Tóm tắt

Trong luận án này, chúng tôi nghiên cứu các áp dụng của nguyên lý ánh xạ KKM trong nửa dàn tôpô.

Trong Chương 1, chúng tôi thu được các định lý tương giao, định lý điểm bất động, định lý điểm trùng, định lý minimax, định lý điểm bất động dạng Kakutani-Ky Fan.

Trong Chương 2, chúng tôi thu được các bất đẳng thức Ky Fan, định lý điểm cân bằng Nash cho trường hợp đa trị, sự tương đương giữa nguyên lý ánh xạ KKM và định lý điểm bất động Browder-Fan trong nửa dàn tôpô.

Trong Chương 3, chúng tôi chỉ ra sự tồn tại tập con cốt yếu cực tiểu liên thông của tập nghiệm của bất đẳng thức Ky Fan đa trị.

Abstract

In this thesis, we investigate some applications of KKM mapping principle in topological semilattices.

In Chapter 1, we obtain some results as intersection theorems, fixed point theorems, coincidence theorems, minimax theorem, Kakutani-Ky Fan type fixed point theorem.

In Chapter 2, we obtain set-valued versions of some basic results as Ky Fan inequality, Nash equilibrium point and the equivalence of KKM principle and Browder-Fan fixed point theorem in topological semilattices.

In Chapter 3, we deduce the existence of essential components of the solution set of a set-valued Ky Fan inequality.

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các kết quả của luận án là mới và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác. Các kết quả được công bố chung trong một bài Preprint đã được đồng tác giả cho phép sử dụng trong luận án.

Tác giả

Nguyễn Thế Vinh

Mục lục

Một số ký hiệu dùng trong luận án

$\mathbb{R}^n$: không gian Euclide n chiều.

Δ_n : đơn hình n chiều trong $\mathbb{R}^n$ với các đỉnh $e_0, e_1, ..., e_n$.

$intC$: phần trong của tập C, $\overline{C}$: bao đóng của tập C.

$co\{x_1, x_2, ..., x_n\}$: bao lồi của n phần tử $x_1, x_2, ..., x_n$.

$\Delta(A)$: bao Δ-lồi của tập hữu hạn A.

$CO_\Delta(E)$: bao Δ-lồi của tập E (bất kỳ).

2^X : họ tất cả các tập con của X.

$K(X)$: họ tất cả các tập con compắc khác rỗng của X.

$\langle X \rangle$: họ tất cả các tập con hữu hạn khác rỗng của X.

$[x_1, x_2]$: khoảng thứ tự giữa hai phần tử $x_1 \leq x_2$.

$\sup\{x_1, x_2\}$: cận trên đúng của hai phần tử x, y.

$\sup A$: cận trên đúng của tập hữu hạn A.

$dom(F)$: miền xác định của ánh xạ đa trị F.

$H(C, D)$: khoảng cách Hausdorff giữa hai tập hợp C, D.

$Graph(F)$: đồ thị của ánh xạ F.

usc : ánh xạ nửa liên tục trên.

$usco$: ánh xạ nửa liên tục trên với giá trị compắc.

$S(f)$: tập nghiệm của bất đẳng thức Ky Fan suy rộng với ánh xạ f cho trước.

$e(f)$: tập cốt yếu trong $S(f)$.

Lời mở đầu

Một trong những định lý nổi tiếng nhất của Toán học trong thế kỷ trước là nguyên lý điểm bất động Brouwer. Đó là định lý trung tâm của lý thuyết điểm bất động và cũng là một trong những nguyên lý cơ bản của giải tích phi tuyến. Định lý này được Brouwer chứng minh năm 1912, dựa vào một công cụ rất sâu sắc của tôpô là lý thuyết bậc của ánh xạ liên tục nên khá phức tạp. Vì thế, nhiều nhà toán học đã tìm cách chứng minh nguyên lý điểm bất động Brouwer bằng những công cụ đơn giản hơn. Năm 1929, ba nhà toán học người Ba Lan là Knaster, Kuratowski và Mazurkiewicz đã chứng minh được một kết quả quan trọng mang tên "Bổ đề KKM" bằng phương pháp tương đối sơ cấp mà từ đó suy ra được nguyên lý điểm bất động Brouwer.

Bổ đề KKM được chứng minh dựa trên một kết quả của Sperner năm 1928 về phép tam giác phân một đơn hình, thuộc lĩnh vực toán học tổ hợp, một lĩnh vực tưởng chừng như không liên quan gì đến lý thuyết điểm bất động. Một điều thú vị nữa là từ nguyên lý điểm bất động Brouwer ta cũng chứng minh được bổ đề KKM, từ đó nguyên lý điểm bất động Brouwer và bổ đề KKM là tương đương với nhau. Từ đây bổ đề KKM đã đặt nền tảng và tạo bước ngoặt lớn cho sự phát triển của

"Lý thuyết KKM".

Mặc dù bổ đề KKM rất quan trọng, vì nó cho ta một chứng minh đơn giản nguyên lý điểm bất động Brouwer nhưng lại hạn chế do chỉ áp dụng được cho các không gian véctơ hữu hạn chiều. Để khắc phục điều này, năm 1961, nhà toán học nổi tiếng Ky Fan đã mở rộng bổ đề KKM cho trường hợp không gian véctơ tôpô bất kỳ. Định lý của Ky Fan ngày nay được gọi là "Nguyên lý ánh xạ KKM".

Nguyên lý ánh xạ KKM. *Giả sử E là không gian véctơ tôpô bất kỳ, X là tập con khác rỗng của E và $F : X \to 2^E$ là ánh xạ thỏa mãn*

(1) $F(x)$ là tập đóng với mọi $x \in X$;

(2) $co\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset \cup_{i=1}^n F(x_i)$ với mọi $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset X$;

(3) $F(x_0)$ là tập compắc với x_0 nào đó thuộc X.

Khi đó

$$\bigcap_{x \in X} F(x) \neq \emptyset.$$

Năm 1972, dựa vào nguyên lý ánh xạ KKM năm 1961, Ky Fan đã chứng minh được một kết quả quan trọng mà sau này người ta gọi là "Bất đẳng thức Ky Fan".

Bất đẳng thức Ky Fan. *Giả sử E là không gian véctơ tôpô bất kỳ, X là tập con lồi compắc khác rỗng của E và $f : X \times X \to \mathbb{R}$ là hàm số thỏa mãn*

(1) $f(x, x) \leq 0$ với mọi $x \in X$;

(2) $f(x, y)$ là tựa lõm theo x với mỗi y cố định;

(3) $f(x, y)$ là nửa liên tục dưới theo y với mỗi x cố định.

Khi đó tồn tại $y^* \in X$ sao cho $f(x, y^*) \leq 0$ với mọi $x \in X$.

Từ đây, bất đẳng thức Ky Fan trở thành một công cụ quan trọng để nghiên cứu các bài toán như: Tối ưu, bất đẳng thức biến phân, điểm bất động, điểm cân bằng Nash, điểm yên ngựa, ..., chẳng hạn xem [2, 3, 12].

Đến năm 1984, Ky Fan tiếp tục mở rộng nguyên lý ánh xạ KKM và chứng minh một số kết quả quan trọng như: Các định lý ghép đôi (matching) cho phủ đóng hay phủ mở của các tập lồi, các định lý điểm trùng và các định lý tương giao cho các tập với thiết diện lồi.

Có thể nói, từ đây nguyên lý ánh xạ KKM đã thu hút nhiều nhà toán học trên thế giới quan tâm và suy ra được các kết quả cơ bản cũng như nhiều kết quả mới khác về một số khía cạnh sau:

• Những định lý về sự tồn tại điểm bất động của ánh xạ đơn trị và đa trị liên tục của Brouwer, Schauder, Tikhonov, Ky Fan, ...

• Một số định lý về tính chất của tập lồi: Định lý ghép đôi, định lý thiết diện, định lý tương giao, ...

• Các bất đẳng thức minimax, các định lý về sự tồn tại nghiệm của bất đẳng thức biến phân, các định lý về sự tồn tại điểm cân bằng Nash, các kết quả về toán kinh tế.

Những kết quả quan trọng đó cùng rất nhiều các dạng mở rộng và tương đương đã được tập hợp lại dưới cái tên: Lý thuyết KKM. Lý thuyết này đã được sử dụng rộng rãi như một công cụ hữu ích trong các lĩnh vực như: Lý thuyết điểm bất động, lý thuyết minimax, toán kinh tế, tối ưu hoá, ...

Lý thuyết KKM đã được nghiên cứu cho rất nhiều lớp không gian khác nhau. Như chúng tôi đã nói ở trên, Ky Fan là người đặt nền móng cho việc nghiên cứu và phát triển lý thuyết KKM trong các không gian véctơ tôpô. Năm 1983, Lassonde đã chứng minh được định lý dạng KKM trong các không gian "lồi" để sau đó được phát triển bởi rất nhiều nhà toán học. Năm 1987, Horvath đã mở rộng cho trường hợp các c-không gian hay H-không gian. Năm 1991, Park đã nghiên cứu lý thuyết KKM trong một lớp không gian có tên là không gian G-lồi. Đặc biệt, năm 1996, Khamsi đã xây dựng được một dạng siêu lồi của nguyên lý ánh xạ KKM, mở đầu cho việc hình thành lý thuyết KKM trong các không gian metric siêu lồi. Năm 2009, nhiều kết quả mới về "Lý thuyết KKM" trong lớp không gian siêu lồi được công bố trong Luận án tiến sỹ của Lê Anh Dũng, xem [1].

Cũng trong năm 1996, Horvath và Llinares Ciscar [29] đã chứng minh được dạng nguyên lý ánh xạ KKM trong các nửa dàn tôpô và đã thu được một số kết quả bước đầu trong lớp không gian này. Sau đó, năm 2001, Luo [45] đã mở rộng các kết quả của Horvath và Llinares Ciscar đồng thời chứng minh được sự tồn tại điểm cân bằng Nash đơn trị với số người chơi hữu hạn. Các năm 2004, 2006, Luo [46, 47] đã tiếp tục nghiên cứu xa hơn nữa bằng việc mở rộng bất đẳng thức Ky Fan cho trường hợp đa trị. Tuy nhiên các kết quả thu được của Luo vẫn chưa phải là mở rộng thực sự bất đẳng thức Ky Fan trong nửa dàn tôpô.

Nhờ các nghiên cứu gần đây của GS. TSKH. Nguyễn Xuân Tấn về ánh xạ đa trị C-liên tục cùng với các kết quả của Thầy và TS. Nguyễn Bá Minh đã gợi ý cho chúng tôi chứng minh được các mở rộng thực sự của bất đẳng thức Ky Fan trong nửa dàn tôpô.

Hơn nữa, rất nhiều vấn đề khác về lý thuyết KKM trong nửa dàn tôpô như các định lý ghép đôi, tương giao, định lý điểm bất động Browder-Fan với nghịch ảnh đóng, định lý dạng Browder-Fan cho họ các ánh xạ đa trị, điểm cân bằng Nash đa trị cho trường hợp vô hạn người chơi, tính liên tục và liên thông của tập nghiệm, ... vẫn chưa được nghiên cứu đầy đủ. Đó là lý do chúng tôi chọn đề tài "Lý thuyết KKM trong nửa dàn tôpô và ứng dụng" để làm luận án tiến sỹ. Luận án trình bày các nghiên cứu mới về lý thuyết KKM trong các nửa dàn tôpô. Luận án được cấu trúc như sau. Ngoài phần mở đầu và phần kết luận, luận án chia làm ba chương:

Chương 1: Nguyên lý ánh xạ KKM suy rộng và các kết quả liên quan,

Chương 2: Bất đẳng thức Ky Fan đa trị và điểm cân bằng Nash đa trị,

Chương 3: Tính liên tục và liên thông của tập nghiệm.

Ở phần đầu Chương 1, chúng tôi giới thiệu về nửa dàn tôpô và nguyên lý ánh xạ KKM trong lớp không gian này do Horvath và Llinares Ciscar chứng minh năm 1996. Sau đó chúng tôi trình bày các nghiên cứu mới của mình. Mở đầu là một kết quả mở rộng nguyên lý ánh xạ KKM. Sau đó là các hệ quả như định lý ghép đôi, định lý tương giao, định lý điểm bất động Browder-Fan, sự tương đương giữa nguyên lý ánh xạ KKM và định lý điểm bất động Browder-Fan, định lý thiết diện và một số định lý điểm bất động khác cho ánh xạ đa trị, định lý điểm bất động dạng

Kakutani-Ky Fan trong nửa dàn. Cuối chương là các bất đẳng thức minimax và định lý minimax dạng Sion-Neumann.

Trong Chương 2, chúng tôi trình bày các mở rộng đa trị của bất đẳng thức Ky Fan cho các ánh xạ đa trị C-liên tục trong nửa dàn tôpô. Sau đó chúng tôi chứng minh một định lý điểm bất động dạng Browder-Fan cho họ bất kỳ các ánh xạ Browder và chứng minh sự tồn tại nghiệm của các hệ bất đẳng thức Ky Fan, điểm cân bằng Nash đa trị với số người chơi vô hạn. Cuối chương là sự tồn tại nghiệm tối ưu Pareto của hệ trò chơi đa mục tiêu.

Phần cuối cùng của luận án được trình bày trong Chương 3. Trong chương này, trước hết chúng tôi giới thiệu bài toán và trình bày các khái niệm liên quan như điểm cốt yếu, tập cốt yếu, thành phần cốt yếu của tập nghiệm của bất đẳng thức Ky Fan dạng đa trị trong nửa dàn tôpô.

Sau đó chúng tôi chứng minh tính nửa liên tục trên của tập nghiệm và sự tồn tại thành phần liên thông cốt yếu của tập nghiệm.

Hiện nay, lý thuyết KKM nói chung vẫn đang phát triển không ngừng. Chúng tôi hy vọng rằng luận án này sẽ góp phần làm phong phú thêm lý thuyết KKM trong nửa dàn tôpô và lý thuyết KKM nói chung.

Các kết quả của luận án được tác giả công bố và gửi đăng trong năm bài báo trên các tạp chí trong nước và quốc tế. Các kết quả này đã được báo cáo tại Seminar của Phòng Giải tích toán học-Viện Toán học, Bộ môn Giải tích-Trường Đại học Sư phạm Hà Nội và Báo cáo Nghiên cứu sinh hàng năm của Viện Toán học.

Luận án được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của thầy giáo, PGS. TSKH. Đỗ Hồng Tân. Tác giả xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc đến Thầy. Thầy đã truyền thụ kiến thức, từng bước định hướng nghiên cứu, giúp tác giả tiếp cận vấn đề một cách tự nhiên để từ đó có thể chủ động, tự tin trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu. Tấm gương nghiên cứu khoa học nghiêm túc và sự chỉ bảo ân cần của thầy Đỗ Hồng Tân đã giúp cho tác giả có ý thức trách nhiệm và quyết tâm cao khi hoàn thành luận án của mình.

Tác giả cũng xin bày tỏ lòng biết ơn tiến sĩ Charles D. Horvath, Đại học Perpignan (Pháp) đã cung cấp cho tác giả các công trình liên quan đến nửa dàn tôpô.

Tác giả xin chân thành cám ơn TS. Nguyễn Thị Thanh Hà, TS. Lê Anh Dũng, TS. Nguyễn Văn Khiêm đã động viên và góp nhiều ý kiến quý báu trong suốt thời gian tác giả tham gia Seminar "Một số vấn đề trong lý thuyết KKM và lý thuyết điểm bất động" do Bộ môn Giải tích, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội tổ chức.

Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn đến GS. TSKH. Nguyễn Xuân Tấn vì những chỉ dẫn tận tình và những ý kiến đóng góp quý báu của Thầy dành cho tác giả trong suốt thời gian học tập và nghiên cứu.

Tác giả xin chân thành cảm ơn GS. TSKH. Phạm Hữu Sách về những nhận xét xác đáng đối với dạng khởi thảo của luận án này.

Tác giả xin được nói lời cảm ơn chân thành tới Ban lãnh đạo Viện Toán học, Trung tâm Đào tạo Sau Đại học cùng toàn thể các thầy giáo, cô giáo, cán bộ và nhân viên của Viện Toán học đã tạo điều kiện và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian tác giả hoàn thành luận án của mình.

Tác giả xin được bày tỏ sự biết ơn đến Ban giám hiệu Trường Đại học Giao thông Vận tải Hà Nội, các Thầy Cô trong Bộ môn Toán giải tích, Khoa Khoa học cơ bản đã tạo mọi điều kiện thuận lợi để tác giả hoàn thành tốt nhiệm vụ học tập, nghiên cứu cũng như giảng dạy trong Nhà trường.

Xin gửi lời cảm ơn đặc biệt đến toàn thể bạn bè và người thân, những người đã động viên, giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận án này.

Hà Nội, tháng 02 năm 2011

Tác giả

Chương 1

Nguyên lý ánh xạ KKM suy rộng và các kết quả liên quan

Năm 1996, Horvath và Llinares Ciscar [29] đã chứng minh được dạng nguyên lý KKM trong nửa dàn tôpô. Trong chương này chúng tôi sẽ mở rộng kết quả của Horvath và Llinares Ciscar, từ đó suy ra nhiều kết quả khác như định lý ghép đôi, định lý tương giao dạng Berge-Klee, một số định lý điểm bất động cho ánh xạ đa trị. Một kết quả đáng chú ý là định lý điểm bất động dạng Browder-Fan với nghịch ảnh đóng. Sau cùng là một số kết quả như định lý điểm trùng, bất đẳng thức minimax và định lý minimax dạng Sion-Neumann cho ánh xạ đơn trị. Các kết quả mới của Chương 1 từ Mục 1.3 đến hết chương và được công bố trong bài báo [67].

1.1 Giới thiệu về nửa dàn tôpô

Các định nghĩa và ví dụ sau đây được trích trong bài báo [29].

Định nghĩa 1.1.1 *Tập sắp thứ tự bộ phận* $(X, \leqslant)$ *được gọi là nửa dàn trên nếu mỗi cặp phần tử bất kỳ* (x, y) *đều có cận trên đúng* $\sup\{x, y\}$. *Nửa dàn gọi là bị chặn nếu tồn tại phần tử* $\boldsymbol{1} \in X$ *sao cho* $x \leqslant \boldsymbol{1}$ *với mọi* $x \in X$. *Và* $(X, \leqslant)$ *gọi là nửa dàn tôpô nếu* X *là một không gian tôpô và ánh xạ* $X \times X \to X$, $(x, y) \mapsto \sup\{x, y\}$ *liên tục.*

Trên đây là định nghĩa của nửa dàn trên. Đương nhiên, ta cũng có thể xét các nửa dàn dưới (mỗi cặp phần tử đều có cận dưới lớn nhất). Nếu $(X, \leqslant)$ là nửa dàn trên và nếu ta đặt quan hệ $x_1 \leqslant' x_2$ với mọi $x_2 \leqslant x_1$, thì $(X, \leqslant')$ là nửa dàn dưới và ngược lại. Do đó từ nay về sau ta chỉ xét các nửa dàn trên và gọi đơn giản là các nửa dàn. Từ định nghĩa ta dễ dàng thấy rằng mỗi tập con hữu hạn khác rỗng A của nửa dàn X đều có cận trên đúng, kí hiệu bởi $\sup A$.

Trong một tập sắp thứ tự bộ phận $(X, \leqslant)$, hai phần tử bất kỳ x_1 và x_2 không nhất thiết so sánh được với nhau nhưng trong trường hợp $x_1 \leqslant x_2$, thì ta đặt

$$[x_1, x_2] := \{y \in X : x_1 \leqslant y \leqslant x_2\}$$

và gọi là một khoảng thứ tự (gọi đơn giản là khoảng).

Bây giờ ta giả sử rằng $(X, \leqslant)$ là nửa dàn và $A \subseteq X$ là tập con hữu hạn khác rỗng. Khi đó tập hợp

$$\Delta(A) := \cup_{a \in A}[a, \sup A]$$

hoàn toàn xác định (gọi là bao Δ-lồi của tập hữu hạn A) và ta có thể dễ dàng thấy rằng nó có những tính chất sau:

1. $A \subseteq \Delta(A)$;

2. Nếu $A \subseteq A'$ thì $\Delta(A) \subseteq \Delta(A')$.

Định nghĩa 1.1.2 *Ta nói rằng tập con $E \subseteq X$ là Δ-lồi nếu với mọi tập con hữu hạn khác rỗng $A \subseteq E$, ta đều có $\Delta(A) \subseteq E$.*

Ta hãy so sánh khái niệm tính lồi vừa định nghĩa ở trên với tính lồi theo nghĩa thông thường trong không gian véctơ. Nếu V là một không gian véctơ thực và nếu 2^V là họ tất cả các tập con của V thì ta có toán tử bao lồi $co : 2^V \to 2^V$ cho tương ứng mỗi tập con A của V với bao lồi của nó, $co(A)$.

Hiển nhiên bao lồi có các tính chất sau:

(i) $A \subseteq co(A)$,

(ii) Nếu $A \subseteq A'$ thì $co(A) \subseteq co(A')$,

(iii) $co(co(A)) = co(A)$.

Với một tập con E của V, dễ thấy các khẳng định sau là tương đương:

(i) E là tập lồi,

(ii) $co(E) = E$,

(iii) Nếu A là một tập con hữu hạn khác rỗng của E thì $co(A) \subseteq E$.

Tiếp theo ta chỉ ra sự khác nhau giữa toán tử Δ và toán tử bao lồi. Toán tử Δ chỉ xác định trên các tập con hữu hạn khác rỗng của X, vì vậy đồng nhất thức $\Delta(\Delta(A)) = \Delta(A)$ có thể vô nghĩa và ta không thể định nghĩa tập con Δ-lồi E của X là tập thoả mãn $\Delta(E) = E$.

Tuy nhiên ta có thể xây dựng một toán tử xác định trên 2^E theo cách sau:

Giả sử $\mathcal{C}$ là họ tất cả các tập con Δ-lồi của nửa dàn X. Nếu $(E_i)_{i\in I}$ là họ con tuỳ ý của $\mathcal{C}$ thì dễ thấy $\bigcap_{i\in I} E_i \in \mathcal{C}$. Giả sử A là tập con tuỳ ý của X, đặt

$$CO_\Delta(A) := \bigcap \Big\{ E \in \mathcal{C} : A \subseteq E \Big\}.$$

Ta thấy rằng:

(i) $A \subseteq CO_\Delta(A)$,

(ii) Nếu $A \subseteq A'$ thì $CO_\Delta(A) \subseteq CO_\Delta(A')$,

(iii) $CO_\Delta(CO_\Delta(A)) = CO_\Delta(A)$.

Hơn nữa, tập con E của X là Δ-lồi nếu và chỉ nếu $CO_\Delta(E) = E$.

Mặt khác, dễ thấy E là Δ-lồi khi và chỉ khi các điều kiện sau được thoả mãn:

(i) Nếu $x_1, x_2 \in E$ thì $\sup\{x_1, x_2\} \in E$;

(ii) Nếu $x_1, x_2 \in E$ và $x_1 \leqslant x_2$ thì $[x_1, x_2] \subseteq E$.

hoặc nếu điều kiện sau đúng:

(iii) Nếu $x_1, x_2 \in E$ thì $[x_1, \sup\{x_1, x_2\}] \subseteq E$.

Ví dụ 1.1.1 *Trong $\mathbb{R}^2$, ta đặt*

$$X := \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ y = 1\} \cup \{(x, y) : x = 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}.$$

Thứ tự bộ phận trên X là thứ tự bộ phận thông thường của $\mathbb{R}^2$. Khi đó X là nửa dàn tôpô.

Hiển nhiên ví dụ trên có thể mở rộng cho trường hợp $\mathbb{R}^n$.

Ví dụ 1.1.2 *Giả sử $(X_i, \leqslant_i),\ i \in I$, là họ các nửa dàn tôpô và X là không gian tích với tôpô tích*

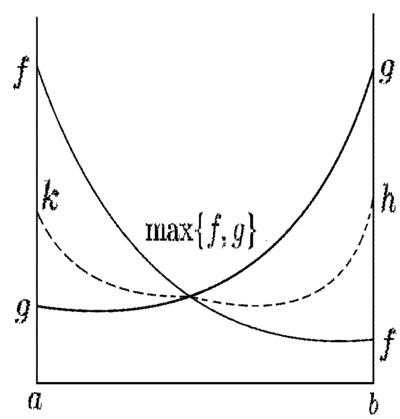
$$X := \prod_{i \in I} X_i.$$

Ta đưa vào X quan hệ thứ tự bộ phận như sau: với $x,\ x' \in X = \prod_{i\in I} X_i$, ta xác định $x \leqslant x'$ nếu và chỉ nếu $x_i \leqslant_i x'_i$ với mỗi $i \in I$. Khi đó $(X, \leqslant)$ là nửa dàn tôpô với $[\sup\{x, x'\}]_i = \sup\{x_i, x'_i\}$ với mỗi $i \in I$.

Ví dụ 1.1.3 *Giả sử $(X_i, \leqslant_i)$ là tập sắp thứ tự toàn phần. Khi đó nó là nửa dàn. Hơn nữa, nếu X_i cũng là không gian tôpô và đồ thị của quan hệ $\leqslant_i$ là không gian con đóng của $X_i \times X_i$ thì $(X_i, \leqslant_i)$ là nửa dàn tôpô. Áp dụng cách xây dựng của ví dụ trước cho họ $(X_i, \leqslant_i)$, $i \in I$ các tập sắp thứ tự toàn phần, ta có một nửa dàn tôpô.*

Ví dụ 1.1.4 *Không gian $C[a, b]$ là nửa dàn tôpô với quan hệ thứ tự thông thường*

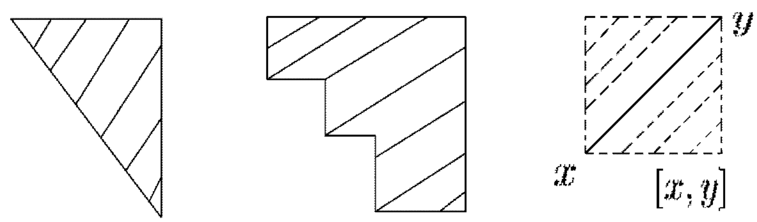
$$f \leq g \Longleftrightarrow f(x) \leq g(x),\ \forall x \in [a, b].$$



Hình 1.1

Như vậy từ hình vẽ ta thấy bao Δ-lồi của hai hàm f và g gồm các phần tử f, g, $\max\{f, g\}$ và mọi hàm h nằm giữa f và $\max\{f, g\}$, mọi hàm k nằm giữa g và $\max\{f, g\}$.

