Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi dưới sự hướng dẫn của PGS. TSKH. Phùng Hồ Hải, PGS.TS. Nguyễn Quốc Thắng. Các kết quả viết chung với tác giả khác đã được sự nhất trí của đồng tác giả khi đưa vào luận án. Các kết quả của luận án là mới và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Tác giả

Nguyễn Thị Phương Dung

Lời cảm ơn

Tôi xin bày tỏ sự kính trọng và lòng biết ơn sâu sắc tới thầy tôi, PGS.TSKH. Phùng Hồ Hải. Thầy đã kiên trì và tận tình truyền đạt, giảng giải kiến thức chuyên môn, giúp tôi vượt qua những lúc khó khăn, có thể chủ động và tự tin hơn trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu tại Viện Toán học.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn trân trọng tới thầy Nguyễn Quốc Thắng. Thầy đã chỉ bảo tận tình, quan tâm ưu ái đến tôi rất nhiều trong suốt những năm qua.

Tôi xin được gửi lời cảm ơn đến các thầy trong phòng Đại số và phòng Lý thuyết số, thầy Nguyễn Tự Cường, thầy Lê Tuấn Hoa và thầy Ngô Việt Trung, đã tạo điều kiện tốt nhất cho tôi hoàn thành việc học tập.

Tôi xin trân trọng cảm ơn Viện Toán học, các phòng chức năng, Trung tâm Đào tạo sau đại học của Viện Toán học đã tạo điều kiện giúp tôi học tập và nghiên cứu, để tôi có thể hoàn thành luận án này.

Tôi xin cảm ơn các anh chị em và các bạn đã và đang học tập và nghiên cứu tại phòng Đại số và phòng Lý thuyết số, Viện Toán học về những giúp đỡ, chia sẻ trong khoa học và trong cuộc sống.

Tôi xin được bày tỏ sự biết ơn đến Ban giám đốc Học viện Biên Phòng, Lãnh đạo khoa Khoa học cơ bản cùng toàn thể giáo viên trong khoa đã tạo điều kiện thuận lợi để tôi hoàn thành tốt nhiệm vụ học tập và giảng dạy trong nhà trường.

Một lời cảm ơn đặc biệt xin được dành cho gia đình thân yêu đã động viên, tạo điều kiện tốt nhất cho tôi trong suốt thời gian học tập, nghiên cứu vừa qua.

Mục lục

Mở đầu

Mục đích của luận án là nghiên cứu biểu diễn của một số nhóm lượng tử loại A. Nhóm lượng tử loại A được hiểu là một đại số Hopf, được xây dựng từ một nghiệm của phương trình Yang-Baxter, thỏa mãn hệ thức Hecke và điều kiện đóng. Cụ thể là phân loại các biểu diễn bất khả quy trong trường hợp số chiều thấp ($(2|1)$ và $(3|1)$).

Cố định một không gian véc tơ V với chiều d, trên trường đóng đại số k đặc số 0. Một toán tử khả nghịch $R : V \otimes V \longrightarrow V \otimes V$ được gọi là một đối xứng Hecke nếu nó thỏa mãn phương trình Yang - Baxter, hệ thức Hecke và tính chất đóng.

Từ một đối xứng Hecke R như trên, xây dựng đại số Hopf H_R như sau. Cố định một cơ sở $x_1, x_2, \ldots, x_d$ của V. Theo cơ sở này R biểu diễn bởi ma trận, ký hiệu là (R_{ij}^{kl}). Để cho thuận tiện, ta qui ước: nếu chỉ số ở một biểu thức xuất hiện cả ở trên và dưới thì hiểu biểu thức được lấy tổng theo các chỉ số đó. Đại số H_R là thương của đại số tự do không giao hoán trên các phần tử sinh $(z_j^i, t_j^i)_{1 \le i,j \le d}$, theo các hệ thức sau:

$$z_m^i z_n^j R_{kl}^{mn} = R_{pq}^{ij} z_k^p z_l^q$$
$$z_k^i t_j^k = t_k^i z_j^k = \delta_j^i$$

H_R là một đại số Hopf, với các ánh xạ cấu trúc [12]:

$$\Delta(z_j^i) = z_k^i \otimes z_j^k, \Delta(t_i^j) = t_i^k \otimes t_k^j, \varepsilon(z_j^i) = \varepsilon(t_j^i) = \delta_j^i \text{ và } S(z_j^i) = t_j^i.$$

Phép đối xứng thông thường $R(x \otimes y) = y \otimes x$ là một đối xứng Hecke (với $q = 1$). Đại số H_R tương ứng chính là vành các hàm chính quy trên nhóm $GL(V)$:

$$k[z_j^i][\det(z_j^i)^{-1}].$$

Tương tự, nếu V là một siêu không gian véc tơ và R là phép siêu đối xứng, thì H_R chính là siêu đại số các hàm chính quy trên siêu nhóm ma trận toàn phần. Vì vậy biểu diễn của nhóm lượng tử là đối mô đun trên đại số Hopf H_R.

Ví dụ quan trọng nhất của một đối xứng Hecke là các nghiệm chuẩn loại A của phương trình Yang-Baxter tìm ra bởi Drinfeld và Jimbo. Trong trường hợp V có chiều 2, nghiệm này được cho bởi ma trận sau:

$$\begin{pmatrix} q^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & q & q^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^2 \end{pmatrix}$$

Khi $q = 1$, toán tử này là phép đối xứng thông thường trên $V \otimes V$ đã nhắc tới ở trên. Các nghiệm chuẩn ứng với siêu đối xứng được đưa ra bởi Manin.

Trên cơ sở của các ví dụ ở trên, người ta nói H_R xác định một nhóm ma trận lượng tử loại A.

Với mỗi đối xứng Hecke R, xét các đại số S_R, Λ_R sau:

$$\begin{aligned}S_R &:= k\langle x_1, x_2, \ldots, x_d\rangle/(x_k x_l R^{kl}_{ij} = q x_i x_j),\\ \Lambda_R &:= k\langle x_1, x_2, \ldots, x_d\rangle/(x_k x_l R^{kl}_{ij} = -x_i x_j),\end{aligned}$$

Các đại số S_R và Λ_R được coi là xác định một không gian tuyến tính lượng tử. S_R được gọi là đại số đối xứng lượng tử, Λ_R được gọi là đại số phản đối xứng lượng tử.

Λ_R, S_R là các đại số toàn phương, tức là sinh bởi các phần tử bậc nhất với các hệ thức bậc hai, và do đó là các đại số phân bậc. Chuỗi Poincaré tương ứng của chúng là

$$P_\Lambda(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \dim_k(\Lambda_n) t^n, P_S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \dim_k(S_n) t^n,$$

với Λ_n và S_n là các thành phần thuần nhất bậc n tương ứng của Λ_R và S_R.

Khi R là phép đối xứng thông thường, ta có

$$P_\Lambda(t) = (1+t)^d, \quad P_S(t) = \frac{1}{(1-t)^d}.$$

Khi R là phép siêu đối xứng của siêu không gian véc tơ V, với siêu chiều $(m|n)$, ta có

$$P_\Lambda(t) = \frac{(1+t)^m}{(1-t)^n}, \quad P_S(t) = \frac{(1+t)^n}{(1-t)^m}.$$

Các đại số Λ_R, S_R đóng vai trò quan trọng trong việc nghiên cứu phạm trù biểu diễn của nhóm ma trận lượng tử liên kết với R.

Lyubashenko [23] đã chứng minh rằng: nếu $q = 1$ và chuỗi Poincaré của Λ_R là đa thức, thì nó có tính chất thuận nghịch. Gurevich [9] mở rộng kết quả này với q bất kỳ, không là căn của đơn vị.

Trong [11], P.H.Hai đã chứng minh rằng chuỗi Poincaré của đại số toàn phương Λ_R là một phân thức hữu tỷ, với tử thức là một đa thức bậc m, chỉ có m nghiệm âm, mẫu thức là một đa thức bậc n, chỉ có n nghiệm dương.

Một câu hỏi đặt ra là với m, n không đồng thời bằng 0, thì chuỗi Poincaré của các đại số Λ_R và S_R có còn có tính chất thuận nghịch hay không?

Nội dung chính của Chương I là đưa ra câu trả lời khẳng định cho câu hỏi về tính thuận nghịch của chuỗi Poincaré nhắc tới ở trên. Cụ thể: tử thức và mẫu thức của chuỗi Poincaré luôn là đa thức có tính chất thuận nghịch và đối thuận nghịch, ngoài ra các đa thức này có hệ số nguyên. Các công cụ được sử dụng ở đây là công thức Littlewood-Richardson, tiêu chuẩn để đối mô đun đơn là nội xạ và xạ ảnh. Các kiến thức sử dụng được tham khảo trong [4], [5], [10], [11], [13], [21], [24]. Các kết quả chính trong chương này được công bố trong [6].

Cặp bậc (m, n) của tử thức và mẫu thức của chuỗi Poincaré của Λ_R, được gọi là *song hạng* của đối xứng Hecke R. Kết quả trong [15] đã chỉ ra song hạng của đối xứng Hecke xác định phạm trù biểu diễn của nhóm lượng tử tương ứng. Vì thế chúng tôi chỉ cần xét các nghiệm chuẩn loại A của phương trình Yang-Baxter, và ký hiệu nhóm lượng tử liên kết là $GL_q(m|n)$.

Với $m = 0$ hoặc $n = 0$ phạm trù biểu diễn của nhóm lượng tử là nửa đơn. Khi đó bài toán phân loại biểu diễn của nhóm lượng tử được giải quyết bởi P.H.Hai [13]. Khi m và n đều khác 0 bài toán phân loại các biểu diễn bất khả qui của nhóm lượng tử nói chung chưa được giải quyết. Một trong những khó khăn chính ở đây là phạm trù biểu diễn của nhóm lượng tử không còn là nửa đơn nữa. Năm 1986, Palev [27] đã chứng minh được một lớp các biểu diễn của $GL_q(n|1)$ là bất khả qui, tuy nhiên đây chưa phải là tất cả các biểu diễn bất khả qui của nó. Năm 2000, P.H.Hai [13] đã giải quyết bài toán phân loại các biểu diễn bất khả qui của nhóm lượng tử liên kết với đối xứng Hecke có song hạng $(1,1)$.

Trong Chương 2, chúng tôi giải quyết bài toán phân loại các biểu diễn bất khả qui của nhóm lượng tử liên kết với đối xứng Hecke có song hạng $(2,1)$. Công cụ chính ở đây là các phức Koszul $K_\bullet$. Nhờ tính chất thuận nghịch của chuỗi Poincaré đã được chứng minh trong Chương 1, chúng tôi chứng tỏ được phức K_1 có đồng điều với chiều 1, từ đó tìm được dãy hợp thành của tất cả các thành phần của các phức Koszul K_i. Tập các đối mô đun trong các dãy hợp thành của các phức Koszul K_i là tất cả các đối mô đun đơn của H_R, và chúng có thể được đánh số bởi tập các bộ số nguyên (m,n,p) thỏa mãn $m \geq n$. Để chứng minh tính đơn của các đối mô đun xây dựng được, kỹ thuật chính là dựa trên tính chất của đại số Hopf có tích phân. Trên đại số Hopf có tích phân tồn tại một lớp đối mô đun đặc biệt mà người ta gọi là đối mô đun "chẻ", trong trường hợp các siêu đại số Lie nửa đơn, lớp này được Kac gọi là biểu diễn *điển hình*. Một đối mô đun đơn được gọi là đối mô đun chẻ nếu nó là nội xạ và xạ ảnh. Chúng tôi đã đưa ra được điều kiện để một đối mô đun đã xây dựng là đối mô đun chẻ và công thức tính chiều cho các đối mô đun đơn trên H_R. Các kết quả trình bày trong chương này đã được công bố trong [7].

Một biểu diễn của $GL(m|n)$ là bất khả qui nếu nó là bất khả qui như là biểu diễn của $\mathfrak{gl}(m|n)$, với trọng cao nhất là một bộ của các số nguyên [30]. Chương 3 đưa ra một phương pháp xây dựng tường minh các biểu diễn bất khả qui của siêu nhóm $GL(3|1)$. Chương này phục vụ cho việc xây dựng các biểu diễn bất khả quy của của nhóm lượng tử trong trường hợp song hạng là $(3, 1)$ ở Chương 4.

Trong [17], Kac phân loại các biểu diễn bất khả qui của siêu đại số Lie $\mathfrak{gl}(m|n)$. Các biểu diễn bất khả qui của $\mathfrak{gl}(m|n)$ được chia thành hai loại: điển hình và không điển hình. Trong [19], Kac đã đưa ra một công thức tính đặc trưng cho tất cả các biểu diễn điển hình. Nhờ sử dụng mô đun Verma, Kac đưa ra cách xây dựng chi tiết cho tất cả các biểu diễn điển hình.

Năm 2007, trong [35] Su và Zhang đã đưa ra được một công thức tính đặc trưng cho tất cả các biểu diễn. Nhưng việc xây dựng cụ thể cho tất cả các biểu diễn không điển hình vẫn là một bài toán chưa được giải quyết.

Bằng cách kết hợp các phức Koszul K và L để thu được một phức Koszul kép, và dựa vào kết quả của Su-Zhang, chúng tôi đã đưa ra được một cách xây dựng tường minh các biểu diễn bất khả qui của $GL(3|1)$. Các kết quả trong chương này đã được trình bày trong [8].

Mục đích của Chương 4 là phân loại các biểu diễn bất khả qui của $GL_q(3|1)$. Với phương pháp đã dùng trong Chương 3, chúng tôi xây dựng một lớp các biểu diễn của $GL_q(3|1)$. Chúng tôi dự đoán rằng tập các biểu diễn xây dựng được là tập tất cả các biểu diễn bất khả qui của $GL_q(3|1)$ và đã thu được một số kết quả ban đầu. Chúng tôi sẽ hoàn thiện các chứng minh trong thời gian tới.

Các kết quả trong luận án đã được công bố trong các công trình [6], [7], [8] và đã được trình bày tại seminar của phòng Đại số, Hội nghị toán học Toàn quốc lần thứ VII- Quy Nhơn - 2008 và Hội nghị Đa-Hi-To Huế - 2009.

Chương 0

Kiến thức chuẩn bị

Mục đích của chương này là giới thiệu một số kiến thức sẽ sử dụng trong luận án, như đại số Hopf, đại số Hecke, phức Koszul, hàm Schur, ...

Trong toàn bộ luận án, k ký hiệu là trường đóng đại số, đặc số 0. Các không gian véc tơ được hiểu là các không gian véc tơ trên k.

0.1 Đại số Hopf

Một k-đại số A được định nghĩa là một không gian véc tơ A, cùng với hai ánh xạ tuyến tính $m : A \otimes A \longrightarrow A, u : k \longrightarrow A$ thỏa mãn hai sơ đồ giao hoán sau:

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "m\otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes m"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\ \mathrm{A} \otimes \mathrm{A} \arrow[r, "m"'] & \mathrm{A} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & A \otimes A \arrow[d, "m"] & \\ k \otimes A \arrow[ur, "u\otimes \mathrm{id}"] \arrow[r, "\cong"] & A & A \otimes k. \arrow[ul, "\mathrm{id}\otimes u"'] \arrow[l, "\cong"'] \end{tikzcd}$$

Khi cho một đại số tức là cho bộ (A, m, u), ta viết ngắn gọn là đại số A, với m là tích, u là đơn vị.

Định nghĩa 0.1.1 *Một $k-$đối đại số C là một không gian véc tơ C, cùng* *với hai ánh xạ tuyến tính $\Delta : C \longrightarrow C \otimes C; \varepsilon : C \longrightarrow k$ thỏa mãn hai sơ đồ giao hoán sau:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\Delta"] \\ C \otimes C \arrow[r, "\Delta\otimes\mathrm{id}"'] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & C \otimes C \arrow[dl, "\mathrm{id}\otimes\varepsilon"'] \arrow[dr, "\varepsilon\otimes\mathrm{id}"] & \\ C \otimes k & C \arrow[l, "\cong"] \arrow[u, "\Delta"] \arrow[r, "\cong"'] & k \otimes C. \end{tikzcd}$$

Khi cho một đối đại số, viết ngắn gọn là (C, Δ, ε), Δ được gọi là đối tích, ε là đối đơn vị.

Ta dùng kí hiệu của Sweedler [31] để biểu diễn đối tích trên C như sau:

$$\Delta(c) = \sum_{(c)} c_{(1)} \otimes c_{(2)}.$$

Cho C, D là các đối đại số với các đối tích và các đối đơn vị tương ứng là $\Delta_C, \Delta_D, \varepsilon_C, \varepsilon_D$. Ánh xạ $f : C \longrightarrow D$ được gọi là đồng cấu đối đại số nếu $\Delta_D f = (f \otimes f)\Delta_C$ và $\varepsilon_C = \varepsilon_D f$.

Cho C là một đối đại số. Một $C-$đối mô đun phải là một không gian véc tơ M cùng với một ánh xạ tuyến tính $\rho_M : M \longrightarrow M \otimes C$, sao cho hai sơ đồ sau giao hoán

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho_M"] \arrow[d, "\rho_M"'] & M \otimes C \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\Delta"] \\ M \otimes C \arrow[r, "\rho_M\otimes\mathrm{id}"'] & M \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[d, "\cong"] \arrow[dr, "\rho_M"] & \\ M \otimes k & M \otimes C. \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes\varepsilon"] \end{tikzcd}$$

Đối mô đun trái được định nghĩa tương tự.

Cho M, N là các $C-$đối mô đun phải. Ánh xạ tuyến tính $f : M \longrightarrow N$ được gọi là đồng cấu đối mô đun nếu sơ đồ sau giao hoán:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho_M"'] & N \arrow[d, "\rho_N"] \\ M \otimes C \arrow[r, "f\otimes\mathrm{id}"'] & N \otimes C \end{tikzcd}$$

Cho N là không gian véc tơ con của đối mô đun M. N được gọi là đối mô đun con của M nếu $\rho_M(N) \subseteq N \otimes C$.

Định nghĩa 0.1.2 *Cho H là một không gian véc tơ với hai cấu trúc: cấu trúc đại số (H, m, u) và cấu trúc đối đại số (H, Δ, ε). H được gọi là* song đại số *nếu Δ, ε là các đồng cấu đại số.*

Mệnh đề 0.1.3 ([31]) *Các mệnh đề sau là tương đương:*

1. *m, u là các đồng cấu đối đại số.*
2. *Δ, ε là các đồng cấu đại số.*
3. *Δ, ε thỏa mãn các đẳng thức sau:*

$$\begin{aligned} &\Delta(1) = 1 \otimes 1; \\ &\Delta(gh) = \sum_{(g)(h)} g_{(1)}h_{(1)} \otimes g_{(2)}h_{(2)}; \\ &\varepsilon(gh) = \varepsilon(g)\varepsilon(h); \quad \varepsilon(1) = 1. \end{aligned}$$

Cho H_1, H_2 là các song đại số, một ánh xạ tuyến tính $f : H_1 \longrightarrow H_2$ được gọi là đồng cấu song đại số nếu f vừa là đồng cấu đại số vừa là đồng cấu đối đại số.

Một tự đồng cấu tuyến tính S của H được gọi là *antipode* (đối thế) trên H nếu

$$\sum_{(h)} S(h_{(1)})h_{(2)} = \varepsilon(h).\mathrm{id}_H = \sum_{(h)} h_{(1)}S(h_{(2)}).$$

Ánh xạ antipod nếu tồn tại thì duy nhất.

Định nghĩa 0.1.4 *Một song đại số H với một antipode S được gọi là một đại số Hopf.*

Cho H là một đại số Hopf. M, N là các $H-$đối mô đun thì $M \otimes N$ cũng là $H-$đối mô đun, với đối tích xác định như sau:

$$\rho : M \otimes N \longrightarrow M \otimes N \otimes H : m \otimes n \longmapsto \sum_{(m),(n)} m_{(0)} \otimes n_{(0)} \otimes m_{(1)}n_{(1)}.$$

Mọi đối mô đun M hữu hạn chiều trên H, có đối mô đun đối ngẫu, được ký hiệu là M^*. Đối tác động trên M^* được định nghĩa từ đối tác động trên M như sau: cho (e_i) là một cơ sở của M và (f^i) là một cơ sở của M^* đối ngẫu với cơ sở (e_i) của M, đối tác động của M là $\rho_M(e_i) = e_j \otimes a_i^j$. Khi đó đối tác động của M^* là $\rho_{M^*}(f^i) = f^j \otimes S(a_j^i)$, với S là antipode của H.

0.2 Cấu trúc đối tựa tam giác

Định nghĩa 0.2.1 *Cho B là một song đại số trên k. Một cấu trúc đối tựa tam giác (CQT) trên B là một ánh xạ tuyến tính $r : B \otimes B \longrightarrow k$ thỏa mãn các điều kiện sau:*

i. $\sum_{(a),(b)} r(a_{(1)}, b_{(1)})a_{(2)}b_{(2)} = \sum_{(a),(b)} b_{(1)}a_{(1)}r(a_{(2)}, b_{(2)})$,

ii. Tồn tại ánh xạ tuyến tính $r^{-1} : B \otimes B \longrightarrow k$ sao cho

$$\sum_{(a),(b)} r^{-1}(a_{(1)}, b_{(1)})r(a_{(2)}, b_{(2)}) = \sum_{(a),(b)} r(a_{(1)}, b_{(1)})r^{-1}(a_{(2)}, b_{(2)}) = \varepsilon(ab),$$

iii. $r(a, bc) = \sum_{(a)} r(a_{(2)}, b)r(a_{(1)}, c); r(ab, c) = \sum_{(c)} r(a, c_{(1)})r(b, c_{(2)})$.

Định nghĩa 0.2.2 *Một cấu trúc "-bện-" trên phạm trù $\mathcal{C}$ là một đẳng cấu tự nhiên $\tau_{M,N} : M \otimes N \longrightarrow N \otimes M$ thỏa mãn các điều kiện sau:*

$$\tau_{M\otimes N,P} = (\tau_{M,P} \otimes \mathrm{id}_N)(\mathrm{id}_M \otimes \tau_{N,P}),$$

$$\tau_{M,N\otimes P} = (\mathrm{id}_N \otimes \tau_{M,P})(\otimes\tau_{M,N} \otimes \mathrm{id}_P) \quad \text{với mọi } M, N, P \in \mathcal{C}.$$

Nếu H là đại số Hopf với cấu trúc CQT, thì cấu trúc CQT trên H cảm sinh cấu trúc bện trên phạm trù các đối mô đun phải. Bện được cho bởi:

$$\tau_{M,N} = (S_{(1,2)} \otimes r)S_{(2,3)}(\delta_M \otimes \delta_N).$$

0.3 Phức Koszul K và L

0.3.1 Phức Koszul K

Một siêu không gian véc tơ V trên trường k, với siêu chiều là $(m|n)$ là một không gian véc tơ $\mathbb{Z}_2$-phân bậc $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$, với $\dim_k V_{\bar{0}} = m, \dim_k V_{\bar{1}} = n$. Các phần tử thuộc $V_{\bar{0}}$ hoặc $V_{\bar{1}}$ được gọi là các phần tử thuần nhất bậc chẵn hoặc lẻ tương ứng. Cố định một cơ sở thuần nhất $x_1, x_2, \ldots, x_m \in V_{\bar{0}}$, $x_{m+1}, \ldots, x_{m+n} \in V_{\bar{1}}$ của V. Để đơn giản ta sẽ ký hiệu bậc chẵn lẻ của x_i bởi $\hat{i}$, vì vậy $\hat{i} = \bar{0}$ nếu $1 \leq i \leq m$, và $\hat{i} = \bar{1}$ với $m+1 \leq i \leq m+n$.

Siêu nửa nhóm $\mathrm{End}(V)$ được định nghĩa là "phổ" của siêu đại số Hopf giao hoán

$$M = k\langle z^i_j : 1 \leq i, j \leq d\rangle / (z^i_j z^k_l = (-1)^{\hat{i}+\hat{j}(\hat{k}+\hat{l})} z^k_l z^i_j),$$

với $k\langle z^i_j : 1 \leq i, j \leq d = m+n\rangle$ là đại số tự do không giao hoán. Vì vậy, với một đại số siêu giao hoán K, một tự đồng cấu của $V_K := V \otimes K$ là một K-điểm của M, tức là một đồng cấu đại số $M \longrightarrow K$. Berezin đưa ra khái niệm siêu định thức xác định tính khả nghịch của một tự đồng cấu của V.

Biểu diễn ma trận $Z = (z^i_j)$ dưới dạng ma trận khối

$$Z = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

trong đó A, D, C, B là các ma trận cấp $m \times m, n \times n$, $m \times n, n \times m$ tương ứng. Siêu định thức của Z định nghĩa là

$$\text{Bez}Z := \det D^{-1}\det(A - BD^{-1}C).$$

Ta có ma trận Z là nghịch đảo được nếu và chỉ nếu siêu định thức là nghịch đảo được. Các siêu ma trận nghịch đảo lập thành siêu nhóm tuyến tính tổng quát $GL(V)$.

Trong [26], Manin xây dựng một phức Koszul K, để giải thích tính tự nhiên của siêu định thức. Đồng điều của phức này chỉ tập trung duy nhất tại một thành phần, và tại đó đồng điều có chiều 1. Các phần tử của $GL(V)$ tác động lên nhóm đồng điều này thông qua siêu định thức của chúng. Để tiện theo dõi, chúng tôi sẽ nhắc lại phương pháp xây dựng phức Koszul.

Ký hiệu V^* là không gian véc tơ đối ngẫu của V, với cơ sở thuần nhất đối ngẫu là $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^d$, tức là $\xi^i(x_j) = \delta^i_j$. Đặt $K^{k,l} := \Lambda_k \otimes S^*_l$, với Λ_k, S_l là các thành phần thuần nhất thứ k và l của đại số ten xơ ngoài và đại số ten xơ đối xứng trên V. Toán tử vi phân $d_{k,l} : K^{k,l} \longrightarrow K^{k+1,l+1}$ được cho bởi công thức sau:

$$d_{k,l}(h \otimes \varphi) = \sum_i h \wedge x_i \otimes \xi^i.\varphi. \tag{1}$$

Với cách xây dựng ở trên, ta có một họ phức K_a:

$$K_a : \ldots \xrightarrow{d} \Lambda_k \otimes S^*_{k-a} \xrightarrow{d} \Lambda_{k+1} \otimes S^*_{k-a+1} \xrightarrow{d} \cdots,$$

trong đó với $k < 0$, ta định nghĩa $\Lambda_k = 0$ và $S_k = 0$.

Vì các không gian $K^{k,l}$ là các biểu diễn của $GL(V)$, với các toán tử vi phân d là đồng cấu của biểu diễn, nên các nhóm đồng điều của phức này là các biểu diễn của $GL(V)$. Mặt khác, các phức (K_a, d) là khớp với $a \neq m - n$ và phức (K_{m-n}, d) là khớp tại mọi nơi, ngoại trừ tại thành phần $\Lambda_m \otimes S^*_n$ và tại đó nhóm đồng điều có chiều bằng 1.

