VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

VIỆN TOÁN HỌC

MAI VIẾT THUẬN

TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA MỘT SỐ LỚP HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN HÀM VÀ ỨNG DỤNG TRONG LÝ THUYẾT ĐIỀU KHIỂN

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HÀ NỘI–2014

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM
VIỆN TOÁN HỌC

MAI VIẾT THUẬN

TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA MỘT SỐ LỚP HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN HÀM VÀ ỨNG DỤNG TRONG LÝ THUYẾT ĐIỀU KHIỂN

Chuyên ngành: Toán Giải tích
Mã số: 62 46 01 02

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
GS. TSKH. VŨ NGỌC PHÁT

HÀ NỘI–2014

TÓM TẮT

Luận án nghiên cứu tính ổn định mũ và ổn định hóa được dạng mũ, bài toán đảm bảo chi phí điều khiển (guaranteed cost control) cho một số lớp hệ phương trình vi phân có trễ. Luận án gồm ba chương.

Trong chương 1, chúng tôi giới thiệu một số kiến thức cơ sở về bài toán ổn định, bài toán ổn định hóa, bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ phương trình vi phân thường và hệ phương trình vi phân có trễ. Ngoài ra, trong chương này chúng tôi cũng trình bày lại một số bổ đề kỹ thuật bổ trợ được sử dụng trong chứng minh các kết quả chính của luận án ở các chương tiếp theo.

Trong chương 2, chúng tôi đưa ra một điều kiện đủ cho tính ổn định mũ và ổn định hóa được dạng mũ cho mô hình mạng nơ ron mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ biến thiên dạng khoảng. Ngoài ra, chúng tôi cũng đưa ra một vài tiêu chuẩn mới cho tính ổn định hóa được dạng mũ cho lớp hệ điều khiển có trễ biến thiên dạng khoảng với nhiễu phi tuyến .

Trong chương 3, chúng tôi nghiên cứu bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho một số lớp hệ phương trình vi phân có trễ như: hệ phương trình vi phân có trễ hỗn hợp trên cả biến trạng thái và biến điều khiển với độ trễ là các hàm liên tục nhưng không nhất thiết khả vi; hệ phương trình vi phân tuyến tính có trễ biến thiên dạng khoảng trên biến trạng thái và biến quan sát với độ trễ là các hàm liên tục nhưng không nhất thiết khả vi. Bằng cách xây dựng hàm Lyapunov–Krasovskii mới kết hợp với công thức Newton–Leibniz, một điều kiện đủ mới cho sự tồn tại một điều khiển ngược ổn định hóa đảm bảo chi phí điều khiển cho lớp hệ điều khiển có trễ biến thiên hỗn hợp trên cả trạng thái và điều khiển được đưa ra dưới dạng các bất đẳng thức ma trận tuyến tính. Ngoài ra, với cách xây dựng hàm Lyapunov–Krasovskii mới trong đó có chứa tích phân bội ba, chúng tôi đã đưa ra một điều kiện đủ cho sự tồn tại một bộ điều khiển phản hồi đầu ra động (dynamic output feedback controllers) bảo đảm chi phí điều khiển cho hệ điều khiển tuyến tính có trễ biến thiên dạng khoảng trên biến trạng thái và biến quan sát.

ABSTRACT

In this thesis, the problem of stability, stabilization and guaranteed cost control for functional differential equations with time-varying delay is studied. The thesis consists of three chapters.

Chapter 1 presents mathematical background of stability, stabilization and guaranteed cost control for ordinary differential equations and functional differential equations. Some technical propositions needed for the proof of the main results in Chapter 2 and Chapter 3 are presented.

In Chapter 2, we establish new sufficient conditions for exponential stability and stabilization of neural networks with mixed interval time-varying delays. We prove delay-dependent criteria for exponential stabilization of time-varying delay systems with nonlinear perturbations.

In Chapter 3, we study the problem of guaranteed cost control for some classes of linear time-varying delay systems such as linear systems with mixed interval time-varying delays on state and control; linear systems with interval time-varying delays in observation. Based on constructing a new set of Lyapunov–Krasovskii functionals combined with Newton–Leibniz formula, new sufficient conditions for designing guaranteed cost controllers for linear control systems with mixed interval time-varying delays on state and control as well as on observation are established in terms of the solutions of linear matrix inequalities (LMIs).

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi, được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của GS. TSKH. Vũ Ngọc Phát. Các kết quả viết chung với tác giả khác đã được sự nhất trí của đồng tác giả khi đưa vào luận án. Các kết quả nêu trong luận án là những kết quả mới và chưa từng được ai công bố trong các công trình nào khác.

Tác giả

Mai Viết Thuận

LỜI CẢM ƠN

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy tôi GS. TSKH. Vũ Ngọc Phát. Thầy đã tận tình hướng dẫn tôi từ khi tôi làm luận văn thạc sĩ và giờ đây là luận án tiến sĩ. Phương pháp nghiên cứu, cách phát hiện và giải quyết vấn đề, những ý tưởng trong nghiên cứu toán học mà thầy hướng dẫn đã giúp tôi hoàn thành luận án này và trưởng thành hơn trong nghiên cứu. Thầy luôn tạo điều kiện cho tôi có dịp tiếp xúc và giao lưu quốc tế để tôi có thêm tự tin. Từ tận đáy lòng, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc nhất tới Thầy của tôi và tôi sẽ cố gắng phấn đấu hơn nữa để xứng đáng với công lao của Thầy.

Tôi xin chân thành cảm ơn những ý kiến nhận xét và góp ý quí báu của GS. TSKH. Nguyễn Khoa Sơn, GS. TSKH. Đinh Nho Hào, PGS. TS. TSKH. Vũ Hoàng Linh, PGS. TS. Nguyễn Thị Bạch Kim, PGS. TS. Trương Xuân Đức Hà, PGS. TS. Cung Thế Anh. Chính nhờ những góp ý, bình luận của các thầy, các cô mà bản luận án tiến sĩ của tôi được hoàn thiện hơn.

Tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới các thầy, các cô trong phòng Tối ưu và Điều khiển đã ân cần chỉ bảo, dạy dỗ tôi từ khi tôi còn học Cao học cho tới khi tôi làm nghiên cứu sinh tại Phòng. Đồng thời tôi cũng chân thành cảm ơn các anh chị em nghiên cứu sinh, bạn bè đồng nghiệp tại xê mi na Phòng Tối ưu và Điều khiển đã luôn quan tâm, động viên, trao đổi và đóng góp những ý kiến quý báu cho tôi trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận án.

Tôi xin cảm ơn Ban giám hiệu trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã cho tôi cơ hội được đi học tập và nghiên cứu. Tôi xin cảm ơn Ban chủ nhiệm khoa Toán–Tin và đặc biệt là TS. Nguyễn Thị Thu Thủy, trưởng Khoa Toán–Tin, đã tạo điều kiện thu xếp công việc thuận lợi cho tôi trong suốt thời gian tôi đi làm nghiên cứu sinh tại Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban lãnh đạo Viện Toán học, Trung tâm Đào tạo sau đại học cùng toàn thể cán bộ, công nhân viên Viện Toán học đã tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận án.

Cuối cùng, tôi muốn bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới những người thân trong gia đình, đặc biệt là bố mẹ, vợ và con gái. Những người đã luôn động viên, chia sẻ mọi khó khăn cùng tôi suốt những năm tháng qua để tôi có thể hoàn thành luận án này.

Tác giả

Mai Viết Thuận

Mục lục

Một số ký hiệu và viết tắt

$\mathbb{R}, \mathbb{R}^+$	tập các số thực, số thực không âm tương ứng
$\mathbb{R}^n$	không gian véctơ Euclide thực $n-$chiều
$\langle , \rangle$	tích vô hướng của hai véctơ $x, y \in \mathbb{R}^n$
$\|x\|$	chuẩn Euclide của véctơ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$
$\mathbb{R}^{n \times r}$	không gian các ma trận thực cỡ $(n \times r)$
$C([a,b], \mathbb{R}^n)$	không gian các hàm liên tục trên $[a,b]$, nhận giá trị trong $\mathbb{R}^n$
$C^1([a,b], \mathbb{R}^n)$	không gian các hàm khả vi liên tục trên $[a,b]$, nhận giá trị trong $\mathbb{R}^n$
A^{T}	ma trận chuyển vị của ma trận A
I	ma trận đơn vị
$*$	các phần tử dưới đường chéo chính của ma trận đối xứng
$\mathrm{diag}(A, B, C)$	ma trận chéo khối $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$
$\lambda(A)$	tập hợp tất cả các giá trị riêng của ma trận A
$\lambda_{\max}(A)$	$= \max\{\mathrm{Re}\lambda : \lambda \in \lambda(\mathrm{A})\}$
$\lambda_{\min}(A)$	$= \min\{\mathrm{Re}\lambda : \lambda \in \lambda(\mathrm{A})\}$
$\|A\|$	chuẩn phổ của ma trận$A, \|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^{\mathsf{T}} A)}$
$A \geq 0$	ma trận A nửa xác định dương, tức là $\langle Ax, x \rangle \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$
$A \geq B$	nghĩa là $A - B \geq 0$
$A > 0$	ma trận A xác định dương, tức là $\langle Ax, x \rangle > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$
$\mathcal{K}$	tập hợp các hàm liên tục tăng chặt $a(.) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, a(0) = 0$
$LMIs$	bất đẳng thức ma trận tuyến tính (Linear matrix inequalities).