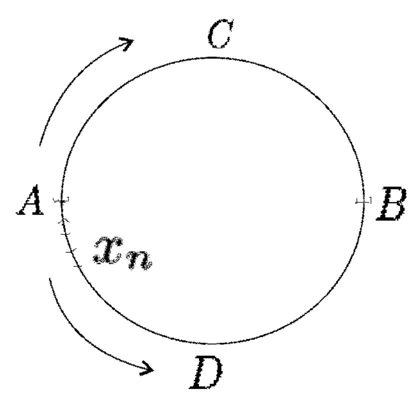
Ví dụ 1.1.5 *Không gian $\mathbb{R}^2$ là nửa dàn tôpô với quan hệ thứ tự thông thường $x \leq y \Longleftrightarrow x_i \leq y_i$, $i = 1, 2$.*



Hình 1.2

Các tập ở Hình 1.2 đều là các tập Δ-lồi. Tuy nhiên tập ở giữa không lồi theo nghĩa thông thường.

Ví dụ 1.1.6 *Xét đường tròn như hình vẽ dưới đây.*



Hình 1.3

Ta gọi $X := [ACB] \cup (ADB)$, ở đây ký hiệu $[ACB]$ để chỉ cung ACB tính cả hai đầu mút A, B và (ADB) chỉ cung ADB không tính hai đầu mút A, B.

Xây dựng quan hệ thứ tự trên X: Ở mỗi nhánh cung, ta quy ước chiều tăng là chiều mũi tên như hình vẽ. Như vậy X trở thành tập được sắp thứ tự bộ phận (hai phần tử ở hai nhánh khác nhau không so sánh được với nhau).

Vì $\sup\{x,y\} = B$*, với mọi* $x \in [ACB]$*,* $y \in (ADB)$ *nên* X *là nửa dàn. Mặt khác* X *là không gian tôpô với tôpô cảm sinh từ* $\mathbb{R}^2$*.*

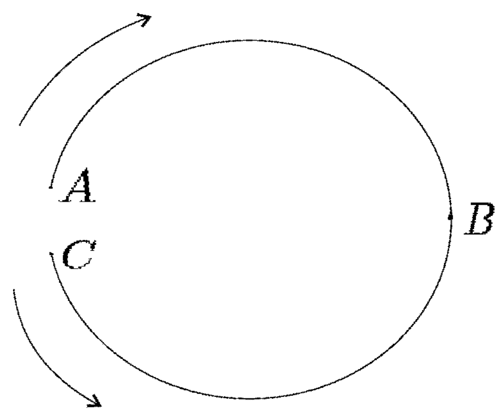
Tuy nhiên, ta sẽ chỉ ra X *không phải là nửa dàn tôpô. Thật vậy, lấy dãy* $\{x_n\} \subset (ADB)$*,* $x_n \to A$ *(*$n \to +\infty$*). Hiển nhiên:*

$$\sup\{x_n, A\} = B,$$

$$\sup\{A, A\} = A.$$

Điều đó chứng tỏ phép toán $\sup$ *không liên tục.*

Để khắc phục nhược điểm này, chỉ cần bỏ một cung xung quanh điểm A *như sau:*



Hình 1.4

Khi đó cung $[ABC]$ *sẽ là một nửa dàn tôpô. Ta sẽ gặp lại ví dụ này trong Mục 1.9.*

Kí hiệu Δ_n là đơn hình chuẩn n chiều với các đỉnh $e_0, ..., e_n$. Nếu J là một tập con khác rỗng của $\{0, ..., n\}$ thì ta kí hiệu Δ_J là bao lồi của các đỉnh $\{e_j : j \in J\}$.

Bây giờ, chúng ta xét tính ω-liên thông của các nửa dàn tôpô. Các định nghĩa và kết quả dưới đây được trích trong tài liệu [28].

Định nghĩa 1.1.3 *Không gian tôpô C gọi là n-liên thông nếu với mọi ánh xạ liên tục $f : \partial\Delta_{n+1} \to C$ từ biên của đơn hình $(n+1)$-chiều vào C có một mở rộng liên tục $g : \Delta_{n+1} \to C$.*

Định nghĩa 1.1.4 *Không gian ω-liên thông C là không gian tôpô thoả mãn tính n-liên thông với mọi $n \geq 0$ (hay còn gọi là liên thông vô hạn, $\boldsymbol{C}^\infty$).*

Ta còn gọi các tập n-liên thông là các tập n-C. Nếu các tập thoả mãn tính k-liên thông với mỗi $0 \leqslant k \leqslant n$ thì ta kí hiệu là C^n. Hiển nhiên, tập -1-liên thông là tập rỗng, còn tập 0-liên thông là tập liên thông đường.

Tập con lồi bất kỳ của không gian véctơ tôpô là n-liên thông với mọi $n \geq 0$.

Tổng quát hơn, mọi không gian co rút được (xem định nghĩa ở dưới) là n-liên thông với mọi $n \geq 0$.

Chú ý 1.1.1 *Trong bài báo [28], Horvath đã chứng minh một định lý dạng nguyên lý ánh xạ KKM của Ky Fan cho lớp không gian ω-liên thông bằng cách dùng một kết quả khá hay về tính tương giao do Horvath và Lassonde [30] công bố năm 1996. Đồng thời Horvath cũng suy ra một định lý điểm bất động dạng Browder-Fan cho lớp các không gian này.*

Định nghĩa 1.1.5 *Giả sử X và Y là hai không gian tôpô. Phép đồng luân tôpô là ánh xạ liên tục $H : X \times [0,1] \to Y$. Hai ánh xạ liên tục $f, g : X \to Y$ đồng luân tôpô khi và chỉ khi tồn tại phép đồng luân tôpô $H : X \times [0,1] \to Y$ sao cho $H(x,0) = f(x)$ và $H(x,1) = g(x)$ trên X. Khi đó chúng ta viết $f \cong g$.*

Về sau ta sẽ dùng thuật ngữ "đồng luân" thay vì "đồng luân tôpô".

Định nghĩa 1.1.6 *Không gian tôpô X gọi là co rút được (tới một điểm $z \in X$) nếu tồn tại phép đồng luân $H : X \times [0,1] \to X$ sao cho $H(x,0) = x$ và $H(x,1) = z$ với mọi $x \in X$.*

Ta dễ dàng thấy rằng nếu không gian tôpô X là co rút được tới điểm z nào đó thuộc X thì nó co rút được tới một điểm bất kỳ $y \in X$.

Bây giờ ta phát biểu một kết quả quan trọng của Brown [15] về tính đồng luân của một ánh xạ liên tục xác định trên một "hình lập phương" và nhận giá trị trong một nửa dàn tôpô.

Bổ đề 1.1.1 *Nếu $(X, \leqslant)$ là nửa dàn tôpô bị chặn, liên thông đường thì mọi ánh xạ liên tục $f : [0,1]^n \to X$, nhận giá trị hằng trên biên của hình lập phương $[0,1]^n$ đồng luân với một hàm hằng bởi phép đồng luân $h : [0,1]^n \times [0,1] \to X$ sao cho với mỗi $t \in [0,1]$, ánh xạ $h(.,t) : [0,1]^n \to X$ nhận giá trị hằng trên biên của hình lập phương.*

Và chính nhờ kết quả này, Horvath [28] đã chứng minh được tính ω-liên thông của các nửa dàn tôpô.

Định lý 1.1.1 *Mọi nửa dàn tôpô bị chặn, liên thông đường là không gian ω-liên thông.*

Nhờ Định lý 1.1.1 mà Horvath và Llinares Ciscar đã chứng minh được định lý dạng KKM trong các nửa dàn tôpô.

1.2 Nguyên lý ánh xạ KKM

Trước hết ta nhắc lại bổ đề KKM cơ bản (xem [38]) do ba nhà toán học người Ba Lan là Knaster, Kuratowski và Mazurkiewicz chứng minh năm 1929. Các kết quả dưới đây được trích trong tài liệu [29].

Định lý 1.2.1 *(KKM) Giả sử $R_i \subseteq \Delta_n$, $i = 0, 1, ..., n$, trong đó tất cả các tập R_i là đóng và với mỗi tập con khác rỗng J của $\{0, ..., n\}$ ta có*

$$\Delta_J \subseteq \bigcup_{j \in J} R_j.$$

Khi đó

$$\bigcap_{i=0}^{n} R_i \neq \emptyset.$$

Trong chứng minh gốc của định lý trên tất cả các tập R_i được giả thiết là đóng.

Về sau một số tác giả chỉ ra rằng định lý vẫn đúng nếu giả thiết chúng là mở, chẳng hạn xem Kim [35], Shih [57], và Lassonde [41].

Dựa vào Định lý 1.1.1, Horvath và Llinares Ciscar đã suy ra kết quả quan trọng sau.

Bổ đề 1.2.1 *Giả sử X là nửa dàn tôpô với các khoảng liên thông đường và $\{x_0, ..., x_n\} \in \langle X \rangle$. Khi đó tồn tại ánh xạ liên tục $f : \Delta_n \to X$ sao cho $f(\Delta_J) \subseteq \Delta(\{x_j : j \in J\})$ với mọi tập con hữu hạn khác rỗng J của $\{0, ..., n\}$.*

Từ bổ đề trên Horvath và Llinares Ciscar suy ra định lý sau.

Định lý 1.2.2 *Giả sử X là nửa dàn tôpô với các khoảng liên thông đường và $\{R_i : i = 0, ..., n\}$ là họ các tập con đóng của X. Nếu tồn tại tập con hữu hạn $\{x_0, ..., x_n\}$ của X sao cho với mọi họ $\{i_0, ..., i_k\} \subseteq \{0, 1, ..., n\}$, ta có*

$$\Delta(\{x_{i_0}, ..., x_{i_k}\}) \subseteq \bigcup_{j=0}^{k} R_{i_j},$$

thì ta có

$$\bigcap_{i=0}^{n} R_i \neq \emptyset.$$

Chú ý 1.2.1 *Từ giả thiết của định lý trên ta suy ra $x_i \in R_i$ với mỗi chỉ số i nhưng không đòi hỏi $x_i \neq x_j$ với $i \neq j$.*

Sử dụng dạng "mở" của Định lý 1.2.1, Horvath và Llinares Ciscar thu được kết quả sau:

Định lý 1.2.3 *Giả sử X là nửa dàn tôpô với các khoảng liên thông đường và $\{U_i : i = 0, ..., n\}$ là họ các tập con mở của X. Nếu tồn tại tập con hữu hạn $\{x_0, ..., x_n\}$ của X sao cho với mọi họ $\{i_0, ..., i_k\} \subseteq \{0, 1, ..., n\}$, ta có*

$$\Delta(\{x_{i_0}, ..., x_{i_k}\}) \subseteq \bigcup_{j=0}^{k} U_{i_j},$$

thì ta có

$$\bigcap_{i=0}^{n} U_i \neq \emptyset.$$

Định nghĩa 1.2.1 *Giả sử X là một nửa dàn tôpô và $F : D \to 2^X$ là một ánh xạ đa trị, trong đó $D \subseteq X$. F được gọi là một ánh xạ KKM* *nếu với mọi tập con hữu hạn khác rỗng $A \subseteq D$, ta có*

$$\Delta(A) \subseteq \bigcup_{x \in A} F(x).$$

Từ định nghĩa trên và Định lý 1.2.2, Định lý 1.2.3, Horvath và Llinares Ciscar [29] đã suy ra nguyên lý ánh xạ KKM trong nửa dàn tôpô như sau.

Định lý 1.2.4 *Giả sử X là nửa dàn tôpô với các khoảng liên thông đường và $F : X \to 2^X$ là ánh xạ đa trị thỏa mãn*

(1) $F(x)$ đóng với mọi $x \in X$;

(2) F là ánh xạ KKM.

Khi đó $\{F(x) : x \in X\}$ có tính chất giao hữu hạn.

Nhận xét 1.2.1 *Giả thiết (1) có thể thay bởi: $F(x)$ mở với mọi $x \in X$;*

Nhận xét 1.2.2 *Nếu các tập $F(x)$, $x \in X$, đóng trong X, và $F(x_0)$ là tập compắc với x_0 nào đó thuộc X thì $\bigcap_{x \in X} F(x) \neq \emptyset$.*

Dưới đây là các kết quả mới của chúng tôi được công bố trong công trình [67].

1.3 Các định lý ghép đôi

Giả sử X và Y là các tập hợp khác rỗng. Nếu $F : X \to 2^Y$ thì ta xác định $F^{-1},\ F^* : Y \to 2^X$ và $F^c : X \to 2^Y$ bởi

$$F^{-1}(y) := \{x \in X : y \in F(x)\},$$

$$F^*(y) := \{x \in X : y \notin F(x)\} \text{ và}$$

$$F^c(x) := \{y \in Y : y \notin F(x)\}.$$

Đầu tiên ta chứng minh một dạng mở rộng của Định lý 1.2.2 và Định lý 1.2.3.

Bổ đề 1.3.1 *Giả sử X là nửa dàn tôpô với các khoảng liên thông đường và $\{R_i : i = 0, ..., n\}$ là họ các tập con của X. Giả sử*

(1) Tồn tại các phần tử $x_0, ..., x_n$ của X sao cho với mọi tập con khác rỗng J của $\{0, ..., n\}$,

$$\Delta(\{x_j : j \in J\}) \subseteq \bigcup_{j \in J} R_j;$$

(2) Tất cả các tập $\Delta(\{x_0, ..., x_n\}) \cap R_i,\ i = 0, ..., n$ đều đóng hoặc đều mở trong $\Delta(\{x_0, ..., x_n\})$.

Khi đó

$$\bigcap_{i=0}^{n} R_i \neq \emptyset.$$

Chứng minh. Theo Bổ đề 1.2.1, tồn tại ánh xạ liên tục $f : \Delta_n \to X$ sao cho $f(\Delta_J) \subseteq \Delta(\{x_j : j \in J\})$ với mọi tập con hữu hạn khác rỗng J của $\{0, ..., n\}$.

Với mỗi $i = 0, ..., n$, ta đặt $S_i := f^{-1}(\Delta(\{x_0, ..., x_n\}) \cap R_i)$, khi đó tất cả các tập $S_i,\ i \in \{0, ..., n\}$ đều đóng hoặc đều mở trong Δ_n. Mặt khác với mỗi tập con khác rỗng J của $\{0, ..., n\}$, ta có

$$\begin{aligned}\bigcup_{j\in J} S_j &= f^{-1}(\Delta(\{x_0, ..., x_n\}) \cap (\bigcup_{j\in J} R_j)) \\ &\supset f^{-1}(\Delta(\{x_0, ..., x_n\}) \cap \Delta(\{x_j : j \in J\})) \\ &= f^{-1}(\Delta(\{x_j : j \in J\})) \supset \Delta_J.\end{aligned}$$

Do đó

$$\mathrm{co}\{e_j : j \in J\} \subseteq \bigcup_{j\in J} S_j.$$

Sử dụng dạng "đóng" (tương ứng "mở") của bổ đề KKM ta có

$$\bigcap_{i=0}^{n} S_i \neq \emptyset.$$

Lấy bất kỳ $\mu \in \bigcap_{i=0}^{n} S_i$, khi đó ta thấy $f(\mu) \in \bigcap_{i=0}^{n}(\Delta(\{x_0, ..., x_n\}) \cap R_i)$ và vì vậy $\bigcap_{i=0}^{n} R_i \neq \emptyset$. □

Từ Bổ đề 1.3.1, ta có một định lý dạng KKM. Kết quả này mở rộng Định lý 2 của Horvath và Llinares Ciscar trong [27].

Định lý 1.3.1 *Giả sử X là nửa dàn tôpô với các khoảng liên thông đường và $F : X \to 2^X$ là một ánh xạ đa trị với các giá trị khác rỗng sao cho*

(1) F là ánh xạ KKM, nghĩa là với mọi tập con hữu hạn khác rỗng $A \subseteq X$,

$$\Delta(A) \subseteq \bigcup_{x\in A} F(x);$$

(2) Tất cả các tập $F(x) \cap \Delta(A),\ x \in X$ đều đóng hoặc đều mở trong $\Delta(A)$ với mỗi $A \in \langle X\rangle$.

Khi đó họ $\{F(x) : x \in X\}$ có tính chất giao hữu hạn.

Nhận xét 1.3.1 *Nếu các tập $F(x) \cap \Delta(A)$, $x \in X$, đóng trong $\Delta(A)$ với mỗi $A \in \langle X \rangle$, $F(x_0)$ là tập compắc với x_0 nào đó thuộc X và với mỗi $x \in X$, $F(x_0) \cap F(x)$ đóng trong $F(x_0)$ thì $\bigcap_{x \in X} F(x) \neq \emptyset$.*

Nhận xét 1.3.2 *Nếu các tập $F(x)$, $x \in X$ đóng trong X và $F(x_0)$ là tập compắc với x_0 nào đó thuộc X thì Định lý 1.3.1 quy về Định lý 1.2.4 và Nhận xét 1.2.2.*

Nhận xét 1.3.3 *Điều kiện "các khoảng liên thông đường" là cần thiết. Ta xét phản ví dụ sau:*

Xét nửa dàn tôpô $X = \mathbb{R}^2$ với quan hệ thứ tự bộ phận thông thường và tập con $C = \{a, b, c, d\}$ là bốn đỉnh của một hình chữ nhật cho bởi hình vẽ dưới đây.

Hình 1.5

Dễ thấy $\sup\{a, b\} = a$, $\sup\{b, c\} = c$, $\sup\{a, c\} = d$, $\sup\{a, d\} = d$, $\sup\{b, d\} = d$.

Bây giờ ta tính bao Δ-lồi của các tập con của C:

$$\Delta(a, b) = \{a, b\},\ \Delta(b, c) = \{b, c\},\ \Delta(c, d) = \{c, d\}.$$

$$\Delta(a, d) = \{a, d\},\ \Delta(b, d) = \{a, b, c, d\}, \Delta(a, c) = \{a, c, d\}.$$

$$\Delta(a, b, c) = \{a, b, c, d\},\ \Delta(b, c, d) = \{a, b, c, d\},\ \Delta(a, c, d) = \{a, c, d\}.$$

$$\Delta(a,b,d) = \{a,b,c,d\},\ \Delta(a,b,c,d) = \{a,b,c,d\}.$$

Ta xây dựng ánh xạ $F : C \to 2^X$ như sau:

$$F(a) = \{a\},$$

$$F(b) = \{a,b,c\},$$

$$F(c) = \{c,d,a\},$$

$$F(d) = \{d,c,b\}.$$

Dễ thấy rằng

$$\Delta(a,b) \subset F(a) \cup F(b),\ \Delta(a,c) \subset F(a) \cup F(c),$$

$$\Delta(a,d) \subset F(a) \cup F(d),\ \Delta(b,c) \subset F(b) \cup F(c),$$

$$\Delta(b,d) \subset F(b) \cup F(d),\ \Delta(c,d) \subset F(c) \cup F(d),$$

$$\Delta(a,b,c) \subset F(a) \cup F(b) \cup F(c),\ \Delta(a,b,d) \subset F(a) \cup F(b) \cup F(d),$$

$$\Delta(a,c,d) \subset F(a) \cup F(c) \cup F(d),\ \Delta(b,c,d) \subset F(b) \cup F(c) \cup F(d),$$

$$\Delta(a,b,c,d) \subset F(a) \cup F(b) \cup F(c) \cup F(d).$$

Vậy F là ánh xạ KKM, nhưng $F(a) \cap F(d) = \emptyset$, do đó nguyên lý ánh xạ KKM không áp dụng được.

Sử dụng Bổ đề 1.3.1, ta chứng minh định lý ghép đôi (matching) sau đây:

Định lý 1.3.2 *Giả sử X là nửa dàn tôpô với các khoảng liên thông đường và $A_1, ..., A_n$ là n tập con của X. Hơn nữa, giả sử tất cả các tập $A_i,\ i = 1, ..., n$ đều đóng hoặc đều mở sao cho $\bigcup_{i=1}^n A_i = X$. Khi đó với* *bất kỳ n phần tử $x_1, ..., x_n$ (không nhất thiết khác nhau) của X, tồn tại một tập con khác rỗng J_0 của $\{1, ..., n\}$ sao cho*

$$\Delta(\{x_j : j \in J_0\}) \cap (\bigcap_{j \in J_0} A_j) \neq \emptyset.$$

Chứng minh. Giả sử kết luận của định lý là sai, khi đó ta có

$$\Delta(\{x_j : j \in J\}) \cap (\bigcap_{j \in J} A_j) = \emptyset$$

với mỗi tập con khác rỗng J của $\{1, ..., n\}$. Với mỗi $j = 1, ..., n$, ta đặt $G_j := X \setminus A_j$, khi đó tất cả các tập $G_j,\ j \in \{1, ..., n\}$ đều đóng hoặc đều mở trong X. Từ đó suy ra rằng $\Delta(\{x_j : j \in J\}) \subseteq \bigcup_{j \in J} G_j$ với mỗi tập con khác rỗng J của $\{1, ..., n\}$. Theo Bổ đề 1.3.1 ta có $\bigcap_{j=1}^{n} G_j \neq \emptyset$, điều này mâu thuẫn với giả thiết $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = X$. Định lý được chứng minh. □

Tiếp theo ta dùng Định lý 1.3.2 để chứng minh một định lý tương giao kiểu Berge [10] và Klee [37].

Định lý 1.3.3 *Giả sử X là nửa dàn tôpô với các khoảng liên thông đường và $Y_1, ..., Y_n$ là n tập con Δ-lồi của X sao cho $n-1$ tập bất kỳ trong chúng đều có điểm chung. Mặt khác, giả sử $\{Z_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ là một phủ của X, trong đó tất cả các tập của phủ này đều đóng hoặc đều mở. Khi đó tồn tại một tập con khác rỗng I của $\{1, ..., n\}$ sao cho*

$$\cap\{Y_j : j \in \bar{I}\ \} \cap (\cap\{Z_i : i \in I\}) \neq \emptyset,$$

ở đây $\bar{I}$ ký hiệu phần bù của I trong $\{1, ..., n\}$.

Chứng minh. Với mỗi $i \in \{1, ..., n\}$, chọn một phần tử x_i thuộc $\bigcap_{j \neq i} Y_j$ và đặt $D := \{x_1, ..., x_n\}$ là tập tất cả các phần tử đã chọn. Theo Định lý 1.3.2 tồn tại một tập con khác rỗng I của $\{1, ..., n\}$ sao cho

$$\Delta(\{x_i : i \in I\}) \cap (\cap\{Z_i : i \in I\}) \neq \emptyset.$$

Vì $x_i \in \cap\{Y_j : j \in \bar{I}\}$ với mỗi $i \in I$ và tập $\cap\{Y_j : j \in \bar{I}\}$ là Δ-lồi nên ta suy ra $\Delta(\{x_i : i \in I\}) \subset \cap\{Y_j : j \in \bar{I}\}$ và do đó

$$\cap\{Y_j : j \in \bar{I}\} \cap (\cap\{Z_i : i \in I\}) \neq \emptyset.$$

$\square$

Sau đây là một số hệ quả của Định lý 1.3.1.

Định lý 1.3.4 *Giả sử X là nửa dàn tôpô với các khoảng liên thông đường và $F : X \to 2^X$ là một ánh xạ đa trị với các giá trị khác rỗng và thoả mãn*

(1) $\bigcup_{x \in X} F(x) = X$;

(2) Với x_0 nào đó thuộc X, $F^c(x_0)$ là tập compắc và với mỗi $x \in X$, $F^c(x_0) \cap F^c(x)$ đóng trong $F^c(x_0)$;

(3) Với mỗi $x \in X$ và với mỗi $A \in \langle X \rangle$, $\Delta(A) \cap F^c(x)$ đóng trong $\Delta(A)$.

Khi đó tồn tại $A \in \langle X \rangle$ sao cho $\Delta(A) \cap (\bigcap_{x \in A} F(x)) \neq \emptyset$.

Chứng minh. Giả sử khẳng định của định lý là sai. Khi đó với mỗi $A \in \langle X \rangle$ ta có

$$\Delta(A) \cap (\bigcap_{x \in A} F(x)) = \emptyset,$$

vì vậy

$$\Delta(A) \subseteq X \setminus \bigcap_{x \in A} F(x) = \bigcup_{x \in A} F^c(x).$$

Ta xác định $G : X \to 2^X$ bởi $G(x) := F^c(x)$ với mỗi $x \in X$. Do đó G là một ánh xạ KKM. Do (3), với mỗi $x \in X$ và với mỗi $A \in \langle X\rangle$, $\Delta(A) \cap G(x)$ đóng trong $\Delta(A)$. Theo Định lý 1.3.1, họ $\{G(x) : x \in X\}$ có tính chất giao hữu hạn. Lại do (2), $G(x_0)$ là tập compắc với mỗi $x \in X$, $G(x_0) \cap G(x)$ đóng trong $G(x_0)$. Vì vậy theo Nhận xét 1.3.1 ta có

$$\bigcap_{x\in X} G(x) \neq \emptyset,$$

điều này mâu thuẫn với (1). Tóm lại kết luận của định lý phải đúng. □

Định lý 1.3.5 *Giả sử X là nửa dàn tôpô với các khoảng liên thông đường và $F, G : X \to 2^X$ là các ánh xạ đa trị với giá trị khác rỗng thoả mãn*

(1) Với mỗi $x \in X$, $F(x) \subseteq G(x)$ và $x \in F(x)$;

(2) Với mỗi $x \in X$, $F^*(x)$ là tập Δ-lồi ;

(3) Với x_0 nào đó thuộc X, $G(x_0)$ là tập compắc với mỗi $x \in X$, $G(x_0)\cap G(x)$ đóng trong $G(x_0)$;

(4) Với mỗi $x \in X$ và với mỗi $A \in \langle X\rangle$, $\Delta(A) \cap G(x)$ đóng trong $\Delta(A)$.

Khi đó $\bigcap_{x\in X} G(x) \neq \emptyset$.