Ngoài ra, ta còn có toán tử vi phân $\partial_{k,l} : K^{k+1,l+1} \longrightarrow K^{k,l}$, cho bởi

$$\Lambda_{k+1} \otimes S^*_{l+1} \hookrightarrow V^{\otimes k+1} \otimes V^{*\otimes l+1} \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes \mathrm{ev}_V R_{V,V^*}\otimes \mathrm{id}} V^{\otimes k} \otimes V^{*\otimes l} \xrightarrow{Y_k \otimes X^*_l} \Lambda_k \otimes S^*_l ,$$

ở đây các toán tử

$$X_k := \frac{1}{k!} \sum_{w\in S_k} R_w; \quad Y_l := \frac{1}{l!} \sum_{w\in S_l} (-1)^{-l(w)} R_w.$$

X_k, Y_l được gọi là các *toán tử đối xứng hóa* và *phản đối xứng hóa* tương ứng. Các toán tử R_w được định nghĩa như sau: Với mỗi phép hoán vị $w \in S_k$, w có thể được phân tích thành tích các phép chuyển vị cơ sở $w = w_{i_1}.w_{i_2} \cdots w_{i_j}$, khi đó $R_w := R_{i_1} \cdots R_{i_j}$ với $R_i := \mathrm{id}_{V^{i-1}} \otimes R \otimes \mathrm{id}_{V^{k-i-1}}$, trong đó R là phép siêu đối xứng thông thường trên V, $R_{V,V^*}(a \otimes \varphi) = (-1)^{\hat{a}\hat{\varphi}} \varphi \otimes a$, $\mathrm{ev}_V(\varphi \otimes a) = \varphi(a)$ với mọi phần tử thuần nhất $a \in V, \varphi \in V^*$.

Ta có hệ thức sau trên $K_{k,l}$ (xem [9]):

$$lkd\partial + (l+1)(k+1)\partial d = (l - k + m - n)\mathrm{id}. \tag{2}$$

0.3.2 Phức Koszul L

Ngoài phức K mô tả ở trên, ta còn một phức Koszul khác liên kết với V. Phức này được định nghĩa như là một giải tự do của k, coi như mô đun trên đại số ten xơ đối xứng của V. Priddy đã mở rộng cấu trúc này cho một đại số toàn phương bất kỳ (xem [25]).

Cũng như phức K, phức L được định nghĩa là một dãy các phức L_a sau đây:

$$L_a : \ldots \xrightarrow{P} S_p \otimes \Lambda_{a-p} \xrightarrow{P} S_{p-1} \otimes \Lambda_{a-p+1} \xrightarrow{P} \cdots .$$

Ký hiệu $L^{l,k} := S_l \otimes \Lambda_k$, toán tử vi phân $P_{l,k} : L^{l,k} \longrightarrow L^{l-1,k+1}$, được định nghĩa như sau:

$$P_{l,k} : S_l \otimes \Lambda_k \hookrightarrow V^{\otimes l} \otimes V^{\otimes k} \xrightarrow{X_{l-1}\otimes Y_{k+1}} S_{l-1} \otimes \Lambda_{k+1} .$$

Phức $(L_\bullet, P)$ là khớp tại mọi nơi.
Ngoài ra, ta còn có toán tử vi phân $Q_{l,k} : S_{l-1} \otimes \Lambda_{k+1} \longrightarrow S_l \otimes \Lambda_k$, được định nghĩa một cách tương tự:

$$Q_{l.k} : S_{l-1} \otimes \Lambda_{k+1} \hookrightarrow V^{\otimes l-1} \otimes V^{\otimes k+1} \xrightarrow{X_l \otimes Y_k} S_l \otimes \Lambda_k .$$

Trên $L^{k,l}$, ta có

$$l(k+1)PQ + k(l+1)QP = (k+l)\mathrm{id} \quad \text{(xem [9])}. \tag{3}$$

0.4 Phân hoạch và hàm Schur

Để mô tả một cách cụ thể khai triển của tích ten xơ của hai đối mô đun đơn dưới dạng tổng trực tiếp của các đối mô đun đơn, chúng tôi cần một số khái niệm và kết quả về phân họach và hàm Schur.

Cho n là một số nguyên dương. Một phân hoạch λ của n là một dãy hữu hạn các số nguyên không âm, không tăng $(\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_s)$, với $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i = n$. Ký hiệu $|\lambda| := n$, và gọi n là *trọng* của λ, $l(\lambda) := s$ là *độ dài* của λ. Các số λ_i được gọi là các *thành phần* của phân hoạch λ. Phân hoạch liên hợp của λ, ký hiệu là λ', định nghĩa bởi $\lambda'_i := \sharp\{j : \lambda_j \geq i\}$. Trên tập các phân hoạch có độ dài hữu hạn, ta có các phép toán sau:

- Phép cộng: $(\lambda + \mu)_i := \lambda_i + \mu_i$.

- Phép hợp: $\lambda \cup \mu$ là một phân hoạch, có các thành phần là các thành phần của λ hoặc của μ, được sắp xếp theo thứ tự giảm dần.

Cho $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s)$ là một phân hoạch. Nếu tồn tại chỉ số d sao cho $\lambda_d = \lambda_{d+1} = \ldots = \lambda_{d+i}$, thì λ có thể viết được dưới dạng

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{d-1}, \lambda_d^{i+1}, \ldots, \lambda_s).$$

Biểu đồ của một phân hoạch λ là một bảng, mà hàng thứ i có λ_i ô, trong đó các số từ 1 đến $|\lambda|$ xuất hiện theo thứ tự tăng dần từ trái qua phải, từ trên xuống dưới.

Ví dụ: Biểu đồ của phân hoạch $\lambda = (4, 2, 1)$ là

1	2	3	4
5	6		
7			

Cho dãy biến $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, và dãy các số nguyên không âm $(\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_n)$. Khi đó α luôn viết được dưới dạng $\alpha = \lambda + \delta$, trong đó λ là một phân hoạch và $\delta = (n-1, n-2, \ldots, 1, 0)$. Đặt

$$a_\alpha := \sum_{w \in S_n} \text{sign}(w) x_1^{\alpha_{w(1)}} x_2^{\alpha_{w(2)}} \ldots x_n^{\alpha_{w(n)}}.$$

Hàm Schur theo các biến $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, tương ứng với phân hoạch λ, ký hiệu là S_λ, được xác định như sau:

$$S_\lambda := \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta}.$$

Ký hiệu

$$\Gamma_{m,n} := \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s) : \lambda_i \in \mathbb{N};\ \lambda_m \geq n \geq \lambda_{m+1}\}.$$

Với mọi $\lambda \in \Gamma_{m,n}$, thì λ có thể viết được dưới dạng $\lambda = ((n^m) + \alpha) \cup \beta'$, trong đó α là một phân hoạch có độ dài nhỏ hơn hoặc bằng m, β là phân hoạch có độ dài nhỏ hơn hoặc bằng n, β' là phân hoạch liên hợp của β. Khi đó hàm Schur theo hai bộ biến $(x_1, x_2, \ldots, x_m), (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, tương ứng với phân hoạch λ, ký hiệu là $S_\lambda(x^{(m)}/y^{(n)})$, được tính bởi công thức

$$S_\lambda(x^{(m)}/y^{(n)}) = \Pi_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}(x_i + y_j) S_\alpha(x^{(m)}) S_\beta(y^{(n)}),$$

với $S_\alpha(x^{(m)})$ $(S_\beta(y^{(n)}))$ là hàm Schur theo bộ biến $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, (tương ứng, $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$) ứng với phân hoạch α, (tương ứng, β) (chi tiết có thể xem trong [24]).

Chương 1

Biểu diễn của nhóm lượng tử loại A và ứng dụng

Nhóm lượng tử loại A được hiểu là một đại số Hopf xây dựng trên cơ sở một đối xứng Hecke. Một biểu diễn của nhóm lượng tử loại A được hiểu là một đối mô đun trên đại số Hopf xác định nhóm lượng tử đó. Phần thứ nhất của chương này được dành để giới thiệu về nhóm lượng tử loại A, và những kết quả đã biết về phạm trù các biểu diễn của nó. Phần thứ hai ứng dụng các kết quả này vào việc nghiên cứu một số tính chất của chuỗi Poincaré của đại số đối xứng và đại số phản đối xứng lượng tử. Kết quả chính khẳng định rằng trong phân thức hữu tỷ biểu diễn chuỗi Poincaré, có tử thức là đa thức có tính chất thuận nghịch và mẫu thức là đa thức có tính chất đối thuận nghịch, ngoài ra các đa thức này có hệ số nguyên. Các kết quả chính của chương này đã được công bố trong [6].

1.1 Đối xứng Hecke và nhóm ma trận lượng tử

Định nghĩa 1.1.1 *Cho V là không gian véc tơ hữu hạn chiều, một toán tử khả nghịch $R : V \otimes V \longrightarrow V \otimes V$ được gọi là một đối xứng Hecke nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau:*

(i) $R_1R_2R_1 = R_2R_1R_2$, *với* $R_1 := R \otimes \mathrm{Id}_V, R_2 := \mathrm{Id}_V \otimes R$,

(ii) $(R+1)(R-q) = 0$ *với* $q \in k^{\times}$,

(iii) Toán tử nửa liên hợp với R, ký hiệu là $R^{\sharp} : V^* \otimes V \longrightarrow V \otimes V^*$, được xác định bởi

$$\langle R^{\sharp}(\xi \otimes v), w\rangle = \langle \xi, R(v \otimes w)\rangle, \text{ là khả nghịch.}$$

q được gọi là *tham số lượng tử*. Từ đây trở về sau ta luôn giả sử $q^n \neq 1$ với mọi $n \geq 2$.

Cho một đối xứng Hecke R, người ta xây dựng đại số Hopf H_R như sau. Cố định một cơ sở $x_1, x_2, \ldots, x_d$ của V. Theo cơ sở này R có ma trận (R_{ij}^{kl}), tức là

$$R(x_i \otimes x_j) = x_k \otimes x_l R_{ij}^{kl}.$$

Ở đây ta qui ước nếu chỉ số nào xuất hiện cả ở trên và ở dưới của một biểu thức, thì hiểu rằng biểu thức được lấy tổng theo chỉ số đó. Đại số H_R được sinh bởi hai tập hợp các phần tử sinh $\{z_j^i, t_j^i : i, j = 1 \ldots d\}$, thỏa mãn các hệ thức sau:

$$R_{kl}^{ij} z_p^k z_q^l = z_m^i z_n^j R_{pq}^{mn}$$

$$z_k^i t_j^k = t_k^i z_j^k = \delta_j^i.$$

H_R là một đại số Hopf với các ánh xạ cấu trúc [12]:

$$\Delta(z_j^i) = z_k^i \otimes z_j^k, \Delta(t_i^j) = t_i^k \otimes t_k^j, \varepsilon(z_j^i) = \varepsilon(t_j^i) = \delta_j^i \text{ và } S(z_j^i) = t_j^i.$$

Từ định nghĩa của $R^\sharp$, ta có $R^{\sharp kl}_{ij} = R^{ik}_{jl}$. Do tính nghịch đảo được của $R^\sharp$, suy ra tồn tại một ma trận P, sao cho $P^{im}_{jn} R^{nk}_{ml} = \delta^i_l \delta^k_j$.

Ví dụ 1 [Drinfel'd- Jimbo]. Cố định một căn bậc hai của q. Cho toán tử R^d_q định nghĩa như sau:

$$R^d_q(x_i \otimes x_j) = \begin{cases} q x_i \otimes x_j & \text{nếu } i = j, \\ \sqrt{q} x_j \otimes x_i & \text{nếu } i > j, \\ \sqrt{q} x_j \otimes x_i - (q-1) x_i \otimes x_j & \text{nếu } i < j. \end{cases} \tag{1.1}$$

Ta có R^d_q là một đối xứng Hecke. Khi $q = 1$, R trở thành phép đối xứng thông thường trên V, và H_R trở thành đại số các hàm trên nhóm tuyến tính tổng quát $GL(V)$. Nhóm lượng tử liên kết với đối xứng Hecke (1.1) được gọi là *biến dạng lượng tử chuẩn của nhóm tuyến tính tổng quát.*

Ví dụ 2 [Manin]. Cho V là siêu không gian véc tơ với siêu chiều $(r|s)$. Đặt $d := r + s$. Cho $\{x_i | i := 1, \cdots, d\}$ là một cơ sở thuần nhất của V. Bậc chẵn lẻ của x_i, ký hiệu là $\hat{i}$. Toán tử ký hiệu là $R^{r|s}_q$, được định nghĩa như sau:

$$R^{r|s}_q(x_i \otimes x_j) = \begin{cases} (-1)^{\hat{i}} q x_i \otimes x_j & \text{nếu } i = j, \\ (-1)^{\hat{i}\hat{j}} \sqrt{q}\, x_j \otimes x_i & \text{nếu } i > j, \\ (-1)^{\hat{i}\hat{j}} \sqrt{q}\, x_j \otimes x_i - (q-1) x_i \otimes x_j & \text{nếu } i < j. \end{cases} \tag{1.2}$$

Ta có $R^{r|s}_q$ là một đối xứng Hecke. Khi $q = 1$, $R^{r|s}_q$ là phép siêu đối xứng $R(x_i \otimes x_j) = (-1)^{\hat{i}\hat{j}} x_j \otimes x_i$. Khi đó H_R là đại số các hàm trên siêu nhóm tuyến tính tổng quát $GL(V)$. Nhóm lượng tử liên kết với đối xứng Hecke (1.2) được gọi là *biến dạng lượng tử chuẩn của siêu nhóm tuyến tính tổng quát.*

1.2 Các đại số toàn phương liên kết với đối xứng Hecke

Cho R là một đối xứng Hecke, xét các đại số sau:

$$\begin{aligned} S_R &:= k\langle x_1, x_2, \ldots, x_d\rangle/(x_k x_l R_{ij}^{kl} = q x_i x_j), \\ \Lambda_R &:= k\langle x_1, x_2, \ldots, x_d\rangle/(x_k x_l R_{ij}^{kl} = -x_i x_j), \\ E_R &:= k\langle z_1^1, z_2^1, \ldots, z_d^d\rangle/(z_m^i z_n^j R_{kl}^{mn} = R_{pq}^{ij} z_k^p z_l^q). \end{aligned}$$

Các đại số Λ_R, S_R được gọi là *đại số phản đối xứng lượng tử* và *đại số đối xứng lượng tử*. Chúng được coi là xác định một không gian véc tơ lượng tử. S_R và Λ_R là các đại số toàn phương (tức là được sinh bởi các phần tử bậc nhất với hệ thức bậc hai). Chuỗi Poincaré tương ứng của các đại số này là:

$$P_\Lambda(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \dim_k \Lambda_n t^n, \qquad P_S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \dim_k S_n t^n.$$

Đại số E_R là song đại số, với đối tích $\Delta(z_j^i) = z_k^i \otimes z_j^k$ và đối đơn vị $\varepsilon(z_j^i) = \delta_j^i$. Song đại số E_R được coi như là đại số hàm trên nửa nhóm các tự đồng cấu lượng tử của không gian lượng tử nói trên. Ánh xạ tự nhiên

$$i : E_R \to H_R, z_j^i \mapsto z_j^i$$

là một đồng cấu của các song đại số.

1.3 Đối mô đun trên E_R

Không gian véc tơ V là đối mô đun trên E_R, với đối tác động

$$\rho : V \longrightarrow V \otimes E_R : x_i \longmapsto x_j \otimes z_i^j.$$

Do E_R là song đại số, các lũy thừa ten xơ của V cũng là đối mô đun trên E_R. Qua ánh xạ $i : E_R \to H_R$, $V^{\otimes k}$ cũng là đối mô đun trên H_R.

Vì ánh xạ tự nhiên $i : E_R \longrightarrow H_R$ là đơn ánh [12], nên các đối mô đun đơn trên E_R cũng là đối mô đun đơn trên H_R.

Phân loại của đối mô đun trên E_R được giải quyết nhờ đại số Hecke, mà chúng tôi sẽ định nghĩa dưới đây.

1.3.1 Đại số Hecke

Định nghĩa 1.3.1 *Đại số Hecke $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}_{q,n}$ là một đại số, có hệ sinh gồm các phần tử $T_i : 1 \leq i \leq n-1$, thỏa mãn các hệ thức sau:*

$$T_iT_j = T_jT_i : |i-j| \geq 2, \quad T_iT_{i+1}T_i = T_{i+1}T_iT_{i+1}, \quad T_i^2 = (q-1)T_i + q.$$

Như là một không gian véc tơ, $\mathcal{H}_n$ có cơ sở $T_w, w \in S_n$, (S_n là nhóm các hoán vị của n phần tử) được xác định như sau:

$$T_{(i,i+1)} = T_i \quad \text{và} \quad T_wT_v = T_{wv} \text{ nếu } l(wv) = l(w) + l(v),$$

ở đây $l(w)$ là ký hiệu độ dài của hoán vị w.

Nếu $q^n \neq 1$ với mọi $n \geq 2$, thì đại số H_n là nửa đơn.

Một đối xứng Hecke R trên không gian véc tơ V, cảm sinh một tác động của đại số Hecke $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}_{q,n}$ trên $V^{\otimes n}$ như sau:

$$T_i \longmapsto R_i = \mathrm{id}_V^{\otimes i-1} \otimes R \otimes \mathrm{id}_V^{\otimes n-i-1}.$$

Tác động này giao hoán với đối tác động của E_R, nên mỗi phần tử của $\mathcal{H}_n$ xác định một tự đồng cấu của $V^{\otimes n}$ như là tự đồng cấu của E_R-đối mô đun.

Điều ngược lại cũng đúng. Mỗi E_R-tự đồng cấu đối mô đun của $V^{\otimes n}$ biểu diễn tác động của một phần tử của $\mathcal{H}_n$. Do đó $V^{\otimes n}$ là nửa đơn, và các đối mô đun con đơn của nó có thể được đưa ra như là ảnh của các tự đồng cấu, được xác định bởi các phần tử lũy đẳng nguyên thủy của $\mathcal{H}_n$, và các phần tử lũy đẳng liên hợp xác định các đối mô đun đẳng cấu (xem [12]).

Vì các lớp liên hợp của các phần tử lũy đẳng nguyên thủy của $\mathcal{H}_n$ được đánh số bởi các phân hoạch của n, nên các đối mô đun con đơn của $V^{\otimes n}$ được đánh số bởi một tập con của các phân hoạch của n.

Tóm lại: E_R là nửa đơn và tập các đối mô đun đơn trên E_R được đánh số bởi một tập con của các phân hoạch (xem [12]).

Ví dụ. Ký hiệu $[n]_q := \frac{q^n-1}{q-1}$ và $[n]_q! := [1]_q[2]_q \cdots [n]_q$. Phần tử lũy đẳng nguyên thủy

$$x_n := \frac{1}{[n]_q!} \sum_{w \in S_n} T_w,$$

tương ứng với phân hoạch $\lambda = (n)$, phân hoạch này xác định đối mô đun đơn đẳng cấu với thành phần thuần nhất thứ n của S_R là S_n.

Phần tử lũy đẳng nguyên thủy

$$y_n := \frac{1}{[n]_{1/q}!} \sum_{w \in S_n} (-q)^{-l(w)} T_w,$$

tương ứng với phân hoạch $\beta = (1^n)$, xác định đối mô đun đơn đẳng cấu với thành phần thuần nhất thứ n của Λ_R là Λ_n.

Với mỗi phân hoạch λ, ký hiệu I_λ là đối mô đun đơn tương ứng của E_R. Ta quan tâm tới việc khai triển tích ten xơ $I_\lambda \otimes I_\mu$ thành tổng trực tiếp của các đối mô đun đơn,

$$I_\lambda \otimes I_\mu \cong \bigoplus_\gamma I_\gamma{}^{\oplus c^\gamma_{\lambda\mu}}. \tag{1.3}$$

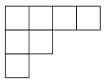
Các hệ số $c^\gamma_{\lambda\mu}$ là các hệ số Littlewood-Richardson miêu tả phép nhân của hàm Schur s_γ trong tích của hai hàm Schur s_λ và s_μ [24].

Littlewood-Richardson đã đưa ra một thuật toán tổ hợp để tính toán các hệ số $c^{\gamma}_{\lambda\mu}$, thường gọi là thuật toán Littlewood-Richardson, mà chúng tôi sẽ giới thiệu dưới đây.

1.3.2 Thuật toán Littlewood-Richardson

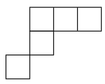
Ký hiệu $[\lambda]$ là biểu đồ của phân hoạch λ, $[\lambda] := \{(i,j) : 1 \leq j \leq \lambda_i\}$.

Ví dụ: với $\lambda = (4,2,1)$, thì

$[\lambda] =$ 

Cho các phân hoạch γ và λ với $\gamma_i \geq \lambda_i$ với mọi i. Ta ký hiệu $[\gamma\backslash\lambda] := \{(i,j) : (i,j) \in [\gamma], \lambda_i < j \leq \gamma_i\}$.

Ví dụ. cho $\gamma = (4,2,1), \lambda = (1,1)$, khi đó

$[\gamma\backslash\lambda] =$ 

Ta có thuật toán sau để tính các hệ số Littlewood-Richardson (xem [4]).

Một dãy số nguyên được gọi là có kiểu của phân hoạch μ, nếu với mỗi i, i xuất hiện đúng μ_i lần trong dãy.

Ví dụ. Cho phân hoạch $\mu = (3,2)$, dãy 12112 là một dãy có kiểu của phân hoạch μ.

Với một dãy số nguyên có kiểu của phân hoạch μ, các phần tử của nó được định nghĩa là *tốt* như sau. Tất cả các số 1 là tốt, số $i+1$ là tốt nếu số các i tốt ở phía trước (bên trái $i+1$) là lớn hơn thật sự số các $i+1$ tốt, ở phía trước $i+1$.

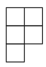
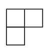
Một dãy số nguyên được gọi là tốt nếu tất cả các phần tử trong dãy là tốt.

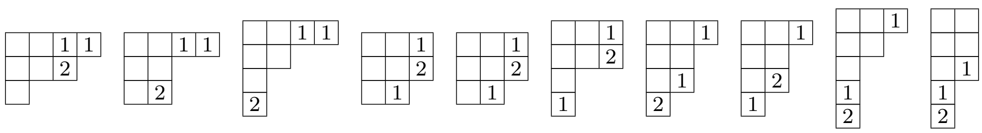
Ví dụ. Cho $\mu = (2,1)$, khi đó các dãy tốt của μ là $(112), (121)$.

Cho λ, μ là hai phân hoạch bất kỳ của m, n tương ứng. Thuật toán để tính các hệ số Littlewood - Richardson $c^{\gamma}_{\lambda\mu}$ được mô tả như sau:

- Nếu $\lambda_i > \gamma_i$ với i nào đó thì $c^{\gamma}_{\lambda\mu} = 0$.
- Nếu $\lambda_i \leq \gamma_i$ với mọi i, thì $c^{\gamma}_{\lambda\mu}$ là số cách điền các số nguyên vào các ô của $[\gamma \setminus \lambda]$ sao cho:
  - mỗi k xuất hiện đúng μ_k lần,
  - các số trong bảng không giảm theo các dòng từ trái qua phải và tăng thực sự theo các cột từ trên xuống dưới,
  - khi đọc các số nguyên từ trái qua phải, từ trên xuống dưới thì ta được một dãy tốt của phân hoạch μ.

Các hệ số $c^{\gamma}_{\lambda\mu}$ được gọi là *hệ số Littlewood-Richardson.*

Ví dụ. Cho $[\lambda] =$  $[\mu] =$ . Chúng ta có hai dãy tốt có kiểu của phân hoạch $(2,1)$ là $(112), (121)$. Có các khả năng sau của γ mà $c^{\gamma}_{\lambda\mu} \neq 0$:



Theo (1.3), ta có

$$I_{(2,2,1)} \otimes I_{(2,1)} = I_{(4,3,1)} \oplus I_{(4,2^2)} \oplus I_{(4,2,1^2)} \oplus I_{(3^2,2)} \oplus I_{(3^2,1^2)} \oplus I^{\oplus 2}_{(3,2^2,1)} \oplus I_{(3,2,1^3)} \oplus I_{(2^3,1^2)}.$$

1.4 Đối mô đun trên H_R

Vấn đề chúng tôi quan tâm là nghiên cứu các biểu diễn của nhóm lượng tử loại A, hay là các đối mô đun trên H_R.

Từ bây giờ trở về sau, ta sẽ ký hiệu tập hợp các đồng cấu giữa hai H_R-đối mô đun M, N là $\mathrm{Hom}(M, N)$. Với mọi H_R-đối mô đun hữu hạn chiều N, ta có các đẳng cấu sau:

$$\mathrm{Hom}(M \otimes N, P) \cong \mathrm{Hom}(M, P \otimes N^*) : f \longleftrightarrow g, \text{ với} \tag{1.4}$$

$$g = (f \otimes \mathrm{id}_{N^*})(\mathrm{id}_M \otimes \mathrm{db}_N), f = (\mathrm{id}_P \otimes \mathrm{ev}_N)(g \otimes \mathrm{id}_N),$$

$$\mathrm{Hom}(M, N \otimes P) \cong \mathrm{Hom}(N^* \otimes M, P) : h \longleftrightarrow k, \text{ với} \tag{1.5}$$

$$k = (\mathrm{ev}_N \otimes \mathrm{id}_P)(\mathrm{Id}_{N^*} \otimes h), h = (\mathrm{id}_N \otimes k)(\mathrm{db}_N \otimes \mathrm{id}_M).$$

Vì R thỏa mãn phương trình Yang-Baxter, nên tồn tại một cấu trúc CQT trên H_R, cấu trúc CQT này cảm sinh một cấu trúc bện trên phạm trù các đối mô đun phải trên H_R, được ký hiệu là $\tau_{M,N} : M \otimes N \longrightarrow N \otimes M$. Vì cấu trúc CQT trên E_R là hạn chế của CQT trên H_R, nên cấu trúc bện cho các E_R đối mô đun, cũng là cấu trúc bện khi ta xét chúng như là các H_R đối mô đun. Dùng cấu trúc bện và các đẳng cấu (1.4), (1.5), ta có các đẳng cấu sau:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(N \otimes M, P) &\cong \mathrm{Hom}(M \otimes N, P) \cong \mathrm{Hom}(M, P \otimes N^*) &(1.6)\\ &\cong \mathrm{Hom}(M, N^* \otimes P), \\ \mathrm{Hom}(M, P \otimes N) &\cong \mathrm{Hom}(M, N \otimes P) \cong \mathrm{Hom}(N^* \otimes M, P) &(1.7)\\ &\cong \mathrm{Hom}(M \otimes N^*, P). \end{aligned}$$

Định nghĩa 1.4.1 *Một đối mô đun đơn trên H_R được gọi là* chẻ *nếu nó là nội xạ và xạ ảnh.*

Đối mô đun đơn I_λ là chẻ nếu và chỉ nếu $\lambda_m \geq n$, với (m, n) là song hạng của R [13, Thm.3.1].

