

**VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM
VIỆN TOÁN HỌC**

-----oOo-----

Phạm Hùng Quý

**TÍNH CHẴNG RA CỦA MÔĐUN ĐỐI ĐỒNG ĐIỀU ĐỊA PHƯƠNG
VÀ ỨNG DỤNG**

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HÀ NỘI-2013

**VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM
VIỆN TOÁN HỌC**

-----oOo-----

Phạm Hùng Quý

**TÍNH CHẴ RA CỦA MÔĐUN ĐỐI ĐỒNG ĐIỀU ĐỊA PHƯƠNG
VÀ ỨNG DỤNG**

Chuyên ngành: Đại số và lý thuyết số

Mã số: 62. 46. 01. 04

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

TẬP THỂ HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

GS. TSKH. Nguyễn Tự Cường

HÀ NỘI-2013

Tóm tắt

Cho R là một vành Noether giao hoán, $\mathfrak{a}$ là một ideal của R và M là một R -môđun hữu hạn sinh. Mục tiêu chính của luận án là tìm những điều kiện để các môđun đối đồng điều địa phương $H_{\mathfrak{a}}^i(\bullet)$ có tính chất chẻ ra và áp dụng nó vào nhiều vấn đề khác nhau của Đại số Giao hoán. Luận án được chia làm bốn chương.

Trong Chương 1, trước hết chúng tôi nhắc lại một số tính chất cơ bản của môđun đối đồng điều địa phương và phép toán trong môđun $\text{Ext}_R^1(\bullet, \bullet)$. Để chứng minh một dãy khớp ngắn $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ là chẻ ra chúng tôi chứng minh nó đại diện cho phần tử 0 của $\text{Ext}_R^1(C, A)$. Cuối chương chúng tôi chứng minh một định lý chẻ ra của đối đồng điều địa phương với điều kiện $H_{\mathfrak{a}}^i(M)$ là hữu hạn sinh với mọi $i < t$ nào đó. Một số áp dụng của định lý chẻ ra này vào tính ổn định của hệ tham số của môđun Cohen-Macaulay suy rộng cũng được đưa ra.

Trong Chương 2, chúng tôi áp dụng tính chẻ ra của đối đồng điều địa phương để chứng minh một số tính chất ổn định của hệ tham số tốt của các môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy.

Trong Chương 3, chúng tôi luôn xét vành cơ sở $(R, \mathfrak{m})$ là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay địa phương. Chúng tôi chứng minh tính chẻ ra của đối đồng điều địa phương theo các phần tử tham số $x \in \mathfrak{b}(M)^3$, ở đây

$$\mathfrak{b}(M) = \bigcap_{\underline{x}; i=1}^d \text{Ann}(0 : x_i)_{M/(x_1, \dots, x_{i-1})M},$$

với $\underline{x} = x_1, \dots, x_d$ chạy trong tất cả các hệ tham số của M . Một áp dụng đáng chú ý của định lý chẻ ra này là chúng tôi đã xây dựng được một loại bậc mở rộng theo nghĩa của W. Vasconcelos và gọi đó là bậc không trộn lẫn.

Trong Chương 4, chúng tôi chứng minh một số tính chất hữu hạn của tập ideal nguyên tố liên kết của môđun đối đồng điều địa phương đầu tiên không hữu hạn sinh và có tập giá vô hạn. Chúng tôi cũng chứng minh tính hữu hạn của một số tập ideal nguyên tố liên kết liên quan với chiều hữu hạn của M tương ứng với một ideal $\mathfrak{a}$.

Abstract

Let R be a Noetherian ring, $\mathfrak{a}$ an ideal of R and M a finitely generated R -module. The aim of this thesis is to prove Theorems on the splitting of local cohomology $H_{\mathfrak{a}}^i(\bullet)$ and their applications in many problems of Commutative Algebra. The thesis is divided into four chapters.

In Chapter 1, we first recall some fundamental results of local cohomology and operations of R -module $\text{Ext}(\bullet, \bullet)$. In order to prove a short exact sequence $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ is split we show that it is a representative of the zero element of $\text{Ext}_R^1(C, A)$. We prove a splitting theorem of local cohomology provided that $H_{\mathfrak{a}}^i(M)$ is finitely generated for all $i < t$ with some positive integer t . Some applications about the asymptotic behavior of systems of parameters of generalized Cohen-Macaulay modules are given.

In Chapter 2, we use the splitting of local cohomology to prove some asymptotic behaviors of good systems of parameters of sequentially generalized Cohen-Macaulay modules.

In Chapter 3, we always assume that $(R, \mathfrak{m})$ is the homomorphic image of a Cohen-Macaulay local ring. We shall prove the splitting of local cohomology under passing a parameter element $x \in \mathfrak{b}(M)^3$, where

$$\mathfrak{b}(M) = \cap_{\underline{x}; i=1}^d \text{Ann}(0 : x_i)_{M/(x_1, \dots, x_{i-1})M},$$

with $\underline{x} = x_1, \dots, x_d$ runs over all systems of parameters of M . As a remarkable application of this splitting theorem, we construct an extended degree in the sense of W. Vasconcelos which we call unmixed degree.

In Chapter 4, we prove the finiteness of the set of associated primes of the first local cohomology what is not finitely generated and whose support is not finite. We also prove the finiteness of certain sets of associated primes related to the finiteness dimension of M with respect to an ideal $\mathfrak{a}$.

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các kết quả viết chung với tác giả khác đã được sự nhất trí của đồng tác giả khi đưa vào luận án. Các kết quả của luận án là mới và chưa từng được ai công bố trong bất kì công trình nào khác.

Tác giả

Phạm Hùng Quý

Lời cảm ơn

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến hai người thầy đã dìu dắt tôi trên con đường học tập và nghiên cứu. Tôi xin được cảm ơn GS. TSKH. Nguyễn Tự Cường, người hướng dẫn tôi thực hiện bản luận án này. Nếu không có các kết quả nghiên cứu đi trước của thầy và các học trò thì chắc chắn bản luận án này không thể được hoàn thành. Làm việc dưới sự hướng dẫn của thầy là một may mắn lớn trong cuộc đời của tôi. Tôi cũng xin được gửi lời cảm ơn đến PGS. TS. Dương Quốc Việt. Thầy là người dẫn dắt tôi những bước đi vững chãi ban đầu khi tôi học Đại học và Cao học.

Tôi xin cảm ơn GS. TSKH. Lê Tuấn Hoa vì những nhận xét hữu ích để bản luận án này được tốt hơn.

Tôi xin cảm ơn các anh chị trong nhóm nghiên cứu của GS. TSKH. Nguyễn Tự Cường, đặc biệt là TS. Đoàn Trung Cường. Việc học các kết quả của các anh chị là sự chuẩn bị tốt để tôi thực hiện bản luận án này.

Tôi xin cảm ơn TS. Đinh Thành Trung vì rất nhiều những trao đổi thú vị về Đại số Giao hoán.

Tôi xin trân trọng cảm ơn Viện Toán học, các phòng chức năng, Trung tâm Đào tạo sau đại học của Viện Toán học đã cho tôi một môi trường học tập, nghiên cứu lý tưởng để tôi có thể hoàn thành luận án này.

Bản luận án này được chỉnh sửa trong thời gian tôi đến làm việc tại Viện nghiên cứu cao cấp về Toán. Tôi xin cảm ơn Viện nghiên cứu cao cấp về Toán đã tạo những điều kiện tốt để tôi làm việc trong thời gian này.

Tôi xin cảm ơn Ban giám hiệu trường Đại học FPT đã cho tôi cơ hội được đi học tập và nghiên cứu.

Tôi xin cảm ơn những đồng nghiệp, các anh, chị, em đã và đang học tập và nghiên cứu tại phòng Đại số và phòng Lý thuyết số của Viện Toán học về những trao đổi, hỗ trợ và chia sẻ trong khoa học cũng như trong cuộc sống.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới những người thân trong gia đình của mình. Bố, mẹ và anh trai đã luôn nhắc nhở, động viên và kiên nhẫn chờ đợi các kết quả học tập của tôi. Tôi hi vọng rằng bản luận án này sẽ mang lại niềm vui, sự tự hào cho bố, mẹ và anh trai. Tôi xin cảm ơn vợ tôi, Ngọc Châu, vì tình yêu và sự chăm sóc chu đáo trong thời gian tôi hoàn thành bản luận án này. Vợ tôi và con gái bé nhỏ của chúng tôi sẽ là một nguồn động lực to lớn để tôi cố gắng tiếp tục học tập và nghiên cứu. Cuối cùng, tôi dành tặng bản luận án này cho bố, mẹ, anh trai và vợ của mình.

Mục lục

Mở đầu	3
Chương 1. Tính chẻ ra của đối đồng điều địa phương	16
1.1 Môđun đối đồng điều địa phương	16
1.1.1 Môđun đối đồng điều địa phương	17
1.1.2 Tính triệt tiêu và không triệt tiêu của đối đồng điều địa phương	19
1.1.3 Đối đồng điều địa phương và tính Cohen-Macaulay của môđun	20
1.2 Phép toán trong môđun $\text{Ext}(C, A)$	22
1.3 Môđun $\text{Ext}(H_a^{i+1}(M), H_a^i(M))$	26
1.4 Định lí chẻ ra của đối đồng điều địa phương	34
Chương 2. Tính chất ổn định của hệ tham số tốt của môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy	41
2.1 Môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy và hệ tham số tốt	42
2.1.1 Lọc chiều và hệ tham số tốt	42
2.1.2 Môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy	43
2.2 Một số tính chất ổn định	45
Chương 3. Tính chẻ ra của đối đồng điều địa phương trong vành địa phương và bậc của một môđun	55
3.1 Linh hoá tử của môđun đối đồng điều địa phương	56
3.2 Định lí chẻ ra của đối đồng điều địa phương trong vành địa phương	61
3.3 Bậc không trộn lẫn của một môđun	73

Chương 4. Tính hữu hạn của tập idêan nguyên tố liên kết	89
4.1 Môđun FSF	90
4.2 Chiều hữu hạn của môđun tương ứng với một idêan	94
Kết luận của luận án	101
Các công trình liên quan đến luận án	103
Tài liệu tham khảo	104

Mở đầu

Tính chẻ ra của các dãy khớp ngắn luôn được chú ý trong Đại số Đồng điều. Bởi khi đó cấu trúc của các thành phần trong nó trở nên rõ ràng hơn. Do đó người ta thường cố gắng đặc tả và phát hiện tính chất này.

Bản luận án này quan tâm đến tính chất chẻ ra của dãy khớp ngắn các môđun đối đồng điều địa phương. Trong toàn bộ luận án ta luôn xét R là một vành Noether giao hoán có đơn vị. Xét $\mathfrak{a}$ là một idean của R . *Hàm tử đối đồng điều địa phương* $H_{\mathfrak{a}}^i(\bullet)$ với giá $\mathfrak{a}$ được định nghĩa là hàm tử dẫn suất phải thứ i của *hàm tử xoắn* $\Gamma_{\mathfrak{a}}(\bullet)$, ở đây $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = 0 :_M \mathfrak{a}^{\infty} = \bigcup_{n \geq 1} (0 :_M \mathfrak{a}^n)$ với M là một R -môđun. Lí thuyết đối đồng điều địa phương được giới thiệu bởi A. Grothendieck vào những năm 1960. Bởi tính linh hoạt trong sử dụng cùng với khả năng đặc tả nhiều cấu trúc toán học của nó, ngày nay đối đồng điều địa phương đã trở thành một công cụ quan trọng trong nghiên cứu nhiều lí thuyết toán học trong đó có Đại số Giao hoán. Cấu trúc của môđun $H_{\mathfrak{a}}^i(M)$ cho ta biết được rất nhiều thông tin về môđun M và idean $\mathfrak{a}$ (xem các Tiết 1.2 và 3.1). Một kĩ thuật chứng minh quan trọng trong Đại số Giao hoán là chọn một phần tử chính quy $x \in \mathfrak{a}$ của M và xét dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{x} M \rightarrow M/xM \rightarrow 0.$$

Tác động hàm tử đối đồng điều địa phương $H_{\mathfrak{a}}^i(\bullet)$ vào dãy khớp trên ta thu được dãy khớp dài các môđun đối đồng điều địa phương sau

$$\cdots \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^i(M) \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^i(M) \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^i(M/xM) \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^{i+1}(M) \rightarrow \cdots .$$

Trong luận án này chúng tôi tìm điều kiện để dãy khớp dài trên cho ta những dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow H_a^i(M) \rightarrow H_a^i(M/xM) \rightarrow H_a^{i+1}(M) \rightarrow 0,$$

và khi nào thì dãy khớp ngắn này là chẻ ra, tức là ta có

$$H_a^i(M/xM) \cong H_a^i(M) \oplus H_a^{i+1}(M).$$

Động lực cho việc xem xét tính chẻ ra của đối đồng điều địa phương của bản luận án này xuất phát từ những câu hỏi đặt ra trong nghiên cứu các lớp môđun mở rộng của lớp môđun Cohen-Macaulay. Giả sử $(R, \mathfrak{m})$ là một vành địa phương và M là một R -môđun hữu hạn sinh chiều d . Nếu M là một môđun Cohen-Macaulay thì với một (và mọi) idêan tham số $\mathfrak{q}$ của M ta có $\ell(M/\mathfrak{q}M) = e(\mathfrak{q}; M)$. Đặc trưng đối đồng điều địa phương cho tính Cohen-Macaulay là $H_{\mathfrak{m}}^i(M) = 0$ với mọi $i < d$. Khi M không là một môđun Cohen-Macaulay ta luôn có hiệu $I_M(\mathfrak{q}) := \ell(M/\mathfrak{q}M) - e(\mathfrak{q}; M) > 0$. Từ việc nghiên cứu các môđun thỏa mãn một câu hỏi của D. Buchsbaum rằng phải chăng $I_M(\mathfrak{q})$ là một bất biến của môđun, J. Stuckrad và W. Vogel đã phát triển lí thuyết về *môđun Buchsbaum* (xem [51]). Ngay sau đó N.T. Cường, P. Schenzel và N.V. Trung đã nghiên cứu lớp môđun có tính chất $I_M(\mathfrak{q})$ bị chặn trên bởi một hằng số và gọi đó là lớp *môđun Cohen-Macaulay suy rộng*. Đặc trưng đối đồng điều địa phương cho một môđun Cohen-Macaulay suy rộng M là $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ là hữu hạn sinh với mọi $i < d$, và điều này tương đương với tồn tại một số nguyên dương n_0 sao cho $\mathfrak{m}^{n_0} H_{\mathfrak{m}}^i(M) = 0$ với mọi $i < d$ (xem Mệnh đề 1.1.13). Hơn nữa nếu ta có thể chọn $n_0 = 1$ tức là $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ là một $R/\mathfrak{m}$ -không gian vectơ hữu hạn chiều, thì ta gọi M là *môđun tựa Buchsbaum*. Một môđun Buchsbaum là tựa Buchsbaum nhưng điều ngược lại không đúng. Xét x là một phần tử tham số của môđun Buchsbaum M . Ta dễ thấy dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow M/H_{\mathfrak{m}}^0(M) \xrightarrow{x} M \rightarrow M/xM \rightarrow 0$$

cảm sinh các dãy khớp ngắn đối đồng điều địa phương

$$0 \rightarrow H_{\mathfrak{m}}^i(M) \rightarrow H_{\mathfrak{m}}^i(M/xM) \rightarrow H_{\mathfrak{m}}^{i+1}(M) \rightarrow 0$$

với mọi $i < d - 1$. Theo tính chất của môđun Buchsbaum ta có M/xM cũng là một môđun Buchsbaum. Do đó các môđun trong dãy khớp bên trên đều là các $R/\mathfrak{m}$ -không gian vectơ hữu hạn chiều nên dãy khớp ngắn này là chẻ ra. Dẫn đến $H_{\mathfrak{m}}^i(M/xM) \cong H_{\mathfrak{m}}^i(M) \oplus H_{\mathfrak{m}}^{i+1}(M)$ với mọi $i < d - 1$. Trong trường hợp M là một môđun tựa Buchsbaum với x là một phần tử tham số của M ta cũng có các dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow H_{\mathfrak{m}}^i(M) \rightarrow H_{\mathfrak{m}}^i(M/xM) \rightarrow H_{\mathfrak{m}}^{i+1}(M) \rightarrow 0$$

với mọi $i < d - 1$. Chú ý rằng dãy khớp ngắn này có thể là không chẻ ra do M/xM có thể không là môđun tựa Buchsbaum (xem [51, Example I.2.5]). Tuy nhiên nếu chọn $x \in \mathfrak{m}^2$ là một phần tử tham số của M theo [51, Proposition I.2.1] thì M/xM là một môđun tựa Buchsbaum nên ta có $H_{\mathfrak{m}}^i(M/xM) \cong H_{\mathfrak{m}}^i(M) \oplus H_{\mathfrak{m}}^{i+1}(M)$ với mọi $i < d - 1$. Trường hợp M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng tương tự như chứng minh [51, Proposition I.2.1, page 73] ta có tính chẻ ra của đối đồng điều địa phương cho phần tử tham số có dạng đặc biệt là x^n với $n \gg 0$. Câu hỏi dưới đây là mục tiêu nghiên cứu ban đầu của tác giả luận án này.

Câu hỏi 1. Cho M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng chiều $d > 0$. Khi đó phải chăng tồn tại một số nguyên dương n sao cho với mọi phần tử tham số x của M chứa trong $\mathfrak{m}^n$ ta có $H_{\mathfrak{m}}^i(M/xM) \cong H_{\mathfrak{m}}^i(M) \oplus H_{\mathfrak{m}}^{i+1}(M)$ với mọi $i < d - 1$?

Câu hỏi trên có thể được xem xét dưới dạng mạnh hơn cho ideal $\mathfrak{a}$ bất kì với điều kiện $H_{\mathfrak{a}}^i(M)$ là hữu hạn sinh với mọi i nhỏ hơn một số nguyên dương t nào đó. Nhắc lại rằng $x \in \mathfrak{a}$ là một phần tử $\mathfrak{a}$ -lọc chính quy của M nếu $x \notin \mathfrak{p}$ với mọi $\mathfrak{p} \in \text{Ass}M$, $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}$.

Câu hỏi 2. Cho $\mathfrak{a}$ là một ideal của vành Noether R (bất kỳ) và M là một R -môđun hữu hạn sinh. Xét t là một số nguyên dương sao cho $H_{\mathfrak{a}}^i(M)$ là hữu hạn sinh với mọi $i < t$. Khi đó phải chăng tồn tại một số nguyên dương n sao cho với mọi phần tử $\mathfrak{a}$ -lọc chính quy x của chứa trong $\mathfrak{a}^n$ ta có $H_{\mathfrak{a}}^i(M/xM) \cong H_{\mathfrak{a}}^i(M) \oplus H_{\mathfrak{a}}^{i+1}(M)$ với mọi $i < t - 1$?

Bây giờ chúng tôi xin được đi vào những kết quả chính của luận án. Luận án được chia làm bốn chương. Trong Chương 1 của luận án chúng tôi đưa ra câu trả lời đầy đủ cho các câu hỏi trên. Cụ thể chúng tôi chứng minh được kết quả sau.

Định lí 1.4.4. *Cho M là một môđun hữu hạn sinh trên vành Noether R và $\mathfrak{a}$ là một ideal của R . Xét t và n_0 là các số nguyên dương sao cho $\mathfrak{a}^{n_0} H_{\mathfrak{a}}^i(M) = 0$ với mọi $i < t$. Khi đó, với mọi phần tử $\mathfrak{a}$ -lọc chính quy $x \in \mathfrak{a}^{2n_0}$ của M , ta có*

$$H_{\mathfrak{a}}^i(M/xM) \cong H_{\mathfrak{a}}^i(M) \oplus H_{\mathfrak{a}}^{i+1}(M),$$

với mọi $i < t - 1$, và

$$0 :_{H_{\mathfrak{a}}^{t-1}(M/xM)} \mathfrak{a}^{n_0} \cong H_{\mathfrak{a}}^{t-1}(M) \oplus 0 :_{H_{\mathfrak{a}}^t(M)} \mathfrak{a}^{n_0}.$$

Như vậy Định lí 1.4.4 đã đưa ra câu trả lời khẳng định cho cả hai câu hỏi nêu trên. Một trong những áp dụng đáng chú ý của Định lí 1.4.4 mà chúng tôi thu được là chứng minh tính chất ổn định của chỉ số khả quy của ideal tham số của môđun Cohen-Macaulay suy rộng. Nhắc lại rằng chỉ số khả quy của một môđun con N của M là số môđun con bất khả quy trong một biểu diễn bất khả quy rút gọn của N . Xét $\mathfrak{q}$ là một ideal tham số của M ta định nghĩa *chỉ số khả quy của $\mathfrak{q}$ trên M* là chỉ số khả quy của môđun con $\mathfrak{q}M$ của M và được tính bằng công thức $N_R(\mathfrak{q}, M) = \dim_{R/\mathfrak{m}} \text{Soc}(M/\mathfrak{q}M)$, ở đây $\text{Soc}(N) \cong 0 :_N \mathfrak{m} \cong \text{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, N)$ với một R -môđun bất kì N . Một kết quả quen biết khẳng định rằng nếu M là môđun Cohen-Macaulay,

thì $N_R(\mathfrak{q}, M)$ là một hằng số của M . Trong trường hợp M là một môđun Buchsbaum, S. Goto và H. Sakurai đã chứng minh trong [22] rằng với tồn tại một số n đủ lớn sao cho chỉ số khả quy $N_R(\mathfrak{q}, M)$ là một hằng số tức là không phụ thuộc vào việc chọn idêan tham số $\mathfrak{q}$ nằm trong $\mathfrak{m}^n$. Và họ phỏng đoán rằng kết quả trên cũng đúng cho môđun Cohen-Macaulay suy rộng. N.T. Cường và H.L. Trường đã đưa ra câu trả lời khẳng định cho câu hỏi của Goto và Sakurai trong [17]. Sử dụng tính chất "đẹp" của tính chẻ ra là nếu $B \cong A \oplus C$ thì $\text{Hom}_R(D, B) \cong \text{Hom}_R(D, A) \oplus \text{Hom}_R(D, C)$ với mọi môđun A, B, C, D , ta được hệ quả sau của Định lí chẻ ra 1.4.4.

Hệ quả 1.4.7. *Cho M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng chiều $d > 0$ trên vành Noether địa phương $(R, \mathfrak{m})$, và n_0 là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $\mathfrak{m}^{n_0} H_{\mathfrak{m}}^i(M) = 0$ với mọi $i < d$. Khi đó, với mọi idêan tham số $\mathfrak{q}$ của M chứa trong $\mathfrak{m}^{2n_0}$ và $k \leq n_0$, độ dài $\ell_R((\mathfrak{q}M :_M \mathfrak{m}^k)/\mathfrak{q}M)$ là một hằng số và*

$$\ell_R((\mathfrak{q}M :_M \mathfrak{m}^k)/\mathfrak{q}M) = \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} \ell_R(0 :_{H_{\mathfrak{m}}^i(M)} \mathfrak{m}^k).$$

Nói riêng, chỉ số khả quy $N_R(\mathfrak{q}, M)$ là một hằng số và

$$N_R(\mathfrak{q}, M) = \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} \dim_{R/\mathfrak{m}} \text{Soc}(H_{\mathfrak{m}}^i(M)).$$

Bây giờ chúng tôi sẽ trình bày phương pháp chứng minh các định lí chẻ ra của đối đồng điều địa phương của chúng tôi. Xét M là một môđun hữu hạn sinh trên vành Noether R và $\mathfrak{a}$ là một idêan của R . Xét t và n_0 là các số nguyên dương sao cho $\mathfrak{a}^{n_0} H_{\mathfrak{a}}^i(M) = 0$ với mọi $i < t$. Khi đó với mọi phần tử $\mathfrak{a}$ -lọc chính quy $x \in \mathfrak{a}^{n_0}$ dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow M/H_{\mathfrak{a}}^0(M) \xrightarrow{x} M \rightarrow M/xM \rightarrow 0$$

cảm sinh các dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^i(M) \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^i(M/xM) \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^{i+1}(M) \rightarrow 0$$

với mọi $i < t - 1$. Phương pháp chứng minh của chúng tôi là xem dãy khớp ngắn trên như là một mở rộng của $H_a^{i+1}(M)$ bởi $H_a^i(M)$ và là đại diện cho một phần tử của môđun mở rộng $\text{Ext}(H_a^{i+1}(M), H_a^i(M))$ (xem [35, Chapter 3]). Khi đó việc chứng minh một dãy khớp ngắn là chẻ ra sẽ chuyển thành chứng minh nó đại diện cho phần tử không của môđun mở rộng.

Để thuận tiện cho việc áp dụng vào nhiều hoàn cảnh khác nhau chúng tôi trình bày cách tiếp cận trong trường hợp tổng quát. Xét t một số nguyên dương và U là một môđun con của M . Đặt $\overline{M} = M/U$. Ta nói một phần tử x là thỏa mãn *điều kiện* $(\sharp)$ nếu $0 :_M x = U$, và dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow \overline{M} \xrightarrow{x} M \rightarrow M/xM \rightarrow 0$$

cảm sinh các dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow H_a^i(M) \rightarrow H_a^i(M/xM) \rightarrow H_a^{i+1}(\overline{M}) \rightarrow 0$$

với mọi $i < t - 1$. Nếu x là một phần tử thỏa mãn điều kiện $(\sharp)$ thì ta kí hiệu E_x^i là phần tử trong $\text{Ext}(H_a^{i+1}(\overline{M}), H_a^i(M))$ đại diện bởi dãy khớp ngắn trên. Hơn nữa nếu $H_a^t(\overline{M}) \cong H_a^t(M)$, ta có dãy khớp ngắn sau

$$0 \rightarrow H_a^{t-1}(M) \rightarrow H_a^{t-1}(M/xM) \rightarrow 0 :_{H_a^t(\overline{M})} x \rightarrow 0.$$

Xét $\mathfrak{b}$ là một idêan sao cho $x \in \mathfrak{b}$. Ta gọi F_x^{t-1} là phần tử trong môđun $\text{Ext}(0 :_{H_a^t(\overline{M})} \mathfrak{b}, 0 :_{H_a^{t-1}(M)} \mathfrak{b})$ đại diện bởi dãy khớp ngắn dưới đây nếu nó tồn tại

$$0 \rightarrow 0 :_{H_a^{t-1}(M)} \mathfrak{b} \rightarrow 0 :_{H_a^{t-1}(M/xM)} \mathfrak{b} \rightarrow 0 :_{H_a^t(\overline{M})} \mathfrak{b} \rightarrow 0.$$

Với những kí hiệu nêu trên chúng tôi đã chỉ sự liên hệ mật thiết giữa tổng và tích của các phần tử thỏa mãn điều kiện $(\sharp)$ và các mở rộng tương ứng như hai định lí sau.

Định lí 1.3.3. *Cho t là một số nguyên dương và U là một môđun con của M . Đặt $\overline{M} = M/U$. Giả sử x và y là các phần tử thỏa mãn điều kiện $(\sharp)$ và $0 :_M (x + y) = U$, khi đó*

- (i) $x + y$ cũng thỏa mãn điều kiện $(\sharp)$ và $E_{x+y}^i = E_x^i + E_y^i$ với mọi $i < t - 1$.
- (ii) Nếu $H_a^t(\overline{M}) \cong H_a^t(M)$ và F_x^{t-1}, F_y^{t-1} là xác định, thì F_{x+y}^{t-1} cũng xác định và $F_{x+y}^{t-1} = F_x^{t-1} + F_y^{t-1}$.

Định lí 1.3.4. Cho t là một số nguyên dương và U là một môđun con của M . Đặt $\overline{M} = M/U$. Giả sử x và y là các phần tử của R sao cho x thỏa mãn điều kiện $(\sharp)$ và $0 :_M xy = U$. Các khẳng định dưới đây là đúng

- (i) xy thỏa mãn điều kiện $(\sharp)$, và $E_{xy}^i = yE_x^i$ với mọi $i < t - 1$. Giả sử thêm rằng $H_a^t(\overline{M}) \cong H_a^t(M)$. Khi đó nếu F_x^{t-1} là xác định, thì F_{xy}^{t-1} cũng là xác định và $F_{xy}^{t-1} = yF_x^{t-1}$.
- (ii) Giả sử $H_a^t(\overline{M}) \cong H_a^t(M)$ và $yH_a^i(M) = 0$ với mọi $i < t$. Khi đó $E_{xy}^i = 0$ với mọi $i < t - 1$. Hơn nữa, F_{xy}^{t-1} là xác định và $F_{xy}^{t-1} = 0$.

Các Định lí 1.3.3 và 1.3.4 đóng vai trò quyết định trong chứng minh các Định lí chẻ ra của đối đồng điều địa phương của chúng tôi. Định lí 1.3.4 cho ta tính chẻ ra của đối đồng điều địa phương cho những phần tử dạng đặc biệt xy . Để chứng minh tính chẻ ra cho những phần tử tổng quát chúng tôi dùng Định lí 1.3.3 để chuyển về dạng đặc biệt này cùng với bổ đề kĩ thuật sau, nó có thể hiểu là Định lí tránh nguyên tố cho tích các idêan.

Bổ đề 1.4.1. Cho $(R, \mathfrak{m})$ là một vành Noether địa phương, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ là các idêan và $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ là các idêan nguyên tố sao cho $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \not\subseteq \mathfrak{p}_j$ với mọi $j \leq n$. Xét x là một phần tử nằm trong $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ nhưng $x \notin \mathfrak{p}_j$ với mọi $j \leq n$. Khi đó tồn tại các phần tử $a_1, \dots, a_r \in \mathfrak{a}$ và $b_1, \dots, b_r \in \mathfrak{b}$ để ta có thể biểu diễn $x = a_1b_1 + \dots + a_rb_r$ sao cho $a_ib_i \notin \mathfrak{p}_j$ và $a_1b_1 + \dots + a_ib_i \notin \mathfrak{p}_j$ với mọi $i \leq r, j \leq n$.

Trong Chương 2 chúng tôi chứng minh tính chẻ ra của môđun đối đồng điều địa phương $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ của môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy và áp

dụng vào việc chứng minh một số tính chất ổn định của *hệ tham số tốt* của lớp môđun này. Nhắc lại rằng lớp môđun *Cohen-Macaulay* dãy được giới thiệu bởi R.P. Stanley cho trường hợp vành phân bậc (xem [50]), trường hợp vành địa phương bởi Schenzel trong [46] và bởi N.T. Cường và L.T. Nhân trong [15]. Xét $(R, \mathfrak{m})$ là một vành địa phương, ta nói môđun M là *môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy* nếu tồn tại một lọc các môđun con của M

$$\mathcal{F} : M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_t = M$$

sao cho $\ell(M_0) < \infty, \dim M_0 < \dim M_1 < \cdots < \dim M_t = d$ và mỗi môđun M_i/M_{i-1} là Cohen-Macaulay suy rộng với $i = 1, 2, \dots, t$. Các lọc như vậy được gọi là *lọc Cohen-Macaulay suy rộng của M* . Như vậy một môđun Cohen-Macaulay suy rộng là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy. Để mở rộng những nghiên cứu của môđun Cohen-Macaulay (suy rộng) sang môđun Cohen-Macaulay (suy rộng) dãy, N.T. Cường và Đ.T. Cường đưa ra khái niệm hệ tham số tốt đối với lọc $\mathcal{F}$ (xem [12]). Một hệ tham số $\underline{x} = x_1, \dots, x_d$ của M được gọi là một *hệ tham số tốt của M tương ứng với lọc $\mathcal{F}$* nếu $M_i \cap (x_{d_i+1}, \dots, x_d)M = 0$ với mọi $i = 0, 1, \dots, t-1, d_i = \dim M_i$. N.T. Cường và Đ.T. Cường chứng minh trong [13] rằng nếu M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy với lọc Cohen-Macaulay suy rộng $\mathcal{F}$ và $\underline{x} = x_1, \dots, x_d$ là một hệ tham số tốt của M tương ứng với lọc $\mathcal{F}$, thì hiệu $I_{\mathcal{F}, M}(\underline{x}) = \ell(M/(\underline{x})M) - \sum_{i=0}^t e(x_1, \dots, x_{d_i}; M_i)$ bị chặn trên bởi một hằng số. Hơn nữa, đặt $I_{\mathcal{F}}(M) = \sup_{\underline{x}} I_{\mathcal{F}, M}(\underline{x})$, với $\underline{x} = x_1, \dots, x_d$ chạy trên tất cả các hệ tham số tốt của M tương ứng với $\mathcal{F}$ thì

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{F}}(M) &= \ell(H_{\mathfrak{m}}^0(M/M_0)) \\ &+ \sum_{i=0}^{t-1} \sum_{j=1}^{d_{i+1}-1} \left(\binom{d_{i+1}-1}{j} - \binom{d_i-1}{j} \right) \ell(H_{\mathfrak{m}}^j(M/M_i)). \end{aligned}$$

Nhắc lại rằng ta gọi môđun con lớn nhất của M có chiều nhỏ hơn d là *thành phần không trộn lẫn của M* và kí hiệu là $U_M(0)$. Đặt $\mathfrak{c}_{t-1} = \text{Ann} M_{t-1}$ và

n_0 là số nguyên dương sao cho $\mathfrak{m}^{n_0} H_{\mathfrak{m}}^j(M/M_i) = 0$ với mọi $i \leq t-1$ và với mọi $j \leq d_{i+1} - 1$. Trong Chương 2 chúng tôi chứng minh được các kết quả chẻ ra sau.

$$H_{\mathfrak{m}}^j(M/(xM + M_i)) \cong H_{\mathfrak{m}}^j(M/M_i) \oplus H_{\mathfrak{m}}^{j+1}(M/U_M(0))$$

với mọi $i \leq t-1$ và mọi $j < d-1$, nếu x là một phần tử tham số của M nằm trong $\mathfrak{m}^{3n_0} \mathfrak{c}_{t-1}$ (xem Mệnh đề 2.2.3 (ii)), và

$$0 :_{H_{\mathfrak{m}}^{d-1}(M/(M_i+xM))} \mathfrak{m} \cong (0 :_{H_{\mathfrak{m}}^{d-1}(M/M_i)} \mathfrak{m}) \oplus (0 :_{H_{\mathfrak{m}}^d(M)} \mathfrak{m})$$

với mọi $i \leq t-1$, nếu x là một phần tử tham số của M nằm trong $\mathfrak{m}^{2n_0+1} \mathfrak{c}_{t-1}$ (xem Mệnh đề 2.2.6 (ii)). Áp dụng các đẳng cấu trên chúng tôi thu được các kết quả chính của Chương 2 là hai định lí sau.

Định lí 2.2.5 (ii). *Cho M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy với lọc Cohen-Macaulay suy rộng $\mathcal{F} : M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots \subseteq M_t = M$. Khi đó với mọi hệ tham số tốt $\underline{x} = x_1, \dots, x_d$ của M tương ứng với lọc $\mathcal{F}$ nằm trong $\mathfrak{m}^n, n \gg 0$, ta có $I_{\mathcal{F}, M}(\underline{x})$ là một hằng số và*

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{F}, M}(\underline{x}) &= \ell(H_{\mathfrak{m}}^0(M/M_0)) \\ &+ \sum_{i=0}^{t-1} \sum_{j=1}^{d_{i+1}-1} \left(\binom{d_{i+1}-1}{j} - \binom{d_i-1}{j} \right) \ell(H_{\mathfrak{m}}^j(M/M_i)). \end{aligned}$$

Định lí 2.2.8 (ii). *Cho M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy với lọc Cohen-Macaulay suy rộng $\mathcal{F} : M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots \subseteq M_t = M$. Khi đó với mọi hệ tham số tốt $\underline{x} = x_1, \dots, x_d$ của M tương ứng với lọc $\mathcal{F}$ nằm trong $\mathfrak{m}^n, n \gg 0$, ta có chỉ số khả quy của $(\underline{x})$ trên M là một hằng số và*

$$\begin{aligned} N_R((\underline{x}), M) &= \dim_{R/\mathfrak{m}} \text{Soc}(H_{\mathfrak{m}}^0(M)) \\ &+ \sum_{i=0}^{t-1} \sum_{j=1}^{d_{i+1}} \left(\binom{d_{i+1}}{j} - \binom{d_i}{j} \right) \dim_{R/\mathfrak{m}} \text{Soc}(H_{\mathfrak{m}}^j(M/M_i)). \end{aligned}$$

Trong Chương 3 chúng tôi phát triển tính chẻ ra của đối đồng điều địa

phương trong vành địa phương $(R, \mathfrak{m})$. Để làm được điều đó chúng tôi quan tâm đến các phần tử tham số nằm trong linh hoá tử của các môđun đối đồng điều địa phương. Với mỗi $i < d$ xét $\mathfrak{a}_i(M) = \text{Ann}H_{\mathfrak{m}}^i(M)$, và đặt $\mathfrak{a}(M) = \prod_{i=0}^{d-1} \mathfrak{a}_i(M)$. Ngoài ra chúng tôi quan tâm đến idêan

$$\mathfrak{b}(M) = \cap_{\underline{x}; i=1}^d \text{Ann}(0 : x_i)_{M/(x_1, \dots, x_{i-1})M},$$

với $\underline{x} = x_1, \dots, x_d$ chạy trong tất cả các hệ tham số của M . Schenzel đã chỉ ra mối liên hệ của các idêan trên thể hiện qua các bao hàm thức sau $\mathfrak{a}(M) \subseteq \mathfrak{b}(M) \subseteq \mathfrak{a}_0(M) \cap \dots \cap \mathfrak{a}_{d-1}(M)$ (xem [59, Satz 2.4.5]). Trong toàn bộ Chương 3 chúng tôi luôn xét $(R, \mathfrak{m})$ là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay. Ý nghĩa quan trọng của giả thiết này nằm ở chỗ ta sẽ luôn chọn được một phần tử tham số của M chứa trong $\mathfrak{a}(M)$ (và trong $\mathfrak{b}(M)$). Với những phần tử tham số như thế ta có $0 :_M x = U_M(0)$. Xét I là một idêan của R , đặt $t = d - \dim R/I$. Khi đó với mọi phần tử tham số $x \in \mathfrak{b}(M)^3$, Định lí chẻ ra của đối đồng điều địa phương của Chương 3 như sau.