Chứng minh. Rõ ràng theo Định lý 1.3.1, ta chỉ cần chỉ ra G là ánh xạ KKM. Giả sử trái lại, khi đó tồn tại $A \in \langle X\rangle$ sao cho $\Delta(A)$ không nằm trong $\bigcup_{x\in A} G(x)$; giả sử $y \in \Delta(A)$ mà $y \notin \bigcup_{x\in A} G(x)$. Từ đó, theo (1), $A \subseteq G^*(y) \subseteq F^*(y)$ và theo (2), $\Delta(A) \subseteq F^*(y)$. Vì $y \in \Delta(A)$ nên $y \in F^*(y)$ và vì vậy $y \notin F(y)$, điều này mâu thuẫn với (1). Định lý được chứng minh. □

1.4 Các định lý điểm bất động

Đầu tiên chúng ta sẽ áp dụng Bổ đề 1.3.1 để chứng minh định lý điểm bất động sau:

Định lý 1.4.1 *Giả sử X là nửa dàn tôpô với các khoảng liên thông đường, $x_i \in X, i = 0, ..., n$ và $S,\ T : X \to 2^X$ là các ánh xạ đa trị với các giá trị khác rỗng sao cho*

(1) Với mỗi $i = 0, ..., n,\ S(x_i) \subseteq T(x_i)$;

(2) Với mỗi $i = 0, ..., n$, $\Delta(\{x_0, ..., x_n\}) \cap S(x_i)$ đóng trong $\Delta(\{x_0, ..., x_n\})$;

(3) Với mỗi tập con khác rỗng A của $\{x_0, ..., x_n\}$ mà $A \subseteq T^{-1}(y)$ với y nào đó thuộc X, $\Delta(A) \subseteq T^{-1}(y)$;

(4) $\bigcup_{i=0}^{n} S(x_i) = X$.

Khi đó tồn tại $x^* \in X$ sao cho $x^* \in T(x^*)$.

Chứng minh. Với mỗi $x \in X$, đặt $F(x) := T^c(x)$ và $G(x) := S^c(x)$. Giả sử

$$\Delta(A) \subseteq \bigcup_{x \in A} G(x) \text{ với mỗi tập con khác rỗng } A \text{ của } \{x_0, ..., x_n\}.$$

Do (2), với mỗi $i = 0, ..., n$, ta có $\Delta(\{x_0, ..., x_n\}) \cap G(x_i)$ mở trong $\Delta(\{x_0, ..., x_n\})$. Theo Bổ đề 1.3.1,

$$\bigcap_{i=0}^{n} G(x_i) \neq \emptyset,$$

điều này mâu thuẫn với (4). Do đó phải tồn tại một tập con khác rỗng A của $\{x_0, ..., x_n\}$ sao cho $\Delta(A)$ không nằm trong $\bigcup_{x \in A} G(x)$. Lấy bất kỳ $x^* \in \Delta(A)$ với $x^* \notin \bigcup_{x \in A} G(x)$. Vì (1) nên với mỗi $x \in A$, $x^* \in$

$S(x) \subseteq T(x)$ hay $x \in T^{-1}(x^*)$. Vậy $A \subseteq T^{-1}(x^*)$ và do đó theo (3) $\Delta(A) \subseteq T^{-1}(x^*)$. Nhưng $x^* \in \Delta(A)$ nên ta có $x^* \in T^{-1}(x^*)$ và vì vậy $x^* \in T(x^*)$. Định lý được chứng minh. $\square$

Định lý 1.4.2 *Giả sử X là nửa dàn tôpô với các khoảng liên thông đường và $S,\ T : X \to 2^X$ là các ánh xạ đa trị với các giá trị khác rỗng sao cho*

(1) Với mỗi $x \in X,\ S(x) \subseteq T(x)$;

(2) $\bigcup_{x \in X} S(x) = X$;

(3) Với x_0 nào đó thuộc X, $S^c(x_0)$ là compắc và với mỗi $x \in X$, $S^c(x_0) \cap S^c(x)$ đóng trong $S^c(x_0)$;

(4) Với mỗi $x \in X$ và với mỗi $A \in \langle X \rangle$, $\Delta(A) \cap S^c(x)$ đóng trong $\Delta(A)$;

(5) Với mỗi $x \in X$, $T^{-1}(x)$ là tập Δ-lồi.

Khi đó tồn tại $x^* \in X$ sao cho $x^* \in T(x^*)$.

Chứng minh. Theo Định lý 1.3.4, tồn tại $A \in \langle X \rangle$ sao cho

$$\Delta(A) \cap (\bigcap_{x \in A} S(x)) \neq \emptyset.$$

Lấy bất kỳ $x^* \in \Delta(A) \cap (\bigcap_{x \in A} S(x))$. Theo (1) ta có $x^* \in \Delta(A)$ và $A \subseteq S^{-1}(x^*) \subseteq T^{-1}(x^*)$. Do (5), $\Delta(A) \subseteq T^{-1}(x^*)$ nhưng khi đó ta có $x^* \in T^{-1}(x^*)$ và vì vậy $x^* \in T(x^*)$. Định lý được chứng minh. $\square$

Tiếp theo là một hệ quả trực tiếp của Định lý 1.4.2.

Hệ quả 1.4.1 *Giả sử X là nửa dàn tôpô với các khoảng liên thông đường và $S,\ T : X \to 2^X$ là các ánh xạ đa trị với các giá trị khác rỗng sao cho*

(1) Với mỗi $x \in X,\ S(x) \subseteq T(x)$;

(2) $\bigcup_{x\in X} S(x) = X$;

(3) Với x_0 nào đó thuộc X, $S^c(x_0)$ là compắc và với mỗi $x \in X$, $S(x)$ mở trong X;

(4) Với mỗi $x \in X$, $T^{-1}(x)$ là tập Δ-lồi.

Khi đó tồn tại $x^* \in X$ sao cho $x^* \in T(x^*)$.

Dựa trên Định lý 1.3.2, ta chứng minh định lý điểm bất động dạng Browder-Fan trong nửa dàn tôpô.

Định lý 1.4.3 *Giả sử X là nửa dàn tôpô với các khoảng liên thông đường và $T : X \to 2^X$ là một ánh xạ đa trị thoả mãn*

(1) $T(x)$ là tập Δ-lồi với mỗi $x \in X$;

(2) Tồn tại một tập hữu hạn $D \in \langle X \rangle$ sao cho

(a) $T(x) \cap D \neq \emptyset$ với mỗi $x \in X$;

(b) Tất cả các tập $T^{-1}(y), y \in D$ đều đóng hoặc đều mở.

Khi đó tồn tại $x^* \in X$ sao cho $x^* \in T(x^*)$.

Chứng minh. Từ (a), ta có

$$X = \cup\{T^{-1}(y) : y \in D\}.$$

Theo Định lý 1.3.2, tồn tại tập khác rỗng $A \subset D$ và phần tử x^* sao cho

$$x^* \in \Delta(A) \cap (\cap\{T^{-1}(y) : y \in A\}).$$

Từ

$$x^* \in \cap\{T^{-1}(y) : y \in A\}$$

ta suy ra $A \subset T(x^*)$ và do (1) ta có

$$x^* \in \Delta(A) \subset T(x^*).$$

Định lý được chứng minh. $\square$

Nhận xét 1.4.1 *Định lý 1.4.3 khác so với định lý điểm bất động Browder-Fan dạng thông thường ở chỗ, ở đây các tập nghịch ảnh có thể đóng.*

Chúng ta xét ví dụ sau.

Ví dụ 1.4.1 *(1) Xét nửa dàn tôpô $\mathbb{R}$ với quan hệ thứ tự thông thường, $X = [0, +\infty)$, ánh xạ $T : X \to 2^X$ xác định bởi $T(x) = [0, x]$ với mọi $x \in X$. Khi đó mỗi $T(x)$ là Δ-lồi và khác rỗng. Mặt khác với mỗi $y \in X$,*

$$T^{-1}(y) = \{x \in X : y \in T(x)\} = \{x \in X : y \in [0, x]\} = [y, +\infty).$$

là tập đóng.

Dễ thấy tập $D = \{0\}$ thỏa mãn giả thiết (2) của Định lý 1.4.3 và do đó định lý áp dụng được.

(2) Xét $X = [0, 10) \subset \mathbb{R}$ và ánh xạ $T : X \to 2^X$ xác định bởi

$$T(x) = (x/2, 10) \quad \textit{với mỗi } x \in X.$$

Khi đó mỗi $T(x)$ là Δ-lồi và khác rỗng. Hơn nữa,

$$T^{-1}(y) = \{x \in X : y \in T(x)\} = \{x \in X : y \in (x/2, 10)\}$$
$$= \begin{cases} [0, 2y) & \textit{nếu } y < 5 \\ [0, 10) & \textit{nếu } y \geq 5 \end{cases}$$

là tập mở với mỗi $y \in X$.

Dễ thấy tập $D = \{4, 6\}$ thỏa mãn giả thiết (2) của Định lý 1.4.3 và do đó định lý áp dụng được.

Hệ quả sau đây chính là định lý điểm bất động Browder-Fan dạng thông thường trong nửa dàn tôpô.

Hệ quả 1.4.2 *Giả sử X là nửa dàn tôpô compắc với các khoảng liên thông đường và $T : X \to 2^X$ là một ánh xạ đa trị thoả mãn*

(1) Với mỗi $x \in X$, $T(x)$ khác rỗng và Δ-lồi ;

(2) Với mỗi $y \in X$, tập $T^{-1}(y)$ mở.

Khi đó tồn tại $x^* \in X$ sao cho $x^* \in T(x^*)$.

Chứng minh. Chú ý rằng $X = \cup\{T^{-1}(y) : y \in X\}$. Mặt khác, do tính compắc của X tồn tại $y_1, ..., y_n \in X$ sao cho $X = \bigcup_{i=1}^n T^{-1}(y_i)$. Vì vậy chỉ cần đặt $D = \{y_1, ..., y_n\}$ và áp dụng Định lý 1.4.3 ta có điều phải chứng minh. □

Ví dụ sau đây cho ta thấy rằng giả thiết T có giá trị Δ-lồi trong Hệ quả 1.4.2 không thể bỏ được.

Ví dụ 1.4.2 *Xét nửa dàn tôpô $\mathbb{R}$ với quan hệ thứ tự thông thường và tập $X = [0, 1]$, ánh xạ $T : X \to 2^X$ xác định như sau:*

$$T(x) = X \setminus \{x\} \quad \text{với mỗi } x \in X.$$

Hơn nữa,

$$T^{-1}(y) = \{x \in X : y \in T(x)\} = \{x \in X : y \in [0, 1] \setminus \{x\}\}$$
$$= \begin{cases} (0, 1] & \text{nếu } y = 0 \\ [0, 1) & \text{nếu } y = 1 \\ [0, x) \cup (x, 1] & \text{nếu } y \neq 0; 1 \end{cases}$$

Vì vậy $T^{-1}(y)$ *mở với mọi* $y \in X$. *Nhưng* $T(x) = [0, x) \cup (x, 1]$ *không phải là tập* Δ*-lồi với mọi* $x \neq 0; 1$. *Rõ ràng* T *không có điểm bất động nào.*

Sử dụng Định lý 1.4.3, ta chứng minh định lý thiết diện dạng Ky Fan như sau.

Định lý 1.4.4 *Giả sử* X *là nửa dàn tôpô với các khoảng liên thông đường và* E *là một tập con của* $X \times X$, *có các tính chất sau:*

(1) $(x, x) \in E$ *với mọi* $x \in X$;

(2) Với mỗi $x \in X$, *tập* $\{y \in X : (x, y) \notin E\}$ *là* Δ*-lồi ;*

(3) Với $y \in X$, *tất cả các tập* $\{x \in X : (x, y) \in E\}$ *thoả mãn: (*c_1*) đều đóng hoặc (*c_2*) đều mở.*

Khi đó với mỗi tập hữu hạn khác rỗng $D \subset X$, *tồn tại một phần tử* $x_D \in X$ *sao cho* $\{x_D\} \times D \subset E$.

Chứng minh. Giả sử rằng khẳng định của định lý là sai. Khi đó tồn tại một tập hữu hạn khác rỗng $D \subset X$ sao cho

$$\{x\} \times D \not\subset E \text{ với mỗi } x \in X.$$

Ta xác định ánh xạ $T : X \to 2^X$ bởi $T(x) := \{y \in X : (x, y) \notin E\}$. Khi đó với mỗi $x \in X$, $T(x)$ là tập Δ-lồi, $T(x) \cap D \neq \emptyset$, và tất cả các tập

$$T^{-1}(y) = X \setminus \{x \in X : (x, y) \in E\}$$

đều mở (trong trường hợp (c_1)), hoặc đều đóng (trong trường hợp (c_2)).

Theo Định lý 1.4.3, tồn tại một phần tử $x^* \in X$ sao cho $x^* \in T(x^*)$, do đó $(x^*, x^*) \notin E$, điều này mâu thuẫn với (1). Định lý được chứng minh. $\square$

Hệ quả 1.4.3 *Giả sử X là nửa dàn tôpô compắc với các khoảng liên thông đường và E là một tập con của $X \times X$ thoả mãn các điều kiện (1), (2) và (c_1) trong Định lý 1.4.4. Khi đó tồn tại một phần tử $x^* \in X$ sao cho $\{x^*\} \times X \subset E$.*

1.5 Sự tương đương giữa nguyên lý ánh xạ KKM và định lý điểm bất động Browder-Fan

Giả sử $\mathcal{C}$ là họ tất cả các tập con Δ-lồi của nửa dàn tôpô X và A là tập con tùy ý của X. Ta đặt $CO_\Delta(A) = \cap\{E \in \mathcal{C} : A \subseteq E\}$.

Dễ thấy tập con E của X là Δ-lồi khi và chỉ khi $CO_\Delta(E) = E$.

Bổ đề 1.5.1 *Giả sử X là nửa dàn tôpô và E là tập con khác rỗng của X. Khi đó:*

(1) $CO_\Delta(E)$ là tập con Δ-lồi của X;

(2) $CO_\Delta(E)$ là tập con Δ-lồi nhỏ nhất của X chứa E;

(3) $CO_\Delta(E) = \cup\{CO_\Delta(A) : A \in \langle E\rangle\}$.

Chứng minh. (1) Giả sử $A \in \langle CO_\Delta(E)\rangle$ và D là tập con Δ-lồi bất kỳ của X chứa E. Khi đó $A \subset CO_\Delta(E) \subset D$, vì vậy $A \in \langle D\rangle$ và do đó $\Delta(A) \subset D$. Ta suy ra

$$\Delta(A) \subset \cap\{D : D \text{ là tập con } \Delta\text{-lồi của } X \text{ chứa } E\} = CO_\Delta(E).$$

Vậy $CO_\Delta(E)$ là Δ-lồi.

(2) Dễ dàng suy ra từ định nghĩa của $CO_\Delta(E)$ và (1).

(3) Đặt $M = \cup\{CO_\Delta(A) : A \in \langle E\rangle\}$. Theo (1), $M \subset CO_\Delta(E)$. Mặt

khác, ta có $E \subset M$. Vậy chỉ cần chứng minh M là Δ-lồi. Thậy vậy, lấy tập hữu hạn bất kỳ $B = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \in \langle M \rangle$. Khi đó với mỗi $i = 1, 2, ..., n$, tồn tại $A_i \in \langle E \rangle$ với $x_i \in \Delta(A_i)$. Đặt $A = \cup_{i=1}^n A_i$, do đó $A \in \langle E \rangle$ và $B \subset \cup_{i=1}^n \Delta(A_i)$. Vì $\Delta(A)$ là Δ-lồi, $\Delta(B) \subset \Delta(A) \subset M$. Do đó M là Δ-lồi. $\square$

Bổ đề 1.5.2 *Giả sử X là không gian tôpô, Y là nửa dàn tôpô và ánh xạ $\phi : X \to 2^Y \setminus \{\emptyset\}$ thỏa mãn $\phi^{-1}(y)$ mở với mọi $y \in Y$. Ánh xạ $\psi : X \to 2^Y \setminus \{\emptyset\}$ xác định bởi $\psi(x) = CO_\Delta(\phi(x))$ với mỗi $x \in X$. Khi đó ta có $\psi^{-1}(y)$ mở với mọi $y \in Y$.*

Chứng minh. Lấy bất kỳ $y \in Y$. Theo Bổ đề 1.5.1, nếu $x \in \psi^{-1}(y)$ thì $y \in \psi(x) = CO_\Delta(\phi(x)) = \cup\{\Delta(A) : A \in \langle \phi(x) \rangle\}$. Giả sử $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\} \in \langle \phi(x) \rangle$ là tập mà $y \in \Delta(A)$. Khi đó $x \in \cap_{i=1}^n \phi^{-1}(a_i)$ là lân cận mở của x. Đặt $U = \cap_{i=1}^n \phi^{-1}(a_i)$, khi đó với mỗi $z \in U$, ta có $a_i \in \psi(z)$ với mỗi $i = 1, 2, ..., n$ và vì vậy $y \in \Delta(A) \subset CO_\Delta(\phi(z)) = \psi(z)$. Do đó $z \in \psi^{-1}(y)$ với mỗi $z \in U$ và do đó $x \in U \subset \psi^{-1}(y)$. Vì vậy $\psi^{-1}(y)$ mở trong X. $\square$

Bây giờ ta chứng minh sự tương đương giữa nguyên lý ánh xạ KKM và định lý điểm bất động dạng Browder-Fan trong nửa dàn tôpô. Trước hết, từ Định lý 1.2.4 và Nhận xét 1.2.2, ta có định lý sau.

Định lý 1.5.1 *(Horvath and Llinares Ciscar [29]) Giả sử X là nửa dàn tôpô với các khoảng liên thông đường, C là tập con khác rỗng của X, và $T : C \to 2^X$ là ánh xạ thỏa mãn:*

(1) $T(x)$ đóng với mỗi $x \in C$;

(2) T là ánh xạ KKM, tức là, với mỗi $A \in \langle C \rangle$,

$$\Delta(A) \subset \bigcup_{x \in A} T(x);$$

(3) Tồn tại $x_0 \in C$ sao cho $T(x_0)$ là tập compắc.

Khi đó $\cap_{x \in C} T(x) \neq \emptyset$.

Ta nhắc lại Hệ quả 1.4.2 dưới dạng định lý sau.

Định lý 1.5.2 *(Browder-Fan) Giả sử X là nửa dàn tôpô compắc với các khoảng liên thông đường và $T : X \to 2^X$ là ánh xạ thỏa mãn:*

(1) Với mỗi $x \in X$, $T(x)$ là Δ-lồi khác rỗng;

(2) Với mỗi $y \in X$, $T^{-1}(y)$ mở.

Khi đó tồn tại $x^* \in X$ sao cho $x^* \in T(x^*)$.

Định lý 1.5.1 $\Longrightarrow$ Định lý 1.5.2: Giả sử rằng các điều kiện của Định lý 1.5.1 đúng. Ta xác định $G : X \to 2^X$ bởi $G(y) = X \setminus T^{-1}(y)$ với mỗi $y \in X$. Ta có

$$\bigcap_{y \in X} G(y) = X \setminus \bigcup_{y \in X} T^{-1}(y) = \emptyset.$$

Do đó, G không là ánh xạ KKM. Vì vậy tồn tại $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset X$ sao cho $\Delta(A) \not\subset \cup_{x \in A} G(x)$. Ta suy ra tồn tại $x^* \in \Delta(A)$ sao cho $x^* \notin G(x_i)$ với mọi $i = 1, 2, ..., n$. Vì vậy $x^* \in T^{-1}(x_i)$ với mọi $i = 1, 2, ..., n$. Vậy ta suy ra $x_i \in T(x^*)$ với mọi $i = 1, 2, ..., n$. Khi đó $x^* \in \Delta(A) \subset T(x^*)$.

Định lý 1.5.2 $\Longrightarrow$ Định lý 1.5.1: Ta giả sử các điều kiện của Định lý 1.5.1 đúng. Giả sử phản chứng, $\cap_{x \in C} T(x) = \emptyset$. Khi đó ta xây dựng ánh xạ $\phi : X \to 2^X$ bởi $\phi(x) = \{y \in C : x \notin T(y)\}$. Rõ ràng với mỗi $x \in X$,

$\phi(x)$ là tập con khác rỗng của X. Suy ra $y \in X$, $f^{-1}(y) = X \setminus T(y)$ mở trong X. Ta xây dựng ánh xạ $\psi : X \to 2^X$ như sau

$$\psi(x) = CO_\Delta \phi(x), \text{ với mỗi } x \in X.$$

Do đó với mỗi $x \in C$, $\psi(x)$ là tập con Δ-lồi khác rỗng của X và theo Bổ đề 1.5.2, $\phi^{-1}(y)$ mở với mỗi $y \in X$. Do đó theo Định lý 1.5.2, ta suy ra tồn tại điểm $x^* \in X$ sao cho

$$x^* \in \psi(x^*) = CO_\Delta \phi(x^*) = \cup\{\Delta(A) : A \in \langle \psi(x^*) \rangle\}.$$

Từ đó suy ra tồn tại $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \in \langle \psi(x^*) \rangle$ sao cho $x^* \in \Delta(A)$. Khi đó $x^* \in \psi^{-1}(x_i) = X \setminus T(x_i)$ với $i = 1, 2, ..., n$. Điều này nghĩa là $x^* \notin T(x_i)$ với $i = 1, 2, ..., n$, hay $x^* \notin \cup_{i=1}^n T(x_i)$, mâu mẫu với giả thiết (2) của Định lý 1.5.2. Do đó $\cap_{x \in C} T(x) \neq \emptyset$.

1.6 Các định lý điểm trùng

Trong mục này chúng ta sẽ dùng Định lý 1.3.2 để chứng minh một định lý điểm trùng. Ta cần đến khái niệm sau của Browder [13].

Định nghĩa 1.6.1 *Giả sử X, Y là các tập khác rỗng, $T : X \to 2^Y$ và $S : Y \to 2^X$. Khi đó T và S được gọi là có một điểm trùng nếu tồn tại $(x, y) \in X \times Y$ sao cho $y \in T(x)$ và $x \in S(y)$.*

Định lý 1.6.1 *Giả sử X là nửa dàn tôpô với các khoảng liên thông đường, $S : X \to 2^X$ là một ánh xạ KKM và $T : X \to 2^X$ là một ánh xạ đa trị. Giả sử rằng tồn tại một tập hữu hạn khác rỗng $D \subset X$ sao cho*

(1) $T(x) \cap D \neq \emptyset$ với mọi $x \in X$;

(2) Tất cả các tập $T^{-1}(y),\ y \in D$ đều đóng hoặc đều mở.

Khi đó T và S có một điểm trùng.

Chứng minh. Từ điều kiện (1), ta có $X = \cup\{T^{-1}(y) : y \in D\}$. Áp dụng Định lý 1.3.2 cho phủ đóng (tương ứng mở) $\{T^{-1}(y) : y \in D\}$ của X ta thấy tồn tại một tập khác rỗng $A \subset D$ và phần tử

$$x_0 \in \Delta(A) \cap (\cap\{T^{-1}(y) : y \in A\}).$$

Vì S là ánh xạ KKM nên $x_0 \in \Delta(A) \subset \cup\{S(y) : y \in A\}$ và khi đó tồn tại $y_0 \in A$ sao cho $x_0 \in S(y_0)$, vì vậy $y_0 \in S^{-1}(x_0)$. Mặt khác, $x_0 \in T^{-1}(y_0)$ kéo theo $y_0 \in T(x_0)$. Tóm lại (x_0, y_0) là cặp phần tử cần tìm và định lý được chứng minh. □

Hệ quả 1.6.1 *Giả sử X là nửa dàn tôpô compắc với các khoảng liên thông đường, $S : X \to 2^X$ là một ánh xạ KKM và $T : X \to 2^X$ là một ánh xạ đa trị. Giả sử với mỗi $x \in X$, $T(x)$ là tập con khác rỗng của X và $T^{-1}(x)$ mở. Khi đó tồn tại một phần tử $x_0 \in X$ sao cho $T(x_0) \cap S^{-1}(x_0) \neq \emptyset$.*

Ta nhắc lại định lý chọn sau đây của Horvath và Llinares Ciscar trong bài báo [29]. Ở đây ta phát biểu cho trường hợp không gian nền là compắc.

Định lý 1.6.2 *Giả sử X là không gian tôpô compắc, Y là nửa dàn tôpô và $F : X \to 2^Y$ là một ánh xạ đa trị thoả mãn*

(1) Với mỗi $x \in X$, $F(x)$ là tập khác rỗng và Δ-lồi ;

(2) Với mỗi $y \in Y$, $F^{-1}(y)$ mở trong X.

Khi đó tồn tại một ánh xạ liên tục $f : X \to Y$ sao cho với mọi $x \in X$ ta có $f(x) \in F(x)$.

Từ đó ta chứng minh được định lý điểm trùng sau đây:

Định lý 1.6.3 *Giả sử X là nửa dàn tôpô compắc với các khoảng liên thông đường, Y là nửa dàn tôpô và $A : X \to 2^Y,\ B : Y \to 2^X$ là các ánh xạ đa trị thoả mãn*

(1) Với mỗi $x \in X,\ A(x)$ là tập khác rỗng và Δ-lồi, $B^{-1}(x)$ mở trong Y;

(2) Với mỗi $y \in Y,\ A^{-1}(y)$ mở trong X, $B(y)$ là tập khác rỗng và Δ-lồi.

Khi đó tồn tại một phần tử x_0 sao cho $A(x_0) \cap B^{-1}(x_0) \neq \emptyset$.

Chứng minh. Từ Định lý 1.6.2, ta suy ra A có một phép chọn liên tục $f : X \to Y$ sao cho $f(x) \in F(x)$ với mọi $x \in X$.

Ta xác định ánh xạ R từ X vào 2^X bởi

$$R(x) := B(f(x)).$$

Dễ dàng thấy rằng R có các tính chất sau:

(i) Với mỗi $x \in X$, $R(x)$ là tập khác rỗng và Δ-lồi do các giả thiết của ánh xạ B;

(ii) Với mỗi $x \in X$, $R^{-1}(x) = f^{-1}(B^{-1}(x))$ mở do tính liên tục của f và giả thiết của B.

Vì vậy theo Hệ quả 1.4.2, tồn tại một phần tử $x^* \in X$ sao cho $x^* \in R(x^*)$. Khi đó $x^* \in B(f(x^*))$ hay $f(x^*) \in B^{-1}(x^*)$. Hơn nữa,

$f(x^*) \in A(x^*)$, do đó

$$y^* \in A(x^*) \cap B^{-1}(x^*)$$

với $y^* := f(x^*)$ và đó là điều phải chứng minh. $\square$

1.7 Các bất đẳng thức dạng Ky Fan

Định lý 1.7.1 *Giả sử X là nửa dàn tôpô compắc với các khoảng liên thông đường và $f,\ g$ là các hàm số xác định trên $X \times X$ sao cho*

(1) $f(x,y) \leqslant g(x,y)$ với mọi $(x,y) \in X \times X$;

(2) Với mỗi $x \in X,\ f(x,.)$ là một hàm nửa liên tục dưới trên X;

(3) Với mỗi $y \in X$, các tập $\{x \in X : g(x,y) > 0\}$ là Δ-lồi ;

(4) $g(x,x) \leqslant 0$ với mọi $x \in X$.