1.5 Phức Koszul liên kết với đối xứng Hecke

Toán tử đối xứng hóa lượng tử X_n và phản đối xứng hóa lượng tử Y_n được định nghĩa như sau:

$$X_n := \frac{1}{[n]_q!} \sum_{w \in S_n} R_w, \qquad Y_n := \frac{1}{[n]_{1/q}!} \sum_{w \in S_n} (-q)^{-l(w)} R_w.$$

Xét phức Koszul L, phức này được định nghĩa tương tự như ở mục 0.3.2, với các toán tử đối xứng hóa được thay bởi toán tử đối xứng hóa lượng tử, và toán tử phản đối xứng hóa được thay bởi toán tử phản đối xứng hóa lượng tử. Ta có hệ thức sau trên $L_{p,r}$, được chứng minh bởi Gurevich [9]:

$$[r][p+1]PQ + [p][r+1]QP = [r+p]\mathrm{id}. \tag{1.8}$$

Tương tự, xét phức Koszul K, định nghĩa tương tự như ở 0.3.1 với các toán tử đối xứng hóa được thay bởi toán tử đối xứng hóa lượng tử, và toán tử phản đối xứng hóa được thay bởi toán tử phản đối xứng hóa lượng tử. Toán tử vi phân $d_{k,l} : \Lambda_k \otimes S_l^* \longrightarrow \Lambda_{k+1} \otimes S_{l+1}^*$, xây dựng cụ thể như sau:

$$d_{k,l} : \Lambda_k \otimes {S_l}^* \hookrightarrow V^{\otimes k} \otimes V^{*\otimes l} \overset{\mathrm{id}\otimes \mathrm{db}_V \otimes \mathrm{id}}{\longrightarrow} V^{\otimes k+1} \otimes V^{*\otimes l+1} \overset{Y_{k+1}\otimes {X_{l+1}}^*}{\rightarrow} \Lambda_{k+1} \otimes {S_{l+1}}^*,$$

với $\mathrm{ev}(\varphi \otimes x) = \varphi(x)$ và $\mathrm{db} : k \to V \otimes V^*$ là ánh xạ cho bởi $1 \mapsto x_i \otimes \xi^i$. Toán tử vi phân d thỏa mãn $d^2 = 0$ [9].

Ngoài ra ta còn có toán tử vi phân $\partial_{k,l} : \Lambda_{k+1}.S_{l+1} \longrightarrow \Lambda_k.S_l$, cho bởi:

$$\partial_{k,l} : \Lambda_{k+1} \otimes {S_{l+1}}^* \hookrightarrow V^{\otimes k+1} \otimes V^{*\otimes l+1} \overset{\mathrm{id}\otimes \mathrm{ev}_V \tau_{V \otimes V^*} \otimes \mathrm{id}}{\longrightarrow} V^{\otimes k} \otimes V^{*\otimes l} \overset{Y_k \otimes {X_l}^*}{\rightarrow} \Lambda_k \otimes {S_l}^*,$$

với τ_{V,V^*} là bện trên $V \otimes V^*$.

Vì các thành phần thuần nhất của S_R và Λ_R là các đối mô đun trên H_R, các ánh xạ ev, db là các đồng cấu đối mô đun, nên các toán tử vi phân

d, ∂ là đồng cấu đối mô đun. Vì vậy các nhóm đồng điều của phức là các H_R-đối mô đun.

Theo [9], ta có hệ thức sau trên $K_{k,l}$:

$$q[l][k]d\partial + [l+1][k+1]\partial d = q^k([l-k]_q + \mathrm{rank}_q R) \tag{1.9}$$

với $\mathrm{rank}_q R := P_{ij}^{ij}$. Do đó, nếu $-[l-k]_q \neq \mathrm{rank}_q R$, thì đồng điều tại mọi thành phần của phức là bằng 0.

1.6 Chuỗi Poincaré

Trong mục này, chúng tôi ứng dụng những kết quả đã biết về biểu diễn của nhóm lượng tử vào việc nghiên cứu chuỗi Poincaré của các đại số toàn phương liên kết với đối xứng Hecke.

Định nghĩa 1.6.1 *Đa thức $P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$ được gọi là thuận nghịch nếu $a_i = a_{n-i}$ với mọi i, và đối thuận nghịch nếu $P(-t)$ là thuận nghịch.*

Nếu R là phép đối xứng thông thường, tức $R(a \otimes b) = b \otimes a$, thì Λ_R và S_R có chuỗi Poincaré tương ứng

$$P_\Lambda(t) = (1+t)^d, P_S(t) = \frac{1}{(1-t)^d},$$

với d là chiều của V. Ta thấy đa thức $(1+t)^d$ là thuận nghịch, còn đa thức $(1-t)^d$ là đối thuận nghịch.

Nếu R là phép siêu đối xứng, tức là $R(a \otimes b) = (-1)^{\hat{a}.\hat{b}} b \otimes a$. Khi đó

$$P_\Lambda(t) = \frac{(1+t)^m}{(1-t)^n}, \text{ với } (m,n) \text{ là siêu chiều của } V.$$

Ta thấy tử thức (mẫu thức) của $P_\Lambda(t)$ là thuận nghịch (đối thuận nghịch).

Trong trường hợp $q = 1$, Lyubashenko [22] đã chứng minh được rằng: nếu chuỗi Poincaré của Λ_R là đa thức (tức là Λ_R là hữu hạn chiều) thì $P_\Lambda(t)$ là đa thức thuận nghịch.

Trường hợp q bất kỳ (không là căn của đơn vị), mệnh đề tương tự được Gurevich [9] chứng minh. Một câu hỏi tự nhiên được đặt ra là trong trường hợp tổng quát thì tử thức và mẫu thức của $P_\Lambda(t)$ có còn có tính chất thuận nghịch hay không. Câu trả lời là có, và đó là kết quả chính của chương này.

1.6.1 Chuỗi Poincaré và chiều của các E_R-đối mô đun

Định lý 1.6.2 *[11] Nếu R là đối xứng Hecke bất kỳ thì $P_\Lambda(t)$ là phân thức hữu tỷ có dạng*

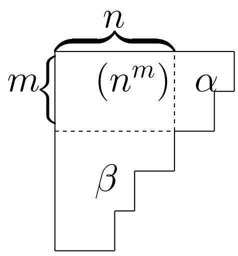
$$P_\Lambda(t) = \frac{\Pi_{i=1}^{m}(1 + x_i t)}{\Pi_{j=1}^{n}(1 - y_j t)} \text{ với } x_i, y_j > 0.$$

Định nghĩa 1.6.3 *Cặp (m, n) ở Định lý 1.6.2 được gọi là song hạng của đối xứng Hecke.*

Chú ý rằng chuỗi Poincaré của S_R, Λ_R thỏa mãn $P_\Lambda(t)P_S(-t) = 1$ [11], nên chuỗi Poincaré của S_R cũng có mô tả tương tự như trên.

Chiều của các đối mô đun đơn I_λ, được tính theo các thành phần của hệ số của chuỗi Poincaré của S_R, thông qua công thức định thức (xem chi tiết trong [12]). Với các đối mô đun được xác định bởi các phân hoạch có dạng

$\lambda_m \geq n$, chiều của chúng tính bởi một công thức đơn giản hơn. Cụ thể, với một phân hoạch $\lambda \in \Gamma_{m,n}$, λ được mô tả dưới dạng bảng Young sau:



(1.10)

Khi đó

$$\dim_k I_\lambda = \prod_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq n\leq n}} (x_i + y_j) \cdot s_\alpha(x) \cdot s_{\beta'}(y), \tag{1.11}$$

ở đó $s_\alpha(x)$ (tương ứng $s_{\beta'}(y)$) là hàm Schur trên các biến $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ (tương ứng $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$), β' là phân hoạch liên hợp của β.

1.6.2 Tính thuận nghịch của chuỗi Poincaré

Dùng công thức 1.3 và công thức Littlewood-Richardson, ta có

$$I_{((n+1)^m, n^{k+1})} \otimes I_{(1^k)} \cong \bigoplus_{0\leq l\leq \min(k,m)} I_{((n+2)^l, (n+1)^{m-l}, n^{k+1}, 1^{k-l})},$$

suy ra

$$\begin{aligned} \dim_k \mathrm{End}^H(I_{((n+1)^m,n^{k+1})} \otimes {I_{(1^k)}}^*) &= \dim_k \mathrm{End}^H(I_{((n+1)^m,n^{k+1})} \otimes I_{(1^k)}) \\ &= \min(k,m) + 1. \end{aligned}$$

Ví dụ. Với $(m,n) = (1,2), k = 1$, ta có $I_{3,2,2} \otimes I_1 = I_{4,2,2} \oplus I_{3,2,2,1}$.

Khi $(m,n) = (1,2)$ và $k = 2$, ta có $I_{3,2,2} \otimes I_1 = I_{4,2,2,2,1} \oplus I_{3,2,2,2,1,1}$

Dùng lý luận tương tự, khi $k \leq m$, ta có

$$I_{((n+1)^m, n, (n-1)^k)}, I_{((n+1)^{m-1}, n^3, (n-1)^{k-1})}, \ldots, I_{((n+1)^{m-k}, n^{2k+1})}$$

là các đối mô đun con của $I_{((n+1)^m,n^{k+1})} \otimes {I_{(1^k)}}^*$. Mặt khác các đối mô đun con này là đối mô đun chẻ, do đó tồn tại một đối mô đun con N sao cho

$$\begin{aligned} I_{((n+1)^m,n^{k+1})} \otimes {I_{(1^k)}}^* &= N \oplus I_{((n+1)^m,n,(n-1)^k)} \oplus I_{((n+1)^{m-1},n^3,(n-1)^{k-1})} \\ &\quad \oplus \cdots \oplus I_{((n+1)^{m-k},n^{2k+1})}. \end{aligned}$$

Vì vành các tự đồng cấu của đối mô đun ở phía bên phải có chiều là $k+1$, suy ra $N = 0$. Vì vậy

$$\begin{aligned} & I_{((n+1)^m,n^{k+1})} \otimes {I_{(1^k)}}^* \\ &= I_{((n+1)^m,n,(n-1)^k)} \oplus I_{((n+1)^{m-1},n^3,(n-1)^{k-1})} \oplus \cdots \oplus I_{((n+1)^{m-k},n^{2k+1})}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Tương tự, với $k \geq m+1$, ta có $m+1$ đối mô đun

$$I_{((n+1)^m,n,(n-1)^k)}, I_{((n+1)^{m-1},n^3,(n-1)^{k-1})}, \ldots, I_{(n^{2m+1},(n-1)^{k-m})},$$

là đối mô đun con của $I_{((n+1)^m,n^{k+1})} \otimes {I_{(1^k)}}^*$, mặt khác, các đối mô đun con này là đối mô đun chẻ, nên

$$\begin{aligned} & I_{((n+1)^m,n^{k+1})} \otimes {I_{(1^k)}}^* = \\ & I_{((n+1)^m,n,(n-1)^k)} \oplus I_{((n+1)^{m-1},n^3,(n-1)^{k-1})} \oplus \cdots \oplus I_{(n^{2m+1},(n-1)^{k-m})}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Ví dụ. Với $(m,n) = (1,2)$ và $k = 1$, ta có

$$I_{3,2,2} \otimes I_1^* = I_{2,2,2} \otimes I_{3,2,1}; \qquad I_{3,2,2,2} \otimes I_{1,1}^* = I_{3,2,2,1} \oplus I_{2,2,2,1}.$$

Ký hiệu $\lambda_l := \dim_k \Lambda_l = \dim_k I_{(1^l)}$, và $C := \prod(x_i + y_j)$. Theo (1.11), ta có

$$\begin{aligned} \dim_k \left(I_{((n+1)^m,n^{k+1})} \otimes {I_{(1^k)}}^* \right) &= \dim_k I_{((n+1)^m,n^{k+1})} \cdot \dim_k I_{(1^k)} \\ &= C\lambda_k s_{(1^m)}(x) s_{(k+1)^n}(y) \\ &= C\lambda_k a_m b_n^{k+1}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Chú ý rằng

$$s_{((n-1)^k)}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = s_{(k)}(y_1^{-1}, y_2^{-1}, \ldots, y_n^{-1})b_n^k.$$

Bằng cách tính chiều của các đối mô đun ở phía bên phải của (1.12), (1.13), và công thức (1.11). Khi đó, với $k \leq m$, ta có

$$a_m b_n^{k+1}\lambda_k \;=\; b_n^{k+1}\left[a_{m-k} + a_m s_k(y^{-1}) + a_{m-1}s_{k-1}(y^{-1}) + \ldots + a_{m-k+1}s_1(y^{-1})\right],$$

nên

$$\lambda_k = a_m^{-1}\left[a_{m-k} + a_m s_k(y^{-1}) + a_{m-1}s_{k-1}(y^{-1}) + \ldots + a_{m-k+1}s_1(y^{-1})\right], \tag{1.15}$$

ở đó $s_k(y^{-1}) := s_{(k)}(y_1^{-1}, y_2^{-1}, \ldots, y_n^{-1})$.

Với $k \geq m+1$, ta có

$$a_m b_n^{k+1}\lambda_k \;=\; b_n^{k+1}\left[a_m s_k(y^{-1}) + a_{m-1}s_{k-1}(y^{-1}) + \cdots + a_0 s_{k-m}(y^{-1})\right],$$

nên

$$\lambda_k = a_m^{-1}\left[a_m s_k(y^{-1}) + a_{m-1}s_{k-1}(y^{-1}) + \cdots + a_0 s_{k-m}(y^{-1})\right]. \tag{1.16}$$

Từ các phương trình (1.15) và (1.16), ta có

$$\frac{t^m b_n(1 + a_1t^{-1} + \cdots + a_m t^{-m})}{(-t)^n a_m(1 - b_1t^{-1} + \cdots + b_n(-t)^{-n})} = \frac{1 + a_1t + \cdots + a_m t^m}{1 - b_1t + \cdots + b_n(-t)^n}. \tag{1.17}$$

Thật vậy, theo định nghĩa, $\{\lambda_k\}$ là hệ số của vế bên phải của (1.17), khi khai triển dưới dạng chuỗi lũy thừa. Với vế bên trái, cho $e_k := s_{(1^k)}$ là ký hiệu của các đa thức đối xứng cơ bản, khi đó

$$\begin{aligned}
\frac{t^m b_n(1+a_1t^{-1}+\cdots+a_mt^{-m})}{(-t)^n a_m(1-b_1t^{-1}+\cdots+b_n(-t)^{-n})} &= \frac{t^m b_n\prod_{i=1}^m(1+x_it^{-1})}{(-t)^n a_m\prod_{j=1}^n(1-y_jt^{-1})}\\
&= \frac{\prod_{i=1}^m(1+x_i^{-1}t)}{\prod_{j=1}^n(1-y_j^{-1}t)}\\
&= \sum_{k=0}^m e_k(x^{-1})t^k\cdot\sum_{l=0}^\infty s_l(y^{-1})t^l\\
&= \sum_{k=0}^\infty\left(\sum_{i=0}^k e_i(x^{-1})s_{k-i}(y^{-1})\right)t^k.
\end{aligned}$$

Vì $e_k(x^{-1}) = \prod_i x_i^{-1}e_{m-k}(x) = a_m^{-1}a_{m-k}$ với $k \le m$; $e_k = 0$ với $k \ge m+1$, nên ta có

$$\frac{t^m b_n(1+a_1t^{-1}+\cdots+a_mt^{-m})}{(-t)^n a_m(1-b_1t^{-1}+\cdots+b_n(-t)^{-n})} = \sum_{k=0}^\infty\sum_{i=0}^k a_m^{-1}a_is_{k-i}(y^{-1})t^k,$$

ở đây $a_i = 0$ nếu $i > m$.

Mà $1+a_1t+\cdots+a_mt^m = 0$ chỉ có m nghiệm âm và $1-b_1t+\cdots+b_n(-t)^n = 0$ chỉ có n nghiệm dương, nên ta có thể dễ dàng chỉ ra rằng các đa thức này là có tính chất thuận nghịch ($a_i = a_{m-i}$) và đối thuận nghịch ($b_i = b_{n-i}$). Vì vậy định lý sau được chứng minh.

Định lý 1.6.4 *Trong phân thức hữu tỷ biểu diễn chuỗi Poincaré, của các đại số toàn phương liên kết với đối xứng Hecke, ta có tử thức là đa thức có tính chất thuận nghịch và mẫu thức là đa thức có tính chất đối thuận nghịch.*

Dùng công thức (1.11), chúng ta chứng minh được rằng tử thức và mẫu thức là các đa thức có hệ số nguyên.

Mệnh đề 1.6.5 *Với các giả thiết của định lý 1.6.4 ở trên, các hệ số a_i, b_j là các số nguyên.*

Chứng minh. Ta có $\dim_k I_\lambda$ là nguyên với mọi λ. Với $\lambda = (n^m)$, $\prod(x_i + y_j) \in \mathbb{Z}$. Trong phân tích (1.10), nếu cố định α, cho β thay đổi, thì $s_\beta(y)$ là hữu tỷ. Tương tự, $s_\alpha(x)$ là hữu tỷ. Vì $a_1^k(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^k = s_{(1)}^k$ được biểu diễn là tổ hợp tuyến tính của các $s_\alpha(x)$ với hệ số nguyên, suy ra $a_1^k \cdot \prod(x_i + y_j) \cdot s_{\beta'}(y)$ là nguyên với mọi $k \in \mathbb{N}$. Vì vậy a_1 là một số nguyên. Lập luận này cũng đúng cho tất cả các hệ số a_i và b_j khác.$\square$

• **Kết luận.** Trong chương này, chúng tôi đã chứng minh được rằng trong phân thức hữu tỷ biểu diễn chuỗi Poincaré của các đại số toàn phương liên kết với mỗi đối xứng Hecke bất kỳ có tử thức là đa thức có tính chất thuận nghịch và mẫu thức là đa thức có tính chất đối thuận nghịch. Ngoài ra các đa thức này là có hệ số nguyên.

Chương 2

Biểu diễn bất khả qui của $GL_q(2|1)$

Song hạng của đối xứng Hecke xác định phạm trù biểu diễn của nó [15]. Một đối xứng Hecke được gọi là chẵn nếu song hạng của nó là có dạng $(m, 0)$, và là lẻ nếu song hạng có dạng $(0, n)$. Trong các trường hợp này phạm trù biểu diễn của nhóm lượng tử là nửa đơn, và các biểu diễn bất khả quy đã được P.H.Hai [12] phân loại. Nếu đối xứng Hecke là không chẵn và không lẻ thì phạm trù biểu diễn không còn là nửa đơn, bài toán phân loại các biểu diễn bất khả qui trong trường hợp này hầu như vẫn chưa được giải quyết.

Mục đích của chương này là phân loại biểu diễn bất khả qui của nhóm lượng tử liên kết với đối xứng Hecke có song hạng $(2|1)$. Sử dụng phức Koszul K, chúng tôi xây dựng một lớp các biểu diễn bất khả qui, lớp này được đánh số bởi các bộ số nguyên (m, n, p) thỏa mãn $m \geq n$. Tiếp theo, chúng tôi chứng minh được tập các biểu diễn xây dựng được là vét hết tất cả các biểu diễn bất khả qui của $GL_q(2|1)$. Công cụ để xây dựng các biểu diễn bất khả qui trong trường hợp này chủ yếu là sử dụng phức Koszul K.

Các kết quả trình bày ở đây được công bố trong [7].

2.1 Một số tính chất của phức Koszul K

Cho R là đối xứng Hecke, có song hạng (m, n) với $mn \neq 0$.

Mệnh đề 2.1.1 *Với $a \neq m - n$, khi đó các thành phần của phức K_a thỏa mãn đẳng cấu sau:*

$$K_{k,l} = \Lambda_k \otimes {S_l}^* \cong \mathrm{Im} d_{k-1,l-1} \oplus \mathrm{Im}\partial_{k,l}, \ \textit{với } l - k = a. \tag{2.1}$$

Chứng minh. Thật vậy, theo (1.9), với $x \in K_{k,l}$, ta có

$$q d_{k-1,l-1}\partial_{k-1,l-1}(x) + \partial_{k,l} d_{k,l}(x) = q^k(\mathrm{rank}_q R + [l-k]_q)x,$$

nên $x \in \mathrm{Im}\partial_{k,l} + \mathrm{Im} d_{k-1,l-1}$. Cho $x \in \mathrm{Im}\partial_{k,l} \cap \mathrm{Im} d_{k-1,l-1}$, tức là $x = d_{k-1,l-1}\partial_{k-1,l-1}(y)$ và $x = \partial_{k,l} d_{k,l}(z)$. Khi đó $d_{k,l}(x) = 0$ và $\partial_{k-1,l-1}(x) = 0$, suy ra $x = 0$. Vì vậy $\mathrm{Im}\partial_{k,l} \cap \mathrm{Im} d_{k-1,l-1} = 0$, suy ra $K_{k,l} \cong \mathrm{Im} d_{k-1,l-1} \oplus \mathrm{Im}\partial_{k,l}$.

Bổ đề 2.1.2 *Các toán tử vi phân $d_{k,l}$ của các phức $K_\bullet$ khác* 0 *với mọi cặp (k, l) thỏa mãn $k, l \geq 0$ và k, l không đồng thời bằng* 0.

Chứng minh. Ta đã biết S_l và Λ_k là các thành phần trực tiếp của $V^{\otimes l}$ và $V^{\otimes k}$, được xác định bởi các toán tử $X_l = \rho(x_l)$ và $Y = \rho(y_k)$ tương ứng. Mặt khác $X_{l+1}(X_l \otimes \mathrm{Id}_V) = X_{l+1}$, $Y_{k+1}(\mathrm{Id}_V \otimes Y_k) = Y_{k+1}$. Vì vậy việc chứng minh $d_{k,l} \neq 0$ tương đương với việc chứng minh ánh xạ

$$D := (Y_{k+1} \otimes {X_{l+1}}^*)({\mathrm{Id}_V}^{\otimes k} \otimes \mathrm{db} \otimes \mathrm{Id}_{V^*}^{\otimes l+1}) \neq 0,$$

với $D \in \mathrm{Hom}(V^{\otimes k} \otimes V^{*\otimes l}, V^{\otimes k+1} \otimes V^{*\otimes l+1})$. Do các đẳng cấu (1.6) và (1.7), ta có các đẳng cấu sau:

$$\mathrm{Hom}(V^{\otimes k} \otimes V^{*\otimes l}, V^{\otimes k+1} \otimes V^{*\otimes l+1}) \cong \mathrm{Hom}(V^{\otimes k} \otimes V^{\otimes l+1}, V^{\otimes l} \otimes V^{\otimes k+1}).$$

Dưới đẳng cấu này, D có ảnh là ánh xạ

$$\begin{aligned} g &= (\mathrm{Id}_V^{\otimes l} \otimes Y_{k+1})(\tau_{V^{\otimes k}, V^{\otimes l}} \otimes \mathrm{Id}_V)(\mathrm{Id}_V^{\otimes k} \otimes X_{l+1}) \\ &= q^{-l}\tau_{V^{\otimes l}, V^{\otimes k+1}}(Y_{k+1} \otimes \mathrm{Id}_V^{\otimes k+1})(\mathrm{Id}_V^{\otimes k} \otimes X_{l+1}). \end{aligned}$$

Theo [4], phần tử $y_{k+1}T_w x_{l+1}$, trong đó w là hoán vị

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots\cdots & k+1 & k+2 & \cdots & l+k+1 \\ 1 & l+2 & \cdots & l+k+1 & 2 & \cdots & l+1 \end{pmatrix}$$

sinh ra mô đun Specht (trái) (ideal trái cực tiểu của $\mathcal{H}_n$), tương ứng với phân hoạch $\lambda = (l+1, 1^k)$. Mặt khác, theo mục 1.6.1, ta có $I_\lambda \neq 0$ với $\lambda \in \Gamma_{m,n} : mn \neq 0$, và phần tử lũy đẳng nguyên thủy tương ứng với phân hoạch λ này xác định một tự đồng cấu khác không. Do đó $\rho(y_{k+1}T_w x_{l+1}) \neq 0$. Vì vậy

$$\begin{aligned} 0 \neq \rho(y_{k+1}T_w x_{l+1}) &= (Y_{k+1} \otimes \mathrm{Id}_V{}^{\otimes l})R_w(X_{l+1} \otimes \mathrm{Id}_V{}^{\otimes k}) \\ &= (Y_{k+1} \otimes \mathrm{Id}_V{}^{\otimes l})(\mathrm{Id}_V{}^{\otimes k} \otimes X_{l+1})R_w. \end{aligned}$$

Do đó $g \neq 0$, suy ra $d_{k,l} \neq 0$.

Trong chương này, từ bây giờ trở đi, chúng tôi chỉ xét đối xứng Hecke R có song hạng $(2, 1)$.

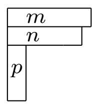
2.2 Khai triển của tích ten xơ của các E_R-đối mô đun đơn

Chuỗi Poincaré của S_R có dạng

$$P_S(t) = \frac{1+t}{(1-ut)(1-u^{-1}t)},$$

với $u \in R^+$, $u + u^{-1} \in \mathbb{Z}$.

Nếu $\lambda \in \Gamma_{2,1}$, thì λ có dạng $(m, n, 1^p)$, được mô tả bởi bảng Young sau:



$$\text{với } m \geq n \geq 0, p \geq 0 \text{ và nếu } n = 0 \text{ thì } p = 0. \tag{2.2}$$

Một bộ các số nguyên thỏa mãn điều kiện ở (2.2), được nói là *tương ứng với phân hoạch* λ. Với mỗi bộ số nguyên như vậy, ta cho tương ứng một phân hoạch $(m, n, 1^p)$, và đặt $I_{m,n,p} := I_\lambda$.

Dùng thuật toán Littlewood-Richardson, để tính các hệ số Littlewood-Richardson, chúng ta sẽ mô tả tường minh khai triển của tích ten xơ hai đối mô đun đơn của E_R. Ta dễ dàng có:

$$I_{m,n,p} \otimes I_{1,0,0} \cong \begin{cases} I_{m+1,n,p} + I_{m,n+1,p} + I_{m,n,p+1} & \text{nếu} \quad m > n, \\ I_{m+1,n,p} + I_{m,n,p+1} & \text{nếu} \quad m = n, \end{cases} \tag{2.3}$$

$$I_{m,m,1} \otimes I_{n,0,0} \cong I_{m+n,m,1} + I_{m+n-1,m,2} \quad m, n \geq 1, \tag{2.4}$$

$$I_{m,n,p} \otimes I_{1,1,k} \cong \begin{cases} I_{m+1,n+1,p+k} + I_{m+1,n,p+k+1} & \\ +I_{m,n+1,p+k+1} + I_{m,n,p+k+2} & \text{nếu} \quad m > n, \\ I_{m+1,m+1,p+k} + I_{m+1,m,p+k+1} & \\ +I_{m,m,p+k+2} & \text{nếu} \quad m = n. \end{cases} \tag{2.5}$$

Do đó, ta tính được chiều của các đối mô đun tương ứng với phân hoạch, theo các thành phần của của chuỗi $P_S(t)$. Ký hiệu

$$(m)_u := \frac{u^m - u^{-m}}{u - u^{-1}} \in \mathbb{Z} \text{ với mọi } m.$$

Ta thấy, vì u là số thực dương nên $(m)_u = (n)_u$ nếu và chỉ nếu $m = n$.

