy con 0000, số lần xuất hiện của ký tự 0 trong  $u$  là 1 hoặc 3.

a) Nếu  $u$  chỉ có một xuất hiện của 0 thì ta có  $2k - 1$  cách chèn ký tự 0 vào trong từ  $11 \dots 1\bar{1} \dots \bar{1}$  độ dài  $2k$  (0 không xuất hiện ở đầu và ở cuối). Do đó, ta có  $2k - 1$  từ  $u$ .

b) Nếu  $u$  có ba xuất hiện của ký tự 0 thì  $u$  có  $k - 1$  xuất hiện của 1 và  $k - 1$  xuất hiện của  $\bar{1}$ . Các khả năng để chèn 3 ký tự 0 vào trong từ  $11 \dots 1\bar{1} \dots \bar{1}$  độ dài  $2k - 2$  và thỏa mãn các điều kiện của  $\mathcal{LS}$  như sau:

(i) 3 ký tự 0 được chèn vào giữa ký tự 1 cuối cùng và ký tự  $\bar{1}$  đầu tiên, tức là  $u = 1 \dots 1000\bar{1} \dots \bar{1}$ . Do đó, ta có 1 từ  $u$ .

- (ii) Ký tự 0 đầu tiên được chèn vào giữa các ký tự 1, ký tự 0 thứ hai ở giữa ký tự 1 cuối cùng và ký tự  $\bar{1}$  đầu tiên, và ký tự 0 cuối cùng vào giữa các ký tự  $\bar{1}$ . Tức là,  $u = 1 \cdots 0 \cdots 10\bar{1} \cdots 0 \cdots \bar{1}$ . Ta có  $k - 2$  cách chèn ký tự 0 đầu tiên, 1 cách chèn ký tự 0 thứ hai và  $k - 2$  cách chèn ký tự 0 thứ ba. Suy ra, ta có  $(k - 2)^2$  từ  $u$  như vậy.
- (iii) 2 ký tự 0 được chèn vào giữa ký tự 1 cuối cùng và ký tự  $\bar{1}$  đầu tiên. Ký tự 0 còn lại hoặc ở giữa các ký tự 1 hoặc ở giữa các ký tự  $\bar{1}$ . Tức là, hoặc  $u = 1 \cdots 0 \cdots 100\bar{1} \cdots \bar{1}$  hoặc  $u = 1 \cdots 100\bar{1} \cdots 0 \cdots \bar{1}$ . Do đó, ta có  $2(k - 2)$  từ  $u$  như vậy.

Lấy tổng lại ta có số dạng ổn định độ dài  $l$  của hệ S-SPM trong trường hợp này là

$$(2k - 1) + 1 + (k - 2)^2 + 2(k - 2) = k^2.$$

*Trường hợp 2.*  $l = 2k + 2$ . Khi đó,  $u$  hoặc không chứa ký tự 0 hoặc chứa đúng hai ký tự 0.

- a) Nếu  $u$  không chứa ký tự 0 nào thì  $u = 1 \cdots 1\bar{1} \cdots \bar{1}$ , và ta có duy nhất một từ  $u$ .
- b) Nếu  $u$  chứa đúng hai ký tự 0. Khi đó,  $u$  có  $k$  ký tự 1 và  $k$  ký tự  $\bar{1}$ . Ta có các trường hợp sau:
- i) Có đúng một ký tự 0 ở giữa ký tự 1 cuối cùng và ký tự  $\bar{1}$  đầu tiên, tức là  $u = 1 \cdots 0 \cdots 10\bar{1} \cdots \bar{1}$  hoặc  $u = 1 \cdots 10\bar{1} \cdots 0 \cdots \bar{1}$ . Ta có  $2(k - 1)$  từ  $u$  như vậy.
- ii) Cả hai ký tự 0 của  $u$  đều ở giữa ký tự 1 cuối cùng và ký tự  $\bar{1}$  đầu tiên, tức là  $u = 1 \cdots 100\bar{1} \cdots \bar{1}$  và ta có duy nhất một từ  $u$  như vậy.
- iii) Một ký tự 0 của  $u$  ở giữa các ký tự 1 và ký tự 0 còn lại ở giữa các ký tự  $\bar{1}$ . Tức là  $u = 1 \cdots 0 \cdots 1\bar{1} \cdots 0 \cdots \bar{1}$ . Ta có  $(k - 1)^2$  từ  $u$  tương ứng với  $k - 1$  cách chọn vị trí 0 đầu tiên và  $k - 1$  cách chọn vị trí 0 còn lại.

Tóm lại, trong trường hợp này ta có  $1 + 2(k - 1) + 1 + (k - 1)^2 = k^2 + 1$  từ của  $\mathcal{LS}$  có độ dài  $l$ . Điều này hoàn thành chứng minh.  $\square$

Nhắc lại rằng, cho  $u = (u_1, \dots, u_k) \in \text{S-CFG}$  thì  $w(u_i) = \sum_{j=1}^i u_j$  là trọng số của phần tử  $u_i$  của  $u$  và  $\sum_{i=1}^k w(u_i)$  là trọng số của  $u$ . Tiếp theo, chúng tôi sẽ đếm các từ của  $\mathcal{LS}$  với trọng số  $n$  cho trước. Gọi  $u_{m,k}$  là số từ của  $\mathcal{LS}$  có  $m$  ký tự 1 và có trọng số  $m^2 + k$ . Theo Mệnh đề 4.2.2, thì  $u_{m,k}$  cũng là số dạng ổn định của hệ S-SPM với trọng số  $m^2 + k$  và có  $m$  bậc thang. Trước tiên, ta có mệnh đề sau

**Mệnh đề 4.2.3.**  $u_{m,k}$  được cho bởi công thức tường minh sau

$$u_{m,k} = \begin{cases} k + 1, & 0 \leq k \leq m - 1 \\ m, & m \leq k \leq 2m \\ 3m - k + 1, & 2m + 1 \leq k \leq 3m \\ 0, & k > 3m \end{cases}$$

*Chứng minh.* Lấy  $u$  là một từ trong  $\mathcal{LS}$  có  $m$  ký tự 1 và có trọng số  $m^2 + k$ . Vì sự xuất hiện của các ký tự 0 không làm tăng hay giảm trọng số của các ký tự bằng 1 và  $\bar{1}$  nên tổng trọng số của tất cả các ký tự 1 và  $\bar{1}$  trong  $u$  là  $\frac{m(m+1)}{2} + \frac{m(m-1)}{2}$  và ký tự 1 cuối cùng có trọng số là  $m$ . Do vậy, tổng trọng số của các ký tự 0 trong  $u$  là  $k$ .

Theo định nghĩa,  $u$  chứa nhiều nhất ba xuất hiện của 0. Giả sử  $k_1, k_2$  và  $k_3$  là trọng số của các ký tự 0 nằm giữa những ký tự 1, nằm giữa ký tự 1 cuối cùng và ký tự  $\bar{1}$  đầu tiên, nằm giữa các ký tự  $\bar{1}$  tương ứng trong  $u$  (xem Hình 4.2). Trong đó chúng tôi quy ước, nếu  $k_i = 0$  thì ký tự 0 không xuất hiện trong  $u$  tại vị trí tương ứng và  $k_1 = m$  hoặc  $k_3 = m$  thì các ký tự 0 tương ứng là kẹp giữa 1 cuối cùng và  $\bar{1}$  đầu tiên.

Ta có  $k_1 + k_2 + k_3 = k$ , và  $k_2$  hoặc bằng 0 hoặc bằng  $m$  (vì nếu  $u$  có 3 ký tự 0 thì  $u$  phải chứa 1 ký tự 0 ở giữa ký tự 1 cuối cùng và ký tự  $\bar{1}$  đầu tiên, do đó ký tự 0 này có trọng số  $m$ ) và  $0 \leq k_1, k_2, k_3 \leq m$ . Ngược lại, nếu có bộ ba số nào thỏa các điều kiện này thì nó cũng sẽ đưa ra chính xác một từ của  $\mathcal{LS}$  ngoại trừ 2 trường hợp sau:  $(0, m, k_3)$  và  $(m, 0, k_3)$  cho cùng một từ  $1 \dots 10\bar{1} \dots \bar{1}0\bar{1} \dots \bar{1}$ ;  $(k_1, m, 0)$  và  $(k_1, 0, m)$  cho cùng một từ  $1 \dots 101 \dots 10\bar{1} \dots \bar{1}$ . Ta xét các trường hợp sau:

*Trường hợp 1.* Nếu  $0 \leq k \leq m - 1$  thì  $k_2 = 0$  (vì  $k_2 \neq m$ ). Do đó,  $u_{m,k} = k + 1$  tương ứng với  $k + 1$  cách chọn  $k_1$  và  $k_3 = k - k_1$ .

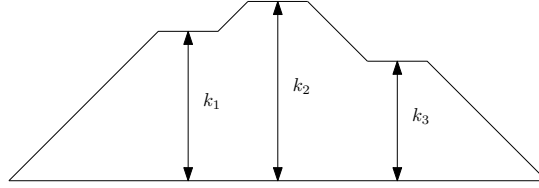
*Trường hợp 2.* Nếu  $m \leq k \leq 2m$  thì ta có hai khả năng cho  $k_2$  như sau

- Nếu  $k_2 = 0$  thì  $k_1 + k_3 = k$ . Đặt  $k_1 = m - k'_1, k_3 = m - k'_3$ , ta có  $0 \leq k'_1, k'_3 \leq m$  và  $0 \leq k'_1 + k'_3 = 2m - k \leq m$ . Ta có thể chọn  $k'_1 = 0, 1, \dots, 2m - k$ , do đó ta có  $2m - k + 1$  nghiệm bộ ba.
- Nếu  $k_2 = m$  thì  $0 \leq k_1 + k_3 = k - m \leq m$ . Nhắc lại rằng hai cặp bộ ba  $(0, m, k_3)$  và  $(m, 0, k_3)$ ;  $(k_1, m, 0)$  và  $(k_1, 0, m)$  cho ta cùng một từ trong  $\mathcal{LS}$  và đã được tính trong trường hợp  $k_2 = 0$ . Điều này suy ra  $k_1, k_3 \geq 1$  và ta có thể chọn  $k_1 = 1, 2, \dots, k - m - 1$ . Ta thu được  $k - m - 1$  nghiệm bộ ba như vậy.

Do đó,  $u_{m,k} = 2m - k + 1 + k - m - 1 = m$ .