Mở đầu

Lý thuyết ổn định Lyapunov được hình thành sau khi A.M. Lyapunov, nhà toán học người Nga, công bố và bảo vệ thành công luận án tiến sĩ có nhan đề "Bài toán tổng quan về tính ổn định của chuyển động" tại trường Đại học tổng hợp Kharkov năm 1892. Luận án được viết bằng tiếng Nga, rồi sau đó được dịch sang nhiều thứ tiếng khác. Trong công trình của mình, A.M. Lyapunov đã xây dựng nền móng cho lý thuyết ổn định, đặc biệt là đưa ra hai phương pháp nghiên cứu tính ổn định của các hệ phương trình vi phân thường. Đó là phương pháp số mũ Lyapunov và phương pháp hàm Lyapunov. Trong thời kỳ chiến tranh lạnh (1953–1962) việc áp dụng phương pháp hàm Lyapunov để nghiên cứu tính ổn định của các hệ động lực đã nhận được sự quan tâm của nhiều nhà nghiên cứu bởi những ứng dụng hữu hiệu của nó trong hệ thống dẫn đường hàng không vũ trụ mà không thể giải quyết được bằng các phương pháp khác. Từ đó đến nay lý thuyết ổn định Lyapunov vẫn đang là một lý thuyết phát triển rất sôi động của Toán học và trở thành một bộ phận nghiên cứu không thể thiếu trong lý thuyết hệ thống và ứng dụng. Đến những năm 60 của thế kỉ XX, cùng với sự phát triển của lý thuyết điều khiển, người ta cũng bắt đầu nghiên cứu tính ổn định của các hệ điều khiển hay còn gọi bài toán ổn định hóa các hệ điều khiển. Vì vậy việc nghiên cứu tính ổn định và tính ổn định hóa của các hệ phương trình vi phân và điều khiển bằng cả hai phương pháp do Lyapunov đề xuất mà đặc biệt là phương pháp hàm Lyapunov đã và đang trở thành một hướng nghiên cứu thời sự thu hút sự quan tâm của nhiều nhà nghiên cứu trong nước và quốc tế (xem [3, 17, 25, 28, 46, 88]).

Chúng ta biết rằng độ trễ thời gian thường xuyên xuất hiện trong các hệ thống động lực như trong hệ thống sinh học, hệ thống hóa học và mạng lưới điện (xem [12, 70, 71]). Ngoài ra, độ trễ thời gian còn là nguyên nhân trực tiếp dẫn đến tính không ổn định và hiệu suất kém (poor performance) của các hệ động lực (xem [12, 28]). Vì thế lớp hệ phương trình vi phân có trễ đã thu hút được nhiều sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà khoa học (xem [1, 2, 19, 25, 28, 34, 54, 75, 78, 86]). Để có thể ứng dụng tốt hơn trong thực tiễn, người ta không chỉ quan tâm tới việc tìm ra các tiêu chuẩn ổn định của

các hệ có trễ mà còn phải đánh giá được "độ" ổn định của các hệ đó. Vì vậy, tính ổn định mũ và ổn định hóa được dạng mũ của các lớp hệ phương trình vi phân và điều khiển có trễ đã và đang được nhiều nhà nghiên cứu quan tâm trong những năm gần đây ([28, 36, 40, 54, 58, 59, 60, 61, 62, 70, 71, 72, 73]). Trong luận án này, chúng tôi sử dụng phương pháp hàm Lyapunov-Krasovskii để nghiên cứu bài toán ổn định mũ và ổn định hóa được dạng mũ, bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho một số lớp phương trình vi phân có trễ theo hai hướng chính sau:
1. Nghiên cứu mở rộng, cải tiến hàm Lyapunov–Krasovskii để tìm kiếm các tiêu chuẩn ổn định mới, mở rộng các tiêu chuẩn đã có.
2. Nghiên cứu tính ổn định mũ, ổn định hóa được dạng mũ và bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho một số lớp hệ có cấu trúc tổng quát hơn, có nhiều ứng dụng hơn trong thực tiễn.

Lớp hệ đầu tiên được nghiên cứu trong luận án là mô hình mạng nơ ron được mô ta bởi hệ phương trình vi phân có trễ sau

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -Ax(t) + W_0 f(x(t)) + W_1 g(x(t-h(t))) \\ \qquad\quad + W_2 \int_{t-k(t)}^{t} c(x(s))\, ds + Bu(t), \\ x(t) = \phi(t), t \in [-d, 0], \quad d = \max\{h_2, k\}, \end{cases} \tag{0.1}$$

ở đó $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^n$ là véctơ trạng thái của mô hình mạng nơ ron, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là véctơ điều khiển; $A = \operatorname{diag}(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n), \overline{a}_i > 0$, là ma trận đường chéo chính dương; W_0, W_1, W_2, B là các ma trận thực cho trước có số chiều thích hợp, còn $f(.), g(.), c(.)$ là các hàm kích hoạt của hệ, $h(t), k(t)$ là các hàm trễ của hệ thỏa mãn điều kiện $0 \le h_1 \le h(t) \le h_2$, $0 \le k(t) \le k$.