Từ công thức của $P_S(t)$, ta có

$$\dim I_{m,0,0} = \dim S_n = (m)_u + (m+1)_u.$$

Với $n \geq 1$, theo phương trình (1.11), ta có:

$$\begin{aligned} \dim I_{m,n,p} &= ((2)_u + 2) S_{(m-1,n-1)}(u, u^{-1}) S_{(p)}(1) \\ &= ((2)_u + 2)(m - n + 1)_u. \end{aligned} \tag{2.6}$$

2.3 Phân tích tích ten xơ với các đối ngẫu của các E_R-đối mô đun đơn

Ta biết rằng với mỗi bộ (m, n, p) tương ứng với phân hoạch $(m, n, 1^p)$, thì $I_{m,n,p}$ là E_R-đối mô đun đơn và đồng thời cũng là H_R-đối mô đun đơn. Trong mục này, chúng tôi đưa ra một số công thức nhân ten xơ của các đối mô đun trên E_R với V^*.

Bổ đề 2.3.1 *Với mỗi bộ (m, n, p) mà $m \geq n \geq 2, p \geq 1$, ta có các đẳng cấu sau:*

$$I_{m,n,p} \otimes {I_{1,0,0}}^* \cong \left[\begin{array}{ll} I_{m-1,n,p} + I_{m,n-1,p} + I_{m,n,p-1} & \text{nếu} \quad m > n, \\ I_{m,n-1,p} + I_{m,n,p-1} & \text{nếu} \quad m = n. \end{array} \right. \tag{2.7}$$

Chứng minh. Dùng các đẳng cấu (1.6) và (1.7) và công thức (1.4), ta có

$$\mathrm{Hom}(I_{m,n,p} \otimes {I_{1,0,0}}^*, I_{m,n-1,p}) \cong \mathrm{Hom}(I_{m,n,p}, I_{m,n-1,p} \otimes I_{1,0,0}) = k,$$

suy ra $I_{m,n,p} \otimes {I_{1,0,0}}^*$ chứa một bản sao của $I_{m,n-1,p}$. Tương tự, nó cũng chứa một bản sao của mỗi đối mô đun bên vế phải. Bằng cách tính chiều của các đối mô đun này, suy ra vế trái không chứa bất kỳ đối mô đun nào khác với các đối mô đun này, và các đối mô đun của (2.7) là đơn.

Dùng lập luận tương tự, từ (2.4) ta cũng có

$$I_{m,m,1} \otimes {I_{n,0,0}}^* \cong I_{m,m-n,1} + I_{m,m-n+1,0}, \quad m > n \geq 1. \tag{2.8}$$

Xét phức K_1 sau đây:

$$K_1 : 0 \to I_{1,0,0} \xrightarrow{d_{1,0}} I_{1,1,0} \otimes {I_{1,0,0}}^* \ldots I_{1,1,k-2} \otimes {I_{k-1,0,0}}^* \xrightarrow{d_{k,k-1}} I_{1,1,k-1} \otimes {I_{k,0,0}}^* \ldots$$

Ta thu được kết quả sau.

Bổ đề 2.3.2 *Phức Koszul K_1 có đồng điều khác không tại $\Lambda_2 \otimes S_1^*$.*

Chứng minh. Nhân ten xơ $I_{3,3,1}$ với tất cả các thành phần của phức K_1. Ta có $I_{3,3,1} \otimes I_{1,0,0} = I_{4,3,1} + I_{3,3,2}$, và theo các phương trình (2.7), (2.8), suy ra

$$\begin{aligned} I_{3,3,1} \otimes I_{1,1,0} \otimes {I_{1,0,0}}^* &= I_{1,1,0} \otimes (I_{3,3,0} + I_{3,2,1}) \\ &= I_{4,4,0} + 2I_{4,3,1} + 2I_{3,3,2} + I_{4,2,2} + I_{3,2,3}, \\ I_{3,3,1} \otimes I_{1,1,1} \otimes {I_{2,0,0}}^* &= I_{1,1,1} \otimes (I_{3,1,1} + I_{3,2,0}) \\ &= 2I_{4,2,2} + I_{4,1,3} + 2I_{3,2,3} + I_{3,1,4} + I_{4,3,1} + I_{3,3,2}. \end{aligned}$$

Ta thấy $I_{4,4,0}$ là một đối mô đun con của $I_{3,3,1} \otimes I_{1,1,0} \otimes {I_{1,0,0}}^*$, và $I_{4,4,0}$ không là đối mô đun con của $I_{3,3,1} \otimes I_{1,1,1} \otimes {I_{2,0,0}}^*$, do đó $I_{4,4,0}$ là một đối mô đun con của $I_{3,3,1} \otimes \mathrm{Ker} d_{2,1}$. Vì vậy $\mathrm{Ker} d_{2,1} \neq \mathrm{Im} d_{1,0}$. $\square$

2.4 Tích phân và các đối mô đun chẻ

Một tích phân phải trên đại số Hopf H là một đồng cấu H-đối mô đun $H \longrightarrow k$, với H đối tác động trên chính nó bởi đối tích và đối tác động của k là đối đơn vị. Tích phân trái được định nghĩa một cách tương tự.

Một hệ quả trực tiếp của Bổ đề 2.3.2 là hạng lượng tử của đối xứng Hecke với song hạng $(2,1)$ là $-[-1]_q = q^{-1}$, do đó, theo [14, Thm.3.2], tồn tại một tích phân trái trên H_R, và tích phân trái này cũng là tích phân phải trên H_R. Không gian của các tích phân trái và tích phân phải trên H_R là trùng nhau.

Bổ đề sau đây suy ra trực tiếp từ [13, Theorem 3.1] và [14, Proposition 5.1]

Bổ đề 2.4.1 *Cho R là một đối xứng Hecke với song hạng $(2,1)$. Khi đó với bất kỳ một phân hoạch $\lambda = (m, n, 1^p) \in \Gamma_{2,1}$, ta có đối mô đun tương ứng với phân hoạch này là I_λ. Đối mô đun đơn I_λ là chẻ nếu và chỉ nếu $n \geq 1$. Với mọi $n \geq 2$, $\Lambda_n = I_{1,1,n-2}$ là đối mô đun chẻ. $S_n = I_{n,0,0}$ không là đối mô đun chẻ với mọi n, và $k =: I_{0,0,0}$ là không chẻ.*

Tiếp theo, chúng tôi sẽ đưa ra một điều kiện kiểm tra tính chẻ của các đối mô đun đơn trên H_R.

Bổ đề 2.4.2 *Cho H_R là một đại số Hopf với cấu trúc đối tựa tam giác, trên H_R tồn tại tích một phân trái và cũng là tích phân phải. Cho M là một đối mô đun nội xạ và xạ ảnh, với $\mathrm{End}(M) \cong k$. Thì M là đối mô đun chẻ.*

Chứng minh. Cho S là đế của M (đế của M là tổng của tất cả các đối mô đun con đơn của M). Vì M là không phân tích được, nên M là bao nội xạ của S và S là đơn. Theo Định lý 2.3 trong [13], thì $\mathrm{Hom}(M, S^\bullet) \neq 0$. (Xem các khái niệm trong [13]). Mặt khác, vì tích phân trái và tích phân phải trên H_R là trùng nhau, nên phần tử "đặc trưng" trong H_R là 1, và vì H_R là CQT, nên $S \cong S^{**}$. Do đó $S \cong S^\bullet$. Vì vậy $\mathrm{Hom}(M, S) \neq 0$. Nếu $S \neq M$, suy ra $\mathrm{dimEnd}(M) \geq 2$, mâu thuẫn, do đó $S = M$. Vì vậy M là đối mô đun chẻ. $\square$

Hệ quả 2.4.3 *Các đối mô đun* $\mathrm{Im}d_{k,l}$ *là đơn, với mọi cặp* (k, l) *thỏa mãn* $l, k \geq 0$, $k - l \neq 1$.

Chứng minh. Với $k = 0$, ta có $\mathrm{Im}d_{0,l} = {S_k}^*$ là đơn. Cho $k \geq 1$, theo (1.6) và (1.7), ta có $\mathrm{dimEnd}(\Lambda_{k+1} \otimes {S_{l+1}}^*) = \mathrm{dimEnd}(\Lambda_{k+1} \otimes S_{l+1}) = 2$. Mặt khác vì Λ_{k+1} với $k \geq 1$ là các đối mô đun chẻ, nên nó là nội xạ và xạ ảnh, vì vậy $\Lambda_{k+1} \otimes {S_{l+1}}^*$ cũng là nội xạ và xạ ảnh. Mà $\mathrm{Im}d_{k,l}$ là thành phần trực tiếp của $\Lambda_{k+1} \otimes {S_{l+1}}^*$ với $k - l \neq 1$, do đó $\mathrm{dimEnd}(Imd_{k-1,l-1}) = \mathrm{dimEnd}(\mathrm{Im}\partial_{k,l}) = 1$. Theo Bổ đề 2.4.2, $\mathrm{Im}d_{k,l}$ là đối mô đun đơn. $\square$

Tiếp theo, chúng ta xây dựng một lớp các đối mô đun đơn của H_R và tính chiều của các đối mô đun này.

Với mỗi $l, k \geq 0$, ký hiệu

$$I_{1,-l,k} := \left[\begin{array}{ll} \mathrm{Im}d_{k+1,l} & \text{nếu } l > k \geq 0, \\ \mathrm{Im}d_{k+2,l+1} & \text{nếu } k > l \geq 0. \end{array} \right. \tag{2.9}$$

Theo (2.1), ta có các đẳng cấu sau:

$$\begin{array}{rcll} I_{1,0,0} \otimes I_{l,0,0}{}^* & \cong & I_{l-1,0,0}{}^* + I_{1,-l,0} & l > k = 0, \\ I_{1,1,k-1} \otimes I_{l,0,0}{}^* & \cong & I_{1,1-l,k-1} \oplus I_{1,-l,k} & l > k \geq 1, \\ I_{1,1,k} \otimes I_{1,0,0}{}^* & \cong & I^*_{1,1,k-1} \oplus I_{1,0,k} & k \geq 1, \\ I_{1,1,k} \otimes I_{l+1,0,0}{}^* & \cong & I_{1,-l,k} \oplus I_{1,1-l,k-1} & k > l \geq 1. \end{array} \tag{2.10}$$

Theo Hệ quả 2.4.3, $I_{1,-l,k}$ là các đối mô đun chẻ với mọi $k \neq l \geq 0$.

Với mọi $l > k \geq 1$, ta có

$$\dim I_{1,-l,k} = ((2)_u + 2)(l+1)_u. \tag{2.11}$$

Thật vậy, với $k = 1$, theo phương trình (2.10), ta có

$$\begin{aligned} \dim I_{1,-l,1} &= \dim I_{1,0,0} \cdot \dim I_{0,-l,0} - \dim I_{0,-l+1,0} \\ &= ((2)_u + 2)(l+1)_u. \end{aligned}$$

Với $k \geq 2$, dùng qui nạp ta có

$$\begin{aligned} \dim I_{1,-l,k} &= \dim I_{1,1,k-1} \dot{\dim} I_{0,-l,0} - \dim I_{1,-l+1,k-1} \\ &= ((2)_u + 2)((l)_u + (l+1)_u - (A+2)(l)_u \\ &= ((2)_u + 2)(l+1)_u. \end{aligned}$$

Tương tự, với $k > l \geq 1$, ta có

$$\dim I_{1,-l,k} = ((2)_u + 2)(l+2)_u. \tag{2.12}$$

2.5 Đồng điều của phức Koszul K_1

Mục đích tiếp theo của chúng tôi là xây dựng các đối mô đun đơn còn lại của H_R. Công cụ chính mà chúng tôi sử dụng ở đây là phức Koszul K.

Trong trường hợp này các phức Koszul K có dạng sau:

$$K_a : (a \geq 2) : 0 \to I_{1,1,a-2} \overset{d_{a,0}}{\to} I_{1,1,a-1} \otimes {I_{1,0,0}}^* \overset{d_{a+1,1}}{\to} I_{1,1,a} \otimes {I_{2,0,0}}^* \to \ldots$$
$$K_a : (a \leq 0) : 0 \to {I_{-a,0,0}}^* \overset{d_{0,a}}{\to} I_{1,0,0} \otimes {I_{1-a,0,0}}^* \overset{d_{1,1+a}}{\to} I_{1,1,0} \otimes {I_{2-a,0,0}}^* \to \ldots$$

Các toán tử vi phân $\partial_k := \partial_{k,k-1}$ cũng tạo nên một phức (K_a, ∂_k) như sau:

$$0 \longleftarrow I_{1,1,a-2} \overset{\partial_{a,0}}{\longleftarrow} I_{1,1,a-1} \otimes {I_{1,0,0}}^* \overset{\partial_{a+1,1}}{\longleftarrow} I_{1,1,a} \otimes {I_{2,0,0}}^* \overset{\partial_{a+2,2}}{\longleftarrow} I_{1,1,a+1} \otimes {I_{3,0,0}}^* \longleftarrow \cdots$$

Để cho thuận tiện, chúng tôi ký hiệu dấu $\cong$ bởi dấu $=$. Ta thu được một số kết quả sau đây.

Định lý 2.5.1 *Cho R là một đối xứng Hecke có song hạng $(2,1)$, thì nhóm đồng điều của phức liên kết K_1 tại $\Lambda_2 \otimes S_1^*$ có chiều 1 trên k. Ký hiệu đối mô đun này là $I_{1,1,-1}$, và cho bất kỳ một đối mô đun đơn $I_{m,n,p}$ với $m \geq n \geq 1, p \geq 1$, ta có*

$$I_{m,n,p} \otimes I_{1,1,-1} = I_{m+1,n+1,p-1}. \tag{2.13}$$

Chứng minh. Vì $I_{1,0,0}$ là đối mô đun đơn, nên $d_1 \neq 0$ và là đơn ánh. Tương tự, vì $\partial_1 \neq 0$, nên nó là toàn ánh. Vì $\mathrm{Im} d_1 \partial_1 = I_{1,0,0}$, nên $d_1 \partial_1 \neq 0$. Mặt khác, theo Bổ đề 2.3.2, phức K_1 là không khớp, nên $q \partial_1 d_2 + d_1 \partial_1 = 0$, và $\mathrm{Ker} d_2 \subset \mathrm{Ker} \partial_1$. Vì vậy, ta có dãy bao hàm thức sau:

$$0 \subseteq I_{1,0,0} \cong \mathrm{Im} d_1 \subseteq \mathrm{Ker} d_2 \subseteq \mathrm{Ker} \partial_1 \subseteq I_{1,1,0} \otimes {I_{1,0,0}}^* =: X. \tag{2.14}$$

Ta sẽ chứng minh các đối mô đun trong dãy trên là thực sự khác nhau. Vì $X/\mathrm{Ker}\partial_1 = I_{1,0,0}$ và vì $I_{1,0,0}$ không là đối mô đun con của $I_{1,1,1} \otimes {I_{2,0,0}}^*$, nên $\mathrm{Ker} d_2$ là một đối mô đun con thực sự của $\mathrm{Ker}\partial_1$. Vì ∂_1 là toàn ánh, nên ta có $X/\mathrm{Ker}\partial_1 \cong Im\partial_1 = I_{1,0,0}$, do đó $X \neq \mathrm{Ker}\partial_1$. Mặt khác, theo Bổ đề 2.3.2, $\mathrm{Im}d_1 \neq \mathrm{Ker}d_2$. Đặt $I_{1,1,-1} := \mathrm{Ker}d_2/\mathrm{Im}d_1$. Ta sẽ chứng minh đối mô đun này có chiều 1 trên k. Theo Bổ đề 2.3.2, ta có

$$I_{3,3,1} \otimes (\mathrm{Ker}\partial_1/\mathrm{Im}d_1) \cong I_{4,2,2} + I_{3,2,3} + I_{4,4,0}, \tag{2.15}$$

và $I_{1,1,-1} \otimes I_{3,3,1}$ chứa một đối mô đun đẳng cấu với $I_{4,4,0}$. Giả sử $\dim I_{1,1,-1} \geq 2$, khi đó $(\mathrm{Ker}d_2/\mathrm{Im}d_1) \otimes I_{3,3,1}$ sẽ chứa một đối mô đun khác $I_{4,4,0}$. Vì vậy

$$I_{3,3,1} \otimes (\mathrm{Ker}\partial_1/\mathrm{Ker}d_2) = \left[\begin{array}{l} I_{3,2,3} \\ I_{4,2,2}. \end{array}\right. \overset{(2.6)}{\Longrightarrow} \dim(\mathrm{Ker}\partial_1/\mathrm{Ker}d_2) = \left[\begin{array}{l} (2)_u \\ (3)_u. \end{array}\right. \tag{2.16}$$

Nhân ten xơ mọi thành phần của phức K_1 với ${I_{1,0,0}}^*$, ta có

$$I_{1,1,0} \otimes {I_{1,0,0}}^* \otimes {I_{1,0,0}}^* = I_{1,1,0} \otimes (I_{1,1,0} + I_{2,0,0})^*.$$

Theo phương trình (2.10): ${I_{2,0,0}}^* \otimes I_{1,1,0} = I_{1,-1,0} + I_{1,-2,1}$, với $I_{1,-2,1}$ là đối mô đun đơn có chiều là $((2)_u + 2)(3)_u$. Do đó $I_{1,-2,1}$ sẽ đẳng cấu với một thương con của ${I_{1,0,0}}^* \otimes (\mathrm{Ker}\partial_1/\mathrm{Ker}d_2)$ hoặc của ${I_{1,0,0}}^* \otimes (\mathrm{Ker}d_2/\mathrm{Im}d_1)$.

Nếu $I_{1,-2,1}$ đẳng cấu với đối mô đun con của của $I_{0,-1,1} \otimes (\mathrm{Ker}\partial_1/\mathrm{Ker}d_2)$ thì

$$\dim I_{1,-2,1} \leq \max\{((2)_u + 1)(2)_u, ((2)_u + 1)(3)_u\} < ((2)_u + 2)(3)_u, \text{ vô lý.}$$

Nếu $I_{1,-2,1}$ đẳng cấu với đối mô đun con của ${I_{1,0,0}}^* \otimes (\mathrm{Ker}d_2/\mathrm{Im}d_1)$ thì

$$\dim I_{1,-1,2} \leq \max\{((2)_u + 1)^2, ((2)_u + 1){(2)_u}^2\}. \tag{2.17}$$

Dễ thấy (2.17) không thể xảy ra nếu $(2)_u \geq 3$. Nếu $(2)_u = 2$ tức là $q = 1$. Khi đó $\dim I_{1,-2,1} = 12$, do đó $\dim I_{1,1,-1} = 4, \dim \mathrm{Ker}\partial_1/\mathrm{Ker}d_2 = 2$ và

$I_{1,1,-1} \otimes {I_{1,0,0}}^* \cong I_{1,-2,1}$ là đối mô đun đơn. Theo phương trình (2.7) và (2.10), ta có

$$\begin{aligned} I_{1,0,0} \otimes I_{1,1,0} \otimes {I_{1,0,0}}^* &= (I_{1,1,1} + I_{2,1,0}) \otimes {I_{1,0,0}}^* \\ &= I_{1,1,0} + I_{1,0,1} + I_{2,1,0} \otimes {I_{1,0,0}}^*. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Ta có $\dim I_{1,0,1} = 8$, $\dim I_{1,0,0} \otimes (\mathrm{Ker}\partial_1/\mathrm{Im}d_1) = 6$. Vậy $I_{1,0,1}$ chứa một đối mô đun con của $I_{1,0,0} \otimes I_{1,1,-1}$. Vì $I_{1,0,1}$ là đối mô đun chẻ, nên $I_{1,1,-1} \otimes I_{1,0,0} = I_{1,0,1} \oplus N$, $N \neq 0$. Do đó $\dim\mathrm{End}(I_{1,1,-1} \otimes I_{1,0,0}) \geq 2$, mâu thuẫn với

$$\dim\mathrm{End}(I_{1,1,-1} \otimes I_{1,0,0}) = \dim\mathrm{End}(I_{1,1,-1} \otimes {I_{1,0,0}}^*) = \dim\mathrm{End}(I_{1,-2,1}) = 1.$$

Vì vậy cả hai trường hợp trong (2.16) không thể xảy ra, nên $\dim I_{1,1,-1} = 1$.

Nhân ten xơ $I_{m,n,p} : m \geq n \geq 1, p \geq 1$ với K_1. Theo Bổ đề 2.3.2, dễ dàng thấy $I_{m+1,n+1,p-1} \subset \mathrm{Ker}(d_3 \otimes \mathrm{Id}_{I_{m,n,p}})$ và $I_{m+1,n+1,p-1} \not\subseteq \mathrm{Im}(d_1 \otimes \mathrm{Id})$, mà $\dim I_{1,1,-1} = 1$, vì vậy $I_{m,n,p} \otimes I_{1,1,-1} \cong I_{m+1,n+1,p-1}$. $\square$

Kết quả này sau đó đã được P.H.Hai chứng minh cho trường hợp tổng quát, với R là đối xứng Hecke bất kỳ [16].

Hệ quả 2.5.2 *Đối mô đun thương* $\mathrm{Ker}\partial_1/\mathrm{Ker}d_2$ *đẳng cấu với* $I_{1,-1,1} := I_{2,0,0} \otimes {I_{1,1,-1}}^*$. *Dãy hợp thành của* $K_{2,1} = I_{1,1,0} \otimes I_{1,0,0}$ *bao gồm* $I_{1,1,-1}$, $I_{1,-1,1}$ *và hai bản sao của* $I_{1,0,0}$.

Chứng minh Cho $Y := \mathrm{Ker}\partial_1/\mathrm{Ker}d_2$. Theo phương trình (2.14), Y là một đối mô đun con của $X/\mathrm{Ker}d_2 = \mathrm{Im}d_2$ và $\mathrm{Im}d_2/Y = I_{1,0,0}$. Ngoài ra, vì $\mathrm{Hom}(I_{1,0,0}, \Lambda_3 \otimes {S_2}^*) = 0$, nên $I_{1,0,0}$ không thể là đối mô đun con của $\mathrm{Im}d_2$ (nó là một đối mô đun con của $I_{1,1,1} \otimes {I_{2,0,0}}^*$).

Mặt khác, ta lại có $\mathrm{Hom}(I_{1,1,1} \otimes I_{2,0,0}{}^*, I_{1,-1,1}) \neq 0$ và $\mathrm{Hom}(I_{1,-1,1}, I_{1,1,1} \otimes I_{2,0,0}{}^*) \neq 0$, nên $I_{1,-1,1}$ là đối mô đun con và là đối mô đun thương của $I_{1,1,1} \otimes I_{2,0,0}{}^*$. Ngoài ra, $I_{1,-1,1}$ không là nội xạ, nhưng $I_{1,1,1} \otimes I_{2,0,0}{}^*$ là nội xạ, vì vậy $I_{1,1,1} \otimes I_{2,0,0}{}^*$ chứa hai bản sao của $I_{1,-1,1}$ trong dãy hợp thành. Ta có

$$\begin{aligned} I_{1,-1,1} \otimes I_{3,3,1} &= I_{2,0,0} \otimes I_{1,1,-1}{}^* \otimes I_{3,3,1} = I_{3,2,3} + I_{4,2,2}, && (2.19) \\ Y \otimes I_{3,3,1} &= I_{3,2,3} + I_{4,2,2}, \\ I_{1,1,1} \otimes I_{2,0,0}{}^* \otimes I_{3,3,1} &= (I_{4,4,2} + I_{4,3,3} + I_{3,3,4}) \otimes I_{2,0,0}{}^* && (2.20) \\ &= I_{4,3,1} + 2 \cdot I_{4,2,2} + 2 \cdot I_{3,2,3} + I_{3,3,2} + I_{4,1,3} + I_{3,1,4}. \end{aligned}$$

Nếu $I_{1,-1,1} \neq Y$, từ phương trình (2.19), suy ra $I_{1,1,1} \otimes I_{2,0,0}{}^*$ chứa 3 bản sao của $I_{4,2,2}$, mâu thuẫn với (2.20).□

Định lý 2.5.3 *Cho R là một đối xứng Hecke có song hạng là $(2,1)$. Khi đó nhóm đồng điều của phức Koszul tại $\Lambda_{k+1} \otimes S_k^*$ với $k \geq 2$ triệt tiêu. Ngoài ra, dãy hợp thành của $\Lambda_{k+1} \otimes S_k^* : k \geq 2$ gồm $I_{1,2-k,k-2}$, $I_{1,-k,k}$ và hai bản sao của $I_{1,1-k,k-1}$.*

Chứng minh. Với $k = 2$. Dùng phương trình $d_2\partial_2 + \partial_3 d_3 = 0$, ta có dãy bao hàm thức sau đây:

$$0 \neq \mathrm{Im} d_2 \subseteq \mathrm{Ker} d_3 \subseteq \mathrm{Ker} d_2.\partial_2 \subseteq I_{1,1,1} \otimes I_{2,0,0}{}^*. \qquad (2.21)$$

Trước hết, ta chứng minh $d_2\partial_2 \neq 0$. Giả sử ngược lại $d_2\partial_2 = 0$, khi đó $\mathrm{Im}\partial_2 \subseteq \mathrm{Ker} d_2$. Mặt khác, ta có $\mathrm{Im}\partial_2 d_2 = \mathrm{Im} d_1\partial_1 = I_{1,0,0}$, do đó $\mathrm{Im}\partial_2 \supseteq I_{1,0,0}$. Vì $\mathrm{Hom}(I_{1,1,1} \otimes I_{2,0,0}, I_{1,0,0}) = 0$, nên $\mathrm{Im}\partial_2 \neq I_{1,0,0}$. Vì $\mathrm{Ker} d_2 / I_{1,0,0} = I_{1,1,-1}$, nên $\mathrm{Im}\partial_2 = \mathrm{Ker} d_2$, tức là $\mathrm{Im}\partial_2$ chứa $I_{1,1,-1}$ trong dãy hợp thành của nó, mâu thuẫn với Im∂_2 là một đối mô đun thương của $I_{1,1,1} \otimes {I_{2,0,0}}^*$ và $I_{1,1,1} \otimes {I_{2,0,0}}^*$ không chứa $I_{1,1,-1}$ trong dãy hợp thành của nó. Vì vậy ta có $d_2\partial_2 \neq 0$.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh Im$d_2\partial_2 = I_{1,-1,1}$. Thật vậy, ta có Im$d_2\partial_2 \subseteq$ Imd_2. Hơn nữa, từ dãy (2.21) và phân tích trong (2.19) và (2.20), ta thấy Im$d_2\partial_2 \neq$ Imd_2, nếu không, $I_{1,1,1} \otimes {I_{2,0,0}}^*$ chứa hai bản sao của $I_{4,3,1}$ và của $I_{3,3,2}$. Vì vậy Im$d_2\partial_2$ là một đối mô đun con khác 0 thực sự của Imd_2, nên nó phải bằng $I_{1,-1,1}$.