*Trường hợp 3.* Nếu  $2m + 1 \leq k \leq 3m$  thì ta phải có  $k_2 = m$  và  $m + 1 \leq k_1 + k_3 = k - m \leq 2m$ . Lập luận tương tự như trường hợp 2, chúng ta cũng thu được  $u_{m,k} = 3m - k + 1$ .

*Trường hợp 4.* Nếu  $k \geq 3m + 1$  thì  $u$  không nằm trong  $\mathcal{LS}$ . Bởi vậy,  $u_{m,k} = 0$ .  $\square$



Hình 4.2: Trọng số của ba ký tự 0 tương ứng của từ trong  $\mathcal{LS}$

Gọi  $U_m(x)$  là hàm sinh cho dãy  $u_{k,m}$  theo biến  $k$ , tức là

$$U_m(x) = \sum_{k=0}^{3m} u_{k,m} x^k.$$

Chúng ta sẽ chỉ ra công thức rút gọn của  $U_m(x)$  nhờ Mệnh đề 4.2.3 như sau

**Hệ quả 4.2.4.** *Hàm sinh  $U_m(x)$  được cho bởi*

$$U_m(x) = \frac{x^{3m+2} - x^{2m+2} - x^m + 1}{(x-1)^2}.$$



*Chứng minh.* Từ Mệnh đề 4.2.3 ta có

$$\begin{aligned}
U_m(x) &= \sum_{i=0}^{m-1} (i+1)x^i + \sum_{i=m}^{2m} mx^i + \sum_{i=2m+1}^{3m} (3m-i+1)x^i \\
&= \left( \sum_{i=1}^m x^i \right)' + m \sum_{i=m}^{2m} x^i + (3m+2) \sum_{i=2m+1}^{3m} x^i - \left( \sum_{i=2m+2}^{3m+1} x^i \right)' \\
&= \left( \frac{x^{m+1}-1}{x-1} - 1 \right)' - \left( x^{2m+2} \frac{x^m-1}{x-1} \right)' + mx^m \frac{x^{m+1}-1}{x-1} + (3m+2)x^{2m+1} \frac{x^m-1}{x-1} \\
&= \frac{x^{3m+2} - x^{2m+2} - x^m + 1}{(x-1)^2}.
\end{aligned}$$

□

**Định lý 4.2.2.** Gọi  $v_n$  là số các từ trong  $\mathcal{LS}$  có trọng số  $n$  và  $V(x)$  là hàm sinh của nó. Khi đó,

$$V(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{m^2}}{(1-x)}.$$

*Chứng minh.* Từ định nghĩa ta có  $v_n = \sum_{m^2+k=n} u_{k,m}$ . Bởi vậy,

$$V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m^2+k=n} u_{k,m} x^k x^{m^2} = \sum_{m=0}^{\infty} x^{m^2} U_m(x).$$

Theo Hệ quả 4.2.4 ta thu được

$$\begin{aligned}
V(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{3m+2} - x^{2m+2} - x^m + 1}{(x-1)^2} x^{m^2} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{m^2+3m+2} - x^{m^2+2m+2} - x^{m^2+m} + x^{m^2}}{(x-1)^2} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{(m+\frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}} - x^{(m+1)^2+1} - x^{(m+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} + x^{m^2}}{(x-1)^2} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{(m+\frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}} - x^{(m+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}}}{(1-x)^2} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{m^2} - x^{(m+1)^2+1}}{(1-x)^2} \\
&= -\frac{1}{(1-x)^2} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{m^2}}{(1-x)^2} - x \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{m^2}}{(1-x)^2} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{m^2}}{1-x}.
\end{aligned}$$

□

**Hệ quả 4.2.5.** Số các từ trong  $\mathcal{LS}$  có trọng số  $n$  là  $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ . Hệ quả là số dạng ổn định trọng số  $n$  của hệ S-SPM là  $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ .

*Chứng minh.* Ta có  $V(x) = \sum_{m=1}^{\infty} x^{m^2} \sum_{i=0}^{\infty} x^i$ . Hệ số thứ  $n$  của  $V(x)$  là số các cặp  $(m, k) : m \geq 1, k \geq 0$  sao cho  $m^2 + k = n$ . Bởi vậy, ta có  $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$  giá trị có thể của  $m$  tương ứng với  $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$  từ của  $\mathcal{LS}$  trọng số  $n$ .  $\square$

### 4.3 Các mở rộng trên đồ thị vòng: $\text{SPM}(C_n)$ , $\text{CFG}(C_n)$ , $\text{S-SPM}(C_n)$ và $\text{S-CFG}(C_n)$

Phần này chúng tôi nghiên cứu các hệ SPM, SPM đối xứng, CFG và CFG có dấu trên đồ thị vòng. Các nghiên cứu này cũng có mối liên quan mạnh mẽ đến lớp các bài toán trên đồ thị vòng như Games of Cards [14, 25] hay các bài toán về hệ phân tán [29]. Ngoài ra, nghiên cứu hệ CFG trên lớp các đồ thị cụ thể nhiều khi cũng cung cấp một số tính chất của đồ thị đó. Thậm chí nó còn được dùng như một công cụ để chứng minh một số kết quả đại số liên quan đến các nhóm con Silow khi lớp đồ thị nền của hệ CFG là cây 3-chính quy cho bởi Levine [36]. Mặt khác, hệ CFG được định nghĩa trên một đồ thị nền tổng quát trong khi hệ SPM chỉ được định nghĩa và nghiên cứu trên đường thẳng. Do vậy, mong muốn có thể định nghĩa được SPM trên các lớp đồ thị khác nhau cũng là một trong những động lực nghiên cứu tiếp theo của tác giả luận án và chương này thực hiện bước đầu tiên trong mục tiêu này. Các kết quả của phần này được trình bày trong [10].

#### 4.3.1 Các hệ $\text{SPM}(C_n)$ và $\text{CFG}(C_n)$ ; $\text{S-SPM}(C_n)$ và $\text{S-CFG}(C_n)$ : Sự đẳng cấu

Cho  $C_n$  là đồ thị vòng  $n$  đỉnh  $\{1, \dots, n\}$  (với  $n \geq 3$ ). Mỗi dãy các số nguyên  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  trên các đỉnh của  $C_n$  được gọi là một *phân bố tròn* và ta nói rằng đỉnh  $i$  chứa  $a_i$  hạt ( $a_i$  có thể âm). Chúng ta đồng nhất hai phân bố tròn nếu sai khác nhau một phép quay các đỉnh của  $C_n$ .

**Định nghĩa 4.3.1 (Hệ SPM( $C_n, k$ )).** Cho  $k$  là một số nguyên không âm. Hệ SPM trên  $C_n$  trọng số  $k$ , ký hiệu là  $\text{SPM}(C_n, k)$ , là hệ động lực rời rạc xác định như sau:

- (i) Trạng thái khởi đầu là  $(k, 0, 0, \dots, 0)$ .
- (ii) Luật vận động là *luật rơi bên phải*: Một đỉnh  $i$  sẽ cho đỉnh  $(i + 1)$  (quy ước đỉnh  $n + 1$  trùng với đỉnh 1) một chip nếu nó có số chip lớn hơn ít nhất là 2 so với đỉnh  $(i + 1)$ .

**Định nghĩa 4.3.2 (Hệ S-SPM( $C_n, k$ )).** Cho  $k$  là một số nguyên không âm. Hệ SPM đối xứng trên  $C_n$  trọng số  $k$ , ký hiệu là  $\text{S-SPM}(C_n, k)$ , là hệ động lực rời rạc xác định như sau:

- (i) Trạng thái khởi đầu là  $(k, 0, \dots, 0)$ .
- (ii) Luật vận động: Ngoài luật rơi bên phải như trong hệ  $\text{SPM}(C_n, k)$ , hệ còn có thêm *luật rơi bên trái*, tức là một đỉnh  $i$  sẽ cho đỉnh  $(i - 1)$  (quy ước đỉnh 0 trùng với đỉnh  $n$ ) một chip nếu nó chứa số chip lớn hơn ít nhất là 2 so với đỉnh  $(i - 1)$ .

Tiếp theo, đây chúng tôi trình bày lại và chi tiết hơn định nghĩa của hệ CFG và CFG có dấu trên  $C_n$ . Như đã đề cập ở trên, chúng tôi quan tâm đến hình dạng của các trạng thái của các hệ này, nên sẽ đồng nhất các trạng thái sai khác nhau một phép quay các đỉnh của  $C_n$ .

**Định nghĩa 4.3.3 (Hệ CFG( $C_n, k$ )).** Cho  $k$  là một số nguyên không âm. Hệ CFG trên  $C_n$  trọng số  $k$ , ký hiệu là  $\text{CFG}(C_n, k)$ , được mô tả như sau:

- (i) Trạng thái khởi đầu là  $(k, 0, 0, \dots, 0, -k)$ .
- (ii) Luật vận động là *luật cho* như sau: một đỉnh chứa ít nhất 2 chip sẽ cho hai lân cận của nó mỗi cái một chip.

**Định nghĩa 4.3.4 (Hệ S-CFG( $C_n, k$ )).** Cho  $k$  là một số nguyên không âm. Hệ CFG có dấu trên  $C_n$  trọng số  $k$ , ký hiệu là  $\text{S-CFG}(C_n, k)$ , được mô tả như sau:

- (i) Trạng thái khởi đầu là  $(k, 0, \dots, 0, -k)$ .

- (ii) Luật vận động: Ngoài luật cho như trong  $\text{CFG}(C_n, k)$ , hệ còn có thêm *luật nhận*, tức là một đỉnh chứa nhiều nhất  $-2$  chip sẽ nhận một chip từ mỗi lân cận của nó.

Ta ký hiệu  $\text{SPM}(C_n, k)$ ,  $\text{S-SPM}(C_n, k)$ ,  $\text{CFG}(C_n, k)$ ,  $\text{S-CFG}(C_n, k)$  là không gian trạng thái của bốn hệ được định nghĩa ở trên một cách tương ứng.

Đặt

$$\text{SPM}(C_n) = \cup_{k \geq 0} \text{SPM}(C_n, k),$$

và tương tự cho  $\text{S-SPM}(C_n)$ ,  $\text{CFG}(C_n)$ ,  $\text{S-CFG}(C_n)$ .