Mô hình mạng nơ ron (neural networks) được nghiên cứu đầu tiên bởi L.O. Chua và L. Yang (xem [13, 14]) và mô hình này đã nhận được nhiều sự quan tâm của nhiều nhà nghiên cứu trong những năm qua do những ứng dụng rộng lớn của nó trong xử lý tín hiệu, xử lý hình ảnh, tối ưu hóa và các lĩnh vực khác (xem [13, 14, 87]). Hơn nữa, như S. Xu và các cộng sự (xem [87]) đã chỉ ra, độ trễ thời gian thường là nguyên nhân dẫn đến sự không ổn định và hiệu suất kém của mô hình mạng nơ ron. Vì vậy, bài toán ổn định và ổn định hóa mô hình mạng nơ ron được mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ đã trở thành một vấn đề thời sự và nhận được sự quan tâm của nhiều nhà nghiên cứu ([10, 30, 45, 49, 51, 59, 70, 71, 81, 84, 87]). Đã có rất nhiều điều kiện đủ cho tính ổn định mũ của các mô hình mạng nơ ron được mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ được đề xuất. Trong trường hợp đơn giản nhất, trong [87], S. Xu và các cộng sự đã nghiên cứu bài toán ổn định cho mô hình mạng nơ ron được mô tả bởi hệ phương trình vi phân không chắc chắn có trễ hằng và với một hàm kích hoạt. Bằng cách sử dụng phương pháp hàm Lyapunov–Krasovskii và giải các bất đẳng thức ma trận tuyến tính (LMIs), các tác giả đã đưa ra một điều kiện đủ cho tính ổn định tiệm cận cho nghiệm cân bằng của lớp hệ này. Gần đây, bằng cách tiếp cận dùng phương pháp hàm Lyapunov kết hợp với sử dụng bất đẳng thức tích phân của K. Gu [24], Y. Liu và các cộng sự [49], đã đưa ra một điều kiện đủ cho tính ổn định mũ của mô hình mạng nơ ron được mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ hỗn hợp (có trễ dạng rời rạc và trễ dạng tích phân), có các hàm kích hoạt khác nhau với độ trễ là hằng số. Mặt khác, trong các nghiên cứu gần đây, các tác giả cố gắng mở rộng mô hình mạng nơ ron mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ sang trường hợp mô hình mạng nơ ron mô tả bởi hệ phương trình vi phân có độ trễ rời rạc biến thiên, tức là $h = h(t)$, trong trường hợp cận dưới của độ trễ $h(t)$ là 0, tức là $0 \leq h(t) \leq h_1$, với h_1 là một số dương cho trước. Tuy nhiên, các kết quả này đều phải dựa trên một giả thiết hạn chế là hàm trễ khả vi và có đạo hàm $\dot{h}(t) \leq \mu < 1$ (xem [41, 45, 68]). Trong [9, 41, 52, 85, 91], bằng các kỹ thuật khác nhau các tác giả đưa ra các điều kiện đủ cho tính ổn định tiệm cận cho mô hình mạng nơ ron được mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ biến thiên ([9, 91]) và tính ổn định mũ cho mô hình mạng nơ ron được mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ biến thiên [41, 52, 85]. Điều đáng chú ý trong các tiêu chuẩn này là các tác giả đã khắc phục được điều kiện độ trễ có đạo hàm nhỏ hơn 1, tức là $\dot{h}(t) \leq \mu < 1$, tuy nhiên các tác giả vẫn phải giả thiết độ trễ là hàm khả vi và thỏa mãn điều kiện $\dot{h}(t) \leq \delta$, với δ là một số thực dương cho trước và cận dưới của độ trễ $h(t)$ là 0. Vì vậy vấn đề tìm kiếm tiêu chuẩn ổn định mũ cho mô hình mạng nơ ron được mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ biến thiên và không đòi hỏi tính khả vi của hàm trễ là một vấn đề thời sự thu hút sự quan tâm của các nhà nghiên cứu ([79, 96]). Trong [79], Q. Song đã đưa ra một điều kiện đủ cho tính ổn định mũ cho mô hình mạng nơ ron được mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ dạng rời rạc thông qua việc giải bất đẳng thức ma trận tuyến tính. Sau đó một thời gian ngắn, trong [96], X. Zhu và Y. Wang đã mở rộng bài toán trên cho mô hình mạng nơ ron được mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ hỗn hợp với độ trễ biến thiên. Chú ý rằng trong các tiêu chuẩn mà Q. Song, X. Zhu và Y. Wang đề xuất không đòi hỏi tính khả vi của độ trễ, tuy nhiên các tác giả vẫn giả thiết độ trễ là hàm bị chặn có cận dưới là 0. Suốt những năm vừa qua có rất nhiều kết quả của các nhà khoa học nghiên cứu về bài toán ổn định các mô hình mạng nơ ron được mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ hoặc không có trễ. Trong khi đó một bài toán quan trọng không kém là bài toán ổn định hóa lớp hệ này chỉ có một vài kết quả được công bố (xem [7, 48, 51, 71]). Trong đó, kết quả của V.N. Phat và H. Trinh trong [71] là đáng quan tâm hơn cả. Trong nghiên cứu này, các tác giả đã nghiên cứu bài toán ổn định hóa được dạng mũ cho mô hình mạng nơ ron được mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ hỗn hợp với độ trễ biến thiên và các hàm kích hoạt khác nhau. Bằng cách cải tiến hàm Lyapunov–Krasovskii, kết hợp với sử dụng kỹ thuật bất đẳng thức ma trận tuyến tính, hai tác giả đã thiết kế một điều khiển ngược để ổn định hóa được dạng mũ cho mô hình mạng nơ ron được mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ này. Tuy nhiên, khi nghiên cứu kết quả này, chúng tôi nhận thấy điều kiện của hai tác giả đưa ra vẫn đòi hỏi độ trễ rời rạc là hàm khả vi và cận dưới của độ trễ là 0. Trong các bài toán kỹ thuật, như các tác giả trong [22, 32] đã chỉ ra, độ trễ có thể nằm trong một khoảng cho trước có cận dưới không nhất thiết là 0, tức là độ trễ $h(t)$ thỏa mãn $0 < h_1 \le h(t) \le h_2$, với h_1, h_2 là các số thực dương cho trước và để cho ngắn gọn, ta sẽ gọi độ trễ mà thỏa mãn điều kiện này là *trễ biến thiên dạng khoảng (interval time-varying delay)*. Từ đó bài toán ổn định cho mô hình mạng nơ ron mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ biến thiên dạng khoảng đã thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà nghiên cứu (xem [11, 30, 81, 84]). Trong các nghiên cứu đó, các tác giả đều nghiên cứu bài toán ổn định cho mô hình mạng nơ ron mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ biến thiên dạng khoảng và độ trễ là hàm khả vi. Từ những phân tích trên, ta thấy vấn đề tìm kiếm tiêu chuẩn ổn định mũ và ổn định hóa được dạng mũ cho mô hình mạng nơ ron mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ hỗn hợp với độ trễ biến thiên dạng khoảng và độ trễ là các hàm liên tục không nhất thiết khả vi là vấn đề nghiên cứu có tính thời sự. Với ý tưởng đó, trong luận án này, bằng cách xây dựng hàm Lyapunov–Krasovskii mới trong đó có chứa các cận trên và cận dưới của hàm trễ kết hợp với các kỹ thuật đánh giá mới, chúng tôi tìm được một điều kiện đủ cho tính ổn định mũ cho mô hình mạng nơ ron mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ hỗn hợp với các hàm kích hoạt khác nhau, (hệ (0.1) với $u(t) = 0$ hay là hệ (2.1) trong Chương 2 của luận án), với độ trễ là các hàm liên tục không nhất thiết khả vi và độ trễ rời rạc là trễ biến thiên dạng khoảng. Đồng thời chúng tôi cũng tìm ra một điều kiện đủ cho tính ổn định hóa được dạng mũ cho mô hình mạng nơ ron mô tả bởi hệ điều khiển có trễ hỗn hợp với các hàm kích hoạt khác nhau, (hệ (2.17) trong Chương 2 của luận án), với độ trễ là các hàm liên tục không nhất thiết khả vi.

Lớp hệ thứ hai được nghiên cứu trong luận án là lớp hệ điều khiển có trễ biến thiên với nhiễu phi tuyến

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Dx(t-h(t)) + f(t, x(t)) + g(t, x(t-h(t))) + Bu(t), \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-h_2, 0], \end{cases} \tag{0.2}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véctơ trạng thái, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là véctơ điều khiển, A, D, B là các ma trận thực cho trước có số chiều thích hợp, trễ $h(t)$ biến thiên dạng khoảng thỏa mãn điều kiện $0 < h_1 \leq h(t) \leq h_2$, với h_1, h_2 là những số thực cho trước. Trong các bài toán kỹ thuật, nhiễu phi tuyến $f(t, x(t))$ và $g(t, x(t - h(t)))$ thường được giả thiết thỏa mãn một trong hai điều kiện sau. Đó là, hoặc chúng là các hàm thỏa mãn điều kiện tăng trưởng $f^{\mathsf{T}}(t, x(t))f(t, x(t)) \leq a^2 x^{\mathsf{T}}(t)F^{\mathsf{T}}Fx(t), g^{\mathsf{T}}(t, x(t-h(t)))g(t, x(t-h(t))) \leq d^2 x^{\mathsf{T}}(t-h(t))G^{\mathsf{T}}Gx(t-h(t))$, trong đó F, G là các ma trận thực cho trước và a, d là các số cho trước (xem [27, 42, 74]) hoặc $f(t, x(t))$ và $g(t, x(t - h(t)))$ biểu diễn được dưới dạng $f(t, x(t)) = E_1F_1(t)H_1x(t), g(t, x(t - h(t))) = E_2F_2(t)H_2x(t - h(t))$, trong đó E_1, E_2, H_1, H_2 là các ma trận thực cho trước có số chiều thích hợp, còn $F_1(t), F_2(t)$ là các ma trận thực không biết nhưng chúng thỏa mãn điều kiện $F_i^{\mathsf{T}}(t)F_i(t) \leq I,\ i = 1, 2$ (xem [29, 45]).