Theo (2.21), ta có $I_{1,-1,1} =$ Im$d_2\partial_2$ là đối mô đun thương của Imd_3. Vì $I_{1,-1,1}$ không là đối mô đun con của $K^{4,3} = I_{1,1,2} \otimes {I_{3,0,0}}^*$, Im$d_3$ là đối mô đun con của $K^{4,3}$, nên các đối mô đun này không đẳng cấu với nhau. Vì vậy Ker$d_3 \neq$ Ker$d_2\partial_2$.

Theo các phương trình (2.19) và (2.20), ta có

$$(\mathrm{Ker}d_3/\mathrm{Im}d_2) \otimes I_{3,3,1} + (\mathrm{Ker}d_2\partial_2/\mathrm{Ker}d_3) \otimes I_{3,3,1} \cong I_{4,1,3} + I_{3,1,4}.$$

Giả sử Im$d_2 \neq$ Kerd_3, khi đó

$$I_{3,3,1} \otimes (\mathrm{Ker}d_2\partial_2/\mathrm{Ker}d_3) = \left[\begin{array}{l} I_{4,1,3} \\ I_{3,1,4} \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \dim(\mathrm{Ker}d_2\partial_2/\mathrm{Ker}d_3) = \left[\begin{array}{l} (4)_u \\ (3)_u \end{array}\right. .$$

Vì vậy dãy hợp thành của $K_{3,2}$ chứa các đối mô đun với chiều $(1)_u + (2)_u, (2)_u + (3)_u, (3)_u, (4)_u$. Mặt khác, ta có

$$I_{1,1,1} \otimes {I_{2,0,0}}^* \otimes I_{1,0,0}^* = I_{1,1,1} \otimes {I_{3,0,0}}^* + I_{1,1,1} \otimes I_{2,1,0}^*.$$

Theo phương trình (2.10), ta có $I_{1,1,1} \otimes {I_{3,0,0}}^*$ chứa $I_{1,-3,2}$. Ta có dim$I_{1,-3,2} = ((2)_u + 2)(4)_u$ và dim$I_{1,0,0} = (1)_u + (2)_u$. So sánh chiều của các đối mô đun này, suy ra mâu thuẫn. Do đó $\mathrm{Im}d_2 = \mathrm{Ker}d_3$. Vì vậy phức là khớp tại thành phần $K_{3,2}$.

Theo lý luận ở phần trên, ta có $\mathrm{Im}d_3/I_{1,-1,1} = I_{1,0,0}$. Để tìm $\mathrm{Ker}d_2\partial_2/\mathrm{Ker}d_3$, ta sẽ tìm dãy hợp thành của $K_{3,2}$. Trước hết

$$\mathrm{Ker}d_2\partial_2/\mathrm{Ker}d_3 \otimes I_{3,3,1} = I_{4,1,3} + I_{3,1,4}.$$

Ta có một phương trình tương tự cho $I_{1,-2,2}$, và nó được chứa trong $K_{4,3}$. Dùng phương pháp chứng minh của Hệ quả 2.5.2, suy ra $\mathrm{Ker}d_2\partial_2/\mathrm{Ker}d_3 \cong I_{1,-2,2}$. Vì vậy dãy hợp thành của $K_{3,2}$ chứa $I_{1,0,0}$, hai bản sao của $I_{1,-1,1}$, và $I_{1,-2,-2}$.

Tương tự với phương pháp ở trên, ta chứng minh tính khớp của phức tại bất kỳ thành phần $K_{k+1,k}$: $k \geq 3$ nào, và tìm được dãy hợp thành của $K_{k+1,k}$.$\square$

2.6 Phân loại các đối mô đun đơn

Với mỗi bộ các số nguyên $(m, n, p) : m \geq n$, ta sẽ xây dựng một H_R- đối mô đun đơn, ký hiệu là $I_{m,n,p}$. Ngoài ra, ta còn đưa ra điều kiện về tính chẻ của các đối mô đun đơn và tính chiều của chúng. Chúng tôi sẽ chứng minh tập các đối mô đun đơn này là tất cả các đối mô đun đơn trên H_R, sai khác một đẳng cấu.

Trong mục trước, chúng ta xây dựng được lớp đối mô đun đơn, ứng với các phân hoạch (tức là thỏa mãn điều kiện trong (2.2)), lớp đối mô đun đơn ứng với các bộ $(1, -l, k); l \neq k \geq 0$ (xem (2.9)), và bộ $(1, 1, -1)$. Vì

$I_{1,1,-1}$ là khả nghịch, và với các bộ thỏa mãn $m \geq n \geq 1, p \geq 1$, ta có $I_{m,n,p} \otimes I_{1,1,-1} = I_{m+1,n+1,p-1}$. Để định nghĩa các đối mô đun khác, trước hết ta đặt

$$I_{m,n,p} := I_{m+p,n+p,0} \otimes I_{1,1,-1}{}^{*\otimes p}.$$

Vấn đề còn lại là xây các đối mô đun đơn ứng với các bộ số nguyên $(m, n, 0)$ mà $m \geq n$.

Với $m \geq n \geq 0$, $I_{m,n,0}$ đã được xây dựng.

Với $0 > m \geq n$, đặt $I_{m,n,0} := I_{-n,-m,0}{}^*$.

Với $m > 0 > n$, đặt $I_{m,n,0} := I_{1,n-m+1,m-1} \otimes I_{1,1,-1}^{\otimes m-1}$.

Các đối mô đun ở trên là đơn. Vì $\dim I_{1,1,-1} = 1$, nên dễ dàng có các công thức sau:

$$\dim I_{k,l,0} = \begin{cases} ((2)_u + 2)(k - l + 1)_u, & \text{nếu } k \geq l \geq 1, \\ (k)_u + (k+1)_u, & \text{nếu } k > l = 0, \\ ((2)_u + 2)(k - l_u, & \text{nếu } k > 0 > l. \end{cases} \tag{2.22}$$

Mệnh đề 2.6.1 *H_R-đối mô đun đơn $I_{m,n,p}$ là chẻ nếu và chỉ nếu $(m + p)(n + p) \neq 0$.*

Chứng minh. Vì $I_{m,n,p} = I_{m+p,n+p,0} \otimes I_{1,1,-1}{}^{*\otimes p}$, nên $I_{m,n,p}$ là chẻ ra nếu và chỉ nếu $I_{m+p,n+p,0}$ là chẻ ra. Nên nếu $m + p = 0$, thì $n + p \leq 0$ và $I_{m+p,n+p,0} = S_{-(n+p)}{}^*$ là không chẻ. Tương tự, nếu $n + p = 0$, thì $I_{m+p,n+p,0} = S_{m+p}$ là không chẻ.

Nếu $m + p \geq n + p > 0$ (tương ứng $0 > m + p \geq n + p$), theo Bổ đề 2.4.1, $I_{m+p,n+p,0}$ (tương ứng $I_{-(n+p),-(m+p),0}$) là chẻ ra.

Nếu $m+p>0>n+p$, thì $I_{m+p,n+p,0} = I_{1,n-m+1,m+p-1} \otimes {I_{1,1,-1}}^{*\otimes m+p-1}$ là chẻ do Bổ đề 2.4.2. □

Bổ đề 2.6.2 *Cho $(m,n,p),(x,y,z)$ là các bộ tương ứng với các phân hoạch. Khi đó $I_{m,n,p} \otimes I_{1,1,-1}^{\otimes t} \cong I_{x,y,z}$ nếu và chỉ nếu $m+t=x, n+t=y, z+t=p$.*

Chứng minh. Giả sử tồn tại $t \geq 0$, sao cho

$$I_{m,n,p} \otimes {I_{1,1,-1}}^{\otimes t} \cong I_{x,y,z}. \tag{2.23}$$

Ta luôn có thể giả sử $p=z=0$.

Xét trường hợp $x>y$, theo phương trình (2.5), ta có

$$I_{x,y,0} \otimes I_{1,1,t+1} = I_{x+1,y+1,t+1} + I_{x+1,y,t+2} + I_{x,y+1,t+2} + I_{x,y,t+3}.$$

Ta có phương trình tương tự cho $I_{m,n,0} \otimes I_{1,1,t+1}$. Vì vậy (2.23) tương đương với

$$\begin{aligned} & I_{m+t+1,n+t+1,1} + I_{m+t+1,n+t,2} + I_{m+t,n+t+1,2} + I_{m+t,n+t,3} \\ & \quad = I_{x+1,y+1,t+1} + I_{x+1,y,t+2} + I_{x,y+1,t+2} + I_{x,y,t+3}. \end{aligned}$$

Bằng cách so sánh số chiều, ta có

$$I_{m+t+1,n+t+1,1} \cong I_{x+1,y+1,t+1}, \tag{2.24}$$

suy ra $t=0$.

Trường hợp $m=n$, được chứng minh hoàn toàn tương tự. □

Định lý 2.6.3 *Cho các bộ số $(m,n,p),(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3$, với $m \geq n, x \geq y$. Nếu $(m,n,p) \neq (x,y,z)$, thì các đối mô đun đơn $I_{m,n,p}, I_{x,y,z}$ là không đẳng cấu với nhau.*

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh rằng nếu $I_{m,n,0} \otimes I_{1,1,-1}{}^{\otimes t} = I_{x,y,0}$ suy ra $m = x, n = y, t = 0$.

• **Trường hợp I.** $m \geq n \geq 0$.

(a) Nếu $x \geq y \geq 0$, thì khẳng định trên là đúng do Bổ đề 2.6.2.

(b) Nếu $0 > x \geq y$, thì $I_{x,y,0} = I_{-y,-x,0}{}^*$ và vì $I_{m,n,0} \otimes I_{-y,-x,0}$ phân tích thành tổng trực tiếp của các đối mô đun đơn, và không có đối mô đun đơn nào trong số đó đẳng cấu với $I_{1,1,-1}{}^{\otimes t}$, với chiều của nó là lớn hơn 1. Ta có

$$\mathrm{Hom}(I_{m,n,0} \otimes I_{-y,-x,0}, I_{1,1,-1}{}^{\otimes t}) = 0, \text{ nghĩa là } I_{m,n,0} \neq I_{x,y,0}.$$

(c) Nếu $x > 0 > y$, ta chứng minh $I_{m,n,0} \otimes I_{1,1,-1}^{\otimes t} \neq I_{x,y,0}$. Giả sử ngược lại, bằng cách so sánh chiều, ta có $m - n + 1 = x - y$. Vì $I_{x,y,0} = I_{1,y-x+1,x-1} \otimes I_{1,1,-1}^{\otimes(x-1)}$, nên theo (2.10), ta có

$$\mathrm{Hom}(I_{m,n,0} \otimes I_{1,1,-1}^{\otimes s}, \Lambda_{-y}{}^* \otimes S_{x-y-1}) \neq 0$$

với $s = t - x - 1$ hoặc tương đương

$$\mathrm{Hom}(\Lambda_{-y} \otimes I_{m,n,0} \otimes I_{1,1,-1}{}^{\otimes s}, S_{m-n}) \neq 0.$$

Theo Bổ đề 2.6.2, trường hợp này không thể xảy ra.

• **Trường hợp II.** $m > 0 > n$. Có hai khả năng cho x, y: $x > 0 > y$ và $0 \geq x \geq y$.

Nếu $0 \geq x \geq y$, ta chứng minh tương tự như trong trường hợp I là: $I_{m,n,0} \otimes I_{1,1,-1}{}^{\otimes t} \neq I_{x,y,0}$ với bất kỳ t.

Nếu $x > 0 > y$, từ giả thiết suy ra $m + n = x + y$. Vì $I_{1,-l,k}$ là một thành phần trực tiếp của $\Lambda_k \otimes S_l{}^*$, nên với $s = t + m - x$, ta có

$$\mathrm{Hom}(\Lambda_{m+1} \otimes S_{-n}{}^* \otimes I_{1,1,-1}^{\otimes s}, \Lambda_{x+1} \otimes S_{-y}{}^*) \neq 0.$$

Khi đó theo các phương trình (1.6) và (1.7), ta có

$$\begin{aligned} 0 &\neq \mathrm{Hom}^H(S_{-n}{}^* \otimes \Lambda_m \otimes I_{1,1,-1}^{\otimes s}, \mathrm{sym}_{-y}{}^* \otimes \Lambda_x) \\ &= \mathrm{Hom}^H(S_{-y} \otimes \Lambda_m \otimes I_{1,1,-1}^{\otimes s}, S_{-n} \otimes \Lambda_x.) \end{aligned}$$

Bằng cách so sánh chiều, và dùng Bổ đề 2.6.2, suy ra $s = 0$ và $m = x, n = y$.

- **Trường hợp III.** $0 \geq m \geq n$. Có duy nhất một khả năng cho x, y: $0 \geq x \geq y$. Trường hợp này được chứng minh tương tự như trường hợp I(a).

Hệ quả 2.6.4 *Luật đối ngẫu sau là đúng.*

$$I_{m,n,p}{}^* = I_{-n,-m,-p}. \tag{2.25}$$

Chứng minh. Ta chỉ phải chứng minh với $m, n > 0$, $I_{m,-n,0}{}^* = I_{n,-m,0}$ hoặc $I_{1,-m-n+1,m-1}{}^* = I_{1,-m-n+1,n-1} \otimes I_{1,1,-1}^{\otimes m+n-2}$. Đặt $k := m-1, l := m+n-1$, do đó ta chứng minh rằng

$$I_{1,-l,k}^* = I_{1,-l,l-k-1} \otimes I_{1,1,-1}{}^{\otimes l-1}.$$

Theo Định lý 2.6.3 và phương trình (2.10), $I_{1,-l,k}$ là đối mô đun duy nhất, là thành phần trực tiếp của $\Lambda_{l-k+1} \otimes S_l{}^*$ và $\Lambda_{l-k+2} \otimes S_{l+1}{}^*$, tuy nhiên nó không là thành phần trực tiếp của $\Lambda_{l-k} \otimes S_{l-1}{}^*$. Vì vậy, bằng cách dùng các đẳng cấu khác nhau, suy ra $I_{1,-l,k}{}^*$ là một đối mô đun con của $\Lambda_{l-k} \otimes S_l{}^* \otimes I_{1,1,-1}{}^{\otimes l-1}$ và $\Lambda_{l-k+1} \otimes S_{l+1}{}^* \otimes I_{1,1,-1}^{\otimes l-1}$. Do đó $I_{1,-l,k}^* = I_{1,-l,l-k-1} \otimes I_{1,1,-1}{}^{\otimes l-1}$.

2.7 Tính đầy đủ

Chúng ta đã xây dựng được một tập hợp các đối mô đun đơn

$$\{I_{m,n,p} : m, n, p \in \mathbb{Z}, m \geq n\}.$$

Tiếp theo, ta sẽ xác định công thức cho tích ten xơ của các đối mô đun đơn này với ${I_{1,0,0}}^*$, từ đó suy ra rằng tập các đối mô đun đơn đã xây dựng chính là tất cả các đối mô đun đơn trên H_R. Trước hết, chúng ta thu được định lý sau:

Bổ đề 2.7.1 • *1. Dãy hợp thành của $I_{m,1,0} \otimes {I_{1,0,0}}^*$: $m \geq 2$ gồm $I_{m-1,1,0}$, $I_{m,1,-1}, I_{m,-1,1}$ và hai bản sao của $I_{m,0,0}$.*

- *2. Với $n \geq 2$, dãy hợp thành của $I_{1,-n,0} \otimes {I_{1,0,0}}^*$ gồm $I_{1,-n-1,0}$, $I_{-1,-n,1}$, $I_{1,-n,-1}$ và hai bản sao của $I_{0,-n,0}$.*

- *3. Với $m \geq 2, n \geq 1$, ta có phân tích ten xơ sau:*

$$I_{m,-n,0} \otimes {I_{1,0,0}}^* = I_{m-1,-n,0} + I_{m,-n-1,0} + I_{m,-n,-1}. \tag{2.26}$$

Chứng minh

1. Ta chứng minh bằng phương pháp qui nạp. Với $m = 2$, dãy hợp thành của $I_{1,1,0} \otimes {I_{1,0,0}}^*$ gồm $I_{1,1,-1}, I_{1,-1,1}$ và hai bản sao của $I_{1,0,0}$. Từ các phương trình

$$\begin{aligned} I_{2,1,0} \otimes {I_{1,0,0}}^* &= I_{1,1,0} \otimes I_{1,0,0} \otimes {I_{1,0,0}}^* - I_{1,1,1} \otimes {I_{1,0,0}}^*, \\ I_{1,1,1} \otimes {I_{1,0,0}}^* &= I_{1,1,0} + I_{1,0,1}, \end{aligned}$$

suy ra $I_{2,1,0} \otimes {I_{1,0,0}}^*$ chứa $I_{1,1,0}, I_{2,1,-1}, I_{2,-1,1}$ và hai bản sao của $I_{2,0,0}$ trong dãy hợp thành của nó.

Với $m \geq 3$, ta có $I_{m-1,0,0} \otimes I_{1,1,0} = I_{m,1,0} + I_{m-1,1,1}$, nên

$$\begin{aligned} I_{m,1,0} \otimes {I_{1,0,0}}^* &= I_{m-1,0,0} \otimes I_{1,1,0} \otimes {I_{1,0,0}}^* - I_{m-1,1,1} \otimes {I_{1,0,0}}^* \\ &= I_{m-1,0,0} \otimes I_{1,1,0} \otimes {I_{1,0,0}}^* - (I_{m-2,1,1} + I_{m-1,0,1} + I_{m-1,1,0}). \end{aligned}$$

Theo giả thiết qui nạp, $I_{m-1,0,0} \otimes I_{1,1,0} \otimes {I_{1,0,0}}^*$ chứa $I_{m,1,-1}, I_{m,-1,1}, I_{m-1,0,1}$, $I_{m-2,1,1}$ và hai bản sao $I_{m,0,0}, I_{m-1,1,0}$ trong dãy hợp thành, vì vậy $I_{m,1,0} \otimes {I_{1,0,0}}^*$ chứa $I_{m-1,1,0}, I_{m,1,-1}, I_{m,-1,1}$ và hai bản sao của $I_{m,0,0}$ trong dãy hợp thành. $\square$

2. Nhân ten xơ cả hai vế của phương trình $I_{1,0,0} \otimes {I_{n,0,0}}^* = {I_{n-1,0,0}}^* + I_{1,-n,0}$ với ${I_{1,0,0}}^*$, ta có

$$\begin{aligned} I_{1,-n,0} \otimes {I_{1,0,0}}^* &= I_{1,0,0} \otimes (I_{n,0,0} \otimes I_{1,0,0})^* - {I_{n-1,0,0}}^* \otimes {I_{1,0,0}}^* \\ &= I_{1,0,0} \otimes {I_{n,1,0}}^* + I_{1,0,0} \otimes {I_{n+1,0,0}}^* - {I_{n,0,0}}^* - {I_{n-1,1,0}}^*. \end{aligned}$$

Theo phần trên, $I_{n,1,0} \otimes {I_{1,0,0}}^*$ chứa $I_{n-1,1,0}, I_{n,1,-1}, I_{n,-1,1}$ và hai bản sao của $I_{n,0,0}$ trong dãy hợp thành, do đó theo phương trình (2.25), dãy hợp thành của ${I_{n,1,0}}^* \otimes I_{1,0,0}$ gồm $I_{-1,1-n,0}, I_{-1,-n,1}, I_{1,-n,-1}$ và hai bản sao của $I_{0,-n,0}$.

Theo phương trình (2.10), ta có $I_{1,0,0} \otimes {I_{n+1,0,0}}^* = I_{0,-n,0} + I_{1,-n-1,0}$. Vì vậy, dãy hợp thành của $I_{1,-n,0} \otimes {I_{1,0,0}}^*$ bao gồm $I_{-1,-n+1,0}$, $I_{-1,-n,1}$, $I_{1,-n,-1}$ và hai bản sao của $I_{0,-n,0}$. $\square$

3. Trước hết chúng ta chứng minh với $k, l \geq 1$, các khẳng định sau là đúng.

$$\operatorname{Hom}(I_{1,-l,k} \otimes {I_{1,0,0}}^*, I_{1,-l-1,k}) \neq 0, \quad \operatorname{Hom}(I_{1,-l-1,k}, I_{1,-l,k} \otimes {I_{1,0,0}}^*) \neq 0. \tag{2.27}$$

Thật vậy, xét sơ đồ sau:

$$\begin{array}{ccc} I_{1,1,k-1} \otimes I_{l,0,0}{}^* \otimes I_{1,0,0}{}^* & \xrightarrow{d_{k+1,l}\otimes \mathrm{Id}} & I_{1,1,k} \otimes I_{l+1,0,0}{}^* \otimes I^*_{1,0,0} \\ {\scriptstyle \mathrm{id}\otimes X_{l+1}{}^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes X_{l+2}{}^*} \\ I_{1,1,k-1} \otimes I^*_{l+1,0,0} & \xrightarrow{d_{k+1,l+1}} & I_{1,1,k+1} \otimes I^*_{l+2,0,0}. \end{array}$$

Dễ thấy các sơ đồ trên là giao hoán. Vì các ánh xạ $\mathrm{id} \otimes X_{l+1}{}^*$ và $\mathrm{id} \otimes X_{l+2}{}^*$ là các toàn cấu, nên ánh xạ cảm sinh $\mathrm{Im}(d_{k+1,l} \otimes \mathrm{Id}) \longrightarrow \mathrm{Im} d_{k+1,l+1}$ là khác không, suy ra điều phải chứng minh thứ nhất trong (2.27) là đúng. Vì $I_{1,-l-1,k}$ là chẻ ra, nên suy ra khẳng định thứ hai trong (2.27).

Dùng (2.27), ta có thể dễ dàng chỉ ra rằng các đối mô đun ở vế bên phải của (2.26) là các đối mô đun con của vế trái của nó. So sánh chiều của vế trái và vế phải, ta có điều phải chứng minh. □

Định lý 2.7.2 *Tập hợp $\{I_{m,n,p} : m \geq n, m, n, p \in \mathbb{Z}\}$ là tất cả các đối mô đun đơn trên H_R.*

Chứng minh. Mỗi H_R-đối mô đun đơn là một thương con của H_R, và $H_R = T(V^* \otimes V)/I$, với $T(V^* \otimes V), I$ là H_R-đối mô đun. Mặt khác $T(V^* \otimes V) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} (V^* \otimes V)^{\otimes i}$, do đó chỉ cần chứng minh bất kỳ đối mô đun đơn nào được chứa trong dãy hợp thành của $(V^* \otimes V)^{\otimes i}$ đều đẳng cấu với một trong các đối mô đun đơn mà ta đã xây dựng.

Vì điều khẳng định tương tự đúng cho $V^{\otimes i}$, nên ta chỉ cần chứng minh dãy hợp thành của $I_{m,n,p} \otimes V^* = I_{m,n,p} \otimes I^*_{1,0,0}$ chỉ chứa các đối mô đun đơn đẳng cấu với các đối mô đun đơn mà ta đã xây dựng.

Với $m \geq n \geq 2$, nhân ten xơ hai vế của phương trình (2.7) với $I_{1,1,-1}$, ta có

$$I_{m,n,0} \otimes {I_{1,0,0}}^* = \left[\begin{array}{ll} I_{m-1,n,0} + I_{m,n-1,0} + I_{m,n,-1} & \text{nếu } m > n, \\ I_{m,m-1,0} + I_{m,m,-1} & \text{nếu} m = n. \end{array} \right.$$

Với $m > n = 1$, theo Bổ đề 2.7.1.(1), dãy hợp thành của $I_{m,1,0} \otimes {I_{1,0,0}}^*$ gồm $I_{m-1,1,0}, I_{m,1,-1}, I_{m,-1,1}$ và hai bản sao của $I_{m,0,0}$.

Với $m = n = 1$, theo Bổ đề 2.7.1.(2), $I_{1,1,0} \otimes {I_{1,0,0}}^*$ chứa $I_{1,1,-1}, I_{1,-1,1}$, và hai bản sao của $I_{1,0,0}$ trong dãy hợp thành của nó.

Với $m > n = 0$, bằng cách lấy đối ngẫu phương trình (2.10), ta có

$$I_{m,0,0} \otimes {I_{1,0,0}}^* = I_{m-1,0,0} + I_{m,-1,0}.$$

Với $m = 1, -1 \geq n$, ta có $I_{1,n,0} \otimes {I_{1,0,0}}^*$ chứa $I_{1,n-1,0}, I_{-1,n,1}$, $I_{1,n,-1}$ và hai bản sao của $I_{0,n,0}$ trong dãy hợp thành.

Với $m \geq 2, -1 \geq n$, theo Bổ đề 2.7.1.(3), ta có

$$I_{m,n,0} \otimes {I_{1,0,0}}^* = I_{m-1,n,0} + I_{m,n-1,0} + I_{m,n,-1}.$$

Với $0 \geq m \geq n$, đối ngẫu phương trình (2.4) ta có

$$I_{m,n,0} \otimes {I_{1,0,0}}^* = \left[\begin{array}{l} I_{m,n-1,0} + I_{m-1,n,0} + I_{m,n,-1} \text{ nếu } m > n, \\ I_{m,m-1,0} + I_{m,m,-1} \text{ nếu } m = n. \end{array} \right.$$

Vì vậy trong mọi trường hợp, dãy hợp thành của $I_{m,n,p} \otimes {I_{1,0,0}}^*$ với $m \geq n; m, n, p \in \mathbb{Z}$ chỉ chứa các đối mô đun đơn đã biết.$\square$

•**Kết luận:** Chúng tôi đã phân loại các biểu diễn bất khả qui của nhóm lượng tử liên kết với đối xứng Hecke có song hạng $(2, 1)$. Các biểu diễn bất khả qui này có thể được đánh số bởi tập các bộ số nguyên có dạng (m, n, p), với $m \geq n$.

Chương 3

Phức Koszul kép và xây dựng các biểu diễn bất khả qui của siêu nhóm tuyến tính $GL(3|1)$

Mục đích tiếp theo của chúng tôi là tìm cách xây dựng tất cả các biểu diễn bất khả qui cho nhóm lượng tử với song hạng cao hơn, trước tiên là $GL_q(3|1)$. Vấn đề trở nên khó khăn hơn nhiều, vì ngay cả đối với siêu nhóm $GL(3|1)$, cũng chưa có một mô tả tường minh cho tất cả các biểu diễn bất khả qui, mặc dù các biểu diễn bất khả qui đã được phân loại từ lâu bởi Kac.

Để chuẩn bị cho việc xây dựng tường minh các biểu diễn bất khả qui của $GL_q(3|1)$ trong chương sau, chúng ta đưa ra trong chương này một mô tả tường minh các biểu diễn bất khả qui của $GL(3|1)$. Việc chứng minh các biểu diễn xây dựng được vét hết các biểu diễn bất khả qui của $GL(3|1)$, được thực hiện nhờ phân loại của Kac, và công thức tính đặc trưng của Su và Zhang.

Trước hết, chúng tôi giới thiệu một số khái niệm và kết quả đã biết về siêu đại số Lie.