Cho  $a$  và  $b$  là các phân bố tròn trên  $C_n$ . Ta cũng dùng cùng ký hiệu như trong trường hợp trên đường thẳng với  $a \xrightarrow{(i,r)} b$  và  $a \xrightarrow{(i,l)} b$  nếu  $b$  thu được từ  $a$  bằng áp việc áp dụng một bước luật rơi bên phải và trái tương ứng tại đỉnh  $i$ ; và  $a \xrightarrow{(i,+)} b$  và  $a \xrightarrow{(i,-)} b$  nếu  $b$  thu được từ  $a$  bằng việc áp dụng một bước luật cho và luật nhận tương ứng tại đỉnh  $i$ .

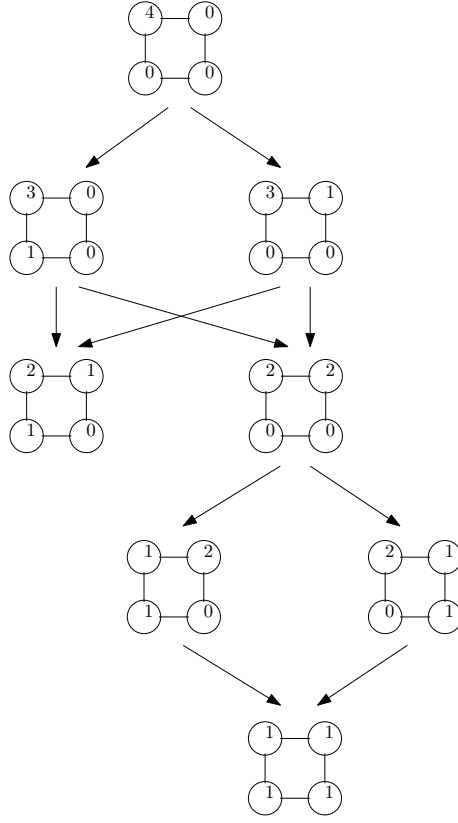
Hình 4.3 minh họa không gian trạng thái của  $\text{S-SPM}(C_4, 4)$  và hệ dừng với hai trạng thái cố định  $(2, 1, 0, 1)$  và  $(1, 1, 1, 1)$ .

*Nhận xét 4.3.1.* (i) Các phần tử của  $\text{SPM}(C_n)$  và  $\text{S-SPM}(C_n)$  là các phân bố tròn của các số nguyên không âm, trong khi các phần tử của  $\text{CFG}(C_n)$  và  $\text{S-CFG}(C_n)$  là các phân bố tròn của các số nguyên (có thể âm) và có tổng các chip bằng 0.

- (ii) Hai bao hàm sau là đúng:

$$\text{SPM}(C_n, k) \subseteq \text{S-SPM}(C_n, k) \quad \text{và} \quad \text{CFG}(C_n, k) \subseteq \text{S-CFG}(C_n, k).$$

Như đã đề cập trong phần 4.2, mỗi hệ SPM và S-SPM đều được mã hóa bởi một hệ CFG và S-CFG tương ứng trên đường thẳng. Việc nghiên cứu hệ SPM có thể cho các kết quả trên hệ CFG và ngược lại. Tuy nhiên, chúng tôi cũng nhận thấy rằng, các trạng thái của hệ  $\text{SPM}(C_n)$  (hệ  $\text{S-SPM}(C_n)$ , tương ứng) và  $\text{CFG}(C_n)$  (hệ  $\text{S-CFG}(C_n)$ , tương ứng) trên đồ thị vòng lại rất khác nhau. Chẳng hạn, cho trước một phân bố tròn chúng ta có thể biết được trọng số trong hệ SPM (bằng tổng tất cả các phần tử của nó) nhưng không biết chính xác đại lượng này trong hệ CFG. Tiếp theo chúng tôi sẽ chứng minh rằng với một trọng số cho trước thì chúng đẳng



Hình 4.3: Không gian trạng thái của S-SPM( $C_4, 4$ )

cấu với nhau. Trong đó ánh xạ đẳng cấu, ta sẽ ký hiệu là  $d^n$ , được định nghĩa gần tương tự như ánh xạ lấy hiệu  $d$  và  $\delta$  trong chương trước.

Với mỗi  $a = (a_1, \dots, a_n)$  là một phân bố tròn trên  $C_n$ , ta định nghĩa

$$d^n(a) = (a_1 - a_2, \dots, a_{n-1} - a_n, a_n - a_1).$$

Dễ thấy  $d^n$  chỉ khác so với các ánh xạ  $\delta$  ở chỗ lấy hiệu phần tử cuối cùng. Tuy nhiên, điều này là hợp lý nếu ta xem cả  $\delta$  và  $d^n$  như là cách lấy hiệu giữa một phần và phần liền kề bên phải nó trong đồ thị nền. Hiển nhiên là  $d^n$  là một ánh xạ được định nghĩa tốt từ tập các phân bố tròn trên  $C_n$  vào chính nó. Hơn nữa, ta có

**Mệnh đề 4.3.1.** *Dưới ánh xạ  $d^n$ , hai hệ  $SPM(C_n, k)$  và  $CFG(C_n, k)$  là đẳng cấu; và hai hệ  $S-SPM(C_n, k)$  và  $S-CFG(C_n, k)$  là đẳng cấu.*

*Chứng minh.* Theo định nghĩa,  $d^n(k, 0, \dots, 0) = (k, 0, \dots, -k)$  nên  $d^n$  ánh xạ trạng thái khởi đầu của hệ  $SPM(C_n, k)$  và  $S-SPM(C_n, k)$  vào trạng thái khởi đầu của hệ

CFG( $C_n, k$ ) và S-CFG( $C_n, k$ ). Chúng ta sẽ chứng minh rằng  $d^n$  bảo toàn luật vận động giữa các hệ tương ứng bằng cách chỉ ra rằng:

- (i)  $a \xrightarrow{(i,r)} b$  nếu và chỉ nếu  $d^n(a) \xrightarrow{(i,+)} d^n(b)$  (do đó  $d^n$  cũng bảo toàn luật vận động của hệ SPM( $C_n, k$ ) và CFG( $C_n, k$ )).
- (ii)  $a \xrightarrow{(i,l)} b$  nếu và chỉ nếu  $d^n(a) \xrightarrow{(i,-)} d^n(b)$ .

Thật vậy,  $a \xrightarrow{(i,r)} b$ , thì  $a_i - a_{i+1} \geq 2$  và  $d^n(a)_i \geq 2$ . Do vậy, chúng ta có thể áp dụng luật cho tại đỉnh  $i$  trên  $d^n(a)$  và thu được trạng thái

$$(d^n(a)_1, \dots, d^n(a)_{i-1} + 1, d^n(a)_i - 2, d^n(a)_{i+1} + 1, \dots, d^n(a)_n).$$

Mặt khác,

$$b = (a_1, \dots, a_i - 1, a_{i+1} + 1, \dots, a_n)$$

và

$$d^n(b) = (d^n(a)_1, \dots, d^n(a)_{i-1} + 1, d^n(a)_i - 2, d^n(a)_{i+1} + 1, \dots, d^n(a)_n).$$

Do đó,  $d^n(a) \xrightarrow{(i,+)} d^n(b)$ . Lập luận tương tự cho (ii) và ta có  $d^n$  bảo toàn luật vận động giữa các hệ. Do đó,  $d^n$  là đẳng cấu. Hơn nữa, ta có thể xác định được ánh xạ ngược như sau

$$(d^n)^{-1}(u) = (\alpha, \alpha - u_1, \alpha - u_1 - u_2, \dots, \alpha - u_1 - \dots - u_{n-1}),$$

trong đó  $u = (u_1, \dots, u_n) \in \text{CFG}(C_n, k)$  (t.ư. S-CFG( $C_n, k$ )) và  $\alpha$  được xác định phụ thuộc vào  $k$  và  $u$  như sau:

$$\alpha = \frac{k + \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)u_i}{n}.$$

□

Chúng tôi kết thúc phần này bằng việc đưa ra một số nhận xét về mối liên quan giữa các hệ SPM, CFG và sự khác biệt của chúng trong các đồ thị khác nhau.

*Nhận xét 4.3.2.* 1. Không giống như trong trường hợp đường thẳng, trên  $C_n$  các hệ CFG và S-CFG có đỉnh  $n$  có thể cho lại chip cho đỉnh 1 và làm cho các chip bị nuốt và trạng thái của chúng có thể có xoắn. Vì lý do này mà chúng ta có thể tính được trọng số của các hệ này trên đường thẳng, trong khi không tính được trên đường tròn.

2. Ta có  $d^n$  là song ánh từ  $S\text{-SPM}(C_n, k)$  ( $\text{SPM}(C_n, k)$ ) tới  $S\text{-CFG}(C_n, k)$  ( $\text{CFG}(C_n, k)$ ) tương ứng), nhưng nó không là song ánh từ  $S\text{-SPM}(C_n)$  ( $\text{SPM}(C_n)$ ) vào  $S\text{-CFG}(C_n)$  ( $\text{CFG}(C_n)$  tương ứng). Hơn nữa, trong khi các không gian trạng thái  $S\text{-SPM}(C_n, k)$  và  $\text{SPM}(C_n, k)$ ) hoàn toàn rời nhau với các giá trị khác nhau của  $k$ , thì  $S\text{-CFG}(C_n, k)$  và  $\text{CFG}(C_n, k)$  lại có thể giao nhau, đặc biệt là với các giá trị  $k$  sai khác nhau một bội số của  $n$ . Bởi vậy, một trạng thái của  $S\text{-CFG}(C_n)$  có thể tương ứng với nhiều trạng thái của  $S\text{-SPM}(C_n)$  mà trọng số của nó sai khác nhau một bội số của  $n$ .
3. Với các giá trị  $k$  khác nhau thì hệ có sự vận động khác nhau. Với  $k$  càng lớn thì hệ vận động càng phức tạp. Tuy nhiên, như chúng ta đã biết trong nhiều hệ, các trạng thái của chúng lại không quá phức tạp. Cụ thể, chúng tôi sẽ chứng minh trong Mệnh đề 4.3.6 rằng với các giá trị  $k$  đủ lớn trong cùng một lớp thặng dư modulo  $n$ , tập các trạng thái ổn định của các hệ  $S\text{-CFG}(C_n, k)$  ( $\text{CFG}(C_n, k)$ ) là trùng nhau.