Định lí 3.2.4 (ii). *Cho I là một idêan của R và $x \in \mathfrak{b}(M)^3$ là một phần tử tham số của M . Đặt $\overline{M} = M/U_M(0)$ và $t = d - \dim R/I$. Khi đó*

$$H_I^i(M/xM) \cong H_I^i(M) \oplus H_I^{i+1}(M/U_M(0))$$

với mọi $i < t - 1$. Hơn nữa, nếu $H_I^t(M) \cong H_I^t(\overline{M})$ thì

$$0 :_{H_I^{t-1}(M/xM)} \mathfrak{b}(M) \cong H_I^{t-1}(M) \oplus (0 :_{H_I^t(M)} \mathfrak{b}(M)).$$

Có lẽ áp dụng quan trọng nhất của Định lí chẻ ra 3.2.4 mà chúng tôi thu được là kết quả dưới đây, nó cho ta một cách nhìn mới về cấu trúc của môđun trong vành địa phương.

Định lí 3.2.9. *Cho $\underline{x} = x_1, \dots, x_d$ là một hệ tham số của M thỏa mãn $x_i \in \mathfrak{b}(M/(x_{i+1}, \dots, x_d)M)^3$ với mọi $i \leq d$. Với mọi $1 \leq i \leq d$, các môđun $U_{M/(x_{i+1}, \dots, x_d)M}(0)$ là không phụ thuộc vào việc chọn hệ tham số $\underline{x}$ (sai khác*

một đẳng cấu).

Với mỗi $0 \leq i \leq d-1$ ta kí hiệu $U_i(M)$ là một môđun sao cho với mọi hệ tham số $\underline{x} = x_1, \dots, x_d$ của M thỏa mãn $x_i \in \mathfrak{b}(M/(x_{i+1}, \dots, x_d)M)^3$ với mọi $i \leq d$ ta có $U_i(M) \cong U_{M/(x_{i+2}, \dots, x_d)M}(0)$ với mọi $0 \leq i \leq d-1$. Từ dãy môđun $U_i(M)$ chúng tôi xây dựng khái niệm *bậc không trộn lẫn của M tương ứng với một ideal $\mathfrak{m}$ -nguyên sơ I* , $\text{udeg}(I, M)$. Bậc của môđun M tương ứng với I , $\text{deg}(I, M)$, chính là số bội Hilbert-Samuel của M tương ứng với I . Chúng tôi định nghĩa

$$\text{udeg}(I, M) = \text{deg}(I, M) + \sum_{i=0}^{d-1} \widetilde{\text{deg}}(I, U_i(M)),$$

với $\widetilde{\text{deg}}(I, U_i(M)) = \text{deg}(I, U_i(M))$ nếu $\dim U_i(M) = i$, và bằng 0 nếu trái lại. Chúng tôi cũng chứng minh được rằng $\text{udeg}(I, \bullet)$ là một *bậc mở rộng* trên phạm trù các R -môđun hữu hạn sinh theo nghĩa của W. Vasconcelos.

Định lí. *Ta có các khẳng định dưới đây*

- (i) $\text{udeg}(I, M) = \text{udeg}(I, M/H_{\mathfrak{m}}^0(M)) + \ell(H_{\mathfrak{m}}^0(M))$ (xem Mệnh đề 3.3.9).
- (ii) $\text{udeg}(I, M) \geq \text{udeg}(I, M/xM)$ với $x \in I \setminus \mathfrak{m}I$ là một phần tử tổng quát của M (xem Định lí 3.3.17).
- (iii) $\text{udeg}(I, M) = \text{deg}(I, M)$ nếu M là một môđun Cohen-Macaulay (xem Định lí 3.3.8).

Trong Chương 4 của luận án chúng tôi muốn chỉ ra khả năng áp dụng tính chẻ ra của đối đồng điều địa phương vào vấn đề về tính hữu hạn của tập ideal nguyên tố liên kết của môđun đối đồng điều địa phương. Bởi tính độc lập của nó nên Chương 4 có thể hiểu là một phần phụ lục của luận án. Với $\mathfrak{a}$ là một ideal của vành R , vấn đề này bắt đầu từ một câu hỏi của C. Huneke trong [26, Problem 3.3] rằng: Phải chăng $\text{Ass}H_{\mathfrak{a}}^i(M)$ luôn là một tập hữu hạn khi

M là một môđun hữu hạn sinh với mọi $i \geq 0$? Câu hỏi của Huneke được đặc biệt quan tâm khi R là vành chính quy (xem [27], [34], [49]). Trong trường hợp tổng quát câu hỏi của Huneke không còn đúng do các ví dụ của A. Singh trong [48] và M. Katzman trong [29]. Tuy nhiên câu hỏi này vẫn đúng với những điều kiện nhất định chẳng hạn, $\text{Ass}H_{\mathfrak{a}}^t(M)$ là một tập hữu hạn nếu $H_{\mathfrak{a}}^i(M)$ là hữu hạn sinh với mọi $i < t$ hoặc $\text{supp}(H_{\mathfrak{a}}^i(M))$ là một tập hữu hạn với mọi $i < t$ (xem [5], [30]). Kết quả chính thứ nhất của chương này là chúng tôi đã tổng hợp hai trường hợp nói trên như sau.

Định lí 4.1.8. *Cho $\mathfrak{a}$ là một ideal của R , và M là một R -môđun hữu hạn sinh. Xét t là một số nguyên không âm sao cho $H_{\mathfrak{a}}^i(M)$ là hữu hạn sinh hoặc $\text{supp}(H_{\mathfrak{a}}^i(M))$ là một tập hữu hạn với mọi $i < t$. Khi đó $\text{Ass}_R(H_{\mathfrak{a}}^t(M))$ là một tập hữu hạn.*

Tiếp theo chúng tôi quan tâm đến tính hữu hạn của môđun đối đồng điều địa phương đầu tiên không hữu hạn sinh. Với M là một R -môđun hữu hạn sinh ta định nghĩa *chiều hữu hạn của M tương ứng với $\mathfrak{a}$* như sau

$$f_{\mathfrak{a}}(M) = \inf\{i \in \mathbb{N}_0 \mid H_{\mathfrak{a}}^i(M) \text{ không là hữu hạn sinh}\}.$$

Rõ ràng Định lí 1.4.4 là hữu ích trong việc nghiên cứu môđun đối đồng điều địa phương tại chiều hữu hạn. Cụ thể từ Định lí 1.4.4 ta dễ dàng lấy lại được kết quả của M. Brodmann và A.L. Faghani cho tính hữu hạn của $\text{Ass}_R(H_{\mathfrak{a}}^{f_{\mathfrak{a}}(M)}(M))$ (xem Mệnh đề 4.2.2). Từ đó chúng tôi chứng minh tính hữu hạn của một tập ideal nguyên tố liên kết lớn hơn tập $\text{Ass}_R(H_{\mathfrak{a}}^{f_{\mathfrak{a}}(M)}(M))$ như sau.

Định lí 4.2.9. *Cho $\mathfrak{a}$ là một ideal của R và M là một R -môđun hữu hạn sinh. Đặt $t = f_{\mathfrak{a}}(M)$. Xét $a_1, \dots, a_t$ là một dãy phân tử trong $\mathfrak{a}$ thỏa mãn*

$\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{(a_1, \dots, a_t)}$. Khi đó

$$\bigcup_{n_1, \dots, n_t \in \mathbb{N}} \text{Ass } M/(a_1^{n_1}, \dots, a_t^{n_t})M$$

là một tập hợp hữu hạn.

Các kết quả thuộc các Chương 1, 2, và 4 được viết thành bốn bài báo đã được đăng và nhận đăng tại các tạp chí uy tín. Các kết quả trong Chương 3 sẽ được tác giả tiếp tục phát triển trong tương lai.

Chương 1

Tính chẻ ra của đối đồng điều địa phương

Trong toàn bộ luận án, ta luôn xét R là vành Noether giao hoán có đơn vị. Mục tiêu của chương này là xây dựng phương pháp chứng minh và đưa ra một định lí chẻ ra của dãy khớp ngắn các môđun đối đồng điều địa phương cùng với một số áp dụng trực tiếp của nó (xem Tiết 1.3). Kỹ thuật dùng để chứng minh là xem mỗi dãy khớp ngắn như đại diện của một phần tử của môđun mở rộng $\text{Ext}_R^1(\bullet, \bullet)$. Khi đó một dãy khớp ngắn là chẻ ra nếu nó đại diện cho phần tử 0 của $\text{Ext}_R^1(\bullet, \bullet)$. Định lí chẻ ra của đối đồng điều địa phương, Định lí 1.4.4, được chứng minh trong Tiết 1.4. Ngoài ra chúng tôi cũng áp dụng Định lí 1.4.4 để đưa ra một chứng minh ngắn gọn cho kết quả về tính ổn định tiệm cận của chỉ số thu gọn của idêan tham số của môđun Cohen-Macaulay suy rộng của N.T. Cường và H.L. Trường (xem Hệ quả 1.4.7). Trong hai tiết đầu chúng tôi trình bày về một số kết quả cơ sở về môđun đối đồng điều địa phương, và phép toán trong môđun mở rộng $\text{Ext}_R^1(\bullet, \bullet)$.

1.1 Môđun đối đồng điều địa phương

Lí thuyết đối đồng điều địa phương được xây dựng bởi A. Grothendieck vào những năm 1960 (Xem [24]). Bởi tính linh hoạt trong sử dụng, đối đồng điều

địa phương đã nhanh chóng trở thành một công cụ quan trọng trong nghiên cứu Đại số Giao hoán. Trong tiết này chúng ta nhắc lại định nghĩa mối liên hệ của đối đồng điều địa phương với các hàm tử $\text{Ext}_R^i(\bullet, \bullet)$ và đối đồng điều Koszul. Một số tính chất triệt tiêu, không triệt tiêu của môđun đối đồng điều địa phương cũng được đưa ra. Các chứng minh chi tiết có thể xem trong [4].

1.1.1 Môđun đối đồng điều địa phương

Cho R là một vành Noether giao hoán với một idêan $\mathfrak{a}$. Hàm tử đối đồng điều địa phương $H_{\mathfrak{a}}^i(\bullet)$ chính là hàm tử dẫn xuất phải thứ i của hàm tử xoắn $\Gamma_{\mathfrak{a}}(\bullet)$.

Định nghĩa 1.1.1. Cho M là một R -môđun. Khi đó môđun con $\mathfrak{a}$ -xoắn của M được định nghĩa như sau

$$\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = 0 :_M \mathfrak{a}^{\infty} = \bigcup_{n \geq 1} (0 :_M \mathfrak{a}^n).$$

Từ định nghĩa trên ta chú ý rằng hàm tử xoắn không phụ thuộc vào phép toán lấy căn của idêan tức là $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = \Gamma_{\mathfrak{b}}(M)$ với mọi M nếu $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{b}}$.

Mệnh đề 1.1.2. Hàm tử $\Gamma_{\mathfrak{a}}(\bullet)$ có tính khớp trái tức là dãy khớp ngắn các R -môđun

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

cảm sinh dãy khớp trái sau

$$0 \rightarrow \Gamma_{\mathfrak{a}}(M') \rightarrow \Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \rightarrow \Gamma_{\mathfrak{a}}(M'').$$

Định nghĩa 1.1.3. Hàm tử đối đồng điều địa phương $H_{\mathfrak{a}}^i(\bullet)$ được định nghĩa là hàm tử dẫn xuất phải thứ i của hàm tử xoắn $\Gamma_{\mathfrak{a}}(\bullet)$. Cụ thể, với mỗi R -môđun M bất kì ta xét giải nội xạ của M

$$I^{\bullet} : 0 \xrightarrow{d^{-1}} I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \xrightarrow{d^1} \dots \xrightarrow{d^{i-1}} I^i \xrightarrow{d^i} I^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} \dots .$$

Tác động hàm tử $\Gamma_{\mathfrak{a}}(\bullet)$ vào đối phức $I^\bullet$ ta thu được đối phức

$$0 \xrightarrow{\Gamma_{\mathfrak{a}}(d^{-1})} \Gamma_{\mathfrak{a}}(I^0) \xrightarrow{\Gamma_{\mathfrak{a}}(d^0)} \Gamma_{\mathfrak{a}}(I^1) \xrightarrow{\Gamma_{\mathfrak{a}}(d^1)} \dots \xrightarrow{\Gamma_{\mathfrak{a}}(d^{i-1})} \Gamma_{\mathfrak{a}}(I^i) \xrightarrow{\Gamma_{\mathfrak{a}}(d^i)} \Gamma_{\mathfrak{a}}(I^{i+1}) \xrightarrow{\Gamma_{\mathfrak{a}}(d^{i+1})} \dots$$

Với mỗi $i \in \mathbb{N}_0$, môđun đối đồng điều thứ i của M với giá $\mathfrak{a}$ được định nghĩa như sau

$$H_{\mathfrak{a}}^i(M) := \text{Ker}(\Gamma_{\mathfrak{a}}(d^i)) / \text{Im}(\Gamma_{\mathfrak{a}}(d^{i-1})).$$

Mệnh đề 1.1.4. (Xem [4, 1.2.2]) Xét dãy khớp ngắn các R -môđun

$$0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0.$$

Khi đó với mọi idêan $\mathfrak{a}$ của R ta có dãy khớp dài các môđun đối đồng điều địa phương.

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow H_{\mathfrak{a}}^0(L) \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^0(M) \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^0(N) \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^1(L) \rightarrow \dots \\ &\rightarrow H_{\mathfrak{a}}^i(L) \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^i(M) \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^i(N) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Ta dễ dàng kiểm tra được rằng $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, M) \cong 0 :_M \mathfrak{a}$. Do đó định nghĩa của hàm tử xoắn dẫn đến $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \cong \lim_{\rightarrow} \text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}^n, M)$. Tổng quát, mối liên hệ giữa hàm tử đối đồng điều địa phương và hàm tử mở rộng được thể hiện như kết quả sau.

Định lí 1.1.5. (Xem [4, 1.3.8]) Cho $\mathfrak{a}$ là một idêan của vành Noether R , và M là một R -môđun. Khi đó với mọi $i \in \mathbb{N}_0$, tồn tại duy nhất đẳng cấu tự nhiên

$$\Phi_{\mathfrak{a}}^i : H_{\mathfrak{a}}^i(M) \cong \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \text{Ext}_R^i(R/\mathfrak{a}^n, M).$$

Môđun đối đồng điều địa phương còn có thể được tính toán theo đối phức Čech hoặc phức Koszul dựa trên các phần tử sinh của idêan $\mathfrak{a}$ (xem [4, Chapter 5]). Định lí dưới đây mô tả cách tiếp cận đối đồng điều địa phương như là giới hạn của đối đồng điều Koszul mà ta sẽ sử dụng về sau.

Định lí 1.1.6. (Xem [4, 5.2.9]) Cho $\mathfrak{a}$ là một ideal của vành Noether R với một hệ sinh $a_1, \dots, a_t$. Khi đó với mỗi $i \in \mathbb{N}_0$ ta có các đẳng cấu tự nhiên

$$\Psi^i : H_{\mathfrak{a}}^i(M) \cong \varinjlim_{n_1, \dots, n_t \in \mathbb{N}} H^i(K(a_1^{n_1}, \dots, a_t^{n_t}; M)),$$

ở đó $K(a_1^{n_1}, \dots, a_t^{n_t}; M)$ là đối phức Koszul của M theo dãy $a_1^{n_1}, \dots, a_t^{n_t}$. Đặc biệt ta có đẳng cấu

$$\Psi^t : H_{\mathfrak{a}}^t(M) \cong \varinjlim_{n_1, \dots, n_t \in \mathbb{N}} M/(a_1^{n_1}, \dots, a_t^{n_t})M.$$

1.1.2 Tính triệt tiêu và không triệt tiêu của đối đồng điều địa phương

Trong mục này chúng ta nêu ra một số định lí cơ bản về tính triệt tiêu và không triệt tiêu của đối đồng điều địa phương được chứng minh bởi Grothendieck.

Mệnh đề 1.1.7. (Xem [4, 2.1.7]) Cho M là một R -môđun $\mathfrak{a}$ -xoắn. Khi đó $H_{\mathfrak{a}}^i(M) = 0$ với mọi $i \geq 1$.

Mệnh đề trên cùng với Mệnh đề 1.1.4 dẫn đến $H_{\mathfrak{a}}^i(M) \cong H_{\mathfrak{a}}^i(M/\Gamma_{\mathfrak{a}}(M))$ với mọi $i \geq 1$. Do đó, khi nghiên cứu các môđun đối đồng điều địa phương tại bậc dương ta luôn có thể giả sử M là $\mathfrak{a}$ -xoắn tự do.

Kết quả triệt tiêu dưới đây là hệ quả của Định lí 1.1.6, một cách chứng minh trực tiếp khác dựa trên dãy Mayer-Vietoris có thể xem tại [4, 3.3.1].

Định lí 1.1.8. Giả sử rằng ideal $\mathfrak{a}$ có thể sinh bởi t phần tử. Khi đó, với mọi R -môđun M , ta có $H_{\mathfrak{a}}^i(M) = 0$ với mọi $i > t$.

Tính triệt tiêu và không triệt tiêu của $H_{\mathfrak{a}}^i(M)$ còn liên hệ mật thiết với độ sâu của ideal $\mathfrak{a}$ theo M và chiều của M . Nhắc lại rằng, cho M là một R -môđun hữu hạn sinh và $\mathfrak{a}M \neq M$ khi đó độ sâu của $\mathfrak{a}$ theo M , $\text{grade}_M \mathfrak{a}$, là độ dài của một (mọi) M -dãy chính quy tối đại trong $\mathfrak{a}$. Khi vành R là địa

phương với ideal tối đại $\mathfrak{m}$, thì $\text{grade}_M \mathfrak{m}$ thường được kí hiệu là $\text{depth} M$ và gọi là *độ sâu* của M .

Định lí 1.1.9. (Xem [4, 6.2.7]) Cho M là một R -môđun hữu hạn sinh sao cho $\mathfrak{a}M \neq M$. Khi đó $\text{grade}_M \mathfrak{a}$ là số nguyên i bé nhất sao cho $H_{\mathfrak{a}}^i(M) \neq 0$.

Định lí 1.1.10 (Grothendieck). (Xem [4, 6.1.2, 6.1.4])

- (i) Cho M là một R -môđun. Khi đó $H_{\mathfrak{a}}^i(M) = 0$ với mọi $i > \dim M$.
- (ii) Giả sử rằng $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương, và M là một R môđun hữu hạn sinh khác không chiều d . Khi đó $H_{\mathfrak{m}}^d(M) \neq 0$.

1.1.3 Đối đồng điều địa phương và tính Cohen-Macaulay của môđun

Trong mục này nếu không nói rõ ta luôn xét $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương, và M là một R môđun hữu hạn sinh khác không chiều d . Nhắc lại rằng M là một R -môđun Cohen-Macaulay nếu $\text{depth} M = \dim M$. Theo các Định lí 1.1.9 và 1.1.10 ta có đặc trưng đối đồng điều địa phương cho tính Cohen-Macaulay như sau.

Định lí 1.1.11. Một R -môđun M là Cohen-Macaulay khi và chỉ khi $H_{\mathfrak{m}}^i(M) = 0$ với mọi $i \neq d$.

Lấy $\mathfrak{q}$ là một ideal tham số của M . Khi đó một kết quả quen biết khẳng định rằng, số bội Hilbert-Samuel $e(\mathfrak{q}; M)$ không vượt quá độ dài $\ell(M/\mathfrak{q}M)$. Hơn nữa, M là Cohen-Macaulay nếu và chỉ nếu $e(\mathfrak{q}; M) = \ell(M/\mathfrak{q}M)$ với một (mọi) ideal tham số $\mathfrak{q}$ của M . Khi một R -môđun là không Cohen-Macaulay thì $\ell(M/\mathfrak{q}M) - e(\mathfrak{q}; M) > 0$ với mọi ideal tham số $\mathfrak{q}$ của M . D. Buchsbaum đã phỏng đoán rằng hiệu $\ell(M/\mathfrak{q}M) - e(\mathfrak{q}; M)$ là một hằng số của M . Mặc dù câu hỏi của Buchsbaum nói chung là không đúng nhưng nó dẫn đến những nghiên cứu về các lớp môđun mở rộng của lớp môđun Cohen-Macaulay thỏa mãn những ràng buộc đẹp cho $\ell(M/\mathfrak{q}M) - e(\mathfrak{q}; M)$.

Cụ thể, J. Stuckrad và W. Vogel đã giới thiệu và phát triển lý thuyết về môđun Buchsbaum (xem [51]). Một R -môđun M được gọi là *môđun Buchsbaum* nếu $\ell(M/\mathfrak{q}M) - e(\mathfrak{q}; M)$ luôn là một hằng số của M . Ngay sau đó, N.T. Cường, P. Schenzel và N.V. Trung đã nghiên cứu lớp R -môđun thỏa mãn tính chất $\ell(M/\mathfrak{q}M) - e(\mathfrak{q}; M)$ luôn bị chặn trên bởi một hằng số với mọi iđêan tham số $\mathfrak{q}$ của M , và họ gọi lớp môđun đó là *môđun Cohen-Macaulay suy rộng* (xem [57]). Nếu M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng, hằng số $I(M) = \sup_{\mathfrak{q}} \{\ell(M/\mathfrak{q}M) - e(\mathfrak{q}; M)\}$ với $\mathfrak{q}$ chạy trong tất cả các iđêan tham số $\mathfrak{q}$ của M được gọi là *hằng số Buchsbaum*. Một iđêan tham số $\mathfrak{q}$ của M được gọi là *chuẩn tắc* nếu $\ell(M/\mathfrak{q}M) - e(\mathfrak{q}; M) = I(M)$ (xem [53]). Như vậy, M là môđun Buchsbaum nếu mọi hệ tham số là chuẩn tắc. Định lý sau đây là đặc trưng cho tính Cohen-Macaulay suy rộng theo đối đồng điều địa phương (xem [53]).

Định lý 1.1.12. *Một R -môđun M là Cohen-Macaulay suy rộng khi và chỉ khi $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ là hữu hạn sinh với mọi $i < d$ và*

$$I(M) = \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d-1}{i} \ell(H_{\mathfrak{m}}^i(M)).$$

Hơn nữa, iđêan tham số $\mathfrak{q}$ là chuẩn tắc với mọi $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{m}^n$ với $n \gg 0$.

Chú ý rằng nếu M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng, thì sẽ tồn tại một số nguyên dương n_0 sao cho $\mathfrak{m}^{n_0} H_{\mathfrak{m}}^i(M) = 0$ với mọi $i < d$. Khẳng định này là một trường hợp đặc biệt của kết quả tổng quát dưới đây mà ta sẽ dùng nhiều về sau.

Mệnh đề 1.1.13. (Xem [4, 9.1.2]). *Cho $\mathfrak{a}$ là một iđêan của vành Noether bất kì R , và M là một R -môđun hữu hạn sinh. Với t là một số nguyên dương, các khẳng định sau là tương đương.*

- (i) $H_{\mathfrak{a}}^i(M)$ là R -môđun hữu hạn sinh với mọi $i < t$.

(ii) $\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\text{Ann}H_{\mathfrak{a}}^i(M)}$ với mọi $i < t$.

(iii) Tồn tại một số nguyên n_0 sao cho $\mathfrak{a}^{n_0}H_{\mathfrak{a}}^i(M)$ với mọi $i < t$.

Tính hữu hạn của các môđun đối đồng điều địa phương là một vấn đề thú vị trong Đại số Giao hoán và sẽ được đề cập đến trong Chương 4.

1.2 Phép toán trong môđun $\text{Ext}(C, A)$

Lấy A và C là các R -môđun. Khi đó R -môđun $\text{Ext}_R^1(C, A)$ thường được tính toán dựa trên giải xạ ảnh của C hoặc giải nội xạ của A . Chúng ta sẽ trình bày một cách tiếp cận khác cho $\text{Ext}_R^1(C, A)$ theo [35, Chapter 3]. Trong đó, mỗi một phần tử của $\text{Ext}_R^1(C, A)$ được xem như là một lớp tương đương của các mở rộng của C bởi A . Đây chính là ý tưởng then chốt để chứng minh các Định lý chỉ ra sau này. Để đơn giản ta dùng kí hiệu $\text{Ext}(C, A)$ thay cho $\text{Ext}_R^1(C, A)$.

Định nghĩa 1.2.1. Cho A và C là các R -môđun. Khi đó

(i) Một *mở rộng* của C bởi A là một dãy khớp ngắn của các R -môđun và đồng cấu $E = (\mu, \sigma) : A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$.

(ii) Lấy E là một mở rộng của C bởi A , E' là một mở rộng của C' bởi A' . Một *cấu xạ* $\Gamma : E \rightarrow E'$ là một bộ ba R -đồng cấu $\Gamma = (\alpha, \beta, \gamma)$ sao cho biểu đồ sau là giao hoán

$$\begin{array}{ccccccc} E : & 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\mu} & B & \xrightarrow{\sigma} C \longrightarrow 0 \\ & & & \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & \gamma \downarrow \\ E' : & 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\mu'} & B' & \xrightarrow{\sigma'} C' \longrightarrow 0. \end{array}$$

(iii) Hai mở rộng E và E' của C bởi A gọi là *tương đẳng* ($E \equiv E'$) nếu có một cấu xạ $(\text{id}_A, \beta, \text{id}_C) : E \rightarrow E'$. Chú ý rằng khi đó β là một đẳng cấu.

(iv) Không khó để kiểm tra rằng quan hệ tương đẳng trên tập các mở rộng của C bởi A là một quan hệ tương đương. Khi đó ta định nghĩa $\text{Ext}(C, A)$ là tập các lớp tương đẳng của các mở rộng của C bởi A . Để biểu diễn một lớp tương đẳng trong $\text{Ext}(C, A)$ có đại diện là E ta dùng kí hiệu $E \in \in \text{Ext}(C, A)$.

Cố định A , khi đó $\text{Ext}(C, A)$ là một hàm tử phản biến theo C . Cụ thể, với mỗi $E \in \in \text{Ext}(C, A)$ và $\gamma : C' \rightarrow C$ ta sẽ tìm được một $E' = \gamma^* E \in \in \text{Ext}(C', A)$, kí hiệu là $E\gamma$, như mệnh đề dưới đây. Hơn nữa, $E\gamma$ là duy nhất và có các tính chất sau $E\text{id}_C \equiv E$ và $E(\gamma\gamma') = (E\gamma)\gamma'$.

Mệnh đề 1.2.2. *Nếu E là một mở rộng của một R -môđun C bởi một R -môđun A , và $\gamma : C' \rightarrow C$ là một đồng cấu. Thì tồn tại một mở rộng E' của C' bởi A và một cấu xạ $\Gamma = (\text{id}_A, \beta, \gamma) : E' \rightarrow E$. Cặp (Γ, E') là duy nhất sai khác một tương đẳng của E' .*

Chứng minh. Tính tồn tại: xét biểu đồ

$$\begin{array}{ccccccc} E' = E\gamma : 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\mu'} & B' & \xrightarrow{\sigma'} & C' \longrightarrow 0 \\ & & \text{id} \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow \\ E : 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\mu} & B & \xrightarrow{\sigma} & C \longrightarrow 0 \end{array}$$

với dòng dưới và các đồng cấu hai ở bên là đã biết. Ta cần tìm B' và các đồng cấu μ', σ' và β để biểu đồ là giao hoán và dòng trên là khớp. Chọn B' là môđun con của $B \oplus C'$ gồm những cặp (b, c') thỏa mãn $\sigma b = \gamma c'$, và định nghĩa σ' và β như sau $\sigma'(b, c') = c', \beta(b, c') = b$. Dễ dàng kiểm tra rằng các định nghĩa trên cùng với định nghĩa $\mu'a = (\mu a, 0)$ thỏa mãn yêu cầu đặt ra. Tính duy nhất: Xét một mở rộng E'' bất kì cùng với một cấu xạ $\Gamma'' = (\text{id}_A, \beta'', \gamma) : E'' \rightarrow E$. Nếu B'' là môđun ở giữa của E'' , định nghĩa $\beta' : B'' \rightarrow B'$ với $\beta'b'' = (\beta''b'', \sigma''b'')$. Khi đó $\Gamma_0 = (\text{id}_A, \beta', \text{id}_{C'}) : E'' \rightarrow E'$ là một tương đẳng và hợp thành $E'' \rightarrow E' \rightarrow E$ là Γ'' . Như vậy biểu đồ $\Gamma : E' \rightarrow E$ là duy nhất sai khác một tương đẳng Γ_0 của E' . $\square$

Ta nói $E' = E\gamma$ là *hợp thành* của mở rộng E và đồng cấu γ . Tương tự như trên, nếu ta cố định C , thì $\text{Ext}(C, A)$ là một hàm tử hiệp biến của A . Với mỗi mở rộng E và một đồng cấu $\alpha : A \rightarrow A'$ ta có một mở rộng hợp thành $E' = \alpha E$ như mệnh đề dưới đây.

Mệnh đề 1.2.3. *Cho một mở rộng E và một đồng cấu $\alpha : A \rightarrow A'$. Khi đó tồn tại một mở rộng E' của C bởi A' và một cấu xạ $\Gamma = (\alpha, \beta, \text{id}_C) : E \rightarrow E'$. Cặp (Γ, E') được xác định duy nhất sai khác một tương đẳng của E' .*

$$\begin{array}{ccccccc} E : 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\mu} & B & \xrightarrow{\sigma} & C \longrightarrow 0 \\ & & \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \text{id} \downarrow \\ E' = \alpha E : 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\mu'} & B' & \xrightarrow{\sigma'} & C \longrightarrow 0. \end{array}$$

Chứng minh. Xem [35, Chapter 3, Proposition 1.4]. □

Tiếp theo ta sẽ xây dựng cấu trúc nhóm của $\text{Ext}(C, A)$ ở đó phép toán cộng của hai mở rộng được định nghĩa dựa trên *tổng Baer*.

Định nghĩa 1.2.4. (i) Cho C là một R -môđun, đồng cấu *đường chéo* của C được định nghĩa như sau

$$\Delta = \Delta_C : C \rightarrow C \oplus C, \quad \Delta_C(c) = (c, c).$$

(ii) Cho A là một R -môđun, đồng cấu *đối đường chéo* của A được định nghĩa như sau

$$\nabla = \nabla_A : A \oplus A \rightarrow A, \quad \nabla_A(a_1, a_2) = a_1 + a_2.$$

(iii) Lấy hai phần tử bất kì trong $\text{Ext}(C, A)$ đại diện bởi các mở rộng $E_i = (\mu_i, \sigma_i) : A \rightarrowtail B_i \twoheadrightarrow C$ với $i = 1, 2$. Khi đó, ta định nghĩa tổng của hai lớp tương đẳng đại diện bởi E_1 và E_2 là lớp tương đẳng đại diện bởi mở rộng

$$E_1 + E_2 = \nabla_A(E_1 \oplus E_2)\Delta_C,$$

ở đây $E_1 \oplus E_2$ là mở rộng tổng trực tiếp tức là

$$E_1 \oplus E_2 : 0 \longrightarrow A \oplus A \longrightarrow B_1 \oplus B_2 \longrightarrow C \oplus C \longrightarrow 0.$$

Công thức $E_1 + E_2 = \nabla_A(E_1 \oplus E_2)\triangle_C$ được gọi là *tổng Baer*.

Định lí 1.2.5. (Xem [35, Chapter 3, Theorem 2.1]). Cho hai R -môđun A và C , tập $\text{Ext}(C, A)$ các lớp tương đẳng của các mở rộng của C bởi A là một nhóm Abel với phép cộng các lớp tương đẳng được định nghĩa như trong Định nghĩa 1.2.4. Hơn nữa, lớp tương đẳng của mở rộng chẻ ra $A \rightarrowtail A \oplus C \twoheadrightarrow C$ là phần tử 0 của nhóm này, và nghịch đảo của mở rộng E là mở rộng $(-\text{id}_A)E$.

Định nghĩa 1.2.6. Cho $E \in \text{Ext}(C, A)$ là một mở rộng, và x là một phần tử của R . Xét biểu đồ giao hoán

$$\begin{array}{ccccccc} E : & 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\mu} & B & \xrightarrow{\sigma} C \longrightarrow 0 \\ & & & x \downarrow & & x \downarrow & & x \downarrow \\ & E : & 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\mu} B & \xrightarrow{\sigma} C \longrightarrow 0, \end{array}$$

ở đây các đồng cấu cột là đồng cấu nhân x . Biểu đồ trên cùng với [35, Chapter 3, Proposition 1.8] dẫn đến $xE \equiv Ex$. Ta định nghĩa phép nhân vô hướng của phần tử $x \in R$ và $E \in \text{Ext}(C, A)$ là $x \cdot E := xE \equiv Ex$, và sẽ viết đơn giản là xE . Khi R là một vành giao hoán, có thể kiểm tra rằng nhóm Abel $\text{Ext}(C, A)$ dưới tác động của phép nhân vô hướng trên là một R -môđun.

Nhắc lại rằng $\text{Ext}(\bullet, A)$ có thể xây dựng như là hàm tử dẫn suất thứ nhất của hàm tử $\text{Hom}(\bullet, A)$ như sau. Xét giải xạ ảnh $\mathbb{P}$ của C

$$\mathbb{P} : \cdots \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow C \rightarrow 0.$$

Tác động hàm tử $\text{Hom}_R(\bullet, A)$ vào giải $\mathbb{P}$. Do hàm tử $\text{Hom}_R(\bullet, A)$ không bảo toàn tính khớp nên đối phức $\text{Hom}_R(\mathbb{P}, A)$ sinh ra các đối đồng điều $H^n(\mathbb{P}, A)$. Ta kết thúc tiết này bằng một kết quả khẳng định rằng $H^1(\mathbb{P}, A) \cong \text{Ext}(C, A)$

tức là hai cách xây dựng $\text{Ext}(C, A)$ là tương thích. Xét E là một mở rộng của C bởi A , coi E như một giải của C ta có biểu đồ giao hoán

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{P} : & P_2 & \xrightarrow{\partial} & P_1 & \rightarrow & P_0 & \rightarrow C \rightarrow 0 \\ & & & g_1 \downarrow & & g_0 \downarrow & \text{id} \downarrow \\ E : & 0 & \rightarrow & A & \rightarrow & B & \rightarrow C \rightarrow 0. \end{array}$$

Từ biểu đồ giao hoán trên ta có $g_1 \partial = 0$. Nên $g_1 \in \ker(\partial^*)$, ở đây $\partial^* : \text{Hom}_R(P_1, A) \rightarrow \text{Hom}_R(P_2, A)$. Do đó ta có một phép gán

$$\xi : \text{Ext}(C, A) \rightarrow H^1(\mathbb{P}, A), \quad E \in \text{Ext}(C, A) \mapsto [g_1] \in H^1(\mathbb{P}, A).$$

Định lí 1.2.7. *Nếu A và C là các R -môđun và $\varepsilon : \mathbb{P} \rightarrow C$ là một giải xạ ảnh của C , tồn tại một đẳng cấu*

$$\xi : \text{Ext}(C, A) \rightarrow H^1(\mathbb{P}, A), \quad \xi(E) = [g_1].$$

Đẳng cấu ξ là tự nhiên theo A . Nó cũng tự nhiên theo C với nghĩa sau: Nếu $\gamma : C' \rightarrow C, \varepsilon' : \mathbb{P}' \rightarrow C'$ là một giải xạ ảnh của C' , và $f : \mathbb{P}' \rightarrow \mathbb{P}$ là nâng của γ , thì

$$\xi' \gamma^* = f^* \xi : \text{Ext}(C, A) \rightarrow H^1(\mathbb{P}', A).$$

Chứng minh. Xem [35, Chapter 3, Theorem 6.4] cho kết quả tổng quát

$$\xi : \text{Ext}_R^n(C, A) \rightarrow H^n(\mathbb{P}, A)$$

là đẳng cấu với mọi $n \geq 0$. □

1.3 Môđun $\text{Ext}(H_{\mathfrak{a}}^{i+1}(M), H_{\mathfrak{a}}^i(M))$

Trong tiết này ta xét M là một R -môđun hữu hạn sinh, và $\mathfrak{a}$ là một idêan của R . Ta nhắc lại khái niệm dãy $\mathfrak{a}$ -lọc chính quy của M như sau.

Định nghĩa 1.3.1. Dãy phần tử $x_1, \dots, x_n$ trong $\mathfrak{a}$ được gọi là *dãy $\mathfrak{a}$ -lọc chính quy của M* nếu

$$\text{supp}((x_1, \dots, x_{i-1})M : x_i) / (x_1, \dots, x_{i-1})M \subseteq V(\mathfrak{a})$$

với mọi $i \leq n$, ở đây $V(\mathfrak{a})$ là kí hiệu của tập các idêan nguyên tố chứa $\mathfrak{a}$.

Xét t là một số nguyên dương sao cho $H_{\mathfrak{a}}^i(M)$ là R -môđun hữu hạn sinh với mọi $i < t$. Theo Mệnh đề 1.1.13 ta có một số nguyên dương n_0 sao cho $\mathfrak{a}^{n_0} H_{\mathfrak{a}}^i(M) = 0$ với mọi $i < t$. Với x là một phần tử $\mathfrak{a}$ -lọc chính quy của M chứa trong $\mathfrak{a}^{n_0}$ ta có dãy khớp ngắn các R -môđun

$$0 \rightarrow M/H_{\mathfrak{a}}^0(M) \xrightarrow{x} M \rightarrow M/xM \rightarrow 0.$$

Do $H_{\mathfrak{a}}^i(M) \cong H_{\mathfrak{a}}^i(M/H_{\mathfrak{a}}^0(M))$ với mọi $i > 0$ nên dãy khớp ngắn trên cảm sinh dãy khớp dài các môđun đối đồng điều địa phương

$$\cdots \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^i(M) \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^i(M/xM) \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^{i+1}(M) \xrightarrow{x} H_{\mathfrak{a}}^{i+1}(M) \rightarrow \cdots.$$

Lại do $x \in \mathfrak{a}^{n_0}$ nên đồng cấu $x : H_{\mathfrak{a}}^i(M) \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^i(M)$ là đồng cấu không với mọi $i < t$. Do đó, dãy khớp dài trên cho ta các dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^i(M) \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^i(M/xM) \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^{i+1}(M) \rightarrow 0 \quad (*)$$

với mọi $i < t - 1$. Theo tiết trước ta có thể coi dãy khớp ngắn $(*)$ như đại diện của một phần tử của môđun $\text{Ext}(H_{\mathfrak{a}}^{i+1}(M), H_{\mathfrak{a}}^i(M))$. Hơn nữa, dãy khớp ngắn $(*)$ là chẻ ra nếu nó đại diện cho phần tử không.