3.1 Siêu đại số Lie và biểu diễn

Một đại số $\mathbb{Z}_2$-phân bậc được gọi là một *siêu đại số*. Một *siêu đại số Lie* là một không gian véc tơ $\mathbb{Z}_2$-phân bậc, với siêu tích Lie $[,]$, thỏa mãn luật phản giao hoán và qui tắc Leibniz như sau:

$$[a,b] = (-1)^{\hat{a}\hat{b}}[b,a], \quad [a,[b,c]] = [[a,b],c] + (-1)^{\hat{a}\hat{b}}[b,[a,c]].$$

Ở đây, ta qui ước $(-1)^{\bar{0}} = 1, (-1)^{\bar{1}} = -1$.

Cho A là siêu đại số, siêu giao hoán tử trên A định nghĩa như sau:

$$[a,b] := ab - (-1)^{\hat{a}\hat{b}}ba.$$

Siêu đại số A với phép toán này là một siêu đại số Lie, ký hiệu là A^L.

Cho V là siêu không gian véc tơ. Xét đại số $\mathrm{End}(V)$ của các tự đồng cấu tuyến tính của V. Cố định một cơ sở thuần nhất của V, khi đó mỗi phần tử thuộc $\mathrm{End}(V)$ được biểu diễn bởi một ma trận có dạng $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, với $A \in \mathrm{Mat}(m,m), B \in \mathrm{Mat}(m,n), C \in \mathrm{Mat}(n,m), D \in \mathrm{Mat}(n,n)$. Siêu đại số Lie liên kết với siêu đại số kết hợp $\mathrm{End}(V)$, được ký hiệu là $\mathfrak{gl}(V)$ hoặc $\mathfrak{gl}(m|n)$. Đặt $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}(V)$. Khi đó $\mathfrak{g}$ là siêu đại số Lie, với cấu trúc phân bậc như sau: $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$, trong đó $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ là tập các ma trận có dạng $X = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$, $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ là tập các ma trận có dạng $X = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$.

Định nghĩa 3.1.1 *Cho* $\mathfrak{g}$ *là một siêu đại số Lie. Một siêu biểu diễn* ρ *của* $\mathfrak{g}$ *trong* W *là một ánh xạ tuyến tính chẵn* $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow gl(W)$*, sao cho* $\rho([A, B]) = [\rho(A), \rho(B)]$.

Một siêu biểu diễn được gọi là *bất khả qui* nếu nó không có một biểu diễn con thực sự nào khác không. Để xây dựng các biểu diễn bất khả qui của siêu đại số Lie, ta cần các kỹ thuật của biểu diễn cảm sinh.

Ta có $\mathfrak{g}$ là không gian véc tơ với cơ sở $\{E_{i,j} : i, j = 1 \dots m + n\}$, trong đó $E_{i,j}$ là ma trận có phần tử nằm ở vị trí hàng thứ i và cột thứ j bằng 1, còn các vị trí khác là bằng 0. Gọi $\mathfrak{h}$ là đại số con của $\mathfrak{g}$, gồm các ma trận đường chéo, $\mathfrak{h}$ có cơ sở là $\{E_{i,i} : i = 1 \dots m + n\}$. Không gian véc tơ đối ngẫu của $\mathfrak{h}$, ký hiệu là $\mathfrak{h}^*$, có cơ sở là các phiếm hàm $\{\epsilon_i : \longrightarrow k : i := 1 \dots m + n\}$, được xác định như sau: với mọi $X \in \mathfrak{g}$, $\epsilon_i(X) := A_{ii}$: $i = 1 \dots m$, và $\epsilon_j(X) := A_{jj}$: $j = m+1 \dots m+n$. Trên $\mathfrak{h}^*$ cố định một dạng song tuyến tính $\langle \epsilon_i, \epsilon_j \rangle = (-1)^{\hat{i}} \delta_{i,j}$, ở đó $\hat{i} = 0$ với $1 \le i \le m$, và $\hat{i} = 1$ với $m+1 \le i \le m+n$.

Dưới đây, chúng tôi giới thiệu một số khái niệm và kỹ thuật liên quan đến việc xây dựng các biểu diễn của $\mathfrak{g}$.

3.1.1 Đại số bao phổ dụng

Đại số bao phổ dụng của siêu đại số Lie $\mathfrak{g}$ là cặp $(\mathfrak{U}(\mathfrak{g}), i)$, với $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ là siêu đại số kết hợp, $i : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g})^L$ là đồng cấu của siêu đại số Lie, thỏa mãn tính chất phổ dụng: với mọi siêu đại số Lie A^L, mọi đồng cấu siêu đại số Lie $j : \mathfrak{g} \longrightarrow A^L$ tồn tại duy nhất một đồng cấu siêu đại số $\varphi : \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow A^L$ sao cho $j = \varphi.i$.

Ta có tương ứng $1-1$ giữa tập các $\mathfrak{g}$-biểu diễn với tập các $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$-mô đun.

Định lý 3.1.2 *(PBW) Cho $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ là siêu đại số Lie, $a_1, \ldots, a_m$ là một cơ sở của $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$, $b_1, \ldots, b_n$ là một cơ sở của $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$. Khi đó các phần tử có dạng $a_1^{k_1} \ldots a_m^{k_m} b_{i_1} \ldots b_{i_s}$ với $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_s \leq n, k_i \geq 0$ với mọi i, tạo nên một cơ sở của $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$.*

3.1.2 Biểu diễn cảm sinh

Cho H là một đại số con của $\mathfrak{g}$, V là H-biểu diễn, nên V là $\mathfrak{U}(H)$-mô đun. $\mathfrak{g}$-mô đun cảm sinh từ H-biểu diễn V, ký hiệu là $\mathrm{Ind}_H^{\mathfrak{g}} V$, với $\mathrm{Ind}_H^{\mathfrak{g}}(V) := \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathfrak{U}(H)} V$ là $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$-mô đun, với tác động $g(u \otimes v) := gu \otimes v$, trong đó $g \in \mathfrak{g}, u \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}), v \in V$, nên $\mathrm{Ind}_H^{\mathfrak{g}}(V)$ là $\mathfrak{g}$-biểu diễn, và được gọi là biểu diễn cảm sinh từ H lên $\mathfrak{g}$ của V.

3.1.3 Trọng và nghiệm

Cho $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, α được gọi là một trọng của $\mathfrak{g}$. Khi đó α luôn viết được dưới dạng $\alpha = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \epsilon_i - \sum_{j=m+1}^{m+n} \alpha_j \epsilon_j$, hoặc viết cách khác là $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m | \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_{m+n})$.

Xét $\alpha \neq 0, \alpha \in \mathfrak{h}^*$, đặt $\mathfrak{g}_\alpha := \{a \in \mathfrak{g} : [h, a] = \alpha(h).a, \forall h \in \mathfrak{h}\}$. Nếu $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ thì α được gọi là một nghiệm của $\mathfrak{g}$. Mặt khác, ta cũng có $\mathfrak{g} = N^+ \oplus \mathfrak{h} \oplus N^-$, với N^+ là tập các ma trận có các phần tử khác không chỉ ở phía trên đường chéo chính, N^- là tập các ma trận có các phần tử khác không chỉ nằm dưới đường chéo chính. Tập các nghiệm chẵn (lẻ) dương của $\mathfrak{g}$ ký hiệu là

$\Delta_0^+(\Delta_1^+)$. Đặt

$$\rho := \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta_0^+}\alpha - \frac{1}{2}\sum_{\beta\in\Delta_1^+}\beta.$$

Định nghĩa 3.1.3 *Cho* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m|\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_{m+n})$ *là một trọng.*

(i) λ *được gọi là nguyên nếu* $\lambda_i - \lambda_{i+1} \in \mathbb{Z}$ *với mọi* $i \neq m$.

(ii) λ *được gọi là trội nếu* $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$ *với* $1 \leq i \leq m$, *và* $\lambda_j \leq \lambda_{j+1}$ *với* $m+1 \leq j \leq m+n$.

(iii) λ *được gọi là điển hình nếu* $(\lambda_1 + m + 1 - i) - (\lambda_{m+p} + p) \neq 0$ *với mọi* $1 \leq i \leq m, 1 \leq p \leq n$.

3.1.4 Biểu diễn với trọng cao nhất

Cho $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, gọi $\mathfrak{b}$ là đại số con của $\mathfrak{g}$ gồm các ma trận tam giác trên, tức là ta có $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus N^+$. Ta định nghĩa $\mathfrak{b}$-mô đun con chẵn một chiều $\langle v_\lambda\rangle$, bởi $h(v_\lambda) = \lambda(h)v_\lambda$ với $N^+(v_\lambda) = 0, \hat{v_\lambda} = \bar{0}$. Đặt

$$\tilde{V}(\lambda) := \mathrm{Ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}}\langle v_\lambda\rangle,$$

$\tilde{V}(\lambda)$ chứa duy nhất một mô đun con cực đại $I(\lambda)$. Đặt $V(\lambda) := \tilde{V}(\lambda)/I(\Lambda)$ là $\mathfrak{g}$- mô đun đơn, được gọi là biểu diễn bất khả qui với trọng cao nhất λ.

3.1.5 Mô đun Verma

Với mọi trọng trội nguyên λ, gọi $V^0(\lambda)$ là $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-mô đun với trọng cao nhất λ. Khi đó $V^0(\lambda)$ còn là $\mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{+1}$-mô đun, với $\mathfrak{g}_{+1}$ là tập các ma trận có dạng $\begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B \in \mathrm{Mat}(m,n)$, bằng cách cho $\mathfrak{g}_{+1} \cdot V^0(\lambda) = 0$. Đặt $\bar{V}(\lambda) := \mathrm{Ind}^{\mathfrak{g}}_{\mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{+1}} V^0(\lambda)$, $\bar{V}(\lambda)$ có duy nhất một mô đun con cực đại $M(\lambda)$, đặt

$$V(\lambda) := \bar{V}(\lambda)/M(\lambda),$$

$V(\lambda)$ được gọi là mô đun Verma. Ta có các kết quả sau:

Định lý 3.1.4 *[19]*

(i) Mọi $\mathfrak{g}$-mô đun đơn hữu hạn chiều đều đẳng cấu với mô đun có dạng mô đun Verma hay còn gọi là Kac-mô đun $V(\lambda)$.

(ii) Mọi $\mathfrak{g}$-mô đun đơn hữu hạn chiều được đặc trưng duy nhất bởi trọng trội nguyên cao nhất λ của chúng.

(iii) $\bar{V}(\lambda)$ là mô đun đơn nếu và chỉ nếu λ là điển hình.

Nhận xét: như vậy tồn tại một cách đánh số các biểu diễn bất khả qui hữu hạn chiều của $\mathfrak{g}$ bằng các trọng trội nguyên.

3.1.6 Đặc trưng của biểu diễn

Cho V là một biểu diễn của $\mathfrak{g}$, với mỗi $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, ta định nghĩa

$$V^\lambda := \{v \in V | \rho(h)v = \lambda(h)v, \forall h \in \mathfrak{h}\},$$

khi đó $V = \oplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V^\lambda$. Dạng tuyến tính λ, với $V^\lambda \neq 0$ được gọi là trọng của biểu diễn V (tương ứng với $\mathfrak{h}$). Nếu λ là trọng của V, thì V^λ được gọi là không gian trọng liên kết với λ. Đặc trưng của V, ký hiệu là ch$V$, được định nghĩa như sau:

$$\mathrm{ch}V := \sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} (\mathrm{dim}V_\lambda) e^\lambda.$$

Định lý 3.1.5 *[19] Nếu λ là một trọng trội nguyên, điển hình thì $V(\lambda) = \overline{V}_\lambda$ và*

$$\mathrm{ch}(V) = \mathrm{ch}(\overline{V}_\lambda) = \frac{L_1}{L_0} \sum_{w \in S_m \times S_n} sign(w) e^{w(\lambda+\rho)},$$

trong đó

$$L_1 = \sum_{\alpha \in \Delta_1^+} (e^{\alpha/2} + e^{-\alpha/2}), L_0 = \sum_{\beta \in \Delta_0^+} (e^{\beta/2} - e^{-\beta/2}).$$

Trong [35], đã đưa ra được công thức tính đặc trưng của biểu diễn $V(\lambda)$, với λ là trọng trội nguyên bất kỳ. Công thức tính đặc trưng cho $V(\lambda)$, với λ bất kỳ là rất phức tạp, nên chúng tôi không đưa ra ở đây, mà sẽ làm cụ thể trong Mục 3.4.

3.2 Phức Koszul kép

Từ hai phức loại Koszul K và L, đã giới thiệu trong Chương 1, ta có thể xây dựng được một phức kép, với tất cả các dòng và các cột trừ cột đầu tiên đều là khớp, mà chúng tôi cũng gọi là phức Koszul kép. Sử dụng các tính chất của các phức Koszul kép này, chúng tôi đưa ra một xây dựng tường minh tất cả các biểu diễn bất khả qui của $GL(3|1)$.

Để đơn giản ta sẽ dùng "$\cdot$" để ký hiệu tích ten xơ. Cố định một số nguyên $a \geq 2$. Chúng tôi sắp xếp các phức Koszul $K_{-a}, K_{-a-1}, K_{-a-2}, \ldots$ như trong sơ đồ dưới đây:

$$
\begin{array}{lllllll}
K_{-a}: & 0 \longrightarrow S_a^* & \xrightarrow{d_{0,a}} \Lambda_1 \cdot S_{a+1}^* & \xrightarrow{d_{1,a+1}} \Lambda_2 \cdot S_{a+2}^* & \xrightarrow{d_{2,a+2}} \Lambda_3 \cdot S_{a+3}^* & \longrightarrow \cdots \\
K_{-a-1}: & & 0 \longrightarrow S_{a+1}^* & \xrightarrow{d_{0,a+1}} \Lambda_1 \cdot S_{a+2}^* & \xrightarrow{d_{1,a+2}} \Lambda_2 \cdot S_{a+3}^* & \longrightarrow \cdots \\
K_{-a-2}: & & & 0 \longrightarrow S_{a+2}^* & \xrightarrow{d_{0,a+2}} \Lambda_1 \cdot S_{a+3}^* & \longrightarrow \cdots
\end{array}
$$

Để mỗi hàng tạo thành một phức, ta nhân ten xơ mỗi phức K_{-a-i} với S_i, tức là phức K_{-a-1} được nhân ten xơ với S_1, phức K_{-a} nhân ten xơ với k,... Để mỗi cột tạo thành một phức, ta nhân ten xơ phức L với S_{a+b}^*. Vì vậy ta có có sơ đồ sau với tất cả các hàng là các phức Koszul $K_\bullet$ nhân ten xơ với $S_\bullet$ và các cột là các phức Koszul $L_\bullet$ nhân ten xơ với $S_\bullet^*$:

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 \arrow[r] & S_a^* \arrow[u] \arrow[r, "d"] & \Lambda_1 \cdot S_{a+1}^* \arrow[u] \arrow[r, "d"] & \Lambda_2 \cdot S_{a+2}^* \arrow[u] \arrow[r, "d"] & \Lambda_3 \cdot S_{a+3}^* \arrow[u] \arrow[r, "d"] & \Lambda_4 \cdot S_{a+4}^* \cdots \arrow[u] \\
 & 0 \arrow[u] \arrow[r] & \Lambda_1 \cdot S_{a+1}^* \arrow[u, "P"] \arrow[r, "d"] & S_1 \cdot \Lambda_1 \cdot S_{a+2}^* \arrow[u, "P"] \arrow[r, "d"] & S_1 \cdot \Lambda_2 \cdot S_{a+3}^* \arrow[u, "P"] \arrow[r, "d"] & S_1 \cdot \Lambda_3 \cdot S_{a+4}^* \cdots \arrow[u, "P"] \\
 & & 0 \arrow[u] \arrow[r] & S_2 \cdot S_{a+2}^* \arrow[u, "P"] \arrow[r, "d"] & S_2 \cdot \Lambda_1 \cdot S_{a+3}^* \arrow[u, "P"] \arrow[r, "d"] & S_2 \cdot \Lambda_2 \cdot S_{a+4}^* \cdots \arrow[u, "P"]
\end{tikzcd}
\tag{3.1}
$$

Một hình vuông tổng quát trong sơ đồ (3.1) có dạng

$$
\begin{tikzcd}
S_i \cdot \Lambda_k \cdot S_l^* \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes d"] & S_i \cdot \Lambda_{k+1} \cdot S_{l+1}^* \\
S_{i+1} \cdot \Lambda_{k-1} \cdot S_l^* \arrow[u, "P\otimes \mathrm{id}"] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes d"'] & S_{i+1} \cdot \Lambda_k \cdot S_{l+1}^* \arrow[u, "P\otimes \mathrm{id}"']
\end{tikzcd}
\qquad \text{với } l = i + k + a.
\tag{3.2}
$$

Trong sơ đồ trên, đặt $D := \mathrm{id} \otimes d, P := P \otimes \mathrm{id}$. Dễ thấy $DP = PD$ với mọi hình vuông ở sơ đồ trên.

Giả sử $G = GL(3, 1)$, khi đó tất cả các hàng trong sơ đồ trên là các phức K_a, các phức là khớp vì $a \neq 2$. Vì vậy, sơ đồ (3.1) cho ta một phức kép với tất cả các dòng và cột (trừ cột đầu tiên) là khớp.

Dùng các toán tử vi phân ∂ và Q, ta cũng thu được một phức Koszul kép khớp khác, được mô tả cụ thể ở sơ đồ sau:

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d, dashed] & 0 \arrow[d, dashed] & 0 \arrow[d, dashed] & 0 \arrow[d, dashed] & 0 \arrow[d, dashed] \\
0 & S_a^* \arrow[l, dashed, "\partial"] \arrow[d, dashed, "Q"] & \Lambda_1 \cdot S_{a+1}^* \arrow[l, dashed, "\partial"] \arrow[d, dashed, "Q"] & \Lambda_2 \cdot S_{a+2}^* \arrow[l, dashed, "\partial"] \arrow[d, dashed, "Q"] & \Lambda_3 \cdot S_{a+3}^* \arrow[l, dashed, "\partial"] \arrow[d, dashed, "Q"] & \Lambda_4 \cdot S_{a+4}^* \cdots \arrow[l, dashed, "\partial"] \arrow[d, dashed, "Q"] \\
 & 0 & S_1 \cdot S_{a+1}^* \arrow[l, dashed, "\partial"] \arrow[d, dashed, "Q"] & S_1 \cdot \Lambda_1 \cdot S_{a+2}^* \arrow[l, dashed, "\partial"] \arrow[d, dashed, "Q"] & S_1 \cdot \Lambda_2 \cdot S_{a+3}^* \arrow[l, dashed, "\partial"] \arrow[d, dashed, "Q"] & S_1 \cdot \Lambda_3 \cdot S_{a+4}^* \cdots \arrow[l, dashed, "\partial"] \arrow[d, dashed, "Q"] \\
 & & 0 & S_2 \cdot S_{a+2}^* \arrow[l, dashed, "\partial"] & S_2 \cdot \Lambda_1 \cdot S_{a+3}^* \arrow[l, dashed, "\partial"] & S_2 \cdot \Lambda_2 \cdot S_{a+4}^* \cdots \arrow[l, dashed, "\partial"]
\end{tikzcd}
\tag{3.3}
$$

Tương tự, tính chất giao hoán của sơ đồ trên được suy ra từ định nghĩa của ∂ và Q, tức là ta có $\partial Q = Q\partial$.

3.3 Một số tính chất của phức Koszul kép

Trong mục này, chúng ta nghiên cứu tính chất của một số ánh xạ nhận được từ các toán tử vi phân của các phức Koszul.

Ghép sơ đồ (3.1) và (3.3) vào một sơ đồ sau:

$$
\begin{tikzcd}
S_{i-1} \cdot S_{a+i-1}^* \arrow[r, hook, shift left, "d_{0,a+i-1}"] & S_{i-1} \cdot \Lambda_1 \cdot S_{a+i}^* \arrow[l, two heads, dashed, shift left, "\partial_{0,a+i-1}"] \arrow[r, shift left, "d_{1,a+i}"] \arrow[d, two heads, dashed, shift left, "Q"] & S_{i-1} \cdot \Lambda_2 \cdot S_{a+i+1^*} \arrow[l, dashed, shift left, "\partial_{1,a+i}"] \arrow[r, shift left, "d_{2,a+i+1}"] \arrow[d, dashed, shift left, "Q"] & \cdots \arrow[l, dashed, shift left, "\partial_{2,a+i+1}"] \\
 & S_i.S_{a+i}^* \arrow[u, hook, shift left, "P"] \arrow[r, hook, shift left, "d_{0,a+i}"] & S_i.\Lambda_1.S_{a+i+1}^* \arrow[l, two heads, dashed, shift left, "\partial_{0,a+i}"] \arrow[u, shift left, "P"] \arrow[r, shift left, "d_{1,a+i+1}"] \arrow[d, two heads, dashed, shift left, "Q"] & S_i \cdot \Lambda_2 \cdot S_{a+i+2}^* \arrow[l, dashed, shift left, "\partial_{1,a+i+1}"] \arrow[d, dashed, shift left, "Q"] \\
 & & S_{i+1}.S_{a+i+1}^* \arrow[u, hook, shift left, "P"] \arrow[r, hook, shift left, "d_{0,a+i+1}"] & S_{i+1} \cdot \Lambda_1 \cdot S_{a+i+2}^* \arrow[l, two heads, dashed, shift left, "\partial_{0,a+i+1}"] \arrow[u, shift left, "P"]
\end{tikzcd}
\tag{3.4}
$$

Chúng tôi thu được kết quả sau:

Mệnh đề 3.3.1 *Ánh xạ hợp thành $\partial PQd : S_i \cdot S_{a+i}^* \longrightarrow S_i \cdot S_{a+i}^*$ trong sơ đồ (3.4) là một đẳng cấu với mọi $i \geq 0$. Khi đó $S_i \cdot S_{a+i}^*$ đẳng cấu với một thành phần trực tiếp của $S_{i+1} \cdot S_{a+i+1}^*$.*

Chứng minh. Theo các công thức (2) , (3) và luật giao hoán giữa d, P và ∂, Q, ta có

$$
\begin{aligned}
\partial PQd &= \partial d - \frac{2i}{i+1}\partial QPd \\
&= \partial d - \frac{i}{i+1}QP + \frac{i(a+i)}{(i+1)(a+i+1)}Qd\partial P \\
&= \Big[\frac{(a+i+2)}{(a+i+1)} - \frac{i}{i+1}\Big]\mathrm{Id} + \frac{i(a+i)}{(i+1)(a+i+1)}Qd\partial P.
\end{aligned}
$$

Ta qui nạp theo i để chứng minh ánh xạ $\partial PQd : S_i \cdot S^*_{a+i} \longrightarrow S_i \cdot S^*_{a+i}$ chéo hóa được, với tập các giá trị riêng

$$A_i := \Big\{ \frac{(a+i+3-j)j}{(i+1)(a+i+1)}, j = 1, 2, \ldots, i+1 \Big\}$$

Với $i = 0$, dễ thấy điều phải chứng minh là đúng. Giả sử mệnh đề đúng với $i-1$. Theo giả thiết qui nạp, ánh xạ $\partial PQd : S_{i-1} \cdot S^*_{a+i-1} \longrightarrow S_{i-1} \cdot S^*_{a+i-1}$ chéo hóa được, với tập các giá trị riêng A_{i-1}, do đó $Qd\partial P : S_i \cdot S^*_{a+i} \longrightarrow S_i \cdot S^*_{a+i}$ chéo hóa được, với tập các trị riêng $A_{i-1} \cup \{0\}$. Vì vậy $\partial PQd : S_i \cdot S^*_{a+i} \longrightarrow S_i \cdot S^*_{a+i}$ chéo hóa được, với A_i là tập hợp các giá trị riêng.□

Coi (3.1) là phức kép của các phức khớp (ngoại trừ cột đầu tiên là không khớp), và nó chẻ ra thành các dãy khớp ngắn

$$
\begin{tikzcd}
\cdots & \mathrm{Ker}P_{i+1,k-1} \cdot S^*_{i+k+a} \arrow[r, "d'_{k,i+k+a}"] & \mathrm{Ker}P_{i+1,k} \cdot S^*_{i+k+a+1} \arrow[r, "d'_{k+1,i+k+a+1}"] & \mathrm{Ker}P_{i+1,k+1} \cdot S^*_{i+k+a+2} & \cdots \\
\cdots & S_{i+1} \cdot \Lambda_{k-1} \cdot S^*_{i+k+a} \arrow[u, two heads, "P_{i+1,k-1}"] \arrow[r, "d_{k-1,i+k+a}"] & S_{i+1} \cdot \Lambda_k \cdot S^*_{i+k+a+1} \arrow[u, two heads, "P_{i+1,k}"] \arrow[r, "d_{k,i+k+a+1}"] & S_{i+1} \cdot \Lambda_{k+1} \cdot S^*_{i+k+a+2} \arrow[u, two heads, "P_{i+1,k+1}"] & \cdots \\
\cdots & \mathrm{Ker}P_{i+2,k-2} \cdot S^*_{i+k+a} \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "d'_{k-1,i+k+a}"] & \mathrm{Ker}P_{i+2,k-1} \cdot S^*_{i+k+a+1} \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "d'_{k,i+k+a+1}"] & \mathrm{Ker}P_{i+2,k} \cdot S^*_{i+k+a+2} \arrow[u, hook, "i"] & \cdots
\end{tikzcd}
\tag{3.5}
$$

với $d'_{k,i+k+a} := d_{k,i+k+a}\big|_{\mathrm{Ker}P_{i+1,k-1} \cdot S^*_{i+k+a}}$. Vì các phức được tạo thành trên các cột của sơ đồ (3.1) là khớp, nên $\mathrm{Ker}P_{i,j} = \mathrm{Im}P_{i+1,j-1}$. Tính giao hoán của sơ đồ được suy ra từ định nghĩa của d và P.