### 4.3.2 Cấu trúc không gian và đặc trưng trạng thái

Trong phần này chúng tôi sẽ trình bày cấu trúc không gian của bốn hệ,  $\text{SPM}(C_n)$ ,  $\text{CFG}(C_n)$ ,  $S\text{-SPM}(C_n)$  và  $S\text{-CFG}(C_n)$ . Cụ thể chúng tôi sẽ chứng minh rằng đối với các hệ  $\text{SPM}$  và  $\text{CFG}$  trên đồ thị vòng thì cấu trúc không gian và đặc trưng các trạng thái của nó không khác nhiều so với trường hợp trên đường thẳng. Tuy nhiên, với các hệ  $\text{SPM}$  đối xứng và  $\text{CFG}$  có dấu trên đồ thị vòng thì lại phức tạp hơn so với trường hợp trên đường thẳng.

#### 4.3.2.1 Cấu trúc không gian và đặc trưng trạng thái của các hệ $\text{SPM}(C_n)$ và $\text{CFG}(C_n)$

Chúng ta biết rằng trên đường thẳng thì không gian trạng thái của các hệ  $\text{SPM}$  và  $\text{CFG}$  có cấu trúc dàn và do đó nó hội tụ tới một trạng thái ổn định duy nhất. Hơn nữa, chúng ta còn đặc tả được tất cả các trạng thái nhận được từ trạng thái có duy nhất một cột trên hệ  $\text{SPM}$ . Đặc trưng cho các trạng thái của hệ  $\text{SPM}$  trên  $C_n$  được trình bày như sau

**Định lý 4.3.1.** Cho  $a$  là một phân bố tròn trên  $C_n$  trọng số  $k$ . Khi đó  $a$  là một phần tử của  $SPM(C_n, k)$  nếu và chỉ nếu tồn tại một phép quay các đỉnh của  $C_n$  sao cho  $a$  (dưới dạng dãy) là một phần tử của  $SPM$  trên đường thẳng có trọng số  $k$  và có độ dài nhiều nhất là  $n$ .

*Chứng minh.* Lấy  $a \in SPM(C_n, k)$ . Không mất tính tổng quát, giả sử  $a$  đạt được từ  $(k, 0, \dots, 0)$  trong đó  $k$  được đặt ở đỉnh đầu tiên của  $C_n$ . Vì chỉ áp dụng luật rơi bên phải nên các trạng thái trung gian trong quá trình thu được  $a$  luôn luôn là một dãy tăng. Do đó, đỉnh  $n$  của  $C_n$  sẽ không bao giờ cho lại chip đỉnh 1 trong suốt quá trình vận động. Do vậy,  $a$  cũng là một trạng thái của  $SPM$  và độ dài của  $a$  không vượt quá  $n$ . Chiều ngược lại là hiển nhiên.  $\square$

Hệ quả sau mô tả tất cả các phần tử của  $CFG(C_n)$  và là hệ quả trực tiếp của Mệnh đề 4.3.1 và Định lý 4.3.1.

**Hệ quả 4.3.2.** Cho  $a$  là một phân bố tròn trên  $C_n$ . Khi đó,  $a$  là một phần tử của  $CFG(C_n, k)$  nếu và chỉ nếu  $(d^n)^{-1}(a)$  là một phần tử của  $SPM(C_n, k)$ .

Nhắc lại rằng, cho trước một hệ động lực  $S$ , ta có thể định nghĩa quan hệ hai ngôi  $\leq_S$  trên không gian trạng thái của nó sao cho  $a \leq_S b$  nếu  $a$  thu được từ  $b$  bằng áp dụng một số lần luật vận động của hệ  $S$  và viết  $a \leq b$  khi  $S$  đã được chỉ rõ. Tiếp theo chúng tôi sẽ chứng minh rằng không gian trạng thái của hệ  $SPM(C_n, k)$ , và do đó của hệ  $CFG(C_n, k)$ , thừa kế cấu trúc dàn như không gian trạng thái của các hệ  $SPM$  và  $CFG$  trên đường thẳng.

**Mệnh đề 4.3.3.** Tập có thứ tự  $(SPM(C_n, k), \leq)$  là một dàn con của dàn  $(SPM(k), \leq)$  và tập có thứ tự  $CFG(C_n, k)$  là một dàn con của dàn  $(CFG(L^+, \mathcal{O}_k)$ , với  $\mathcal{O}_k = (0, k, 0, \dots, 0)$ .

*Chứng minh.* Theo Mệnh đề 4.3.1, chỉ cần chứng minh mệnh đề cho hệ  $SPM(C_n, k)$ .

Lấy  $a, b \in SPM(C_n, k)$ . Theo Định lý 4.3.1, ta có  $a, b \in SPM(k)$  và  $l(a), l(b) \leq n$ . Ta sẽ chứng minh  $c = \inf(a, b)$  và  $d = \sup(a, b)$ , trong đó các phần tử tối tiểu ( $\inf$ ) và tối đại ( $\sup$ ) được lấy trong dàn  $SPM(k)$ , có độ dài không vượt quá  $n$ .

Nhắc lại rằng, dàn  $(SPM(k), \leq)$  được chứng minh là dàn con của dàn Brylawsky  $L_B$  với quan hệ thứ tự trội (xem [26]) được cho trong phần ví dụ về dàn phần 1.1.2.



Chính xác hơn,  $c$  được xác định đệ quy với phần tử  $c_i$  của  $c$  có công thức như sau:  $c_1 = \min\{a_1, b_1\}$  và  $c_i = \min\{\sum_{j=1}^i a_j, \sum_{j=1}^i b_j\} - \sum_{j=1}^{i-1} c_j$ . Bởi vậy  $l(c) \leq \max\{l(a), l(b)\} \leq n$  và  $c \in SPM(C_n, k)$ .

Mặt khác, từ định nghĩa thứ tự trội ta cũng có nếu  $u \leq v$  thì  $l(v) \leq l(u)$ . Bởi vậy,  $l(d) \leq l(a) \leq n$  và  $d_n \in SPM(C_n, k)$ . Điều này hoàn thành chứng minh.  $\square$

Hình 4.4 minh họa bao hàm của dàn  $SPM(10)$  và dàn  $SPM(C_3, 10)$ . Trạng thái ổn định của  $SPM(10)$  là  $(4, 3, 2, 1)$  trong khi trạng thái ổn định của  $SPM(C_3, 10)$  là  $(4, 3, 3)$ .

Bằng một số tính toán đơn giản, ta cũng xác định được điểm dừng duy nhất của hệ  $SPM(C_n, k)$ .

**Hệ quả 4.3.4.** *Trạng thái ổn định duy nhất của  $SPM(C_n, k)$  là*

*i)  $(p, p-1, \dots, q, q, q-1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$  nếu  $k \leq \frac{n(n-1)}{2}$ , trong đó*

$$p = \left\lceil \frac{3 + \sqrt{9 + 8k}}{2} \right\rceil \quad \text{và} \quad q = k - \frac{p(p+1)}{2}.$$

*ii)  $(p, p-1, \dots, q+1, q, q, q-1, \dots, p-n+3, p-n+2)$  nếu  $k \geq \frac{n(n-1)}{2} + 1$ , trong đó*

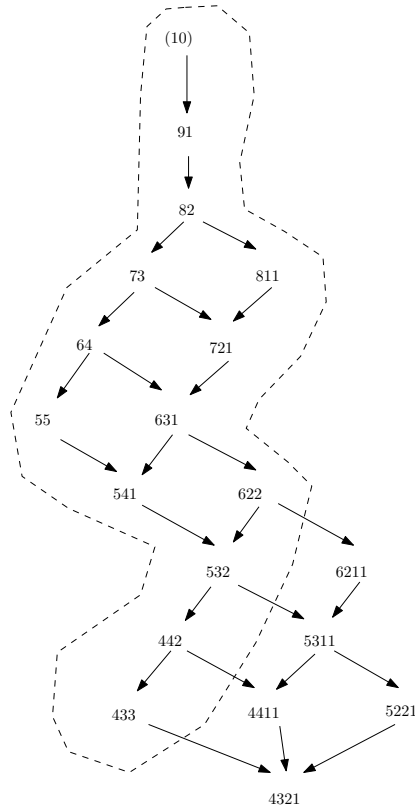
$$p = \left\lceil \frac{2k + n(n-2)}{2n} + 1 \right\rceil \quad \text{và} \quad q = k - \frac{(2p-n+2)(n-1)}{2}.$$

Ở đây,  $[x]$  là phần nguyên lớn nhất không vượt quá  $x$ .

#### 4.3.2.2 Đặc trưng trạng thái của các hệ S-SPM( $C_n$ ) và S-CFG( $C_n$ )

Tiếp theo, chúng tôi sẽ đưa ra một đặc trưng cho các phần tử của S-SPM( $C_n$ ) và S-CFG( $C_n$ ). Để làm được điều này, trước hết chúng tôi trình bày khái niệm *khai triển 2-SPM* (*2-SPM decomposition*) của một phân bố tròn. Đây là một phiên bản mở rộng của khái niệm khai triển SPM đã được đề cập đến trong phần 4.2.

**Định nghĩa 4.3.5 (Khai triển 2-SPM).** Cho  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  là một phân bố tròn. Khi đó,  $a$  được gọi là có *khai triển 2-SPM* nếu tồn tại  $(i, j)$  ( $1 \leq i \leq j \leq n$ ) sao cho  $(a_{i-1}, a_{i-2}, \dots, a_1, a_n, \dots, a_{j+1})$  và  $(a_i, a_{i+1}, \dots, a_j)$  là các phần tử của SPM. Khi đó,  $a$  được gọi là có *khai triển 2-SPM tại  $(i, j)$* .



Hình 4.4: Dàn con  $SPM(C_3, 10)$  của dàn  $SPM(10)$

Chú ý rằng một phân bố tròn có thể có khai triển 2-SPM tại nhiều vị trí  $(i, j)$ . Chẳng hạn,  $(2, 5, 5, 4, 1, 1)$  có khai triển 2-SPM tại  $(1, 2)$  và tại  $(2, 5)$ , nhưng không có khai triển 2-SPM tại  $(5, 5)$ . Hơn nữa,  $(1, 2, 2, 3, 3, 7, 4, 4, 1)$  không có khai triển 2-SPM.

Định lý dưới đây cho ta đặc trưng của tất cả các phần tử của  $S-SPM(C_n)$ .

**Định lý 4.3.2.** Cho  $a$  là một phân bố tròn trên  $C_n$ . Khi đó  $a$  là một phần tử của  $S-SPM(C_n)$  nếu và chỉ nếu  $a$  có khai triển 2-SPM.