Trong trường hợp các nhiễu phi tuyến được giả thiết thỏa mãn điều kiện tăng trưởng, đã có một số kết quả nghiên cứu cho tính ổn định tiệm cận cho lớp hệ trên (khi $u(t) = 0$) được đề xuất trong trường hợp độ trễ là các hàm khả vi liên tục, có cận dưới là 0 (xem [27, 42]). Gần đây, trong [74] các tác giả đã đưa ra một điều kiện đủ cho tính ổn định tiệm cận cho lớp hệ phương trình vi phân trung tính có nhiễu phi tuyến có trễ biến thiên dạng khoảng với độ trễ là các hàm khả vi. Tuy nhiên bài toán ổn định hóa được dạng mũ cho lớp hệ điều khiển có nhiễu phi tuyến với độ trễ biến thiên dạng khoảng vẫn chưa được quan tâm nghiên cứu nhiều và theo như hiểu biết của chúng tôi vẫn chưa có công trình nào công bố về vấn đề này. Dựa trên ý tưởng đó, trong luận án này, chúng tôi nghiên cứu bài toán ổn định hóa được dạng mũ cho lớp hệ điều khiển nói trên trong trường hợp nhiễu phi tuyến thỏa mãn điều kiện tăng trưởng. Vấn đề khó khăn nhất khi giải bài toán này là phải tìm được một điều khiển ngược $u(t) = Kx(t), K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ nào đó sao cho với điều khiển ngược này hệ điều khiển trên là ổn định mũ. Bằng cách xây dựng hàm Lyapunov–Krasovskii mới có chứa tích phân bội ba kết hợp với công thức Newton–Leibniz, chúng tôi đưa ra một vài kiện đủ mới cho tính ổn định hóa được dạng mũ cho lớp hệ điều khiển trên với điều khiển ngược ổn định hóa được xác định một cách tường minh thông qua việc tìm một nghiệm của bất đẳng thức ma trận tuyến tính trong cả hai trường hợp: độ trễ biến thiên dạng khoảng và là hàm khả vi (Nội dung Định lý 2.3 trong Chương 2 của luận án); độ trễ biến thiên dạng khoảng và là hàm không khả vi (Nội dung Hệ quả 2.1 trong Chương 2 của luận án).

Trường hợp các nhiễu phi tuyến biểu diễn được dưới dạng $f(t, x(t)) = E_1F_1(t)H_1x(t), g(t, x(t - h(t))) = E_2F_2(t)H_2x(t - h(t))$, hệ (0.2) được viết lại dưới dạng

$$\dot{x}(t) = [A + E_1F_1(t)H_1]x(t) + [D + E_2F_2(t)H_2]x(t - h(t)) + Bu(t). \tag{0.3}$$

Hệ (0.3) được gọi là hệ điều khiển không chắc chắn có trễ trên trạng thái. Lớp hệ này đã nhận được sự quan tâm của nhiều nhà nghiên cứu (xem [5, 29, 39, 45] và các tài liệu tham khảo trong các bài báo đó). Bằng cách sử dụng phương pháp hàm Lyapunov–Krasovskii kết hợp với kỹ thuật biến đổi mô hình (model transformation) cùng với công thức Newton–Leibniz, L.V. Hien [2] đã đưa ra một điều kiện đủ cho tính ổn định mũ và ổn định hóa được dạng mũ cho lớp hệ tuyến tính không chắc chắn có trễ. Tuy nhiên, điều kiện của L.V. Hien còn giả thiết độ trễ là hàm khả vi và cận dưới của độ trễ là 0. Cũng bằng cách tiếp cận sử dụng phương pháp hàm Lyapunov–Krasovskii nhưng không dùng phép biến đổi mô hình, T. Li cùng các cộng sự [45], đã đưa ra một điều kiện đủ cho tính ổn định tiệm cận và ổn định hóa được cho lớp hệ tuyến tính không chắc chắn có trễ với độ trễ biến thiên dạng khoảng và là hàm khả vi có đạo hàm bị chặn. Thông qua ví dụ số, T. Li và các cộng sự cũng chỉ ra rằng kết quả của họ là tốt hơn các kết quả đã có. Khi phân tích kết quả của T. Li cùng các cộng sự [45], chúng tôi nhận thấy hàm Lyapunov–Krasovskii được chọn còn đơn giản, một số đánh giá còn chặt và chưa đưa ra được các chỉ số ổn định mũ. Vì vậy, theo hướng nghiên cứu thứ nhất, bằng cách xây dựng hàm Lyapunov–Krasovskii mới có chứa tốc độ ổn định mũ α, các cận trên và cận dưới của độ trễ và tích phân bội ba, chúng tôi đưa ra một vài điều kiện đủ mới cho tính ổn định hóa được dạng mũ cho lớp hệ (0.3) trong trường hợp độ trễ biến thiên dạng khoảng và là hàm khả vi hoặc không khả vi. Đồng thời, thông qua ví dụ số, chúng tôi cũng chỉ ra rằng biên của độ trễ trong kết quả của chúng tôi là tốt hơn kết quả của T. Li và các cộng sự.

Trong các bài toán kỹ thuật, ngoài việc tìm cách thiết kế một hệ thống điều khiển làm cho hệ điều khiển không những ổn định mà còn đảm bảo một mức độ đầy đủ về hiệu suất (guarantees an adequate level of performance). Dựa trên ý tưởng đó, năm 1972, hai nhà toán học S.S.L. Chang và T.K.C. Peng đã đưa ra bài toán đảm bảo giá trị điều khiển cho hệ điều khiển. Trong bài toán này, ngoài việc thiết kế một bộ điều khiển để đảm bảo cho hệ thống điều khiển là ổn định, ta còn phải dựa trên điều khiển đó để tìm một cận trên của hàm chi phí toàn phương (the integral quadratic cost function) (xem [8]). Đến năm 1994, I.R. Petersen và cộng sự D.C. McFarlane đã đưa ra một mô hình toán học tường minh cho bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ thống điều khiển được mô tả dưới dạng hệ phương trình vi phân thường có nhiễu cấu trúc (uncertain systems) [69]:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [A + D_1\Delta(t)E_1]\,x(t) + [B + D_1\Delta(t)E_2]\,u(t), \quad t \geq 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{0.4}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véctơ trạng thái, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là véctơ điều khiển. Các ma trận A, B, D_1, E_1, E_2 là các ma trận thực cho trước có số chiều thích hợp.

Còn $\Delta(t)$ là ma trận không biết trước nhưng thỏa mãn điều kiện $\Delta^\mathsf{T}(t)\Delta(t) \leq I, \forall t \geq 0$. Liên hệ với hệ (0.4), hàm chi phí toàn phương được xét là

$$J = \int_0^{+\infty} \left[x^\mathsf{T}(t)R_1x(t) + u^\mathsf{T}(t)R_2u(t)\right] dt, \tag{0.5}$$

trong đó $R_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}, R_2 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ là các ma trận thực đối xứng, xác định dương cho trước. Khi đó bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho lớp hệ (0.4) được phát biểu như sau: *Xét hệ phương trình vi phân* (0.4) *với hàm chi phí toàn phương* (0.5)*, nếu tồn tại một luật điều khiển ngược $u^*(t)$ và một số dương J^* sao cho với mọi nhiễu $\Delta(t)$, hệ đóng tương ứng, tức là hệ thu được khi ta thay $u(t) = g(x(t))$ vào hệ* (0.4)*, là ổn định tiệm cận và giá trị của hàm chi phí toàn phương thỏa mãn đánh giá $J \leq J^*$, thì J^* được gọi là giá trị đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ* (0.4) *và $u^*(t)$ được gọi là luật điều khiển ngược đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ* (0.4). Bằng cách giải phương trình Riccati đại số, hai tác giả đã đưa ra một tiêu chuẩn cho bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ trên với luật điều khiển ngược được cho bởi công thức $u(t) = Kx(t)$, với $K = -(\epsilon R_2 + E_2^\mathsf{T} E_2)^{-1}(\epsilon B^\mathsf{T} P + E_2^\mathsf{T} E_1)$ và giá trị đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ (0.4) là $J^* = x_0^\mathsf{T} P x_0$, trong đó $\epsilon > 0$ cùng với một ma trận đối xứng, xác định dương P là nghiệm của phương trình Riccati đại số được xét trong [69]. Một thời gian sau, L. Yu và J. Chu đã mở rộng bài toán trên cho lớp hệ phương trình vi phân không chắc chắn có trễ hằng [89]:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [A + \Delta A]x(t) + [A_1 + \Delta A_1]x(t-d) + [B + \Delta B]u(t) \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-d, 0], \end{cases} \tag{0.6}$$