Để thuận tiện cho các áp dụng về sau ta sẽ xem xét vấn đề trên trong trường hợp tổng quát. Trong phần còn lại của tiết ta luôn xét t một số nguyên dương và U là một môđun con của M . Đặt $\overline{M} = M/U$. Ta nói một phần tử x là thỏa mãn *điều kiện* $(\sharp)$ nếu $0 :_M x = U$, và dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow \overline{M} \xrightarrow{x} M \rightarrow M/xM \rightarrow 0$$

cảm sinh các dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^i(M) \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^i(M/xM) \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^{i+1}(\overline{M}) \rightarrow 0$$

với mọi $i < t - 1$.

Kí hiệu 1.3.2. Lấy x là một phần tử thỏa mãn điều kiện $(\sharp)$

- (i) Với mỗi $i < t - 1$, ta gọi E_x^i là phần tử trong $\text{Ext}(H_a^{i+1}(\overline{M}), H_a^i(M))$ đại diện bởi dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow H_a^i(M) \rightarrow H_a^i(M/xM) \rightarrow H_a^{i+1}(\overline{M}) \rightarrow 0.$$

- (ii) Giả sử $H_a^t(\overline{M}) \cong H_a^t(M)$, ta có dãy khớp ngắn sau

$$0 \rightarrow H_a^{t-1}(M) \rightarrow H_a^{t-1}(M/xM) \rightarrow 0 :_{H_a^t(\overline{M})} x \rightarrow 0.$$

Xét $\mathfrak{b}$ là một idêan sao cho $x \in \mathfrak{b}$. Tác động hàm tử $\text{Hom}(R/\mathfrak{b}, \bullet)$ vào dãy khớp ngắn trên ta được dãy khớp trái dưới đây

$$0 \rightarrow 0 :_{H_a^{t-1}(M)} \mathfrak{b} \rightarrow 0 :_{H_a^{t-1}(M/xM)} \mathfrak{b} \rightarrow 0 :_{H_a^t(\overline{M})} \mathfrak{b}.$$

Ta gọi F_x^{t-1} là phần tử của môđun $\text{Ext}(0 :_{H_a^t(\overline{M})} \mathfrak{b}, 0 :_{H_a^{t-1}(M)} \mathfrak{b})$ đại diện bởi dãy khớp ngắn dưới đây nếu nó tồn tại

$$0 \rightarrow 0 :_{H_a^{t-1}(M)} \mathfrak{b} \rightarrow 0 :_{H_a^{t-1}(M/xM)} \mathfrak{b} \rightarrow 0 :_{H_a^t(\overline{M})} \mathfrak{b} \rightarrow 0.$$

Các định lí dưới đây cho ta mối quan hệ giữa tổng và tích của các phần tử thỏa mãn điều kiện $(\sharp)$ và các mở rộng tương ứng (xem [16, Theorem 2.2]).

Định lí 1.3.3. *Cho t là một số nguyên dương và U là một môđun con của M . Đặt $\overline{M} = M/U$. Giả sử x và y là các phần tử thỏa mãn điều kiện $(\sharp)$ và $0 :_M (x + y) = U$, khi đó*

- (i) $x + y$ cũng thỏa mãn điều kiện $(\sharp)$ và $E_{x+y}^i = E_x^i + E_y^i$ với mọi $i < t - 1$.
(ii) Nếu $H_a^t(\overline{M}) \cong H_a^t(M)$ và F_x^{t-1}, F_y^{t-1} là xác định, thì F_{x+y}^{t-1} cũng xác định và $F_{x+y}^{t-1} = F_x^{t-1} + F_y^{t-1}$.

Chứng minh. Ta chứng minh đồng thời (i) và (ii). Xét đồng cấu

$$\varphi : M \rightarrow M \oplus M, \varphi(m) = (xm, ym).$$

Do $U = 0 :_M x = 0 :_M y$ nên ta có dãy khớp ngắn

$$0 \longrightarrow \overline{M} \xrightarrow{\overline{\varphi}} M \oplus M \longrightarrow N \longrightarrow 0,$$

ở đó $N = \text{coker}(\overline{\varphi})$. Biểu đồ sau là giao hoán

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \overline{M} & \xrightarrow{\overline{\varphi}} & M \oplus M & \longrightarrow & N \longrightarrow 0 \\ & & \Delta_{\overline{M}} \downarrow & & \text{id} \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \overline{M} \oplus \overline{M} & \xrightarrow{x \oplus y} & M \oplus M & \longrightarrow & M/xM \oplus M/yM \longrightarrow 0, \end{array}$$

với $\Delta_{\overline{M}} : \overline{M} \rightarrow \overline{M} \oplus \overline{M}$, $\Delta(m) = (m, m)$ là đồng cấu đường chéo.

Chú ý rằng các đồng cấu dẫn suất của $\Delta_{\overline{M}}$ cũng là đồng cấu đường chéo

$\Delta_{H_a^i(\overline{M})} : H_a^i(\overline{M}) \rightarrow H_a^i(\overline{M}) \oplus H_a^i(\overline{M})$ với mọi $i \geq 0$. Do đó, tác động hàm tử $H_a^i(\bullet)$ vào biểu đồ trên ta được biểu đồ giao hoán

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_a^i(\overline{M}) & \xrightarrow{\varphi^i} & H_a^i(M)^2 & \longrightarrow & \cdots \\ & & \Delta_{H_a^i(\overline{M})} \downarrow & & \text{id} \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_a^i(\overline{M})^2 & \xrightarrow{x \oplus y} & H_a^i(M)^2 & \longrightarrow & \cdots, \end{array}$$

ở đây $A^2 = A \oplus A$ với một R -môđun A , và φ^i là dẫn suất của $\overline{\varphi}$. Do x, y thỏa mãn điều kiện $(\#)$ nên đồng cấu ở dòng dưới là đồng cấu không với mọi $i < t$, dẫn đến $\varphi^i = 0$ với mọi $i < t$. Do đó với mọi $i < t - 1$ biểu đồ sau là giao hoán

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & H_a^i(M)^2 & \longrightarrow & H_a^i(N) & \longrightarrow & H_a^{i+1}(\overline{M}) & \longrightarrow 0 \\ & \text{id} \downarrow & & \downarrow & & \Delta_{H_a^{i+1}(\overline{M})} \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & H_a^i(M)^2 & \longrightarrow & H_a^i(M/xM) \oplus H_a^i(M/yM) & \longrightarrow & H_a^{i+1}(\overline{M})^2 & \longrightarrow 0. \end{array}$$

Với mọi $i < t - 1$, dãy khớp ở dòng dưới chính là $E_x^i \oplus E_y^i$. Ta kí hiệu dãy khớp ở dòng trên là mở rộng E^i , vậy

$$E^i = (E_x^i \oplus E_y^i) \Delta_{H_a^{i+1}(\overline{M})} \quad (1)$$

với mọi $i < t - 1$.

Hơn nữa, nếu $H_a^t(M) \cong H_a^t(\overline{M})$, ta có biểu đồ giao hoán sau

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & H_a^{t-1}(M)^2 & \longrightarrow & H_a^{t-1}(N) & \longrightarrow & K_{(x,y)} & \longrightarrow 0 \\ & \text{id} \downarrow & & \downarrow & & \Delta \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & H_a^{t-1}(M)^2 & \longrightarrow & H_a^{t-1}(\frac{M}{xM}) \oplus H_a^{t-1}(\frac{M}{yM}) & \longrightarrow & K_x \oplus K_y & \longrightarrow 0, \end{array}$$

ở đây $K_{(x,y)} = 0 :_{H_a^t(\overline{M})} (x, y)$, $K_x = 0 :_{H_a^t(\overline{M})} x$, $K_y = 0 :_{H_a^t(\overline{M})} y$, và $\overline{\Delta} : K_{(x,y)} \longrightarrow K_x \oplus K_y$ định nghĩa như sau $\overline{\Delta}(c) = (c, c)$. Chú ý rằng x và y thuộc $\mathfrak{b}$ nên

$$\text{Hom}(R/\mathfrak{b}, K_x) \cong \text{Hom}(R/\mathfrak{b}, K_y) \cong \text{Hom}(R/\mathfrak{b}, K_{(x,y)}) \cong 0 :_{H_a^t(\overline{M})} \mathfrak{b}.$$

Tác động hàm tử $\text{Ext}_R^i(R/\mathfrak{b}, \bullet)$ vào biểu đồ trên ta được biểu đồ giao hoán

$$\begin{array}{ccc} 0 :_{H_a^t(\overline{M})} \mathfrak{b} & \xrightarrow{\delta_1} & \text{Ext}_R^1(R/\mathfrak{b}, H_a^{t-1}(M)^2) \\ \Delta \downarrow & & \text{id} \downarrow \\ (0 :_{H_a^t(\overline{M})} \mathfrak{b})^2 & \xrightarrow{\delta_2} & \text{Ext}_R^1(R/\mathfrak{b}, H_a^{t-1}(M)^2), \end{array}$$

với δ_1, δ_2 là các đồng cấu nối. Vì F_x^{t-1}, F_y^{t-1} là xác định, $\delta_2 = 0$, nên $\delta_1 = 0$.

Ta thu được biểu đồ giao hoán sau với các dòng là khớp

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & 0 :_{H_a^{t-1}(M)^2} \mathfrak{b} & \longrightarrow & 0 :_{H_a^{t-1}(N)} \mathfrak{b} & \longrightarrow & 0 :_{H_a^t(\overline{M})} \mathfrak{b} & \longrightarrow 0 \\ & \text{id} \downarrow & & \downarrow & & \Delta \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & 0 :_{H_a^{t-1}(M)^2} \mathfrak{b} & \longrightarrow & 0 :_{H_a^{t-1}(\frac{M}{xM}) \oplus H_a^{t-1}(\frac{M}{yM})} \mathfrak{b} & \longrightarrow & 0 :_{H_a^t(\overline{M})^2} \mathfrak{b} & \longrightarrow 0. \end{array}$$

Mở rộng ở dòng dưới chính là $F_x^{t-1} \oplus F_y^{t-1}$. Ta kí hiệu mở rộng ở dòng trên là F^{t-1} , nên

$$F^{t-1} = (F_x^{t-1} \oplus F_y^{t-1}) \Delta_{0 :_{H_a^t(\overline{M})} \mathfrak{b}}. \quad (2)$$

Mặt khác, ta có biểu đồ giao hoán sau

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \overline{M} & \xrightarrow{\overline{\varphi}} & M \oplus M & \longrightarrow & N \longrightarrow 0 \\ & & \text{id} \downarrow & & \nabla_M \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \overline{M} & \xrightarrow{x+y} & M & \longrightarrow & M/(x+y)M \longrightarrow 0, \end{array}$$

ở đây $\nabla_M : M \oplus M \rightarrow M$, $\nabla(m, m') = m + m'$ là đồng cấu đối đường chéo.

Do các đồng cấu dẫn suất của ∇_M cũng là đồng cấu đối đường chéo, nên ta có các đồng cấu $\nabla_{H_a^i(M)} : H_a^i(M) \oplus H_a^i(M) \rightarrow H_a^i(M)$ với mọi $i \geq 0$. Do đó, tác động hàm tử $H_a^i(\bullet)$ vào biểu đồ giao hoán trên ta được biểu đồ giao

hoán sau

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_a^i(\overline{M}) & \xrightarrow{\varphi^i} & H_a^i(M)^2 & \longrightarrow & \cdots \\ & & \text{id} \downarrow & & \nabla_{H_a^i(M)} \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_a^i(\overline{M}) & \xrightarrow{\psi^i} & H_a^i(M) & \longrightarrow & \cdots, \end{array}$$

với ψ^i là dẫn suất của $(x + y) : \overline{M} \rightarrow M$. Theo trên ta có $\varphi^i = 0$ nên $\psi^i = 0$ với mọi $i < t$, vì vậy $x + y$ thỏa mãn điều kiện $(\sharp)$. Dẫn đến, với mọi $i < t - 1$, ta có biểu đồ giao hoán

$$\begin{array}{ccccccc} E^i : 0 & \longrightarrow & H_a^i(M) \oplus H_a^i(M) & \longrightarrow & H_a^i(N) & \longrightarrow & H_a^{i+1}(\overline{M}) \longrightarrow 0 \\ & & \nabla_{H_a^i(M)} \downarrow & & \downarrow M & & \downarrow \text{id} \\ E_{x+y}^i : 0 & \longrightarrow & H_a^i(M) & \longrightarrow & H_a^i\left(\frac{M}{(x+y)M}\right) & \longrightarrow & H_a^{i+1}(\overline{M}) \longrightarrow 0. \end{array}$$

Biểu đồ trên khẳng định rằng với mọi $i < t - 1$ thì

$$E_{x+y}^i = \nabla_{H_a^i(M)} E^i. \quad (3)$$

Hơn nữa, nếu $H_a^t(M) \cong H_a^t(\overline{M})$, ta có

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_a^{t-1}(M)^2 & \longrightarrow & H_a^{t-1}(N) & \longrightarrow & K_{(x,y)} \longrightarrow 0 \\ & & \nabla_{H_a^{t-1}(M)} \downarrow & & \downarrow & & \mu \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H_a^{t-1}(M) & \longrightarrow & H_a^{t-1}(M/(x+y)M) & \longrightarrow & K_{x+y} \longrightarrow 0, \end{array}$$

ở đây μ là một đơn cấu. Bằng tác động hàm tử $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{b}, \bullet)$ vào biểu đồ trên ta thu được biểu đồ giao hoán

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (0 :_{H_a^{t-1}(M)} \mathfrak{b})^2 & \longrightarrow & 0 :_{H_a^{t-1}(N)} \mathfrak{b} & \longrightarrow & 0 :_{H_a^t(\overline{M})} \mathfrak{b} \longrightarrow 0 \\ & & \nabla_{0 :_{H_a^{t-1}(M)} \mathfrak{b}} \downarrow & & \downarrow & & \text{id} \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & 0 :_{H_a^{t-1}(M)} \mathfrak{b} & \longrightarrow & 0 :_{H_a^{t-1}(\frac{M}{(x+y)M})} \mathfrak{b} & \longrightarrow & 0 :_{H_a^t(\overline{M})} \mathfrak{b}. \end{array}$$

Dòng trên là khớp do sự xác định của F^{t-1} . Dẫn đến dòng dưới là khớp, nên F_{x+y}^{t-1} là xác định. Do đó

$$F_{x+y}^{t-1} = \nabla_{0 :_{H_a^{t-1}(M)} \mathfrak{b}} F^{t-1}. \quad (4)$$

Kết hợp (1) và (3) ta có

$$E_{x+y}^i = \nabla_{H_a^i(M)} (E_x^i \oplus E_y^i) \Delta_{H_a^{i+1}(\overline{M})}$$

với mọi $i < t - 1$. Nên $E_{x+y}^i = E_x^i + E_y^i$ với mọi $i < t - 1$.

Kết hợp (2) và (4), ta có

$$F_{x+y}^{t-1} = \nabla_{0:_{H_a^{t-1}(M)} \mathfrak{b}}(F_x^{t-1} \oplus F_y^{t-1}) \Delta_{0:_{H_a^t(\overline{M})} \mathfrak{b}}.$$

Nên $F_{x+y}^{t-1} = F_x^{t-1} + F_y^{t-1}$. □

Định lí 1.3.4. Cho t là một số nguyên dương và U là một môđun con của M . Đặt $\overline{M} = M/U$. Giả sử rằng x và y là các phần tử của R sao cho x thỏa mãn điều kiện $(\sharp)$ và $0 :_M xy = U$. Các khẳng định dưới đây là đúng

(i) xy thỏa mãn điều kiện $(\sharp)$, và $E_{xy}^i = yE_x^i$ với mọi $i < t - 1$. Giả sử thêm rằng $H_a^t(\overline{M}) \cong H_a^t(M)$. Khi đó nếu F_x^{t-1} là xác định, thì F_{xy}^{t-1} cũng là xác định và $F_{xy}^{t-1} = yF_x^{t-1}$.

(ii) Giả sử $H_a^t(\overline{M}) \cong H_a^t(M)$ và $yH_a^i(M) = 0$ với mọi $i < t$. Khi đó $E_{xy}^i = 0$ với mọi $i < t - 1$. Hơn nữa, F_{xy}^{t-1} là xác định và $F_{xy}^{t-1} = 0$.

Chứng minh. (i) Từ $U = 0 :_M x = 0 :_M xy$, ta có biểu đồ giao hoán sau

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \overline{M} & \xrightarrow{x} & M & \longrightarrow & M/xM \longrightarrow 0 \\ & & \text{id} \downarrow & & y \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \overline{M} & \xrightarrow{xy} & M & \longrightarrow & M/xyM \longrightarrow 0 \end{array}$$

với các dòng là khớp. Tác động hàm tử $H_a^i(\bullet)$ vào biểu đồ giao hoán trên ta được biểu đồ giao hoán

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_a^i(\overline{M}) & \xrightarrow{\eta^i} & H_a^i(M) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \text{id} \downarrow & & y \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_a^i(\overline{M}) & \xrightarrow{\theta^i} & H_a^i(M) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

với η^i và θ^i là các đồng cấu dẫn suất của các đồng cấu $x : \overline{M} \rightarrow M$ và $xy : \overline{M} \rightarrow M$, tương ứng. Do x thỏa mãn điều kiện $(\sharp)$, nên đồng cấu $\eta^i : H_a^i(\overline{M}) \rightarrow H_a^i(M)$ là đồng cấu không với mọi $i < t$. Do đó, đồng cấu

$\theta^i : H_a^i(\overline{M}) \rightarrow H_a^i(M)$ cũng là đồng cấu không với mọi $i < t$, và xy thỏa mãn điều kiện $(\#)$. Với mọi $i < t - 1$ ta có biểu đồ giao hoán

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_a^i(M) & \longrightarrow & H_a^i(M/xM) & \longrightarrow & H_a^{i+1}(\overline{M}) \longrightarrow 0 \\ & & y \downarrow & & \downarrow & & \text{id} \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H_a^i(M) & \longrightarrow & H_a^i(M/xyM) & \longrightarrow & H_a^{i+1}(\overline{M}) \longrightarrow 0. \end{array}$$

Vậy $E_{xy}^i = yE_x^i$ với mọi $i < t - 1$.

Giả sử $H_a^t(\overline{M}) \cong H_a^t(M)$. Với $i = t - 1$ ta có biểu đồ giao hoán sau

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_a^{t-1}(M) & \longrightarrow & H_a^{t-1}\left(\frac{M}{xM}\right) & \longrightarrow & 0 :_{H_a^t(\overline{M})} x \longrightarrow 0 \\ & & y \downarrow & & \downarrow & & \alpha \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H_a^{t-1}(M) & \longrightarrow & H_a^{t-1}\left(\frac{M}{xyM}\right) & \longrightarrow & 0 :_{H_a^t(\overline{M})} xy \longrightarrow 0, \end{array} \quad (**)$$

ở đây $\alpha : 0 :_{H_a^t(\overline{M})} x \rightarrow 0 :_{H_a^t(\overline{M})} xy$ là đơn cấu. Tác động hàm tử $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{b}, \bullet)$ vào biểu đồ trên với chú ý rằng $x, xy \in \mathfrak{b}$ ta có biểu đồ giao hoán sau

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 :_{H_a^{t-1}(M)} \mathfrak{b} & \longrightarrow & 0 :_{H_a^{t-1}(M/xM)} \mathfrak{b} & \longrightarrow & 0 :_{H_a^t(\overline{M})} \mathfrak{b} \longrightarrow 0 \\ & & y \downarrow & & \downarrow & & \text{id} \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & 0 :_{H_a^{t-1}(M)} \mathfrak{b} & \longrightarrow & 0 :_{H_a^{t-1}(M/xyM)} \mathfrak{b} & \longrightarrow & 0 :_{H_a^t(\overline{M})} \mathfrak{b}. \end{array}$$

Dòng trên là một dãy khớp ngắn do mở rộng F_x^{t-1} là xác định. Dẫn đến dòng dưới cũng là một dãy khớp ngắn và chính là mở rộng F_{xy}^{t-1} và ta có $F_{xy}^{t-1} = yF_x^{t-1}$.

(ii) Theo (i) ta có $E_{xy}^i = yE_x^i$ với mọi $i < t - 1$. Nên $E_{xy}^i = 0$ do giả sử $y\text{Ext}(H_a^{i+1}(\overline{M}), H_a^i(M)) = 0$. Ta chỉ cần chứng minh F_{xy}^{t-1} là xác định và là mở rộng chẻ ra. Do $yH_a^{t-1}(M) = 0$ nên từ Biểu đồ $(**)$ ta có một đồng cấu $\varepsilon : (0 :_{H_a^t(\overline{M})} x) \rightarrow H_a^{t-1}(M/xyM)$ để biểu đồ sau là giao hoán

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_a^{t-1}(M) & \longrightarrow & H_a^{t-1}(M/xM) & \longrightarrow & 0 :_{H_a^t(\overline{M})} x \longrightarrow 0 \\ & & y \downarrow & & \downarrow & \nearrow \varepsilon & \downarrow \alpha \\ 0 & \longrightarrow & H_a^{t-1}(M) & \longrightarrow & H_a^{t-1}(M/xyM) & \longrightarrow & 0 :_{H_a^t(\overline{M})} xy \longrightarrow 0. \end{array}$$

Tác động $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{b}, \bullet)$ vào biểu đồ trên ta có biểu đồ giao hoán sau

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & 0 : H_{\mathfrak{a}}^{t-1}(M) & \xrightarrow{\quad} & 0 : H_{\mathfrak{a}}^{t-1}(M/xM) & \xrightarrow{\quad} & 0 : H_{\mathfrak{a}}^t(\overline{M}) \\
 & & \downarrow y & & \downarrow & \swarrow \epsilon & \downarrow \text{id} \\
 0 & \longrightarrow & 0 : H_{\mathfrak{a}}^{t-1}(M) & \xrightarrow{\quad} & 0 : H_{\mathfrak{a}}^{t-1}(M/xyM) & \xrightarrow{\quad} & 0 : H_{\mathfrak{a}}^t(\overline{M})
 \end{array}$$

Để thấy dòng dưới là một dãy khớp ngắn chẻ ra. Vậy F_{xy}^{t-1} là xác định và $F_{xy}^{t-1} = 0$. $\square$

1.4 Định lí chẻ ra của đối đồng điều địa phương

Trong tiết này chúng ta chứng minh rằng: Với M là một R -môđun hữu hạn sinh, $\mathfrak{a}$ là một idêan của R và t là một số nguyên dương sao cho $H_{\mathfrak{a}}^i(M)$ là hữu hạn sinh với mọi $i < t$, thì

$$H_{\mathfrak{a}}^i(M/xM) \cong H_{\mathfrak{a}}^i(M) \oplus H_{\mathfrak{a}}^{i+1}(M)$$

với mọi phần tử $\mathfrak{a}$ -lọc chính quy x của M chứa trong một lũy thừa đủ lớn của $\mathfrak{a}$ và với mọi $i < t - 1$. Cụ thể, ta sẽ chứng minh mở rộng E_x^i tương ứng với x ,

$$0 \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^i(M) \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^i(M/xM) \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^{i+1}(M) \rightarrow 0,$$

là đại diện cho phần tử $0 \in \text{Ext}(H_{\mathfrak{a}}^{i+1}(M), H_{\mathfrak{a}}^i(M))$ với mọi $i < t - 1$. Trong Định lí 1.3.4 chúng ta đã chứng minh khẳng định trên cho những phần tử có dạng xy thỏa mãn một số điều kiện thích hợp. Bổ đề dưới đây cho phép ta chuyển một phần tử tổng quát về dạng đặc biệt này.

Bổ đề 1.4.1. Cho $(R, \mathfrak{m})$ là một vành Noether địa phương, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ là các idêan và $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ là các idêan nguyên tố sao cho $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \not\subseteq \mathfrak{p}_j$ với mọi $j \leq n$. Xét x là một phần tử nằm trong $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ nhưng $x \notin \mathfrak{p}_j$ với mọi $j \leq n$. Khi đó tồn tại các phần tử $a_1, \dots, a_r \in \mathfrak{a}$ và $b_1, \dots, b_r \in \mathfrak{b}$ để ta có thể biểu diễn $x = a_1b_1 + \dots + a_rb_r$ sao cho $a_ib_i \notin \mathfrak{p}_j$ và $a_1b_1 + \dots + a_ib_i \notin \mathfrak{p}_j$ với mọi $i \leq r, j \leq n$.

Chứng minh. Chúng ta có thể giả sử rằng $\mathfrak{p}_i \not\subseteq \mathfrak{p}_j$ với mọi $i, j \leq n, i \neq j$. Theo Định lí tránh nguyên tố ta có thể chọn một hệ phân tử sinh $a_1b_1, \dots, a_rb_r$ của $\mathfrak{ab}$ sao cho $a_i \in \mathfrak{a}, b_i \in \mathfrak{b}$ với mọi $i \leq r$, và $a_ib_i \notin \mathfrak{p}_j$ với mọi $i \leq r, j \leq n$. Nên tồn tại $s_i \in R, i = 1, \dots, r$, sao cho $x = s_1a_1b_1 + \dots + s_ra_rb_r$. Biểu diễn $x = a_1(s_1b_1) + \dots + a_r(s_rb_r)$, do đó không mất tính tổng quát ta có thể giả sử rằng x có thể viết dưới dạng $x = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_rb_r$ với $a_i \in \mathfrak{a}$ và $b_i \in \mathfrak{b}$ với mọi $i \leq r$, và $a_i \notin \mathfrak{p}_j$ với mọi $i \leq r, j \leq n$.

Ta chứng minh khẳng định bằng quy nạp theo r . Trường hợp $r = 1$ là hiển nhiên. Giả sử $r > 1$ và khẳng định đúng với $r - 1$. Đặt $J = \{j \mid b_r \in \mathfrak{p}_j\}$. Theo Định lí tránh nguyên tố ta có thể chọn $u \in \mathfrak{b}$ sao cho $u \notin \mathfrak{p}_j$ với mọi $j \in J$, và $u \in \mathfrak{p}_j$ với mọi $j \notin J$. Từ $a_1 \notin \mathfrak{p}_j$ với mọi $j \leq n$, ua_1 cũng có tính chất này. Dẫn đến $b_r + ua_1 \notin \mathfrak{p}_j$ với mọi $j \leq n$. Ta biểu diễn $x = a_1(b_1 - ua_r) + a_2b_2 + \dots + a_r(b_r + ua_1)$, nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử thêm rằng $x = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_rb_r$ và $a_rb_r \notin \mathfrak{p}_j$ với mọi $j \leq n$. Đặt $x' = a_1b_1 + \dots + a_{r-1}b_{r-1}$ và $J' = \{j \mid x' \in \mathfrak{p}_j\}$. Lại dùng Định lí tránh nguyên tố ta có thể chọn $v \in \mathfrak{m}$ sao cho $v \notin \mathfrak{p}_j$ với mọi $j \in J'$, và $v \in \mathfrak{p}_j$ với mọi $j \notin J'$. Do $a_1, a_r, b_r \notin \mathfrak{p}_j$ với mọi $j \leq n$, $va_1a_rb_r$ có cùng tính chất với v . Đặt $x_{r-1} = x' + va_1a_rb_r = a_1(b_1 + va_rb_r) + a_2b_2 + \dots + a_{r-1}b_{r-1}$. Thì $x_{r-1} \notin \mathfrak{p}_j$ với mọi $j \leq n$ và $x = x_{r-1} + a_rb_r(1 - va_1)$. Từ $a_rb_r(1 - va_1) \notin \mathfrak{p}_j$ với mọi $j \leq n$, khẳng định được suy ra từ giả thiết quy nạp cho x_{r-1} . $\square$

Hệ quả 1.4.2. Cho $(R, \mathfrak{m})$ là một vành Noether địa phương và $\mathfrak{a}$ là một ideal của R . Cho M là một R -môđun hữu hạn sinh và $x \in \mathfrak{a}^2$ là một phân tử $\mathfrak{a}$ -lọc chính quy của M . Khi đó ta có thể chọn các phân tử $\mathfrak{a}$ -lọc chính quy $a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_r \in \mathfrak{a}$ của M sao cho $x = a_1b_1 + \dots + a_rb_r$ và $a_1b_1 + \dots + a_ib_i$ cũng là các phân tử $\mathfrak{a}$ -lọc chính quy của M với mọi $i \leq r$.

Chứng minh. Khẳng định được suy ra từ Bổ đề 1.4.1 với $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ và tập các ideal nguyên tố $\{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n\}$ là $\text{Ass}(M) \setminus V(\mathfrak{a})$. $\square$

Bổ đề 1.4.3. Cho A, B, C là các R -môđun với C là hữu hạn sinh. Khi đó dãy phức

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

là một dãy khớp chẻ ra nếu và chỉ nếu dãy phức

$$0 \rightarrow A_{\mathfrak{m}} \rightarrow B_{\mathfrak{m}} \rightarrow C_{\mathfrak{m}} \rightarrow 0$$

là một dãy khớp chẻ ra với mọi ideal tối đại $\mathfrak{m}$ của R .

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh phần "nếu" của Bổ đề. Rõ ràng rằng

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

là khớp. Dãy khớp trên là chẻ ra khi và chỉ khi đồng cấu

$$\mathrm{Hom}_R(C, B) \rightarrow \mathrm{Hom}_R(C, C)$$

là toàn cấu. Bởi vì C có biểu diễn hữu hạn nên ta có điều kiện này tương đương với đồng cấu

$$\mathrm{Hom}_{R_{\mathfrak{m}}}(C_{\mathfrak{m}}, B_{\mathfrak{m}}) \rightarrow \mathrm{Hom}_{R_{\mathfrak{m}}}(C_{\mathfrak{m}}, C_{\mathfrak{m}})$$

là toàn cấu với mọi ideal tối đại $\mathfrak{m}$ của R . Điều này là hiển nhiên do $B_{\mathfrak{m}} \cong A_{\mathfrak{m}} \oplus C_{\mathfrak{m}}$. □

Định lý 1.4.4 ([16], Theorem 1.1). Cho M là một môđun hữu hạn sinh trên vành Noether R và $\mathfrak{a}$ là một ideal của R . Xét t và n_0 là các số nguyên dương sao cho $\mathfrak{a}^{n_0} H_{\mathfrak{a}}^i(M) = 0$ với mọi $i < t$. Khi đó, với mọi phần tử $\mathfrak{a}$ -lọc chính quy $x \in \mathfrak{a}^{2n_0}$ của M , ta có

$$H_{\mathfrak{a}}^i(M/xM) \cong H_{\mathfrak{a}}^i(M) \oplus H_{\mathfrak{a}}^{i+1}(M),$$

với mọi $i < t - 1$, và

$$0 :_{H_{\mathfrak{a}}^{t-1}(M/xM)} \mathfrak{a}^{n_0} \cong H_{\mathfrak{a}}^{t-1}(M) \oplus 0 :_{H_{\mathfrak{a}}^t(M)} \mathfrak{a}^{n_0}.$$

Chứng minh. Sử dụng các kí hiệu của Tiết 1.3 với $U = H_{\mathfrak{a}}^0(M)$ và $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^{n_0}$. Khi đó mọi phần tử $\mathfrak{a}$ -lọc chính quy $x \in \mathfrak{a}^{n_0}$ đều thỏa mãn điều kiện $(\sharp)$. Từ $H_{\mathfrak{a}}^i(M) \cong H_{\mathfrak{a}}^i(\overline{M})$ với mọi $i > 0$, ta có $H_{\mathfrak{a}}^i(\overline{M})$ là hữu hạn sinh, và $0 :_{H_{\mathfrak{a}}^t(M)} \mathfrak{a}^{n_0}$ cũng là hữu hạn sinh theo [1, Theorem 1.2] hoặc Chú ý 4.1.7. Địa phương hóa tại các ideal tối đại của R , theo Bổ đề 1.4.3 ta có thể giả sử rằng $(R, \mathfrak{m})$ là một vành Noether địa phương. Xét $x \in \mathfrak{a}^{2n_0}$. Theo Hệ quả 1.4.2 ta có các phần tử $\mathfrak{a}$ -lọc chính quy $a_i, b_i \in \mathfrak{a}^{n_0}$, $i \leq r$ sao cho $x = a_1 b_1 + \cdots + a_r b_r$ và $a_1 b_1 + \cdots + a_j b_j$ là các phần tử $\mathfrak{a}$ -lọc chính quy với mọi $1 \leq j \leq r$. Từ Định lí 1.3.3 ta có

$$E_x^i = E_{a_1 b_1 + \cdots + a_r b_r}^i = E_{a_1 b_1}^i + E_{a_2 b_2}^i + \cdots + E_{a_r b_r}^i.$$

Vì vậy

$$E_x^i = b_1 E_{a_1}^i + b_2 E_{a_2}^i + \cdots + b_r E_{a_r}^i = 0$$

theo Định lí 1.3.4 với mọi $0 \leq i < t - 1$. Vậy ta có

$$H_{\mathfrak{a}}^i(M/xM) \cong H_{\mathfrak{a}}^i(M) \oplus H_{\mathfrak{a}}^{i+1}(\overline{M}) \cong H_{\mathfrak{a}}^i(M) \oplus H_{\mathfrak{a}}^{i+1}(M)$$

với mọi $0 \leq i < t - 1$. Mặt khác, theo Định lí 1.3.4 $F_{a_j b_j}^{t-1}$ là xác định với mọi $j \leq r$. Nên Định lí 1.3.3 suy ra rằng $F_x^{t-1} = F_{a_1 b_1 + \cdots + a_r b_r}^{t-1}$ cũng là xác định và

$$F_x^{t-1} = F_{a_1 b_1}^{t-1} + \cdots + F_{a_r b_r}^{t-1}.$$

Do đó $F_x^{t-1} = 0$ theo Định lí 1.3.4, nên

$$0 :_{H_{\mathfrak{a}}^{t-1}(M/xM)} \mathfrak{a}^{n_0} \cong H_{\mathfrak{a}}^{t-1}(M) \oplus 0 :_{H_{\mathfrak{a}}^t(M)} \mathfrak{a}^{n_0},$$

vì $0 :_{H_{\mathfrak{a}}^{t-1}(M)} \mathfrak{a}^{n_0} = H_{\mathfrak{a}}^{t-1}(M)$. Định lí được hoàn toàn chứng minh. $\square$

Chú ý rằng nếu M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng chiều $d > 0$ trên vành Noether địa phương $(R, \mathfrak{m})$, thì mọi phần tử tham số x của M đều là một phần tử $(\mathfrak{m})$ -lọc chính quy. Kết quả dưới đây là một trường hợp đặc biệt của Định lí 1.4.4 và là câu trả lời khẳng định cho Câu hỏi 1 đã nêu trong Mở đầu.

Hệ quả 1.4.5. Cho M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng chiều $d > 0$ trên vành Noether địa phương $(R, \mathfrak{m})$, và n_0 là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $\mathfrak{m}^{n_0} H_{\mathfrak{m}}^i(M) = 0$ với mọi $i < d$. Khi đó với $x \in \mathfrak{m}^{2n_0}$ là một phần tử tham số của M , ta có

$$H_{\mathfrak{m}}^i(M/xM) \cong H_{\mathfrak{m}}^i(M) \oplus H_{\mathfrak{m}}^{i+1}(M),$$

với mọi $i < d - 1$, và

$$0 :_{H_{\mathfrak{m}}^{d-1}(M/xM)} \mathfrak{m}^{n_0} \cong H_{\mathfrak{m}}^{d-1}(M) \oplus 0 :_{H_{\mathfrak{m}}^d(M)} \mathfrak{m}^{n_0}.$$

Hệ quả 1.4.6. Cho M là một môđun hữu hạn sinh trên vành Noether R và $\mathfrak{a}$ là một idêan của R . Xét t và n_0 là các số nguyên dương sao cho $\mathfrak{a}^{n_0} H_{\mathfrak{a}}^i(M) = 0$ với mọi $i < t$. Cho $x_1, \dots, x_t$ là một dãy $\mathfrak{a}$ -lọc chính quy của M chứa trong $\mathfrak{a}^{2n_0}$. Khi đó với mọi số nguyên dương $k \leq n_0$ và mọi $j = 1, \dots, t$, $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}^k, M/(x_1, \dots, x_j)M)$ là độc lập với cách chọn dãy $x_1, \dots, x_j$. Hơn nữa, ta có

$$\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}^k, M/(x_1, \dots, x_j)M) \cong \bigoplus_{i=0}^j \text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}^k, H_{\mathfrak{a}}^i(M))^{(j)}.$$

Chứng minh. Ta chứng minh bằng quy nạp theo j . Từ Định lí 1.4.4 ta có

$$\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}^k, H_{\mathfrak{a}}^i(M/x_1M)) \cong \text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}^k, H_{\mathfrak{a}}^i(M)) \oplus \text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}^k, H_{\mathfrak{a}}^{i+1}(M))$$

với mọi $i \leq t - 1$. Nên

$$\begin{aligned} \text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}^k, M/(x_1)M) &\cong \text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}^k, H_{\mathfrak{a}}^0(M/x_1M)) \\ &\cong \text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}^k, H_{\mathfrak{a}}^0(M)) \oplus \text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}^k, H_{\mathfrak{a}}^1(M)), \end{aligned}$$

và hệ quả được chứng minh cho $j = 1$. Giả sử rằng $j > 1$. Theo Định lí 1.4.4 ta có $\mathfrak{a}^{n_0} H_{\mathfrak{a}}^i(M/x_1M) = 0$ với mọi $i < t - 1$. Áp dụng giả thiết quy

nạp cho $x_2, \dots, x_j$ và M/x_1M ta có

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{a}^k, M/(x_1, \dots, x_j)M) &\cong \bigoplus_{i=0}^{j-1} \operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{a}^k, H_{\mathfrak{a}}^i(M/x_1M))^{(j-i-1)} \\ &\cong \bigoplus_{i=0}^j \operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{a}^k, H_{\mathfrak{a}}^i(M))^{(j-i)}. \end{aligned}$$

Hệ quả được hoàn toàn chứng minh. $\square$

Cho M là một môđun hữu hạn sinh chiều $d > 0$ trên vành Noether địa phương $(R, \mathfrak{m})$, và $\mathfrak{q}$ là một idêan tham số của M . *Chỉ số khả quy của $\mathfrak{q}$ trên M* được định nghĩa bởi công thức $N_R(\mathfrak{q}, M) = \dim_{R/\mathfrak{m}} \operatorname{Soc}(M/\mathfrak{q}M)$, ở đây $\operatorname{Soc}(N) \cong 0 :_N \mathfrak{m} \cong \operatorname{Hom}(R/\mathfrak{m}, N)$ với một R -môđun bất kì N . Một kết quả quen biết khẳng định rằng nếu M là môđun Cohen-Macaulay, thì $N_R(\mathfrak{q}, M)$ là một bất biến của M . Trong trường hợp M là một môđun Buchsbaum, S. Goto và H. Sakurai đã chứng minh trong [22] rằng với tồn tại một số n đủ lớn sao cho chỉ số khả quy $N_R(\mathfrak{q}, M)$ là một hằng số tức là không phụ thuộc vào việc chọn idêan tham số $\mathfrak{q}$ nằm trong $\mathfrak{m}^n$. Và họ phỏng đoán rằng kết quả trên cũng đúng cho môđun Cohen-Macaulay suy rộng. N.T. Cường và H.L. Trường đã đưa ra câu trả lời khẳng định cho câu hỏi của Goto và Sakurai trong [17]. Bây giờ, sử dụng Hệ quả 1.4.6 ta có thể chứng minh một kết quả mạnh hơn kết quả chính của [17] như sau.