*Chứng minh.* Để chứng minh chiều xuôi, ta sẽ chỉ ra bằng đệ quy rằng nếu  $a$  có khai triển 2-SPM tại  $(i, j)$  ( $1 \leq i \leq j \leq n$ ) và  $a$  vận động tới  $b$  bằng việc áp dụng một bước luật vận động thì  $b$  cũng có khai triển 2-SPM. Chúng ta chỉ cần xét các trường hợp sau:

- (i)  $a \xrightarrow{(j,r)} b$

- (ii)  $a \xrightarrow{(i,l)} b$
- (iii)  $a \xrightarrow{(j+1,l)} b$
- (iv)  $a \xrightarrow{(i-1,r)} b$ .

Các trường hợp khác được suy ra trực tiếp từ Mệnh đề 1.2.4 nói rằng việc áp dụng một lần (một số lần) luật rơi bên phải vào một phần tử của SPM cũng cho ta một phần tử thuộc SPM. Bởi vậy, nếu  $a$  có khai triển 2-SPM tại  $(i, j)$  thì  $b$  cũng có khai triển 2-SPM tại  $(i, j)$ .

Chúng ta sẽ chứng minh khẳng định cho bốn trường hợp ở trên. Theo Mệnh đề 1.2.4, việc thêm một đoạn dốc hoặc bỏ đi một cột của một phần tử trong SPM thì vẫn là một phần tử của SPM. Do đó, nếu  $a \xrightarrow{(j,r)} b$  thì  $a_j - a_{j+1} \geq 2$  và  $a$  cũng có khai triển 2-SPM tại  $(i, j + 1)$ . Theo khai triển mới này của  $a$  thì  $b$  thu được từ  $a$  mà không phải bằng việc áp dụng một trong bốn luật ở trên. Do đó,  $b$  có khai triển 2-SPM tại  $(i, j + 1)$ .

Một cách tương tự,  $b$  có khai triển 2-SPM tại  $(i + 1, j)$  nếu (ii), tại  $(i, j - 1)$  nếu (iii) và tại  $(i - 1, j)$  nếu (iv).

Ngược lại, giả sử  $a$  có khai triển 2-SPM tại  $(i, j)$  và  $w(a) = k$ . Ta cần chỉ ra rằng  $a$  đạt được từ  $(k)$  trong S-SPM( $C_n, k$ ). Đặt

$$k_1 = \sum_{t=i}^j a_t \quad \text{và} \quad k_2 = \sum_{t=j+1}^n a_t + \sum_{t=1}^{i-1} a_t.$$

Ta có  $k_1 + k_2 = k$ .

Vì  $(a_i, \dots, a_j) \in \text{SPM}(k_1)$  nên nó đạt được từ  $(k_1)$  trong hệ SPM. Do đó,  $a$  đạt được từ  $(a_1, \dots, a_{i-1}, k_1, 0, \dots, 0, a_{j+1}, \dots, a_n)$  bằng áp dụng một dãy các luật rơi phải. Tương tự,  $(a_{i-1}, \dots, a_1, a_n, \dots, a_{j+1})$  cũng đạt được từ  $(k_2)$  trong hệ SPM và  $(a_{j+1}, a_{j+2}, \dots, a_n, a_1, \dots, a_{i-1})$  đạt được từ  $(k_2)$  bằng áp dụng một dãy các luật rơi trái. Như vậy,  $a$  đạt được từ  $(0, \dots, 0, k_2, k_1, 0, \dots, 0)$  bằng áp dụng một dãy luật của S-SPM( $C_n$ ). Trạng thái sau lại thu được từ  $(0, \dots, 0, k, 0, \dots, 0)$  bằng áp dụng một dãy các luật rơi trái tại đỉnh  $i$  của S-SPM( $C_n, k$ ) nếu  $k_1 \geq k_2$  và bằng áp dụng một dãy các luật rơi phải tại đỉnh  $i - 1$  nếu  $k_1 < k_2$ .  $\square$

Hệ quả sau được suy ra trực tiếp từ Mệnh đề 4.3.1 và Định lý 4.3.2.

**Hệ quả 4.3.5.** Cho  $u$  là một phân bố tròn trên  $C_n$ . Khi đó,  $u$  là một phần tử của  $S\text{-CFG}(C_n, k)$  nếu và chỉ nếu  $(d^n)^{-1}(u)$  có khai triển 2-SPM.

### 4.3.3 Trạng thái ổn định của hệ S-CFG( $C_n$ )

Hệ quả 4.3.5 đã chỉ ra một tiêu chuẩn để đặc trưng cho các trạng thái của S-CFG( $C_n$ ). Tuy nhiên, để kiểm tra điều này thì chúng ta phải tính nghịch ảnh của nó bởi  $d^n$ , sau đó kiểm tra tính có khai triển 2-SPM của nghịch ảnh này trong hệ S-SPM( $C_n$ ). Ở đây, chúng tôi đưa ra một đặc trưng trực tiếp cho các trạng thái ổn định (không phải tất cả các trạng thái) của hệ S-CFG( $C_n$ ) bằng ngôn ngữ. Dựa vào đặc trưng này, chúng tôi sẽ tính toán và đưa ra một công thức tổ hợp cho số trạng thái ổn định của hệ. Như đã đề cập đến trong phần 4.3.1, các trạng thái của S-CFG( $C_n, k$ ) không rời nhau đặc biệt với các  $k$  sai khác một bội số của  $n$ . Do vậy, trước tiên chúng tôi phân lớp các trạng thái của CFG( $C_n$ ) và S-CFG( $C_n$ ) thành các lớp đồng dư theo modulo  $n$ .

**Mệnh đề 4.3.6.** Cho  $k, l$  là các số nguyên không âm. Khi đó,

(i) Nếu  $k \not\equiv l \pmod n$  thì

$$\text{CFG}(C_n, k) \cap \text{CFG}(C_n, l) = \emptyset$$

và

$$S\text{-CFG}(C_n, k) \cap S\text{-CFG}(C_n, l) = \emptyset.$$

Hệ quả là tập trạng thái ổn định của S-CFG( $C_n, k$ ) và S-CFG( $C_n, l$ ), với các giá trị  $k$  không cùng lớp thặng dư modulo  $n$ , là rời nhau.

(ii) Nếu  $k \equiv l \pmod n$  và  $k, l \geq \left[\frac{n+1}{2}\right]^2$  thì tập trạng thái ổn định của CFG( $C_n, k$ ) (S-CFG( $C_n, k$ )) trùng với tập trạng thái ổn định của CFG( $C_n, l$ ) (S-CFG( $C_n, l$ )) tương ứng).

*Chứng minh.*

(i) Ta chứng minh nếu  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in S\text{-CFG}(C_n, k)$  thì

$$\sum_{i=1}^{n-1} iu_i = k \pmod n$$

bằng việc chỉ ra rằng nếu  $u \xrightarrow{(i,+)} v$  (tương tự cho  $u \xrightarrow{(i,-)} v$ ) thì

$$\sum_{t=1}^{n-1} (n-t)u_t = \sum_{t=1}^{n-1} (n-t)v_t \pmod n. \quad (**)$$

Thật vậy, theo định nghĩa ta có

$$v = (u_1, \dots, u_{i-1} + 1, u_i - 2, u_{i+1} + 1, \dots, u_n).$$

Bằng một số tính toán đơn giản, biểu thức (\*\*\*) được suy ra từ các điều hiển nhiên sau:

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{n-1} tu_t &= \sum_{t=1}^{n-1} tv_t \text{ với } i = 1, 2, \dots, n-2, \\ \sum_{t=1}^{n-1} tu_t &= \sum_{t=1}^{n-1} tv_t + n \text{ với } i = n-1 \\ \sum_{t=1}^{n-1} tu_t &= \sum_{t=1}^{n-1} tv_t - n \text{ với } i = n. \end{aligned}$$

(ii) Lấy  $u$  là một trạng thái ổn định của  $S\text{-CFG}(C_n, k)$ . Theo Mệnh đề 4.3.1 và Định lý 4.3.2,  $(d^n)^{-1}(u)$  là một trạng thái ổn định của  $S\text{-SPM}(C_n, k)$ . Giả sử  $(d^n)^{-1}(u)$  có khai triển 2-SPM tại  $(i, j)$  ( $1 \leq i \leq j \leq n$ ). Ký hiệu  $(d^n)^{-1}(u) + 1$  là phân bố tròn thu được từ  $(d^n)^{-1}(u)$  bằng việc cộng thêm 1 vào mỗi phần của nó. Khi đó,  $(d^n)^{-1}(u) + 1$  cũng có khai triển 2-SPM tại  $(i, j)$ . Hơn nữa luật rơi phải và luật rơi trái đều không thể áp dụng được tại bất cứ cột nào của nó. Do vậy,  $(d^n)^{-1}(u) + 1$  là một trạng thái ổn định của  $S\text{-SPM}(C_n, n+k)$ . Ta lại có,  $d^n((d^n)^{-1}(u) + 1) = u$  nên  $u$  là một trạng thái ổn định của  $S\text{-CFG}(C_n, n+k)$ .

Ngược lại, cho  $u$  là một trạng thái ổn định của  $S\text{-CFG}(C_n, k+n)$ . Ký hiệu  $(d^n)^{-1}(u) - 1$  là phân bố thu được từ  $(d^n)^{-1}(u)$  bằng việc bớt mỗi phần của nó đi 1. Hiển nhiên,  $(d^n)^{-1}(u) - 1$  có tất cả các phần đều không âm (do  $k \geq \lceil \frac{n+1}{2} \rceil^2$ ) và là một trạng thái ổn định của  $S\text{-SPM}(C_n, k)$ . Vì thế,  $d^n((d^n)^{-1}(u) - 1) = u$  cũng là một trạng thái ổn định của  $S\text{-CFG}(C_n, k)$ .  $\square$

Như đã nói đến trong phần trước, với các giá trị  $k$  đủ lớn trong một lớp thặng dư modulo  $n$ , mặc dù tập trạng thái ổn định của  $S\text{-SPM}(C_n, k)$  ( $\text{SPM}(C_n, k)$ ) là rời nhau, độ cao của các cột là sai khác nhau một hằng số. Nói cách khác, nếu

$(a_1, \dots, a_n)$  là một trạng thái ổn định của  $S\text{-SPM}(C_n, k)$  ( $\text{SPM}(C_n, k)$ ), thì  $(a_1 + 1, \dots, a_n + 1)$  là một trạng thái ổn định của  $S\text{-SPM}(C_n, k+n)$  ( $\text{SPM}(C_n, k+n)$ ) (theo Mệnh đề 4.3.6). Do vậy, các ảnh của chúng bởi  $d^n$  trong  $S\text{-CFG}(C_n, k)$  ( $\text{CFG}(C_n, k)$ ) và trong  $S\text{-CFG}(C_n, k+n)$  ( $\text{CFG}(C_n, k+n)$  tương ứng) là trùng nhau.