Khi đó tồn tại một phần tử $y_0 \in X$ sao cho $f(x,y_0) \leqslant 0$ với mọi $x \in X$.

Chứng minh. Giả sử kết luận của định lý là sai, tức là với mỗi $y \in X$, tồn tại x sao cho $f(x,y) > 0$, hay

$$\{x \in X : f(x,y) > 0\}$$

là tập khác rỗng.

Ta xác định ánh xạ $S,\ T : X \to 2^X$ bởi

$$S(x) := \{y \in X : g(x,y) \leqslant 0\},\ x \in X,$$

và

$$T(y) := \{x \in X : f(x,y) > 0\},\ y \in X.$$

Bây giờ ta chứng minh S là ánh xạ KKM. Giả sử ngược lại rằng có tồn tại tập con hữu hạn khác rỗng $D \subset X$ và phần tử

$$y \in \Delta(D) \setminus \cup\{S(x) : x \in D\}.$$

Khi đó $g(x, y) > 0$ với mỗi $x \in D$ và từ (3), ta có

$$\Delta(D) \subset \{x \in X : g(x, y) > 0\}.$$

Do vậy ta có $g(y, y) > 0$, điều này mâu thuẫn với giả thiết (4). Theo giả thiết (2), với mỗi $x \in X$,

$$T^{-1}(x) = \{y \in X : f(x, y) > 0\}$$

là tập mở.

Do đó theo Hệ quả 1.6.1, tồn tại (x_0, y_0) sao cho

$$x_0 \in T(y_0) \;\text{ và }\; y_0 \in S(x_0).$$

Từ đây và giả thiết (1), ta dẫn đến điều mâu thuẫn sau:

$$0 < f(x_0, y_0) \leqslant g(x_0, y_0) \leqslant 0.$$

Vì vậy kết luận của định lý phải đúng. $\square$

Ta nhắc lại khái niệm sau trong bài báo của Luo [45].

Định nghĩa 1.7.1 *Giả sử X là nửa dàn tôpô và f là hàm số trên X. Khi đó f được gọi là Δ-tựa lõm (tương ứng Δ-tựa lồi) trên X nếu tập $\{x \in X : f(x) > r\}$ (tương ứng $\{x \in X : f(x) < r\}$) là Δ-lồi với mọi số thực $r \in \mathbb{R}$.*

Nhận xét 1.7.1 *Chú ý rằng điều kiện (3) của định lý trên có thể suy từ điều kiện sau:*

(3)′ *với mỗi* $y \in X$, $f(., y)$ *là một hàm* Δ*-tựa lõm trên* X.

Do đó nếu ta bỏ điều kiện (4) và thay (3) bởi (3)′ *thì kết luận của Định lý 1.7.1 có thể cho bởi bất đẳng thức minimax sau:*

$$\inf_{y\in X}\sup_{x\in X} g(x,y) \leqslant \sup_{x\in X} f(x,x).$$

Từ Định lý 1.6.1 ta có bất đẳng thức minimax sau.

Định lý 1.7.2 *Giả sử* X *là nửa dàn tôpô với các khoảng liên thông đường và* $f,\ g$ *là các hàm số xác định trên* $X \times X$ *sao cho*

(1) $f(x, y) \leqslant g(x, y)$ *với mọi* $(x, y) \in X \times X$;

(2) Với mỗi $x \in X$, $f(x, .)$ *là một hàm nửa liên tục trên trên* X;

(3) Với mỗi $y \in X$, *tập* $\{x \in X : g(x, y) \geq 0\}$ *là* Δ*-lồi ;*

(4) $g(x, x) < 0$ *với mọi* $x \in X$.

Khi đó với mỗi tập hữu hạn khác rỗng $D \subset X$ *tồn tại một phần tử* $y_D \in X$ *sao cho* $f(x, y_D) < 0$ *với mọi* $x \in D$.

Chứng minh. Giả sử kết luận của định lý là sai, nghĩa là tồn tại một tập hữu hạn khác rỗng $D \subset X$ sao cho với mỗi $y \in X$, tập

$$\{x \in D : f(x, y) \geq 0\}$$

khác rỗng.

Ta xác định các ánh xạ $S,\ T : X \to 2^X$ bởi

$$S(x) := \{y \in X : g(x, y) < 0\},\ x \in X,$$

$$T(y) := \{x \in X : f(x, y) \geq 0\},\ y \in X.$$

Chúng ta sẽ chỉ ra rằng S là một ánh xạ KKM. Giả sử phản chứng rằng S không phải là ánh xạ KKM, khi đó tồn tại một tập hữu hạn khác rỗng $D \subset X$ và một phần tử

$$y \in \Delta(D) \setminus \cup\{S(x) : x \in D\}.$$

Do đó với mỗi $x \in D$, ta có $g(x, y) \geq 0$ và theo (3),

$$\Delta(D) \subset \{x \in X : g(x, y) \geq 0\}.$$

Vì vậy ta có $g(y, y) \geq 0$, điều này mâu thuẫn với (4). Theo giả thiết, với mỗi $x \in X$,

$$T^{-1}(x) = \{y \in X : f(x, y) \geq 0\}$$

là tập đóng. Do đó theo Định lý 1.6.1, tồn tại $(x_0,\ y_0)$ sao cho $x_0 \in T(y_0)$ và $y_0 \in S(x_0)$. Từ đây và giả thiết (1) ta dẫn đến mâu thuẫn sau:

$$0 \leqslant f(x_0, y_0) \leqslant g(x_0, y_0) < 0.$$

Do đó kết luận của định lý phải đúng. □

Nhận xét 1.7.2 *Định lý 1.7.2 không đòi hỏi tính compắc của không gian nền và cũng không cần ràng buộc thêm một điều kiện nào liên quan đến tính compắc.*

1.8 Định lý minimax kiểu Sion-Neumann

Bây giờ ta áp dụng Định lý 1.6.3 để chứng minh định lý minimax kiểu Sion-Neumann. Đây là một kết quả quan trọng trong giải tích phi tuyến.

Định lý 1.8.1 *Giả sử X là nửa dàn tôpô compắc với các khoảng liên thông đường, Y là một nửa dàn tôpô. Giả sử $f,\ g : X \times Y \to \mathbb{R}$ là các* *hàm số thoả mãn*

(1) $f(x, y) \leqslant g(x, y)$ *với mọi* $(x, y) \in X \times Y$;

(2) Với mọi $x \in X$, $g(x, .)$ *là* Δ*-tựa lồi trên* Y *và* $f(x, .)$ *là nửa liên tục dưới trên* Y;

(3) Với mọi $y \in Y$, $g(., y)$ *là nửa liên tục trên trên* X *và* $f(., y)$ *là* Δ*-tựa lõm trên* X.

Khi đó bất đẳng thức sau đúng:

$$\inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} f(x, y) \leqslant \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} g(x, y).$$

Chứng minh. Dùng lý luận phản chứng, ta giả sử rằng tồn tại một số thực r sao cho $\inf_Y \sup_X f > r > \sup_X \inf_Y g$.

Điều này kéo theo các ánh xạ đa trị $A : X \to 2^Y$ và $B : Y \to 2^X$, xác định bởi

$$A(x) := \{y \in Y : g(x, y) < r\} \text{ và } B(y) := \{x \in X : f(x, y) > r\},$$

có các giá trị khác rỗng. Hơn nữa, các giá trị của A và B là Δ-lồi, bởi vì g và f là Δ-tựa lồi trên Y và Δ-tựa lõm trên X tương ứng. Vì

$$A^{-1}(y) = \{x \in X : g(x, y) < r\} \text{ và } B^{-1}(x) := \{y \in Y : f(x, y) > r\},$$

nên ta thấy rằng với mỗi $y \in Y$, $A^{-1}(y)$ mở bởi vì g là nửa liên tục trên trên X. Tương tự, $B^{-1}(x)$ mở với mỗi $x \in X$. Khi đó theo Định lý 1.6.3, ta suy ra tồn tại (x_0, y_0) với $y_0 \in A(x_0) \cap B^{-1}(x_0)$, và dẫn đến $g(x_0, y_0) < r < f(x_0, y_0)$. Nhưng điều này mâu thuẫn với (1). Do đó kết luận của định lý phải đúng. $\square$

1.9 Định lý điểm bất động dạng Kakutani-Ky Fan trong nửa dàn tôpô

Trong mục này, ta sẽ chứng minh một định lý dạng Kakutani-Ky Fan về tồn tại điểm bất động đối với ánh xạ đa trị nửa liên tục trên trong nửa dàn tôpô với cấu trúc đều. Trước hết ta cần một số khái niệm về không gian đều và tôpô của không gian đều.

Định nghĩa 1.9.1 *Họ khác rỗng $\mathcal{U}$ các tập con của $X \times X$ gọi là cấu trúc đều trên tập X (xem, Kelly [31]) nếu các điều kiện sau được thỏa mãn:*

(i) Mỗi phần tử của họ $\mathcal{U}$ đều chứa đường chéo Ω,

(ii) Nếu $U \in \mathcal{U}$, thì $U^{-1} \in \mathcal{U}$,

(iii) Nếu $U \in \mathcal{U}$, thì $V \circ V \subset U$ với V nào đó thuộc $\mathcal{U}$,

(iv) Nếu U và V thuộc $\mathcal{U}$, thì $U \cap V \in \mathcal{U}$, và

(v) Nếu $U \in \mathcal{U}$ và $U \subset V \subset X \times X$, thì $V \in \mathcal{U}$.

Ở đây $U^{-1} := \{(y, x) \in X \times X : (x, y) \in U\}$.

Khi đó cặp $(X,\mathcal{U})$ gọi là một không gian đều. Không gian này được gọi là tách nếu

$$\bigcap\{V : V \in \mathcal{U}\} = \Omega.$$

Khi đó X trở thành không gian Hausdorff. Phần tử $V \in \mathcal{U}$ được gọi là đối xứng nếu $U = U^{-1}$, tức là nếu $(x, y) \in V$ thì $(y, x) \in V$.

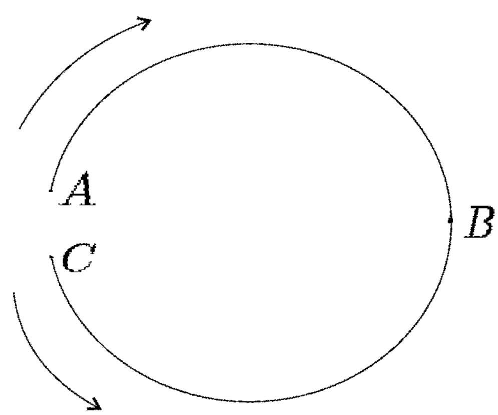
Tôpô $\mathcal{T}$ của không gian đều $(X,\mathcal{U})$ sinh bởi $\mathcal{U}$ là họ các tập con W của X sao cho, với mỗi $x \in W$, tồn tại $U \in \mathcal{U}$ thỏa mãn $U[x] \subseteq W$, trong đó $U[x] := \{y \in X : (x,y) \in U\}$.

Định nghĩa 1.9.2 *Nửa dàn tôpô X gọi là nửa dàn Δ-lồi địa phương nếu X là không gian đều với cấu trúc đều $\mathcal{U}$ có cơ sở $\beta := \{V_i : i \in I\}$ gồm các tập mở đối xứng sao cho với mỗi $V \in \beta$, tập $V[x]$ là Δ-lồi với mỗi $x \in X$.*

Ngoài ra ta còn giả thiết nửa dàn Δ-lồi địa phương X thỏa mãn điều kiện (H) sau đây (xem Horvath [26, Định nghĩa 2, trang 345]):

Điều kiện (H): $L = \{y \in X : K \cap U[y] \neq \emptyset\}$ là tập Δ-lồi với mọi tập con Δ-lồi K của X và $U \in \mathcal{U}$.

Ví dụ 1.9.1 *Xét nửa dàn tôpô X có dạng như trong Ví dụ 1.1.6:*



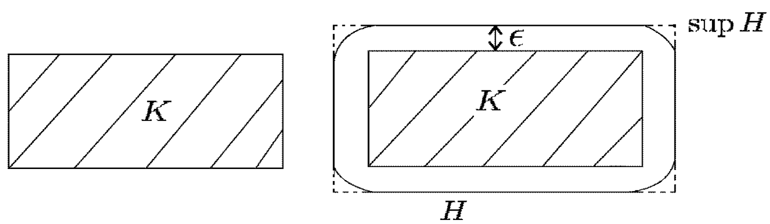
Hình 1.6

Khi đó mọi tập là Δ-lồi khi và chỉ khi nó liên thông (là một cung). Vậy tập Δ-lồi K là một cung còn $U(x)$ là một ϵ-lân cận của điểm x với ϵ cố định (do U là một phần tử trong cấu trúc đều). Vậy $U(x)$ cũng là một cung với x làm điểm giữa và độ dài cung bằng 2ϵ. Khi đó L là ϵ-lân cận *của cung K, do đó cũng là một cung và như vậy là Δ-lồi. Tức là điều kiện Δ-lồi địa phương thỏa mãn.*

Vì X đồng phôi với một đoạn thẳng nên nó có tính chất điểm bất động đối với ánh xạ liên tục. Vì vậy định lý điểm bất động kiểu Brouwer đúng cho trường hợp này.

Chú ý 1.9.1 *Điều kiện (H) đúng cho mọi không gian metric tuyến tính (ϵ-lân cận của tập lồi là tập lồi) và không gian metric siêu lồi (ϵ-lân cận của tập chấp nhận được là chấp nhận được).*

Tuy nhiên điều kiện (H) không đúng cho nửa dàn tôpô tổng quát. Chẳng hạn, xét nửa dàn tôpô $X = \mathbb{R}^2$ với quan hệ thứ tự bộ phận thông thường như trong Ví dụ 1.1.5.



Hình 1.7

Hiển nhiên K là tập Δ-lồi, tuy nhiên tập H là ϵ-lân cận của K có $\sup H \notin H$, *vì vậy không phải là tập Δ-lồi.*

Do đó điều kiện (H) là cần thiết.

Định nghĩa 1.9.3 *(Berge, [10]) Giả sử X và Y là hai không gian tôpô và $F : X \to 2^Y$ là ánh xạ đa trị. Khi đó F được gọi là nửa liên tục trên tại $x_0 \in X$ nếu với mỗi tập mở U trong Y sao cho $U \supset F(x_0)$ đều tồn tại một lân cận mở $O(x_0)$ của x_0 sao cho $U \supset F(x)$ với mọi $x \in O(x_0)$.*

Và F gọi là nửa liên tục trên trên X nếu nó nửa liên tục trên tại mỗi $x \in X$.

Định lý 1.9.1 *Giả sử X tập con Δ-lồi, compắc khác rỗng của một nửa dàn Δ-lồi địa phương với các khoảng liên thông đường thỏa mãn điều kiện (H) và $F : X \to 2^X$ ánh xạ nửa liên tục trên có giá trị Δ-lồi đóng khác rỗng. Khi đó F có điểm bất động, tức là tồn tại $x_0 \in X$ sao cho $x_0 \in F(x_0)$.*

Chứng minh. Cố định một phần tử V của cơ sở β. Khi đó với mỗi $x \in X$, $V[x]$ là một lân cận mở của x. Vì $T(X)$ compắc nên tồn tại tập $M = \{y_1, y_2, ..., y_n\} \subset X$ sao cho $T(X) \subset \cup_{y \in M} V[y]$.

Với mỗi $y_i \in M$, đặt

$$G(y_i) := \{x \in X : T(x) \cap \overline{V[y_i]} = \emptyset\}.$$

Bây giờ ta chỉ ra với mọi $i = 1, 2, ..., n$, $G(y_i)$là tập mở. Xét một i nào đó và lấy x bất kỳ thuộc $G(y_i)$. Khi đó $T(x) \cap \overline{V[y_i]} = \emptyset$. Vì vậy $T(x) \subset X \setminus \overline{V[y_i]}$. Do $\overline{V[y_i]}$ đóng nên $X \setminus \overline{V[y_i]}$ mở và vì T là nửa liên tục trên nên tồn tại lân cận mở $U(x)$ của x sao cho $T(x') \subset X \setminus \overline{V[y_i]}$ với mọi $x' \in U(x)$. Do đó $T(x') \cap \overline{V[y_i]} = \emptyset$ với mọi $x' \in U(x)$. Vậy $U(x) \subset G(y_i)$, tức là $G(y_i)$ mở với mọi $i = 1, 2, ..., n$.

Hơn nữa, ta có

$$\bigcap_{i=1}^{n} G(y_i) = \left\{ x \in X : T(x) \cap \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V[y_i]} = \emptyset \right\} = \emptyset.$$

Do đó theo Định lý 1.2.4 và Chú ý 1.2.1, $G : M \to 2^X$ không là ánh xạ KKM. Nghĩa là tồn tại tập $N \in \langle M \rangle$ và $x_V \in \Delta(N)$ sao cho

$$x_V \notin G(N) = \bigcup_{y \in N} G(y).$$

Vì vậy $T(x_V) \cap \overline{V[y]} \neq \emptyset$ với mọi $y \in N$, và

$$N \subset L := \{y \in X : T(x_V) \cap \overline{V[y]} \neq \emptyset\}.$$

Vì $T(x_V)$ và $\overline{V[y]}$ là Δ-lồi nên theo điều kiện (H), L là Δ-lồi. Do vậy, $x_V \in \Delta(N) \subset L$ và ta có $T(x_V) \cap \overline{V[x_V]} \neq \emptyset$.

Như thế, với mỗi phần tử $V \in \beta$, tồn tại $x_V, y_V \in X$ sao cho $y_V \in T(x_V)$ và $y_V \in \overline{V[x_V]}$. Vì $T(X)$ compắc và β làm thành một tập định hướng với thứ tự là quan hệ bao hàm nên ta có thể giả sử y_V hội tụ đến $x_0 \in X$. Vì X là Hausdorff nên x_V cũng hội tụ đến x_0. Mặt khác do T là nửa liên tục trên với giá trị đóng nên đồ thị của T đóng trong $X \times T(X)$, và vì vậy $x_0 \in Tx_0$. Đây là điều phải chứng minh. $\square$

Chương 2

Bất đẳng thức Ky Fan đa trị và điểm cân bằng Nash đa trị

Mục thứ nhất của chương này trình bày các mở rộng đa trị của bất đẳng thức Ky Fan trong các nửa dàn tôpô. Khi quy về đơn trị, ta thu được các dạng tương tự của bất đẳng thức Ky Fan năm 1972. Tiếp theo, trong mục thứ hai chúng tôi chứng minh một định lý điểm bất động dạng Browder-Fan cho trường hợp họ các ánh xạ trong nửa dàn tôpô. Từ đó, ta có thể mở rộng các kết quả ở Mục 2.1 cho trường hợp hệ. Mục thứ ba dành cho việc nghiên cứu điểm cân bằng Nash đa trị trong nửa dàn tôpô.

2.1 Bất đẳng thức Ky Fan đa trị

Trước hết xin nhắc lại khái niệm nón lồi trong không gian véctơ tôpô Y. Từ khái niệm này, ta đưa ra các định nghĩa về điểm hữu hiệu của một tập hợp, tính liên tục, tính lồi của ánh xạ theo nón, nghiệm của bất đẳng thức Ky Fan đa trị theo nón, điểm cân bằng Nash đa trị theo nón và một số bài toán khác.

Định nghĩa 2.1.1 *Cho Y là không gian véctơ và $C \subset Y$. Ta nói rằng C được gọi là một nón có đỉnh tại gốc trong Y nếu $\lambda c \subset C$ với mọi $c \in C$, $\lambda \geq 0$.*

Sau đây ta chỉ quan tâm đến các nón có đỉnh tại gốc và gọi tắt là nón. Nón C được gọi là lồi nếu C là tập lồi. Nón C được gọi là nón nhọn nếu $C \cap (-C) = \{0\}$. Với nón C cho trước, ta định nghĩa quan hệ trên Y như sau:

$$x, y \in Y,\ x \geq_C y \text{ nếu } x - y \in C.$$

Nếu không gây nhầm lẫn, ta có thể viết gọn là $x \geq y$. Nếu C là nón lồi nhọn thì quan hệ trên là quan hệ thứ tự bộ phận trên Y. Ta dễ dàng chứng minh được bổ đề đơn giản sau.

Bổ đề 2.1.1 *Giả sử Y là không gian véctơ tôpô và C là một nón lồi, đóng, nhọn trong Y với $intC \neq \emptyset$, trong đó $intC$ ký hiệu phần trong của C. Khi đó ta có $intC + C \subset intC$.*

Định nghĩa 2.1.2 *Giả sử X là nửa dàn tôpô hoặc một tập con Δ-lồi của một nửa dàn tôpô, Y là một không gian véctơ tôpô, C là một nón lồi, đóng, nhọn trong Y với $intC \neq \emptyset$.*

1. *([47], Định nghĩa 1.1, trang 2) Ánh xạ $F : X \to 2^Y$ được gọi C-Δ-lồi nếu với mọi tập con hữu hạn khác rỗng $D = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset X$,*

với mọi $x \in \Delta(D)$ *và* $t_i \in (0,1)$, $\sum_{i=1}^n t_i = 1$,

$$F(x) \subset \sum_{i=1}^n t_i F(x_i) - C.$$

2. *([68], Định nghĩa 2.4, trang 439) Ánh xạ đa trị* $F : X \to 2^Y \setminus \{\emptyset\}$ *được gọi là* C*-*Δ*-tựa lồi trên (tương ứng, dưới) nếu với mọi* $x_1, x_2 \in X$ *và* $x \in \Delta(\{x_1, x_2\})$, *ta có*

$$\begin{aligned} \textit{hoặc} \;\; & F(x_1) \subset F(x) + C, \\ \textit{hoặc} \;\; & F(x_2) \subset F(x) + C, \\ (\textit{t. ư., hoặc} \;\; & F(x) \subset F(x_1) - C \\ \textit{hoặc} \;\; & F(x) \subset F(x_1) - C). \end{aligned}$$

Nếu F *là đơn trị, thì hai khái niệm ở trên trùng nhau và ta gọi* F *là* C*-*Δ*-tựa lồi.*

Chú ý 2.1.1 *Nếu* $Y = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $C = [0, +\infty)$, *và* $F = \varphi$ *là hàm số thực, thì khái của* C*-*Δ*-tựa lồi của* φ *tương đương với khái niệm* Δ*-tựa lồi của* φ *đã nêu trong Chương 1.*

Định nghĩa 2.1.3 *([42], Định nghĩa 2.2) Giả sử* X *là không gian tôpô,* Y *là không gian véctơ tôpô với nón* C, $D \subset X$, $F : D \to 2^Y$ *là một ánh xạ đa trị. Miền xác định của* F *là tập* $\{x \in D : F(x) \neq \emptyset\}$, *ký hiệu là* $domF$.

1. F *được gọi là* C*-liên tục trên (t. ư., dưới) tại* $\bar{x} \in domF$ *nếu với mọi lân cận* V *của điểm gốc trong* Y *đều tồn tại một lân cận* U *của* $\bar{x}$ *sao cho*

$$F(x) \subset F(\bar{x}) + V + C \;\; (\textit{t. ư.,} \quad F(\bar{x}) \subset F(x) + V - C),$$

với mọi $x \in domF \cap U$.

2. Nếu F *đồng thời là* C*-liên tục trên và* C*-liên tục dưới tại* $\bar{x}$ *thì ta nói rằng nó là* C*-liên tục tại* $\bar{x}$*; và* F *là* C*-liên tục trên (t. ư., dưới) trên* D *nếu nó là* C*-liên tục trên (t. ư., dưới) tại mỗi điểm thuộc* D.

3. Nếu F *là ánh xạ đơn trị, thì hai khái niệm* C*-liên tục trên và* C*-liên tục dưới tại* $\bar{x}$ *trùng nhau và ta nói rằng* F *là* C*-liên tục tại* $\bar{x}$.

Chú ý 2.1.2 *Nếu* $Y = \mathbb{R}$ *và* $C = \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ *(hoặc* $C = \mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$*) và* F *là* C*-liên tục tại* $\bar{x}$*, thì* F *là nửa liên tục dưới (t. ư. nửa liên tục trên) tại* $\bar{x}$ *theo nghĩa thông thường.*

Định nghĩa 2.1.4 *Giả sử* X, Y *là hai không gian tôpô ;* $F : X \to 2^Y$ *gọi là có lát cắt dưới mở nếu* $F^{-1}(y) = \{x \in X : y \in F(x)\}$ *mở với mọi* $y \in Y$.

Ta nhắc lại Hệ quả 1.4.2 dưới dạng bổ đề sau.

Bổ đề 2.1.2 *Giả sử* K *là tập con* Δ*-lồi compắc khác rỗng của nửa dàn tôpô* M *với các khoảng liên thông đường,* $F : K \to 2^K$ *có giá trị* Δ*-lồi khác khác rỗng và lát cắt dưới mở. Khi đó* F *có điểm bất động.*

Giả sử X là một nửa dàn tôpô, $K \subset X$ là tập con Δ-lồi khác rỗng, Y là không gian véctơ tôpô, $A : K \to 2^K$, $f : K \times K \to 2^Y$ với $f(x, y) \neq \emptyset \ \ \forall x, y \in K$, C là nón lồi đóng nhọn trong Y có $intC \neq \emptyset$.

Ta xét các bài toán sau:

I. **Bài toán 1:** Tìm $x \in K$ sao cho

$$x \in A(x), \quad f(x, y) \subset C, \quad \forall y \in A(x).$$

II. **Bài toán 2:** Tìm $x \in K$ sao cho

$$x \in A(x), \quad f(x,y) \not\subset -intC, \quad \forall y \in A(x).$$

III. **Bài toán 3:** Tìm $x \in K$ sao cho

$$x \in A(x), \quad f(x,y) \cap -intC = \emptyset, \quad \forall y \in A(x).$$

Luo [47] đã nghiên cứu các bài toán (I, II, III) cho nửa dàn tôpô. Tuy nhiên, các kết quả thu được chưa đủ mạnh vì trong trường hợp đơn trị, giả thiết của Luo nặng hơn giả thiết của Ky Fan. Dưới đây, ta sẽ xét ba bài toán (I, II, III) và sử dụng các kết quả về ánh xạ đa trị C-liên tục để thu được các dạng đa trị của bất đẳng thức Ky Fan trong nửa dàn tôpô, trong đó nhược điểm trên đây của Luo đã được khắc phục.