với $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véctơ trạng thái, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là véctơ điều khiển. Các ma trận A, A_1, B là các ma trận thực hằng cho trước có số chiều thích hợp. Còn $\Delta A, \Delta A_1, \Delta B$ là các ma trận không biết trước nhưng thỏa mãn điều kiện $[\Delta A \quad \Delta B \quad \Delta A_1] = DF(t)[E_1 \quad E_2 \quad E_d]$, trong đó D, E_1, E_2, E_d là các ma trận thực hằng cho trước có số chiều thích hợp và ma trận $F(t)$ là không biết trước nhưng thỏa mãn điều kiện $F^\mathsf{T}(t)F(t) \leq I$. Liên kết với hệ (0.6), các tác giả cũng xét hàm chi phí toàn phương tương tự như hàm chi phí toàn phương của I.R. Petersen và D.C. McFarlane. Bằng cách sử dụng phương pháp hàm Lyapunov và lý thuyết ma trận, các tác giả trong [89] đã đưa ra một điều kiện đủ cho sự tồn tại một điều khiển ngược đảm bảo chi phí điều khiển cho lớp hệ (0.6). Dựa trên ý tưởng đó, đã có một số các công trình nghiên cứu bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho lớp hệ phương trình sai phân (chẳng hạn xem [12, 26, 77, 90, 97]) và lớp hệ có thời gian liên tục (chẳng hạn xem [16, 47, 63, 66, 89]) được công bố. Chú ý rằng trong các kết quả đã công bố cho bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho các lớp hệ phương trình vi phân có thời gian liên tục, các lớp hệ được nghiên cứu có cấu trúc đơn giản và độ trễ hoặc là hằng số hoặc là hàm khả vi liên tục. Vì vậy việc tìm các tiêu chuẩn mới cho bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho các lớp hệ có cấu trúc phức tạp hơn, có độ trễ biến thiên dạng khoảng và là các hàm liên tục nhưng không nhất thiết khả vi là một nghiên cứu có tính thời sự, có ý nghĩa về mặt khoa học. Trong Chương 3 của luận án, chúng tôi nghiên cứu bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho một số lớp hệ phương trình vi phân có cấu trúc phức tạp với độ trễ tổng quát hơn.

Trước tiên, chúng tôi nghiên cứu bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho lớp hệ điều khiển có trễ hỗn hợp trên cả biến trạng thái và biến điều khiển với độ trễ là các hàm liên tục nhưng không nhất thiết khả vi:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h_1(t)) + A_2\int_{t-k_1(t)}^{t} x(s)\,ds \\ \qquad\qquad +B_0u(t) + B_1u(t-h_2(t)) + B_2\int_{t-k_2(t)}^{t} u(s)\,ds \\ x(t) = \phi(t), \quad t\in[-d,0], \quad d = \max\{h_{1\max}, h_{2\max}, k_1, k_2\}, \end{cases} \tag{0.7}$$

trong đó đó $x(t)\in\mathbb{R}^n, u(t)\in\mathbb{R}^m$ tương ứng là các véctơ trạng thái và véctơ điều khiển; $\phi(t)\in C^1([-d,0],R^n)$ là hàm ban đầu với chuẩn được cho bởi công thức: $A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2$ là các ma trận thực cho trước; các hàm trễ $h_i(t), k_i(t), i = 1,2$, là các hàm liên tục không nhất thiết khả vi, thỏa mãn điều kiện: $0 \le h_{i\min} \le h_i(t) \le h_{i\max}, 0 \le k_i(t) \le k_i, i = 1,2$, trong đó $h_{i\min}, h_{i\max}, k_i, i = 1,2$ là các số thực cho trước. Trong [75], J.P. Richard đã tổng kết những kết quả nghiên cứu gần đây về hệ phương trình vi phân có trễ và đưa ra bốn bài toán mở, một trong số đó có bài toán ổn định hóa các hệ phương trình vi phân có trễ trên điều khiển mà không dựa trên giả thiết về tính điều khiển được của hệ. Trong [55], bằng cách mở rộng lớp hàm Lyapunov–Krasovskii của O.M. Kwon và J.H. Park [39] cùng với một vài đánh giá mới, P.T. Nam và V.N. Phat đã đưa ra một điều kiện đủ cho tính ổn định hóa được dạng mũ cho lớp hệ điều khiển tuyến tính không chắc chắn có trễ trên trạng thái và điều khiển với độ trễ là hằng số không biết trước. Bài toán ổn định hóa trở nên khó khăn hơn nhưng thú vị hơn và có nhiều ứng dụng hơn khi xét hệ điều khiển có trễ hỗn hợp trên cả trạng thái và điều khiển với độ trễ là các hàm liên tục không nhất thiết khả vi. Đặc biệt, bài toán đó càng trở lên khó khăn hơn khi ta đưa thêm yêu cầu về đảm bảo chi phí điều khiển, nhất là cho lớp hệ phương trình vi phân có trễ hỗn hợp trên cả biến trạng thái và biến điều khiển với độ trễ là các hàm khác nhau, độ trễ là hàm liên tục nhưng không nhất thiết khả vi. Bởi vì, ta cần phải thiết kế một điều khiển ngược $u(t) = Kx(t), K\in\mathbb{R}^{m\times n}$ để hệ đó không những là ổn định hóa được dạng mũ mà giá trị của hàm chi phí toàn phương $J = \int_0^{+\infty}[x^{\mathsf{T}}(t)Qx(t) + u^{\mathsf{T}}(t)Ru(t)]\,dt$ phải nhỏ hơn một số thực dương J^* nào đó. Bằng cách xây dựng hàm Lyapunov–Krasovskii mới trong đó có chứa tốc độ hội tụ mũ α của hệ, kết hợp với công thức Newton–Leibniz, bất đẳng thức ma trận Cauchy, chúng tôi tìm ra một điều kiện đủ cho sự tồn tại một điều khiển ngược đảm bảo chi phí điều khiển cho lớp hệ có trễ hỗn hợp trên biến trạng thái và biến điều khiển với độ trễ biến thiên khác nhau. Điều kiện mà chúng tôi đề xuất không đòi hỏi tính điều khiển được của hệ cũng như tính khả vi của độ trễ. Tiêu chuẩn này được trình bày trong Định lý 3.1, Chương 3 của luận án.

Trong phần cuối của luận án, chúng tôi nghiên cứu bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho lớp hệ điều khiển tuyến tính có trễ trên biến trạng thái và biến quan sát với độ trễ biến thiên dạng khoảng:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Dx(t - h_1(t)) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t - h_2(t)), \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-d, 0], \end{cases} \tag{0.8}$$

ở đó $d = \max\{\overline{h}_1, \overline{h}_2\}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véctơ trạng thái; $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là véctơ điều khiển; $y(t) \in \mathbb{R}^r$ là véctơ quan sát; A, D, B, C là các ma trận thực cho trước có số chiều thích hợp; Các hàm trễ $h_1(t), h_2(t)$ thỏa mãn điều kiện: $0 < h_1 < h_1(t) \leq \overline{h}_1, 0 < h_2 < h_2(t) \leq \overline{h}_2$, trong đó $h_1, h_2, \overline{h}_1, \overline{h}_2$ là những số dương cho trước. Chú ý rằng trong bài toán này, chúng tôi xét trường hợp các hàm trễ là các hàm liên tục không nhất thiết khả vi và cận dưới của hàm trễ là thực sự lớn hơn 0. Khác với bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho lớp hệ có trễ hỗn hợp trên cả biến trạng thái và biến điều khiển vừa được xét ở trên, trong bài toán này, chúng tôi sẽ thiết kế một bộ điều khiển phản hồi đầu ra động (dynamic output feedback controllers):

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = A_1\xi(t) + B_1 y(t), \quad t \geq 0, \\ \xi(t) = 0, \quad t \in [-d, 0], \\ u(t) = C_1\xi(t), \end{cases}$$

ở đó $\xi(t) \in \mathbb{R}^n$; A_1, B_1, C_1 là các ma trận hằng chưa biết sẽ được xác định sau, để nghiên cứu bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho lớp hệ điều khiển tuyến tính có trễ trên biến trạng thái và biến quan sát ở trên. Cách tiếp cận dùng phương pháp hàm Lyapunov–Krasovskii kết hợp với bất đẳng thức ma trận tuyến tính là một phương pháp phổ biến và hiệu quả để thiết kế một bộ điều khiển phản hồi đầu ra động làm ổn định hóa hoặc mạnh hơn nữa là đảm bảo chi phí điều khiển cho các hệ phương trình vi phân có trễ. Mặc dù đã có một số kết quả về bài toán thiết kế một bộ điều khiển phản hồi đầu ra động để ổn định hóa hệ có trễ hoặc nhằm đảm bảo chi phí điều khiển cho các hệ phương trình vi phân có trễ được công bố (xem [4, 16, 18, 64, 65, 67, 92]), tuy nhiên trong các kết quả này đều phải dựa trên một giả thiết hạn chế là độ trễ hoặc là hằng số biết trước hoặc độ trễ là hàm khả vi và quan sát đầu ra độc lập với độ trễ. Theo như hiểu biết của chúng tôi, cho đến nay vẫn chưa có một công trình nào nghiên cứu về việc thiết kế một bộ phản hồi đầu ra động để đảm bảo chi phí điều khiển cho lớp hệ điều khiển tuyến tính có trễ trên biến trạng thái và biến quan sát với độ trễ biến thiên dạng khoảng và là các hàm liên tục không nhất thiết khả vi được công bố. Vì lý do đó, bằng cách xây dựng hàm Lyapunov–Krasovskii mới kết hợp với các kỹ thuật đánh giá mới, chúng tôi đưa ra một điều kiện đủ cho sự tồn tại một bộ phản hồi đầu ra động để đảm bảo chi phí điều khiển cho lớp hệ phương trình vi phân tuyến tính có trễ trên biến trạng thái và biến quan sát (0.8). Đây chính là nội dung của Định lý 3.2 trong Chương 3 của luận án.