Hệ quả 1.4.7 ([16], Corollary 4.3). *Cho M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng chiều $d > 0$ trên vành Noether địa phương $(R, \mathfrak{m})$, và n_0 là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $\mathfrak{m}^{n_0} H_{\mathfrak{m}}^i(M) = 0$ với mọi $i < d$. Khi đó, với mọi idêan tham số $\mathfrak{q}$ của M chứa trong $\mathfrak{m}^{2n_0}$ và $k \leq n_0$, độ dài $\ell_R((\mathfrak{q}M :_M \mathfrak{m}^k)/\mathfrak{q}M)$ là một hằng số và*

$$\ell_R((\mathfrak{q}M :_M \mathfrak{m}^k)/\mathfrak{q}M) = \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} \ell_R(0 :_{H_{\mathfrak{m}}^i(M)} \mathfrak{m}^k).$$

Nói riêng, chỉ số khả quy $N_R(\mathfrak{q}, M)$ là một hằng số và

$$N_R(\mathfrak{q}, M) = \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} \dim_{R/\mathfrak{m}} \text{Soc}(H_{\mathfrak{m}}^i(M)).$$

Chứng minh. Khẳng định được suy ra trực tiếp từ Hệ quả 1.4.6 và các đẳng cấu $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{m}^k, M/\mathfrak{q}M) \cong (\mathfrak{q}M :_M \mathfrak{m}^k)/\mathfrak{q}M$ và $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{m}^k, H_{\mathfrak{m}}^i(M)) \cong 0 :_{H_{\mathfrak{m}}^i(M)} \mathfrak{m}^k$ với mọi i . $\square$

Kết luận Chương 1. Trong chương này chúng tôi đã thu được các kết quả sau.

1. Xây dựng phương pháp chứng minh các dãy khớp ngắn của các môđun đối đồng điều địa phương là chẻ ra (Tiết 1.3).
2. Đưa ra Định lý chẻ ra của đối đồng điều địa phương 1.4.4 với điều kiện $H_{\mathfrak{a}}^i(M)$ là R -môđun hữu hạn sinh với mọi i nhỏ hơn một số nguyên dương t nào đó.
3. Áp dụng Định lý 1.4.4 cho môđun Cohen-Macaulay suy rộng và chứng minh tính chất ổn định của chỉ số khả quy của iđêan tham số của môđun Cohen-Macaulay suy rộng (Hệ quả 1.4.7).

Chương 2

Tính chất ổn định của hệ tham số tốt của môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy

Trong chương này ta luôn xét $(R, \mathfrak{m})$ là một vành Noether địa phương, và M là một R -môđun hữu hạn sinh chiều $d > 0$. Ta biết rằng nếu M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng, thì các ideal tham số của M có tính chất ổn định khi chúng nằm trong một lũy thừa đủ lớn của $\mathfrak{m}$. Chẳng hạn, ta có thể chọn một số nguyên n sao cho với mọi ideal tham số $\mathfrak{q}$ của M nằm trong $\mathfrak{m}^n$ hiệu $\ell(M/\mathfrak{q}M) - e(\mathfrak{q}; M)$ và chỉ số khả quy của $\mathfrak{q}$ trên M , $N_R(\mathfrak{q}, M)$, là các bất biến của môđun (xem Định lý 1.1.12 và Hệ quả 1.4.7). Mục tiêu của chương này là mở rộng các kết quả trên cho một lớp môđun rộng hơn là lớp môđun *Cohen-Macaulay suy rộng dãy* và cho các *hệ tham số tốt* (xem các Định lý 2.2.5 và 2.2.8). Nhắc lại rằng lớp môđun *Cohen-Macaulay dãy* được giới thiệu bởi R.P. Stanley cho trường hợp vành phân bậc (xem [50]), trường hợp vành địa phương bởi Schenzel trong [46] và bởi N.T. Cường và L.T. Nhân trong [15]. Khái niệm hệ tham số tốt được giới thiệu bởi N.T. Cường và Đ.T. Cường trong [12]. Các kết quả chính sẽ được chứng minh trong Tiết 2.2. Trong Tiết 2.1 chúng tôi nhắc lại các khái niệm về môđun dãy và hệ tham số tốt.

2.1 Môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy và hệ tham số tốt

Trong tiết này chúng tôi nhắc lại các khái niệm *lọc chiều của môđun*, *hệ tham số tốt*, *môđun Cohen-Macaulay (suy rộng) dãy*, và mối liên hệ của chúng. Các trình bày chi tiết có thể xem trong [12] và [13].

2.1.1 Lọc chiều và hệ tham số tốt

Định nghĩa 2.1.1.

(i) Ta nói một lọc hữu hạn

$$\mathcal{F} : M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_t = M$$

của các môđun con của M là thỏa mãn *điều kiện chiều* nếu $\dim M_0 < \dim M_1 < \cdots < \dim M_t$, và khi đó ta nói độ dài của lọc $\mathcal{F}$ là t . Để thuận tiện, ta luôn giả sử rằng $\dim M_1 > 0$.

(ii) Một lọc các môđun con $\mathcal{D} : D_0 \subseteq D_1 \subseteq \cdots \subseteq D_t = M$ của M được gọi là *lọc chiều* của M nếu hai điều kiện sau thỏa mãn:

(a) D_{i-1} là môđun con lớn nhất của D_i mà $\dim D_{i-1} < \dim D_i$ với mọi $i = t, t-1, \dots, 1$.

(b) $D_0 = H_m^0(M)$.

Định nghĩa 2.1.2. Cho $\mathcal{F} : M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_t = M$ là một lọc thỏa mãn điều kiện chiều. Đặt $d_i = \dim M_i$ với mọi $i \leq t$. Một hệ tham số $\underline{x} = x_1, \dots, x_d$ của M được gọi là một *hệ tham số tốt của M tương ứng với lọc $\mathcal{F}$* nếu $M_i \cap (x_{d_i+1}, \dots, x_d)M = 0$ với mọi $i = 0, 1, \dots, t-1$. Một hệ tham số tốt tương ứng với lọc chiều của M được gọi đơn giản là *một hệ tham số tốt của M* .

Chú ý 2.1.3 (xem [12]).

- (i) Theo tính chất Noether của M lọc chiều $\mathcal{D} : D_0 \subseteq D_1 \subseteq \dots \subseteq D_t = M$ luôn tồn tại và là duy nhất. Hơn nữa, nếu $\bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Ass} M} N(\mathfrak{p}) = 0$ là một phân tích nguyên sơ rút gọn của môđun con không của M , thì $D_i = \bigcap_{\dim R/\mathfrak{p} \geq d_{i+1}} N(\mathfrak{p})$, ở đây $d_i = \dim D_i$. Đặt $N_i = \bigcap_{\dim R/\mathfrak{p} \leq d_i} N(\mathfrak{p})$. Thì $D_i \cap N_i = 0$ and $\dim M/N_i = d_i$. Theo Định lí tránh nguyên tố ta có thể tìm được một hệ tham số $\underline{x} = x_1, \dots, x_d$ của M sao cho $x_{d_{i+1}}, \dots, x_d \in \text{Ann} M/N_i$ với mọi $i < t$. Cho nên $(x_{d_{i+1}}, \dots, x_d)M \cap D_i \subseteq N_i \cap D_i = 0$. Vậy $\underline{x} = x_1, \dots, x_d$ là một hệ tham số tốt của M .
- (ii) Một hệ tham số tốt của M là một hệ tham số tốt ứng với một lọc thỏa mãn điều kiện chiều bất kì.
- (iii) Nếu $\underline{x} = x_1, \dots, x_d$ là một hệ tham số tốt của M tương ứng với lọc $\mathcal{F}$, thì $\underline{x}^{\underline{n}} = x_1^{n_1}, \dots, x_d^{n_d}$ cũng là một hệ tham số tốt của M tương ứng với lọc $\mathcal{F}$ với mọi bộ số nguyên dương $\underline{n} = (n_1, \dots, n_d)$.
- (iv) Trong Chương 3 ta thường gọi D_{t-1} là *thành phần không trộn lẫn của* M và kí hiệu là $U_M(0)$ (xem Định nghĩa 3.2.1).

2.1.2 Môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy

Định nghĩa 2.1.4. Cho $\mathcal{F} : M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots \subseteq M_t = M$ là một lọc thỏa mãn điều kiện chiều. Đặt $d_i = \dim M_i$ với mọi $i \leq t$, và xét $\underline{x} = x_1, \dots, x_d$ là một hệ tham số tốt của M tương ứng với lọc $\mathcal{F}$. Khi đó $x_1, \dots, x_{d_i}$ là một hệ tham số của M_i với mọi $i \leq t$. Cho nên ta có thể định nghĩa

$$I_{\mathcal{F}, M}(\underline{x}) = \ell(M/(\underline{x})M) - \sum_{i=0}^t e(x_1, \dots, x_{d_i}; M_i),$$

ở đây $e(x_1, \dots, x_{d_i}; M_i)$ là bội Serre và $e(x_1, \dots, x_{d_0}; M_0) = \ell(M_0)$ nếu $\dim M_0 = 0$.

Có thể thấy hiệu $I_{\mathcal{F}, M}(\underline{x})$ trong định nghĩa trên trong trường hợp lọc $\mathcal{F} : 0 \subseteq M$ chính là hiệu $I(\underline{x}) = \ell(M/(\underline{x})M) - e(x_1, \dots, x_d; M)$ quen

thuộc (xem 1.1.3). Dưới đây là một số tính chất đáng chú ý của $I_{\mathcal{F},M}(\underline{x})$ (xem [12, Lemma 2.6 và Proposition 2.9]).

Chú ý 2.1.5. Cho $\mathcal{F}$ là một lọc thỏa mãn điều kiện chiều và $\underline{x} = x_1, \dots, x_d$ là một hệ tham số tốt của M tương ứng với lọc $\mathcal{F}$. Ta có

(i) $I_{\mathcal{F},M}(\underline{x}) \geq 0$.

(ii) Kí hiệu $\underline{x}^{\underline{n}} = x_1^{n_1}, \dots, x_d^{n_d}$ với mọi bộ số nguyên dương $\underline{n} = (n_1, \dots, n_d)$ và coi $I_{\mathcal{F},M}(\underline{x}^{\underline{n}})$ như là một hàm theo các biến $n_1, \dots, n_d$. Khi đó hàm này là một hàm không giảm theo nghĩa $I_{\mathcal{F},M}(\underline{x}^{\underline{n}}) \leq I_{\mathcal{F},M}(\underline{x}^{\underline{m}})$ với mọi $n_i \leq m_i, i = 1, \dots, d$.

Tương tự như với hiệu $I(\underline{x}) = \ell(M/(\underline{x})M) - e(x_1, \dots, x_d; M)$ được dùng để đặc trưng tính Cohen-Macaulay (suy rộng) của môđun M , N.T. Cường và Đ.T. Cường đã dùng hiệu $I_{\mathcal{F},M}(\underline{x})$ để đặc trưng tính Cohen-Macaulay (suy rộng) dãy của môđun M (xem [12], [13]).

Định nghĩa 2.1.6. Cho $\mathcal{F} : M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots \subseteq M_t = M$ là một lọc các môđun con của M . Thì lọc $\mathcal{F}$ được gọi là *một lọc Cohen-Macaulay (suy rộng)* nếu nó thỏa mãn điều kiện chiều, $\dim M_0 = 0$ và $M_1/M_0, \dots, M_t/M_{t-1}$ là các môđun Cohen-Macaulay (suy rộng). Ta nói M là *một môđun Cohen-Macaulay (suy rộng) dãy* nếu nó có một lọc Cohen-Macaulay (suy rộng).

Ta kết thúc tiết này bằng một số kết quả về môđun Cohen-Macaulay (suy rộng) dãy được chứng minh trong [12] và [13].

Mệnh đề 2.1.7. Cho M là một môđun Cohen-Macaulay dãy với lọc Cohen-Macaulay $\mathcal{F} : M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots \subseteq M_t = M$. Thì:

(i) Lọc Cohen-Macaulay $\mathcal{F}$ chính là lọc chiều $\mathcal{D}$ của M .

(ii) $H_{\mathfrak{m}}^j(M/D_i) = 0$ với mọi $i = 0, \dots, t-1$ và mọi $j \leq \dim M_{i+1} - 1$

(iii) Nếu $\underline{x} = x_1, \dots, x_d$ là một hệ tham số tốt của M thì $I_{\mathcal{D},M}(\underline{x}) = 0$.

Mệnh đề 2.1.8. Cho M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy với lọc Cohen-Macaulay suy rộng $\mathcal{F} : M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots \subseteq M_t = M$. Thì:

- (i) Lọc chiều $\mathcal{D}$ của M cũng là một lọc Cohen-Macaulay suy rộng. Hơn nữa, $\ell(D_i/M_i) < \infty$ với mọi $i < t$.
- (ii) M_0 và $H_{\mathfrak{m}}^j(M/M_i)$ có độ dài hữu hạn với mọi $i \leq t-1$ và mọi $j \leq \dim M_{i+1} - 1$.
- (iii) Đặt $I_{\mathcal{F}}(M) = \sup_{\underline{x}} I_{\mathcal{F},M}(\underline{x})$, với $\underline{x} = x_1, \dots, x_d$ chạy trên tất cả các hệ tham số tốt của M tương ứng với $\mathcal{F}$. Thì

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{F}}(M) &= \ell(H_{\mathfrak{m}}^0(M/M_0)) \\ &+ \sum_{i=0}^{t-1} \sum_{j=1}^{d_{i+1}-1} \left(\binom{d_{i+1}-1}{j} - \binom{d_i-1}{j} \right) \ell(H_{\mathfrak{m}}^j(M/M_i)). \end{aligned}$$

Hơn nữa, nếu $\underline{x}$ là một hệ tham số tốt của M tương ứng với lọc $\mathcal{F}$, thì $I_{\mathcal{F},M}(x_1^{n_1}, \dots, x_d^{n_d}) = I_{\mathcal{F}}(M)$ với mọi $n_1, \dots, n_d \gg 0$.

2.2 Một số tính chất ổn định

Mục đích của tiết này là chứng minh một số kết quả về tính chất ổn định của hệ tham số tốt của các môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy đã được giới thiệu ở đầu chương.

Kí hiệu 2.2.1. Trong tiết này ta luôn xét

- (i) M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy chiều $d > 0$ với lọc Cohen-Macaulay suy rộng $\mathcal{F} : M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots \subseteq M_t = M$, $d_i = \dim M_i$ với mọi $i = 0, \dots, t$.
- (ii) Lọc chiều của M là $\mathcal{D} : H_{\mathfrak{m}}^0(M) = D_0 \subseteq D_1 \subseteq \dots \subseteq D_t = M$.

(iii) Đặt $I_{\mathcal{F}}(M) = \sup_{\underline{x}} I_{\mathcal{F},M}(\underline{x})$, với $\underline{x} = x_1, \dots, x_d$ chạy trên tất cả các hệ tham số tốt của M tương ứng với $\mathcal{F}$. Ta có $I_{\mathcal{F}}(M)$ là một hằng số cho bởi Mệnh đề 2.1.8 (iii).

(iv) Theo Mệnh đề 2.1.8 (ii) ta có $H_{\mathfrak{m}}^j(M/M_i)$ có độ dài hữu hạn với mọi $i \leq t-1$ và với mọi $j \leq d_{i+1}-1$, nên tồn tại một số nguyên dương n_0 sao cho $\mathfrak{m}^{n_0} H_{\mathfrak{m}}^j(M/M_i) = 0$ với mọi $i \leq t-1$ và với mọi $j \leq d_{i+1}-1$

(v) Đặt $\mathfrak{c}_i = \text{Ann} M_i$ với mọi $i = 0, \dots, t$.

Bổ đề 2.2.2. Cho $x \in \mathfrak{m}^{n_0} \mathfrak{c}_{t-1}$ và $y \in \mathfrak{m}^{n_0}$ là các phần tử tham số của M . Với mọi môđun con N của M thỏa mãn $N \subseteq D_{t-1}$, với mọi $i < d-1$, ta luôn có dãy khớp các môđun sau

$$0 \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^i(M/N) \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^i(M/(xyM + N)) \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^{i+1}(M/D_{t-1}) \longrightarrow 0.$$

Chứng minh. Chú ý rằng $D_{t-1}/M_{t-1} = H_{\mathfrak{m}}^0(M/M_{t-1})$. Nên

$$0 :_M x \supseteq 0 :_M \mathfrak{m}^{n_0} \mathfrak{c}_{t-1} = (0 :_M \mathfrak{c}_{t-1}) :_M \mathfrak{m}^{n_0} \supseteq M_{t-1} :_M \mathfrak{m}^{n_0} = D_{t-1}.$$

Do đó $D_{t-1} \subseteq N :_M x \subseteq D_{t-1} :_M x = D_{t-1}$. Dẫn đến $N :_M x = D_{t-1}$, nên $N :_M xy = D_{t-1}$. Đặt $\overline{M} = M/D_{t-1}$. Ta có biểu đồ giao hoán

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \overline{M} & \xrightarrow{xy} & M/N & \longrightarrow & M/(xyM + N) \longrightarrow 0 \\ & & y \downarrow & & \text{id} \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \overline{M} & \xrightarrow{x} & M/N & \longrightarrow & M/(xM + N) \longrightarrow 0. \end{array}$$

Tác động hàm tử $H_{\mathfrak{m}}^i(\bullet)$ vào biểu đồ trên ta được biểu đồ giao hoán

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_{\mathfrak{m}}^i(\overline{M}) & \xrightarrow{\psi^i} & H_{\mathfrak{m}}^i(M/N) & \longrightarrow & \cdots \\ & & y \downarrow & & \text{id} \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_{\mathfrak{m}}^i(\overline{M}) & \xrightarrow{\varphi^i} & H_{\mathfrak{m}}^i(M/N) & \longrightarrow & \cdots, \end{array}$$

ở đây ψ^i, φ^i là các đồng cấu dẫn suất của $\overline{M} \xrightarrow{xy} M/N, \overline{M} \xrightarrow{x} M/N$, tương ứng. Dễ thấy rằng $H_{\mathfrak{m}}^0(\overline{M}) = 0$ và $H_{\mathfrak{m}}^i(\overline{M}) \cong H_{\mathfrak{m}}^i(M/M_{t-1})$ với mọi $0 < i$. Ta có $yH_{\mathfrak{m}}^i(\overline{M}) = 0$ với mọi $0 < i < d$ vì $y \in \mathfrak{m}^{n_0}$. Nên $\psi^i = 0$ với mọi

$i < d$, và ta có dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow H_{\mathfrak{m}}^i(M/N) \rightarrow H_{\mathfrak{m}}^i(M/(xyM + N)) \rightarrow H_{\mathfrak{m}}^{i+1}(\overline{M}) \rightarrow 0$$

với mọi $i < d - 1$. □

Lấy một phần tử tham số $x \in \mathfrak{m}^{2n_0}\mathfrak{c}_{t-1}$ của M . Với mỗi $i \leq t - 1$ và $j < d - 1$ ta gọi $E_x^{i,j}$ là phần tử của $\text{Ext}(H_{\mathfrak{m}}^{j+1}(M/D_{t-1}), H_{\mathfrak{m}}^j(M/M_i))$ đại diện bởi dãy khớp ngắn sau nếu nó tồn tại

$$0 \rightarrow H_{\mathfrak{m}}^j(M/M_i) \rightarrow H_{\mathfrak{m}}^j(M/(xM + M_i)) \rightarrow H_{\mathfrak{m}}^{j+1}(M/D_{t-1}) \rightarrow 0.$$

Mệnh đề 2.2.3. *Cho x là một phần tử tham số của M . Khi đó*

(i) *Nếu $x \in \mathfrak{m}^{2n_0}\mathfrak{c}_{t-1}$, thì $E_x^{i,j}$ là xác định với mọi $i \leq t-1$ và mọi $j < d-1$.*

(ii) *Nếu $x \in \mathfrak{m}^{3n_0}\mathfrak{c}_{t-1}$, thì $E_x^{i,j} = 0$ với mọi $i \leq t-1$ và mọi $j < d-1$.*

Chứng minh. (i) Theo Bổ đề 2.2.2, nếu $a \in \mathfrak{m}^{n_0}\mathfrak{c}_{t-1}$ và $b \in \mathfrak{m}^{n_0}$ là các phần tử tham số của M , thì $E_{ab}^{i,j}$ là xác định với mọi $i \leq t-1$ và mọi $j < d-1$. Từ Bổ đề 1.4.1 ta có với mỗi phần tử tham số $x \in \mathfrak{m}^{2n_0}\mathfrak{c}_{t-1}$ luôn tồn tại các phần tử tham số $a_1, \dots, a_r \in \mathfrak{m}^{n_0}\mathfrak{c}_{t-1}$ và $b_1, \dots, b_r \in \mathfrak{m}^{n_0}$ sao cho $x = a_1b_1 + \dots + a_rb_r$ và $a_1b_1 + \dots + a_kb_k$ là phần tử tham số với mọi $k \leq r$. Nên $E_x^{i,j} = E_{a_1b_1}^{i,j} + \dots + E_{a_rb_r}^{i,j}$ là xác định với mọi $i \leq t-1$ và mọi $j < d-1$ theo Định lí 1.3.3 (i).

(ii) Tương tự, lại áp dụng Bổ đề 1.4.1 ta có thể chọn các phần tử tham số $a_1, \dots, a_r \in \mathfrak{m}^{2n_0}\mathfrak{c}_{t-1}$ và $b_1, \dots, b_r \in \mathfrak{m}^{n_0}$ sao cho $x = a_1b_1 + \dots + a_rb_r$ và $a_1b_1 + \dots + a_kb_k$ là các phần tử tham số với mọi $k \leq r$. Các Định lí 1.3.3 và 1.3.4 suy ra

$$E_x^{i,j} = E_{a_1b_1 + \dots + a_rb_r}^{i,j} = b_1E_{a_1}^{i,j} + \dots + b_rE_{a_r}^{i,j} = 0$$

với mọi $i \leq t-1$ và mọi $j < d-1$. □

Lấy $\underline{x} = x_1, \dots, x_d$ là một hệ tham số tốt của M tương ứng với lọc $\mathcal{F}$. Nhắc lại rằng, theo [13, Lemma 3.6], $M/x_d M$ cũng là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy với lọc Cohen-Macaulay suy rộng

$$\mathcal{F}_d : M_0 \cong (M_0 + x_d M)/x_d M \subset \dots \subset M_s \cong (M_s + x_d M)/x_d M \subset M/x_d M,$$

ở đây $s = t - 1$ nếu $d_{t-1} < d - 1$, và $s = t - 2$ nếu $d_{t-1} = d - 1$. Hơn nữa, $\underline{x}' = x_1, \dots, x_{d-1}$ là một hệ tham số tốt của $M/x_d M$ tương ứng với lọc $\mathcal{F}_d$.

Bổ đề 2.2.4. *Giả sử $d > 1$. Khi đó $I_{\mathcal{F}_d, M/x_d M}(\underline{x}') = I_{\mathcal{F}, M}(\underline{x})$.*

Chứng minh. Từ định nghĩa của $I_{\mathcal{F}, M}(\underline{x})$ và $I_{\mathcal{F}_d, M/x_d M}(\underline{x}')$, ta chỉ cần chứng minh rằng $e(\underline{x}'; M/x_d M) = e(\underline{x}; M)$ nếu $d_{t-1} < d - 1$, và $e(\underline{x}'; M/x_d M) = e(\underline{x}; M) + e(\underline{x}'; M_{t-1})$ nếu $d_{t-1} = d - 1$. Theo định nghĩa của bội Serre ta có

$$e(\underline{x}'; M/x_d M) = e(\underline{x}; M) + e(\underline{x}'; 0 :_M x_d).$$

Vì D_{t-1} là môđun con lớn nhất của M có chiều nhỏ hơn d , nên $0 :_M x_d \subseteq D_{t-1}$. Nên $M_{t-1} \subseteq 0 :_M x_d$. Theo Mệnh đề 2.1.8 (i) ta có $\dim M_{t-1} = \dim 0 :_M x_d$ và $\ell((0 :_M x_d)/M_{t-1}) < \infty$. Do vậy $e(\underline{x}'; 0 :_M x_d) = e(\underline{x}'; M_{t-1})$. Dẫn đến $e(\underline{x}'; M/x_d M) = e(\underline{x}; M)$ nếu $d_{t-1} < d - 1$, và $e(\underline{x}'; M/x_d M) = e(\underline{x}; M) + e(\underline{x}'; M_{t-1})$ nếu $d_{t-1} = d - 1$.

□

Định lí dưới đây là một mở rộng của [13, Theorem 4.3]. Đây là kết quả chính thứ nhất của chương này.

Định lí 2.2.5 ([42], Theorem 3.6). *Cho M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy chiều $d > 0$ với lọc Cohen-Macaulay suy rộng $\mathcal{F} : M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots \subseteq M_t = M$, $d_i = \dim M_i$ với mọi $i = 0, \dots, t$. Xét n_0 là một số nguyên dương sao cho $\mathfrak{m}^{n_0} H_{\mathfrak{m}}^j(M/M_i) = 0$ với mọi $i \leq t - 1$ và với mọi $j \leq d_{i+1} - 1$. Đặt $\mathfrak{c}_i = \text{Ann} M_i$ với mọi $i = 0, \dots, t$. Các khẳng định sau là đúng*

- (i) Lấy $\underline{x} = x_1, \dots, x_d$ là một hệ tham số tốt của M tương ứng với lọc $\mathcal{F}$ sao cho $x_j \in \mathfrak{m}^{3n_0} \mathfrak{c}_i$ với mọi $0 \leq i \leq t-1$ và với mọi $d_i < j \leq d_{i+1}$. Khi đó $I_{\mathcal{F},M}(\underline{x}) = I_{\mathcal{F}}(M)$ và

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{F}}(M) &= \ell(H_{\mathfrak{m}}^0(M/M_0)) \\ &+ \sum_{i=0}^{t-1} \sum_{j=1}^{d_{i+1}-1} \left(\binom{d_{i+1}-1}{j} - \binom{d_i-1}{j} \right) \ell(H_{\mathfrak{m}}^j(M/M_i)). \end{aligned}$$

- (ii) $I_{\mathcal{F},\mathcal{M}}(\underline{x}) = I_{\mathcal{F}}(M)$ với mọi hệ tham số tốt $\underline{x} = x_1, \dots, x_d$ của M tương ứng với lọc $\mathcal{F}$ nằm trong $\mathfrak{m}^n$ với $n \gg 0$.

Chứng minh. (i) Ta chứng minh khẳng định bằng quy nạp theo d . Để đơn giản ta dùng kí hiệu $h^i(\bullet)$ thay cho $\ell(H_{\mathfrak{m}}^i(\bullet))$. Trường hợp $d = 1$ là tầm thường vì khi đó M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng. Giả sử $d > 1$ và khẳng định được chứng minh với mọi giá trị nhỏ hơn d . Từ $x_d \in \mathfrak{m}^{3n_0} \mathfrak{c}_{t-1}$ và Mệnh đề 2.2.3 ta có $h^j(M/(M_i + x_d M)) = h^j(M/M_i) + h^{j+1}(M/M_{t-1})$ với mọi $i \leq t-1$ và mọi $j < d_{i+1} - 1$. Theo giả thiết quy nạp ta có

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{F}_d, M/x_d M}(\underline{x}') &= h^0(M/(M_0 + x_d M)) \\ &+ \sum_{i=0}^{s-1} \sum_{j=1}^{d_{i+1}-1} \left(\binom{d_{i+1}-1}{j} - \binom{d_i-1}{j} \right) h^j(M/(M_i + x_d M)) \\ &+ \sum_{j=1}^{d-2} \left(\binom{d-2}{j} - \binom{d_s-1}{j} \right) h^j(M/(M_s + x_d M)). \end{aligned}$$

Xét hai trường hợp.

Trường hợp 1. $d_{t-1} < d-1$, thì $s = t-1$. Từ Bổ đề 2.2.4 ta có

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{F},M}(\underline{x}) &= h^0(M/M_0) + h^1(M/M_{t-1}) \\ &+ \sum_{i=0}^{t-2} \sum_{j=1}^{d_{i+1}-1} \left(\binom{d_{i+1}-1}{j} - \binom{d_i-1}{j} \right) (h^j(M/M_i) + h^{j+1}(M/M_{t-1})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^{d-2} \left(\binom{d-2}{j} - \binom{d_{t-1}-1}{j} \right) (h^j(M/M_{t-1}) + h^{j+1}(M/M_{t-1})) \\
= & h^0(M/M_0) + \sum_{i=0}^{t-2} \sum_{j=1}^{d_{i+1}-1} \left(\binom{d_{i+1}-1}{j} - \binom{d_i-1}{j} \right) h^j(M/M_i) \\
& + h^1(M/M_{t-1}) + \sum_{i=0}^{t-2} \sum_{j=1}^{d_{i+1}-1} \left(\binom{d_{i+1}-1}{j} - \binom{d_i-1}{j} \right) h^{j+1}(M/M_{t-1}) \\
& + \sum_{j=1}^{d-2} \left(\binom{d-1}{j} - \binom{d_{t-1}}{j} \right) h^j(M/M_{t-1}) \\
= & h^0(M/M_0) + \sum_{i=0}^{t-2} \sum_{j=1}^{d_{i+1}-1} \left(\binom{d_{i+1}-1}{j} - \binom{d_i-1}{j} \right) h^j(M/M_i) \\
& + h^1(M/M_{t-1}) + \sum_{j=2}^{d_{t-1}} \binom{d_{t-1}-1}{j-1} h^j(M/M_{t-1}) \\
& + \sum_{j=1}^{d-2} \left(\binom{d-1}{j} - \binom{d_{t-1}}{j} \right) h^j(M/M_{t-1}) \\
= & h^0(M/M_0) + \sum_{i=0}^{t-1} \sum_{j=1}^{d_{i+1}-1} \left(\binom{d_{i+1}-1}{j} - \binom{d_i-1}{j} \right) h^j(M/M_i).
\end{aligned}$$

Trường hợp 2. $d_{t-1} = d - 1$, thì $s = t - 2$. Ta có

$$\begin{aligned}
I_{\mathcal{F},M}(\underline{x}) &= h^0(M/M_0) + h^1(M/M_{t-1}) \\
& + \sum_{i=0}^{t-3} \sum_{j=1}^{d_{i+1}-1} \left(\binom{d_{i+1}-1}{j} - \binom{d_i-1}{j} \right) (h^j(M/M_i) + h^{j+1}(M/M_{t-1})) \\
& + \sum_{j=1}^{d-2} \left(\binom{d-2}{j} - \binom{d_{t-2}-1}{j} \right) (h^j(M/M_{t-2}) + h^{j+1}(M/M_{t-1})) \\
= & h^0(M/M_0) + \sum_{i=0}^{t-2} \sum_{j=1}^{d_{i+1}-1} \left(\binom{d_{i+1}-1}{j} - \binom{d_i-1}{j} \right) h^j(M/M_i) \\
& + h^1(M/M_{t-1}) + \sum_{i=0}^{t-3} \sum_{j=1}^{d_{i+1}-1} \left(\binom{d_{i+1}-1}{j} - \binom{d_i-1}{j} \right) h^{j+1}(M/M_{t-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^{d-2} \left(\binom{d-2}{j} - \binom{d_{t-2}-1}{j} \right) h^{j+1}(M/M_{t-1}) \\
& = h^0(M/M_0) + \sum_{i=0}^{t-2} \sum_{j=1}^{d_{i+1}-1} \left(\binom{d_{i+1}-1}{j} - \binom{d_i-1}{j} \right) h^j(M/M_i) \\
& \quad + h^1(M/M_{t-1}) + \sum_{j=2}^{d_{t-2}-1} \binom{d_{t-2}-1}{j-1} h^j(M/M_{t-1}) \\
& \quad + \sum_{j=2}^{d-1} \left(\binom{d-2}{j-1} - \binom{d_{t-2}-1}{j-1} \right) h^j(M/M_{t-1}) \\
& = h^0(M/M_0) + \sum_{i=0}^{t-1} \sum_{j=1}^{d_{i+1}-1} \left(\binom{d_{i+1}-1}{j} - \binom{d_i-1}{j} \right) h^j(M/M_i).
\end{aligned}$$

Do $I_{\mathcal{F}, \mathcal{M}}(\underline{y}^n)$ là một hàm không giảm theo $\underline{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d$ với mọi hệ tham số tốt $\underline{y} = y_1, \dots, y_d$ của M tương ứng với lọc $\mathcal{F}$ (xem Chú ý 2.1.5), ta có $I_{\mathcal{F}}(M) = I_{\mathcal{F}, \mathcal{M}}(\underline{x})$.

(ii) Theo Bổ đề Artin-Rees, tồn tại số nguyên dương k sao cho

$$\mathfrak{m}^n \cap \mathfrak{c}_i = \mathfrak{m}^{n-k}(\mathfrak{m}^k \cap \mathfrak{c}_i) \subseteq \mathfrak{m}^{n-k} \mathfrak{c}_i$$

với mọi $n \geq k$ và mọi $i = 0, \dots, t-1$. Cho nên, (i) suy ra rằng $I_{\mathcal{F}, \mathcal{M}}(\underline{x}) = I_{\mathcal{F}}(M)$ với mọi hệ tham số tốt $\underline{x} = x_1, \dots, x_d$ của M tương ứng với lọc $\mathcal{F}$ chứa trong $\mathfrak{m}^{3n_0+k}$. $\square$

Nếu $x \in \mathfrak{m}^{2n_0} \mathfrak{c}_{t-1}$ là một phần tử tham số, thì $E_x^{i,j}$ là xác định với mọi $i \leq t-1$ và mọi $j < d-1$ do Mệnh đề 2.2.3. Nên với mọi $i \leq t-1$, dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow \overline{M} \xrightarrow{x} M/M_i \rightarrow M/(M_i + xM) \rightarrow 0,$$

với $\overline{M} = M/D_{t-1}$, cảm sinh dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow H_{\mathfrak{m}}^{d-1}(M/M_i) \rightarrow H_{\mathfrak{m}}^{d-1}(M/(M_i + xM)) \rightarrow 0 :_{H_{\mathfrak{m}}^d(M)} x \rightarrow 0.$$

Tác động hàm tử $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(R/\mathfrak{m}, \bullet)$ vào dãy khớp ngắn trên ta được dãy khớp

trái

$$0 \rightarrow 0 :_{H_{\mathfrak{m}}^{d-1}(M/M_i)} \mathfrak{m} \rightarrow 0 :_{H_{\mathfrak{m}}^{d-1}(M/(M_i+xM))} \mathfrak{m} \rightarrow 0 :_{H_{\mathfrak{m}}^d(M)} \mathfrak{m}$$

với mọi $i \leq t-1$. Với mọi $i \leq t-1$ ta kí hiệu $F_x^{i,d-1}$ là phần tử của môđun $\text{Ext}(0 :_{H_{\mathfrak{m}}^d(M)} \mathfrak{m}; 0 :_{H_{\mathfrak{m}}^{d-1}(M/M_i)} \mathfrak{m})$ đại diện bởi dãy khớp ngắn dưới đây nếu nó tồn tại

$$0 \rightarrow 0 :_{H_{\mathfrak{m}}^{d-1}(M/M_i)} \mathfrak{m} \rightarrow 0 :_{H_{\mathfrak{m}}^{d-1}(M/(M_i+xM))} \mathfrak{m} \rightarrow 0 :_{H_{\mathfrak{m}}^d(M)} \mathfrak{m} \rightarrow 0.$$

Mệnh đề 2.2.6. Cho x và y là các phần tử tham số của M . Khi đó

(i) Nếu $x \in \mathfrak{m}^{2n_0} \mathfrak{c}_{t-1}$, thì $F_{xy}^{i,d-1}$ là xác định với mọi $i \leq t-1$.

(ii) Nếu $x \in \mathfrak{m}^{2n_0+1} \mathfrak{c}_{t-1}$, thì $F_x^{i,d-1}$ là xác định với mọi $i \leq t-1$.