Theo Hệ quả 4.3.4,  $\text{CFG}(C_n, k)$  có duy nhất một trạng thái ổn định trong khi  $S\text{-CFG}(C_n, k)$  có thể có nhiều trạng thái ổn định. Theo Mệnh đề 4.3.6(ii), tập trạng thái ổn định của  $S\text{-CFG}(C_n)$  bao gồm các trạng thái ổn định của  $S\text{-CFG}(C_n, k)$  với các  $k$  nhỏ và  $n$  lớp khác nhau các trạng thái ổn định (ứng với  $n$  lớp thặng dư modulo  $n$ ) của  $S\text{-CFG}(C_n, k)$  với các  $k$  lớn. Với các  $k$  nhỏ, các trạng thái ổn định của  $S\text{-CFG}(C_n, k)$  được tính trực tiếp bằng cách lấy nghịch ảnh bởi  $d^n$  của tất cả các trạng thái ổn định có khai triển 2-SPM trong  $S\text{-SPM}(C_n, k)$ .

Tiếp theo chúng tôi sẽ đặc trưng và đếm số trạng thái ổn định của  $S\text{-CFG}(C_n)$  cho mọi  $k \geq \lceil \frac{n+1}{2} \rceil^2$ .

Để thuận tiện, chúng tôi ký hiệu  $FP(S\text{-CFG}(C_n, k))$  là tập trạng thái ổn định của  $S\text{-CFG}(C_n, k)$  và

$$FP(S\text{-CFG}(C_n)) = \bigcup_{k \geq \lceil \frac{n+1}{2} \rceil^2} FP(S\text{-CFG}(C_n, k)).$$

Ta biết rằng mỗi trạng thái ổn định của  $S\text{-CFG}(C_n)$  là một phân bố tròn trên  $C_n$  và số chip trên các đỉnh của nó là  $0, 1, -1$ . Bằng một phép quay, chúng ta có thể coi  $FP(S\text{-CFG}(C_n))$  như các từ trên bảng chữ cái  $\{0, 1, \bar{1}\}$  trong đó chữ cái  $\bar{1}$  được hiểu như là  $-1$ .

**Định lý 4.3.3.** *Tập  $FP(S\text{-CFG}(C_n))$  được xác định như sau:*

1.  $FP(S\text{-CFG}(C_3)) = \{(000), (10\bar{1}), (1\bar{1}0)\}$ .
2.  $FP(S\text{-CFG}(C_4)) = \{(0000), (1\bar{1}00), (10\bar{1}0), (100\bar{1}), (11\bar{1}\bar{1})\}$ .
3.  $FP(S\text{-CFG}(C_n))$ , với  $n \geq 5$ , bao gồm các từ  $w$  độ dài  $n$  thỏa mãn các tính chất sau đây:

*i)  $w$  bắt đầu bằng 1;*

*ii) số các xuất hiện của 1 đúng bằng số xuất hiện của  $\bar{1}$  trong  $w$ ;*

iii)  $w$  tránh các dãy con:  $\bar{1}1$ ,  $1001$ ,  $\bar{1}00\bar{1}$ ,  $00000$ ;

iv) nếu  $w$  có 4 sự xuất hiện của 0 thì nó phải kết thúc bởi ký tự 0 và không chứa đoạn con  $1\bar{1}$ .

*Chứng minh.*

1. Khẳng định được suy ra từ thực tế là tất cả trạng thái ổn định có khai triển 2-SPM của  $S\text{-SPM}(C_3)$  là  $(a, a, a)$ ;  $(a + 1, a, a)$  và  $(a + 1, a, a)$ .
2. Khẳng định được suy ra từ thực tế là tất cả trạng thái ổn định có khai triển 2-SPM của  $S\text{-SPM}(C_4)$  là  $(a, a, a, a)$ ;  $(a + 1, a, a + 1, a + 1)$ ;  $(a + 1, a, a, a + 1)$ ;  $(a + 1, a, a, a)$  và  $(a + 1, a, a - 1, a)$ .
3. Lấy  $w \in FP(S\text{-CFG}(C_n))$ . Vì tổng các thành phần của  $w$  bằng 0 nên khẳng định (ii) là hiển nhiên. Bằng một phép quay, chúng ta có thể giả sử rằng  $w$  tránh dãy con  $\bar{1}1$ . Theo Định lý 4.3.2,  $(d^n)^{-1}(w)$ , được lấy trong  $S\text{-SPM}(C_n, k)$  với  $k \geq \lceil \frac{n+1}{2} \rceil^2$ , có khai triển 2-SPM. Bởi vậy, mỗi phần trong khai triển 2-SPM của nó sẽ không chứa nhiều hơn một đoạn bằng tương ứng với một sự xuất hiện của 0. Do vậy nó phải tránh các dãy con  $1001$  và  $\bar{1}00\bar{1}$ .

Hơn nữa, chúng ta có thể cho phép có nhiều nhất hai đoạn bằng tại hai vị trí phân tách. Do đó, có nhiều nhất 4 đoạn bằng trong  $(d^n)^{-1}(w)$  tương ứng với 4 sự xuất hiện của 0 và do đó  $w$  tránh dãy con  $00000$ .

Mặt khác, với  $n \geq 5$ ,  $w$  chứa ít nhất một số 1 và chúng ta có thể giả sử rằng  $w$  bắt đầu bởi 1, và  $w$  tránh dãy con  $\bar{1}1$ . Khẳng định (i) và (iii) bởi vậy được thỏa mãn.

Để chứng minh (iv), nhận xét rằng nếu  $w$  chứa đúng 4 xuất hiện của 0 thì  $(d^n)^{-1}(w)$  phải có hai đoạn bằng tại hai vị trí phân tách. Phép quay  $w$  sao cho (i) và (iii) thỏa mãn nói rằng hai đoạn bằng ở hai vị trí phân tách sẽ cho tương ứng với một sự xuất hiện của 0 ở cuối của  $w$  và một sự xuất hiện của 0 ở giữa chữ cái 1 cuối cùng và chữ cái  $\bar{1}$  đầu tiên của  $w$ . Do vậy, tránh đoạn con  $1\bar{1}$  và (iv) đúng.

Điều ngược lại là hiển nhiên từ Hệ quả 4.3.5 và thực tế là mỗi phần tử thuộc  $\mathcal{LS}$  luôn tìm được điểm chia nó làm 2 phần thỏa mãn điều kiện 2-SPM, trong đó phần tử đầu tiên là 1 và phần tử cuối cùng của phần bên phải có thể là 0.  $\square$

Sau đây, chúng tôi sẽ đưa ra một công thức tường minh cho số trạng thái ổn định của  $S\text{-CFG}(C_n)$  bằng việc đếm các từ trong định lý trên.

**Định lý 4.3.4.** *Lực lượng của  $FP(S\text{-CFG}(C_n))$  là*

- (i) 3 nếu  $n = 3$
- (ii) 5 nếu  $n = 4$
- (iii)  $\frac{(n-1)^2}{2}$  nếu  $n$  là lẻ và  $n \geq 5$
- (iv)  $\frac{n(n-2)}{2}$  nếu  $n$  chẵn và  $n \geq 6$ .

*Chứng minh.* Ta chỉ cần chứng minh (iii) và (iv). Theo Định lý 4.3.3, ta đếm số cách để chèn một số ký tự 0 vào dãy gồm các ký tự 1 đứng trước các ký tự  $\bar{1}$  sao cho các điều kiện của Định lý 4.3.3(3) được thỏa mãn. Lấy  $w \in FP(S\text{-CFG})$ .

(iii)  $n = 2l + 1$ : Khi đó,  $w$  hoặc là có một hoặc là có ba sự xuất hiện của 0 (Định lý 4.3.3(3(ii))).

- (a)  $w$  có một ký tự 0. Khi đó, ký tự 0 này có thể xuất hiện ở bất cứ vị trí nào ngoại trừ vị trí đầu tiên (vì  $w$  bắt đầu từ 1). Bởi vậy, ta có  $n - 1$  từ  $w$ .
- (b)  $w$  có ba xuất hiện của 0. Khi đó,  $w$  có  $(l - 1)$  ký tự 1 và  $(l - 1)$  ký tự  $\bar{1}$ . Ký hiệu  $A$  là tập các từ có  $(l - 1)$  ký tự 1, có  $(l - 1)$  ký tự  $\bar{1}$  và 3 ký tự 0 thỏa mãn các điều kiện 3(i), 3(ii) của Định lý 4.3.3 và tránh dãy con  $\bar{1}1$ .

Ký hiệu  $B$  là tập các từ trong  $A$  không thỏa mãn điều kiện 3 trong Định lý 4.3.3. Khi đó,  $|A| = C_{n-1}^3$ , đúng bằng số cách chọn 3 vị trí cho ký tự 0 từ  $n - 1$  vị trí ngoại trừ vị trí đầu tiên. Mặt khác, các từ của  $B$  phải chứa dãy con 1001 hoặc dãy con  $\bar{1}00\bar{1}$ . Số từ của  $B$  chứa dãy con 1001 ( $\bar{1}00\bar{1}$ ) và không chứa dãy con 10001 ( $\bar{1}000\bar{1}$  tương ứng) là  $(n - l - 1)C_{l-1}^2$ . Ở đây, ta có  $C_{l-1}^2$  cách chọn 2 vị trí của ký tự 0 từ  $(l - 1)$  vị trí có thể sao cho 1001 ( $\bar{1}00\bar{1}$ ) là dãy con của nó; và  $(n - l - 1)$  cách để chọn cho ký tự 0 còn lại. Tương tự, số từ trong  $B$  chứa dãy con 10001 ( $\bar{1}000\bar{1}$ ) là  $C_l^3$ . Do đó,

$$|B| = 2(n - l - 1)C_{l-1}^2 + 2C_l^3.$$



Vậy,

$$|FP(S-CFG(C_n))| = (n - 1) + (|A| - |B|) = \frac{(n - 1)^2}{2}.$$

(iv)  $n = 2l$ : Khi đó  $w$  hoặc không có ký tự 0, hoặc có 2 ký tự 0 hoặc có 4 ký tự 0.

(a) Nếu  $w$  không chứa ký tự 0 thì  $w = 1 \dots 1\bar{1} \dots \bar{1}$  và chúng ta chỉ có duy nhất một từ  $w$ .