Sau đây, chúng tôi đưa ra một số tính chất của các phức Koszul kép. Trước hết, xét sơ đồ

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Ker}P_{i,k} \cdot S^*_{i+k+a} \arrow[r, "d'_{k,i+k+a}"] & \mathrm{Ker}P_{i,k+1} \cdot S^*_{i+k+a+1} \arrow[r, "d'_{k+1,i+k+a+1}"] & \mathrm{Ker}P_{i,k+2} \cdot S^*_{i+k+a+2} \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & S_{i+1} \cdot \Lambda_{k-1} \cdot S^*_{i+k+a} \arrow[r, "d_{k-1,i+k+a}"] \arrow[u, "P_{i+1,k-1}"] \arrow[d, shift left, "Q"] & S_{i+1} \cdot \Lambda_k \cdot S^*_{i+k+a+1} \arrow[r, "d_{k,i+k+a+1}"] \arrow[u, "P_{i+1,k}"] \arrow[d, shift left, "Q"] & S_{i+1} \cdot \Lambda_{k+1} \cdot S^*_{i+k+a+2} \arrow[r] \arrow[u, "P_{i+1,k+1}"] \arrow[d, shift left, "Q"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Ker}P_{i+1,k-1} \cdot S^*_{i+k+a} \arrow[r, "d'_{k-1,i+k+a}"] \arrow[u, hook, "i"] & \mathrm{Ker}P_{i+1,k} \cdot S^*_{i+k+a+1} \arrow[r, "d'_{k,i+k+a+1}"] \arrow[u, hook, "i"] & \mathrm{Ker}P_{i+1,k+1} \cdot S^*_{i+k+a+2} \arrow[r] \arrow[u, hook, "i"] & \cdots
\end{tikzcd}
\tag{3.6}
$$

Xét một phần của sơ đồ (3.6) với $i, k \geq 1$:

$$
\begin{tikzcd}
S_{i-1} \cdot \Lambda_{k+1} \cdot S^*_{a+i+k} \arrow[r, dashed, shift left] & S_{i-1} \cdot \Lambda_{k+2} \cdot S_{a+i+k+1} \arrow[l, dashed, shift left] & \\
KerP_{i-,k+1} \cdot S^*_{a+i+k} \arrow[r, dashed, shift left] \arrow[u, hook] & KerP_{i-1,k+2} \cdot S^*_{a+i+k+1} \arrow[l, dashed, shift left] \arrow[u, hook] & \\
S_i \cdot \Lambda_k \cdot S^*_{a+i+k} \arrow[r, dashed, shift left, "d"'] \arrow[u, shift left, "P"'] & S_i \cdot \Lambda_{k+1} \cdot S^*_{a+i+k+1} \arrow[l, dashed, shift left, "\partial"'] \arrow[r, dashed, shift left] \arrow[u, shift left] & \cdot S_i \cdot \Lambda_{k+2} \cdot S^*_{a+i+k+2} \arrow[l, dashed, shift left] \\
& KerP_{i,k+1} \cdot S^*_{a+i+k+1} \arrow[r, dashed, shift left] \arrow[u, hook] & KerP_{i,k+2} \cdot S^*_{a+i+k+2} \arrow[l, dashed, shift left] \arrow[u, hook] \\
& S_{i+1} \cdot \Lambda_k \cdot S^*_{a+i+k+1} \arrow[r, dashed, shift left, "d"'] \arrow[u, shift left, "P"'] & S_{i+1} \cdot \Lambda_{k+1} \cdot S^*_{a+i+k+2}. \arrow[l, dashed, shift left, "\partial"'] \arrow[u, shift left]
\end{tikzcd}
\tag{3.7}
$$

Mệnh đề 3.3.2 *Ánh xạ hợp thành*

$$P\partial dQ : \mathrm{Ker}P_{i,k+1} \cdot S^*_{a+i+k+1} \longrightarrow \mathrm{Ker}P_{i,k+1} \cdot S^*_{a+i+k+1}$$

(với $i \geq 0, k \geq 0$) trong sơ đồ (3.7) là một đẳng cấu. Khi đó $\mathrm{Ker}P_{i,k+1} \cdot S^*_{a+i+k+1}$ *đẳng cấu với một thành phần trực tiếp của* $S_{i+1} \cdot \mathrm{Im}d_{k,a+i+k+1}$.

Chứng minh. Bằng phương pháp qui nạp, ta chứng minh ánh xạ

$$P\partial dQ : \mathrm{Ker}P_{i,k+1} \cdot S^*_{a+i+k+1} \longrightarrow \mathrm{Ker}P_{i,k+1} \cdot S^*_{a+i+k+1}$$

chéo hóa được, với tập các giá trị riêng A_i, trong đó

$$A_i := \Big\{ \frac{(a+k+2i+4-j)j}{(i+1)(k+1)^2(a+i+k+2)}, j = 1, 2, \dots, i+1, i+k+1 \Big\}.$$

Với $i = 0$, xét sơ đồ

$$\begin{tikzcd}
\Lambda_k \cdot S^*_{a+k} \arrow[r, shift left, "d"'] & \Lambda_{k+1} \cdot S^*_{a+k+1} \arrow[l, dashed, shift left, "\partial"'] \arrow[r, shift left, "d"'] \arrow[d, dashed, shift right, "Q"'] & \cdot \Lambda_{k+2} \cdot S^*_{a+k+2} \arrow[l, dashed, shift left, "\partial"'] \arrow[d, dashed, shift right] \\
\cdots S_1 \cdot \Lambda_{k-1} \cdot S^*_{a+k} \arrow[r, shift left, "d"'] \arrow[u, shift right, "P"'] & S_1 \cdot \Lambda_k \cdot S^*_{a+k+1} \arrow[l, dashed, shift left, "\partial"'] \arrow[r, shift left, "d"'] \arrow[u, shift right, "P"'] & S_1 \cdot \Lambda_{k+1} \cdot S^*_{a+k+2}. \arrow[l, dashed, shift left, "\partial"'] \arrow[u, shift right]
\end{tikzcd}$$

Xét ánh xạ hợp thành $P\partial DQ : \Lambda_{k+1} \cdot S^*_{a+k+1} \longrightarrow \Lambda_{k+1} \cdot S^*_{a+k+1}$. Theo các công thức (2) và (3), ta có

$$\begin{aligned}
P\partial dQ &= P\frac{[(a+3) - k(a+k+1)d\partial]}{(k+1)(a+k+2)}Q \\
&= \frac{(a+3)}{(k+1)(a+k+2)}\mathrm{Id} - \frac{k(a+k+1)}{(k+1)(a+k+2)}d\partial.
\end{aligned}$$

Vì $d\partial$ chéo hóa được, với các giá trị riêng là 0 và $\frac{a+2}{(k+1)(a+k+1)}$, nên $P\partial dQ$ chéo hóa được, với tập các giá trị riêng là

$$A_0 := \Big\{ \frac{(a+3)}{(k+1)(a+k+2)}, \frac{(a+k+3)}{(k+1)^2(a+k+2)} \Big\}.$$

Xét sơ đồ (3.7), với $i = 1$. Ánh xạ $P\partial dQ : \mathrm{Ker}P_{1,k+1} \cdot S^*_{a+k+2} \longrightarrow \mathrm{Ker}P_{1,k+1} \cdot S^*_{a+k+2}$, và trên $S_i \cdot \Lambda_{k+1} \cdot S^*_{a+i+k+1}$, chúng ta có

$$\begin{aligned}
P\partial dQ &= P\frac{[(a+4) - k(a+k+2)d\partial]}{(k+1)(a+k+3)}Q \\
&= \frac{(a+4)}{(k+1)(a+k+3)}PQ - \frac{k(a+k+2)}{(k+1)(a+k+3)}Pd\partial Q.
\end{aligned}$$

Ta có $Pd\partial Q = dPQ\partial$, và có thể hạn chế toán tử này lên $\mathrm{Ker}P_{1,k+1} \cdot S^*_{a+k+2}$. Ta sẽ tìm các giá trị riêng của toán tử này. Trước hết,

$$dPQ\partial = d[\frac{(k+1) - (k+1)QP}{2k}]\partial = \frac{k+1}{2k}d\partial - \frac{k+1}{2k}dQP\partial.$$

Toán tử $dQP\partial$ là một tự đồng cấu của $\mathrm{Im}d \subset S_i \cdot \Lambda_{k+1} \cdot S^*_{a+i+k+1}$, trên không gian này, ánh xạ $d\partial$ có trị riêng là $\frac{a+3}{(k+1)(a+k+2)}$. Mặt khác, từ trên ta biết các giá trị riêng của $P\partial dQ$ thuộc A_0, vì vậy $dQP\partial$ chéo hóa được, với các giá trị riêng thuộc $A_0 \cup 0$. Vì vậy $dPQ\partial$ là chéo hóa được, với các giá trị riêng là

$$\Big\{\frac{a+3}{2k(a+k+2)}, \frac{a+2}{2(k+1)(a+k+2)}, 0\Big\}.$$

Ta lại có hạn chế của PQ lên $\mathrm{Ker}P_{1,k+1} \cdot S^*_{a+k+2}$ là $\frac{k+2}{2(k+1)}\mathrm{Id}$, do đó tập các giá trị riêng của $P\partial dQ$ là

$$A_1 := \Big\{\frac{(a+4)(k+2)}{2(k+1)^2(a+k+3)}, \frac{(a+k+5)}{2(k+1)^2(a+k+3)}, \frac{2(a+k+4)}{2(k+1)^2(a+k+3)}\Big\}.$$

Tổng quát, trong sơ đồ (3.7), xét ánh xạ hợp thành $P\partial dQ : \mathrm{Ker}P_{i,k+1} \cdot S^*_{a+i+k+1} \longrightarrow \mathrm{Ker}P_{i,k+1} \cdot S^*_{a+i+k+1}$. Ta có

$$\begin{aligned}
P\partial dQ &= P[\frac{(a+i+3) - k(a+i+k+1)d\partial}{(k+1)(a+i+k+2)}]Q \\
&= \frac{(a+i+3)}{(k+1)(a+i+k+2)}PQ - \frac{k(a+i+k+1)}{(k+1)(a+i+k+2)}dPQ\partial \\
&= \frac{(a+i+3)(i+k+1)}{(k+1)^2(i+1)(a+i+k+2)}\mathrm{Id} \\
&- \frac{k(a+i+k+1)}{(k+1)(a+i+k+2)}d[\frac{(i+k) - i(k+1)QP}{k(i+1)}]\partial \\
&= \frac{(a+i+3)(i+k+1)}{(k+1)^2(i+1)(a+i+k+2)}\mathrm{Id} - \frac{(i+k)(a+i+k+1)}{(k+1)(i+1)(a+i+k+2)}d\partial \\
&+ \frac{i(a+i+k+1)}{(i+1)(a+i+k+2)}dQP\partial.
\end{aligned}$$

Bằng lập luận tương tự, ta chứng minh ánh xạ $dQP\partial : \mathrm{Ker}P_{i,k+1} \cdot S^*_{a+i+k+1} \longrightarrow \mathrm{Ker}P_{i,k+1} \cdot S^*_{a+i+k+1}$ chéo hóa được, với tập các trị riêng $A_{i-1} \cup \{0\}$.

Vì vậy ánh xạ $P\partial dQ : \mathrm{Ker}P_{i,k+1} \cdot S^*_{a+i+k+1} \longrightarrow \mathrm{Ker}P_{i,k+1} \cdot S^*_{a+i+k+1}$ chéo hóa được, với tập các giá trị riêng là A_i, nên nó là một đẳng cấu.$\square$

3.4 Đặc trưng của các biểu diễn bất khả qui của $GL(3|1)$

Một biểu diễn là bất khả qui của $GL(m|n)$ nếu nó cũng là biểu diễn bất khả qui của $\mathfrak{gl}(m|n)$ nhưng với trọng cao nhất là nguyên. Do đó, các kết quả mà chúng tôi giới thiệu sau đây là trên siêu đại số Lie $\mathfrak{gl}(m|n)$.

3.4.1 Đặc trưng của biểu diễn điển hình

Trong $\mathfrak{gl}(3|1)$, ta có $\Delta_1^+ = \{\epsilon_1 - \epsilon_4, \epsilon_2 - \epsilon_4, \epsilon_3 - \epsilon_4\}$, $\Delta_0^+ = \{\epsilon_1 - \epsilon_2, \epsilon_1 - \epsilon_3, \epsilon_2 - \epsilon_3\}$. $\rho = (\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-3}{2}|\frac{-3}{2})$. Đặt $x_1 := e^{\epsilon_1}, x_2 := e^{\epsilon_2}, x_3 := e^{\epsilon_3}, y := e^{\epsilon_4}$. $R := (x_1 + y)(x_2 + y)(x_3 + y), \Pi := (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_1 - x_3)$,

$$a(t, u, v) := \det \begin{pmatrix} x_1^{t+2} & x_1^{u+1} & x_1^v \\ x_2^{t+2} & x_2^{u+1} & x_2^v \\ x_3^{t+2} & x_3^{u+1} & x_3^v \end{pmatrix}.$$

Cho $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3|\lambda_4)$ là một trọng trội nguyên điển hình. Theo công thức (3.1.5), ta có

$$\mathrm{ch}(V(\lambda)) = \frac{R(x_1x_2x_3)^{\lambda_3-1}}{\Pi y^{\lambda_4}} a(\lambda_1 - \lambda_3, \lambda_2 - \lambda_3, 0). \tag{3.8}$$

3.4.2 Đặc trưng của biểu diễn không điển hình

Trong mục này, chúng ta đưa ra một cách chi tiết công thức tính đặc trưng của các biểu diễn bất khả qui điển hình và không điển hình của $\mathfrak{gl}(3|1)$ (xem [35, Theorem 4.9]). Cho λ là một trọng không điển hình, khi đó có các khả năng sau xảy ra:

Nếu $\lambda_1 + 2 = \lambda_4$, thì

$$\mathrm{ch}(V(\lambda)) = \frac{R}{\Pi y^{\lambda_4}}\Big[\frac{x_1^{\lambda_1+2}}{x_1+y}(x_2^{\lambda_2}x_3^{\lambda_3-1} - x_2^{\lambda_3-1}x_3^{\lambda_2}) + \frac{x_2^{\lambda_1+2}}{x_2+y}(x_3^{\lambda_2}x_1^{\lambda_3-1} - x_3^{\lambda_3-1}x_1^{\lambda_2}) + \frac{x_3^{\lambda_1+2}}{x_3+y}(x_1^{\lambda_2}x_2^{\lambda_3-1} - x_1^{\lambda_3-1}x_2^{\lambda_2})\Big]. \quad (3.9)$$

Nếu $\lambda_2 + 1 = \lambda_4$, thì

$$\mathrm{ch}(V(\lambda)) = \frac{R}{\Pi y^{\lambda_4}}\Big[\frac{x_1^{\lambda_2+1}}{x_1+y}(x_2^{\lambda_3-1}x_3^{\lambda_1+1} - x_2^{\lambda_1+1}x_3^{\lambda_3-1}) + \frac{x_2^{\lambda_2+1}}{x_2+y}(x_3^{\lambda_3-1}x_1^{\lambda_1+1} - x_3^{\lambda_1+1}x_1^{\lambda_3-1}) + \frac{x_3^{\lambda_2+1}}{x_3+y}(x_1^{\lambda_3-1}x_2^{\lambda_1+1} - x_1^{\lambda_1+1}x_2^{\lambda_3-1})\Big]. \quad (3.10)$$

Nếu $\lambda_3 = \lambda_4$, thì

$$\mathrm{ch}(V(\lambda)) = \frac{R}{\Pi y^{\lambda_4}}\Big[\frac{x_1^{\lambda_3}}{x_1+y}(x_2^{\lambda_1+1}x_3^{\lambda_2} - x_2^{\lambda_2}x_3^{\lambda_1+1}) + \frac{x_2^{\lambda_3}}{x_2+y}(x_3^{\lambda_1+1}x_1^{\lambda_2} - x_3^{\lambda_2}x_1^{\lambda_1+1}) + \frac{x_3^{\lambda_3}}{x_3+y}(x_1^{\lambda_1+1}x_2^{\lambda_2} - x_1^{\lambda_2}x_2^{\lambda_1+1})\Big]. \quad (3.11)$$

3.5 Xây dựng các biểu diễn bất khả qui của $GL(3|1)$

Cho V là một siêu không gian véc tơ, với siêu chiều là $(3|1)$, tức là $\dim V_{\bar{0}} = 3, \dim V_{\bar{1}} = 1$. Đặt $G := GL(3|1)$, ta biết rằng tập tất cả các biểu diễn bất khả qui của $GL(3|1)$ được đánh số bởi tập các trọng trội với hệ số nguyên. Ở đây, với bất kỳ một trọng trội với hệ số nguyên nào, chúng ta xây dựng một biểu diễn, mà biểu diễn đó có đặc trưng bằng với đặc trưng của biểu diễn bất khả qui, có trọng cao nhất chính là trọng trội ở trên. Sử dụng các tính chất của phức Koszul kép, chúng tôi xây dựng tất cả các biểu diễn của $GL(3|1)$.

3.5.1 Xây dựng biểu diễn bằng phương pháp tổ hợp

Trong mục này, chúng tôi xác định các trọng cao nhất của các biểu diễn tương ứng với phân hoạch và các biểu diễn đối ngẫu của chúng. Vì V là một biểu diễn bất khả qui của $G := GL(3|1)$, bằng phương pháp tổ hợp, ta có $V^{\otimes k} = \oplus_{\lambda\in\Gamma} I_\lambda^{\oplus C_\lambda}$, với I_λ là mô đun đơn, Γ là tập tất cả các phân hoạch thỏa mãn $\lambda_4 \leq 1$. Theo công thức (3.5) trong [24], mỗi hàm Schur s_λ được biểu diễn là một đa thức theo các đa thức đối xứng cơ bản e_r, nên với mọi $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \Gamma$, ta dễ dàng tính đặc trưng của I_λ, và I_λ có trọng cao nhất là $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3| - \lambda_4)$.

Cụ thể: với mọi $\lambda \in \Gamma : \lambda_3 \geq 1$, ta có

$$\mathrm{ch}(I_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,1_4^\lambda}) = \frac{R(x_1x_2x_3)^{\lambda_3-1}}{\Pi y^{\lambda_4}}.a(\lambda_1-\lambda_3, \lambda_2-\lambda_3, 0).$$

do đó

$$\mathrm{ch}(I^*_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,1_4^\lambda}) = \frac{R(x_1x_2x_3)^{-\lambda_1}}{\Pi y^{\lambda_4+3}}.a(\lambda_1-\lambda_3, \lambda_1-\lambda_2, 0),$$

nên

$$\mathrm{ch}(I^*_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,1_4^\lambda}) = \mathrm{ch}(V(-\lambda_3+1, -\lambda_2+1, -\lambda_1+1|\lambda_4+3)).$$

Ta có

$$\mathrm{ch}(I_{\lambda_1,\lambda_2,0,0}) = \frac{R}{\Pi}\Big[\frac{x_2^{\lambda_1+1}x_3^{\lambda_2} - x_2^{\lambda_2}x_3^{\lambda_1+1}}{x_1+y} + \frac{x_3^{\lambda_1+1}x_1^{\lambda_2} - x_3^{\lambda_2}x_1^{\lambda_1+1}}{x_2+y}$$
$$+ \frac{x_1^{\lambda_1+1}x_2^{\lambda_2} - x_1^{\lambda_2}x_2^{\lambda_1+1}}{x_3+y}\Big],$$

do đó

$$\mathrm{ch}(I^*_{\lambda_1,\lambda_2,0,0}) = \frac{R}{\Pi y^2}\Big[\frac{x_1^2}{x_1+y}(x_2^{-\lambda_2+1}x_3^{-\lambda_1} - x_2^{-\lambda_1}x_3^{-\lambda_2+1})$$
$$+ \frac{x_2^2}{x_2+y}(x_3^{-\lambda_2+1}x_1^{-\lambda_1} - x_3^{-\lambda_1}x_1^{-\lambda_2+1}) + \frac{x_3^2}{x_1+y}(x_1^{-\lambda_2+1}x_2^{-\lambda_1} - x_1^{-\lambda_1}x_2^{-\lambda_2+1})\Big], \tag{3.12}$$

suy ra

$$\mathrm{ch}(I^*_{\lambda_1,\lambda_2,0,0}) = \mathrm{ch}(V(0,-\lambda_2+1,-\lambda_1+1|2)).$$

Tương tự, ta có

$$\mathrm{ch}(I_{\lambda_1,0,0,0}) = \frac{1}{\Pi}\Big[x_2^{\lambda_1+1}(x_2+y)(x_3-x_1)$$
$$+ x_3^{\lambda_1+1}(x_3+y)(x_1-x_2) + x_1^{\lambda_1+1}(x_1+y)(x_2-x_3)\Big], \tag{3.13}$$

do đó

$$\mathrm{ch}(I^*_{\lambda_1,0,0,0}) = \frac{1}{\Pi y}\Big[x_1^2(-x_2^{-\lambda_1+1}x_3 + x_2x_3^{-\lambda_1+1}) + x_2^2(-x_3^{-\lambda_1+1}x_1 + x_3x_1^{-\lambda_1+1})$$
$$+ x_3^2(-x_1^{-\lambda_1+1}x_2 + x_1x_2^{-\lambda_1+1}) + x_1^2y(-x_2^{-\lambda_1}x_3 + x_2x_3^{-\lambda_1})$$
$$+ x^2y(-x_3^{-\lambda_1}x_1 + x_3x_1^{-\lambda_1}) + x_3^2y(-x_1^{-\lambda_1}x_2 + x_1x_2^{-\lambda_1})\Big].$$

Vì vậy

$$\mathrm{ch}(I^*_{\lambda_1,0,0,0}) = \mathrm{ch}(V(0,0,-\lambda_1+1|1)).$$

3.5.2 Xây dựng biểu diễn bằng sử dụng phức Koszul K

Để xây dựng một lớp các biểu diễn khác của $GL(3|1)$, trước hết ta xét các phức K_a, với $a \neq 2$.

$$K_a : \ldots \xrightarrow{d_{k-1,l-1}} \Lambda_k \cdot S_l^* \xrightarrow{d_{k,l}} \Lambda_{k+1} \cdot S_{l+1}^* \xrightarrow{d_{k+1,l+1}} \cdots \text{ với } a := l-k$$

Phức K_2 khớp tại mọi thành phần, ngoại trừ tại thành phần $\Lambda_3 \otimes S_1^*$, có nhóm đồng điều một chiều trên k, nhóm đồng điều này được ký hiệu là $I_{1,1,1,-1}$. Từ $\Lambda_4.I_{1,1,1,-1} = I_{2,2,2,0}$, suy ra

$$\mathrm{ch}(I_{1,1,1,-1}) = x_1x_2x_3y^{-1}. \tag{3.14}$$

Bằng cách dùng tính chất khớp của phức Koszul K, ta xây dựng một lớp các biểu diễn bất khả qui của $GL(3|1)$. Trước hết, ta có

$$\Lambda_k.S_l^* = \mathrm{Im}d_{k-1,l-1} \oplus \mathrm{Im}d_{k,l}.$$

Hệ quả của điều này là mệnh đề sau (xem [7]).

Mệnh đề 3.5.1 *Mô đun* $\mathrm{Im}d_{k+1,l+1}$ *là đơn với mọi* (k,l) *thỏa mãn* $l,k \geq 1, l-k \neq 2.\square$

Dùng phương pháp qui nạp, ta có

$$\mathrm{ch}(\mathrm{Im}d_{k,l}) = \frac{Ry^{k-3}}{\Pi(x_1x_2x_3)^l}.a(l,l,0). \tag{3.15}$$

Đặt $M := \mathrm{Im}d_{m+2,m+p}.I_{1,1,1,-1}^{\otimes m-1}$, khi đó

$$\mathrm{ch}(M) = \frac{R}{\Pi(x_1x_2x_3)^{p+1}}.a(m+p,m+p,0),$$

suy ra

$$\mathrm{ch}(M^*) = \frac{R(x_1x_2x_3)^{-m}}{\Pi y^3}.a(m+p,0,0),$$

Vì vậy

$$\mathrm{ch}(M) = \mathrm{ch}(V(m,m,-p|0)),$$

$$\mathrm{ch}(M^*) = \mathrm{ch}(V(p+1,-m+1,-m+1|3)).$$

Tóm lại: ta đã xây dựng được các biểu diễn bất khả qui, với trọng cao nhất thuộc tập hợp

$$\{(m,n,p|-q),(-p,-n,-m|q) : m \geq n \geq p \geq 0, q \geq 0\}$$

$$\cup\{(m,m,-p|0),(p,-m,-m|0) : m,p \geq 1\}.$$

Tiếp theo, chúng ta xây dựng các biểu diễn có đặc trưng bằng với đặc trưng của biểu diễn bất khả qui, tương ứng với trọng cao nhất thuộc tập hợp

$$\{(n,0,-p|0) : n,p \geq 1\} \cup \{(m+a,m,-p|0) : m,a,p \geq 1\}.$$

3.5.3 Xây dựng biểu diễn bằng cách sử dụng phức Koszul kép

Theo Mệnh đề 3.3.1, tồn tại Y sao cho $S_n.S_p^* = S_{n-1}.S_{p-1}^* \oplus Y$. Dễ dàng thấy

$$\mathrm{ch}(Y) = \frac{(x_1x_2x_3)R}{\Pi y}\Big[\frac{{x_2}^{-p-1}x_3^n - x_2^n{x_3}^{-p-1}}{x_1+y} + \frac{{x_3}^{-p-1}x_1^n - x_3^n{x_1}^{-p-1}}{x_2+y} + \frac{{x_1}^{-p-1}x_2^n - x_1^n{x_2}^{-p-1}}{x_3+y}\Big] \text{với} \quad n,p \geq 1,$$

vì vậy Y có trọng cao nhất là $(n,0,-p+1|1)$, nên

$$\mathrm{ch}(Y) = \mathrm{ch}(V(n,0,-p+1|1)).$$

Tiếp theo, ta xây dựng các biểu diễn có đặc trưng bằng với đặc trưng của biểu diễn bất khả qui, có trọng cao nhất $\lambda = (m+a,m,-p,0) : m,p,a \geq 1$. Xét sơ đồ (3.3), ta thu được một số kết quả sau đây:

Theo Mệnh đề 3.3.2, ta có $S_1 \cdot \mathrm{Im}d_{2,n+1} = \Lambda_3. \cdot S_{n+1}^* \oplus Z_1$, suy ra

$$\mathrm{ch}(Z_1) = \frac{R}{\Pi y(x_1x_2x_3)^{n+1}}.a(n+2,n+1,0).$$

Vì vậy Z_1 có trọng cao nhất $(2, 1, -n+1|1)$, do đó

$$\mathrm{ch}(Z_1) = \mathrm{ch}(V(2, 1, -n+1|1)).$$

Theo Mệnh đề 3.3.2, ta có

$$\mathrm{Im}(Id_{I_{k,0,0,0}} \cdot d_{l,m}) = \mathrm{Ker}P_{k-1,l+1} \cdot I^*_{m,0,0,0} \oplus Z_k,$$

suy ra

$$\mathrm{ch}(Z_k) = \mathrm{ch}[\mathrm{Im}(Id_{I_{k,0,0,0}} \cdot d_{l,m})] - \mathrm{Ker}P_{k-1,l+1} \cdot I^*_{m,0,0,0}).$$

Theo các công thức (3.8), (3.13) và (3.15), ta có

$$chZ_k = \frac{R(x_1x_2x_3)^{-m}y^{l-3}}{\Pi}.a(k+m, m-1, 0).$$

Đặt $M := Z_k \cdot I^{\otimes(l-2)}_{1,1,1,-1}$, khi đó

$$\mathrm{ch}(M) = \frac{R(x_1x_2x_3)^{-p}}{\Pi y}a(m+p+a-1, m+p-1, 0),$$

với $a := l-1, p := -m-2+l$. Dễ thấy

$$\mathrm{ch}(M^*) = \frac{R(x_1x_2x_3)^{-m-a}}{\Pi y^2}.a(m+a+p-1, a, 0).$$

Do đó M có trọng cao nhất là $(m+a, m, -p+1|1)$ và M^* có trọng cao nhất $(p+1, -m+1, -m-a+1|3)$. Vì vậy

$$\mathrm{ch}M = \mathrm{ch}V(m+a, m, -p+1|1), \quad \mathrm{ch}(M^*) = \mathrm{ch}V(p+1, -m+1, -m-a+1|3)$$

Tóm lại, với bất kỳ một trọng cao nhất $(m, n, p|q)$ nào, chúng ta xây dựng được một biểu diễn có trọng cao nhất $\lambda = (m, n, p|q)$, với đặc trưng bằng với đặc trưng của biểu diễn bất khả qui $V(\lambda)$. Do đó tập các biểu diễn xây dựng được là bất khả qui và là tất cả các biểu diễn của siêu nhóm tuyến tính $GL(3|1)$.