Chứng minh. (i) Với mọi $i \leq t-1$, xét biểu đồ giao hoán sau

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \overline{M} & \xrightarrow{x} & M/M_i & \longrightarrow & M/(M_i + xM) \longrightarrow 0 \\ & & \text{id} \downarrow & & y \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \overline{M} & \xrightarrow{xy} & M/M_i & \longrightarrow & M/(M_i + xyM) \longrightarrow 0, \end{array}$$

ở đây $\overline{M} = M/D_{t-1}$. Biểu đồ trên cảm sinh biểu đồ giao hoán

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_{\mathfrak{m}}^{d-1}\left(\frac{M}{M_i}\right) & \longrightarrow & H_{\mathfrak{m}}^{d-1}\left(\frac{M}{M_i + xM}\right) & \longrightarrow & 0 :_{H_{\mathfrak{m}}^d(M)} x \longrightarrow 0 \\ & & y \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H_{\mathfrak{m}}^{d-1}\left(\frac{M}{M_i}\right) & \longrightarrow & H_{\mathfrak{m}}^{d-1}\left(\frac{M}{M_i + xyM}\right) & \longrightarrow & 0 :_{H_{\mathfrak{m}}^d(M)} xy \longrightarrow 0. \end{array}$$

Tác động hàm tử $\text{Ext}_R^i(R/\mathfrak{m}, \bullet)$ vào biểu đồ trên ta được biểu đồ giao hoán

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & 0 :_{H_{\mathfrak{m}}^d(M)} \mathfrak{m} & \xrightarrow{\alpha} & \text{Ext}_R^1(R/\mathfrak{m}, H_{\mathfrak{m}}^{d-1}(M/M_i)) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \text{id} \downarrow & & y \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & 0 :_{H_{\mathfrak{m}}^d(M)} \mathfrak{m} & \xrightarrow{\beta} & \text{Ext}_R^1(R/\mathfrak{m}, H_{\mathfrak{m}}^{d-1}(M/M_i)) & \longrightarrow & \cdots, \end{array}$$

với α, β là các đồng cấu nối. Dẫn đến $\beta = y \circ \alpha = 0$ vì $y \in \mathfrak{m}$. Nên $F_{xy}^{i,d-1}$ là xác định với mọi $i \leq t-1$.

(ii) được suy ra từ (i) bằng cách sử dụng phương pháp như trong chứng minh Mệnh đề 2.2.3 (i). $\square$

Hệ quả 2.2.7. Cho $x \in \mathfrak{m}^{3n_0+1}\mathfrak{c}_{t-1}$ là một phần tử tham số của M . Khi đó

$$s(H_{\mathfrak{m}}^j(M/(xM + M_i))) = s(H_{\mathfrak{m}}^j(M/M_i)) + s(H_{\mathfrak{m}}^{j+1}(M/D_{t-1}))$$

với mọi $i \leq t-1$ và mọi $j \leq d-1$, ở đây $s(N) = \dim_{R/\mathfrak{m}} \text{Soc}(N)$ với mọi R -môđun N .

Chứng minh. Suy ra từ các Mệnh đề 2.2.3 (ii) và 2.2.6 (ii). $\square$

Từ Hệ quả 2.2.7 và bằng phương pháp tương tự như trong chứng minh Định lý 2.2.5 ta được kết quả chính thứ hai như sau.

Định lý 2.2.8 ([42], Theorem 3.9). Cho M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy chiều $d > 0$ với lọc Cohen-Macaulay suy rộng $\mathcal{F} : M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots \subseteq M_t = M$, $d_i = \dim M_i$ với mọi $i = 0, \dots, t$. Xét n_0 là một số nguyên dương sao cho $\mathfrak{m}^{n_0}H_{\mathfrak{m}}^j(M/M_i) = 0$ với mọi $i \leq t-1$ và với mọi $j \leq d_{i+1} - 1$. Đặt $\mathfrak{c}_i = \text{Ann}M_i$ với mọi $i = 0, \dots, t$. Các khẳng định sau là đúng

- (i) Với mọi hệ tham số tốt $\underline{x} = x_1, \dots, x_d$ của M tương ứng với lọc $\mathcal{F}$ thỏa mãn $x_j \in \mathfrak{m}^{3n_0+1}\mathfrak{c}_i$ với mọi $0 \leq i \leq t-1$ và mọi $d_i < j \leq d_{i+1}$, chỉ số khả quy của $(\underline{x})$ trên M là một hằng số và

$$N_R((\underline{x}), M) = s(H_{\mathfrak{m}}^0(M)) + \sum_{i=0}^{t-1} \sum_{j=1}^{d_{i+1}} \left(\binom{d_{i+1}}{j} - \binom{d_i}{j} \right) s(H_{\mathfrak{m}}^j(M/M_i)).$$

- (ii) Tồn tại một số nguyên dương n sao cho chỉ số khả quy của mọi hệ tham số tốt $(\underline{x}) \subseteq \mathfrak{m}^n$ của M tương ứng với lọc $\mathcal{F}$ là một hằng số.

Nhắc lại rằng nếu M là một môđun Cohen-Macaulay dãy, thì lọc Cohen-Macaulay chính là lọc chiều $\mathcal{D}$ của M . Khi đó, $H_{\mathfrak{m}}^j(M/D_i) = 0$ với mọi

$j < d_{i+1}$ và $H_{\mathfrak{m}}^{d_{i+1}}(M/D_i) \cong H_{\mathfrak{m}}^{d_{i+1}}(M)$ (xem Mệnh đề 2.1.7). Từ Định lí 2.2.8 ta thu được kết quả chính của [54] như sau.

Hệ quả 2.2.9. *Cho M là một môđun Cohen-Macaulay dãy chiều d . Khi đó tồn tại một số nguyên dương n sao cho với mọi hệ tham số tốt $\underline{x} = x_1, \dots, x_d$ của M chứa trong $\mathfrak{m}^n$ chỉ số khả quy $N_R((\underline{x}); M)$ là một hằng số và*

$$N_R((\underline{x}); M) = \sum_{i=0}^d \dim_{R/\mathfrak{m}} \text{Soc}(H_{\mathfrak{m}}^i(M)).$$

Kết luận Chương 2. Trong chương này, bằng cách áp dụng các Định lí trên chúng tôi đã một số kết quả về tính chất ổn định của hệ tham số tốt của các môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy. Cụ thể, với M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy chiều $d > 0$ với lọc Cohen-Macaulay suy rộng $\mathcal{F}$. Khi đó, tồn tại một số nguyên dương n sao cho với mọi hệ tham số tốt $\underline{x} = x_1, \dots, x_d$ của M tương ứng với lọc $\mathcal{F}$ chứa trong $\mathfrak{m}^n$ ta có $I_{\mathcal{F}, M}(\underline{x})$ và $N_R((\underline{x}); M)$ là các bất biến của môđun (các Định lí 2.2.5 và 2.2.8).

Chương 3

Tính chẻ ra của đối đồng điều địa phương trong vành địa phương và bậc của một môđun

Trong chương này ta luôn xét $(R, \mathfrak{m})$ là một vành Noether địa phương, và M là một R -môđun hữu hạn sinh chiều $d > 0$. Mục đích của chương này là xây dựng Định lí chẻ ra cho các môđun đối đồng điều địa phương $H_I^i(M)$ trong vành địa phương, đặc biệt khi $I = \mathfrak{m}$. Nhắc lại rằng, trong Chương 1 với $\mathfrak{a}$ là một idêan của vành R (tùy ý), t là một số nguyên dương, và x là một phần tử $\mathfrak{a}$ -lọc chính quy của M ta có $H_{\mathfrak{a}}^i(M/xM) \cong H_{\mathfrak{a}}^i(M) \oplus H_{\mathfrak{a}}^{i+1}(M)$ với mọi $i < t - 1$ nếu các điều kiện sau được thỏa mãn: (1) $H_{\mathfrak{a}}^i(M)$ là hữu hạn sinh với mọi $i < t$; (2) $x \in \mathfrak{a}^{2n_0}$ với n_0 là số nguyên dương thỏa mãn $\mathfrak{a}^{n_0} \subseteq \text{Ann}H_{\mathfrak{a}}^i(M)$ với mọi $i < t$. Có thể thấy rằng để có được tính chất chẻ ra của đối đồng điều địa phương, ta cần chọn phần tử x thích hợp nằm trong linh hoá tử của các môđun đối đồng điều địa phương. Trong Tiết 3.1 chúng ta nhắc lại một số tính chất quan trọng của các idêan $\mathfrak{a}_i = \text{Ann}H_{\mathfrak{m}}^i(M)$, $i \leq d - 1$, và idêan

$$\mathfrak{b}(M) = \cap_{\underline{x}; i=1}^d \text{Ann}(0 : x_i)_{M/(x_1, \dots, x_{i-1})M},$$

với $\underline{x} = x_1, \dots, x_d$ chạy trong tất cả các hệ tham số của M . Mối liên hệ của các idêan trên thể hiện trong các bao hàm thức sau

$$\prod_{i=0}^{d-1} \mathfrak{a}_i(M) \subseteq \mathfrak{b}(M) \subseteq \mathfrak{a}_0(M) \cap \cdots \cap \mathfrak{a}_{d-1}(M).$$

Đặc biệt, nếu R là một ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay, thì $\dim R/\mathfrak{b}(M) \leq d - 1$ (xem Chú ý 3.1.2). Do đó ta có thể tìm được những phần tử tham số x của M nằm trong $\mathfrak{b}(M)$ với nhiều tính chất đặc biệt. Chẳng hạn $0 :_M x$ chính là môđun con lớn nhất của M có chiều nhỏ hơn d , ta kí hiệu môđun con này là $U_M(0)$ và gọi là *thành phần không trộn lẫn của M* . Trong Tiết 3.2 chúng ta chứng minh rằng với $x \in \mathfrak{b}(M)^3$ là một phần tử tham số của M , thì với mọi idêan I ta có $H_I^i(M/xM) \cong H_I^i(M) \oplus H_I^{i+1}(M/U_M(0))$ với mọi $i < d - \dim R/I - 1$ (xem Định lí 3.2.4). Áp dụng Định lí chẻ ra này chúng ta sẽ chỉ ra một số tính chất thú vị của môđun M theo các hệ tham số $\underline{x} = x_1, \dots, x_d$ thỏa mãn tính chất $x_i \in \mathfrak{b}(M/(x_{i+1}, \dots, x_d)M)^3$ với mọi $i \leq d$. Một trong các tính chất đó là tồn tại một dãy môđun $U_i(M)$, $0 \leq i \leq d - 1$, sao cho với mọi hệ tham số $\underline{x} = x_1, \dots, x_d$ của M thỏa mãn $x_i \in \mathfrak{b}(M/(x_{i+1}, \dots, x_d)M)^3$ với mọi $i \leq d$ ta có $U_i(M) \cong U_{M/(x_{i+2}, \dots, x_d)M}(0)$ với mọi $0 \leq i \leq d - 1$ (xem Định lí 3.2.9). Từ những môđun $U_i(M)$ này trong Tiết 3.3 ta sẽ xây dựng một bất biến số của M , và gọi là *bậc không trộn lẫn $\text{udeg}(M)$ của M* . Ta cũng chỉ ra mối liên hệ của $\text{udeg}(M)$ với một số loại bậc đã biết khác của M .

3.1 Linh hoá tử của môđun đối đồng điều địa phương

Trong chương này ta thường xuyên dùng các kí hiệu sau.

Kí hiệu 3.1.1. Cho $(R, \mathfrak{m})$ là một vành Noether địa phương, và M là một R -môđun hữu hạn sinh chiều $d > 0$. Ta định nghĩa

- (i) Với mỗi $i < d$ kí hiệu $\mathfrak{a}_i(M) = \text{Ann} H_{\mathfrak{m}}^i(M)$, và $\mathfrak{a}(M) = \mathfrak{a}_0(M) \cdots \mathfrak{a}_{d-1}(M)$.
- (ii) Đặt $\mathfrak{b}(M) = \bigcap_{\underline{x}; i=1}^d \text{Ann}(0 : x_i)_{M/(x_1, \dots, x_{i-1})M}$ với $\underline{x} = x_1, \dots, x_d$ chạy

trong tất cả các hệ tham số của M .

Linh hoá tử của các môđun đối đồng điều địa phương phản ánh sâu sắc cấu trúc của môđun M , và đóng vai trò then chốt trong việc chứng minh nhiều vấn đề quan trọng của Đại số Giao hoán (xem [44] và [32]). Dưới đây là một số tính chất hữu ích của $\mathfrak{a}(M)$.

Chú ý 3.1.2. (i) Schenzel trong [59, Satz 2.4.5] chứng minh rằng

$$\mathfrak{a}(M) \subseteq \mathfrak{b}(M) \subseteq \mathfrak{a}_0(M) \cap \cdots \cap \mathfrak{a}_{d-1}(M).$$

- (ii) Nếu R là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay, thì $\dim R/\mathfrak{a}_i(M) \leq i$ với mọi $i < d$ (xem [14, Theorem 1.1, Corollary 1.2]). Hơn nữa $\dim R/\mathfrak{a}_i(M) = i$ khi và chỉ khi tồn tại $\mathfrak{p} \in \text{Ass}M$, $\dim R/\mathfrak{p} = i$ (xem [6, Theorem 8.1.1]).
- (iii) Nếu R là ảnh đồng cấu của một vành chính quy, theo G. Faltings trong [58] ta có $\mathfrak{p} \in \text{supp}(M)$ và $\mathfrak{p} \notin V(\mathfrak{a}(M))$ khi và chỉ khi $M_{\mathfrak{p}}$ là Cohen-Macaulay và $\dim M_{\mathfrak{p}} + \dim R/\mathfrak{p} = d$. Kết quả này cũng đúng khi R là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay (xem [4, 9.6.6], [14]).
- (iv) Các khẳng định (ii) và (iii) không còn đúng nữa nếu R không là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay. Miền nguyên địa phương chiều hai được xây dựng bởi M. Nagata là một phản ví dụ (xem [37, Example 2, pp. 203–205]).

Trong toàn bộ chương này ta sẽ luôn xét $(R, \mathfrak{m})$ là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay. Khi đó theo Chú ý 3.1.2 (ii) ta có $\dim R/\mathfrak{a}(M) < d$. Do đó ta có thể chọn một phần tử tham số $x \in \mathfrak{a}(M)$. Từ Chú ý 3.1.2 (iii) là có M_x là một R_x -môđun Cohen-Macaulay. Phần tử tham số $x \in \mathfrak{a}(M)$ được N.T. Cường gọi là *phần tử tham số p-chuẩn tắc* (xem [10]).

Định nghĩa 3.1.3. Một hệ tham số $x_1, \dots, x_d$ của M được gọi là *một hệ tham*

số p -chuẩn tắc của M nếu $x_d \in \mathfrak{a}(M)$ và $x_i \in \mathfrak{a}(M/(x_{i+1}, \dots, x_d)M)$ với mọi $i = d - 1, \dots, 1$.

Chú ý rằng hệ tham số p -chuẩn tắc có thể hiểu như là một mở rộng của khái niệm hệ tham số chuẩn tắc đối với môđun Cohen-Macaulay suy rộng, và đóng vai trò quan trọng trong lời giải bài toán Macaulay hóa của T. Kawasaki [32]. Hệ tham số p -chuẩn tắc $\underline{x} = x_1, \dots, x_d$ được xây dựng với mục đích ban đầu là đưa ra điều kiện đủ để hiệu

$$I_{M,\underline{x}}(\underline{n}) = \ell(M/(x_1^{n_1}, \dots, x_d^{n_d})M) - n_1 \dots n_d e(x_1, \dots, x_d; M)$$

là một đa thức theo các biến $n_1, \dots, n_d \gg 0$ (xem [7]). Nói chung $I_{M,\underline{x}}(\underline{n})$ không là đa thức theo $n_1, \dots, n_d$ mà bị chặn trên bởi các đa thức theo các biến $n_1, \dots, n_d$. Hơn nữa, bậc bé nhất của các đa thức chặn trên $I_{M,\underline{x}}(\underline{n})$ là không phụ thuộc vào việc chọn hệ tham số $\underline{x} = x_1, \dots, x_d$. Ta gọi giá trị bé nhất này là *kiểu đa thức của M* và kí hiệu là $p(M)$ (xem [9]). Nếu $(R, \mathfrak{m})$ là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay, thì $p(M) = \dim R/\mathfrak{a}(M)$ (xem [8]). Khi $\underline{x} = x_1, \dots, x_d$ là một hệ tham số p -chuẩn tắc ta có kết quả dưới đây (xem [10, Theorem 2.6 (ii)]).

Mệnh đề 3.1.4. *Giả sử $x_1, \dots, x_d$ là một hệ tham số p -chuẩn tắc của M . Khi đó*

$$I_{M,\underline{x}}(\underline{n}) = \sum_{i=0}^{p(M)} n_1 \dots n_i e_i$$

với mọi $n_1, \dots, n_d > 0$, ở đây $e_i = e(x_1, \dots, x_i; 0 :_{M/(x_{i+2}, \dots, x_d)M} x_{i+1})$ và $e_0 = \ell(0 :_{M/(x_2, \dots, x_d)M} x_1)$.

Gần đây N.T. Cường và Đ.T. Cường đã giới thiệu một loại dãy phân tử đặc biệt gọi là dd -dãy dùng để đặc trưng tính chất trên. Trước hết ta nhắc lại khái niệm d -dãy được giới thiệu bởi C. Huneke (xem [25]).

Định nghĩa 3.1.5. (i) Một dãy phân tử $\underline{x} = x_1, \dots, x_s$ được gọi là *một d -dãy của M* nếu $(x_1, \dots, x_{i-1})M : x_j = (x_1, \dots, x_{i-1})M : x_i x_j$ với mọi

$$i \leq j \leq s.$$

(ii) Một dãy phần tử $\underline{x} = x_1, \dots, x_s$ được gọi là *một d -dãy mạnh của M* nếu $\underline{x}^n = x_1^{n_1}, \dots, x_s^{n_s}$ là một d -dãy với mọi $\underline{n} = (n_1, \dots, n_s) \in \mathbb{N}^s$. Hơn nữa nếu mọi hoán vị của dãy $\underline{x} = x_1, \dots, x_s$ đều là một d -dãy mạnh thì $\underline{x} = x_1, \dots, x_s$ được gọi là *một d -dãy mạnh không cần điều kiện của M* (xem [23]).

Một số tính chất sâu sắc của dãy phần tử d -dãy có thể xem trong [25] và [52].

Định nghĩa 3.1.6 ([11]). Một dãy phần tử $\underline{x} = x_1, \dots, x_s$ được gọi là *một dd -dãy của M* nếu $\underline{x}$ là một d -dãy mạnh của M và các điều kiện quy nạp sau thỏa mãn

- (i) $s = 1$ hoặc,
- (ii) $s > 1$ và $\underline{x}' = x_1, \dots, x_{s-1}$ là một dd -dãy của M/x_s^n với mọi $n \geq 1$.

Ta có kết quả dưới đây của [11, Theorem 1.2].

Mệnh đề 3.1.7. *Một hệ tham số $x_1, \dots, x_d$ của M là một dd -dãy khi và chỉ khi*

$$I_{M,\underline{x}}(\underline{n}) = \sum_{i=0}^{p(M)} n_1 \dots n_i e_i$$

với mọi $n_1, \dots, n_d > 0$, ở đây $e_i = e(x_1, \dots, x_i; 0 :_{M/(x_{i+2}, \dots, x_d)M} x_{i+1})$ và $e_0 = \ell(0 :_{M/(x_2, \dots, x_d)M} x_1)$.

Chú ý 3.1.8. (i) Theo các Mệnh đề 3.1.4 và 3.1.7 ta có một hệ tham số $x_1, \dots, x_d$ của M là p -chuẩn tắc thì nó là một hệ tham số dd -dãy. Nếu $x_1, \dots, x_d$ là một hệ tham số dd -dãy của M , thì nó có thể không là một hệ tham số p -chuẩn tắc nhưng $x_1^{n_1}, \dots, x_d^{n_d}$ với $n_i \geq i, i = 1, \dots, d$, là một hệ tham số p -chuẩn tắc của M (xem [11, Section 3]).

(ii) Môđun M có hệ tham số p -chuẩn tắc (hay dd -dãy) khi và chỉ khi $R/\text{Ann}M$ là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay (xem [14]).

Trong tiết này chúng ta nghiên cứu một loại hệ tham số gần gũi với hệ tham số p -chuẩn tắc, và liên quan đến idêan $\mathfrak{b}(M)$.

Bổ đề 3.1.9. *Cho x là một phần tử tham số của M ta có $\mathfrak{b}(M) \subseteq \mathfrak{b}(M/xM)$.*

Chứng minh. là hiển nhiên từ định nghĩa của $\mathfrak{b}(M)$. □

Bổ đề 3.1.10. *Cho $x_1, \dots, x_d$ là một hệ tham số của M thỏa mãn $x_i \in \mathfrak{b}(M/(x_{i+1}, \dots, x_d)M)$ (tương ứng $x_i \in \mathfrak{b}(M/(x_{i+1}, \dots, x_d)M)^3$) với mọi $i \leq d$. Khi đó, với mọi $j \leq d$ ta có $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_d$ cũng là một hệ tham số của M/x_jM thỏa mãn $x_i \in \mathfrak{b}(M/((x_j) + (x_{i+1}, \dots, x_d))M)$ (tương ứng $x_i \in \mathfrak{b}(M/((x_j) + (x_{i+1}, \dots, x_d))M)^3$) với mọi $i \leq d, i \neq j$.*

Chứng minh. Nếu $j = d$ khẳng định là hiển nhiên. Nếu $j \neq d$ theo Bổ đề 3.1.9 ta có $\mathfrak{b}(M) \subseteq \mathfrak{b}(M/x_jM)$ nên $x_d \in \mathfrak{b}(M/x_jM)$ (tương ứng $x_d \in \mathfrak{b}(M/x_jM)^3$). Ta có $x_1, \dots, x_{d-1}$ là một hệ tham số của M/x_dM thỏa mãn $x_i \in \mathfrak{b}(M/(x_{i+1}, \dots, x_d)M)$ (tương ứng $x_i \in \mathfrak{b}(M/(x_{i+1}, \dots, x_d)M)^3$) với mọi $i \leq d-1$. Do đó khẳng định được suy ra từ quy nạp theo d . □

Kết quả dưới đây nói lên sự liên hệ thú vị $\mathfrak{b}(M)$ và linh hoá tử của $H_I^i(M)$ với idêan I bất kì.

Mệnh đề 3.1.11. *Với I là một idêan của R ta có $\mathfrak{b}(M)H_I^i(M) = 0$ với mọi $i < d - \dim R/I$.*

Để chứng minh Mệnh đề trên ta cần kết quả sau của U. Nagel và Schenzel (xem [39, Proposition 3.4]).

Bổ đề 3.1.12. *Cho I là một idêan của R và $x_1, \dots, x_t$ là một dãy I -lọc chính*

quy của M . Với mỗi $j \leq t$ ta có

$$H_I^j(M) \cong \begin{cases} H_{(x_1, \dots, x_t)}^j(M) & \text{với } j < t \\ H_I^{j-t}(H_{(x_1, \dots, x_t)}^t(M)) & \text{với } j \geq t. \end{cases}$$

Chứng minh Mệnh đề 3.1.11. Đặt $t = d - \dim R/I$, áp dụng Định lí tránh nguyên tố ta có thể tìm được một phần của hệ tham số $x_1, \dots, x_t$ của M đồng thời là một dãy I -lọc chính quy của M . Theo Bổ đề 3.1.12, với $i < t$, ta có

$$\begin{aligned} H_I^i(M) &\cong H_I^0(H_{(x_1, \dots, x_i)}^i(M)) \\ &\cong H_I^0(\varinjlim M/(x_1^n, \dots, x_i^n)M) \\ &\cong \varinjlim H_I^0(M/(x_1^n, \dots, x_i^n)M) \\ &\cong \varinjlim \frac{(x_1^n, \dots, x_i^n)M : I^\infty}{(x_1^n, \dots, x_i^n)M} \\ &\cong \varinjlim \frac{(x_1^n, \dots, x_i^n)M : x_{i+1}^\infty}{(x_1^n, \dots, x_i^n)M}. \end{aligned}$$

Vì $x_1, \dots, x_t$ là một phần của hệ tham số của M nên theo định nghĩa $\mathfrak{b}(M)$ để có $\mathfrak{b}(M)H_I^i(M) = 0$ với mọi $i < t = d - \dim R/I$. $\square$

3.2 Định lí chẻ ra của đối đồng điều địa phương trong vành địa phương

Trong tiết này chúng ta phát triển Định lí chẻ ra của đối đồng điều địa phương trong vành địa phương và áp dụng nó để chứng minh một số bất biến của môđun M . Ta luôn xét $(R, \mathfrak{m})$ là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay, và M là một R -môđun hữu hạn sinh chiều $d > 0$.

Định nghĩa 3.2.1. Ta nói môđun con lớn nhất của M có chiều nhỏ hơn d là thành phần không trộn lẫn của M và kí hiệu là $U_M(0)$.

Chú ý 3.2.2. (i) Nếu $\cap_{\mathfrak{p} \in \text{Ass} M} N(\mathfrak{p}) = 0$ là một phân tích nguyên sơ rút gọn của môđun con không của M , thì $U_M(0) = \cap_{\dim R/\mathfrak{p}=d} N(\mathfrak{p})$.

(ii) Do $\dim U_M(0) < d$, ta có thể chọn một phần tử tham số x của M chứa trong $\text{Ann} U_M(0)$. Nên $U_M(0) \subseteq 0 : x$. Mặt khác vì x là một phần tử

tham số nên $\dim(0 : x) < d$. Do đó $U_M(0) = 0 : x$. Theo Định nghĩa của $\mathfrak{b}(M)$ ta có $\mathfrak{b}(M) \subseteq \text{Ann} U_M(0)$. Như vậy, nếu $x \in \mathfrak{b}(M)$ là một phần tử tham số của M , thì $U_M(0) = 0 : x$.

(iii) Theo (ii) ta có $\cap_x \text{Ann}(0 :_M x) = \text{Ann} U_M(0)$, ở đây x chạy trong tất cả các phần tử tham số của M . Do đó

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}(M) &= \bigcap_{\underline{x}; i=1}^d \text{Ann}(0 : x_i)_{M/(x_1, \dots, x_{i-1})M} \\ &= \bigcap_{\underline{x}; i=1}^d \text{Ann} U_{M/(x_1, \dots, x_{i-1})M}(0), \end{aligned}$$

với $\underline{x} = x_1, \dots, x_d$ chạy trong tất cả các hệ tham số của M .

Bổ đề 3.2.3. Cho I là một idêan của R và $x, y \in \mathfrak{b}(M)$ là các phần tử tham số của M . Đặt $\overline{M} = M/U_M(0)$ và $t = d - \dim R/I$. Khi đó với mọi $i < t - 1$ ta luôn có dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow H_I^i(M) \rightarrow H_I^i(M/xyM) \rightarrow H_I^{i+1}(\overline{M}) \rightarrow 0.$$

Hơn nữa, nếu $H_I^t(M) \cong H_I^t(\overline{M})$ thì ta có dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow H_I^{t-1}(M) \rightarrow H_I^{t-1}(M/xyM) \rightarrow 0 :_{H_I^t(M)} xy \rightarrow 0.$$

Chứng minh. Từ Chú ý 3.2.2 (ii) ta có $U_M(0) = 0 :_M x = 0 :_M xy$. Ta có biểu đồ giao hoán sau

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \overline{M} & \xrightarrow{x} & M & \longrightarrow & M/xM \longrightarrow 0 \\ & & \text{id} \downarrow & & y \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \overline{M} & \xrightarrow{xy} & M & \longrightarrow & M/xyM \longrightarrow 0. \end{array}$$

Tác động hàm tử đối đồng điều địa phương $H_I^i(\bullet)$ vào biểu đồ trên ta có các biểu đồ sau là giao hoán với mọi $i < t - 1$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_I^i(\overline{M}) & \xrightarrow{\psi^i} & H_I^i(M) & \longrightarrow & H_I^i(M/xM) \longrightarrow \cdots \\ & & \text{id} \downarrow & & y \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & H_I^i(\overline{M}) & \xrightarrow{\varphi^i} & H_I^i(M) & \longrightarrow & H_I^i(M/xyM) \longrightarrow \cdots, \end{array}$$

với ψ^i và φ^i là các đồng cấu dẫn suất thứ i của các đồng cấu $\overline{M} \xrightarrow{x} M$ và $\overline{M} \xrightarrow{xy} M$, tương ứng. Theo Mệnh đề 3.1.11, $yH_I^i(M) = 0$ với mọi $i \leq t-1$ nên $\varphi^i = 0$ với mọi $i \leq t-1$. Vậy ta có các dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow H_I^i(M) \rightarrow H_I^i(M/xyM) \rightarrow H_I^{i+1}(\overline{M}) \rightarrow 0$$

với mọi $i < t-1$. Hơn nữa, nếu $H_I^t(M) \cong H_I^t(\overline{M})$ thì ta có dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow H_I^{t-1}(M) \rightarrow H_I^{t-1}(M/xyM) \rightarrow 0 :_{H_I^t(M)} xy \rightarrow 0.$$

□

Với các kí hiệu như trên, xét $x \in \mathfrak{b}(M)^2$, với mọi $i < t-1$, ta kí hiệu E_x^i là phân tử trong $\text{Ext}(H_I^{i+1}(\overline{M}), H_I^i(M))$ đại diện bởi dãy khớp ngắn dưới đây nếu nó tồn tại

$$0 \rightarrow H_I^i(M) \rightarrow H_I^i(M/xM) \rightarrow H_I^{i+1}(\overline{M}) \rightarrow 0.$$

Trong trường hợp $i = t-1$, giả sử $H_I^t(M) \cong H_I^t(\overline{M})$, tác động hàm tử $\text{Hom}(R/\mathfrak{b}(M), \bullet)$ vào dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow H_I^{t-1}(M) \rightarrow H_I^{t-1}(M/xM) \rightarrow 0 :_{H_I^t(M)} x \rightarrow 0$$

ta thu được dãy khớp trái dưới đây

$$0 \rightarrow H_I^{t-1}(M) \rightarrow 0 :_{H_I^{t-1}(M/xM)} \mathfrak{b}(M) \rightarrow 0 :_{H_I^t(M)} \mathfrak{b}(M).$$

Ta kí hiệu F_x^{t-1} là phân tử của $\text{Ext}(0 :_{H_I^t(M)} \mathfrak{b}(M), H_I^{t-1}(M))$ đại diện bởi dãy khớp dưới đây nếu nó tồn tại

$$0 \rightarrow H_I^{t-1}(M) \rightarrow 0 :_{H_I^{t-1}(M/xM)} \mathfrak{b}(M) \rightarrow 0 :_{H_I^t(M)} \mathfrak{b}(M) \rightarrow 0.$$

Xét các phân tử tham số của M có dạng xy với $x, y \in \mathfrak{b}(M)$ theo Bổ đề 3.2.3 ta thấy E_{xy}^i là xác định với mọi $i < t-1$, tức là xy thỏa mãn điều kiện $(\sharp)$ đã nêu trong Tiết 1.3. Hoàn toàn tương tự như chứng minh Định lí 1.4.4 và các Mệnh đề 2.2.3, 2.2.6 ta có kết quả ra sau.

Định lí 3.2.4. Cho I là một ideal của R và x là một phần tử tham số của M . Đặt $\overline{M} = M/U_M(0)$ và $t = d - \dim R/I$. Khi đó

- (i) Nếu $x \in \mathfrak{b}(M)^2$ thì E_x^i là xác định với mọi $i < t - 1$.
- (ii) Nếu $x \in \mathfrak{b}(M)^3$ thì $E_x^i = 0$ với mọi $i < t - 1$. Hơn nữa, nếu $H_I^t(M) \cong H_I^t(\overline{M})$ thì $F_x^{t-1} = 0$.

Đặc biệt, khi $I = \mathfrak{m}$ ta có.

Hệ quả 3.2.5. Lấy $x \in \mathfrak{b}(M)^3$ là một phần tử tham số của M và đặt $\overline{M} = M/U_M(0)$. Khi đó

$$H_{\mathfrak{m}}^i(M/xM) \cong H_{\mathfrak{m}}^i(M) \oplus H_{\mathfrak{m}}^{i+1}(\overline{M})$$

với mọi $i < d - 1$, và

$$0 :_{H_{\mathfrak{m}}^{d-1}(M/xM)} \mathfrak{b}(M) \cong H_{\mathfrak{m}}^{d-1}(M) \oplus 0 :_{H_{\mathfrak{m}}^d(M)} \mathfrak{b}(M).$$

Chú ý rằng trong luận án Tiến sĩ của mình, Đ.T. Cường cũng đã chứng minh một kết quả tương tự như Hệ quả 3.2.5 trong trường hợp các phần tử tham số có dạng x^n với $x \in \mathfrak{a}(M)$ và $n \geq 5$ (xem [61, Mệnh đề 2.3.3]).

Hệ quả 3.2.6. Lấy $x \in \mathfrak{b}(M)^3$ là một phần tử tham số của M và đặt $\overline{M} = M/U_M(0)$. Với mọi $i \leq d - 1$ ta có

$$\dim \text{Soc}(H_{\mathfrak{m}}^i(M/xM)) = \dim \text{Soc}(H_{\mathfrak{m}}^i(M)) + \dim \text{Soc}(H_{\mathfrak{m}}^{i+1}(\overline{M})).$$

Định lí dưới đây là mở rộng của Hệ quả 1.4.7 và Định lí 2.2.8.

Định lí 3.2.7. Cho $\underline{x} = x_1, \dots, x_d$ là một hệ tham số của M thỏa mãn $x_i \in \mathfrak{b}(M/(x_{i+1}, \dots, x_d)M)^3$ với mọi $i \leq d$. Đặt $M_i = M/(x_{i+1}, \dots, x_d)M$ với mọi $i < d$, ta có

- (i) Môđun $H_{\mathfrak{m}}^j(M_i)$ không phụ thuộc vào việc chọn hệ tham số $\underline{x}$ với mọi $j < i < d$ (sai khác một đẳng cấu).

(ii) $\dim \text{Soc}(H_{\mathfrak{m}}^j(M_i))$ là một hằng số tức là không phụ thuộc vào việc chọn hệ tham số $\underline{x}$ với mọi $j \leq i < d$. Nói riêng, chỉ số khả quy $N_R((\underline{x}); M)$ của ideal tham số $(\underline{x})$ trên M là một hằng số.

Chứng minh. (i) Xét một hệ tham số $\underline{y} = y_1, \dots, y_d$ của M thỏa mãn $y_i \in \mathfrak{b}(M/(y_{i+1}, \dots, y_d)M)^3$ với mọi $i \leq d$. Đặt $M'_i = M/(y_{i+1}, \dots, y_d)M$ với mọi $i < d$. Ta chỉ cần chứng minh bằng quy nạp rằng $H_{\mathfrak{m}}^j(M_i) \cong H_{\mathfrak{m}}^j(M'_i)$ với mọi $j < i < d$. Với $d = 1$ khẳng định là hiển nhiên. Xét $d > 1$, với $i = d - 1$ vì $x_d, y_d \in \mathfrak{b}(M)^3$ nên Hệ quả 3.2.5 suy ra rằng

$$H_{\mathfrak{m}}^j(M_{d-1}) \cong H_{\mathfrak{m}}^j(M) \oplus H_{\mathfrak{m}}^{j+1}(\overline{M}) \cong H_{\mathfrak{m}}^j(M'_{d-1})$$

với mọi $j < d - 1$. Giả sử $i < d - 1$, do $\dim R/\mathfrak{b}(M_{i+1}) < i + 1$ và $\dim R/\mathfrak{b}(M'_{i+1}) < i + 1$ nên theo Định lý tránh nguyên tố ta có thể chọn một phần tử tham số z của cả M_{i+1} và M'_{i+1} sao cho $z \in \mathfrak{b}(M_{i+1})^3 \cap \mathfrak{b}(M'_{i+1})^3$. Áp dụng giả thiết quy nạp cho môđun M_{i+1} và M'_{i+1} ta có

$$H_{\mathfrak{m}}^j(M_i) \cong H_{\mathfrak{m}}^j(M_{i+1}/x_{i+1}M_{i+1}) \cong H_{\mathfrak{m}}^j(M/(z, x_{i+2}, \dots, x_d)M),$$

$$H_{\mathfrak{m}}^j(M'_i) \cong H_{\mathfrak{m}}^j(M'_{i+1}/y_{i+1}M'_{i+1}) \cong H_{\mathfrak{m}}^j(M/(z, y_{i+2}, \dots, y_d)M)$$

với mọi $j < i$. Theo Bổ đề 3.1.10 ta có thể coi $x_{i+2}, \dots, x_d$ và $y_{i+2}, \dots, y_d$ là những phần của hệ tham số của M/zM thỏa mãn $x_j \in \mathfrak{b}(M/(z, x_{j+1}, \dots, x_d)M)^3$ và $y_j \in \mathfrak{b}(M/(z, y_{j+1}, \dots, y_d)M)^3$ với mọi $i + 1 \leq j \leq d$. Lại áp dụng giả thiết quy nạp cho môđun M/zM ta có

$$H_{\mathfrak{m}}^j(M/(z, x_{i+2}, \dots, x_d)M) \cong H_{\mathfrak{m}}^j(M/(z, y_{i+2}, \dots, y_d)M)$$

với mọi $j < i$. Khẳng định được chứng minh.

(ii) Đặt $\overline{M} = M/U_M(0)$. Từ Hệ quả 3.2.6 với mọi $i \leq d - 1$ ta có

$$\dim \text{Soc}(H_{\mathfrak{m}}^i(M/xM)) = \dim \text{Soc}(H_{\mathfrak{m}}^i(M)) + \dim \text{Soc}(H_{\mathfrak{m}}^{i+1}(\overline{M}))$$

là không phụ thuộc vào việc chọn phần tử tham số $x \in \mathfrak{b}(M)^3$. Lặp lại phương pháp chứng minh của (i) ta thu được $\dim \text{Soc}(H_{\mathfrak{m}}^j(M_i))$ là không

phụ thuộc vào việc chọn hệ tham số $\underline{x}$ với mọi $j \leq i < d$. Đặc biệt, khi $i = j = 0$ ta có $N_R((\underline{x}); M) = \dim \text{Soc}(H_{\mathfrak{m}}^0(M/(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_d)M))$ là một bất biến của môđun. $\square$

Nếu M là một môđun Cohen-Macaulay, thì với mọi hệ tham số $x_1, \dots, x_d$ ta có $U_{M/(\underline{x}_{i+1}, \dots, \underline{x}_d)M} = 0$ với mọi $1 \leq i \leq d$. Khi M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng và $\mathfrak{m}^{n_0} H_{\mathfrak{m}}^i(M) = 0$ với mọi $i < d$, theo các Hệ quả 1.4.5, 1.4.6 ta có các môđun

$$U_{M/(\underline{x}_{i+1}, \dots, \underline{x}_d)M} = H_{\mathfrak{m}}^0(M/(\underline{x}_{i+1}, \dots, \underline{x}_d)M) \cong \bigoplus_{j=0}^{d-i} H_{\mathfrak{m}}^j(M)^{\binom{d-i}{j}}$$

là không phụ thuộc vào việc chọn hệ tham số $x_1, \dots, x_d$ nằm trong $\mathfrak{m}^{2n_0}$ với mọi $1 \leq i \leq d$. Dưới đây ta chứng minh rằng với mọi $1 \leq i \leq d$ các môđun $U_{M/(\underline{x}_{i+1}, \dots, \underline{x}_d)M}$ là không phụ thuộc vào việc chọn hệ tham số $\underline{x} = x_1, \dots, x_d$ là một hệ tham số của M thỏa mãn $x_i \in \mathfrak{b}(M/(\underline{x}_{i+1}, \dots, \underline{x}_d)M)^3$ với mọi $i \leq d$, sai khác một đẳng cấu. Dường như các môđun này phản ánh sâu sắc tính Cohen-Macaulay của môđun M . Trước hết, ta cần bổ đề sau.