(b) Nếu  $w$  có 2 ký tự 0 thì nó có  $(l - 1)$  ký tự 1 và do đó  $(l - 1)$  ký tự  $\bar{1}$ . Bởi vậy, số các từ  $w$  như vậy là  $C_{n-1}^2 - 2C_{l-1}^2$ . Ở đây,  $C_{n-1}^2$  là số từ có 2 ký tự 0 thỏa mãn các điều kiện 3(i) và 3(ii) trong Định lý 4.3.3 và tránh dãy con  $\bar{1}1$ ; và  $C_{l-1}^2$  là số từ thỏa mãn các điều kiện 3(i) và 3(ii) trong Định lý 4.3.3, tránh dãy con  $\bar{1}1$  nhưng chứa dãy con 1001 ( $\bar{1}00\bar{1}$  tương ứng).

(c) Nếu  $w$  có 4 ký tự 0 thì nó có  $(l - 2)$  ký tự 1 và  $(l - 2)$  ký tự  $\bar{1}$ . Theo điều kiện 3(iv) trong Định lý 4.3.3,  $w$  kết thúc bởi 0 và có ít nhất một ký tự 0 ở giữa ký tự 1 cuối cùng và ký tự  $\bar{1}$  đầu tiên. Xét các trường hợp sau:

- $w$  có dạng  $(1 \dots 0 \dots 10\bar{1} \dots 0 \dots \bar{1}0)$ , tức là ký tự 0 đầu tiên ở giữa hai ký tự 1. Ta có  $(l - 3)$  cách để chọn ký tự 0 đầu tiên này; 1 cách chọn ký tự 0 thứ hai (ngay sau ký tự 1 cuối cùng); và  $(l - 1)$  cách chọn ký tự 0 thứ ba tại vị trí bất kỳ sau ký tự 0 thứ hai; và 1 cách chọn ký tự 0 cuối cùng ở vị trí kết thúc của  $w$ . Do đó, ta có  $(l - 1)(l - 3)$  từ  $w$  như vậy.
- $w$  có dạng  $(1 \dots 100\bar{1} \dots 0 \dots \bar{1}0)$ , tức là hai ký tự 0 đầu tiên ở giữa ký tự 1 cuối cùng và  $\bar{1}$  đầu tiên. Ta có  $(l - 1)$  cách chọn ký tự 0 thứ ba tại bất cứ vị trí nào sau hai ký tự 0 đầu tiên và do đó ta có  $(l - 1)$  từ  $w$  như vậy.
- $w$  có dạng  $(1 \dots 10\bar{1} \dots 0 \dots \bar{1}00)$ , tức là ký tự 0 đầu tiên ở giữa ký tự 1 cuối cùng và ký tự  $\bar{1}$  đầu tiên, ký tự 0 thứ hai là ở giữa hai ký tự  $\bar{1}$ . Do đó, ta có  $(l - 3)$  cách chọn ký tự 0 thứ hai và có  $(l - 3)$  từ  $w$  như vậy.
- $w$  có dạng  $(1 \dots 10\bar{1} \dots \bar{1}000)$ , tức là ký tự 0 đầu tiên ở giữa ký tự 1 cuối cùng và ký tự  $\bar{1}$  đầu tiên và ba ký tự 0 còn lại ở cuối của  $w$ . Do đó ta có duy nhất một từ  $w$ .

Lấy tổng các giá trị này ta thu được  $l(l - 2)$  từ  $w$  trong trường hợp này.

Do đó,

$$|FP(S\text{-CFG}(C_n))| = 1 + C_{n-1}^2 - 2C_{l-1}^2 + l(l-2) = \frac{n(n-2)}{2}.$$

□

## 4.4 Kết luận chương

Chương này giới thiệu một mở rộng của hệ CFG thành hệ S-CFG (CFG có dấu) bằng cách cho phép hệ có các đỉnh có thể chứa một số âm chip và có thêm luật nhận cho các đỉnh chứa đủ âm chip. Chúng tôi nghiên cứu mở rộng này trên hai lớp đồ thị cụ thể: đường thẳng và đồ thị vòng. Chúng tôi nghiên cứu các hệ mở rộng này trong mối liên quan với các hệ SPM và S-SPM đã được trình bày trong chương 3. Các kết quả đạt được như sau:

1. Đồ thị nền là đường thẳng:
  - (a) Chứng minh hệ S-SPM và hệ S-CFG là đẳng cấu.
  - (b) Đặc trưng cho dạng ổn định của hệ S-CFG trên đường thẳng bằng ngôn ngữ trên bảng chữ cái  $\{1, 0, \bar{1}\}$ .
  - (c) Đưa ra các tính toán tổ hợp cho số dạng ổn định của hai hệ theo trọng số và độ dài. Từ đó suy ra một kết quả theo trọng số đã có cho hệ S-SPM trong [22] như một hệ quả.
2. Đồ thị nền là đồ thị vòng:
  - (a) Chứng minh các hệ  $SPM(C_n, k)$  và  $CFG(C_n, k)$ , các hệ  $S\text{-}SPM(C_n, k)$  và  $S\text{-}CFG(C_n, k)$  là đẳng cấu.
  - (b) Chứng minh cấu trúc dàn, đặc trưng trạng thái của các hệ  $SPM(C_n)$  và  $CFG(C_n)$ .
  - (c) Đặc trưng trạng thái của hệ  $S\text{-}SPM(C_n)$  bằng các trạng thái có khai triển  $2 - SPM$ .
  - (d) Đặc trưng trạng thái ổn định của hệ  $S\text{-}CFG(C_n)$  bằng ngôn ngữ.
  - (e) Đưa ra tính toán tổ hợp cho số trạng thái ổn định của hệ  $S\text{-}CFG(C_n)$ .

# Kết luận và các hướng nghiên cứu tiếp theo

## Kết luận

Luận án được thực hiện dựa trên các công trình [10, 21, 41, 46] của tác giả và các đồng nghiệp. Chúng tôi đã đạt được những kết quả sau:

1. Nghiên cứu sự ổn định của hệ SPM khi có thêm tác động từ bên ngoài bằng việc bổ sung luật thêm hạt vào các cột hợp lý khi hệ đã đạt trạng thái ổn định duy nhất. Các kết quả chúng tôi thu được trong phần này là sinh tất cả các phân hoạch trơn bằng hệ động lực, từ đó chứng minh cấu trúc dàn của các phân hoạch trơn trong mối quan hệ với dàn Young. Thêm vào đó, chúng tôi cũng đã mô tả được sự biến thiên của hệ dưới tác động nhỏ từ bên ngoài bằng việc tính toán đường đi ngắn nhất và dài nhất để hệ tới một phân hoạch trơn.
2. Nghiên cứu tập trạng thái ổn định của hệ mở rộng SPM đối xứng song song. Kết quả chính của chúng tôi là chứng minh hệ SPM đối xứng song song và hệ SPM đối xứng có cùng dạng ổn định. Chứng minh này mang tính kiến thiết bằng cách chỉ ra tương minh con đường áp dụng luật PS-SPM kết hợp giữa các thủ tục giả đan xen, đan xen và tắt định một cách hợp lý.
3. Nghiên cứu một mở rộng của hệ SPM và CFG bằng việc cho phép các cột trong hệ SPM có thể rơi sang hai phía (trái hoặc phải); các đỉnh trong hệ CFG có thể chứa một số âm các chip và các đỉnh chứa chip đủ âm cũng có thể bắn như các đỉnh chứa đủ dương chip. Chúng tôi chứng minh các đẳng cấu

giữa các hệ mở rộng này trong hai trường hợp khi đồ thị nền là đường thẳng vô hạn và đồ thị vòng. Nhờ việc kết hợp nghiên cứu giữa hai hệ, chúng tôi đã thu được một số đặc trưng cho các trạng thái của các hệ và đưa ra một số tính toán tổ hợp liên quan đến số trạng thái ổn định của chúng.

## Hướng nghiên cứu tiếp theo

1. Nghiên cứu các hệ (hệ mở rộng) CFG cùng với hệ SPM trên một số lớp đồ thị đặc biệt như đồ thị đầy đủ, đồ thị bánh xe, ... Mặc dù hệ CFG và SPM có nhiều điểm tương đồng nhưng chúng cũng có những điểm rất đặc trưng. Với hệ SPM, chúng ta không cần đề cập tới việc có đỉnh chìm cho sự hội tụ. Việc xác định đặc trưng cho trạng thái và trạng thái ổn định, tính toán thời gian được thực hiện tường minh hơn. Trong khi đó, với hệ CFG chúng ta có nhiều công cụ hơn để nghiên cứu hạn như lý thuyết nhóm, lý thuyết đồ thị, lý thuyết ngôn ngữ.
2. Nghiên cứu tính ổn định của các hệ SPM (hoặc CFG) mở rộng dưới tác động từ bên ngoài. Vì hệ SPM đối xứng không có cấu trúc dàn và hệ có nhiều điểm dừng nên dưới tác động của việc thêm hạt hệ sẽ có nhiều trạng thái dừng mới và tính ổn định sẽ rất phức tạp.
3. Nghiên cứu các trạng thái đột biến của hệ CFG trên đồ thị có hướng. Chúng tôi quan tâm tới hai tính chất sau:
  - i) Số các trạng thái đột biến đúng bằng số các cây bao trùm (có gốc) của đồ thị (Định lý 1.2.5).
  - ii) Hàm sinh cho số trạng thái đột biến theo cấp (level) được định giá bởi đa thức Tutte  $T_G(1, y)$  khi  $G$  là vô hướng [38].

Từ khía cạnh tổ hợp, chúng tôi quan tâm tới các song ánh giữa hai đối tượng có cùng lực lượng trong tính chất (i). Khi  $G$  là vô hướng, một họ song ánh được đưa ra tường minh hoặc bằng thuật toán trong [12, 9]. Mục tiêu của chúng tôi là nghiên cứu với đồ thị có hướng.

Với tính chất (ii), cho đến nay dù đã có rất nhiều nỗ lực cho việc định nghĩa đa thức Tutte trên đồ thị có hướng nhưng vẫn chưa thành công thậm chí cho đa thức một biến. Cách tiếp cận sử dụng *CFG* gần đây rất được quan tâm và đã có nhiều loại trạng thái được định nghĩa trên hệ *CFG* có cùng lực lượng với số cây bao trùm như trạng thái đột biến, trạng thái siêu ổn định (super-stable), hàm  $G$ -đỗ xe ( $G$ -parking function), ước rút gọn (reduced divisor) [12, 9, 4]. Trước tiên, chúng tôi xét lớp các đồ thị có hướng có tính chất Euler, tức là tại mỗi đỉnh của đồ thị số cạnh đi vào đúng bằng số cạnh đi ra. Lớp đồ thị này cũng đủ rộng và hơn nữa nó có nhiều tính chất tương tự như đồ thị vô hướng.