Định lý 2.1.1 *Giả sử K là tập con Δ-lồi compắc khác rỗng của nửa dàn tôpô M với các khoảng liên thông đường, Y là không gian véctơ tôpô, $A : K \to 2^K$ với giá trị Δ-lồi khác rỗng, C là nón lồi đóng nhọn trong Y có $intC \neq \emptyset$, $f : K \times K \to 2^Y$. Giả sử rằng:*

(1) A có lát cắt dưới mở và $B := \{x \in K : x \in A(x)\}$ đóng;

(2) $f(x,x) \cap -intC = \emptyset$, $\forall x \in K$;

(3) $\forall x \in K$, $f(x,.)$ là C-Δ-tựa lồi trên;

(4) $\forall y \in K$, $f(.,y)$ là $-C$-liên tục dưới.

Khi đó tồn tại $x^* \in K$ sao cho

$$x^* \in A(x^*), \text{ và } f(x^*,y) \cap -intC = \emptyset, \ \forall y \in A(x^*).$$

Chứng minh. Ta xác định $P : K \to K$ như sau

$$P(x) = \{y \in K : f(x,y) \cap -intC \neq \emptyset\}, \ \forall x \in K.$$

Giả sử tồn tại $x' \in K$ sao cho $P(x')$ không phải là Δ-lồi; khi đó tồn tại $y_1, y_2 \in P(x')$ sao cho $\Delta(\{y_1, y_2\}) \not\subset P(x')$, nghĩa là, tồn tại $z \in \Delta(\{y_1, y_2\})$ mà $z \notin P(x')$; do đó $f(x', z) \cap -intC = \emptyset$. Theo giả thiết (3), ta có

$$f(x', y_1) \subset f(x', z) + C$$

hoặc

$$f(x', y_2) \subset f(x', z) + C.$$

Vì $f(x', y_i) \cap -intC \neq \emptyset$ nên ta lấy $u_i \in f(x', y_i) \cap -intC,\ i = 1, 2$. Khi đó tồn tại $v_i \in f(x', z)$ và $w_i \in C$ sao cho $u_1 = v_1 + w_1$ hoặc $u_2 = v_2 + w_2$. Theo Bổ đề 2.1.1, ta có $v_1 = u_1 - w_1 \in -intC$ hoặc $v_2 = u_2 - w_2 \in -intC$, điều này mâu thuẫn với $f(x', z) \cap -intC = \emptyset$. Do đó với mọi $x \in X,\ P(x)$ là Δ-lồi.

Tiếp theo, ta chứng minh rằng $P^{-1}(y)$ mở với mọi $y \in K$. Ta có

$$\begin{aligned} K \setminus P^{-1}(y) &= \{x \in K : x \notin P^{-1}(y)\} = \{x \in K : y \notin P(x)\} \\ &= \{x \in K : f(x, y) \cap -intC = \emptyset\}. \end{aligned}$$

Thật vậy, ta chỉ cần chỉ ra với mọi $y \in K$, $D := K \setminus P^{-1}(y)$ là tập đóng. Lấy $\bar{x} \in \overline{D}$, ta chỉ ra rằng $\bar{x} \in D$. Giả sử phản chứng rằng $\bar{x} \notin D$, khi đó ta có $f(\bar{x}, y) \cap -intC \neq \emptyset$. Do vậy, tồn tại $\bar{y} \in f(\bar{x}, y)$ và lân cận V của 0 trong Y sao cho $\bar{y} + V \subset -intC$. Từ giả thiết (4), ta suy ra tồn tại lân cận U của $\bar{x}$ sao cho

$$f(\bar{x}, y) \subset f(x, y) + V + C, \quad \forall x \in U.$$

Do đó, ta có $\bar{y} \in f(x, y) + V + C, \quad \forall x \in U$ và

$$\begin{aligned} 0 \in f(x, y) - \bar{y} + V + C &\subset f(x, y) + intC + C \\ &\subset f(x, y) + intC = f(x, y) - (-intC), \quad \forall x \in U. \end{aligned}$$

Vậy $f(x,y) \cap -intC \neq \emptyset, \quad \forall x \in U$. Giả sử $\{x_\alpha\}$ là lưới trong D hội tụ đến $\bar{x}$, khi ấy tồn tại β sao cho $x_\alpha \in U$, $\forall \alpha \geq \beta$ và do đó $f(x_\alpha, y) \cap -intC \neq \emptyset$, điều này vô lý vì $x_\alpha \in D$. Do vậy, $\bar{x} \in D$, tức là D đóng. Điều này có nghĩa là $P^{-1}(y)$ mở với mọi $y \in K$.

Theo Bổ đề 2.1.2, B là tập khác rỗng. Ta xác định $S : K \to 2^K$ như sau

$$S(x) = \begin{cases} A(x) \cap P(x), & \text{nếu } x \in B, \\ A(x), & \text{nếu } x \in K \setminus B. \end{cases}$$

Khi đó với mọi $x \in K$, $S(x)$ là Δ-lồi. Và vì với mọi $y \in K$,

$$S^{-1}(y) = (A^{-1}(y) \cap P^{-1}(y)) \cup ((K \setminus B) \cap A^{-1}(y))$$

nên $S^{-1}(y)$ mở với mọi $y \in K$.

Giả sử rằng $\forall x \in K,\ S(x)$ khác rỗng, từ Bổ đề 2.1.2, ta suy ra tồn tại $x_0 \in K$ sao cho $x_0 \in S(x_0)$. Nếu $x_0 \in B$ thì $x_0 \in S(x_0) = A(x_0) \cap P(x_0)$. Do đó $x_0 \in P(x_0),\ f(x_0, x_0) \cap -intC \neq \emptyset$, điều này mâu thuẫn với giả thiết (2) của định lý. Nếu $x_0 \in K \setminus B$ thì $x_0 \in S(x_0) = A(x_0) \subset A(x_0)$, và ta có $x_0 \in B$, điều này mâu thuẫn vì $x_0 \in K \setminus B$. Do đó, tồn tại $x^* \in K$ sao cho $S(x^*) = \emptyset$. Vì $A(x)$ khác rỗng với mọi $x \in K$ nên $x^* \in B$, $S(x^*) = A(x^*) \cap P(x^*) = \emptyset$, nghĩa là, $x^* \in A(x^*)$ và với mọi $y \in A(x^*),\ y \notin P(x^*)$, ta có

$$x^* \in A(x^*), \quad f(x^*, y) \cap -intC = \emptyset, \quad \forall y \in A(x^*).$$

Vậy định lý được chứng minh. □

Hệ quả 2.1.1 *Giả sử K là tập con Δ-lồi compắc khác rỗng của nửa dàn tôpô M với các khoảng liên thông đường, Y là không gian véctơ* *tôpô, $A : K \to 2^K$ với giá trị Δ-lồi khác rỗng, C là nón lồi đóng nhọn trong Y có $intC \neq \emptyset$, $f : K \times K \to Y$. Giả sử rằng:*

(1) A có lát cắt dưới mở và $B := \{x \in K : x \in A(x)\}$ đóng;

(2) $f(x,x) \notin -intC, \ \forall x \in K$;

(3) $\forall x \in K, \ f(x,.)$ là C-Δ-tựa lồi;

(4) $\forall y \in K, \ f(.,y)$ là $-C$-liên tục.

Khi đó tồn tại $x^* \in K$ sao cho

$$x^* \in A(x^*), \ \text{ và } f(x^*,y) \notin -intC, \ \forall y \in A(x^*).$$

Ta xét trường hợp đặc biệt khi $Y = (-\infty, +\infty), \ C = (-\infty, 0]$ và $A(x) = K, \ \forall x \in K$, ta thu được bất đẳng thức Ky Fan cho trường hợp hàm số thực trong nửa dàn tôpô (xem, chẳng hạn [45, 67]).

Hệ quả 2.1.2 *Giả sử K là tập con Δ-lồi compắc khác rỗng của nửa dàn tôpô M với các khoảng liên thông đường và $f : K \times K \to \mathbb{R}$ là hàm thỏa mãn:*

(1) $f(x,x) \leq 0, \ \forall x \in K$;

(2) $\forall x \in K, \ f(x,.)$ là Δ-tựa lõm;

(3) $\forall y \in K, \ f(.,y)$ là nửa liên tục dưới.

Khi đó tồn tại $x^* \in K$ sao cho $f(x^*,y) \leq 0, \ \forall y \in K$.

Định lý 2.1.2 *Giả sử K là tập con Δ-lồi compắc khác rỗng của nửa dàn tôpô M với các khoảng liên thông đường, Y là không gian véctơ tôpô, $A : K \to 2^K$ với giá trị Δ-lồi khác rỗng, C là nón lồi đóng nhọn trong Y có $intC \neq \emptyset$, $f : K \times K \to 2^Y$. Giả sử rằng:*

(1) A có lát cắt dưới mở và $B := \{x \in K : x \in A(x)\}$ *đóng;*

(2) $f(x,x) \not\subset -intC,\ \forall x \in K$*;*

(3) $\forall x \in K,\ f(x,.)$ *là* C*-*Δ*-tựa lồi dưới;*

(4) $\forall y \in K,\ f(.,y)$ *là* $-C$*-liên tục trên với giá trị compắc.*

Khi đó tồn tại $x^* \in K$ *sao cho*

$$x^* \in A(x^*),\ \text{và } f(x^*,y) \not\subset -intC,\ \forall y \in A(x^*).$$

Chứng minh. Ta xác định $P : K \to 2^K$ như sau

$$P(x) = \{y \in K : f(x,y) \subset -intC\},\quad \forall x \in K.$$

Giả sử tồn tại $x' \in K$ sao cho $P(x')$ không là Δ-lồi; khi đó tồn tại $y_1, y_2 \in P(x')$ sao cho $\Delta(\{y_1,y_2\}) \not\subset P(x')$, nghĩa là tồn tại $z \in \Delta(\{y_1,y_2\})$ mà $z \notin P(x')$; tức là ta có $f(x',z) \not\subset -intC$. Theo giả thiết (3), ta có

$$f(x',z) \subset f(x',y_1) - C$$

hoặc

$$f(x',z) \subset f(x',y_2) - C.$$

Theo Bổ đề 2.1.1, ta có

$$f(x',z) \subset f(x',y_1) - C \subset -intC - C \subset -intC$$

hoặc

$$f(x',z) \subset f(x',y_2) - C \subset -intC - C \subset -intC,$$

ta gặp mâu thuẫn. Do vậy với mọi $x \in X, P(x)$ là Δ-lồi.

Tiếp theo ta chỉ ra $P^{-1}(y)$ mở với mọi $y \in K$. Ta có

$$P^{-1}(y) = \{x \in K : f(x,y) \subset -intC\}.$$

Với mỗi $y \in K$ và $x \in P^{-1}(y)$, ta có $f(x,y) \subset -intC$. Do $-intC$ mở và $f(x,y)$ compắc nên tồn tại lân cận V của gốc trong Y sao cho $f(x,y)+V \subset -intC$. Theo giả thiết (4), tồn tại lân cận $U(x)$ của x sao cho

$$f(x',y) \subset f(x,y) + V - C \subset -intC - C \subset -intC$$

với mọi $x' \in U(x)$, tức là $U(x) \subset P^{-1}(y)$, do vậy, $P^{-1}(y)$ mở. Phần còn lại của chứng minh hoàn toàn tương tự như Định lý 2.1.1. Vậy ta có kết luận của định lý. □

Định lý 2.1.3 *Giả sử K là tập con Δ-lồi compắc khác rỗng của nửa dàn tôpô M với các khoảng liên thông đường, Y là không gian véctơ tôpô, $A : K \to 2^K$ với giá trị Δ-lồi khác rỗng, C là nón lồi đóng nhọn trong Y có $intC \neq \emptyset$, $f : K \times K \to 2^Y$. Giả sử rằng:*

(1) A có lát cắt dưới mở và $B := \{x \in K : x \in A(x)\}$ đóng;

(2) $f(x,x) \subset C,\ \forall x \in K$;

(3) $\forall x \in K$, $f(x,.)$ là C-Δ-tựa lồi trên;

(4) $\forall y \in K$, $f(.,y)$ là $-C$-liên tục dưới.

Khi đó tồn tại $x^* \in K$ sao cho

$$x^* \in A(x^*),\ \text{và } f(x^*,y) \subset C,\ \forall y \in A(x^*).$$

Chứng minh. Ta xác định $P : K \to 2^K$ như sau

$$P(x) = \{y \in K : f(x,y) \not\subset C\},\quad \forall x \in K.$$

Giả sử tồn tại $x' \in K$ sao cho $P(x')$ không là Δ-lồi; khi đó tồn tại $y_1, y_2 \in P(x')$ sao cho $\Delta(\{y_1,y_2\}) \not\subset P(x')$, nghĩa là tồn tại $z \in \Delta(\{y_1,y_2\})$ mà

$z \notin P(x')$; do đó ta có $f(x', z) \subset C$. Theo giả thiết (3), ta có

$$f(x', y_1) \subset f(x', z) + C$$

hoặc

$$f(x', y_2) \subset f(x', z) + C.$$

Do vậy, ta có

$$f(x', y_1) \subset f(x', z) + C \subset C + C \subset C$$

hoặc

$$f(x', y_2) \subset f(x', z) + C \subset C + C \subset C,$$

ta gặp mâu thuẫn. Từ đó, với mọi $x \in X, P(x)$ là Δ-lồi.

Tiếp theo, ta chứng minh $P^{-1}(y)$ mở với mọi $y \in K$. Ta có

$$\begin{aligned} K \setminus P^{-1}(y) &= \{x \in K : x \notin P^{-1}(y)\} = \{x \in K : y \notin P(x)\} \\ &= \{x \in K : f(x, y) \subset C\}. \end{aligned}$$

Do đó, ta chỉ cần chỉ ra với mỗi $y \in K$, $D := K \setminus P^{-1}(y)$ là tập đóng. Ta lấy $\bar{x} \in \overline{D}$ và chỉ ra $\bar{x} \in D$. Theo giả thiết (4), với mọi lân cận V của gốc trong Y, tồn tại lân cận $U(\bar{x})$ của $\bar{x}$ sao cho

$$f(\bar{x}, y) \subset f(x, y) + V + C, \quad \forall\, x \in U(\bar{x}).$$

Giả sử $\{x_\alpha\}$ là lưới trong D hội tụ đến $\bar{x}$, như vậy tồn tại β sao cho $x_\alpha \in U(\bar{x})$, $\forall \alpha \geq \beta$ và do đó

$$f(\bar{x}, y) \subset f(x_\alpha, y) + V + C,\ \forall \alpha \geq \beta.$$

Vì vậy

$$f(\bar{x}, y) \subset f(x_\alpha, y) + V + C \subset C + V + C \subset C + V.$$

Vì C đóng nên bao hàm thức cuối chỉ ra rằng $f(\bar{x}, y) \subset C$. Do đó, $\bar{x} \in D$, tức là ta có D là tập đóng. Như vậy, $P^{-1}(y)$ mở với mọi $y \in K$.

Phần còn lại của chứng minh hoàn toàn tương tự như Định lý 2.1.1. Vậy ta đã chứng minh xong định lý. $\square$

Chú ý 2.1.3 *Ta có thể trình bày ba định lý nêu trên theo một sơ đồ tổng quát hơn bằng cách xét "bài toán quan hệ biến phân" (Tiếng Anh: variational relation problem, viết tắt là (VR), xem [9]) như sau: Giả sử X là một nửa dàn tôpô, $K \subset X$ là tập con Δ-lồi khác rỗng, $A : K \to 2^K$, R là một quan hệ giữa x và y. Ta xét bài toán sau:*

$$\textit{Tìm } \bar{x} \textit{ sao cho } \bar{x} \in A(\bar{x}) \textit{ và } R(\bar{x}, y) \textit{ đúng với mọi } y \in A(\bar{x}).$$

Đặc biệt, bài toán quan hệ biến phân trong trường hợp bất đẳng thức Ky Fan suy rộng được mô tả như sau: Giả sử Y là không gian véctơ tôpô, C là nón lồi đóng nhọn trong Y có $intC \neq \emptyset$, $f : K \times K \to 2^Y$. Khi đó ta xác định quan hệ biến phân R như sau:

$$R(x, y) \textit{ đúng khi và chỉ khi } f(x, y)\rho C,$$

trong đó $f(x, y)\rho C$ biểu diễn một trong các quan hệ sau đây:

$$f(x, y) \cap C \neq \emptyset, \quad f(x, y) \subset C,$$

$$f(x, y) \cap intC = \emptyset, \quad f(x, y) \not\subset -intC.$$

Khi đó (VR) trở thành:

$$\textit{Tìm } \bar{x} \textit{ sao cho } \bar{x} \in A(\bar{x}) \textit{ và } f(\bar{x}, y)\rho C \textit{ với mọi } y \in A(\bar{x}).$$

Định lý 2.1.4 *Giả sử X là một nửa dàn tôpô với các khoảng liên thông đường, $K \subset X$ là tập con Δ-lồi compắc khác rỗng, $A : K \to 2^K$ và R là một quan hệ giữa x và y thỏa mãn các điều kiện sau:*

(1) A có lát cắt dưới mở và $B := \{x \in K : x \in A(x)\}$ đóng;

(2) $R(x,x)$ đúng $\forall x \in K$;

(3) $\forall x \in K$, tập $\{y \in K : R(x,y)$ sai$\}$ là Δ-lồi;

(4) $\forall y \in K$, tập $\{x \in K : R(x,y)$ đúng$\}$ là đóng trong K.

Khi đó tồn tại $\bar{x}$ sao cho $\bar{x} \in A(\bar{x})$ và $R(\bar{x},y)$ đúng với mọi $y \in A(\bar{x})$.

Chứng minh. Ta xác định $P : K \to 2^K$ như sau

$$P(x) = \{y \in K : R(x,y) \text{ sai}\}, \quad \forall x \in K.$$

Theo giả thiết (3), ta có $P(x)$ là Δ-lồi với mọi $x \in K$.

Tiếp theo, ta chứng minh $P^{-1}(y)$ mở với mọi $y \in K$. Ta có

$$\begin{aligned} K \setminus P^{-1}(y) &= \{x \in K : x \notin P^{-1}(y)\} = \{x \in K : y \notin P(x)\} \\ &= \{x \in K : R(x,y) \text{ đúng}\} \end{aligned}$$

là tập đóng theo giả thiết (4). Do đó $P^{-1}(y)$ mở với mọi $y \in K$.

Theo Bổ đề 2.1.2, B là tập khác rỗng. Ta xác định $S : K \to 2^K$ như sau

$$S(x) = \begin{cases} A(x) \cap P(x), & \text{nếu } x \in B, \\ A(x), & \text{nếu } x \in K \setminus B. \end{cases}$$

Khi đó với mọi $x \in K$, $S(x)$ là Δ-lồi. Và vì với mọi $y \in K$,

$$S^{-1}(y) = (A^{-1}(y) \cap P^{-1}(y)) \cup ((K \setminus B) \cap A^{-1}(y))$$

nên $S^{-1}(y)$ mở với mọi $y \in K$.

Giả sử rằng $\forall x \in K$, $S(x)$ khác rỗng, từ Bổ đề 2.1.2, ta suy ra tồn tại $x_0 \in K$ sao cho $x_0 \in S(x_0)$. Nếu $x_0 \in B$ thì $x_0 \in S(x_0) = A(x_0) \cap P(x_0)$.

Do đó $x_0 \in P(x_0)$, $R(x_0, x_0)$ sai, điều này mâu thuẫn với giả thiết (2) của định lý. Nếu $x_0 \in K \setminus B$ thì $x_0 \in S(x_0) = A(x_0) \subset A(x_0)$, và ta có $x_0 \in B$, điều này mâu thuẫn vì $x_0 \in K \setminus B$. Do đó, tồn tại $\bar{x} \in K$ sao cho $S(\bar{x}) = \emptyset$. Vì $A(x)$ khác rỗng với mọi $x \in K$ nên $\bar{x} \in B$, $S(\bar{x}) = A(\bar{x}) \cap P(\bar{x}) = \emptyset$, nghĩa là, $\bar{x} \in A(\bar{x})$ và với mọi $y \in A(\bar{x})$, $y \notin P(\bar{x})$, ta có

$$\bar{x} \in A(\bar{x}), \quad R(\bar{x}, y) \text{ đúng}, \quad \forall y \in A(\bar{x}).$$

Vậy định lý được chứng minh. □

2.2 Định lý điểm bất động dạng Browder-Fan cho họ các ánh xạ

Ta nhắc lại định lý chọn trong bài báo của Horvath và Llinares Ciscar [29].

Định lý 2.2.1 *Giả sử X là không gian tôpô compắc, Y là nửa dàn tôpô với các khoảng liên thông đường, $T : X \to 2^Y$ là ánh xạ với giá trị Δ-lồi khác rỗng và lát cắt dưới mở. Khi đó tồn tại phép chọn liên tục $f : X \to Y$ của T sao cho $f = g \circ h$, trong đó $g : \Delta_n \to Y$ và $h : X \to \Delta_n$ là các ánh xạ liên tục và n là số nguyên dương nào đó.*

Ta chứng minh bổ đề sau.

Bổ đề 2.2.1 *Giả sử I là một tập chỉ số bất kỳ và với mỗi $i \in I$, X_i là tập con Δ-lồi compắc khác rỗng của một nửa dàn tôpô với các khoảng liên thông đường, $X = \prod_{i \in I} X_i$. Với mỗi $i \in I$, giả sử $T_i : X \to 2^{X_i}$ là ánh xạ đa trị thỏa mãn* *(a) T_i có giá trị Δ-lồi khác rỗng;*

(b) T_i có lát cắt dưới mở.

Khi đó tồn tại $x \in X$ sao cho $x \in T(x) := \prod_{i \in I} T_i(x)$; nghĩa là, $x_i \in T_i(x)$ với mỗi $i \in I$, trong đó $x_i = \pi_i(x)$ là hình chiếu của x lên X_i với mỗi $i \in I$.

Chứng minh. Theo Định lý 2.2.1, với mỗi $i \in I$, tồn tại các ánh xạ liên tục $g_i : \Delta_{n_i} \to X_i$ và $h_i : X \to \Delta_{n_i}$ sao cho $f_i = g_i \circ h_i$ là phép chọn liên tục của T_i, trong đó n_i là số nguyên dương nào đó.
Bây giờ, đặt $S = \prod_{i \in I} \Delta_{n_i}$. Với mỗi $i \in I$, giả sử E_i là bao tuyến tính của tập $\{e_0, e_1, ..., e_{n_i}\}$, khi đó E_i là hữu hạn chiều nên lồi địa phương và Δ_{n_i} là tập con lồi compắc của E_i.
Đặt $E = \prod_{i \in I} E_i$, khi đó E là không gian véctơ tôpô lồi địa phương và S là tập con lồi compắc của E.

Ta xác định các ánh xạ liên tục $g : S \to X$ và $h : X \to S$ bởi

$$g(t) = \prod_{i \in I} g_i(\pi_i(t)), \ \forall t \in S \ \text{ và } \ h(x) = \prod_{i \in I} h_i(x), \ \forall x \in X,$$

trong đó $\pi_i : S \to \Delta_{n_i}$ là phép chiếu của S trên Δ_{n_i} với mỗi $i \in I$. Theo định lý điểm bất động Tikhonov [65], ánh xạ liên tục $h \circ g : S \to S$ có điểm bất động $t \in S$, nghĩa là, $t = h \circ g(t)$. Đặt $\overline{x} = g(t)$, khi đó ta có

$$\begin{aligned} \overline{x} = g \circ h(\overline{x}) &= g\left(\prod_{i \in I} h_i(\overline{x}) \right) \\ &= \prod_{i \in I} g_i \left(\pi_i \left(\prod_{i \in I} h_i(\overline{x}) \right) \right) = \prod_{i \in I} g_i \circ h_i(\overline{x}). \end{aligned}$$

Suy ra $\overline{x}_i = g_i \circ h_i(\overline{x}) \in T_i(\overline{x})$ với mỗi $i \in I$. Vậy ta đã suy ra kết luận của định lý. $\square$

Từ đó ta có định lý sau.

Định lý 2.2.2 *Giả sử* $\{X_i\}_{i\in I}$ *là họ các tập* Δ*-lồi compắc,* $X_i \subset M_i$*,* M_i *là nửa dàn tôpô với các khoảng liên thông đường,* $X = \prod_{i\in I} X_i$*, và* $\{T_i : X \to 2^{X_i}\}_{i\in I}$ *là họ các ánh xạ thỏa mãn:*

(1) Mỗi T_i *có giá trị* Δ*-lồi;*

(2) Mỗi T_i *có lát cắt dưới mở.*

(3) Với mỗi $x \in X$*, tồn tại* $i \in I$ *sao cho* $T_i(x) \neq \emptyset$*.*

Khi đó tồn tại $x = (x_i)_{i\in I} \in X$ *và* $i \in I$ *sao cho* $x_i \in T_i(x)$*.*

Chứng minh. Với mỗi $i \in I$, ta đặt $dom(T_i) := \{x \in X : T_i(x) \neq \emptyset\}$. Từ các điều kiện (2), (3), ta suy ra $\{dom(T_i) : i \in I\}$ là phủ mở của X. Vì X là tập compắc, khi đó tồn tại họ $\{F_i\}_{i\in I}$ làm thành phủ đóng của X và $F_i \subset dom(T_i)$ với mỗi $i \in I$.

Với mỗi $i \in I$, ta xác định các ánh xạ đa trị $B_i : X \to 2^{X_i}$ bởi

$$B_i(x) = \begin{cases} T_i(x) & \text{nếu } x \in F_i \\ X_i & \text{nếu } x \notin F_i \end{cases}$$

Dễ thấy họ $\{B_i\}_{i\in I}$ thỏa mãn các điều kiện (a) và (b) của Định lý 2.2.1. Do đó tồn tại $\bar{x} \in X$ sao cho $\bar{x}_i \in B_i(\bar{x})$ với mỗi $i \in I$. Vì với mỗi $x \in X$, tồn tại $i \in I$ sao cho $x \in F_i$, do đó tồn tại $i \in I$ sao cho $\bar{x}_i \in T_i(\bar{x})$. Như vậy ta có điều phải chứng minh. $\square$

Dễ thấy Định lý 2.2.1 tương đương với định lý tồn tại phần tử cực đại sau đây.