Một điều đáng chú ý là các điều kiện đủ cho tính ổn định mũ và ổn định hóa được dạng mũ cho một số lớp hệ phương trình vi phân hàm được nghiên cứu trong luận án (mô hình mạng nơ ron mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ biến thiên hỗn hợp, hệ điều khiển có trễ biến thiên dạng khoảng với nhiễu phi tuyến), điều kiện đủ cho sự tồn tại một điều khiển ngược đảm bảo chi phí điều khiển cho lớp hệ điều khiển có trễ hỗn hợp trên cả biến trạng thái và biến điều khiển (0.7), tiêu chuẩn cho sự tồn tại một bộ phản hồi đầu ra động đảm bảo chi phí điều khiển cho lớp hệ điều khiển tuyến tính có trễ biến thiên trên biến trạng thái và biến quan sát (0.8), đều được đưa về việc tìm nghiệm của các bất đẳng thức ma trận tuyến tính.

Trong [6], [21] và [35], các tác giả định nghĩa bất đẳng thức ma trận tuyến tính (LMI) là một bất đẳng thức ma trận có dạng

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^{l} x_i F_i < 0 \quad (> 0),$$

trong đó $x_1, x_2, \ldots, x_l$ là các ẩn, $F_i = F_i^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là các ma trận cho trước và $F(x) > 0 \quad (< 0)$ tức là $F(x)$ xác định âm (xác định dương tương ứng). Một hệ thống gồm nhiều bất đẳng thức ma trận tuyến tính $F_1(x) < 0, \ldots, F_n(x) < 0$ bao giờ cũng có thể đưa về một bất đẳng thức ma trận tuyến tính

$$\overline{F}(x) = \operatorname{diag}\left(F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x)\right) < 0.$$

Do đó ta không có sự phân biệt giữa một hệ thống các bất đẳng thức ma trận tuyến tính với một bất đẳng thức ma trận tuyến tính, tức là $F_1(x) < 0, \ldots, F_n(x) < 0$ nghĩa là $\overline{F}(x) = \operatorname{diag}\left(F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x)\right) < 0$. Việc giải bất đẳng thức ma trận tuyến tính là tìm véctơ chấp nhận được (feasible vector) x sao cho bất đẳng thức ma trận $\overline{F}(x) = \operatorname{diag}\left(F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x)\right) < 0$ được thỏa mãn. Trong công trình của mình P. Gahinet cùng các cộng sự [21] đã chỉ ra rằng tập các phương án chấp nhận được của bài toán trên là tập lồi và việc tìm một véctơ chấp nhận được x là một bài toán tối ưu lồi. Bất đẳng thức Lyapunov $A^{\mathsf{T}}X + XA < 0, A$ với $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, trong đó $X = X^{\mathsf{T}} > 0$ là ẩn phải tìm là một ví dụ đơn giản của bất đẳng thức ma trận tuyến tính. Năm 1995, Nesterov và Nemirovskii [57] đã đưa ra phương pháp điểm trong để giải bất đẳng thức ma trận tuyến tính $\overline{F}(x) = \mathrm{diag}\,(F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x)) < 0$. Dùng thuật toán của Nesterov và Nemirovskii [57], mà về sau người ta gọi là thuật toán chiếu của Nemirovskii (Nemirovskii's Projective Algorithm), các tác giả P. Guhiriet, A. Nemirovskii, A. J. Laub và M. Chilali [21] đã đưa ra một phần mềm gọi là hộp công cụ LMI-toolbox trong Matlab để giải bất đẳng thức ma trận tuyến tính. Trong công trình của mình, M.V. Kothare cùng các cộng sự [35], P. Guhiriet cùng các cộng sự [21], đã khẳng định rằng bài toán bất đẳng thức ma trận tuyến tính có thể giải được trong thời gian đa thức (LMI problems can be solved in polynomial time). Trong luận án này, chúng tôi dùng hộp công cụ LMI-toolbox trong Matlab để giải các ví dụ số trong Chương 2 và Chương 3.

Luận án dài 102 trang, gồm phần mở đầu, 3 chương, phần kết luận, danh mục 4 công trình liên quan đến luận án và danh mục 97 tài liệu tham khảo.

Chương 1 là chương kiến thức chuẩn bị, gồm 3 mục. Mục 1.1 giới thiệu bài toán ổn định, bài toán ổn định hóa cho hệ phương trình vi phân thường. Mục 1.2 giới thiệu bài toán ổn định và bài toán ổn định hóa cho hệ phương trình vi phân có trễ. Mục 1.3 nhắc lại một số kiến thức về bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho lớp hệ điều khiển tuyến tính ôtônôm, lớp hệ điều khiển tuyến tính không chắc chắn có trễ. Đồng thời, trong mục này chúng tôi cũng đưa ra định nghĩa về bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho lớp hệ điều khiển có trễ dạng tổng quát. Mục 1.4 nhắc lại 3 bổ đề sẽ được sử dụng trong các chương sau của luận án.

Chương 2 nghiên cứu bài toán ổn định mũ và ổn định hóa được dạng mũ cho mô hình mạng nơ ron được mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ hỗn hợp với độ trễ là các hàm liên tục nhưng không nhất thiết khả vi. Ngoài ra, trong chương này chúng tôi cũng nghiên cứu tính ổn định hóa được dạng mũ cho lớp hệ điều khiển có trễ biến thiên dạng khoảng với nhiễu phi tuyến. Mục 2.1 trình bày một tiêu chuẩn cho tính ổn định mũ và một tiêu chuẩn cho tính ổn định hóa được dạng mũ cho mô hình mạng nơ ron mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ hỗn hợp. Mục 2.2 nghiên cứu tính ổn định hóa được dạng mũ cho lớp hệ điều khiển có trễ biến thiên dạng khoảng với nhiễu phi tuyến.

Chương 3 nghiên cứu bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho một số lớp hệ phương trình vi phân hàm. Mục 3.1 đưa ra một điều kiện đủ cho việc tồn tại một điều khiển ngược đảm bảo chi phí điều khiển cho lớp hệ điều khiển có trễ hỗn hợp trên cả biến trạng thái và biến điều khiển với độ trễ là các hàm liên tục nhưng không nhất thiết khả vi. Mục 3.2 đưa ra một điều kiện đủ cho sự tồn tại một bộ điều khiển phản hồi đầu ra động (dynamic output feedback controllers) đảm bảo chi phí điều khiển cho lớp hệ điều khiển tuyến tính có trễ trên biến trạng thái và biến quan sát với độ trễ biến thiên dạng khoảng và là các hàm liên tục nhưng không nhất thiết khả vi.

Các kết quả chính của luận án đã được báo cáo và thảo luận tại các hội nghị, hội thảo khoa học, xê mi na sau:
- Hội nghị Toàn quốc lần thứ ba về Ứng dụng toán học, Đại học Bách khoa Hà Nội, tháng 12, 2010.
- Hội thảo Một số hướng nghiên cứu mới trong Toán học hiện đại và Ứng dụng, Đại học Hồng Đức, Thanh Hóa, tháng 5, 2011.
- Xê mi na tại School of Engineering, Deakin University, Australia, 10/2011-12/2011.
- Hội thảo Quốc gia lần thứ mười về Tối ưu và Tính toán khoa học, Ba Vì, Hà Nội, tháng 4, 2012.
- Hội thảo Quốc tế lần thứ 5 về High Performance Scientific Computing, Hanoi, March 5–9, 2012.
- Xê mi na tại Phòng Tối ưu và Điều khiển, Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.
- Các hội nghị đánh giá Nghiên cứu sinh của Viện Toán học, tháng 10, 2010, tháng 10, 2012 và tháng 10, 2013.
- Xê mi na tại khoa Toán–Tin, trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.