• **Kết luận** Trong chương này chúng tôi đưa ra một xây dựng tường minh tập tất cả các biểu diễn bất khả qui của siêu nhóm tuyến tính $GL(3|1)$, bằng sử dụng phức Koszul K, L và phức Koszul kép xây dựng từ các phức Koszul K, L.

Chương 4

Biểu diễn bất khả qui của $GL_q(3|1)$

Mục đích của chương này là phân loại các biểu diễn bất khả qui của đại số Hopf liên kết với đối xứng Hecke có song hạng $(3,1)$. Sử dụng các phức Koszul kép đã giới thiệu trong Chương 3, ta thu được một số kết quả tương tự. Từ đó xây dựng được một lớp các biểu diễn của $GL_q(3|1)$.

Trong Chương 2, dùng phức Koszul K, ta xây dựng được tất cả các biểu diễn bất khả qui của H_R.

Khi đối xứng Hecke có song hạng $(3,1)$, sử dụng phức Koszul K, chúng tôi chỉ xây dựng được một lớp các biểu diễn bất khả qui của H_R. Dùng phức Koszul kép (với các phức Koszul K, L là các phức trong trường hợp lượng tử), và các tính chất của phức Koszul kép này, chúng tôi xây dựng được một lớp các biểu diễn khác của H_R. Các biểu diễn này có thể được đánh số bởi tập các bộ số nguyên (m, n, p, q) thỏa mãn điều kiện $m \geq n \geq p$. Chúng tôi dự đoán rằng tập các biểu diễn xây dựng được là bất khả qui và là tất cả các biểu diễn bất khả qui của H_R.

4.1 Một số tính chất của phức Koszul kép

Chúng tôi thu được một số kết quả sau đây.

Mệnh đề 4.1.1 *Ánh xạ hợp thành* $g := \partial PQd : S_k \cdot S_b^* \longrightarrow S_k \cdot S_b^*$ *trong sơ đồ (3.4) là một đẳng cấu với mọi* $k \geq 0$. *Khi đó ta có* $S_k \cdot S_b^*$ *đẳng cấu với một thành phần trực tiếp của* $S_{k+1} \cdot S_{b+1}^*$.

Chứng minh. Bằng qui nạp, ta chứng minh ánh xạ $\partial PQd : S_k \cdot S_b^* \longrightarrow S_k \cdot S_b^*$ chéo hóa được, với các trị riêng là tập hợp A_k, trong đó

$$A_k := \Big\{ \frac{([a+k+1-j]-[-2])[j]}{[k+1][a+k+1]} : j := 1, 2, \cdots, k+1. \Big\}.$$

Các công thức được sử dụng ở đây là (1.8) và (1.9). Với $k = 0$, ánh xạ $PQ : S_a^* \longrightarrow S_a^* = \mathrm{id}$, suy ra $g = \partial PQd = \frac{([a]-[-2])}{[a+1]}\mathrm{id}$.

Giả sử mệnh đề là đúng với $k-1$. Xét ánh xạ

$$h := \partial PQd = \partial[\frac{[k+1]-[2][k]QP}{(k+1)}]d = \partial d - \frac{[2][k]}{[k+1]}\partial QPd$$
$$= \partial d - \frac{[2][k]}{[k+1]}Q\frac{[q([a+k-1]-[-2])-[a+k]d\partial]}{[2][a+k+1]}P$$
$$= \partial d - \frac{q[k][([a+k-1]-[-2])]}{[k+1][a+k+1]}QP + \frac{[k][a+k]}{[k+1][a+k+1]}Qd\partial P$$
$$= \Big[\frac{[a+k]-[-2]}{[a+k+1]} - \frac{q[k]([a+k-1]-[-2]))}{[k+1][a+k+1]}\Big]\mathrm{Id} + \frac{[k][a+k]}{[k+1][a+k+1]}Qd\partial P.$$

Theo giả thiết qui nạp và công thức (3.4), ánh xạ $\partial PQd : S_{k-1} \cdot S_{b-1}^* \longrightarrow S_{k-1} \cdot S_{b-1}^*$ chéo hóa được, với tập trị riêng A_{k-1}, nên $Qd\partial P : S_k \cdot S_b^* \longrightarrow S_k \cdot S_b^*$ chéo hóa được, với tập các trị riêng là $A_{k-1} \cup \{0\}$. Vì vậy, dễ thấy $\partial PQd : S_k \cdot S_b^* \longrightarrow S_k \cdot S_b^*$ chéo hóa được, với tập các giá trị riêng là A_k.$\square$

Xét sơ đồ (3.7), ta thu được các kết quả sau:

Mệnh đề 4.1.2 *Ánh xạ hợp thành*

$$P\partial dQ : \mathrm{Ker}P_{i,k+1} \cdot S^*_{a+i+k+1} \longrightarrow \mathrm{Ker}P_{i,k+1} \cdot S^*_{a+i+k+1}$$

trong sơ đồ (3.7) là một đẳng cấu. Khi đó $\mathrm{Ker}P_{i,k+1} \cdot S^*_{a+i+k+1}$ *đẳng cấu với một thành phần trực tiếp của* $S_{i+1} \cdot \mathrm{Im}d_{k,a+i+k+1}$.

Chứng minh. Bằng phương pháp qui nạp, ta chứng minh ánh xạ

$$P\partial dQ : \mathrm{Ker}P_{i,k+1} \cdot S^*_{a+i+k+1} \longrightarrow \mathrm{Ker}P_{i,k+1} \cdot S^*_{a+i+k+1}$$

chéo hóa được với tập các trị riêng A_i, trong đó

$$A_i := \Big\{ \frac{q^k([a+k+2i-j+2]-[-2])[j]}{[i+1][k+1]^2[a+i+k+2]} : j = 1, 2, \cdots, i+1, i+k+1 \Big\}.$$

Với $i = 0$, xét sơ đồ sau:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \Lambda_{k+1} \cdot S^*_{a+k+1} \arrow[r, shift left] \arrow[d, dashed, shift right, "Q"'] & \Lambda_{k+2} \cdot S^*_{a+k+2} \cdots \arrow[l, dashed, shift left, "\partial"'] \arrow[d, dashed, shift right] \\
\cdots S_1 \cdot \Lambda_k \cdot S^*_{a+k+1} \arrow[r, shift right, "d"'] \arrow[u, shift right, two heads, "\bar{P}"'] & S_1 \cdot \Lambda_{k+1} \cdot S^*_{a+k+2} \cdots \arrow[l, dashed, shift right, "\partial"'] \arrow[u, shift right, two heads]
\end{tikzcd}$$

Xét ánh xạ hợp thành $P\partial DQ : \Lambda_{k+1} \cdot S^*_{a+k+1} \longrightarrow \Lambda_{k+1} \cdot S^*_{a+k+1}$. Theo các công thức (1.8) và (1.9), ta có

$$\begin{aligned}
P\partial dQ &= P\frac{[q^k([a+1]-[-2]) - [k][a+k+1]d\partial]}{[k+1[[a+k+2]}Q \\
&= \frac{q^k([a+1]-[-2])}{[k+1][a+k+2]}\mathrm{Id} - \frac{[k][a+k+1]}{[k+1][a+k+2]}d\partial.
\end{aligned}$$

Vì $d\partial$ chéo hóa được, với các trị riêng là 0 và $\frac{[a]-[-2]}{[k+1][a+k+1]}$, nên $P\partial dQ$ chéo hóa được, với các trị riêng thuộc A_0, trong đó

$$A_0 := \Big\{ \frac{q^k[k+1]([a+1]-[-2])}{[k+1]^2[a+k+2]}, \frac{q^k([a+k+1]-[-2])}{[k+1]^2[a+k+2]} \Big\}.$$

Với $i=1$, xét $P\partial dQ : \mathrm{Ker}P_{1,k+1}\cdot S^*_{a+k+2} \longrightarrow \mathrm{Ker}P_{1,k+1}\cdot S^*_{a+k+2}$, khi đó

$$\begin{aligned}
P\partial dQ &= P\frac{[q^k([a+2]-[-2])-q[k][a+k+2]d\partial]}{[k+1][a+k+3]}Q\\
&= \frac{q^k([a+2]-[-2])}{[k+1][a+k+3]}PQ - \frac{q[k][a+k+2]}{[k+1][a+k+3]}dPQ\partial\\
&= \frac{q^k([a+2-[-2])[k+2]}{[2][k+1]^2[a+k+3]}\mathrm{Id} - \frac{q[k][a+k+2]}{[k+1][a+k+3]}d[\frac{[k+1]-[k+1]QP}{[2][k]}]\partial\\
&= \frac{q^k([a+2]-[-2])[k+2]}{[2][k+1]^2[a+k+3]}\mathrm{Id} - \frac{q[a+k+2]}{[2][a+k+3]}d\partial + \frac{q[a+k+2]}{[2][a+k+3]}dQP\partial.
\end{aligned}$$

Ta có $d\partial : S_1\cdot\Lambda_{k+1}\cdot S^*_{a+k+2} \longrightarrow S_1\cdot\Lambda_{k+1}\cdot S^*_{a+k+2}$ chéo hóa được, với các trị riêng là $\frac{q^{k+1}([a+1]-[-2])}{q[k+1][a+k+2]}$ và 0. Mặt khác, dễ thấy $d\partial\circ dQP\partial = dQP\partial\circ d\partial$, do đó, nếu $d\partial(x)=0$, thì $dQP\partial(x)=0$. Vì vậy $P\partial dQ : \mathrm{Ker}P_{1,k+1}\cdot S^*_{a+k+2} \longrightarrow \mathrm{Ker}P_{1,k+1}\cdot S^*_{a+k+2}$ chéo hóa được, với các trị riêng thuộc A_1, trong đó

$$\begin{aligned}
A_1 :=& \Big\{\frac{q^k([a+2]-[-2])[k+2]}{[2][k+1]^2[a+k+3]}, \frac{q^k([a+k+3]-[-2])}{[2][k+1]^2[a+k+3]},\\
&\frac{q^k[2]([a+k+2]-[-2])}{[2][k+1]^2[a+k+3]}\Big\}.
\end{aligned}$$

Tổng quát, trong sơ đồ (3.7), xét ánh xạ hợp thành

$$P\partial dQ : \mathrm{Ker}P_{i,k+1}\cdot S^*_{a+i+k+1} \longrightarrow \mathrm{Ker}P_{i,k+1}\cdot S^*_{a+i+k+1}.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
P\partial dQ &= P[\frac{q^k([a+i+1]-[-2])-q[k][a+i+k+1]d\partial}{[k+1][a+i+k+2]}]Q\\
&= \frac{q^k([a+i+1]-[-2])}{[k+1][a+i+k+]}PQ - \frac{q[k][a+i+k+1]}{[k+1][a+i+k+2]}dPQ\partial\\
&= \frac{q^k([a+i+1]-[-2])[i+k+1]}{[k+1]^2[i+1][a+i+k+2]}\mathrm{Id}\\
&- \frac{q[k][a+i+k+1]}{[k+1][a+i+k+2]}d[\frac{[i+k]-[i][k+1]QP}{[k][i+1]}]\partial\\
&= \frac{q^k([a+i+1]-[-2])[i+k+1]}{[k+1]^2[i+1][a+i+k+2]}\mathrm{Id} - \frac{q[i+k][a+i+k+1]}{[k+1][i+1][a+i+k+2]}d\partial\\
&+ \frac{q[i][a+i+k+1]}{[i+1][a+i+k+2]}dQP\partial.
\end{aligned}$$

Ánh xạ $d\partial$ chéo hóa được, với các trị riêng là $\frac{q^k([a+i]-[-2])}{[k+1][a+i+k+1]}$,0 và $d\partial \circ dQP\partial = dQP\partial \circ d\partial$. Mặt khác, nếu $d\partial(x) = 0$, thì dễ dàng thấy $dQP\partial(x) = 0$. Theo giả thiết qui nạp, $P\partial dQ : \mathrm{Ker}P_{i-1,k+1} \cdot S^*_{a+i+k} \longrightarrow \mathrm{Ker}P_{i-1,k+1} \cdot S^*_{a+i+k}$ chéo hóa được, với các trị riêng thuộc A_{i-1}, nên $dQP\partial : \mathrm{Ker}P_{i,k+1} \cdot S^*_{a+i+k+1} \longrightarrow \mathrm{Ker}P_{i,k+1} \cdot S^*_{a+i+k+1}$ chéo hóa được, với các trị riêng thuộc $A_{i-1} \cup \{0\}$. Vì vậy ánh xạ $P\partial dQ : \mathrm{Ker}P_{i,k+1} \cdot S^*_{a+i+k+1} \longrightarrow \mathrm{Ker}P_{i,k+1} \cdot S^*_{a+i+k+1}$ trong sơ đồ trên là chéo hóa được, với tập các trị riêng A_i. $\square$

Cho R là đối xứng Hecke với song hạng $(3,1)$. Tập các E_R đối mô đun đơn được đánh số bởi tập các phân hoạch λ. Vì vậy, với mọi bộ số nguyên (m,n,p,q) thỏa mãn $m \geq n \geq p \geq 0, q \geq 0$, và nếu $p = 0$ suy ra $q = 0$, ta đặt $I_{m,n,p,q} := I_\lambda$, với $\lambda = (m,n,p,1^q)$.

Theo [16], phức K_2 là khớp tại mọi thành phần, ngoại trừ tại thành phần $K_{3,1}$, có đồng điều 1 chiều, ký hiệu đối mô đun này là $I_{1,1,1,-1}$. Để xây dựng các biểu diễn bất khả qui của $GL_q(3|1)$, ứng với các bộ số nguyên (m, n, p, q), thỏa mãn điều kiện $m \geq n \geq p$, trước hết ta đặt

$$I_{m,n,p,q} := I_{m+q,n+q,p+q,0} \otimes I_{1,1,1,-1}^{\otimes q}.$$

Vì vậy, ta chỉ cần xây dựng các biểu diễn bất khả qui được đánh số là $I_{m,n,p,0}$, ứng với các bộ số nguyên $(m, n, p, 0)$, thỏa mãn điều kiện $m \geq n \geq p$.

4.2 Xây dựng các biểu diễn của $GL_q(3|1)$

4.2.1 Xây dựng biểu diễn bằng sử dụng phân hoạch

Với $m \geq n \geq p \geq 0$, đặt $I_{m,n,p,0} := I_\lambda$, với $\lambda = (m, n, p)$.

Với $0 \geq m \geq n \geq p$, đặt $I_{m,n,p,0} := I^*_{-p,-n,-m,0}$.

Với $n = p = 0$, đặt $I_{m,0,0,0} := S_m$.

Với $m = n = 0, p < 0$, đặt $I_{0,0,p,0} := S^*_{-p}$.

4.2.2 Xây dựng biểu diễn bằng sử dụng phức Koszul K

Để xây dựng các biểu diễn ứng với các bộ số nguyên còn lại, trước hết ta xét các phức có K_a, với $a \neq 2$.

$$K_{a=k-l} : \ldots \longrightarrow \Lambda_k.S_l^* \longrightarrow \Lambda_{k+1}.S_{l+1}^* \longrightarrow \Lambda_{k+2}.S_{l+2}^* \longrightarrow \ldots,$$

trong đó $d_{k,l} : \Lambda_k.S_l^* \longrightarrow \Lambda_{k+1}.S_{l+1}^*$. Với mọi $k \geq 3, \Lambda_k$ là nội xạ và xạ ảnh, nên $\Lambda_k.S_l^*$ cũng là nội xạ và xạ ảnh (xem [13]). Ta có

$$\Lambda_k.S_l^* = \mathrm{Im}d_{k-1,l-1} \oplus \mathrm{Im}d_{k,l} = I_{1,1,2-l,k-4} \oplus I_{1,1,1-l,k-3}, \tag{4.1}$$

với $I_{1,1,1-l,k-3} := \mathrm{Im}d_{k,l}, k \geq 3$. Dễ dàng chứng minh được $\mathrm{Im}d_{k,l}$ đơn với mọi $k \geq 3$. Bằng các nhân ten xơ với $I_{1,1,1,-1}^{\otimes k-3}$, ta xây dựng được các biểu diễn, các biểu diễn này được đánh số bởi các bộ số nguyên $(m, m, -p, 0)$: $m \geq 1, p \geq 1$. Như vậy, ta xây dựng được các biểu diễn bất khả qui, được đánh số bởi các bộ số nguyên $(m, m, -p, 0) : m, p \geq 1$, ký hiệu là $I_{m,m,-p,0}$ tương ứng.

Tiếp theo, ta xây dựng các biểu diễn được đánh số bởi các bộ số nguyên $(m, 0, -p, 0)$ với mọi $m \geq 1, p \geq 0$.

Với $p = 0$, đặt $I_{m,0,0,0} := S_m$. Xét phức

$$0 \longrightarrow S_{m-1}^* \xrightarrow{d_{0,m-1}} \Lambda_1.S_m^* \xrightarrow{d_{1,m}} \Lambda_2.S_{m+1}^* \longrightarrow \dots.$$

Phức này là khớp, nên ta có

$$\Lambda_1 \cdot S_m^* = \mathrm{Im}d_{0,m-1} \oplus \mathrm{Im}d_{1,m} = S_{n-1}^* \oplus \mathrm{Im}d_{1,m}.$$

Vì vậy, đặt $I_{1,0,-m,0} := \mathrm{Im}d_{1,m}$.

4.2.3 Xây dựng biểu diễn bằng sử dụng phức Koszul kép

Chúng tôi sẽ xây dựng các biểu diễn được đánh số bởi các bộ số nguyên $(k, 0, -m, 0) : m \geq 1$, ký hiệu tương ứng là $I_{k,0,-m,0}$. Theo Mệnh đề 4.1.1, tồn tại Y, sao cho

$$S_k \cdot S_m^* = S_{k-1} \cdot S_{m-1}^* \oplus Y.$$

Đặt $I_{k,0,-m,0} := Y$. Vì vậy, ta xây dựng được các biểu diễn, chúng được đánh số bởi các bộ số nguyên $(k, 0, -m, 0) : k, m \geq 1$, ký hiệu là $I_{k,0,-m,0}$.

Cuối cùng, ta xây dựng các biểu diễn được đánh số bởi các bộ số nguyên $(m+t, m, -p, 0) : m, p, t \geq 1$, ký hiệu là $I_{m+t,m,-p,0}$.

Theo Mệnh đề 4.1.2, vì $\mathrm{Ker}P_{i,k} \cdot S_l^*$ là đẳng cấu với một thành phần trực tiếp của $S_{i+1} \cdot \mathrm{Im}d_{k-1,l}$ với mọi i, k, l thỏa mãn $i + k + a = l$, nên tồn tại đối mô đun X_{i+1}, sao cho

$$S_{i+1} \cdot \mathrm{Im}d_{k-1,i+k+a} = \mathrm{Ker}P_{i,k} \cdot S_{i+k+a}^* \oplus X_{i+1}.$$

Đặt $I_{i+1,1,-i-k-a,k-1} := X_{i+1}$. Nhân ten xơ cả hai vế với $I_{1,1,1,-1}^{\otimes k-1}$, ta thu được $I_{i+k,k,-a-i-1,0}$. Đặt $m := k, t := i, p := -a-i-1$, do đó xây dựng được tập các biểu diễn được đánh số bởi các bộ số nguyên $(m+t, m, -p, 0)$ với mọi $m, t, p \geq 1$.

• **Kết luận** Trong chương này chúng tôi xây dựng được một lớp các biểu diễn của $GL_q(3|1)$, các biểu diễn này được đánh số bởi tập các số nguyên có dạng $(m, n, p, q) : m \geq n \geq p$. Chứng minh được một lớp các biểu diễn xây dựng được là bất khả qui.

Kết luận của luận án

1. Chuỗi Poincaré của các đại số toàn phương liên kết với đối xứng Hecke có tử thức là đa thức có tính chất thuận nghịch, mẫu thức là đa thức có tính chất đối thuận nghịch, và các đa thức này là có hệ số nguyên.

2. Các biểu diễn bất khả qui của nhóm lượng tử liên kết với đối xứng Hecke có song hạng $(2,1)$ có thể được đánh số bởi các bộ số nguyên (m,n,p) : $m \geq n$.

3. Xây dựng tường minh các biểu diễn bất khả qui của siêu nhóm tuyến tính $GL(3|1)$, nhờ việc sử dụng phức Koszul kép.

4. Bước đầu xây dựng được một lớp các biểu diễn bất khả qui của siêu nhóm tuyến tính lượng tử $GL_q(3|1)$.

Các công trình liên quan đến luận án

1. N.P. Dung and P. H. Hai. On the Poincaré Series of Quadratic Algebras Associated to Hecke Symmetries, Int. Math. Res. Noti. 2003, No. 40, 2193 - 2203.

2. N. T. P. Dung and P. H. Hai. Irreducible representations of Quantum Linear Groups of type $A_{1|0}$. J. Alg. 2004, No. 282, 809 - 830

3.N. T. P. Dung. Double Koszul Complex and Construction of Irreducible Representations of $\mathfrak{gl}(3|1)$, Proc. AMS. (to appear).

Tài liệu tham khảo

[1] A. Berele and A. Regev. Hook Young Diagrams with Applications to Combinatorics and to Representation of Lie Algebras. *Adv. Math.* 64:118 - 175, 1987.

[2] F. A. Berezin. Introduction to superanalysis. *D. Reidel Publishing Company,* Volume 9.

[3] J. Brundan. Kazhdan - Lusztig polynomials and character formulae for the Lie superalgebra gl(m|m). *J. Amer. Math. Soc.*, 16:185 - 231, 2002.

[4] R. Dipper and G. James. Representations of Hecke Algebras of General Linear Groups. *Proc. London Math. Soc.*, 52(3):20 - 52, 1986.

[5] R. Dipper and G. James. Block and Idempotents of Hecke Algebras of General Linear Groups. *Proc. London Math. Soc.*, 54(3):57 - 82, 1987.

[6] N. P. Dung and P. H. Hai. On the Poincaré Series of Quadratic Algbras Associated to Hecke Symmetries. *Int. Math. Res. Noti.*, 40, 2193 - 2203, 2003.

[7] N. T. P. Dung and P. H. Hai. Irreducible Representation of Quantum Linear Groups of type $A_{1|0}$. *J. Alg.*, 282, 809 - 830, 2004.

[8] N. T. P. Dung. Double Koszul Complex and Construction of Irreducible Representations of $\mathfrak{gl}(3|1)$. *Proc. AMS. (to appear)*

[9] D. I. Gurevich. Algebraic Aspects of the quantum Yang - Baxter equation. *Leningrad Math. J.*, 2(4)801 - 828, 1987.

[10] P. H. Hai. Koszul Property and Poincaré Series of Matrix Bialgebra of Type A_n. *J. Alg.*, 192(2):734 - 748, 1997.

[11] P. H. Hai. Poincaré Series of Quantum Spaces Associated to Hecke Operators. *Acta Math. Vietnam.*, 24(2):236 - 246, 1999.

[12] P. H. Hai. On Matrix Quantum Groups of Type A_n. *Int. J. of Math.*, 11(9):1115 - 1146, 2000.

[13] P. H. Hai. Splitting comodules over Hopf algebras and application to representation theory of quantum groups of type $A_{0|0}$. *J. of Algebra*, 245(1):20 - 41, 2001.

[14] P. H. Hai. The integral on quantum super groups of type $A_{r|s}$. *Asian J. of Math.*, 5(4):751 - 770, 2001.

[15] P. H. Hai. On representation theory of matrix quantum groups of type A. *Vietnam J. of Math.*, 33(3): 357 - 367, 2005.

[16] P. H. Hai. The Homological Determinant of Quantum Groups of type A. *Proc. AMS.*, 133(7): 1897 - 1905, 2005

[17] V. G. Kac. Classification of simple Lie superalgebras. *Funct. Anal. Appl.*, 9:263 - 265, 1975.

[18] V. G. Kac. Lie superalgebras. *Adv. Math.* 26:8 - 96, 1977.

[19] V. G. Kac. Character of typical representations of classical Lie superalgebras. *Comm. Alg.*, 5:889 - 897, 1977.

[20] V. G. Kac. Representations of classical Lie superalgebras. *in Lecture Notes in Math.*, 676:597 - 626, 1978.

[21] Ch. Kassel. Quantum Groups, volume 155 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer - Verlag, 1995. 531p.

[22] V. V. Lyubashenko. Hopf Algebras and Vector Symmetries. *Russion Math. Survey*, 41(5):153 -154, 1986.

[23] V. V. Lyubashenko and A. Sudbery. Quantum Super Groups of GL($n|m$) Type: Differential Forms, Koszul Complexes and Berezinians. *Duke Math. J.*, 90:1 - 62, 1997.

[24] I. G. Macdonald. Symmetric functions and the Hall polynomials. *Oxford University Press, New York,* 1979 (Second edition 1995).

[25] Yu. I. Manin. Quantum Groups and Non-commutative Geometry. *GRM, Univ. de Montreal,* 1988.

[26] Yu. I. Manin. Multiparametric Quantum Deformation of the General Linear Supergroups. *Comm. Math. Phys.*, 123:163 - 175, 1989.

[27] T. D. Palev, V. N. Tolstoy. Finite-Dimension Irreducible Representations of the Quantum Superalgebra $U_q[gl(n|1)]$. *Comm. Math. Phys.*, 141:549 - 558, 1991.

[28] N. Yu. Reshetikhin, L. A. Takhtadzhyan and L. D. Faddeev Quantization of Lie groups and lis algebras. *Leningrad Math.J.1,193 - 225*

[29] M. Scheunert. The Theory of Lie Superalgebras. *Lectune notes in Math., Springer - Verlag,*1978.

[30] M. Scheurt, R. B. Zhang. The general linear supergroup and its Hopf superalgebra of regular functions. *J. Alg.*, 254:44 - 83, 2002.

[31] M. Sweedler. Hopf Algebras. *Benjamin, New York,* 1969.

[32] A. Sudbery. Matrix-Element Bialgebras Determined by Quadratic Coordinate Algebras. *J. of Algebra*, 158:375 - 399, 1993.

[33] M. Takeuchi. Matric Bialgebras and Quantum Qroups. *Israel J. of Math.*, 72:232 - 251, 1990.

[34] M. Takeuchi and D. Tambara. A new one-parameter family of 2×2 quantum matrices. *Hokkaido Math. Journal*, XXI(3):409 - 419, 1992. See also *Proc. Japan. Acad.,* 67, no. 8, 267 - 269. 1991.

[35] Yucai Su, R. B. Zhang. Character and dimension formulae for general linear superalgebra. *Adv. Math.*, 211:1 - 33, 2007.