Định lý 2.2.3 *Giả sử* $\{X_i\}_{i\in I}$ *là họ các tập* Δ*-lồi compắc,* $X_i \subset M_i$*,*

M_i là nửa dàn tôpô với các khoảng liên thông đường, $X = \prod_{i\in I} X_i$, và $\{T_i : X \to 2^{X_i}\}_{i\in I}$ là họ các ánh xạ thỏa mãn:

(1) Mỗi T_i có giá trị Δ-lồi;

(2) Mỗi T_i có lát cắt dưới mở.

(3) Với mỗi $x = (x_i)_{i\in I} \in X$ và $i \in I, x_i \notin T_i(x)$.

Khi đó tồn tại $\bar{x} \in X$ sao cho $T_i(\bar{x}) = \emptyset$ với mọi $i \in I$.

2.3 Hệ bất đẳng thức dạng Ky Fan

Giả sử I là một tập chỉ số. Với mỗi $i \in I$, giả sử E_i, Y_i là hai không gian véctơ tôpô Hausdorff. Xét học các tập con lồi khác rỗng $\{X_i\}_{i\in I}$ với $X_i \subseteq E_i$. Giả sử $X = \prod_{i\in I} X_i$ và $E = \prod_{i\in I} E_i$. Mỗi phần tử thuộc tập $X_{-i} = \prod_{j\in I\setminus\{i\}} X_j$, ta ký hiệu là x_{-i}; do đó, $x \in X$ viết dưới dạng $x = (x_{-i}, x_i) \in X_{-i} \times X_i$. Với mỗi $i \in I$, giả sử $D_i : X \to 2^{X_i}$ và $F_i : X \times X_i \to 2^{Y_i}$ là các ánh xạ đa trị, C_i là nón nhọn lồi đóng có $intC_i \neq \emptyset$.

Ta xét các hệ bất đẳng thức dạng Ky Fan như sau:

Tìm $\bar{x} \in X$ sao cho với mỗi $i \in I$,

$$\bar{x}_i \in D_i(\bar{x}), \quad F_i(\bar{x}, y_i) \not\subset -intC_i, \quad \forall y_i \in D_i(\bar{x}). \tag{2.1}$$

Ngoài hệ (2.1), ta còn xét thêm hai hệ như sau:

Tìm $\bar{x} \in X$ sao cho với mỗi $i \in I$,

$$\bar{x}_i \in D_i(\bar{x}), \quad F_i(\bar{x}, y_i) \cap intC_i = \emptyset, \quad \forall y_i \in D_i(\bar{x}). \tag{2.2}$$

Tìm $\bar{x} \in X$ sao cho với mỗi $i \in I$,

$$\bar{x}_i \in D_i(\bar{x}), \quad F_i(\bar{x}, y_i) \subset C_i, \quad \forall y_i \in D_i(\bar{x}). \tag{2.3}$$

Trong mục này, ta chỉ ra sự tồn tại nghiệm cho các bài toán (2.1), (2.2) và (2.3).

Định lý 2.3.1 *Giả sử I là một tập chỉ số bất kỳ. Với mỗi $i \in I$, giả sử Y_i là không gian véctơ tôpô và X_i là tập con Δ-lồi compắc của nửa dàn tôpô E_i với các khoảng liên thông đường, giả sử $F_i : X \times X_i \to 2^{Y_i}$ là ánh xạ đa trị với giá trị khác rỗng, và giả sử $D_i : X \to 2^{X_i}$ là ánh xạ đa trị sao cho $D_i(x)$ là Δ-lồi, khác rỗng với mọi $x \in X$. Với mỗi $i \in I$, giả sử C_i là nón lồi đóng nhọn trong Y_i với $intC_i \neq \emptyset$. Giả sử rằng:*

(1) Với mỗi $i \in I$, D_i có lát cắt dưới mở và $B_i := \{x \in X : x \in D_i(x)\}$ là đóng;

(2) Với mỗi $i \in I$, $F_i(x, x_i) \cap intC_i = \emptyset$, $\forall x = (x_{-i}, x_i) \in X$;

(3) Với mỗi $i \in I$, $\forall x \in X$, $F_i(x, .)$ là $-C_i$-Δ-tựa lõm;

(4) Với mỗi $i \in I$, $\forall y_i \in X_i$, $F_i(., y_i)$ là C_i-liên tục dưới.

Khi đó tồn tại $\bar{x} \in X$ sao cho với mỗi $i \in I$,

$$\bar{x}_i \in D_i(\bar{x}), \; F_i(\bar{x}, y_i) \cap intC_i = \emptyset, \; \forall y_i \in D_i(\bar{x}).$$

Chứng minh. Với mỗi $i \in I$, ta xác định ánh xạ đa trị $P_i : X \to 2^{X_i}$ như sau:

$$P_i(x) = \{y_i \in X_i : F_i(x, y_i) \cap intC_i \neq \emptyset\}, \; \forall x \in X.$$

Tương tự Định lý 2.1.1, ta chứng minh được với mọi $x \in X, P_i(x)$ là Δ-lồi và $P_i^{-1}(y_i)$ mở với mỗi $y_i \in X_i$. Từ Bổ đề 2.2.1, ta suy ra với mỗi

$i \in I, B_i$ tập khác rỗng. Ta xác định ánh xạ $S_i : X \to 2^{X_i}$ bởi

$$S_i(x) = \begin{cases} D_i(x) \cap P_i(x), & \text{nếu } x \in B_i, \\ D_i(x), & \text{nếu } x \in X \setminus B_i. \end{cases}$$

Khi đó với mọi $x \in X$, $S_i(x)$ là Δ-lồi. Và với mọi $y_i \in X_i$, tập

$$S_i^{-1}(y_i) = (D_i^{-1}(y_i) \cap P_i^{-1}(y_i)) \cup ((X \setminus B_i) \cap D_i^{-1}(y_i))$$

là mở.

Giả sử với mỗi $x \in X$, tồn tại $i \in I$ sao cho $S_i(x)$ khác rỗng, từ Định lý 2.2.2, ta suy ra tồn tại x^* và $i \in I$ sao cho $x_i^* \in S_i(x^*)$. Nếu $x^* \in B_i$ thì $x_i^* \in S_i(x^*) = D_i(x^*) \cap P_i(x^*)$. Do đó $x_i^* \in P_i(x^*)$, $F_i(x^*, x_i^*) \cap intC_i \neq \emptyset$, điều này vô lý với giả thiết (2).

Nếu $x^* \in X \setminus B_i$ thì $x_i^* \in S_i(x^*) = D_i(x^*)$ và do đó $x^* \in B_i$, điều này mâu thuẫn với $x^* \in X \setminus B_i$. Do đó tồn tại $x^* \in X$ sao cho với mỗi $i \in I$, $S_i(x^*) = \emptyset$. Vì với mọi $i \in I$ và $x \in X$, $D_i(x)$ khác rỗng nên ta có $x^* \in B_i$ và $S_i(x^*) = D_i(x^*) \cap P_i(x^*) = \emptyset$, với mọi $i \in I$. Do đó với mọi $i \in I$,

$$x_i^* \in D_i(x^*), \quad F_i(x^*, y_i) \cap intC_i = \emptyset, \quad \forall y_i \in D_i(x^*).$$

Vậy ta đã chứng minh xong định lý. □

Khi I là tập một phần tử, ta thu được Định lý 2.1.1.

Định lý 2.3.2 *Giả sử I là một tập chỉ số bất kỳ. Với mỗi $i \in I$, giả sử Y_i là không gian véctơ tôpô và X_i là tập con Δ-lồi compắc của nửa dàn tôpô E_i với các khoảng liên thông đường, giả sử $F_i : X \times X_i \to 2^{Y_i}$ là ánh xạ đa trị với giá trị khác rỗng, và giả sử $D_i : X \to 2^{X_i}$ là ánh xạ đa trị* *sao cho* $D_i(x)$ *là* Δ*-lồi, khác rỗng với mọi* $x \in X$*. Với mỗi* $i \in I$*, giả sử* C_i *là nón lồi đóng nhọn trong* Y_i *với* $intC_i \neq \emptyset$*. Giả sử rằng:*

(1) Với mỗi $i \in I$*,* D_i *có lát cắt dưới mở và* $B_i := \{x \in X : x \in D_i(x)\}$ *là đóng;*

(2) Với mỗi $i \in I$*,* $F_i(x, x_i) \not\subset -intC_i,\ \forall x = (x_{-i}, x_i) \in X$*;*

(3) Với mỗi $i \in I$*,* $\forall x \in X$*,* $F_i(x, .)$ *là* C_i*-*Δ*-tựa lồi dưới;*

(4) Với mỗi $i \in I$*,* $\forall y_i \in X_i$*,* $F_i(., y_i)$ *là* $-C_i$*-liên tục trên với giá trị compắc.*

Khi đó tồn tại $\bar{x} \in X$ *sao cho với mỗi* $i \in I$*,*

$$\bar{x}_i \in D_i(\bar{x}),\ F_i(\bar{x}, y_i) \not\subset -intC_i,\ \forall y_i \in D_i(\bar{x}).$$

Chứng minh. Với mỗi $i \in I$, ta xây dựng ánh xạ $P_i : X \to 2^{X_i}$ như sau:

$$P_i(x) = \{y_i \in X_i : F_i(x, y_i) \subset -intC_i\},\quad \forall x \in X.$$

Tương tự Định lý 2.1.2, ta suy ra rằng với mỗi $x \in X, P_i(x)$ là Δ-lồi và $P_i^{-1}(y_i)$ mở với mỗi $y_i \in X_i$. Phần còn lại làm giống như Định lý 2.3.1 ta được điều phải chứng minh. $\square$

Khi I là tập một phần tử, ta thu được Định lý 2.1.2.

Định lý 2.3.3 *Giả sử* I *là một tập chỉ số bất kỳ. Với mỗi* $i \in I$*, giả sử* Y_i *là không gian véctơ tôpô và* X_i *là tập con* Δ*-lồi compắc của nửa dàn tôpô* E_i *với các khoảng liên thông đường, giả sử* $F_i : X \times X_i \to 2^{Y_i}$ *là ánh xạ đa trị với giá trị khác rỗng, và giả sử* $D_i : X \to 2^{X_i}$ *là ánh xạ đa trị sao cho* $D_i(x)$ *là* Δ*-lồi, khác rỗng với mọi* $x \in X$*. Với mỗi* $i \in I$*, giả sử* C_i *là nón lồi đóng nhọn trong* Y_i *với* $intC_i \neq \emptyset$*. Giả sử rằng:*

(1) Với mỗi $i \in I$, D_i có lát cắt dưới mở và $B_i := \{x \in X : x \in D_i(x)\}$ là đóng;

(2) Với mỗi $i \in I$, $F_i(x, x_i) \subset C_i,\ \forall x = (x_{-i}, x_i) \in X$;

(3) Với mỗi $i \in I$, $\forall x \in X$, $F_i(x, .)$ là C_i-Δ-tựa lồi trên;

(4) Với mỗi $i \in I$, $\forall y_i \in X_i$, $F_i(., y_i)$ là $-C_i$-liên tục dưới.

Khi đó tồn tại $\bar{x} \in X$ sao cho với mỗi $i \in I$,

$$\bar{x}_i \in D_i(\bar{x}),\ \ F_i(\bar{x}, y_i) \subset C_i,\ \ \forall y_i \in D_i(\bar{x}).$$

Chứng minh. Với mỗi $i \in I$, ta xây dựng ánh xạ $P_i : X \to 2^{X_i}$ như sau:

$$P_i(x) = \{y_i \in X_i : F_i(x, y_i) \not\subset C_i\},\quad \forall x \in X.$$

Tương tự Định lý 2.1.3, ta suy ra với mọi $x \in X$, $P_i(x)$ là Δ-lồi và $P_i^{-1}(y_i)$ là mở với mỗi $y_i \in X_i$.

Phần còn lại làm giống như Định lý 2.3.1 ta được điều phải chứng minh. □

2.4 Điểm cân bằng Nash đa trị trong nửa dàn tôpô

Năm 1951, Nash [48] đã công bố một định lý về cân bằng kinh tế và đã được trao giải thưởng Nobel về kinh tế năm 1994 do ảnh hưởng sâu sắc của nó đến tư duy kinh tế hiện đại. Sau đây chúng ta trình bày tóm tắt ý tưởng và nội dung định lý của Nash.

Một hệ thống có n thành viên, mà trong đó hành vi của mỗi thành viên tác động đến cả hệ thống, có thể xem như một trò chơi có n người tham gia, người chơi thứ i có thể chọn một chiến lược x_i trong một tập chiến lược X_i. Khi người chơi i chọn chiến lược $x_i \in X_i$ thì tình thế chung của trò chơi được mô tả bởi tập chiến lược

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \prod_{i=1}^{n} X_i.$$

Tình thế đó đem lại cho người chơi i một kết quả (lợi ích hay thiệt hại) đo bằng hàm số $f_i(x)$.

Vì các người chơi độc lập nên người chơi i không biết chiến lược của những người khác. Một véctơ $\bar{x} \in \prod_{i=1}^{n} X_i$ được gọi là một điểm *cân bằng Nash* nếu với mỗi $i = 1, 2, ..., n$:

$$f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n) = \max_{x_i \in X_i} f_i(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_{i-1}, x_i, \bar{x}_{i+1}, ..., \bar{x}_n).$$

Điều này có nghĩa rằng, đối với mỗi người chơi, hàm lợi ích của họ đạt giá trị lớn nhất.

Định lý 2.4.1 *(Nash, [48]) Giả thiết với mỗi $i = 1, 2, ..., n$, X_i là tập con lồi compắc khác rỗng của một không gian véctơ hữu hạn chiều, hàm f_i liên tục và khi cố định $(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n) \in \prod_{j \neq i} X_j$ thì hàm $f_i(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n)$ tựa lõm trên X_i. Khi ấy phải có một điểm cân bằng Nash.*

Dưới đây ta sẽ nghiên cứu sự tồn tại điểm cân bằng Nash cho trò chơi có số thành viên bất kỳ và hàm lợi ích là đa trị. Giả sử $(X_i, \leqslant_i), i \in I$ là một họ các nửa dàn tôpô và X, X_{-i} là các không gian tôpô với tôpô tích

$$X := \prod_{i \in I} X_i, \quad X_{-i} := \prod_{j \in I \setminus \{i\}} X_j.$$

Ta đưa vào X quan hệ thứ thứ tự bộ phận như sau: với $x, x' \in X := \prod_{i \in I} X_i$, ta xác định $x \leq x'$ khi và chỉ khi $x_i \leq_i x'_i$, khi đó $(X, \leqslant)$ là nửa dàn tôpô với $[\sup\{x, x'\}]_i = \sup\{x_i, x'_i\}$, $i \in I$ (xem Horvath và Llinares Ciscar [29]). Với mọi $x \in X$, ta viết $x = (x_{-i}, x_i)$, trong đó $x_i \in X_i,\ x_{-i} \in X_{-i}$.

Giả sử Y là không gian véctơ tôpô Hausdorff và với mỗi $i \in I$, $A_i : X \to 2^{X_i}$ là ràng buộc thứ i, $F_i : X \to 2^Y$ là hàm lợi ích thứ i.

Định nghĩa 2.4.1 *Phần tử $x^* \in X$ được gọi là điểm cân bằng Nash suy rộng của hệ trò chơi $\Gamma = (X_i, A_i, F_i)_{i \in I}$, nếu với mỗi $i \in I$,*

$$x_i^* \in A_i(x^*), \quad F_i(x_{-i}^*, u_i) \subset F_i(x_{-i}^*, x_i^*) + C, \quad \forall u_i \in A_i(x^*). \tag{2.4}$$

Chú ý 2.4.1 *Khi $Y = (-\infty, +\infty)$, $C = (-\infty, 0]$ và F_i là ánh xạ đơn trị, bao hàm thức (2.4) quy về: Tìm $x^* \in X$ sao cho với mỗi $i \in I$,*

$$x_i^* \in A_i(x^*), \quad F_i(x_{-i}^*, x_i^*) \geq F_i(x_{-i}^*, u_i), \quad \forall u_i \in A_i(x^*). \tag{2.5}$$

Ta có định lý điểm cân bằng Nash cho ánh xạ đa trị với số người chơi vô hạn như sau.

Định lý 2.4.2 *Giả sử I là tập chỉ số bất kỳ và với mỗi $i \in I$, X_i là tập con Δ-lồi compắc khác rỗng của nửa dàn tôpô M_i với các khoảng liên thông đường,*

$$X := \prod_{i \in I} X_i, \quad X_{-i} := \prod_{j \in I \setminus \{i\}} X_j.$$

Với mỗi $i \in I$, $A_i : X \to 2^{X_i}$, $F_i : X \to 2^Y$, C là nón nhọn lồi đóng trong không gian véctơ tôpô lồi địa phương Y với $\mathrm{int} C \neq \emptyset$. Giả sử rằng:

(1) $\forall i \in I$, A_i có lát cắt dưới mở và giá trị Δ-lồi khác rỗng;

(2) $\forall i \in I$, tập $B_i = \{x \in X : x_i \in A_i(x)\}$ là đóng;

(3) $\forall i \in I$, F_i *là* C*-liên tục trên với giá trị đóng;*

(4) $\forall i \in I$, $F_i(x_{-i}, u_i)$ *là* $-C$*-liên tục dưới theo* x_{-i}*;*

(5) $\forall i \in I$, *với mọi* $x_{-i} \in X_{-i}$, *hàm* $F_i(x_{-i}, .)$ *là* C*-*Δ*-tựa lồi trên.*

Khi đó tồn tại $x^* \in X$ *sao cho với mỗi* $i \in I$,

$$x_i^* \in A_i(x^*), \quad F_i(x_{-i}^*, u_i) \subset F_i(x_{-i}^*, x_i^*) + C, \quad \forall u_i \in A_i(x^*).$$

Chứng minh. Với mỗi $i \in I$, ta xác định ánh xạ $P_i : X \to 2^{X_i}$ như sau:

$$P_i(x) = \{y_i \in X_i : F_i(x_{-i}, y_i) \not\subset F_i(x_{-i}, x_i) + C\}.$$

Rõ ràng $x_i \notin P_i(x)$ với mọi $x \in X$. Giả sử tồn tại $x' \in X$ sao cho $P_i(x')$ không là Δ-lồi; khi đó tồn tại $y_i^1, y_i^2 \in P_i(x')$ sao cho $\Delta(\{y_i^1, y_i^2\}) \not\subset P_i(x')$, nghĩa là tồn tại $z_i \in \Delta(\{y_i^1, y_i^2\})$ và $z_i \notin P_i(x')$; do đó $F_i(x'_{-i}, z_i) \subset F_i(x'_{-i}, x'_i) + C$. Theo giả thiết (5), ta có

$$F_i(x'_{-i}, y_i^1) \subset F_i(x'_{-i}, z_i) + C$$

hoặc

$$F_i(x'_{-i}, y_i^2) \subset F_i(x'_{-i}, z_i) + C.$$

Do đó ta có

$$F_i(x'_{-i}, y_i^1) \subset F_i(x'_{-i}, z_i) + C \subset F_i(x'_{-i}, x'_i) + C + C \subset F_i(x'_{-i}, x'_i) + C$$

hoặc

$$F_i(x'_{-i}, y_i^2) \subset F_i(x'_{-i}, z_i) + C \subset F_i(x'_{-i}, x'_i) + C + C \subset F_i(x'_{-i}, x'_i) + C,$$

điều này vô lý. Vậy với mọi $x \in X, P_i(x)$ là Δ-lồi.

Hơn nữa, ta có:

$$X \setminus P^{-1}(y_i) = \{x \in X : F_i(x_{-i}, y_i) \subset F_i(x_{-i}, x_i) + C\}, \quad \forall y_i \in X_i.$$

Để chứng minh $\forall y_i \in X_i$, $P_i^{-1}(y_i)$ là mở, ta chỉ ra với mọi $y_i \in X_i$, $D := X \setminus P_i^{-1}(y_i)$ là tập đóng. Lấy $\bar{x} \in \overline{D}$, ta chỉ ra $\bar{x} \in D$. Giả sử ngược lại $\bar{x} \notin D$, khi đó ta có $F_i(\bar{x}_{-i}, y_i) \not\subset F_i(\bar{x}_{-i}, \bar{x}_i) + C$. Giả sử $\{x^\alpha\}$ là lưới trong D hội tụ đến $\bar{x}$. Từ giả thiết (4), $F_i(., y_i)$ là $-C$-liên tục dưới, do đó, với mọi lân cận V của gốc trong Y, tồn tại β_1 sao cho

$$F_i(\bar{x}_{-i}, y_i) \subset F_i(x^\alpha_{-i}, y_i) + V + C, \text{ với mọi } \alpha \geq \beta_1. \tag{2.6}$$

Vì $x^\alpha \to \bar{x}$ và F là C-liên tục trên tại $\bar{x}$ nên tồn tại β_2 sao cho

$$F_i(x^\alpha_{-i}, x^\alpha_i) \subset F_i(\bar{x}_{-i}, \bar{x}_i) + V + C, \text{ với mọi } \alpha \geq \beta_2. \tag{2.7}$$

Mặt khác, ta có:

$$F_i(x^\alpha_{-i}, y_i) \subset F_i(x^\alpha_{-i}, x^\alpha_i) + C. \tag{2.8}$$

Đặt $\beta_0 = \max\{\beta_1, \beta_2\}$, từ (2.6), (2.7), (2.8) và với mọi $\alpha \geq \beta_0$, ta có

$$F_i(\bar{x}_{-i}, y_i) \subset F_i(\bar{x}_{-i}, \bar{x}_i) + 2V + C.$$

Vì C đóng và F có giá trị đóng nên

$$F_i(\bar{x}_{-i}, y_i) \subset F_i(\bar{x}_{-i}, \bar{x}_i) + C,$$

điều này vô lý. Do đó, $\bar{x} \in D$, tức D là tập đóng. Vậy $P_i^{-1}(y_i)$ mở với mọi $y_i \in X_i$.

Theo Hệ quả 1.4.2, với mỗi $i \in I, B_i$ là tập khác rỗng. Với mỗi $i \in I$, ta xác định ánh xạ $S_i : X \to 2^{X_i}$ bởi

$$S_i(x) = \begin{cases} A_i(x) \cap P_i(x), & \text{if } x \in B_i, \\ A_i(x), & \text{if } x \in X \setminus B_i. \end{cases}$$

Với mọi $x \in X$, $S_i(x)$ là Δ-lồi. Và với mọi $y_i \in X_i$,

$$S_i^{-1}(y_i) = (A_i^{-1}(y_i) \cap P_i^{-1}(y_i)) \cup ((X \setminus B_i) \cap A_i^{-1}(y_i))$$

là tập mở.

Giả sử với mỗi $x \in X$, tồn tại $i \in I$ sao cho $S_i(x)$ khác rỗng. Theo Định lý 2.2.2, ta suy ra tồn tại x^* và $i \in I$ sao cho $x_i^* \in S_i(x^*)$. Nếu $x^* \in B_i$ thì $x_i^* \in S_i(x^*) = A_i(x^*) \cap P_i(x^*)$, do đó $x_i^* \in P_i(x^*)$, điều này mâu thuẫn với $x_i \notin P_i(x)$ với mọi $x \in X$.

Nếu $x^* \in X \setminus B_i$ thì $x_i^* \in S_i(x^*) = A_i(x^*)$, ta suy ra $x^* \in B_i$, điều này vô lý vì $x^* \in X \setminus B_i$. Do vậy, tồn tại $x^* \in X$ sao cho với mỗi $i \in I$, $S_i(x^*) = \emptyset$. Vì với mọi $i \in I$ và $x \in X$, $A_i(x)$ khác rỗng nên $x^* \in B_i$, và $S_i(x^*) = A_i(x^*) \cap P_i(x^*) = \emptyset$, với mọi $i \in I$. Tóm lại với mọi $i \in I$,

$$x_i^* \in A_i(x^*), \quad F_i(x_{-i}^*, u_i) \subset F_i(x_{-i}^*, x_i^*) + C, \quad \forall u_i \in A_i(x^*).$$

Vậy ta đã chứng minh xong định lý. $\square$

Khi F_i là đơn trị với mọi $i \in I$, ta có hệ quả sau.

Hệ quả 2.4.1 *Giả sử I là tập chỉ số bất kỳ và với mỗi $i \in I$, X_i là tập con Δ-lồi compắc khác rỗng của nửa dàn tôpô M_i với các khoảng liên thông đường, các tập X, X_{-i} xác định như trong Định lý 2.4.2. Với mỗi $i \in I$, $A_i : X \to 2^{X_i}$, $F_i : X \to Y$, C là nón nhọn lồi đóng trong không gian véctơ tôpô lồi địa phương Y với int$C \neq \emptyset$. Giả sử rằng:*

(1) $\forall i \in I$, A_i có lát cắt dưới mở và giá trị Δ-lồi khác rỗng;

(2) $\forall i \in I$, tập $B_i = \{x \in X : x_i \in A_i(x)\}$ là đóng;

(3) $\forall i \in I$, F_i là C-liên tục;

(4) $\forall i \in I,\ F_i(x_{-i}, u_i)$ *là* $-C$*-liên tục theo* x_{-i}*;*

(5) $\forall i \in I$*, với mọi* $x_{-i} \in X_{-i}$*, hàm* $F_i(x_{-i}, .)$ *là* C*-*Δ*-tựa lồi.*

Khi đó tồn tại $x^* \in X$ *sao cho với mỗi* $i \in I$*,*

$$x_i^* \in A_i(x^*), \quad F_i(x_{-i}^*, u_i) \in F_i(x_{-i}^*, x_i^*) + C, \quad \forall u_i \in A_i(x^*).$$

Từ hệ quả trên, xét trường hợp đặc biệt khi $Y = (-\infty, +\infty)$, và nón $C = (-\infty, 0]$, ta thu được kết quả sau.

Hệ quả 2.4.2 *Giả sử* I *là tập chỉ số bất kỳ và với mỗi* $i \in I$*,* X_i *là tập con* Δ*-lồi compắc khác rỗng của nửa dàn tôpô* M_i *với các khoảng liên thông đường, các tập* X*,* X_{-i} *xác định như trong Định lý 2.4.2. Với mỗi* $i \in I$*,* $A_i : X \to 2^{X_i}$*,* $F_i : X \to Y$*,* C *là nón nhọn lồi đóng trong không gian véctơ tôpô lồi địa phương* Y *với* $intC \neq \emptyset$*. Giả sử rằng:*

(1) $\forall i \in I$*,* A_i *có lát cắt dưới mở và giá trị* Δ*-lồi khác rỗng;*

(2) $\forall i \in I$*, tập* $B_i = \{x \in X : x_i \in A_i(x)\}$ *là đóng;*

(3) $\forall i \in I$*,* F_i *là nửa liên tục trên;*

(4) $\forall i \in I,\ F_i(x_{-i}, u_i)$ *là nửa liên tục dưới theo* x_{-i}*;*

(5) $\forall i \in I$*, với mọi* $x_{-i} \in X_{-i}$*,* $F_i(x_{-i}, .)$ *là hàm tựa lõm.*

Khi đó tồn tại $x^* \in X$ *sao cho với mỗi* $i \in I$*,*

$$x_i^* \in A_i(x^*), \quad F_i(x_{-i}^*, x_i^*) = \max_{u_i \in A_i(x^*)} F_i(x_{-i}^*, u_i).$$

Xét trường hợp $A_i(x) = X_i$, với mọi $x \in X$, ta thu được định lý điểm cân bằng Nash dạng cơ bản như sau.