Chương 1

Cơ sở toán học

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số khái niệm và kết quả về tính ổn định và ổn định hóa được của các hệ phương trình vi phân thường và hệ phương trình vi phân có trễ. Chúng tôi cũng trình bày một số kết quả bổ trợ sẽ được sử dụng trong chứng minh các kết quả chính của luận án cho các chương sau. Kiến thức sử dụng trong chương này được tham khảo ở [3, 8, 28, 33, 37, 38, 46, 80, 83, 88, 89, 93].

1.1. Bài toán ổn định và ổn định hóa cho hệ phương trình vi phân thường

1.1.1. Bài toán ổn định

Xét một hệ thống được mô tả bởi hệ phương trình vi phân

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad t \in \mathbb{R}^+, \cdot \tag{1.1}$$

ở đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véctơ trạng thái, $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ là một hàm cho trước. Giả thiết rằng hàm $f(.)$ thỏa mãn điều kiện sao cho với mọi $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ hệ (1.1) có nghiệm duy nhất đi qua điểm (t_0, x_0) và xác định trên $[t_0, +\infty)$. Nghiệm này được ký hiệu là $x(t; t_0, x_0)$. Giả sử $f(t, 0) = 0$, với mọi $t \in \mathbb{R}^+$. Giả thiết này đảm bảo hệ có nghiệm tầm thường $x \equiv 0$. Khi đó ta có các định nghĩa sau.

Định nghĩa 1.1 [3, 46, 88]

- Nghiệm không của hệ (1.1) được gọi là ổn định nếu với mọi $\epsilon > 0, t_0 \geq 0$, tồn tại $\delta = \delta(t_0, \epsilon)$ sao cho với nghiệm $x(t; t_0, x_0)$ bất kỳ của hệ (1.1), nếu $\|x_0\| < \delta$ thì $\|x(t; t_0, x_0)\| < \epsilon, \forall t \geq t_0$.

- Nghiệm không của hệ (1.1) được gọi là ổn định tiệm cận nếu nó ổn định và với mỗi $t_0 \geq 0$, tồn tại $\delta_0 = \delta_0(t_0) > 0$ sao cho với nghiệm $x(t; t_0, x_0)$ bất kỳ của hệ (1.1), nếu $\|x_0\| < \delta_0$ thì $\lim_{t \to +\infty} \|x(t; t_0, x_0)\| = 0$.

- Nghiệm không của hệ (1.1) được gọi là ổn định mũ nếu tồn tại các hằng số $\alpha > 0, N \geq 1$ sao cho với mọi $x_0 \in \mathbb{R}^n, t_0 \in \mathbb{R}^+$, nghiệm $x(t; t_0, x_0)$ bất kỳ của hệ (1.1) thỏa mãn điều kiện

$$\|x(t; t_0, x_0)\| \leq N\|x_0\|e^{-\alpha(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0.$$

  Số N gọi là hệ số ổn định Lyapunov, α gọi là số mũ ổn định. Ngoài ra, α, N được gọi chung là các chỉ số ổn định Lyapunov.

Để ngắn gọn, thay vì nói nghiệm không của hệ (1.1) ổn định (ổn định tiệm cận, ổn định mũ) ta nói hệ (1.1) là ổn định (ổn định tiệm cận, ổn định mũ).

Xét lớp hệ tuyến tính ôtônôm

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), \quad t \geq t_0, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Dựa vào tính chất tập các giá trị riêng của ma trận A, Lyapunov đã đưa ra một điều kiện cần và đủ cho tính ổn định mũ của hệ (1.2). Cụ thể là hệ (1.2) là ổn định mũ khi và chỉ khi $\mathrm{Re}\lambda_j < 0$ với mọi $\lambda_j \in \lambda(A)$. Tuy nhiên, trong thực tế các hệ thống thường chứa các tham số không biết trước, chẳng hạn đối với hệ (1.2), ma trận A bị "nhiễu" thành $A + \Delta A(t)$, ở đó $\Delta A(t) = EF(t)H$, với E, H là các ma trận thực cho trước có số chiều thích hợp, $F(t)$ là ma trận không biết trước nhưng thỏa mãn $F^{\mathsf{T}}(t)F(t) \leq I$. Vì sự phức tạp của tập phổ $\lambda(A + \Delta A(t))$, Lyapunov đã đưa ra một cách tiếp cận dựa trên dạng hàm toàn phương $V(x) = x^{\mathsf{T}}Px$, trong đó P là một ma trận đối xứng, xác định dương. Hệ (1.2) là ổn định mũ khi và chỉ khi với bất kỳ ma trận Q đối xứng, xác định dương, phương trình Lyapunov (LE): $A^{\mathsf{T}}P + PA = -Q$ có nghiệm P là ma trận đối xứng, xác định dương. Phương pháp này thường được gọi là phương pháp hàm Lyapunov. Trong luận án này, chúng tôi sẽ sử dụng phương pháp hàm Lyapunov để nghiên cứu các bài toán ổn định, ổn định hóa, bài toán đảm bảo chi phí điều khiển một số lớp hệ phương trình vi phân.

1.1.2. Phương pháp hàm Lyapunov

Ta nhắc lại khái niệm hàm Lyapunov cho hệ (1.1).

Định nghĩa 1.2 [3, 80, 93] Hàm $V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, khả vi liên tục, thỏa mãn $V(t, 0) = 0, \forall t \geq 0$, được gọi là hàm Lyapunov của hệ (1.1) nếu:

(i) Hàm $V(t,x)$ là hàm xác định dương theo nghĩa

$$\exists a \in \mathcal{K}: \quad V(t,x) \geq a(\|x\|), \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n.$$

(ii) $\dot{V}(t,x(t)) := \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x(t)) \leq 0$, với mọi nghiệm $x(t)$ của hệ (1.1).
Nếu hàm $V(t,x)$ thỏa mãn thêm các điều kiện: $\exists b, c \in \mathcal{K}$ sao cho

(iii) $V(t,x) \leq b(\|x\|), \forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$,

(iv) $\dot{V}(t,x(t)) \leq -c(\|x(t)\|)$ với mọi nghiệm $x(t)$ của hệ (1.1)
thì $V(t,x)$ gọi là hàm Lyapunov chặt của hệ (1.1).

Sau đây, chúng tôi nhắc lại hai định lý về tính ổn định của hệ (1.1).

Định lý 1.1 [3, 80, 93] *Nếu hệ (1.1) có hàm Lyapunov thì hệ là ổn định. Hơn nữa, nếu hàm Lyapunov là chặt thì hệ là ổn định tiệm cận.*

Định lý 1.2 [88] *Giả sử hệ (1.1) có hàm Lyapunov thỏa mãn các điều kiện sau:*

(i) $\exists \lambda_1, \lambda_2 > 0 : \lambda_1 \|x\|^2 \leq V(t,x) \leq \lambda_2 \|x\|^2, \forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$,

(ii) $\exists \lambda_3 > 0 : \dot{V}(t,x(t)) \leq -2\lambda_3 V(t,x(t))$ *với mọi nghiệm* $x(t)$ *của hệ (1.1).*
Khi đó hệ (1.1) là ổn định mũ với các chỉ số ổn định Lyapunov là λ_3 *và* $N = \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$.

1.1.3. Bài toán ổn định hóa

Xét một hệ thống điều khiển được mô tả bởi hệ phương trình vi phân

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \geq 0, \tag{1.3}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véctơ trạng thái, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là véctơ điều khiển. Hàm điều khiển $u(.)$ thuộc lớp hàm bình phương khả tích trên các đoạn hữu hạn $[0,s], \forall s \geq 0$ và lấy giá trị trong $\mathbb{R}^m$. Hàm $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ là hàm véctơ cho trước, thỏa mãn điều kiện $f(t,0,0) = 0, \forall t \geq 0$. Giả thiết rằng, với mỗi $u(.)$ thuộc lớp hàm bình phương khả tích trên các đoạn hữu hạn $[0,s]$, với mọi $s \geq 0$ và lấy giá trị trong $\mathbb{R}^m$ và với mọi $x_0 \in \mathbb{R}^n$, hệ (1.3) có nghiệm duy nhất $x_u(t) = x_u(t;x_0)$ thỏa mãn điều kiện ban đầu $x_u(0;x_0) = x_0$ và xác định trên $[0,+\infty)$.