Bổ đề 3.2.8. *Cho $x \in \mathfrak{b}(M)^3$ là một phần tử tham số của M . Khi đó môđun $U_{M/xM}(0)$ không phụ thuộc vào việc chọn x (sai khác một đẳng cấu).*

Chứng minh. Từ Định lý 3.2.7 (i) ta thấy $\alpha_i(M/xM), i < d - 2$, và do đó $\alpha(M/xM)$ không phụ thuộc vào việc chọn x . Nên idêan

$$\mathfrak{b}' = \sqrt{\alpha(M/xM)} = \sqrt{\mathfrak{b}(M/xM)}$$

là không phụ thuộc vào việc chọn $x \in \mathfrak{b}(M)^3$. Từ Chú ý 3.2.2 (ii) ta có $U_{M/xM}(0) \cong H_{\mathfrak{b}'}^0(M/xM)$. Vì $\dim R/\mathfrak{b}' \leq \dim M/xM - 1 = d - 2$, Định lý 3.2.4 (ii) suy ra rằng

$$H_{\mathfrak{b}'}^0(M/xM) \cong H_{\mathfrak{b}'}^0(M) \oplus H_{\mathfrak{b}'}^1(M/U_M(0)).$$

Vậy $U_{M/xM}(0)$ không phụ thuộc vào việc chọn $x \in \mathfrak{b}(M)^3$ (sai khác một đẳng cấu). $\square$

Sử dụng Bổ đề 3.2.8 và lặp lại hoàn toàn chứng minh Định lí 3.2.7 ta có kết quả sau.

Định lí 3.2.9. Cho $\underline{x} = x_1, \dots, x_d$ là một hệ tham số của M thỏa mãn $x_i \in \mathfrak{b}(M/(x_{i+1}, \dots, x_d)M)^3$ với mọi $i \leq d$. Với mọi $1 \leq i \leq d$, các môđun $U_{M/(x_{i+1}, \dots, x_d)M}(0)$ là không phụ thuộc vào việc chọn hệ tham số $\underline{x}$ (sai khác một đẳng cấu).

Kí hiệu 3.2.10. Với mỗi $0 \leq i \leq d-1$ ta kí hiệu $U_i(M)$ là một môđun sao cho với mọi hệ tham số $\underline{x} = x_1, \dots, x_d$ của M thỏa mãn $x_i \in \mathfrak{b}(M/(x_{i+1}, \dots, x_d)M)^3$ với mọi $i \leq d$ ta có $U_i(M) \cong U_{M/(x_{i+2}, \dots, x_d)M}(0)$ với mọi $0 \leq i \leq d-1$. Chú ý rằng khi đó $U_{d-1}(M) \cong U_M(0)$.

Hệ quả 3.2.11. Lấy $\underline{x} = x_i, \dots, x_d, i > 1$, là một phần hệ tham số của M thỏa mãn $x_j \in \mathfrak{b}(M/(x_{j+1}, \dots, x_d)M)^3$ với mọi $i \leq j \leq d$. Ta có $\mathfrak{b}(M/(x_i, \dots, x_d)M) = \mathfrak{b}(M/(x_i^{n_i}, \dots, x_d^{n_d})M)$, với mọi $n_j \geq 1$ và mọi $i \leq j \leq d$.

Chứng minh. Trường hợp $i = d$, xét $\underline{y} = y_1, \dots, y_{d-1}$ là một hệ tham số của M/x_dM , ta có nó cũng là một hệ tham số của $M/x_d^{n_d}M$, $n_d \geq 1$. Theo Bổ đề 3.1.9 suy ra x_d và do đó $x_d^{n_d}$ thuộc $\mathfrak{b}(M/(y_1, \dots, y_{j-1})M)^3$ với mọi $1 \leq j \leq d-1$. Nên Định lí 3.2.9 khẳng định $U_{M/(y_1, \dots, y_{j-1}, x_d)M}(0) = U_{M/(y_1, \dots, y_{j-1}, x_d^{n_d})M}(0)$ với mọi $1 \leq j \leq d-1$. Theo Chú ý 3.2.2 (iii) ta có

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}(M/x_d) &= \bigcap_{\underline{y}; j=1}^{d-1} \text{Ann } U_{M/(y_1, \dots, y_{j-1}, x_d)M}(0) \\ &= \bigcap_{\underline{y}; j=1}^{d-1} \text{Ann } U_{M/(y_1, \dots, y_{j-1}, x_d^{n_d})M}(0) \\ &= \mathfrak{b}(M/x_d^{n_d}), \end{aligned}$$

với $\underline{y} = y_1, \dots, y_{d-1}$ chạy trong tất cả các hệ tham số của M/x_dM .

Ta chứng minh bài toán bằng quy nạp theo d . Trường hợp $d = 2$ là

suy ra từ khẳng định trên do khi đó $i = 2$. Giả sử $d \geq 3$ và $i < d$. Vì $x_i \in \mathfrak{b}(M/(x_{i+1}, \dots, x_d)M)^3$, áp dụng giả thiết quy nạp cho môđun $M/(x_{i+1}, \dots, x_d)M$ ta có

$$\mathfrak{b}(M/(x_i, x_{i+1}, \dots, x_d)M) = \mathfrak{b}(M/(x_i^{n_i}, x_{i+1}, \dots, x_d)M)$$

với mọi $n_i \geq 1$. Lại do Bổ đề 3.1.10 ta có $x_j \in \mathfrak{b}(M/(x_i^{n_i}, x_{j+1}, \dots, x_d)M)^3$ với mọi $j = i+1, \dots, d$. Áp dụng giả thiết quy nạp cho môđun $M/x_i^{n_i}M$ ta có

$$\mathfrak{b}(M/(x_i^{n_i}, x_{i+1}, \dots, x_d)M) = \mathfrak{b}(M/(x_i^{n_i}, x_{i+1}^{n_{i+1}}, \dots, x_d^{n_d})M)$$

với mọi $n_{i+1}, \dots, n_d \geq 1$. Khẳng định được chứng minh. $\square$

Hệ quả 3.2.12. Cho $\underline{x} = x_1, \dots, x_d$ là một hệ tham số của M thỏa mãn $x_i \in \mathfrak{b}(M/(x_{i+1}, \dots, x_d)M)^3$ với mọi $i \leq d$. Khi đó với mọi bộ n số nguyên dương $(n_1, \dots, n_d)$ ta có $x_i^{n_i} \in \mathfrak{b}(M/(x_{i+1}^{n_{i+1}}, \dots, x_d^{n_d})M)^3$ với mọi $i \leq d$.

Chứng minh. suy trực tiếp từ Hệ quả 3.2.11. $\square$

Mệnh đề 3.2.13. Xét $\underline{x} = x_1, \dots, x_d$ là một hệ tham số của M thỏa mãn $x_i \in \mathfrak{b}(M/(x_{i+1}, \dots, x_d)M)^3$ với mọi $i \leq d$. Khi đó hiệu

$$I_{M, \underline{x}}(\underline{n}) = \ell(M/(x_1^{n_1}, \dots, x_d^{n_d})M) - n_1 \dots n_d e(x_1, \dots, x_d; M)$$

là một đa thức theo các biến $\underline{n} = n_1, \dots, n_d$, cụ thể

$$I_{M, \underline{x}}(\underline{n}) = \sum_{i=0}^{p(M)} n_1 \dots n_i e(x_1, \dots, x_i; U_i(M))$$

với mọi $n_i \geq 1$, ở đó $p(M)$ là kiểu đa của M . Nói riêng, $\underline{x} = x_1, \dots, x_d$ là một hệ tham số dd-dãy.

Chứng minh. Với mọi bộ $\underline{n} = n_1, \dots, n_d$ các số nguyên dương, theo Hệ quả 3.2.12 ta có $x_i^{n_i} \in \mathfrak{b}(M/(x_{i+1}^{n_{i+1}}, \dots, x_d^{n_d})M)^3$ với mọi $i \leq d$. Nên Định lí 3.2.9 suy ra

$$(x_{i+2}^{n_{i+2}}, \dots, x_d^{n_d})M :_M x_{i+1}^{n_{i+1}} / (x_{i+2}^{n_{i+2}}, \dots, x_d^{n_d})M \cong U_i(M)$$

với mọi $0 \leq i \leq d-1$. Áp dụng công thức Auslander-Buchsbaum (xem [2, Corollary 4.3]) ta có

$$\begin{aligned} I_{M,\underline{x}}(\underline{n}) &= \sum_{i=0}^{d-1} e(x_1^{n_1}, \dots, x_i^{n_i}; (x_{i+2}^{n_{i+2}}, \dots, x_d^{n_d})M :_M x_{i+1}^{n_{i+1}} / (x_{i+2}^{n_{i+2}}, \dots, x_d^{n_d})M) \\ &= \sum_{i=0}^{d-1} e(x_1^{n_1}, \dots, x_i^{n_i}; U_i(M)) \\ &= \sum_{i=0}^{d-1} n_1 \dots n_i e(x_1, \dots, x_i; U_i(M)) \end{aligned}$$

là một đa thức theo các biến $n_1, \dots, n_d$. Theo Chú ý 3.2.2 (iii) ta có $\text{Ann} U_i(M) \supseteq \mathfrak{b}(M)$ với mọi $i \leq d-1$. Do đó $\dim U_i \leq p(M)$ với mọi $i \leq d-1$ vì $\dim R/\mathfrak{b}(M) = \dim R/\mathfrak{a}(M) = p(M)$. Nên các bội Serre $e(x_1, \dots, x_i; U_i(M)) = 0$ với mọi $p(M) < i \leq d-1$. Vậy

$$I_{M,\underline{x}}(\underline{n}) = \sum_{i=0}^{p(M)} n_1 \dots n_i e(x_1, \dots, x_i; U_i(M)).$$

Tính chất của dd -dãy của $\underline{x} = x_1, \dots, x_d$ được suy ra từ Mệnh đề 3.1.7. $\square$

Quy ước 3.2.14. Cho môđun M với lọc chiều

$$\mathcal{D} : D_0 \subset D_1 \subset \dots \subset D_t = M,$$

với $d_i = \dim D_i$ với mọi $i \leq t$. Xét $\underline{x} = x_1, \dots, x_d$ là một hệ tham số của M thỏa mãn $x_j \in \mathfrak{b}(M/(x_{j+1}, \dots, x_d)M)^3$ với mọi $j \leq d$. Với mỗi $i < t$ và $d_i \leq j \leq d-1$ ta có

$$D_i \cap (x_{j+2}, \dots, x_d)M = 0.$$

Do đó ta có thể đồng nhất D_i với một môđun con của $M/(x_{j+2}, \dots, x_d)M$. Lại có $\dim D_i = d_i < j+1 = \dim M/(x_{j+2}, \dots, x_d)M$, nên D_i đẳng cấu với một module con của $U_j(M)$ với mọi $d_i \leq j \leq d-1$. Để đơn giản trong trình bày ta sẽ viết $D_i \subseteq U_j(M)$ với mọi $d_i \leq j \leq d-1$.

Kết quả dưới đây cho ta một đặc trưng của môđun Cohen-Macaulay dãy.

Mệnh đề 3.2.15. *Các khẳng định sau là tương đương*

(i) M là môđun Cohen-Macaulay dãy.

(ii) $D_i = U_j(M)$ với mọi $i < t$, $d_i \leq j < d_{i+1}$.

Chứng minh. (i) $\Rightarrow$ (ii) là hiển nhiên.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Xét $\underline{x} = x_1, \dots, x_d$ là một hệ tham số của M thỏa mãn $x_i \in \mathfrak{b}(M/(x_{i+1}, \dots, x_d)M)^3$ với mọi $i \leq d$. Theo Mệnh đề 3.2.13 ta có

$$I_{M, \underline{x}}(\underline{n}) = \sum_{j=0}^{d-1} n_1 \dots n_j e(x_1, \dots, x_j; U_j(M)).$$

Bởi vì $D_i = U_j(M)$ với mọi $i < t$, $d_i \leq j < d_{i+1}$ nên $e(x_1, \dots, x_j; U_j(M)) = 0$ với mọi $i < t$, $d_i < j < d_{i+1}$. Do đó

$$I_{M, \underline{x}}(\underline{n}) = \sum_{i=0}^{t-1} n_1 \dots n_{d_i} e(x_1, \dots, x_{d_i}; D_i).$$

Theo [12, Theorem 4.2] ta có M là môđun Cohen-Macaulay dãy. $\square$

Với mỗi môđun M các môđun $U_i(M)$, $0 \leq i \leq d-1$, cho ta một tập idêan nguyên tố đặc biệt liên hệ với M là $\cup_{i=0}^{d-1} \text{Ass} U_i(M)$. Chú ý rằng nếu $\mathfrak{p} \in \text{Ass} M$ và $\dim R/\mathfrak{p} < d$ thì $\mathfrak{p} \in \text{Ass} U_M(0) = \text{Ass} U_{d-1}(M)$. Dưới đây ta chỉ ra mối liên hệ của $\text{Ass} U_{d-2}(M)$ với *điều kiện Serre* (S_2) .

Định nghĩa 3.2.16. Với $n \geq 1$, ta nói môđun M là thỏa mãn *điều kiện Serre* (S_n) tại $\mathfrak{p} \in \text{supp}(M)$ nếu

$$\text{depth} M_{\mathfrak{p}} \geq \min\{\dim M_{\mathfrak{p}}, n\}.$$

Ta nói M là thỏa mãn *điều kiện Serre* (S_n) nếu M thỏa mãn điều kiện Serre (S_n) tại với mọi $\mathfrak{p} \in \text{supp}(M)$.

Có thể thấy rằng R thỏa mãn điều kiện (S_1) khi và chỉ khi $\text{Ass} R = \min \text{Ass} R$. Nếu R thỏa mãn điều kiện (S_2) và điều kiện dây chuyền (điều này

luôn đúng với giả sử R là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay), thì $\text{Ass}R = \text{Assh}R$, ở đây $\text{Assh}R = \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \text{Ass}R, \dim R/\mathfrak{p} = \dim R\}$ (xem [47, Corollary 2.24]). Ngược lại Goto và Y. Nakamura trong [21, Lemma 3.2] chứng minh rằng nếu $\text{Ass}R \subseteq \text{Assh}R \cup \{\mathfrak{m}\}$, thì tập hợp

$$\mathcal{F}(R) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid \dim R_{\mathfrak{p}} > 1 = \text{depth}R_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}\}$$

là hữu hạn. Do đó R không thỏa mãn điều kiện (S_2) tại một số hữu hạn idêan nguyên tố. Kết quả dưới đây cho ta mô tả rõ hơn về tập hợp đặc biệt này trong trường hợp môđun.

Mệnh đề 3.2.17. *Giả sử môđun M thỏa mãn $\text{Ass}M \subseteq \text{Assh}M \cup \{\mathfrak{m}\}$. Đặt*

$$\mathcal{F}(M) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid \dim M_{\mathfrak{p}} > 1 = \text{depth}M_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}\}.$$

Khi đó $\mathcal{F}(M) = \text{Ass}U_{d-2}(M) \setminus \{\mathfrak{m}\}$.

Chứng minh. Xét $x \in \mathfrak{b}(M)^3$ là một phần tử tham số của M . Với mọi $\mathfrak{p} \in \text{Ass}U_{d-2}(M) \setminus \{\mathfrak{m}\}$ ta có $\mathfrak{p} \in \text{Ass}M/xM$ và $\dim R/\mathfrak{p} \leq d-2$. Do đó $\dim M_{\mathfrak{p}} > 1 = \text{depth}M_{\mathfrak{p}}$. Vậy $\text{Ass}U_{d-2}(M) \setminus \{\mathfrak{m}\} \subseteq \mathcal{F}(M)$.

Xét $\mathfrak{p} \in \mathcal{F}(M)$, vì $\text{depth}M_{\mathfrak{p}} = 1$ nên với mọi phần tử tham số $z \in \mathfrak{p}$ ta có $\mathfrak{p} \in \text{Ass}M/zM$. Do đó $\mathfrak{p} \in \text{Ass}M/(xz)M$, và vì $\dim R/\mathfrak{p} \leq d-2$ ta có $\mathfrak{p} \in \text{Ass}U_{M/(xz)M}(0) = \text{Ass}U_{d-2}(M)$. Mệnh đề được chứng minh. $\square$

Chú ý 3.2.18. (i) Giả sử M là môđun thỏa mãn $\text{Ass}M \subseteq \text{Assh}M \cup \{\mathfrak{m}\}$.

Chọn x là một phần tử tham số của M sao cho $x \notin \mathfrak{p}$ với mọi $\mathfrak{p} \in \mathcal{F}(M)$.

Khi đó M thỏa mãn điều kiện Serre (S_2) tại mọi idêan nguyên tố $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ chứa x . Nên M/xM thỏa mãn điều kiện Serre (S_1) tại mọi idêan nguyên tố $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$. Do đó

$$\text{Ass}(M/xM) \subseteq \min\text{Ass}(M/xM) \cup \{\mathfrak{m}\} = \text{Assh}(M/xM) \cup \{\mathfrak{m}\},$$

đẳng thức thứ hai là do tính dây chuyền của R .

(ii) Đặt $\overline{M} = M/U_M(0)$. Xét $x \in \mathfrak{b}(M)^3 \cap \mathfrak{b}(\overline{M})^3$ là một phần tử tham số của M và do đó là một phần tử tham số của $\overline{M}$. Đặt $\mathfrak{b}' = \mathfrak{b}(M/xM)$, $\mathfrak{b}'' = \mathfrak{b}(\overline{M}/x\overline{M})$ và $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}' \cap \mathfrak{b}''$. Ta có $\dim R/\mathfrak{b} \leq d-2$. Do đó $U_{d-2}(M) \cong H_{\mathfrak{b}'}^0(M/xM) \subseteq H_{\mathfrak{b}}^0(M/xM)$. Mặt khác do $\dim H_{\mathfrak{b}}^0(M/xM) < d-1$ nên $U_{d-2}(M) \cong H_{\mathfrak{b}}^0(M/xM)$. Tương tự ta có $U_{d-2}(\overline{M}) \cong H_{\mathfrak{b}}^0(\overline{M}/x\overline{M})$. Từ chứng minh Bổ đề 3.2.8 ta có

$$U_{d-2}(M) \cong H_{\mathfrak{b}}^0(M) \oplus H_{\mathfrak{b}}^1(\overline{M}/x\overline{M})$$

và

$$U_{d-2}(\overline{M}) \cong H_{\mathfrak{b}}^0(\overline{M}) \oplus H_{\mathfrak{b}}^1(\overline{M}/x\overline{M}) = H_{\mathfrak{b}}^1(\overline{M}/x\overline{M}).$$

Vậy $U_{d-2}(\overline{M})$ đẳng cấu với một môđun con của $U_{d-2}(M)$.

Mệnh đề dưới đây đóng vai trò quan trọng trong chứng minh kết quả chính của tiết sau.

Mệnh đề 3.2.19. *Cho M là một R -môđun hữu hạn sinh chiều $d \geq 2$. Xét x là một phần tử tham số của M và $x \notin \mathfrak{p}$ với mọi $\mathfrak{p} \in \text{Ass}U_M(0) \cup \text{Ass}U_{d-2}(M) \setminus \{\mathfrak{m}\}$. Khi đó ta có dãy khớp ngắn sau*

$$0 \rightarrow U_M(0)/xU_M(0) \rightarrow U_{M/xM}(0) \rightarrow H_{\mathfrak{m}}^0(\overline{M}/x\overline{M}) \rightarrow 0,$$

với $\overline{M} = M/U_M(0)$.

Chứng minh. Vì $U_M(0) \cap xM = x(U_M(0) :_M x) = xU_M(0)$, ta có dãy khớp ngắn sau

$$0 \rightarrow U_M(0)/xU_M(0) \rightarrow M/xM \rightarrow \overline{M}/x\overline{M} \rightarrow 0.$$

Nếu $\dim U_M(0) = 0$ thì $\dim U_M(0)/xU_M(0) < d-1$. Nếu $\dim U_M(0) > 0$ thì x là phần tử tham số của cả M và $U_M(0)$ nên $\dim U_M(0)/xU_M(0) = \dim U_M(0) - 1 < d-1$. Do đó $U_M(0)/xU_M(0)$ đẳng cấu với một môđun con của M/xM có chiều nhỏ hơn $d-1$. Nên ta có thể đồng nhất $U_M(0)/xU_M(0)$

với một môđun con của $U_{M/xM}(0)$. Ta có

$$U_{\overline{M}/x\overline{M}}(0) \cong U_{M/xM}(0)/(U_M(0)/xU_M(0)).$$

Mặt khác vì $x \notin \mathfrak{p}$ với mọi $\mathfrak{p} \in \text{Ass}U_{d-2}(M) \setminus \{\mathfrak{m}\}$ nên $x \notin \mathfrak{p}$ với mọi $\mathfrak{p} \in \text{Ass}U_{d-2}(\overline{M}) \setminus \{\mathfrak{m}\}$ do Chú ý 3.2.18 (ii). Theo Mệnh đề 3.2.17 và Chú ý 3.2.18 (i) ta có $\text{Ass}(\overline{M}/x\overline{M}) \subseteq \text{Assh}(\overline{M}/x\overline{M}) \cup \{\mathfrak{m}\}$. Do đó $U_{\overline{M}/x\overline{M}}(0) = H_{\mathfrak{m}}^0(\overline{M}/x\overline{M})$. Vậy ta có dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow U_M(0)/xU_M(0) \rightarrow U_{M/xM}(0) \rightarrow H_{\mathfrak{m}}^0(\overline{M}/x\overline{M}) \rightarrow 0.$$

□

3.3 Bậc không trộn lẫn của một môđun

Ta luôn xét $(R, \mathfrak{m})$ là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay, I là một idêan $\mathfrak{m}$ -nguyên sơ và M là một R -môđun hữu hạn sinh chiều $d > 0$. Mục đích của tiết này là xây dựng một loại bậc mới cho môđun M dựa trên các môđun $U_i(M)$ đã thu được trong tiết trước. Ta biết rằng $\ell(M/I^n M)$ là một đa thức bậc d khi $n \gg 0$ và

$$\ell(M/I^{n+1}M) = \sum_{i=0}^d (-1)^i e_i(I, M) \binom{n+d-i}{d-i}.$$

Các hệ số $e_i(I, M)$, $i = 0, \dots, d$ được gọi là các hệ số của đa thức Hilbert-Samuel của môđun M tương ứng với I . Đặc biệt $e_0(I, M)$ được gọi là bội Hilbert-Samuel của môđun M tương ứng với I , khi $I = \mathfrak{m}$ ta viết đơn giản là $e_0(M)$. Trong tiết này ta dùng kí hiệu $\deg(I, M)$ (tương ứng $\deg(M)$) thay cho $e_0(I, M)$ (tương ứng $e_0(M)$). Công thức bội liên kết dưới đây chỉ ra rằng $\deg(I, M)$ chỉ phụ thuộc vào các idêan nguyên tố liên kết có chiều cao nhất của M (xem [6, Corollary 4.6.8])

$$\deg(I, M) = \sum_{\mathfrak{p} \in \text{Assh} M} \ell_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \deg(I, R/\mathfrak{p}). \quad (\star)$$

Chú ý rằng nếu $\mathfrak{p}$ là idêan nguyên tố liên kết tối thiểu của M , thì $M_{\mathfrak{p}}$ có độ dài hữu hạn và $M_{\mathfrak{p}} = H_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}^0(M_{\mathfrak{p}})$. Nên công thức $(\star)$ có thể được viết lại như sau

$$\deg(I, M) = \sum_{\mathfrak{p} \in \text{Ass} M} \ell_{R_{\mathfrak{p}}}(H_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}^0(M_{\mathfrak{p}})) \deg(I, R/\mathfrak{p}). \quad (\star\star)$$

Dưới đây ta nhắc lại một số bất biến số của M liên quan đến $\deg(I, M)$ dựa trên việc mở rộng tập các idêan nguyên tố của công thức $(\star\star)$ (xem [56]).

Định nghĩa 3.3.1. Xét lọc chiều

$$\mathcal{D} : D_0 \subseteq D_1 \subseteq \cdots \subseteq D_t = M$$

của M và $d_i = \dim D_i$ với mọi $i \leq t$. Ta có $\deg(I, M)$ chỉ liên quan đến các idêan nguyên tố liên kết $\mathfrak{p}$ có chiều cao nhất tức là $\mathfrak{p} \in \text{Ass} M/D_{t-1}$. *Bậc số học của M tương ứng với I* , $\text{adeg}(I, M)$, được định nghĩa như sau $\text{adeg}(I, M) = \sum_{i=0}^t \deg(I, D_i)$. Xét $\mathfrak{p} \in \text{Ass} D_i$, $\dim R/\mathfrak{p} = d_i$. Ta có $\mathfrak{p} \notin \text{Ass} M/D_i$. Do đó từ dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow D_i \rightarrow M \rightarrow M/D_i \rightarrow 0$$

ta có $H_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}^0((D_i)_{\mathfrak{p}}) \cong H_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}^0(M_{\mathfrak{p}})$. Vậy

$$\text{adeg}(I, M) = \sum_{\mathfrak{p} \in \text{Ass} M} \ell_{R_{\mathfrak{p}}}(H_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}^0(M_{\mathfrak{p}})) \deg(I, R/\mathfrak{p}). \quad (\star\star\star)$$

Như vậy $\text{adeg}(I, M) \geq \deg(I, M)$, và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi mọi idêan nguyên tố của M đều có chiều cao nhất tức là $U_M(0) = 0$.

Chú ý 3.3.2. Giả sử thêm rằng $(R, \mathfrak{m})$ là ảnh đồng cấu của một vành Gorenstein địa phương $(S, \mathfrak{n})$ chiều n . Khi đó M cũng là một S -môđun và $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_S(M)$ khi và chỉ khi $\mathfrak{p}R \in \text{Ass}(M)$. Hơn nữa, $\deg(I, M)$ không thay đổi khi xem M như một S -môđun.

(i) Theo Định lí Đối ngẫu địa phương (xem [4, 11.2.6]) ta có

$$H_{\mathfrak{m}}^{n-i}(M) \cong \text{Hom}_R(\text{Ext}_S^i(M, S), E(R/\mathfrak{m}))$$

với mọi $i \geq 0$, ở đây $E(R/\mathfrak{m})$ là bao nội xạ của R -môđun $R/\mathfrak{m}$. Theo Chú ý 3.1.2 (ii) và các Định lý 1.1.9, 1.1.10 ta có $\dim \operatorname{Ext}_S^i(M, S) \leq n - i$, và $\operatorname{Ext}_S^i(M, S) = 0$ nếu $i > n - \operatorname{depth}(M)$ hoặc $i < n - d$. Hơn nữa $\operatorname{Ext}_S^i(M, S) \neq 0$ nếu $i = n - \operatorname{depth}(M)$ hoặc $i = n - d$.

(ii) Vì S là Gorenstein nên ta có thể chọn một dãy S -chính quy $x_1, \dots, x_{n-d}$ nằm trong $\operatorname{Ann} M$. Theo [6, Lemma 1.2.4] ta có $\operatorname{Ext}_S^{n-d}(M, S) \cong \operatorname{Hom}_S(M, S/(x_1, \dots, x_{n-d})S)$. Do đó

$$\begin{aligned} \operatorname{Ass}_S(\operatorname{Ext}_S^{n-d}(M, S)) &= \operatorname{Ass}_S(\operatorname{Hom}_S(M, S/(x_1, \dots, x_{n-d})S)) \\ &= \operatorname{Ass}_S S/(x_1, \dots, x_{n-d})S \cap \operatorname{supp}_S(M) \\ &= \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_S M \mid \dim S/\mathfrak{p} = d\}. \end{aligned}$$

(iii) Do $(S, \mathfrak{n})$ là một vành Gorenstein nên

$$\operatorname{Ext}_S^i(S/\mathfrak{n}, S) = \begin{cases} S/\mathfrak{n} & \text{nếu } i = n \\ 0 & \text{nếu } i \neq n \end{cases}$$

Nếu N là một môđun có độ dài hữu hạn, bằng quy nạp theo $\ell(N)$ ta có thể chứng minh rằng $\ell(N) = \ell(\operatorname{Ext}_S^n(N, S))$.

(iv) Theo (i) dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow H_{\mathfrak{m}}^0(M) \rightarrow M \rightarrow M/H_{\mathfrak{m}}^0(M) \rightarrow 0$$

cho ta dãy khớp sau

$$\operatorname{Ext}_S^n(M/H_{\mathfrak{m}}^0(M), S) \rightarrow \operatorname{Ext}_S^n(M, S) \rightarrow \operatorname{Ext}_S^n(H_{\mathfrak{m}}^0(M), S) \rightarrow 0.$$

Vì $\operatorname{depth}(M/H_{\mathfrak{m}}^0(M)) > 0$ nên $\operatorname{Ext}_S^n(M/H_{\mathfrak{m}}^0(M), S) = 0$. Vậy $\operatorname{Ext}_S^n(M, S) \cong \operatorname{Ext}_S^n(H_{\mathfrak{m}}^0(M), S)$. Nên theo (iii) ta có $\ell(\operatorname{Ext}_S^n(M, S)) = \ell(H_{\mathfrak{m}}^0(M))$.

(v) Từ (iv) ta có $\mathfrak{n} \in \operatorname{Ass}_S M$ khi và chỉ khi $\mathfrak{n} \in \operatorname{Ass}_S(\operatorname{Ext}_S^n(M, S))$. Xét $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(S)$ và $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = h$, bằng địa phương hóa ta có $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_S M$ khi

và chỉ khi $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_S(\text{Ext}_S^h(M, S))$ và

$$\ell_{S_{\mathfrak{p}}}(H_{\mathfrak{p}S_{\mathfrak{p}}}^0(M_{\mathfrak{p}})) = \ell_{S_{\mathfrak{p}}}(\text{Ext}_S^h(M, S)_{\mathfrak{p}}).$$

(vi) Theo (ii) và (v) ta có $\dim \text{Ext}_S^{n-d}(M, S) = d$, hơn nữa $\deg(I, M) = \deg(I, \text{Ext}_S^{n-d}(M, S))$. Ta cũng có

$$\text{adeg}(I, M) = \sum_i a_i \cdot \deg(I, \text{Ext}_S^i(M, S)),$$

ở đây $a_i = 1$ nếu $\dim \text{Ext}_S^i(M, S) = n - i$, và $a_i = 0$ nếu $\dim \text{Ext}_S^i(M, S) < n - i$. Mặt khác, nếu $\dim \text{Ext}_S^i(M, S) = n - i$ thì

$$\deg(I, \text{Ext}_S^i(\text{Ext}_S^i(M, S), S)) = \deg(I, \text{Ext}_S^i(M, S)),$$

và nếu $\dim \text{Ext}_S^i(M, S) < n - i$ thì $\text{Ext}_S^i(\text{Ext}_S^i(M, S), S) = 0$. Do đó

$$\text{adeg}(I, M) = \sum_i \deg(I, \text{Ext}_S^i(\text{Ext}_S^i(M, S), S)).$$

(vii) Theo (v) ta có

$$\text{Ass} M \subseteq \bigcup_{i \geq 0} \text{Ass}(\text{Ext}_S^i(M, S)).$$

Ta biết rằng $\deg(M)$, $\text{adeg}(M)$ phản ánh cấu trúc phức tạp của môđun M . Nhằm kiểm soát tốt hơn các độ phức tạp này và thuận tiện trong sử dụng L. Doering, T. Gunston và W. Vasconcelos đã đưa ra khái niệm *bậc mở rộng của môđun phân bậc* M và phát triển một trường hợp đặc biệt của bậc mở rộng là *bậc đồng điều của môđun phân bậc* M (xem [19], [55], [56]). Bậc mở rộng của một môđun trên vành địa phương được xem xét bởi M.E. Rossi, N.V. Trung và G. Valla trong [45]. Sự mở rộng tự nhiên của các khái niệm này cho idêan m-nguyên sơ I được nêu ra trong [33].

Định nghĩa 3.3.3. Cho $\mathcal{M}(R)$ là phạm trù các R -môđun hữu hạn sinh. Một *bậc mở rộng trên* $\mathcal{M}(R)$ *tương ứng với idêan* I là một hàm số

$$\text{Deg}(I, \bullet) : \mathcal{M}(R) \rightarrow \mathbb{R}$$

thỏa mãn các điều kiện sau

- (i) $\text{Deg}(I, M) = \text{Deg}(I, \overline{M}) + \ell(H_{\mathfrak{m}}^0(M))$, với $\overline{M} = M/H_{\mathfrak{m}}^0(M)$.
- (ii) $\text{Deg}(I, M) \geq \text{Deg}(I, M/xM)$ với mọi phần tử tổng quát $x \in I \setminus \mathfrak{m}I$ của M .
- (iii) Nếu M là Cohen-Macaulay thì $\text{Deg}(I, M) = \deg(I, M)$.

Định nghĩa 3.3.4 ([55]). Giả sử $(R, \mathfrak{m})$ là ảnh đồng cấu của một vành Gorenstein địa phương $(S, \mathfrak{n})$ chiều n , và M là một môđun R -hữu hạn sinh chiều d . Khi đó *bậc đồng điều*, $\text{hdeg}(I, M)$, của M tương ứng với I được định nghĩa đệ quy như sau

$$\text{hdeg}(I, M) = \deg(I, M) + \sum_{i=n-d+1}^n \binom{d-1}{i-n+d-1} \text{hdeg}(I, \text{Ext}_S^i(M, S)).$$

Chú ý 3.3.5. (i) Định nghĩa 3.3.4 là có nghĩa vì $\dim \text{Ext}_S^i(M, S) < d$ với mọi $i = n - d + 1, \dots, n$.

(ii) $\text{hdeg}(I, \bullet)$ là một bậc mở rộng của $\mathcal{M}(R)$, và $\text{hdeg}(I, M) = \deg(I, M)$ khi và chỉ khi M là một R -môđun Cohen-Macaulay.

(iii) Nếu M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng, thì $\ell(\text{Ext}_S^{n-i}(M, S)) = \ell(H_{\mathfrak{m}}^i(M))$ với mọi $i = 0, \dots, d - 1$. Ta có

$$\text{hdeg}(I, M) = \deg(I, M) + \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d-1}{i} \ell(H_{\mathfrak{m}}^i(M)).$$

(iv) (xem [56, Proposition 3.5]) Nếu $\dim M = \dim S = 2$ thì

$$\text{hdeg}(I, M) = \text{adeg}(I, M) + \ell(\text{Ext}_S^2(\text{Ext}_S^1(M, S), S)).$$

Cho đến nay bậc đồng điều là loại bậc mở rộng duy nhất được xây dựng rõ ràng. Nói chung bậc đồng điều của một môđun là khó tính toán và thường là các giá trị số lớn. Dưới đây ta sẽ xây dựng một bậc mở rộng của $\mathcal{M}(R)$ dựa

trên các môđun $U_i(M) \cong U_{M/(x_{i+2}, \dots, x_d)M}(0)$ với $x_1, \dots, x_d$ là một hệ tham số bất kì của M thỏa mãn $x_i \in \mathfrak{b}(M/(x_{i+1}, \dots, x_d)M)^3$ với mọi $i \leq d$. Chú ý rằng $\dim U_i(M) \leq i$ với mọi $0 \leq i \leq d-1$.

Kí hiệu 3.3.6. Cho môđun M với thành phần không trộn lẫn $U_M(0)$. Ta định nghĩa

$$\widetilde{\deg}(I, U_M(0)) = \begin{cases} \deg(I, U_M(0)) & \text{nếu } \dim U_M(0) = \dim M - 1 \\ 0 & \text{nếu } \dim U_M(0) < \dim M - 1. \end{cases}$$

Định nghĩa 3.3.7. Cho M là một R -môđun hữu hạn sinh chiều d . Ta định nghĩa *bậc không trộn lẫn của M tương ứng với I* , $\text{udeg}(I, M)$, như sau

$$\text{udeg}(I, M) = \deg(I, M) + \sum_{i=0}^{d-1} \widetilde{\deg}(I, U_i(M)),$$

ở đây $U_i(M)$ được hiểu như là $U_{M/(x_{i+2}, \dots, x_d)M}(0)$ với $x_1, \dots, x_d$ là một hệ tham số bất kì của M thỏa mãn $x_i \in \mathfrak{b}(M/(x_{i+1}, \dots, x_d)M)^3$ với mọi $i \leq d$. Ngoài ra, với mỗi $0 \leq i \leq d-1$ ta định nghĩa $\text{udeg}_i(I, M) = \widetilde{\deg}(I, U_i(M))$.

Ta chứng minh một số tính chất cơ bản của $\text{udeg}(I, M)$.

Định lý 3.3.8. Cho M là một R -môđun hữu hạn sinh chiều d . Ta có

$$\deg(I, M) \leq \text{adeg}(I, M) \leq \text{udeg}(I, M).$$

Hơn nữa

- (i) $\deg(I, M) = \text{udeg}(I, M)$ khi và chỉ khi M là môđun Cohen-Macaulay.
- (ii) $\text{adeg}(I, M) = \text{udeg}(I, M)$ khi và chỉ khi M là môđun Cohen-Macaulay dầy.