Định lý 2.4.3 *Giả sử* I *là tập chỉ số bất kỳ và với mỗi* $i \in I$*,* X_i *là tập* *con Δ-lồi compắc khác rỗng của nửa dàn tôpô M_i với các khoảng liên thông đường, các tập X, X_{-i} xác định như trong Định lý 2.4.2. Với mỗi $i \in I$, $F_i : X \to Y$, C là nón nhọn lồi đóng trong không gian véctơ tôpô lồi địa phương Y với $intC \neq \emptyset$. Giả sử rằng:*

(1) $\forall i \in I$, F_i là nửa liên tục trên;

(2) $\forall i \in I$, $F_i(x_{-i}, u_i)$ là nửa liên tục dưới theo x_{-i};

(3) $\forall i \in I$, với mọi $x_{-i} \in X_{-i}$, hàm $F_i(x_{-i}, .)$ là tựa lõm.

Khi đó tồn tại $x^* \in X$ sao cho với mỗi $i \in I$,

$$F_i(x^*_{-i}, x^*_i) = \max_{u_i \in X_i} F_i(x^*_{-i}, u_i).$$

2.5 Sự tồn tại điểm cân bằng Pareto

Giả sử I là tập chỉ số bất kỳ và với mỗi $i \in I$, X_i là không gian tôpô. Các tập X và X_{-i} vẫn dùng như mục trước. Giả sử I là tập hợp người chơi. Mỗi người chơi $i \in I$ có tập lựa chọn X_i, hàm ràng buộc $A_i : X_{-i} \to 2^{X_i}$, hàm lợi ích $F_i : X_{-i} \times X_i \to 2^{Z_i}$, trong đó Z_i là không gian véctơ tôpô Hausdorff, C_i là nón lồi đóng nhọn trong Z_i có $intC_i \neq \emptyset$ và $C_i \neq Z_i$. Trò chơi đa mục tiêu suy rộng có ràng buộc, thường viết tắt là GCMOG (theo tiếng Anh), $\Gamma = (X_i, A_i, F_i, C_i)_{i \in I}$ là họ các bộ bốn có thứ tự (X_i, A_i, F_i, C_i). Điểm $\hat{x} = (\hat{x}_{-i}, \hat{x}_i) \in X$ được gọi là điểm cân bằng Pareto (t. ư., Pareto yếu) của Γ nếu với mỗi $i \in I$, tồn tại $\hat{z}_i \in F(\hat{x}_{-i}, \hat{x}_i)$ sao cho

$$\hat{x}_i \in A_i(\hat{x}_{-i}), \quad z_i - \hat{z}_{-i} \notin -C_i \setminus \{0\}, \quad \forall z_i \in F_i(\hat{x}_{-i}, u_i),\ u_i \in A_i(\hat{x}_{-i})$$

$$(\text{t. ư.}, \hat{x}_i \in A_i(\hat{x}_{-i}),\ z_i - \hat{z}_{-i} \notin -intC_i,\ \forall z_i \in F_i(\hat{x}_{-i}, u_i),\ u_i \in A_i(\hat{x}_{-i})).$$

Vì $-intC_i \subset -C_i \setminus \{0\}$ với mỗi $x_{-i} \in X_{-i}$ nên dễ thấy mỗi điểm cân bằng Pareto của GCMOG cũng là điểm cân bằng Pareto yếu của GCMOG.

Định nghĩa 2.5.1 *Giả sử Z là không gian véctơ tôpô với thứ tự được sinh bởi nón lồi đóng nhọn C với $intC \neq \emptyset$ và A là tập con khác rỗng của Z.*

(i) Điểm $x \in A$ được gọi là điểm hữu hiệu lý tưởng của tập A đối với nón C nếu $y - x \in C$ với mọi $y \in A$.

(ii) Điểm $x \in A$ được gọi là điểm hữu hiệu Pareto (t. ư., điểm hữu hiệu yếu) của A đối với nón C nếu với mọi $y \in A$, $y - x \notin -C \setminus \{0\}$ (t. ư., $y - x \notin -intC$). Ta ký hiệu tập điểm hữu hiệu Pareto (t. ư., điểm hữu hiệu yếu) của A là $\min_C(A)$ (t. ư., $\mathrm{w}\min_C(A)$).

Bổ đề 2.5.1 *(Luc [44]) Giả sử A là tập con compắc khác rỗng của không gian véctơ tôpô thực Z và $C \subset Z$ là nón lồi đóng với $C \neq Z$. Khi đó $\min_C(A) \neq \emptyset$.*

Định lý 2.5.1 *Giả sử I là tập chỉ số bất kỳ và với mỗi $i \in I$, X_i là tập con Δ-lồi compắc khác rỗng của nửa dàn tôpô M_i với các khoảng liên thông đường, Y_i là không gian véctơ tôpô lồi địa phương, C_i là nón lồi đóng nhọn trong Y_i với $intC_i \neq \emptyset$ và $C_i \neq Y_i$. Giả sử $\Gamma = (X_i, A_i, F_i, C_i)$ là trò chơi đa mục tiêu suy rộng có ràng buộc. Với mỗi $i \in I$, giả sử $A_i : X \to 2^{X_i}$, $F_i : X \to 2^{Y_i}$ thỏa mãn các điều kiện sau:*

(1) $\forall i \in I$, A_i có lát cắt dưới mở và giá trị Δ-lồi khác rỗng;

(2) $\forall i \in I$, tập $B_i = \{x \in X : x_i \in A_i(x_{-i})\}$ là đóng;

(3) $\forall i \in I$, F_i là C_i-liên tục trên với giá trị compắc;

(4) $\forall i \in I,\ F_i(x_{-i}, u_i)$ *là* $-C_i$*-liên tục dưới theo* x_{-i}*;*

(5) $\forall i \in I$*, với mọi* $x_{-i} \in X_{-i}$*, hàm* $F_i(x_{-i}, .)$ *là* C_i*-*Δ*-tựa lồi trên.*

Khi đó tồn tại $x^* \in X$ *sao cho với mỗi* $i \in I$*, tồn tại* $z_i^* \in F(x^*)$ *thỏa mãn*

$$x_i^* \in A_i(x^*), \quad z_i - z_i^* \notin -C_i \setminus \{0\}, \quad \forall z_i \in F_i(x_{-i}^*, u_i),\ u_i \in A_i(x^*)$$

tức là, $x^* \in X$ *là điểm cân bằng Pareto của GCMOG và vì vậy* $x^* \in X$ *là điểm cân bằng Pareto yếu của GCMOG.*

Chứng minh. Trước hết, ta chỉ ra tồn tại $x^* = (x_{-i}^*, x_i^*) \in \prod_{i \in I} X_i$ sao cho với mỗi $i \in I$,

$$x_i^* \in A_i(x^*), \quad F_i(x_{-i}^*, x_i^*) \cap \min_{C_i} F_i(x_{-i}^*, A_i(x^*)) \neq \emptyset. \tag{2.9}$$

Nếu điều này sai thì với mỗi $x \in \prod_{i \in I} X_i$ tồn tại $i \in I$ sao cho hoặc $x_i \notin A_i(x)$ hoặc $F_i(x_{-i}, x_i) \cap \min_{C_i} F_i(x_{-i}, A_i(x)) = \emptyset$. Nhưng khi đó theo Định lý 2.4.2, ta suy ra tồn tại $x^* = (x_{-i}^*, x_i^*) \in \prod_{i \in I} X_i$ sao cho với mỗi $i \in I$,

$$x_i^* \in A_i(x^*) \text{ và } F_i(x_{-i}^*, u_i) \subset F_i(x_{-i}^*, x_i^*) + C_i, \quad \forall u_i \in A_i(x^*). \tag{2.10}$$

Do đó ta có

$$F_i(x_{-i}^*, x_i^*) \cap \min_{C_i} F_i(x_{-i}^*, A_i(x^*)) = \emptyset. \tag{2.11}$$

Từ điều kiện (3), vì $F_i(x_{-i}^*, x_i^*)$ là tập con compắc trong Y_i nên từ Bổ đề 2.5.1, ta suy ra, $\min\limits_{C_i} F_i(x_{-i}^*, x_i^*) \neq \emptyset$. Giả sử $z_i^0 \in F_i(x_{-i}^*, x_i^*) \subset F_i(x_{-i}^*, x_i^*)$. Từ (2.11) ta suy ra

$$z_i^0 \notin \min_{C_i} F_i(x_{-i}^*, A_i(x^*)).$$

Do đó, tồn tại $u_i^* \in A_i(x^*)$ và $z_i^* \in F_i(x_{-i}^*, u_i^*)$ sao cho

$$z_i^0 \in z_i^* + C_i \setminus \{0\}. \tag{2.12}$$

Từ (2.10) suy ra tồn tại $z_i \in F_i(x_{-i}^*, x_i^*)$ sao cho

$$z_i^* \in z_i + C_i. \tag{2.13}$$

Từ (2.12) và (2.13), ta có

$$z_i^0 - z_i = z_i^0 - z_i^* + z_i^* - z_i \in C_i \setminus \{0\} + C_i = C_i \setminus \{0\}$$

điều này mâu thuẫn với $z_i^0 \in \min_{C_i} F_i(x_{-i}^*, x_i^*)$. Do đó (2.9) phải đúng. Từ Định nghĩa 2.5.1 và (2.9) ta suy ra tồn tại $x^* = (x_{-i}^*, x_i^*) \in X$ sao cho với mỗi $i \in I$, tồn tại $z_i^* \in F_i(x_{-i}^*, x_i^*)$ thỏa mãn

$$x_i^* \in A_i(x_{-i}^*), \quad z_i - z_i^* \notin -C_i \setminus \{0\}, \quad \forall z_i \in F_i(x_{-i}^*, u_i),\ u_i \in A_i(x_{-i}^*)$$

tức là $x^* \in X$ là điểm cân bằng Pareto của GCMOG và vì vậy $x^* \in X$ là điểm cân bằng Pareto yếu của GCMOG. $\square$

Chương 3

Tính liên tục và liên thông của tập nghiệm

Trong chương này, chúng tôi sẽ trình bày tính ổn định của tập các điểm Ky Fan bằng cách chỉ ra sự tồn tại thành phần cốt yếu liên thông cực tiểu của tập nghiệm của bất đẳng thức Ky Fan đa trị.

3.1 Mở đầu

Tính ổn định của tập nghiệm luôn là một vấn đề được quan tâm và nghiên cứu. Khái niệm thành phần cốt yếu của tập điểm bất động do Kinoshita [36] đưa ra 1952 và ông đã chứng minh rằng mỗi ánh xạ liên tục từ hình hộp Hilbert vào chính nó có tồn tại ít nhất một thành phần cốt yếu của tập điểm bất động của nó. Năm 1986, Kohlberg và Mertens [39] đã xây dựng khái niệm thành phần cốt yếu của tập các điểm cân bằng Nash và chứng minh rằng mỗi trò chơi không hợp tác gồm n người chơi có ít nhất một thành phần cốt yếu của tập các điểm cân bằng Nash của trò chơi đó. Năm 1999, Yu và Luo [73] đã xây dựng khái niệm thành phần cốt yếu của tập các điểm Ky Fan và chứng minh rằng mỗi hàm (thỏa mãn một số điều kiện nào đó về tính lồi và tính liên tục) có ít nhất một thành phần cốt yếu của tập các điểm Ky Fan của nó. Gần đây, vấn đề tồn tại thành phần cốt yếu được nghiên cứu bởi nhiều nhà toán học, chẳng hạn xem [63, 71, 73, 74, 75]. Hầu hết đều tập trung nghiên cứu thành phần cốt yếu của tập các điểm Ky Fan, điểm cân bằng Nash, điểm trùng, ...

Trong Định lý 2.1.2 nếu cho $A(x) = K$, với mọi $x \in K$, thì ta thu được kết quả sau đây về sự tồn tại các điểm Ky Fan.

Định lý 3.1.1 *Giả sử K là tập con Δ-lồi compắc khác rỗng của nửa dàn tôpô M với các khoảng liên thông đường, Y là không gian véctơ tôpô, C là nón lồi đóng nhọn trong Y có $intC \neq \emptyset$, $f : K \times K \to 2^Y$. Giả sử rằng:*

(1) $f(x,x) \not\subset -intC,\ \forall x \in K$;

(2) $\forall x \in K,\ f(x,.)$ là C-Δ-tựa lồi dưới;

(3) $\forall y \in K,\ f(.,y)$ là $-C$-liên tục trên với giá trị compắc.

Khi đó tồn tại $x^* \in K$ sao cho

$$f(x^*, y) \not\subset -intC,\ \forall y \in K.$$

Trong chương này, ta sẽ nghiên cứu tính ổn định của tập nghiệm (cũng gọi là tập điểm Ky Fan) của bất đẳng thức Ky Fan suy rộng nói trên, tức là tập

$$S(f) = \bigcap_{y \in X} \{x \in X : f(x, y) \not\subset -intC\}.$$

Như vậy, với mỗi hàm f cho trước, ta có một bài toán bất đẳng thức Ky Fan suy rộng ứng với nó và tập nghiệm của bài toán này phụ thuộc vào f và ký hiệu là $S(f)$, xem như một ánh xạ đa trị. Ta sẽ gọi f là dữ kiện của bài toán bất đẳng thức Ky Fan suy rộng nói trên. Và ta sẽ chứng minh tập nghiệm của bài toán này có ít nhất một thành phần liên thông cốt yếu.

Bây giờ ta giới thiệu các khái niệm điểm cốt yếu, tập cốt yếu, thành phần cốt yếu. Giả sử X là tập con Δ-lồi compắc khác rỗng của một nửa dàn tôpô nào đó, $K(X)$ ký hiệu không gian tất cả các tập con compắc khác rỗng của X được trang bị tôpô Vietoris (xem Cain [16, trang 172]).

Một cách tổng quát, giả sử (P, d) là không gian metric các dữ kiện của bài toán bất đẳng thức Ky Fan suy rộng và X là không gian các tập nghiệm $S(p)$ của bài toán, phụ thuộc vào dữ kiện $p \in P$. Khi đó $S : P \to 2^X$ được xác định và gọi là ánh xạ nghiệm. Ta nhắc lại rằng, ánh xạ $S : P \to 2^X$ được gọi là

(i) nửa liên tục trên (t. ư., nửa liên tục dưới) tại $p \in P$ nếu với mỗi tập mở O trong X sao cho $O \supset S(p)$ (t. ư., $O \cap S(p) \neq \emptyset$), đều tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $p' \in P$ mà $d(p, p') < \delta$, $O \supset S(p')$ (t. ư., $S(p') \cap O \neq \emptyset$);

(ii) ánh xạ usco nếu S là nửa liên tục trên và có giá trị compắc khác rỗng tại mỗi $p \in P$.

Định nghĩa 3.1.1 *Nghiệm $x \in S(p)$ được gọi là điểm cốt yếu nếu với* *mọi lân cận mở* $N(x)$ *của* x *trong* X*, đều tồn tại* $\delta > 0$ *sao cho với mọi* $p' \in P$ *mà* $d(p,p') < \delta$*,* $S(p') \cap N(x) \neq \emptyset$*. Dữ kiện* p *được gọi là cốt yếu nếu mọi nghiệm của bài toán ứng với nó là cốt yếu.*

Chú ý 3.1.1 *(i) Nếu nghiệm* x^* *của bài toán ứng với* $p \in P$ *là cốt yếu thì ta suy ra rằng với mọi* $p' \in P$ *đủ gần* p*, bài toán ứng với* p' *có một nghiệm đủ gần* x^**.*

(ii) Dễ thấy dữ kiện $p \in P$ *là cốt yếu khi và chỉ khi ánh xạ nghiệm* $S : P \to 2^X$ *là nửa liên tục dưới tại* p*, tức là, nếu với mỗi tập mở* G *sao cho* $G \cap S(p) \neq \emptyset$*, đều tồn tại lân cận mở* $O(p)$ *của* p *sao cho* $G \cap S(p') \neq \emptyset$ *với mọi* $p' \in O(p)$*.*

Định nghĩa 3.1.2 *Tập con đóng khác rỗng* $e(p) \subset S(p)$ *được gọi là tập cốt yếu của* $S(p)$ *nếu với mọi tập con mở* O *trong* X *sao cho* $O \supset e(p)$*, đều tồn tại* $\delta > 0$ *sao cho với mọi* $p' \in P$ *mà* $d(p,p') < \delta$*,* $S(p') \cap O \neq \emptyset$*.*

Chú ý 3.1.2 *(i) Khái niệm tập cốt yếu là sự mở rộng tự nhiên khái niệm điểm cốt yếu.*

(ii) Giả sử $e_1(p), e_2(p) \subset S(p)$ *là các tập con đóng khác rỗng của* $S(p)$ *và* $e_1(p) \subset e_2(p)$*. Nếu* $e_1(p)$ *là cốt yếu thì* $e_2(p)$ *cũng là cốt yếu.*

(iii) Khái niệm cốt yếu đối với tập nghiệm của bài toán ứng với $p \in P$ *phản ánh một phần nào đó tính liên tục của ánh xạ nghiệm* S *tại* p*, nghĩa là, tập con đóng* $e(p) \subset S(p)$ *là cốt yếu nếu mỗi* $p' \in P$ *đủ gần* p *có một nghiệm đủ gần* $e(p)$*.*

(iv) Từ tính nửa liên tục trên hoặc dưới của S *tại* $p \in P$ *ta có thể suy ra sự tồn tại tập cốt yếu của* $S(p)$*. Nếu* S *là nửa liên tục dưới tại* $p \in P$

thì mỗi điểm trong $S(p)$ là cốt yếu và coi mỗi điểm đó là một tập con cốt yếu của $S(p)$ (xem Chú ý 3.1.1 (ii)). Nếu S là nửa liên tục trên tại $p \in P$, nghĩa là với mỗi tập mở $G \supset S(p)$, đều tồn tại lân cận mở $O(p)$ của p sao cho $G \supset S(p')$ với mọi $p' \in O(p)$, khi đó nếu $S(p)$ là tập con đóng trong X thì nó là tập cốt yếu.

Giả sử $F : P \to 2^X$ là ánh xạ usco. Với mỗi $p \in P$, thành phần liên thông của $x \in S(p)$ là hợp của các tập con liên thông của $S(p)$ chứa x, xem Dugundji [19, trang 356]. Các thành phần liên thông là các tập con đóng liên thông của $S(p)$ và do đó chúng đều compắc. Ta biết rằng các thành phần liên thông của hai phần tử khác nhau của $S(p)$ là rời nhau hoặc trùng nhau. Vì vậy, $S(p)$ phân tích thành hợp của tất cả các tập con liên thông compắc rời nhau đôi một, nghĩa là:

$$S(p) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} S_\alpha(p),$$

trong đó Λ là tập chỉ số, với mọi $\alpha \in \Lambda$, $S_\alpha(p)$ là tập con compắc liên thông khác rỗng của $S(p)$ và với mọi $\alpha, \beta \in \Lambda$ $(\alpha \neq \beta)$, $S_\alpha(p) \cap S_\beta(p) = \emptyset$.

Định nghĩa 3.1.3 *(1) Nếu thành phần $S_\alpha(p)$ của $S(p)$ là một tập cốt yếu thì $S_\alpha(p)$ được gọi là thành phần cốt yếu của $S(p)$;*

(2) Tập $m(p)$ được gọi là tập cốt yếu cực tiểu của $S(p)$ nếu $m(p)$ là phần tử cực tiểu của họ tất cả các tập con cốt yếu của $S(p)$ được sắp thứ tự bộ phận theo quan hệ bao hàm.

3.2 Tính liên tục của tập các điểm Ky Fan

Bây giờ, giả sử X là tập con Δ-lồi compắc khác rỗng của nửa dàn tôpô E với các khoảng liên thông đường và Y là không gian Banach, C là nón lồi đóng nhọn trong Y có $intC \neq \emptyset$. Giả sử M là tập các hàm $f : X \times X \to 2^Y$ thỏa mãn:

(1) $f(x, x) \not\subset -intC, \ \forall x \in X$;

(2) $\forall x \in X, \ f(x, .)$ là C-Δ-lồi;

(3) $\forall y \in X, \ f(., y)$ là $-C$-liên tục trên với giá trị compắc;

(4) $f(X \times X)$ là tập bị chặn.

Với mỗi $f, g \in M$, ta xác định

$$\rho(f, g) := \sup_{(x,y) \in X \times X} H(f(x, y), g(x, y)),$$

trong đó H là khoảng cách Hausdorff trên $K(Y)$. Nhắc lại rằng khoảng cách Hausdorff giữa hai tập con tùy ý C_1, C_2 của không gian metric (Y, d) xác định bởi công thức

$$H(C_1, C_2) := \max\{h^0(C_1, C_2), h^0(C_2, C_1)\},$$

trong đó

$$h^0(C_1, C_2) := \sup\{d(b, C_2) : b \in C_1\}$$

và

$$d(b, C_2) := \inf\{d(b, c) : c \in C_2\}.$$

Bổ đề 3.2.1 *(M, ρ) là không gian metric đầy đủ.*

Chứng minh. Giả sử f_n là dãy Cauchy bất kỳ trong M, khi đó với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $N(\epsilon)$ sao cho $\rho(f_n, f_m) < \epsilon$ với mọi $n, m \geq N(\epsilon)$, tức là:

$$\sup_{(x,y)\in X\times X} H(f_n(x,y), f_m(x,y)) < \epsilon$$

với mọi $n, m \geq N(\epsilon)$.

Ta suy ra với mỗi $(x, y) \in X \times X$, dãy $\{f_n(x,y)\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy Cauchy trong $K(Y)$. Vì Y đầy đủ nên $K(Y)$ đầy đủ (xem Cain [16, Định lý 11.25, trang 185]) do đó tồn tại $f : M \to K(Y)$ sao cho

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x,y) = f(x,y),$$

hay

$$H(f_n(x,y), f(x,y)) \to 0 \text{ với mỗi } (x,y) \in X \times X.$$

Vì với mọi $n, m \geq N(\epsilon)$,

$$\sup_{(x,y)\in X\times X} H(f_n(x,y), f_m(x,y)) < \epsilon,$$

nên

$$H(f_n(x,y), f_m(x,y)) < \epsilon, \quad \forall\, n, m \geq N(\epsilon), \forall\, (x,y) \in X \times X.$$

Do tính liên tục của H ta có

$$H(f_n(x,y), f(x,y)) < \epsilon, \quad \forall\, (x,y) \in X \times X,$$

và ta có

$$\sup_{(x,y)\in X\times X} H(f_n(x,y), f(x,y)) < \epsilon.$$

Vì vậy

$$\limsup_{n\to+\infty} \sup_{(x,y)\in X\times X} H(f_n(x,y), f(x,y)) < \epsilon.$$

Do $\epsilon > 0$ bé tùy ý nên

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{(x,y)\in X\times X} H(f_n(x,y), f(x,y)) = 0. \tag{3.1}$$

Bây giờ, ta chứng minh f thuộc M.

(i) Bước 1: Ta chỉ ra $f(x,x) \not\subset -intC,\ \forall x \in X$. Giả sử ngược lại tồn tại $x \in X$ sao cho $f(x,x) \subset -intC$. Vì $intC$ mở và $f(x,x)$ compắc nên tồn tại lân cận V của gốc sao cho

$$f(x,x) + \frac{1}{2}V \subset -intC.$$

Từ (3.1) nên tồn tại N_1 sao cho với mọi $n \geq N_1$ ta có

$$f_n(x,y) \subset f(x,y) + \frac{1}{2}V \text{ với mọi } (x,y) \in X \times X. \tag{3.2}$$

Do đó từ (3.1), (3.2), với mọi $n \geq N_1$ ta có:

$$f_n(x,y) \subset f(x,y) + \frac{1}{2}V \subset -intC,$$

đây là điều vô lý.

(ii) Bước 2: Ta chỉ ra $\forall x \in X,\ f(x,.)$ là C-Δ-lồi. Vì mỗi $f_n(x,.)$ là C-Δ-lồi nên với mọi tập con hữu hạn $D = \{y_1, y_2, ..., y_k\} \subset X$, với mọi $y \in \Delta(D)$, với mọi $t_i \in (0,1)$, $i = 1, 2, ..., k$ và $\sum_{i=1}^{k} t_i = 1$,

$$f_n(x,y) \subset \sum_{i=1}^{k} t_i f_n(x,y_i) - C.$$

Vì (3.1) nên với mọi lân cận V của gốc trong Y tồn tại N_2 sao cho với mọi $n \geq N_2$:

$$f(x,y) \subset f_n(x,y) + \frac{1}{k+1}V, \tag{3.3}$$

$$f_n(x,y_i) \subset f(x,y_i) + \frac{1}{k+1}V. \tag{3.4}$$

Do đó

$$
\begin{aligned}
f(x,y) \subset f_n(x,y) + \frac{1}{k+1}V &\subset \sum_{i=1}^{k} t_i f_n(x,y_i) - C + \frac{1}{k+1}V \\
&\subset \sum_{i=1}^{k} \left[f(x,y_i) + \frac{1}{k+1}V\right] + \frac{1}{k+1}V - C \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(x,y_i) + V - C.
\end{aligned}
$$

Do tính đóng của C và $f(x,y_i)$, $i = 1,2,...,k$ nên

$$f(x,y) \subset \sum_{i=1}^{k} f(x,y_i) - C.$$

(iii) Bước 3: Ta chỉ ra $\forall y \in X$, $f(.,y)$ là $-C$-liên tục trên với giá trị compắc. Xét y cố định, vì $f_n(x,y)$ là $-C$-liên tục trên tại x nên với mọi lân cận V của gốc trong Y đều tồn tại lân cận $U(x)$ sao cho với mọi $x' \in U(x)$:

$$f_n(x',y) \subset f_n(x,y) + \frac{1}{3}V - C.$$

Từ (3.3), với mọi $x' \in U(x)$, ta có:

$$
\begin{aligned}
f(x',y) &\subset f_n(x',,y) + \frac{1}{3}V \\
&\subset f_n(x,,y) + \frac{1}{3}V + \frac{1}{3}V - C \\
&\subset f(x,y) + \frac{1}{3}V + \frac{1}{3}V + \frac{1}{3}V - C \\
&= f(x,y) + V - C.
\end{aligned}
$$

Mặt khác theo Cain [16, Bổ đề 11.24, trang 185]), f có giá trị compắc. Và dễ thấy $f(X \times X)$ bị chặn. Vậy $f \in M$ và do đó (M,ρ) là không gian metric đầy đủ. $\square$

Với mỗi $f \in M$, ta ký hiệu $S(f)$ là tập các điểm Ky Fan của f. Khi đó S là ánh xạ đa trị từ M vào X và theo Định lý 3.1.1, ta có $S(f) \neq \emptyset$ với mỗi $f \in M$.