4. Cuối cùng, Baker và Norine [4] nghiên cứu định lý Riemann-Roch trong hình học đại số cho đồ thị vô hướng nhờ sử dụng hệ *CFG*. Trong bài báo đó, các tác giả đã giới thiệu một lớp các trạng thái đặc biệt của hệ *CFG*, được gọi là các *trạng thái hiệu quả* (effective configuration), là các trạng thái nằm trong lớp tương đương với một trạng thái không âm trong nhóm  $\mathcal{SP}(G)$ . Từ đó định nghĩa một bất biến cho mỗi trạng thái, được gọi là hạng, là số lớn nhất các chip có thể loại bỏ khỏi một trạng thái một cách tùy ý để trạng thái thu được là hiệu quả. Với định nghĩa này, các tác giả đã mở ra một hướng nghiên cứu mới cho hệ *CFG* liên quan đến các đại lượng được quan tâm nhiều trong hình học đại số như số chiều, hạng, ... Các chứng minh trong bài báo trên sử dụng các công cụ của Đại số và chúng tôi mong muốn đưa ra các giải thích tổ hợp cho những kết quả này và phát triển thêm theo các hướng trong bài báo.

# Danh mục công trình

## Các công trình dùng trong luận án

1. E. Formenti, V. T. Pham, H. D. Phan, and T. T. H. Tran. Fixed point forms of the parallel symmetric sandpile model. *Theoret. Comput. Sci.*, To appear.
2. R. Cori, H. D. Phan, and T. T. H. Tran. Signed chip firing games and symmetric sandpile models on the cycles. *RAIRO Theore. Inf. Appl.*, 47(2):133–146, 2013.
3. H. D. Phan and T. T. H. Tran. On the stability of sand piles model. *Theoret. Comput. Sci.*, 411(3):594–601, 2010.

## Các công trình khác

1. P. T. Do, D. Rossin and T. T. .H. Tran. Permutations weakly avoiding barred patterns and combinatorial bijections to generalized Dyck and Motzkin paths, *Discret. Math.*, 320:40–50, 2014.
2. Dan Hefetz, Annina Saluz, and T.T. Huong Tran. An application of the combinatorial Nullstellensatz to a graph labeling problem. *J. Graph Theory*, 65(1):70–82, 2010.

# Tài liệu tham khảo

- [1] R. Anderson, L. Lovász, P. Shor, J. Spencer, E. Tardos, and S. Winograd. Disks, ball, and walls: analysis of a combinatorial game. *Amer. math. Monthly*, 96:481–493, 1989.
- [2] G.E. Andrews. *The Theory of Partitions*. Addison-Wesley Publishing Company, 1976.
- [3] P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld. Self-organized criticality: An explanation of  $1/f$  noise. *Physics Review Letters*, 59:381–384, 1987.
- [4] Matthew Baker and Serguei Norine. Riemann-Roch and Abel-Jacobi theory on a finite graph. *Adv. Math.*, 215(2):766–788, 2007.
- [5] N. Biggs. Algebraic potential theory on graphs. *Bull. London math. Soc*, 29:641–682, 1997.
- [6] A. Bjorner and L. Lovász. Chip firing games on directed graphes. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 1:305–328, 1992.
- [7] A. Bjorner, L. Lovász, and W. Shor. Chip-firing games on graphes. *E.J. Combinatorics*, 12:283–291, 1991.
- [8] T. Brylawski. The lattice of interger partitions. *Discrete Mathematics*, 6:201–219, 1973.
- [9] Denis Chebikin and Pavlo Pylyavskyy. A family of bijections between  $g$ -parking functions and spanning trees. *J. Comb. Theory, Ser. A*, 110(1):31–41, 2005.
- [10] R. Cori, H.D. Phan, and T.T.H. Tran. Signed chip firing games and symmetric sandpile models on the cycles. *RAIRO Theore. Inf. Appl.*, To appear, 2013.

- [11] R. Cori and D. Rossin. On the sandpile group of dual graphs. *European Journal of Combinatorics*, 21:447–459, 2000.
- [12] Robert Cori and Yvan Le Borgne. The sand-pile model and Tutte polynomials. *Adv. in Appl. Math.*, 30(1-2):44–52, 2003. Formal power series and algebraic combinatorics (Scottsdale, AZ, 2001).
- [13] B.A. Davey and H.A. Priestley. *Introduction to Lattices and Order*. Cambridge University Press, 1990.
- [14] J. Desel, E. Kindler, T. Vesper, and R. Walter. A simplified proof for the self-stabilizing protocol: a game of cards. *Inform. Proc. Lett.*, 54:327–328, 1995.
- [15] D. Dhar. Self-organized critical state of sandpile automaton models. *Phys. rev. Lett.*, 64:1613–1616, 1990.
- [16] D. Dhar and S.N. Majumbar. Abelian sandpile model on the bethe lattice. *Journal of Physics*, A23:4333–4350, 1990.
- [17] D. Dhar, P. Ruelle, S. Sen, and D. Verma. Algebraic aspects of sandpile models. *Journal of Physics*, A28:805–831, 1995.
- [18] Reinhard Diestel. *Graph theory*, volume 173 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 2000.
- [19] J. Durand-Lose. *Automates cellulaires, Automates à partitions et Tas de sables*. PhD thesis, Université de Bordeaux - LaBRI, 1996.
- [20] Jérôme Olivier Durand-Lose. Parallel transient time of one-dimensional sand pile. *Theor. Comput. Sci.*, 205(1-2):183–193, 1998.
- [21] E. Formenti, V. T. Pham, H. D. Phan, and T. T. H. Tran. Fixed point forms of the parallel symmetric sandpile model. Preprint, 2011.
- [22] Enrico Formenti, Benoît Masson, and Theophilos Pisokas. Advances in symmetric sandpiles. *Fundam. Inf.*, 76(1-2):91–112, 2007.
- [23] E. Goles and M.A. Kiwi. Games on line graphes and sand piles. *Theoret. Comput. Sci.*, 115:321–349, 1993.



- [24] E. Goles, M. Latapy, C. Magnien, M. Morvan, and H. D. Phan. Sandpile models and lattices: a comprehensive survey. *Theoret. Comput. Sci.*, 322(2):383–407, 2004.
- [25] E. Goles, M. Morvan, and H.D. Phan. Lattice structure and convergence of a game of cards. *Ann. of Combinatorics*, 6:327–335, 2002.
- [26] E. Goles, M. Morvan, and H.D. Phan. Sandpiles and order structure of integer partitions. *Discrete Appl. Math.*, 117:51–64, 2002.
- [27] E. Goles, M. Morvan, and H.D. Phan. The structure of linear chip firing game and related models. *Theoret. Comput. Sci.*, 270:827–841, 2002.
- [28] Alexander E. Holroyd, Lionel Levine, Karola Mészáros, Yuval Peres, James Propp, and David B. Wilson. Chip-firing and rotor-routing on directed graphs. In *In and out of equilibrium. 2*, volume 60 of *Progr. Probab.*, pages 331–364. Birkhäuser, Basel, 2008.
- [29] S.-T. Huang. Leader election in uniform rings. *ACM Trans. Programming Languages Systems*, 15(3):563–573, 1993.
- [30] R. Karmakar and S.S. Manna. Particle hole symmetry in a sandpile model. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2005(01):L01002, 2005.
- [31] M. Latapy, R. Mataci, M. Morvan, and H.D. Phan. Structure of some sand piles model. *Theoret. Comput. Sci.*, 262:525–556, 2001.
- [32] M. Latapy and H.D. Phan. The lattice structure of chip firing games. *Physica D*, 115:69–82, 2001.
- [33] Matthieu Latapy and Thi Ha Duong Phan. The lattice of integer partitions and its infinite extension. *Discrete Math.*, 309(6):1357–1367, 2009.
- [34] Manh Ha Le and Thi Ha Duong Phan. Integer partitions in discrete dynamical models and ECO method. *Vietnam J. Math.*, 37(2-3):273–293, 2009.
- [35] Minh Ha Le and Ha Duong Phan. Strict partitions and discrete dynamical systems. *FPSAC'04. Vancouver, Canada*, page 12 pages, 2004.
- [36] Lionel Levine. The sandpile group of a tree. *European J. Combin.*, 30(4):1026–1035, 2009.

- [37] M. Lothaire. *Combinatorics on words*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. With a foreword by Roger Lyndon and a preface by Dominique Perrin, Corrected reprint of the 1983 original, with a new preface by Perrin.
- [38] Criel Merino. The chip firing game and matroid complexes. In *Discrete models: combinatorics, computation, and geometry (Paris, 2001)*, Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc., AA, pages 245–255 (electronic). Maison Inform. Math. Discrèt. (MIMD), Paris, 2001.
- [39] Kévin Perrot, Thi Ha Duong Phan, and Trung Van Pham. On the set of fixed points of the parallel symmetric sand pile model. In *Automata 2011—17th International Workshop on Cellular Automata and Discrete Complex Systems*, Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc., AP, pages 17–28. Assoc. Discrete Math. Theor. Comput. Sci., Nancy, 2012.
- [40] Thi Ha Duong Phan. Two sided sand piles model and unimodal sequences. *ITA*, 42(3):631–646, 2008.
- [41] Thi Ha Duong Phan and Thi Thu Huong Tran. On the stability of sand piles model. *Theoret. Comput. Sci.*, 411(3):594–601, 2010.
- [42] D. Rossin and Y. Le Borgne. On the identity of the sandpile group. *Discrete Mathematics*, 256, 3:756–790, 2002.
- [43] J. Spencer. Balancing vectors in the max norm. *Combinatorica*, 6:55–65, 1986.
- [44] Richard P. Stanley. *Enumerative combinatorics. Vol. 1*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [45] Richard P. Stanley. *Enumerative combinatorics. Vol. 2*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [46] Thi-Thu-Huong Tran. Signed chip-firing games on some graphs and its applications. Master’s thesis, University Paris Diderot, Paris 7, 2009.
- [47] Pham Van Trung. Discrete dynamical systems - symmetric sandpile model. Technical report, Bachelor thesis, ThesisHanoi University of Natural Science, VNU, 2008.