Chứng minh. Bất đẳng thức thứ nhất là hiển nhiên, và (i) là một hệ quả trực tiếp của (ii). Xét lọc chiều

$$\mathcal{D} : D_0 \subset D_1 \subset \dots \subset D_t = M$$

của M với $d_i = \dim D_i$ với mọi $i \leq t$. Nhắc lại rằng

$$\text{adeg}(I, M) = \text{deg}(I, M) + \sum_{i=0}^{t-1} \text{deg}(I, D_i).$$

Với mọi $i < t$ theo Quy ước 3.2.14 ta có $D_i \subseteq U_{d_i}(M)$. Nên $\dim U_{d_i}(M) = d_i$ và do đó

$$\text{deg}(I, D_i) \leq \text{deg}(I, U_{d_i}(M)) = \widetilde{\text{deg}}(I, U_{d_i}(M)).$$

Vậy $\text{adeg}(I, M) \leq \text{udeg}(I, M)$.

(ii) Nếu M là môđun Cohen-Macaulay dãy áp dụng Mệnh đề 3.2.15 ta có ngay $\text{adeg}(I, M) = \text{udeg}(I, M)$.

Xét $x_1, \dots, x_d$ là một hệ tham số của M thỏa mãn $x_i \in \mathfrak{b}(M/(x_{i+1}, \dots, x_d)M)^3$ với mọi $i \leq d$. Giả sử $\text{adeg}(I, M) = \text{udeg}(I, M)$ khi đó ta có $\text{deg}(I, D_i) = \text{deg}(I, U_{d_i}(M))$ và $\widetilde{\text{deg}}(I, U_j(M)) = 0$ với mọi $i < t$ và $d_i < j < d_{i+1}$. Giả sử M không là môđun Cohen-Macaulay dãy. Theo Mệnh đề 3.2.15 ta có thể tìm được số nguyên j_0 lớn nhất sao cho $D_{i_0} \neq U_{j_0}(M)$ với $d_{i_0} \leq j_0 < d_{i_0+1}$. Đặt $M' = M/(x_{j_0+3}, \dots, x_d)M$ ta có $x_{j_0+2} \in \mathfrak{b}(M')^3$ và $U_{j_0}(M) = U_{M'/x_{j_0+2}M'}(0)$. Đặt $\mathfrak{b}' = \mathfrak{b}(M'/x_{j_0+2}M')$. Từ định nghĩa của j_0 ta có D_{i_0} là môđun con lớn nhất của M' có chiều nhỏ hơn $\dim M' - 1$. Theo Quy ước 3.2.14 ta đồng nhất D_{i_0} với một môđun con của $U_{j_0}(M) = H_{\mathfrak{b}'}^0(M'/x_{j_0+2}M')$. Nên D_{i_0} là $\mathfrak{b}'$ -xoắn và do đó $D_{i_0} \cong H_{\mathfrak{b}'}^0(M')$. Từ chứng minh Bổ đề 3.2.8 ta có

$$U_{j_0}(M) \cong D_{i_0} \oplus H_{\mathfrak{b}'}^1(M'/U_{M'}(0)).$$

Vì $D_{i_0} \subsetneq U_{j_0}(M)$ nên $H_{\mathfrak{b}'}^1(M'/U_{M'}(0)) \neq 0$. Ta đồng nhất $H_{\mathfrak{b}'}^1(M'/U_{M'}(0))$ với môđun con N của $M'/x_{j_0+2}M' = M/(x_{j_0+2}, \dots, x_d)M$. Đặt $\dim N = h$. Vì N đẳng cấu với một môđun con của $U_h(M)$ ta có $\dim U_h(M) = h$. Nên $\widetilde{\text{deg}}(I, U_h(M)) \neq 0$. Suy ra tồn tại $i_1 \leq i_0$ để $d_{i_1} = h$. Ta có $D_{i_1} \oplus N$ là môđun con lớn nhất của $M'/x_{j_0+2}M' = M/(x_{j_0+2}, \dots, x_d)M$ có chiều d_{i_1} .

Theo Quy ước 3.2.14 ta coi $D_{i_1} \oplus N$ là một môđun con của $U_{d_1}(M)$. Ta có

$$\deg(I, U_{d_{i_1}}(M)) \geq \deg(I, D_{i_1}) + \deg(I, N) > \deg(I, D_{i_1}).$$

Điều này là mâu thuẫn với khẳng định $\deg(I, D_{i_1}) = \deg(I, U_{d_{i_1}}(M))$. Vậy M là môđun Cohen-Macaulay dãy. $\square$

Mệnh đề 3.3.9. Cho N là một nodule con có độ dài hữu hạn của M . Ta có

$$\text{udeg}(I, M) = \text{udeg}(I, M/N) + \ell(N).$$

Chứng minh. Xét $x_1, \dots, x_d$ là một hệ tham số của M thỏa mãn $x_i \in \mathfrak{b}(M/(x_{i+1}, \dots, x_d)M)^3 \cap \mathfrak{b}(M/((x_{i+1}, \dots, x_d)M + N))^3$ với mọi $i \leq d$. Theo Mệnh đề 3.2.13, $x_1, \dots, x_d$ là một dd -dãy nên $H_{\mathfrak{m}}^0(M) \cap (x_1, \dots, x_d)M = 0$. Dẫn đến với mọi $0 \leq j \leq d-1$ ta có dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow N \rightarrow M/(x_{j+2}, \dots, x_d)M \rightarrow M/(N + (x_{j+2}, \dots, x_d)M) \rightarrow 0.$$

Do đó $U_j(M/N) \cong U_j(M)/N$ với mọi $0 \leq j \leq d-1$. Dẫn đến $\widetilde{\deg}(I, U_j(M/N)) = \widetilde{\deg}(I, U_j(M))$ với mọi $1 \leq j \leq d-1$ và $\widetilde{\deg}(I, U_0(M/N)) = \widetilde{\deg}(I, U_0(M)) - \ell(N)$. Khẳng định bây giờ là hiển nhiên. $\square$

Mệnh đề 3.3.10. Cho M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng chiều d . Khi đó

$$\text{udeg}(I, M) = \deg(I, M) + \sum_{j=0}^{d-1} \binom{d-1}{j} \ell(H_{\mathfrak{m}}^j(M)).$$

Chứng minh. Xét $x_1, \dots, x_d$ là một hệ tham số của M thỏa mãn $x_i \in \mathfrak{b}(M/(x_{i+1}, \dots, x_d)M)^3$ với mọi $i \leq d$. Ta có

$$U_i(M) \cong H_{\mathfrak{m}}^0(M/(x_{i+2}, \dots, x_d)M) \cong \bigoplus_{j=0}^{d-i-1} H_{\mathfrak{m}}^j(M)^{\binom{d-i-1}{j}}$$

với mọi $0 \leq i \leq d-1$. Nên $\widetilde{\deg}(I, U_i(M)) = 0$ với mọi $1 \leq i \leq d-1$ và $\widetilde{\deg}(I, U_0(M)) = \sum_{j=0}^{d-1} \binom{d-1}{j} \ell(H_{\mathfrak{m}}^j(M))$. Mệnh đề được chứng minh. $\square$

Mệnh đề 3.3.11. *Các khẳng định sau là đúng*

- (i) Nếu $d = 1$ thì $\text{udeg}(I, M) = \text{adeg}(I, M)$.
- (ii) Nếu $d = 2$ thì $\text{udeg}(I, M) = \text{adeg}(I, M) + \ell(H_{\mathfrak{m}}^1(M/U_M(0)))$.

Chứng minh. (i) là hiển nhiên.

(ii) Xét hai trường hợp.

Trường hợp $\dim U_M(0) = 0$, khi đó ta có M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng nên theo Mệnh đề 3.3.10 ta có

$$\begin{aligned} \text{udeg}(I, M) &= \deg(I, M) + \ell(H_{\mathfrak{m}}^0(M)) + \ell(H_{\mathfrak{m}}^1(M)) \\ &= \text{adeg}(I, M) + \ell(H_{\mathfrak{m}}^1(M/H_{\mathfrak{m}}^0(M))). \end{aligned}$$

Trường hợp $\dim U_M(0) = 1$, khi đó

$$\text{adeg}(I, M) = \deg(I, M) + \deg(I, U_M(0)) + \ell(H_{\mathfrak{m}}^0(M)).$$

Mặt khác $U_1(M) \cong U_M(0)$ nên $\widetilde{\deg}(I, U_1(M)) = \deg(I, U_M(0))$. Xét $x_2 \in \mathfrak{b}(M)^3$ là một phần tử tham số, theo chứng minh Bổ đề 3.2.8 ta có

$$U_0(M) \cong H_{\mathfrak{m}}^0(M/x_2M) \cong H_{\mathfrak{m}}^0(M) \oplus H_{\mathfrak{m}}^1(M/U_M(0)).$$

Mệnh đề được chứng minh. □

Hệ quả 3.3.12. *Giả sử $(R, \mathfrak{m})$ là ảnh đồng cấu của một vành Gorenstein và $\dim M = 2$. Ta có $\text{udeg}(I, M) = \text{hdeg}(I, M)$.*

Chứng minh. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $(R, \mathfrak{m})$ là một vành Gorenstein chiều hai. Nếu $U_M(0) = H_{\mathfrak{m}}^0(M)$ ta có M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng, khẳng định suy ra từ Mệnh đề 3.3.10 và Chú ý 3.3.5 (iii). Giả sử $\dim U_M(0) = 1$, theo Mệnh đề 3.3.10 và Chú ý 3.3.5 (iv) ta chỉ cần chứng minh $\ell(H_{\mathfrak{m}}^1(M/U_M(0))) = \ell(\text{Ext}_R^2(\text{Ext}_R^1(M, R), R))$. Do $\text{Ass} M/U_M(0) = \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \text{Ass} M, \dim R/\mathfrak{p} = 2\}$ nên Chú ý 3.3.2

(i) và (v) suy ra rằng $\text{Ext}_R^1(M/U_M(0), R)$ là môđun có độ dài hữu hạn, và $\ell(\text{Ext}_R^1(M/U_M(0), R)) = \ell(H_{\mathfrak{m}}^1(M/U_M(0)))$ theo Định lí đối ngẫu địa phương. Theo Chú ý 3.3.2 (iii) ta có $\ell(\text{Ext}_R^2(\text{Ext}_R^1(M, R), R)) = \ell(H_{\mathfrak{m}}^0(\text{Ext}_R^1(M, R)))$. Vì vậy ta chỉ cần chứng minh rằng

$$\ell(\text{Ext}_R^1(M/U_M(0), R)) = \ell(H_{\mathfrak{m}}^0(\text{Ext}_R^1(M, R))).$$

Xét dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow U_M(0) \rightarrow M \rightarrow M/U_M(0) \rightarrow 0.$$

Theo Chú ý 3.3.2 (i) dãy khớp trên cảm sinh dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow \text{Ext}_R^1(M/U_M(0), R) \rightarrow \text{Ext}_R^1(M, R) \rightarrow \text{Ext}_R^1(U_M(0), R) \rightarrow 0.$$

Theo Chú ý 3.3.2 (ii) ta có $H_{\mathfrak{m}}^0(\text{Ext}_R^1(U_M(0), R)) = 0$. Nên

$$\text{Ext}_R^1(M/U_M(0), R) = H_{\mathfrak{m}}^0(\text{Ext}_R^1(M/U_M(0), R)) \cong H_{\mathfrak{m}}^0(\text{Ext}_R^1(M, R)).$$

Hệ quả được hoàn toàn chứng minh. $\square$

Để chứng minh bậc không trộn lẫn là một bậc mở rộng của $\mathcal{M}(R)$ ta chỉ còn phải chứng minh tính chất (ii) của Định nghĩa 3.3.3. Chúng ta sẽ chứng minh bậc không trộn lẫn có đáng điều tốt khi chia thương cho các *phần tử bề mặt*.

Định nghĩa 3.3.13. Một phần tử $x \in I \setminus \mathfrak{m}I$ được gọi là *một phần tử bề mặt của M tương ứng với I* nếu tồn tại số nguyên dương c sao cho

$$(I^{n+1}M : x) \cap I^c M = I^n M$$

với mọi $n \geq c$.

Chú ý 3.3.14. (i) Gọi $G_I(R) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n / I^{n+1}$ là vành phân bậc liên kết của R tương ứng với I và $G_I(M) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n M / I^{n+1} M$ là $G_I(R)$ -môđun phân bậc. Đặt $(G_I(R))_+ = \bigoplus_{n \geq 1} I^n / I^{n+1}$. Khi đó x là một phần tử bề

mặt của M tương ứng với I khi và chỉ khi *dạng dấu* x^* của x trong $G_I(R)$ là một phần tử $(G_I(R))_+$ -lọc chính quy của $G_I(M)$. Dễ thấy khi đó x là một phần tử I -lọc chính quy của M .

(ii) Phần tử bề mặt của M tương ứng với I luôn tồn tại nếu thêm giả thiết trường thặng dư $R/\mathfrak{m}$ có vô hạn phần tử. Hơn nữa ta luôn có thể thêm vào giả thiết này bằng phép chuyển phẳng trung thành vành cơ sở $R \rightarrow R[X]_{\mathfrak{m}R[X]}$, ở đây X là một biến.

(iii) (xem [37, 22.6]) Xét x là một phần tử bề mặt của M tương ứng với I . Với $n \gg 0$ ta có $I^{n+1}M :_M x = 0 :_M x + I^n M$ nên ta có

$$\ell(M/(I^{n+1} + (x))M) = \ell(M/I^{n+1}M) - \ell(M/I^n M) + \ell(0 :_M x)$$

với $n \gg 0$.

(iv) Xét x là một phần tử bề mặt của M tương ứng với I . Theo (iii) ta có $\deg(I, M/xM) = \deg(I, M)$ nếu $d \geq 2$, và $\ell(M/xM) = \deg(I, M/xM) = \deg(I, M) + \ell(0 :_M x)$ nếu $d = 1$.

Bổ đề 3.3.15. Cho M là một R -môđun hữu hạn sinh chiều $d \geq 2$. Xét phần tử tham số x của M thỏa mãn x là một phần tử bề mặt của $U_M(0)$ tương ứng với I , và $x \notin \mathfrak{p}$ với mọi $\mathfrak{p} \in \text{Ass}U_{d-2}(M) \setminus \{\mathfrak{m}\}$. Ta có

$$\widetilde{\deg}(I, U_{M/xM}(0)) = \widetilde{\deg}(I, U_M(0))$$

nếu $d \geq 3$, và

$$\widetilde{\deg}(I, U_{M/xM}(0)) = \widetilde{\deg}(I, U_M(0)) + \ell(0 :_{H_{\mathfrak{m}}^0(M)} x) + \ell(0 :_{H_{\mathfrak{m}}^1(M/U_M(0))} x)$$

nếu $d = 2$.

Chứng minh. Đặt $\overline{M} = M/U_M(0)$, theo Mệnh đề 3.2.19 ta có dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow U_M(0)/xU_M(0) \rightarrow U_{M/xM}(0) \rightarrow H_{\mathfrak{m}}^0(\overline{M}/x\overline{M}) \rightarrow 0.$$

Trường hợp $d \geq 3$. Nếu $\dim U_M(0) < d - 1$ thì $\dim U_M(0)/xU_M(0) < d - 2$. Do đó $\dim U_{M/xM}(0) < d - 2$. Dẫn đến $\widetilde{\deg}(I, U_{M/xM}(0)) = 0 = \widetilde{\deg}(I, U_M(0))$. Nếu $\dim U_M(0) = d - 1$ ta có $\dim U_{M/xM}(0) = d - 2 > 0$. Nên $\deg(I, U_{M/xM}(0)) = \deg(I, U_M(0)/xU_M(0))$. Vì x là một phần tử bề mặt của $U_M(0)$ tương ứng với I nên $\deg(I, U_M(0)) = \deg(I, U_M(0)/xU_M(0))$ do Chú ý 3.3.14 (iv). Vậy

$$\widetilde{\deg}(I, U_{M/xM}(0)) = \widetilde{\deg}(I, U_M(0)).$$

Trường hợp $d = 2$ ta có $U_{M/xM}(0)$ là một môđun có độ dài hữu hạn. Do đó $\widetilde{\deg}(I, U_{M/xM}(0)) = \ell(U_{M/xM}(0)) = \ell(U_M(0)/xU_M(0)) + \ell(H_{\mathfrak{m}}^0(\overline{M}/x\overline{M}))$.

Nếu $\dim U_M(0) = 1$ theo Chú ý 3.3.14 (iv) ta có

$$\ell(U_M(0)/xU_M(0)) = \deg(I, U_M(0)) + \ell(0 :_M x) = \widetilde{\deg}(I, U_M(0)) + \ell(0 :_{H_{\mathfrak{m}}^0(M)} x).$$

Nếu $\dim U_M(0) = 0$ thì $\widetilde{\deg}(I, U_M(0)) = 0$ và $U_M(0) = H_{\mathfrak{m}}^0(M)$. Nên

$$\ell(U_M(0)/xU_M(0)) = \widetilde{\deg}(I, U_M(0)) + \ell(0 :_{H_{\mathfrak{m}}^0(M)} x).$$

Mặt khác dãy khớp

$$0 \rightarrow \overline{M} \xrightarrow{x} \overline{M} \rightarrow \overline{M}/x\overline{M} \rightarrow 0$$

cảm sinh dãy khớp đối đồng điều địa phương

$$0 \rightarrow H_{\mathfrak{m}}^0(\overline{M}/x\overline{M}) \rightarrow H_{\mathfrak{m}}^1(\overline{M}) \xrightarrow{x} H_{\mathfrak{m}}^1(\overline{M}).$$

Do đó $\ell(H_{\mathfrak{m}}^0(\overline{M}/x\overline{M})) = \ell(0 :_{H_{\mathfrak{m}}^1(\overline{M})} x)$. Vậy

$$\widetilde{\deg}(I, U_{M/xM}(0)) = \widetilde{\deg}(I, U_M(0)) + \ell(0 :_{H_{\mathfrak{m}}^0(M)} x) + \ell(0 :_{H_{\mathfrak{m}}^1(M/U_M(0))} x).$$

Bổ đề được hoàn toàn chứng minh. $\square$

Bổ đề 3.3.16. *Giả sử x là một phần tử tham số của M có chiều $d \geq 2$ thỏa mãn $x \notin \mathfrak{p}$ với mọi $\mathfrak{p} \in \text{Ass}U_i(M) \setminus \{\mathfrak{m}\}$ với mọi $1 \leq i \leq d - 1$. Khi đó ta có thể chọn một phần tử tham số $x_d \in \mathfrak{b}(M)^3$ của M sao cho x là một phần tử tham số của M/x_dM .*

Chứng minh. Nếu $\dim U_M(0) < d - 1$ thì $\dim R/\mathfrak{b}(M) \leq d - 2$ do Chú ý 3.1.2 (ii). Do đó ta có thể chọn một phần tử tham số $x_d \in \mathfrak{b}(M)^3$ sao cho x và x_d là một phân hệ tham số của M tức là x là một phần tử tham số của $M/x_d M$.

Nếu $\dim U_M(0) = d - 1$, đặt $\overline{M} = M/U_M(0)$. Xét dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow U_M(0) \rightarrow M \rightarrow \overline{M} \rightarrow 0.$$

Dãy khớp trên cho ta dãy khớp đối đồng điều địa phương

$$\cdots \rightarrow H_{\mathfrak{m}}^i(U_M(0)) \rightarrow H_{\mathfrak{m}}^i(M) \rightarrow H_{\mathfrak{m}}^i(\overline{M}) \rightarrow \cdots.$$

Nên $\mathfrak{a}_i(M) = \text{Ann} H_{\mathfrak{m}}^i(M) \supseteq \text{Ann} U_M(0) \cdot \mathfrak{a}_i(\overline{M})$ với mọi $i \geq 0$. Do đó

$$\sqrt{\mathfrak{b}(M)} = \sqrt{\mathfrak{a}(M)} \supseteq \sqrt{\text{Ann} U_M(0) \cdot \mathfrak{a}(\overline{M})} = \sqrt{\text{Ann} U_M(0) \cdot \mathfrak{b}(\overline{M})}.$$

Xét $\mathfrak{q} \in \text{Ass} M/xM$, $\dim R/\mathfrak{q} = d - 1$ bất kì. Do $\dim R/\mathfrak{b}(\overline{M}) \leq d - 2$ nên $\mathfrak{b}(\overline{M}) \not\subseteq \mathfrak{q}$. Giả sử $\text{Ann} U_M(0) \subseteq \mathfrak{q}$ ta có $\mathfrak{q} \in \text{Assh} U_M(0)$ do $\dim U_M(0) = \dim R/\mathfrak{q} = d - 1$. Điều này mâu thuẫn với khẳng định $x \notin \mathfrak{p}$ với mọi $\mathfrak{p} \in \text{Ass} U_{d-1}(M) \setminus \{\mathfrak{m}\}$. Nên $\text{Ann} U_M(0) \not\subseteq \mathfrak{q}$, do đó $\mathfrak{b}(M) \not\subseteq \mathfrak{q}$ với mọi $\mathfrak{q} \in \text{Assh} M/xM$. Vậy ta có thể chọn $x_d \in \mathfrak{b}(M)^3$ sao cho x_d là một phần tử tham số của cả M và M/xM . Do đó x là một phần tử tham số của $M/x_d M$. Bổ đề được chứng minh. $\square$

Định lý 3.3.17. Cho M là một R -môđun hữu hạn sinh chiều d . Xét x là một phần tử bề mặt của cả M và các $U_i(M)$, $1 \leq i \leq d - 1$, tương ứng với I . Ta có

$$\text{udeg}(I, M/xM) \leq \text{udeg}(I, M).$$

Chứng minh. Trước hết ta chú ý rằng do x là một phần tử bề mặt của $U_i(M)$ tương ứng với I nên $x \notin \mathfrak{p}$ với mọi $\mathfrak{p} \in \text{Ass} U_i(M) \setminus \{\mathfrak{m}\}$ với mọi $1 \leq i \leq d - 1$. Trường hợp $d = 1$ là hiển nhiên do $\text{udeg}(I, M) = \deg(I, M) + \ell(H_{\mathfrak{m}}^0(M))$ và $\text{udeg}(I, M/xM) = \ell(M/xM) = \deg(I, M) + \ell(0 :_M x)$. Do đó ta có

thể giả sử $d \geq 2$. Áp dụng liên tiếp Bổ đề 3.3.16 ta có thể chọn một hệ tham số $x_1, \dots, x_d$ của M sao cho $x_i \in \mathfrak{b}(M/(x_{i+1}, \dots, x_d)M)^3$ với mọi $i \leq d$, và $x_1, x_2, \dots, x_d$ là một hệ tham số của M . Nên $x_i \in \mathfrak{b}(M/(x, x_{i+1}, \dots, x_d)M)^3$ với mọi $2 \leq i \leq d$ do Bổ đề 3.1.10. Ta có

$$\begin{aligned} \text{udeg}(I, M) &= \deg(I, M) + \sum_{i=0}^{d-1} \widetilde{\deg}(I, U_i(M)) \\ &= \deg(I, M) + \sum_{j=2}^{d+1} \widetilde{\deg}(I, U_{M/(x_j, \dots, x_d)M}(0)), \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} \text{udeg}(I, M/xM) &= \deg(I, M/xM) + \sum_{i=0}^{d-2} \widetilde{\deg}(I, U_i(M/xM)) \\ &= \deg(I, M/xM) + \sum_{j=3}^{d+1} \widetilde{\deg}(I, U_{M/(x, x_j, \dots, x_d)M}(0)). \end{aligned}$$

Vì x là một phần tử bề mặt của M tương ứng với I nên $\deg(I, M/xM) = \deg(I, M)$. Với mọi $j > 3$ ta có $\dim M/(x_j, \dots, x_d)M \geq 3$. Theo Bổ đề 3.3.15 ta có

$$\widetilde{\deg}(I, U_{M/(x, x_j, \dots, x_d)M}(0)) = \widetilde{\deg}(I, U_{M/(x_j, \dots, x_d)M}(0))$$

với mọi $3 < j \leq d+1$. Đặt $M' = M/(x_3, \dots, x_d)M$ ta có $\dim M' = 2$. Lại áp dụng Bổ đề 3.3.15 ta có

$$\widetilde{\deg}(I, U_{M'/xM'}(0)) = \widetilde{\deg}(I, U_{M'}(0)) + \ell(0 :_{H_{\mathfrak{m}}^0(M')} x) + \ell(0 :_{H_{\mathfrak{m}}^1(M'/U_{M'}(0))} x).$$

Từ chứng minh Bổ đề 3.2.8 ta có

$$U_0(M') = H_{\mathfrak{m}}^0(M'/x_2M') \cong H_{\mathfrak{m}}^0(M') \oplus H_{\mathfrak{m}}^1(M'/U_{M'}(0)).$$

Nên

$$\widetilde{\deg}(I, U_0(M')) = \ell(H_{\mathfrak{m}}^0(M')) + \ell(H_{\mathfrak{m}}^1(M'/U_{M'}(0))).$$

Dẫn đến $\widetilde{\deg}(I, U_{M'/xM'}(0)) \leq \widetilde{\deg}(I, U_{M'}(0)) + \widetilde{\deg}(I, U_0(M'))$, tức là

$$\widetilde{\deg}(I, U_{M/(x, x_3, \dots, x_d)M}(0)) \leq \widetilde{\deg}(I, U_{M/(x_3, \dots, x_d)M}(0)) + \widetilde{\deg}(I, U_{M/(x_2, \dots, x_d)M}(0)).$$

Vậy $\text{udeg}(I, M/xM) \leq \text{udeg}(I, M)$. Định lí được chứng minh. $\square$

Chú ý 3.3.18. Giả sử $(R, \mathfrak{m})$ là ảnh đồng cấu của một vành Gorenstein S chiều n , và M là một môđun Cohen-Macaulay dãy. Ta có $\text{Ext}_S^i(M, S)$ hoặc là môđun Cohen-Macaulay hoặc là môđun không với mọi i . Theo Chú ý 3.3.2 (v) và Định lí 3.3.8 ta có (xem [38, Theorem 3.11])

$$\text{udeg}(I, M) = \text{adeg}(I, M) = \deg(I, M) + \sum_{i=0}^{d-1} \deg(\text{Ext}_S^{n-i}(M, S)).$$

Theo [38, Theorem 3.5] ta có

$$\text{hdeg}(I, M) = \deg(I, M) + \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d-1}{i} \deg(\text{Ext}_S^{n-i}(M, S)).$$

Do đó $\text{udeg}(I, M) = \text{hdeg}(I, M)$ khi và chỉ khi $\text{Ext}_S^{n-i}(M, S) = 0$ với mọi $1 \leq i \leq d-2$. Nên hai khái niệm udeg và hdeg là phân biệt.

Trong các ví dụ dưới đây ta dùng các kí hiệu $\text{adeg}(M)$, $\text{hdeg}(M)$ và $\text{udeg}(M)$ thay cho $\text{adeg}(\mathfrak{m}, M)$, $\text{hdeg}(\mathfrak{m}, M)$ và $\text{udeg}(\mathfrak{m}, M)$, tương ứng.

Ví dụ 3.3.19. Lấy $R = k[[X_1, \dots, X_4]]/(X_1^2, X_1X_2, X_1X_3)$ với k là một trường và $X_i, 1 \leq i \leq 4$, là các biến. Ta kí hiệu x_i là ảnh của X_i trong R . Ta có R là một vành Cohen-Macaulay dãy chiều 3 với lọc chiều $\mathcal{D} : 0 \subseteq (x_1) \subseteq R$. Ta có

$$\deg(R) = 1 < \text{adeg}(R) = \text{udeg}(R) = 2 < \text{hdeg}(R) = 3.$$

Ví dụ 3.3.20. Lấy $R = k[[X_1, \dots, X_7]]/(X_1, X_2, X_3) \cap (X_4, X_5, X_6)$ với k là một trường và $X_i, 1 \leq i \leq 7$, là các biến. Ta kí hiệu x_i là ảnh của X_i trong R và $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_7)$. Ta dễ thấy $\deg(R) = \text{adeg}(R) = 2$. Đặt $S = k[[X_1, \dots, X_7]]$ từ dãy khớp

$$0 \rightarrow R \rightarrow R/(x_1, x_2, x_3) \oplus R/(x_4, x_5, x_6) \rightarrow R/(x_1, \dots, x_6) \rightarrow 0$$

ta có thể chứng minh được rằng $\text{Ext}_S^i(R, S) = 0$ với mọi $i \neq 3, 5$. Hơn nữa $\text{Ext}_S^3(R, S) \cong R/(x_1, x_2, x_3) \oplus R/(x_4, x_5, x_6)$ và $\text{Ext}_S^5(R, S) \cong$

$R/(x_1, \dots, x_6)$. Do đó $\text{hdeg}(R) = 2 + \binom{3}{1} \cdot 1 = 5$. Theo Định lí đối ngẫu địa phương ta có $H_m^i(R) = 0$ với mọi $i \neq 2, 4$ và $H_m^2(R) \cong H_m^1(R/(x_1, \dots, x_6))$. Ta có $\mathfrak{a}(R) = \mathfrak{b}(R) = (x_1, \dots, x_6)$. Đặt u, v, w là một phân hệ tham số của R sao cho $u \in \mathfrak{b}(R)^3, v \in \mathfrak{b}(R/(u))^3$ và $w \in \mathfrak{b}(R/(u, v))^3$. Sử dụng Hệ quả 3.2.5 ta có thể tính các môđun đối đồng điều địa phương như bảng sau

$H_m^*(\bullet)$	0	1	2	3	4
R	0	0	K	0	$H_m^4(R)$
$R/(u)$	0	K	K	$H_m^3(R/(u))$	0
$R/(u, v)$	0	$K \oplus K$	$H_m^2(R/(u, v))$	0	0
$R/(u, v, w)$	0	$H_m^1(R/(u, v, w))$	0	0	0

ở đây $K \cong H_m^1(R/(x_1, \dots, x_6))$. Ta có thể kiểm tra rằng $U_3(R) = U_R(0) \cong (0)$, $U_2(R) \cong R/(x_1, \dots, x_6)$, $U_1(R) \cong R/(x_1, \dots, x_6) \oplus R/(x_1, \dots, x_6)$ và $U_0(R) \cong (0)$. Dẫn đến $\text{udeg}(R) = 4$.

Các ví dụ nêu trên dẫn ta đến câu hỏi sau.

Câu hỏi 3.3.21. Phải chăng $\text{udeg}(I, M) \leq \text{hdeg}(I, M)$ với mọi R -môđun hữu hạn sinh M và mọi idêan m -nguyên sơ I ?

Kết luận Chương 3. Trong chương này chúng tôi đã thực hiện được một số công việc như sau:

1. Xây dựng Định lí chỉ ra của đối đồng điều địa phương trong vành địa phương (xem Định lí 3.2.4).
2. Áp dụng Định lí 3.2.4 để chứng minh một số bất biến của môđun (xem các Định lí 3.2.7 và 3.2.9).
3. Xây dựng khái niệm bậc không trộn lẫn của môđun. Đồng thời chứng minh bậc không trộn lẫn là một bậc mở rộng (xem Định lí 3.3.8, Mệnh đề 3.3.9 và Định lí 3.3.17).

Chương 4

Tính hữu hạn của tập idêan nguyên tố liên kết

Trong chương này chúng tôi luôn xét $\mathfrak{a}$ là một idêan của R và M là một R -môđun. Nói chung các môđun đối đồng điều địa phương $H_{\mathfrak{a}}^i(M)$ có cấu trúc phức tạp và có thể không là một R -môđun hữu hạn sinh ngay cả khi M là một R -môđun hữu hạn sinh. Chú ý rằng một môđun không hữu hạn sinh nhưng tập idêan nguyên tố liên kết của nó vẫn có thể là hữu hạn. C. Huneke trong [26, Problem 3.3] đã đặt ra câu hỏi: Phải chăng $\text{Ass}H_{\mathfrak{a}}^i(M)$ luôn là một tập hữu hạn khi M là một môđun hữu hạn sinh với mọi $i \geq 0$? Câu hỏi của Huneke được đặc biệt quan tâm khi vành cơ sở là một vành chính quy (xem [27], [34], [49]). Khi vành cơ sở không là chính quy nói chung câu hỏi của Huneke không còn đúng do các ví dụ của A. Singh trong [48] và M. Katzman trong [29]. Trong chương này chúng tôi muốn chứng tỏ rằng tính chẻ ra của đối đồng điều địa phương có thể áp dụng để nghiên cứu tập idêan nguyên tố liên kết của môđun đối đồng điều địa phương. Chúng tôi quan tâm đến câu hỏi của Huneke trong những điều kiện nhất định. Cụ thể, trong Tiết 4.1 chúng tôi sẽ chứng minh $\text{Ass}H_{\mathfrak{a}}^t(M)$ là hữu hạn nếu $H_{\mathfrak{a}}^t(M)$ là môđun đối đồng điều địa phương đầu tiên không hữu hạn sinh và $\text{supp}(H_{\mathfrak{a}}^t(M))$ là không hữu hạn (xem Định lí 4.1.8). Kết quả trên là tổng hợp các kết quả chính của M. Brodmann và A.L. Faghani trong [5], và của K. Khashyarmansh và Sh.

Salarian trong [30]. Trong Tiết 4.2 chúng tôi sử dụng Định lí chỉ ra 1.4.4 để nghiên cứu tính hữu hạn của tập các ideal nguyên tố liên kết của một họ các môđun thương (xem Định lí 4.2.9). Bởi tính độc lập của vấn đề nên Chương 4 có thể hiểu là một phần phụ lục của luận án.

4.1 Môđun FSF

Trước tiên, ta nhắc lại kết quả chính của Brodmann và Faghani trong [5], và của Khashyarmanesh và Salarian trong [30].

Định lí 4.1.1. *Cho M là một R -môđun hữu hạn sinh và t là một số nguyên không âm. Khi đó $\text{Ass}H_a^t(M)$ là một tập hợp hữu hạn nếu một trong các điều kiện sau thỏa mãn*

- (i) $H_a^i(M)$ là hữu hạn sinh với mọi $i < t$.
- (ii) $\text{supp}(H_a^i(M))$ là một tập hữu hạn với mọi $i < t$.

Mục đích của tiết này là đưa ra một kết quả tổng hợp cho Định lí 4.1.1. Để làm được điều này ta giới thiệu lớp môđun FSF.

Định nghĩa 4.1.2 (Xem [41]). Một R -môđun M được gọi là một môđun FSF nếu tồn tại một môđun con hữu hạn sinh N của M sao cho $\text{supp}(M/N)$ là một tập hữu hạn.

Từ định nghĩa ta thấy ngay $\text{Ass}M$ hữu hạn nếu M là FSF. Nhắc lại rằng một phạm trù con của phạm trù các R -môđun được gọi là một phạm trù con Serre nếu nó đóng với phép lấy môđun con, môđun thương và mở rộng.

Mệnh đề 4.1.3. *Phạm trù các môđun FSF là một phạm trù con Serre của phạm trù các R -môđun.*

Chứng minh. Xét dãy khớp ngắn các R -môđun

$$0 \rightarrow M_1 \rightarrow M \rightarrow M_2 \rightarrow 0.$$

Ta dễ dàng chứng minh nếu M là môđun FSF, thì các môđun M_1 và M_2 cũng là FSF. Giả sử M_1 và M_2 là các môđun FSF. Gọi N_1 và N_2 là các môđun con hữu hạn sinh của M_1 và M_2 , tương ứng, sao cho $\text{supp}(M_1/N_1)$ và $\text{supp}(M_2/N_2)$ là các tập hợp hữu hạn. Ta có thể giả sử rằng M_1 là một môđun con của M và M_2 là môđun thương của M . Xét các phần tử $x_1, x_2, \dots, x_n$ và $y_1, y_2, \dots, y_m$ của M sao cho $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các phần tử sinh của N_1 và $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_m$ là các phần tử sinh của N_2 trong $M_2 = M/M_1$, ở đây ta kí hiệu $\bar{y} = y + M_1$. Gọi N là môđun con của M sinh bởi $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m$. Ta có N là hữu hạn sinh, và khẳng định $\text{supp}(M/N)$ là một tập hữu hạn được suy ra từ dãy khớp

$$M_1/N_1 \rightarrow M/N \rightarrow M_2/N_2 \rightarrow 0.$$

Vậy M là FSF. □

Nhận xét dưới đây cho ta tương quan giữa phạm trù các môđun FSF và một số phạm trù môđun khác.

Chú ý 4.1.4. (i) Phạm trù các môđun FSF chứa phạm trù các môđun Noether và phạm trù các môđun Artin.

(ii) H. Zöschinger trong [60] định nghĩa một R -môđun M là *một môđun minimax* nếu tồn tại một môđun con hữu hạn sinh N sao cho M/N là một môđun Artin. Phạm trù các môđun minimax cũng là một phạm trù con Serre của phạm trù các R -môđun. Khi vành cơ sở là vành địa phương Noether đầy đủ $(R, \mathfrak{m})$, thì một môđun M là minimax khi và chỉ khi nó là phản xạ Matlis tức là $M \cong \text{Hom}_R(\text{Hom}_R(M, E(R/\mathfrak{m})), E(R/\mathfrak{m}))$, ở đây $E(R/\mathfrak{m})$ là bao nội xạ của R -môđun $R/\mathfrak{m}$ (xem [20, Proposition 1.3]). Từ các định nghĩa ta thấy nếu môđun M là minimax, thì M cũng là FSF.

(iii) K. Divaani-Aazar và A. Mafi trong [18] định nghĩa một R -môđun M là

một môđun Lasker yếu nếu mọi môđun thương của M đều có tập idêan nguyên tố liên kết là hữu hạn. Rõ ràng, phạm trù các môđun Lasker yếu là phạm trù con Serre lớn nhất của phạm trù R -môđun sao cho mọi môđun trong nó đều có một số hữu hạn các idêan nguyên tố liên kết, và do đó nếu một môđun là FSF thì nó cũng là Lasker yếu. Gần đây, K. Bahmanpour và A. Khojali chỉ ra rằng một môđun là FSF khi và chỉ khi nó là Lasker yếu (xem [3]).