Bổ đề 3.2.2 *Ánh xạ $S : M \to 2^X$ là ánh xạ usco.*

Chứng minh. Vì X là compắc nên ta chỉ cần chỉ ra S là ánh xạ đóng, nghĩa là đồ thị Graph(S) của S đóng trong $M \times X$, trong đó

$$\mathrm{Graph}(S) = \{(f, x) : x \in S(f)\}.$$

Giả sử (f_α, x_α) là lưới trong Graph(S) với $(f_\alpha, x_\alpha) \to (f, x^*) \in M \times X$. Khi đó

$$f_\alpha(x_\alpha, y) \not\subset -intC,\ \forall \alpha,\ \forall y \in X.$$

Giả sử $(f, x^*) \notin$ Graph(S), khi đó tồn tại $y^* \in X$ sao cho

$$f(x^*, y^*) \subset -intC.$$

Vì $intC$ mở và $f(x^*, y^*)$ compắc nên tồn tại lân cận mở V của gốc trong Y sao cho

$$f(x^*, y^*) + V \subset -intC.$$

Vì $f(., y^*)$ là $-C$-liên tục trên và $x_\alpha \to x^*$ nên tồn tại β_1 sao cho với mọi $\alpha \geq \beta_1$,

$$f(x_\alpha, y^*) \subset f(x^*, y^*) + \frac{1}{2}V - C.$$

Hơn nữa, vì $f_\alpha \to f$ nên tồn tại β_2 với $\beta_2 \geq \beta_1$ sao cho với mọi $\alpha \geq N_1$,

$$f_\alpha(x, y) \subset f(x, y) + \frac{1}{2}V \text{ với mọi } (x, y) \in X \times X.$$

Do đó với mọi $\alpha \geq \beta_2$,

$$\begin{aligned} f_\alpha(x_\alpha, y^*) &\subset f(x_\alpha, y^*) + \frac{1}{2}V \\ &\subset f(x^*, y^*) + V - C \subset -intC - C \subset -intC, \end{aligned}$$

điều này là vô lý. Do đó, $(f, x^*) \in \text{Graph}(S)$ và do đó $\text{Graph}(S)$ là đóng. Ta đã chứng minh xong bổ đề. □

Bổ đề 3.2.3 *Với mỗi $f \in M$, tồn tại ít nhất một tập cốt yếu cực tiểu của $S(f)$.*

Chứng minh. Theo Bổ đề 3.2.2, ánh xạ đa trị $S : M \to 2^X$ là usco. Vậy $S(f)$ là một tập con cốt yếu của chính nó. Ký hiệu Φ là họ tất cả các tập con cốt yếu của $S(f)$ được sắp thứ tự bộ phận theo quan hệ bao hàm. Khi đó Φ khác rỗng. Giả sử $\Psi = \{e_\alpha(f)\}_{\alpha\in\Lambda'}$ là một xích tùy ý trong Φ. Khi đó tất cả các tập $e_\alpha(f)$ là compắc vì $S(f)$ compắc. Đặt

$$e(f) := \bigcap_{\alpha\in\Lambda'} e_\alpha(f).$$

Hiển nhiên $e(f)$ là compắc. Nếu $e(f) = \emptyset$ thì

$$S(f) = S(f) \setminus e(f) = \bigcup_{\alpha\in\Lambda'} [S(f) \setminus e_\alpha(f)].$$

Vì $S(f) \setminus e_\alpha(f)$ mở và $S(f)$ compắc nên tồn tại $e_1(f), e_2(f), ..., e_n(f)$ sao cho

$$S(f) = \bigcup_{i=1}^{n} [S(f) \setminus e_i(f)].$$

Và vì

$$S(f) = \bigcup_{i=1}^{n} [S(f) \setminus e_i(f)] = S(f) \setminus \bigcap_{i=1}^{n} e_i(f)$$

nên
$$\bigcap_{i=1}^{n} e_i(f) = \emptyset.$$
Điều này vô lý vì $\{e_\alpha(f)\}_{\alpha\in\Lambda'}$ là xích nên ta luôn có
$$\bigcap_{i=1}^{n} e_i(f) \neq \emptyset.$$
Do đó $e(f) \neq \emptyset$.

Với mỗi tập mở O với $O \supset e(f)$, nếu với mỗi $\alpha \in \Lambda'$, tồn tại $x_\alpha \in e_\alpha(f) \subset S(f)$ mà $x_\alpha \notin O$ thì ta có thể giả sử rằng $x_\alpha \to x \in S(f)$. Vì $\{e_\alpha(f)\}_{\alpha\in\Lambda'}$ là xích và $e_\alpha(f)$ compắc với mỗi $\alpha \in \Lambda'$ nên $x_\beta \in e_\alpha(f)$ khi $\beta > \alpha$ và $x \in e_\alpha(f)$ với mỗi $\alpha \in \Lambda'$. Do đó
$$x \in \bigcap_{\alpha\in\Lambda'} e_\alpha(f) = e(f) \subset O,$$
điều này mâu thuẫn vì $x_\alpha \to x$ và $x_\alpha \notin O$ với mỗi $\alpha \in \Lambda'$.

Do đó tồn tại $\alpha_0 \in \Lambda'$ sao cho $O \supset e_{\alpha_0}(f)$. Vì $e_{\alpha_0}(f)$ là tập cốt yếu nên tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $f' \in M$ mà $\rho(f, f') < \delta$, ta có $S(f') \cap O \neq \emptyset$. Vì vậy $e(f)$ là tập cốt yếu và là cận dưới của Ψ. Theo bổ đề Zorn, Φ có phần tử cực tiểu $m(f)$ và là tập cốt yếu cực tiểu của $S(f)$. $\square$

Ta cần bổ đề sau của Yu và Luo [73, Bổ đề 3.1, trang 306].

Bổ đề 3.2.4 *Giả sử C, D là hai tập con lồi compắc khác rỗng của không gian định chuẩn E. Khi đó:*
$$H(C, \lambda D + \mu D) \leq H(C, D),$$
trong đó H là khoảng cách Hausdorff xác định trên E, $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$ và $\lambda + \mu = 1$.

Định lý 3.2.1 *Với các giả thiết của Định lý 3.1.1, tồn tại ít nhất một tập cốt yếu cực tiểu của $S(f)$ và nó là liên thông.*

Chứng minh. Từ Bổ đề 3.2.3, để chứng minh định lý, ta chỉ cần chỉ ra $m(f)$ là tập liên thông. Giả sử phản chứng, $m(f)$ không phải là tập liên thông. Khi đó tồn tại hai tập con đóng khác rỗng $c_1(f)$ và $c_2(f)$ của $S(f)$ sao cho $m(f) = c_1(f) \cup c_2(f)$ và hai tập mở V_1, V_2 trong X thỏa mãn $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ với $V_1 \supset c_1(f)$, $V_2 \supset c_2(f)$. Vì $m(f)$ là cực tiểu nên cả $c_1(f)$ và $c_2(f)$ không thể là tập cốt yếu. Vì vậy tồn tại hai tập mở $O_1 \supset c_1(f)$ và $O_2 \supset c_2(f)$ sao cho với mọi $\delta > 0$, tồn tại $f_1, f_2 \in M$ với $\rho(f, f_1) < \delta$, $\rho(f, f_2) < \delta$, nhưng $S(f_1) \cap O_1 = \emptyset$, $S(f_2) \cap O_2 = \emptyset$. Đặt $W_1 := V_1 \cap O_1$, $W_2 := V_2 \cap O_2$, khi ấy cả hai tập W_1, W_2 đều mở và $W_1 \supset c_1(f)$ và $W_2 \supset c_2(f)$. Vì $c_1(f)$ và $c_2(f)$ là compắc nên tồn tại hai tập mở U_1, U_2 sao cho

$$c_1(f) \subset U_1 \subset \overline{U}_1 \subset W_1,\ c_2(f) \subset U_2 \subset \overline{U}_2 \subset W_2.$$

Vì $U_1 \cup U_2 \supset m(f)$ và $m(f)$ là cốt yếu nên tồn tại $\delta' > 0$ sao cho với mỗi $f' \in M$ mà $\rho(f, f') < \delta'$, ta có $S(f') \cap (U_1 \cup U_2) \neq \emptyset$. Hơn nữa, vì $U_1 \supset c_1(f)$, $U_2 \supset c_2(f)$ nên tồn tại g_1, g_2 với $\rho(f, g_1) < \delta'/3$, $\rho(f, g_2) < \delta'/3$ nhưng $S(g_1) \cap U_1 = \emptyset$, $S(g_2) \cap U_2 = \emptyset$.

Bây giờ ta xác định ánh xạ đa trị $g : X \times X \to 2^E$ như sau:

$$g(x, y) := \lambda(x) g_1(x, y) + \mu(x) g_2(x, y),\ \forall (x, y) \in X \times X,$$

trong đó

$$\lambda(x) = \frac{d(x, \overline{U}_1)}{d(x, \overline{U}_1) + d(x, \overline{U}_2)},$$
$$\mu(x) = \frac{d(x, \overline{U}_2)}{d(x, \overline{U}_1) + d(x, \overline{U}_2)}$$

Hiển nhiên $\lambda(x)$ và $\mu(x)$ là liên tục, $\lambda(x) \geq 0$, $\mu(x) \geq 0$ và $\lambda(x)+\mu(x) = 1$ với mọi $x \in X$.

Dễ thấy $g \in M$. Với mọi $(x, y) \in X \times X$, từ Bổ đề 3.2.4 ta có

$$\begin{aligned} H(g_1(x,y), g(x,y)) &= H(g_1(x,y), \lambda(x)g_1(x,y) + \mu(x)g_2(x,y)) \\ &\leq H(g_1(x,y), g_2(x,y)) \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} \rho(g_1, g) &= \sup_{x\in X} H(g_1(x,y), g(x,y)) \\ &\leq \sup_{x\in X} H(g_1(x,y), g_2(x,y)) = \rho(g_1, g_2) \\ &\leq \rho(g_1, f) + \rho(f, g_2) < \frac{1}{3}\delta' + \frac{1}{3}\delta' = \frac{2}{3}\delta', \\ \rho(f, g) &\leq \rho(f, g_1) + \rho(g_1, g) < \frac{1}{3}\delta' + \frac{2}{3}\delta' = \delta' \end{aligned}$$

và do đó $S(g) \cap (U_1 \cup U_2) \neq \emptyset$. Không giảm tổng quát, ta giả sử rằng, $S(g) \cap U_1 \neq \emptyset$, nghĩa là tồn tại $x^* \in S(f) \cap U_1$. Vì $x^* \in U_1$, ta có $\lambda(x^*) = 1$, $\mu(x^*) = 0$ và do đó $g(x^*, y) = g_1(x^*, y)$, tức là $x^* \in S(g_1)$, điều này vô lý vì $S(g_1) \cap U_1 = \emptyset$. Vậy $m(f)$ phải là tập liên thông. $\square$

Định lý 3.2.2 *Trong những điều kiện của Định lý 3.1.1, với mỗi $f \in M$, có tồn tại ít nhất một thành phần cốt yếu của $S(f)$.*

Chứng minh. Theo Định lý 3.2.1, tồn tại ít nhất một tập con liên thông cốt yếu cực tiểu của $m(f)$ của $S(f)$. Theo Dugundji [19, Định lý 3.2], tồn tại một thành phần $S_\alpha(f)$ của $S(f)$ sao cho $m(f) \subset S_\alpha(f)$. Hiển nhiên $S_\alpha(f)$ là cốt yếu. $\square$

Kết luận của luận án

Luận án nghiên cứu Lý thuyết KKM trong các nửa dàn tôpô.

Những kết quả đã chứng minh được trong luận án

1. Mở rộng nguyên lý ánh xạ KKM trong nửa dàn tôpô và hệ quả là các định lý tương giao, điểm bất động cho ánh xạ đa trị.
2. Các định lý điểm trùng, bất đẳng thức minimax.
3. Dạng mở rộng đa trị của bất đẳng thức Ky Fan trong nửa dàn tôpô.
4. Định lý điểm bất động dạng Browder-Fan cho họ các ánh xạ và ứng dụng để nghiên cứu hệ các bất đẳng thức Ky Fan đa trị, điểm cân bằng Nash đa trị trong nửa dàn tôpô.
5. Sự tương đương giữa Nguyên lý ánh xạ KKM và định lý điểm bất động Browder-Fan.
6. Sự tồn tại nghiệm tối ưu Pareto của hệ trò chơi.
7. Tính liên tục và liên thông của tập các điểm Ky Fan.

Các vấn đề cần tiếp tục nghiên cứu

1. Nghiên cứu dạng mở rộng khác của Nguyên lý ánh xạ KKM như các nhà toán học Brezis, Nirenberg, Stampacchia đã làm trong trường hợp không gian véctơ tôpô và các ứng dụng.

2. Nghiên cứu các dạng mở rộng đa trị khác của bất đẳng thức Ky Fan trong nửa dàn tôpô.

3. Nghiên cứu các bao hàm thức biến phân trong nửa dàn tôpô.

4. Nghiên cứu tính liên tục, liên thông của tập nghiệm của nhiều bài toán khác như: điểm cân bằng Nash, điểm yên ngựa, ...

Danh mục công trình của tác giả có liên quan đến luận án

1. Nguyen The Vinh (2005), Matching theorems, fixed point theorems and minimax inequalities in topological ordered spaces, *Acta Math. Vietnam.*, 30(3), 211-224.
2. Nguyen The Vinh (2008), Some generalized quasi-Ky Fan inequalities in topological ordered spaces, *Vietnam J. Math.*, 36(4), 437-449.
3. Nguyen The Vinh (2009), Systems of generalized quasi-Ky Fan inequalities and Nash equilibrium points with set-valued maps in topological semilattices, *PanAmer. Math. J.*, 19(3), 79-92.
4. Do Hong Tan and Nguyen The Vinh (2010), Some further applications of KKM theorem in topological semilattices, *Preprint* 10/02, Hanoi Institute of Mathematics (submitted to Advances in Nonlinear Variational Inequalities).
5. Nguyen The Vinh (2010), On essential components of the solution set of a generalized Ky Fan inequality, Communications on Applied Nonlinear Analysis 17(4), 89-100.

Tài liệu tham khảo

Tiếng Việt

[1] Lê Anh Dũng (2009), *Điểm bất động và ứng dụng trong không gian Banach, không gian metric, không gian metric siêu lồi*, Luận án tiến sỹ Toán học, ĐHSP Hà Nội.

[2] Đỗ Hồng Tân và Nguyễn Thị Thanh Hà (2003), *Các định lý điểm bất động*, NXB Đại học Sư phạm Hà Nội.

[3] Nguyễn Xuân Tấn và Nguyễn Bá Minh (2006), *Một số vấn đề trong lý thuyết tối ưu véctơ đa trị*, NXB Giáo dục.

[4] Hoàng Tụy (2005), *Hàm thực và giải tích hàm*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

Tiếng Anh

[5] L. Armstrong (1983), *Basic Topology*, Springer-Verlag, New York.

[6] G. Allen (1977), "Variational inequalities, complementarity problems, and duality theorems", *J. Math. Anal. Appl.*, 58(1), 1-10.

[7] M. Balaj (2001), "Intersection results and fixed point theorems in H-spaces", *Rend. Mat.*, 21, 295-310.

[8] M. Balaj, L.-J. Lin (2010), "Equivalent forms of a generalized KKM theorem and their applications", *Nonlinear Analysis*, 73, 673-682.

[9] M. Balaj, D. T. Luc (2010), "On mixed variational relation problems", *Comput. Math. Appl.*, 60, 2712-2722.

[10] C. Berge (1959), *Espaces Topologiques, Fonctions Multivoques*, Dunnod, Paris.

[11] H. Brezis, L. Nirenberg and G. Stampacchia (1972), "A remark on Ky Fan's minimax principle", *Boll. Un. Mat. Ital.*, 6, 293-300.

[12] E. Blum and W. Oettli (1994), "From optimization and variational inequalities to equilibrium problems", *Math. Student*, 63, 123-145.

[13] F. E. Browder (1968), "The fixed point theory of multivalued mappings in topological vector spaces", *Math. Ann.*, 177, 283-301.

[14] F. E. Browder (1984), "Coincidence theorems, minimax theorems, and variational inequalities", *Contemp. Math.*, 26, 67-80.

[15] D. R. Brown (1965), "Topological Semilattices on the Two Cell", *Pacific J. Math.*, 15, 35-46.

[16] G. L. Cain (1994), *Introduction to general topology*, Addison-Wesley Publishing Company, America.

[17] P. Deguire and M. Lassonde (1995), "Familles sélectantes", *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 5, 261-269.

[18] X. P. Ding and K. K. Tan (1965), "Matching theorems, fixed point theorems, minimax inequalities without convexity", *J. Austral. Math. Soc.*, 49, 111-128.

[19] J. Dugundji (1966), *Topology*, Allyn and Bacon, Boston.

[20] J. Dugundji and A. Granas (1982), *Fixed Point Theory*, Polish Scientific Publishers, Warsaw.

[21] L. A. Dung and D. H. Tan (2007), "Some applications of the KKM-mapping principle in hyperconvex metric spaces", *Nonlin. Anal.*, 66, 170-178.

[22] K. Fan (1961), "A generalization of Tychonoff's fixed point theorem", *Math. Ann.*, 226, 305-310.

[23] K. Fan (1972), "A minimax inequality and applications", *Inequalities*, Vol. III, (edited by O. Shisha), 103-113 (Academic Press, New York).

[24] K. Fan (1984), "Some properties of convex sets related to fixed point theorems", *Math. Ann.*, 226, 519-537.

[25] C. C. Ha (1980), "Minimax and Fixed Point Theorems", *Math. Ann.*, 248, 73-77.

[26] C. D. Horvath (1991), "Contractibility and Generalized Convexity", *J. Math. Anal. Appl.*, 156, 341-357.

[27] C. D. Horvath (1993), "Extension and Selection theorems in Topological spaces", *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2, 253-269.

[28] C. D. Horvath (1998), "A topological investigation of the finite intersection property", *Minimax theory and Applications* (edited by B. Ricceri and S. Simons), 71-90, Kluwer Academic Publishers.

[29] C. D. Horvath and J. V. Llinares Ciscar (1996), "Maximal elements and fixed points for binary relations on topological ordered spaces", *J. Math. Econom.*, 25, 291-306.

[30] C. D. Horvath and M. Lassonde (1997), "Intersection of sets with n-connected unions", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 125, 1209-1214.

[31] J. L. Kelly (1955), *General Topology*, Van Nostrand, Princeton, NJ.

[32] M. A. Khamsi (1996), "KKM and Ky Fan theorems in hyperconvex metric spaces", *J. Math. Anal. Appl.*, 204, 298-306.

[33] M. A. Khamsi, N. Hussain (2010), "KKM mappings in metric type spaces", *Nonlinear Analysis*, 73, 3123-3129.

[34] P. Q. Khanh, N. H. Quan, J.-C. Yao (2009), "Generalized KKM-type theorems in GFC-spaces and applications", *Nonlinear Analysis*, 71, 1227-1234.

[35] W. K. Kim (1987), "Some applications of the Kakutani fixed point theorem", *J. Math. Anal. Appl.*, 121, 119-122.

[36] S. Kinoshita (1952), "On essential components of the set of fixed points", *Osaka J. Math.*, 4, 19-22.

[37] V. L. Klee (1951), "On certain intersection properties of convex sets", *Canad. J. Math.*, 3, 272-275.

[38] B. Knaster, C. Kuratowski and S. Mazurkiewicz (1929), "Ein Beweis des Fixpunktsatzes fur n-dimensionale Simplexe", *Fund. Math.*, 14, 132-137.

[39] E. Kohlberg and J. F. Mertens (1986), "On the strategic stability of equilibria", *Econometrica*, 54, 1003-1037.

[40] M. Lassonde (1983), "On the Use of KKM Multifunctions in Fixed Point Theory and Related Topics", *J. Math. Anal. Appl.*, 97, 157-201.

[41] M. Lassonde (1990), "Sur le principle KKM", *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 310, 537-576.

[42] L.-J. Lin and N. X. Tan (2007), "On quasivariational inclusion problems of type I and related problems", *J. Glob. Optim.*, 39, 393-407.

[43] D. T. Luc (1989), *Theory of vector optimization*, in: Lecture Notes in Economics and mathematical systems, Vol. 319, Springer-Verlag, Berlin.

[44] D. T. Luc, E. Sarabi, A. Soubeyran (2010), "Existence of solutions in variational relation problems without convexity", *J. Math. Anal. Appl.*, 364, 544-555.

[45] Q. Luo (2001), "KKM and Nash Equilibria Type Theorems in Topological Ordered Spaces", *J. Math. Anal. Appl.*, 264, 262-269.

[46] Q. Luo (2004), "Ky Fan's section theorem and its applications in topological ordered spaces", *Appl. Math. Lett.*, 17 (10), 1113-1119.

[47] Q. Luo (2006), "The applications of the Fan-Browder fixed point theorem in topological ordered spaces", *Appl. Math. Lett.*, 19 (11), 1265-1271.

[48] J. Nash (1951), "Non-cooperative games", *Ann. of Math.*, 54, 286-293.

[49] S. Park (1990), "Convex spaces and KKM families of subsets", *Bull. Korean Math. Soc.*, 27, 11-14.

[50] S. Park (1991), "Generalizations of Ky Fan's matching theorems and their applications II", *J. Korean Math. Soc.*, 28, 275-283.

[51] S. Park (2000), "Elements of the KKM theory for generalized convex spaces", *Korean J. Comp. Appl. Math.*, 7, 1-28.

[52] S. Park (2010), "The KKM principle in abstract convex spaces: Equivalent formulations and applications", *Nonlinear Analysis*, 73, 1028-1042.

[53] S. Park (2010), "On the von Neumann–Sion minimax theorem in KKM spaces", *Appl. Math. Letters*, 23, 269-1273.

[54] J. W. Peng and X. M. Yang (2005), "On existence of a solution for the system of generalized vector quasi-equilibrium problems with upper semicontinuous set-valued maps", *Inter. J. Math. Math. Sciences*, 15, 2409-2420.

[55] R. R. Phelps (1989), *Convex functions, monotone operators and differentiability*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1364, Springer-Verlag, Berlin.

[56] P. H. Sach, L. A. Tuan (2007), "Existence Results for Set-Valued Vector Quasiequilibrium Problems", *J. Optim. Theory Appl.*, 133, 229–240.

[57] M. H. Shih (1986), "Covering properties of convex sets", *Bull. London. Math. Soc.*, 18, 57-59.

[58] M. H. Shih and K. K. Tan (1988), "A geometric property of convex sets with applications to minimax type inequalities and fixed point theorems", *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, 45, 169-183.

[59] M. Sion (1958), "On general minimax theorems", *Pacific J. Math.*, 8, 171-176.

[60] E. Sperner (1928), "Neuer Beweis fur die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes", *Abh. aus dem Math. Seminar der Univ. Hamburg*, 6, 265-272.

[61] W. Takahashi (1976), "Nonlinear variational inequalities and fixed point theorems", *J. Math. Soc. Japan.*, 28, 168-181.

[62] Do Hong Tan and Nguyen The Vinh (2010), "Some further applications of KKM theorem in topological semilattices", *Preprint* 10/02, Hanoi Institute of Mathematics.

[63] K. K. Tan, J. Yu, and X. Z. Yuan (1995), "The stability of Ky Fan's points", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 123, 1511-1519.

[64] E. Tarafdar (1992), "Fixed point theorems in H-spaces and equilibrium points of abstract economies", *J. Austral. Math. Soc. (Series A)*, 53, 252-260.

[65] H. Tikhonov (1935), "Ein Fixpunktsatz", *Math. Ann.*, 111, 767-776.

[66] D. Turkoglu, M. Abuloha, T. Abdeljawad (2010), "KKM mappings in cone metric spaces and some fixed point theorems", *Nonlinear Analysis*, 72, 348-353.

[67] Nguyen The Vinh (2005), "Matching theorems, fixed point theorems and minimax inequalities in topological ordered spaces", *Acta Math. Vietnamica*, 30(3), 211-224.

[68] Nguyen The Vinh (2008), "Some generalized quasi-Ky Fan inequalities in topological ordered spaces", *Vietnam J. Math.*, 36(4), 437-449.

[69] Nguyen The Vinh (2009), "Systems of generalized quasi-Ky Fan inequalities and Nash equilibrium points with set-valued maps in topological semilattices", *PanAmer. Math. J.*, 19(3), 79-92.

[70] Nguyen The Vinh (2010), On essential components of the solution set of a generalized Ky Fan inequality, *Communications on Applied Nonlinear Analysis* 17(4), 89-100.

[71] H. Yang and J. Yu (2002), "Essential component of the set of weakly Pareto-Nash equilibrium points", *Appl. Math. Lett.*, 15, 553-560.

[72] J. Yu (1999), "Essential equilibria of n-person noncooperative games", *J. Math. Econom.*, 31, 361-372.

[73] J. Yu and Q. Luo (1999), "On Essential Components of the Solution Set of Generalized Games", *J. Math. Anal. Appl.*, 230, 303-310.

[74] J. Yu and S.-W. Xiang (2003), "The stability of the set of KKM points", *Nonlin. Anal.*, 54, 839-844.

[75] J. Yu and H. Yang (2004), "The essential components of the set of equilibrium points for set-valued maps", *J. Math. Anal. Appl.*, 300, 334-342.

[76] G. X. Z. Yuan (1999), *KKM Theory and Applications in Nonlinear Analysis*, Marcel Dekker Inc., New York.

[77] E. Zeidler (1991), *Nonlinear Analysis and its Applications*, Vol. I, Fixed-Point Theorems, Springer-Verlag, Berlin.