Bổ đề 4.1.5. *Cho M là một R -môđun FSF và N là một R -môđun hữu hạn sinh. Khi đó $\text{Ext}_R^i(N, M)$ và $\text{Tor}_i^R(N, M)$ là các môđun FSF với mọi $i \geq 0$.*

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh tính FSF của $\text{Ext}_R^i(N, M)$, còn tính FSF của $\text{Tor}_i^R(N, M)$ sẽ được chứng minh tương tự. Vì M là FSF, nên tồn tại một dãy khớp ngắn

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0,$$

với M_1 là hữu hạn sinh và $\text{supp}(M_2)$ là hữu hạn. Dãy khớp trên cảm sinh các dãy khớp

$$\text{Ext}_R^i(N, M_1) \longrightarrow \text{Ext}_R^i(N, M) \longrightarrow \text{Ext}_R^i(N, M_2)$$

với mọi $i \geq 0$. Do N và M_1 là các môđun hữu hạn sinh và $\text{supp}(M_2)$ là một tập hữu hạn, ta có $\text{Ext}_R^i(N, M_1)$ là hữu hạn sinh và $\text{supp}(\text{Ext}_R^i(N, M_2))$ là hữu hạn. Nên $\text{Ext}_R^i(N, M)$ là FSF với mọi $i \geq 0$. $\square$

Mệnh đề 4.1.6. *Cho $\mathfrak{a}$ là một idêan của vành R , và M là một R -môđun FSF. Xét t là một số nguyên không âm sao cho $H_{\mathfrak{a}}^i(M)$ là FSF với mọi $i < t$. Thì*

$$\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{\mathfrak{a}}^t(M))$$

là FSF. Nói riêng, $\text{Ass}_R(H_{\mathfrak{a}}^t(M))$ là một tập hợp hữu hạn.

Chứng minh. Khẳng định sau được suy ra từ khẳng định đầu và tính chất $\text{Ass}_R(H_{\mathfrak{a}}^t(M)) = \text{Ass}_R(\text{Hom}(R/\mathfrak{a}, H_{\mathfrak{a}}^t(M)))$.

Ta chứng minh $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{\mathfrak{a}}^t(M))$ là FSF bằng quy nạp theo t . Trường hợp $t = 0$ là hiển nhiên do $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{\mathfrak{a}}^0(M)) \subseteq M$. Xét $t > 0$ và đặt $\overline{M} = M/H_{\mathfrak{a}}^0(M)$. Khi đó $\overline{M}$ là FSF theo Mệnh đề 4.1.3, $H_{\mathfrak{a}}^0(\overline{M}) = 0$, và $H_{\mathfrak{a}}^i(\overline{M}) \cong H_{\mathfrak{a}}^i(M)$ với mọi $i > 0$. Do đó $H_{\mathfrak{a}}^i(\overline{M})$ là FSF với mọi $i < t$ và $H_{\mathfrak{a}}^t(\overline{M}) \cong H_{\mathfrak{a}}^t(M)$. Thay thế M bởi $\overline{M}$, ta có thể giả sử rằng $H_{\mathfrak{a}}^0(M) = 0$. Vì $\text{Ass}_R(M)$ là một tập hữu hạn nên tồn tại một phần tử $a \in \mathfrak{a}$ sao cho a là M -chính quy. Ta có dãy khớp ngắn sau

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{a} M \xrightarrow{p} M/aM \longrightarrow 0,$$

với p là phép chiếu tự nhiên. Dãy khớp này cho ta các dãy khớp đối đồng điều địa phương

$$H_{\mathfrak{a}}^i(M) \longrightarrow H_{\mathfrak{a}}^i(M/aM) \longrightarrow H_{\mathfrak{a}}^{i+1}(M)$$

với mọi $i \geq 0$. Nên $H_{\mathfrak{a}}^i(M/aM)$ là FSF với mọi $i < t - 1$. Bằng quy nạp cho M/aM ta có $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{\mathfrak{a}}^{t-1}(M/aM))$ là FSF.

Mặt khác, xét dãy khớp

$$H_{\mathfrak{a}}^{t-1}(M) \xrightarrow{a} H_{\mathfrak{a}}^{t-1}(M) \xrightarrow{H_{\mathfrak{a}}^{t-1}(p)} H_{\mathfrak{a}}^{t-1}(M/aM) \longrightarrow H_{\mathfrak{a}}^t(M) \xrightarrow{a} H_{\mathfrak{a}}^t(M). \quad (*)$$

Đặt $N = \frac{H_{\mathfrak{a}}^{t-1}(M)}{aH_{\mathfrak{a}}^{t-1}(M)}$ và $N' = \text{coker}(H_{\mathfrak{a}}^{t-1}(p))$. Tách dãy khớp (*) thành hai dãy khớp ngắn sau

$$0 \rightarrow N \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^{t-1}(M/aM) \rightarrow N' \rightarrow 0, \quad (**)$$

$$0 \rightarrow N' \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^t(M) \xrightarrow{a} H_{\mathfrak{a}}^t(M). \quad (***)$$

Từ dãy khớp (**) ta có dãy khớp

$$\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{\mathfrak{a}}^{t-1}(M/aM)) \rightarrow \text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, N') \rightarrow \text{Ext}_R^1(R/\mathfrak{a}, N).$$

Theo trên môđun ngoài cùng bên trái là FSF, và môđun ngoài cùng bên phải là FSF do Bổ đề 4.1.5. Dẫn đến $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, N')$ là FSF. Hơn nữa, (***) cảm sinh dãy khớp

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, N') \rightarrow \text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{\mathfrak{a}}^t(M)) \xrightarrow{a} \text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{\mathfrak{a}}^t(M)).$$

Đồng cấu nhân

$$a : \text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{\mathfrak{a}}^t(M)) \rightarrow \text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{\mathfrak{a}}^t(M))$$

là đồng cấu không do $a \in \mathfrak{a}$. Nên ta có $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{\mathfrak{a}}^t(M)) \cong \text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, N')$ là một FSF môđun. $\square$

Chú ý 4.1.7. Hoàn toàn tương tự như trên ta có thể chứng minh rằng $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{\mathfrak{a}}^t(M))$ là hữu hạn sinh nếu $H_{\mathfrak{a}}^i(M)$ là hữu hạn sinh với mọi $i < t$.

Định lí dưới đây là hệ quả trực tiếp của Mệnh đề 4.1.6 và là một mở rộng của Định lí 4.1.1.

Định lí 4.1.8 (Xem [41], Theorem 3.2). *Cho $\mathfrak{a}$ là một idêan của R , và M là một R -môđun hữu hạn sinh. Xét t là một số nguyên không âm sao cho $H_{\mathfrak{a}}^i(M)$ là hữu hạn sinh hoặc $\text{supp}(H_{\mathfrak{a}}^i(M))$ là một tập hữu hạn với mọi $i < t$. Khi đó $\text{Ass}_R(H_{\mathfrak{a}}^t(M))$ là một tập hữu hạn.*

4.2 Chiều hữu hạn của môđun tương ứng với một idêan

Trong tiết này ta luôn xét $\mathfrak{a}$ là một idêan của R , và M là một R -môđun hữu hạn sinh. Chúng ta sẽ dùng Định lí 1.4.4 và Hệ quả 1.4.6 để nghiên cứu tính hữu hạn của tập các idêan nguyên tố liên kết liên quan với chiều hữu hạn của M tương ứng với $\mathfrak{a}$.

Định nghĩa 4.2.1. *Chiều hữu hạn của M tương ứng với $\mathfrak{a}$ được định nghĩa như sau*

$$f_{\mathfrak{a}}(M) = \inf\{i \in \mathbb{N}_0 \mid H_{\mathfrak{a}}^i(M) \text{ không là hữu hạn sinh}\},$$

ở đây ta quy ước giá trị nhỏ nhất của một tập rỗng là ∞ .

Dưới đây ta luôn xét môđun M không là $\mathfrak{a}$ -xoắn và $M \neq \mathfrak{a}M$, khi đó $f_{\mathfrak{a}}(M)$ là một số nguyên dương. Mệnh đề dưới đây cho ta khẳng định mạnh hơn Định lí 4.1.1 (i).

Mệnh đề 4.2.2. Cho t và n_0 là các số nguyên dương thỏa mãn $t \leq f_{\mathfrak{a}}(M)$ và $\mathfrak{a}^{n_0}H_{\mathfrak{a}}^i(M) = 0$ với mọi $i < t$. Với mọi dãy $\mathfrak{a}$ -lọc chính quy $x_1, \dots, x_t$ của M chứa trong $\mathfrak{a}^{2n_0}$ ta có

$$\text{Ass}(M/(x_1, \dots, x_t)M) \cap V(\mathfrak{a}) = \bigcup_{i=0}^t \text{Ass}H_{\mathfrak{a}}^i(M).$$

Nói riêng, $\text{Ass}H_{\mathfrak{a}}^t(M)$ là một tập hợp hữu hạn.

Chứng minh. Theo Hệ quả 1.4.6 ta có

$$\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, M/(x_1, \dots, x_t)M) \cong \bigoplus_{i=0}^t \text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{\mathfrak{a}}^i(M))^{(t)_i}.$$

Khẳng định được suy ra từ đẳng cấu trên và các điều sau

$$\text{Ass}(\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, M/(x_1, \dots, x_t)M)) = \text{Ass}(M/(x_1, \dots, x_t)M) \cap V(\mathfrak{a}),$$

và

$$\text{Ass}(\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{\mathfrak{a}}^i(M))) = \text{Ass}H_{\mathfrak{a}}^i(M).$$

□

Xét $t = f_{\mathfrak{a}}(M)$ và giả sử tồn tại các phần tử $a_1, \dots, a_t$ sao cho $\sqrt{(a_1, \dots, a_t)} = \sqrt{\mathfrak{a}}$. Khi đó theo Định lí 1.1.6 ta có

$$H_{\mathfrak{a}}^t(M) \cong \varinjlim_{n_1, \dots, n_t \in \mathbb{N}} M/(a_1^{n_1}, \dots, a_t^{n_t})M.$$

Không khó để chỉ ra rằng

$$\text{Ass}H_{\mathfrak{a}}^t(M) \subseteq \bigcup_{n_1, \dots, n_t \in \mathbb{N}} \text{Ass} M/(a_1^{n_1}, \dots, a_t^{n_t})M.$$

Bao hàm thức trên dẫn đến câu hỏi tự nhiên sau.

Câu hỏi 4.2.3. Với các điều kiện như trên phải chăng

$$\bigcup_{n_1, \dots, n_t \in \mathbb{N}} \text{Ass } M / (a_1^{n_1}, \dots, a_t^{n_t}) M$$

là một tập hợp hữu hạn?

Kết quả chính của tiết này là đưa ra câu trả lời khẳng định cho câu hỏi trên. Ta cần một số bổ đề chuẩn bị sau.

Bổ đề 4.2.4 (Xem [28], Theorem 124). Cho $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ là các ideal nguyên tố của vành R . Xét x là một phần tử và I là một ideal của R sao cho $(x) + I \not\subseteq \mathfrak{p}_i$ với mọi $1 \leq i \leq n$. Khi đó ta có thể chọn một phần tử $y \in I$ sao cho $x + y \notin \mathfrak{p}_i$ với mọi $1 \leq i \leq n$.

Bổ đề 4.2.5. Giả sử $a_1, \dots, a_t$ là một dãy các phần tử sao cho $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{(a_1, \dots, a_t)}$. Khi đó tồn tại một dãy $\mathfrak{a}$ -lọc chính quy $x_1, \dots, x_t$ của M sao cho $(a_1, \dots, a_t) = (x_1, \dots, x_t)$.

Chứng minh. Vì $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{(a_1, \dots, a_t)}$ nên $(a_1) + (a_2, \dots, a_t) \not\subseteq \mathfrak{p}$ với mọi $\mathfrak{p} \in \text{Ass} M \setminus V(\mathfrak{a})$. Theo Bổ đề 4.2.4 ta có thể chọn một phần tử $x_1 = a_1 + b_1$ với $b_1 \in (a_2, \dots, a_t)$ sao cho $x_1 \notin \mathfrak{p}$ với mọi $\mathfrak{p} \in \text{Ass} M \setminus V(\mathfrak{a})$. Tức là x_1 là một phần tử $\mathfrak{a}$ -lọc chính quy của M , và dễ thấy $(a_1, \dots, a_t) = (x_1, a_2, \dots, a_t)$. Tiếp tục quá trình trên ta được dãy $\mathfrak{a}$ -lọc chính quy $x_1, \dots, x_t$ của M cần tìm □

Hệ quả 4.2.6. Cho t và n_0 là các số nguyên dương thỏa mãn $t = f_{\mathfrak{a}}(M)$ và $\mathfrak{a}^{n_0} H_{\mathfrak{a}}^i(M) = 0$ với mọi $i < t$. Xét $a_1, \dots, a_t$ là một dãy phần tử chứa trong $\mathfrak{a}^{2n_0}$ sao cho $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{(a_1, \dots, a_t)}$ ta có

$$\text{Ass}(M / (a_1, \dots, a_t) M) = \bigcup_{i=0}^t \text{Ass} H_{\mathfrak{a}}^i(M).$$

Chứng minh. Dễ dàng suy ra từ Mệnh đề 4.2.2 và Bổ đề 4.2.5. □

Bổ đề 4.2.7. Cho t và n_0 là các số nguyên dương sao cho $t = f_{\mathfrak{a}}(M)$ và $\mathfrak{a}^{n_0} H_{\mathfrak{a}}^i(M) = 0$ với mọi $i < t$. Khi đó với mọi dãy $\mathfrak{a}$ -lọc chính quy $x_1, \dots, x_t$ của M , ta có $\mathfrak{a}^{2^j n_0} H_{\mathfrak{a}}^i(M/(x_1, \dots, x_j)M) = 0$ với mọi $0 \leq j \leq t-1$ và $i < t-j$.

Chứng minh. Trường hợp $j = 0$ là hiển nhiên, và do quy nạp ta chỉ cần chứng minh khẳng định trong trường hợp $j = 1 < t$. Dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow M/(0 :_M x_1) \xrightarrow{x_1} M \rightarrow M/x_1 M \rightarrow 0$$

cảm sinh dãy khớp sau

$$\cdots \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^i(M) \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^i(M/x_1 M) \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^{i+1}(M/(0 :_M x_1)) \rightarrow \cdots$$

Chú ý rằng $0 :_M x_1$ là $\mathfrak{a}$ -xoắn, nên $H_{\mathfrak{a}}^{i+1}(M/(0 :_M x_1)) \cong H_{\mathfrak{a}}^{i+1}(M)$ với mọi $i \geq 0$. Do vậy $\mathfrak{a}^{n_0} H_{\mathfrak{a}}^{i+1}(M/(0 :_M x_1)) = 0$ với mọi $i < t-1$. Nên $\mathfrak{a}^{2n_0} H_{\mathfrak{a}}^i(M) = 0$ với mọi $i < t-1$. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Mệnh đề 4.2.8. Cho t và n_0 là các số nguyên dương thỏa mãn $t = f_{\mathfrak{a}}(M)$ và $\mathfrak{a}^{n_0} H_{\mathfrak{a}}^i(M) = 0$ với mọi $i < t$. Cho $a_1, \dots, a_t$ là một dãy phân tử trong $\mathfrak{a}$ thỏa mãn $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{(a_1, \dots, a_t)}$. Xét $j < t$ là một số nguyên không âm. Khi đó với mọi $n_1, \dots, n_t \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $n_i \geq 2^t n_0$ với mọi $j+1 \leq i \leq t$, ta có

$$\text{Ass} M/(a_1^{n_1}, \dots, a_t^{n_t})M = \text{Ass} M/(a_1^{n_1}, \dots, a_j^{n_j}, a_{j+1}^{2^t n_0}, \dots, a_t^{2^t n_0})M.$$

Chứng minh. Vì $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{(a_1^{n_1}, \dots, a_t^{n_t})}$ nên $(a_1^{n_1}) + (a_2^{n_2}, \dots, a_t^{n_t}) \not\subseteq \mathfrak{p}$ với mọi $\mathfrak{p} \in \text{Ass} M \setminus V(\mathfrak{a})$. Từ Bổ đề 4.2.4 ta có thể chọn một phân tử $x_1 = a_1^{n_1} + b_1$ với $b_1 \in (a_2^{n_2}, \dots, a_t^{n_t})$ sao cho $x_1 \notin \mathfrak{p}$ với mọi $\mathfrak{p} \in \text{Ass} M \setminus V(\mathfrak{a})$. Tức là x_1 là một phân tử $\mathfrak{a}$ -lọc chính quy của M , và dễ thấy $(a_1^{n_1}, \dots, a_t^{n_t}) = (x_1, a_2^{n_2}, \dots, a_t^{n_t})$. Hơn nữa, vì $n_i \geq 2^t n_0$ với mọi $j+1 \leq i \leq t$, nên ta cũng có

$$(a_1^{n_1}, \dots, a_j^{n_j}, a_{j+1}^{2^t n_0}, \dots, a_t^{2^t n_0}) = (x_1, a_2^{n_2}, \dots, a_j^{n_j}, a_{j+1}^{2^t n_0}, \dots, a_t^{2^t n_0}).$$

Tiếp tục quá trình trên ta thu được một dãy $\mathfrak{a}$ -lọc chính quy $x_1, \dots, x_j$ của M thỏa mãn

$$(a_1^{n_1}, \dots, a_t^{n_t}) = (x_1, \dots, x_j, a_{j+1}^{n_{j+1}}, \dots, a_t^{n_t}),$$

và

$$(a_1^{n_1}, \dots, a_j^{n_j}, a_{j+1}^{2^t n_0}, \dots, a_t^{2^t n_0}) = (x_1, \dots, x_j, a_{j+1}^{2^t n_0}, \dots, a_t^{2^t n_0}).$$

Theo Bổ đề 4.2.7 ta có $\mathfrak{a}^{2^j n_0} H_{\mathfrak{a}}^i(M/(x_1, \dots, x_j)M) = 0$ với mọi $i < t - j$.

Bây giờ, áp dụng Hệ quả 4.2.6 ta có

$$\begin{aligned} \text{Ass} M / (a_1^{n_1}, \dots, a_t^{n_t}) M &= \text{Ass} M / (x_1, \dots, x_j, a_{j+1}^{n_{j+1}}, \dots, a_t^{n_t}) M \\ &= \bigcup_{i \leq t-j} \text{Ass} H_{\mathfrak{a}}^i(M/(x_1, \dots, x_j)M) \\ &= \text{Ass} M / (x_1, \dots, x_j, a_{j+1}^{2^t n_0}, \dots, a_t^{2^t n_0}) M \\ &= \text{Ass} M / (a_1^{n_1}, \dots, a_j^{n_j}, a_{j+1}^{2^t n_0}, \dots, a_t^{2^t n_0}) M. \end{aligned}$$

□

Ta chứng minh kết quả chính của tiết này.

Định lý 4.2.9. Cho $\mathfrak{a}$ là một ideal của R và M là một R -môđun hữu hạn sinh. Đặt $t = f_{\mathfrak{a}}(M)$. Xét $a_1, \dots, a_t$ là một dãy phân tử trong $\mathfrak{a}$ thỏa mãn $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{(a_1, \dots, a_t)}$. Khi đó

$$\bigcup_{n_1, \dots, n_t \in \mathbb{N}} \text{Ass} M / (a_1^{n_1}, \dots, a_t^{n_t}) M$$

là một tập hợp hữu hạn.

Chứng minh. Xét n_0 là một số nguyên dương thỏa mãn $\mathfrak{a}^{n_0} H_{\mathfrak{a}}^i(M) = 0$ với mọi $i < f_{\mathfrak{a}}(M)$. Với từng bộ $(n_1, \dots, n_t) \in \mathbb{N}^t$ ta xét một bộ gồm t số nguyên dương $(m_1, \dots, m_t) \in \mathbb{N}^t$ thỏa mãn $m_i = n_i$ nếu $n_i < 2^t n_0$, và $m_i = 2^t n_0$ nếu $n_i \geq 2^t n_0$. Thay đổi thứ tự của các phân tử x_i nếu cần thiết, ta có thể giả sử rằng có một số nguyên không âm $j \leq t$ sao cho $n_i < 2^t n_0$ với mọi $i \leq j$,

và $n_i \geq 2^t n_0$ với mọi $j + 1 \leq i \leq t$. Do đó Mệnh đề 4.2.8 suy ra rằng

$$\text{Ass } M/(x_1^{n_1}, \dots, x_t^{n_t})M = \text{Ass } M/(x_1^{m_1}, \dots, x_t^{m_t})M.$$

Vậy

$$\bigcup_{n_1, \dots, n_t \in \mathbb{N}} \text{Ass } M/(x_1^{n_1}, \dots, x_t^{n_t})M = \bigcup_{1 \leq m_1, \dots, m_t \leq 2^t n_0} \text{Ass } M/(x_1^{m_1}, \dots, x_t^{m_t})M$$

là một tập hợp hữu hạn. $\square$

Hệ quả dưới đây là kết quả chính của [43].

Hệ quả 4.2.10. *Cho $\mathfrak{a}$ là một ideal của R và M là một R -môđun hữu hạn sinh. Xét $s \leq f_{\mathfrak{a}}(M)$ là một số nguyên dương, và $x_1, \dots, x_s$ là một dãy $\mathfrak{a}$ -lọc chính quy của M . Khi đó*

$$\bigcup_{n_1, \dots, n_s \in \mathbb{N}} \text{Ass } M/(x_1^{n_1}, \dots, x_s^{n_s})M$$

là một tập hợp hữu hạn.

Chứng minh. Đặt $I = (x_1, \dots, x_s)$, áp dụng Bổ đề 3.1.12 ta có $H_I^i(M) \cong H_{\mathfrak{a}}^i(M)$ và là hữu hạn sinh với mọi $i < s$. Khi đó, khẳng định là hệ quả trực tiếp của Định lý 4.2.9. $\square$

Chú ý rằng L.T. Nhân trong [40, Theorem 3.1] đã chứng minh một kết quả tương tự Hệ quả 4.2.10 trong trường hợp $x_1, \dots, x_s$ là một dãy chính quy suy rộng của M . Nhắc lại rằng trong vành địa phương $(R, \mathfrak{m})$ một dãy phần tử $x_1, \dots, x_s$ được gọi là *một dãy chính quy suy rộng của M* nếu $x_i \notin \mathfrak{p}$ với mọi $\mathfrak{p} \in \text{Ass } M/(x_1, \dots, x_{i-1})M$ thỏa mãn $\dim R/\mathfrak{p} > 1$, với mọi $i = 1, \dots, s$. Theo Định lý 1.1.5 ta có $H_{\mathfrak{a}}^i(M) \cong \lim_{\rightarrow} \text{Ext}_R^i(R/\mathfrak{a}^n, M)$. Tương tự như Câu hỏi 4.2.3 ta đặt ra câu hỏi tự nhiên sau.

Câu hỏi 4.2.11. Phải chăng $\bigcup_n \text{Ass } \text{Ext}_R^i(R/\mathfrak{a}^n, M)$ là một tập hợp hữu hạn với mọi $i \leq f_{\mathfrak{a}}(M)$?

Nếu M là một môđun $\mathfrak{a}$ -xoắn, thì $f_{\mathfrak{a}}(M) = \infty$. Câu hỏi dưới đây là một trường hợp đặc biệt của Câu hỏi 4.2.11.

Câu hỏi 4.2.12. Cho M là một môđun $\mathfrak{a}$ -xoắn hữu hạn sinh. Phải chăng $\cup_n \text{Ass Ext}_R^i(R/\mathfrak{a}^n, M)$ luôn là một tập hợp hữu hạn với mọi $i \geq 0$?

Trong [36], L. Melkersson và Schenzel đã hỏi rằng với mỗi $i \geq 0$ có phải các tập hợp $\text{Ass Ext}_R^i(R/\mathfrak{a}^n, M)$ là ổn định với n đủ lớn? Trong trường hợp tổng quát câu hỏi này là không đúng vì $\cup_n \text{Ass Ext}_R^i(R/\mathfrak{a}^n, M)$ có thể có vô hạn phần tử. Tuy nhiên, Khashyarmansh và Salarian đã chứng minh rằng $\text{Ass Ext}_R^1(R/\mathfrak{a}^n, M)$ là ổn định với n đủ lớn (xem [31, Corollary 2.3]). Như vậy, Câu hỏi 4.2.11 là đúng nếu $f_{\mathfrak{a}}(M) \leq 1$. Ta có thể thay đổi câu hỏi của Melkersson và Schenzel để được dạng mạnh hơn của Câu hỏi 4.2.11 như sau.

Câu hỏi 4.2.13. Với mọi $i \leq f_{\mathfrak{a}}(M)$ phải chăng các tập hợp $\text{Ass Ext}_R^i(R/\mathfrak{a}^n, M)$ là ổn định với n đủ lớn?

Kết luận Chương 4. Trong chương này chúng tôi đã thực hiện được một số công việc như sau:

1. Giới thiệu lớp môđun FSF và áp dụng lớp môđun này để chứng minh rằng môđun đối đồng điều địa phương đầu tiên không hữu hạn sinh, và có tập giá là không hữu hạn, có một số hữu hạn idêan nguyên tố liên kết (Định lí 4.1.8).
2. Nghiên cứu tính hữu hạn của tập idêan nguyên tố liên kết liên quan với chiều hữu hạn của môđun M tương ứng với $\mathfrak{a}$. (xem Định lí 4.2.9 và Hệ quả 4.2.10).

Kết luận của luận án

Trong luận án này chúng tôi đã thu được những kết quả chính sau.

1. Xây dựng phương pháp chứng minh một dãy khớp ngắn của các môđun đối đồng điều địa phương là chẻ (Tiết 1.3).
2. Đưa ra Định lí chẻ ra của đối đồng điều địa phương 1.4.4 với điều kiện $H_{\mathfrak{a}}^i(M)$ là R -môđun hữu hạn sinh với mọi i nhỏ hơn một số nguyên dương t nào đó. Đồng thời áp dụng Định lí 1.4.4 để chứng minh tính ổn định tiệm cận của chỉ số khả quy của idêan tham số của môđun Cohen-Macaulay suy rộng (xem Hệ quả 1.4.7).
3. Dùng tính chẻ ra của đối đồng điều địa phương chứng minh một số tính chất về tính ổn định của hệ tham số tốt của các môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy (xem các Định lí 2.2.5 và 2.2.8).
4. Xây dựng Định lí chẻ ra của đối đồng điều địa phương trong vành địa phương (xem Định lí 3.2.4). Áp dụng Định lí 3.2.4 để chứng minh một số bất biến của môđun (xem các Định lí 3.2.7 và 3.2.9).
5. Xây dựng khái niệm bậc không trộn lẫn của môđun. Đồng thời chứng minh bậc không trộn lẫn là một bậc mở rộng (xem Định lí 3.3.8, Mệnh đề 3.3.9 và Định lí 3.3.17).
6. Chứng minh rằng môđun đối đồng điều địa phương đầu tiên không hữu hạn sinh, và có tập giá là không hữu hạn, có một số hữu hạn idêan nguyên tố liên kết (Định lí 4.1.8).
7. Nghiên cứu tính hữu hạn của tập idêan nguyên tố liên kết liên quan với chiều hữu hạn của môđun M tương ứng với $\mathfrak{a}$. (xem Định lí 4.2.9 và Hệ quả 4.2.10).

Một số hướng phát triển của luận án

1. Xây dựng và tìm các áp dụng của các Định lí chỉ ra cho các hàm tử khác như Ext , Tor ,
2. Tìm hiểu sâu hơn về bậc không trộn lẫn của môđun cũng như mối liên hệ của nó với bậc đồng điều của môđun.
3. Nghiên cứu môđun đối đồng điều địa phương $H_a^t(M)$, $t = f_a(M)$, cũng như Câu hỏi 4.2.11.

Các công trình liên quan đến luận án

1. P.H. Quy, On the finiteness of associated primes of local cohomology modules, *Proc. Amer. Math. Soc.* 138 (2010), 1965–1968.
2. N.T. Cuong, P.H. Quy, A splitting theorem for local cohomology and its applications, *J. Algebra* 331 (2011), 512–522.
3. P.H. Quy, Asymptotic behaviour of good systems of parameters of sequentially generalized Cohen-Macaulay modules, *Kodai Math. J.* 35 (2012), 576–588.
4. P.H. Quy, A remark on the finiteness dimension, accepted for publication in *Comm. Algebra*.

Các kết quả trong luận án đã được báo cáo và thảo luận tại

- Xemina Đại số và Lý thuyết số - Viện Toán học.
- Hội nghị nghiên cứu sinh của Viện Toán học, 10/2010, 10/2011.
- Hội nghị Đại số - Hình học - Tô pô, Huế, 09/2009.
- Hội thảo liên kết Nhật Bản - Việt Nam lần thứ 5 về Đại số giao hoán, Hà Nội, 01/2010.
- Hội nghị về Đại số giao hoán lần thứ 33, Nhật Bản, 11/2011.

Tài liệu tham khảo

Tiếng Anh

- [1] J. Asadollahi, K. Khashyarmanesh, Sh. Salarian, On the finiteness properties of generalized local cohomology modules, *Comm. Algebra* 30 (2002), 859–867.
- [2] M. Auslander, D.A. Buchsbaum, Codimension and multiplicity, *Ann. Math.* 68 (1958), 625–657.
- [3] K. Bahmanpour, A. Khojali, On the equivalence of FSF and weakly Laskerian classes, *preprint*. arXiv:1108.4564v1 [math.AC].
- [4] M. Brodmann, R. Y. Sharp, *Local cohomology: An algebraic introduction with geometric applications*, Cambridge University Press, 1998.
- [5] M. Brodmann, A.L. Faghani, A finiteness result for associated primes of local cohomology modules, *Proc. Amer. Math. Soc.* 128 (2000), 2851–2853.
- [6] W. Bruns, J. Herzog, *Cohen-Macaulay rings*, Cambridge University Press (Revised edition), 1998.
- [7] N.T. Cuong, On the length of the powers of systems of parameters in local ring, *Nagoya Math. J.* 120 (1990), 77–88.
- [8] N.T. Cuong, On the dimension of the non-Cohen-Macaulay locus of local rings admitting dualizing complexes, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 109 (1991), 479–488.
- [9] N.T. Cuong, On the least degree of polynomials bounding above the differences between lengths and multiplicities of certain systems of parameters in local ring, *Nagoya Math. J.* 125 (1992), 105–114.
- [10] N.T. Cuong, p -standard systems of parameters and p -standard ideals in local rings, *Acta Math. Vietnam.* 20 (1995), 145–161.

- [11] N.T. Cuong, D.T. Cuong, dd -Sequences and Partial Euler-Poincare Characteristics of Koszul Complex, *J. Algebra Appl.* 6 (2007), 207–231.
- [12] N.T. Cuong, D.T. Cuong, On sequentially Cohen-Macaulay modules, *Kodai Math. J.* 30 (2007), 409–428.
- [13] N.T. Cuong, D.T. Cuong, On the structure of sequentially generalized Cohen-Macaulay modules. *J. Algebra* 317 (2007), 714–742.
- [14] N.T. Cuong, D.T. Cuong, Annihilator ideals of local cohomology modules and Macaulayfication, *preprint*.
- [15] N.T. Cuong, L.T. Nhan, Pseudo Cohen-Macaulay and pseudo generalized Cohen-Macaulay modules, *J. Algebra* 267 (2003), 156–177.
- [16] N.T. Cuong, P.H. Quy, A splitting theorem for local cohomology and its applications, *J. Algebra* 331 (2011), 512–522.
- [17] N.T. Cuong, H.L. Truong, Asymptotic behavior of parameter ideals in generalized Cohen-Macaulay module, *J. Algebra* 320 (2008), 158–168.
- [18] K. Divaani-Aazar, A. Mafi, Associated primes of local cohomology modules, *Proc. Amer. Math. Soc.* 133 (2005), 655–660.
- [19] L.R. Doering, T. Gunston, W.V. Vasconcelos, Cohomological degrees and Hilbert functions of graded modules, *Amer. J. Math.* 120 (1998), 493–504.
- [20] E. Enochs, Flat covers and flat cotorsion modules, *Proc. Amer. Math. Soc.* 92 (1984) 179–184.
- [21] S. Goto, Y. Nakamura, Multiplicity and Tight Closures of Parameters, *J. Algebra* 244 (2001), 302–311.
- [22] S. Goto, H. Sakurai, The equality $I^2 = QI$ in Buchsbaum rings, *Rend. Sem. Univ. Padova.* 110 (2003), 25–56.
- [23] S. Goto, K. Yamagishi, The theory of unconditioned strong d -sequences and modules of finite local cohomology, *preprint* (unpublished).
- [24] A. Grothendieck, *Local homology*, Lect. Notes in Math., Springer-Verlag Berlin - Heidelberg - New York, 1967.

- [25] C. Huneke, Theory of d -sequences and powers of ideals, *Adv. Math.* 46 (1982), 249–279.
- [26] C. Huneke, Problems on local cohomology, in: *Free resolutions in commutative algebra and algebraic geometry* (Sundance, Utah, 1990), pp. 93–108, Res. Notes Math. 2, Jones and Bartlett, Boston, MA, 1992.
- [27] C. Huneke, R.Y. Sharp, Bass numbers of local cohomology modules, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 339 (1993), 765–779.
- [28] I. Kaplansky, *Commutative rings*, revised edition, Chicago University Press, 1974.
- [29] M. Katzman, An example of an infinite set of associated primes of a local cohomology module, *J. Algebra* 252 (2002), 161–166.
- [30] K. Khashyarmanesh, Sh. Salarian, On the associated primes of local cohomology modules, *Comm. Algebra* 27 (1999), 6191–6198.
- [31] K. Khashyarmanesh, Sh. Salarian, Asymptotic stability of $\text{Att}_R \text{Tor}_R^1((R/\mathfrak{a}^n), A)$, *Proc. Edinb. Math. Soc.* 44 (2001), 479–483.
- [32] T. Kawasaki, On Macaulayfication of Noetherian schemes, *Trans. Amer. Math. Soc.* 352 (2000), 2517–2552.
- [33] C. H. Linh, Upper bound for Castelnuovo-Mumford regularity of associated graded modules, *Comm. Algebra* 33 (2005), 1817–1831.
- [34] G. Lyubeznik, Finiteness properties of local cohomology modules (an application of D -modules to commutative algebra), *Invent. Math.* 113 (1993), 41–55.
- [35] S. MacLane, *Homology*, Springer-Verlag, third edition, 1975.
- [36] L. Melkersson, P. Schenzel, Asymptotic prime ideals related to derived functors, *Proc. Amer. Math. Soc.* 117 (1993), 935–938.
- [37] M. Nagata, *Local rings*, Interscience, New York, 1962.
- [38] U. Nagel, T. Römer, Extended degree functions and monomial modules, *Trans. Amer. Math. Soc.* 358 (2006), 3571–3589.

- [39] U. Nagel, P. Schenzel, Cohomological annihilators and Castelnuovo-Mumford regularity, in *Commutative algebra: Syzygies, multiplicities, and birational algebra*, Contemp. Math. 159 (1994), Amer. Math. Soc. Providence, R.I., 307–328.
- [40] L.T. Nhan, On generalized regular sequences and the finiteness for associated primes of local cohomology modules, *Comm. Algebra* 33 (2005), 793–806.
- [41] P.H. Quy, On the finiteness of associated primes of local cohomology modules, *Proc. Amer. Math. Soc.* 138 (2010), 1965–1968.
- [42] P.H. Quy, Asymptotic behaviour of good systems of parameters of sequentially generalized Cohen-Macaulay modules, *Kodai Math. J.* 35 (2012), 576–588.
- [43] P.H. Quy, A remark on the finiteness dimension, accepted for publication in *Comm. Algebra*.
- [44] P. Roberts, Two applications of dualizing complexes over local rings, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.* 9 (1976), 103–106.
- [45] M.E. Rossi, N.V. Trung, G. Valla, Castelnuovo-Mumford regularity and extended degree, *Trans. Amer. Math. Soc.* 355 (2003), 1773–1786.
- [46] P. Schenzel, On the dimension filtration and Cohen-Macaulay filtered modules, in: *Proc. of the Ferrara Meeting in Honor of Mario Fiorentini*, University of Antwerp, Wilrijk, Belgium, 1998, 245–264.
- [47] P. Schenzel, On the use of local cohomology in algebra and geometry. In: Elias, J. (ed.) et al., *Six lectures on commutative algebra*, Basel (1998), 241–292.
- [48] A.K. Singh, p -torsion elements in local cohomology modules, *Math. Res. Lett.* 7 (2000), 165–176.
- [49] A.K. Singh, U. Walther, Bockstein homomorphisms in local cohomology, *J. Reine Angew. Math.* 655 (2011), 147–164.
- [50] R.P. Stanley, *Combinatorics and Commutative Algebra*, second ed., Birkhäuser, Boston, 1996.

- [51] J. Stuckrad, W. Vogel, *Buchsbaum rings and applications*, Springer-Verlag, 1986.
- [52] N.V. Trung, Absolutely superficial sequence, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc* 93 (1983), 35–47.
- [53] N.V. Trung, Toward a theory of generalized Cohen-Macaulay modules, *Nagoya Math. J.* 102 (1986), 1–49.
- [54] H.L. Truong, Index of reducibility of distinguished parameter ideals and sequentially Cohen-Macaulay modules, *Proc. Amer. Math. Soc.* 141 (2013), 1971–1978.
- [55] W.V. Vasconcelos, The homology degree of a module, *Trans. Amer. Math. Soc.* 350 (1998), 1167–1179.
- [56] W.V. Vasconcelos, Cohomological degrees of graded modules, In: Elias, J. (ed.) et al., *Six lectures on commutative algebra*. Basel (1998), 345–392.

Tiếng Đức

- [57] N.T. Cuong, P. Schenzel, N.V. Trung, Verallgemeinerte Cohen-Macaulay moduln, *Math-Nachr.* 85 (1978), 156–177.
- [58] G. Faltings, Über die Annulatoren lokaler Kohomologiegruppen, *Arch. Math.* 30 (1978), 473–476.
- [59] P. Schenzel, *Dualisierende komplexe in der lokalen algebra und Buchsbaum - ringe*, Lect. Notes in Math., Springer-Verlag Berlin - Heidelberg - New York, 1982.
- [60] H. Zöschinger, Minimax-moduln, *J. Algebra* 102 (1986), 1–32.

Tiếng Việt

- [61] D.T. Cuong, *dd-dãy, đặc trưng Euler-Poincaré và ứng dụng vào nghiên cứu cấu trúc một số lớp mở rộng của môđun Cohen-Macaulay*, Luận án Tiến sĩ, Đại học Quốc gia Hà nội, 2007.