Hệ (1.3) gọi là điều khiển được toàn cục (ĐKĐTC) nếu với mọi $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, tồn tại hàm điều khiển $u(.)$ thuộc lớp hàm khả tích bậc hai trên các đoạn hữu hạn $[0,s], \forall s \geq 0$ và lấy giá trị trong $\mathbb{R}^m$ sao cho nghiệm tương ứng $x_u(t)$ thỏa $x_u(0) = x_0$ và tồn tại thời gian $t_1 > 0$ sao cho $x_u(t_1) = x_1$. Nếu $x_0 = 0$ thì hệ (1.3) gọi là đạt được toàn cục từ 0 (ĐĐTC). Nếu $x_1 = 0$ thì hệ gọi là điều khiển được toàn cục về 0 (ĐKĐTC0). Một trong những bài toán cơ bản và quan trọng của lý thuyết điều khiển là nghiên cứu tính điều khiển được của hệ.

Trường hợp hệ (1.3) là hệ điều khiển tuyến tính dừng

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \geq 0, \tag{1.4}$$

ta có tiêu chuẩn hạng Kalman sau.

Định lý 1.3 [3, 80, 93] *Với hệ điều khiển tuyến tính dừng* (1.4)*, các phát biểu sau là tương đương*

(i) Hệ (1.4) *là điều khiển được toàn cục (ĐKĐTC);*

(ii) $\operatorname{rank}[A, B] = \operatorname{rank}[B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B] = n$*;*

(iii) $\exists T > 0 : L_T := \int_0^T e^{-At}BB^\intercal e^{-A^\intercal t}$ *là ma trận không suy biến.*

Một bài toán quan trọng khác của lý thuyết điều khiển là bài toán ổn định hóa.

Định nghĩa 1.3 Hệ điều khiển (1.3) gọi là ổn định hóa được nếu tồn tại hàm $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sao cho hệ phương trình vi phân, thường gọi là hệ đóng (closed-loop system)

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), g(x(t))), \quad t \geq 0, \tag{1.5}$$

là ổn định tiệm cận. Hàm $u(t) = g(x(t))$ gọi là hàm điều khiển ngược (state feedback control).

Định nghĩa 1.4 Hệ điều khiển (1.3) gọi là ổn định hóa được dạng mũ nếu tồn tại hàm $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sao cho hệ phương trình vi phân (1.5) là ổn định mũ.

Như vậy, hai vấn đề đặt ra đối với bài toán ổn định hóa là với điều kiện nào thì hệ ổn định hóa được và cách xác định điều khiển ngược này như thế nào? Đối với hệ điều khiển tuyến tính dừng (1.4), điều kiện hạng Kalman $\operatorname{rank}[A, B] = \operatorname{rank}[B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B] = n$ đảm bảo cho hệ là ổn định hóa được. Hơn nữa, hàm điều khiển ngược được xác định bởi công thức $u(t) = -TB^\intercal L_T^{-1}x(t)$, với $L_T = \int_0^T e^{-At}BB^\intercal e^{-A^\intercal t}, T > 0$ (xem [3, 80, 93]).

1.2. Bài toán ổn định và ổn định hóa cho hệ phương trình vi phân có trễ

1.2.1. Bài toán ổn định hệ có trễ

Như chúng ta đã biết hệ phương trình vi phân thường (1.1) mô tả mối quan hệ giữa biến thời gian t, trạng thái $x(t)$ của hệ thống và tốc độ thay đổi của trạng thái $x(t)$ tại cùng một thời điểm t. Tuy nhiên, trong thực tế, các quá trình xảy ra trong tự nhiên thường có sự liên quan với quá khứ và ít nhiều mang tính di truyền. Vì vậy lớp hệ phương trình vi thường không miêu tả được hết các quá trình này. Do đó, để mô tả một cách chính xác các quá trình này, người ta thường miêu tả chúng bằng các phương trình vi phân có trễ. Giả sử h là một số thực không âm. Ký hiệu $\mathcal{C} = C([-h,0],\mathbb{R}^n)$ và $PC([-h,0],\mathbb{R}^n)$ lần lượt là không gian các hàm liên tục và liên tục từng khúc trên đoạn $[-h,0]$, nhận giá trị trong không gian $\mathbb{R}^n$ và chuẩn của một phần tử $\phi \in \mathcal{C}$ hoặc $PC([-h,0],\mathbb{R}^n)$ được cho bởi $\|\phi\|_C = \sup_{-h\le\theta\le 0}\|\phi(\theta)\|$. Với $t_0 \in \mathbb{R}, \sigma \ge 0$ và $x \in C([t_0-h, t_0+\sigma],\mathbb{R}^n)$, hàm $x_t \in \mathcal{C}, t \in [t_0, t_0+\sigma]$, được xác định bởi $x_t(s) := x(t+s), s \in [-h,0]$. Như vậy, x_t là đoạn quỹ đạo trên đoạn $[t-h,t]$ của hàm $x(.)$ với chuẩn trong $\mathcal{C}$ được xác định bởi $\|x_t\| := \sup_{s\in[-h,0]}\|x(t+s)\|$. Cho $D \subset \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C}$ là một tập mở và hàm $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Một phương trình vi phân có trễ trên D là phương trình dạng ([28])

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t). \tag{1.6}$$

Phương trình này được ký hiệu là $RFDE(f)$. Một hàm x được gọi là nghiệm của phương trình vi phân có trễ (1.6) trên $[t_0-h, t_0+\sigma)$ nếu tồn tại $t_0 \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ sao cho $x \in C([t_0-h, t_0+\sigma),\mathbb{R}^n), (t, x_t) \in D$ và $x(t)$ thỏa mãn phương trình (1.6) với mọi $t \in [t_0, t_0+\sigma)$. Cho trước $t_0 \in \mathbb{R}, \phi \in \mathcal{C}$, ta nói $x(t_0, \phi, f)$ là một nghiệm của phương trình (1.6) với hàm điều kiện ban đầu ϕ tại t_0 hoặc đơn giản là một nghiệm đi qua điểm (t_0, ϕ) nếu tồn tại một số $\sigma > 0$ sao cho $x(t_0, \phi, f)$ là nghiệm của hệ (1.6) trên $[t_0-h, t_0+\sigma)$ và $x_{t_0}(t_0, \phi, f) = \phi$. Khi t_0 và f đã rõ, để cho đơn giản trong cách viết, từ nay về sau ta ký hiệu $x(t, \phi)$ thay cho $x(t_0, \phi, f)(t)$.

Trong cuốn sách của mình (trang 37, chương 2), J.K.Hale [28] đã chỉ ra rằng hệ (1.6) là rất tổng quát, nó bao gồm lớp hệ phương trình vi phân thường (ordinary differential equations) (khi $h = 0$):

$$\dot{x}(t) = F(x(t)),$$

lớp hệ phương trình vi sai phân (Differential difference equations):

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau_1(t)), \ldots, x(t-\tau_p(t))),$$

với $0 \le \tau_j(t) \le h, j = 1, \ldots, p$, cũng như bao gồm lớp hệ phương trình tích phân (integro-differential equation):

$$\dot{x}(t) = \int_{-h}^{0} g(t, \theta, x(t+\theta))\, d\theta.$$

Tiếp theo, chúng tôi nhắc lại các định lý tồn tại nghiệm địa phương, định lý tồn tại duy nhất nghiệm địa phương cho hệ (1.6). Các định lý này được tham khảo trong các trang 41 và 42, chương 2 trong cuốn sách chuyên khảo của J.K. Hale [28]. Ngoài ra, chúng tôi cũng phát biểu lại định lý tồn tại và duy nhất nghiệm toàn cục của hệ (1.6). Định lý này được chúng tôi tham khảo trong trang 9, chương 1 cuốn sách chuyên khảo của V.L. Kharitonov [37].

Định lý 1.4 (Định lý tồn tại nghiệm địa phương, Đinh lý 2.1 trang 41 trong [28]) *Giả sử* Ω *là một tập mở của* $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$ *và* $f^0 \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$*. Nếu* $(t_0, \phi) \in \Omega$ *thì tồn tại nghiệm của phương trình* $RFDE(f^0)$ *đi qua điểm* (t_0, ϕ)*. Tổng quát hơn, nếu* $W \subset \Omega$ *là tập compact và* $f^0 \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ *cho trước, thì tồn tại một lân cận* $V \subset \Omega$ *của* W *sao cho* $f^0 \in C^0(V, \mathbb{R}^n)$*, tồn tại một lân cận* $U \subset C^0(V, \mathbb{R}^n)$ *và* $\alpha > 0$ *sao cho với mọi* $(t_0, \phi) \in W, f \in U$*, tồn tại nghiệm* $x(t_0, \phi, f)$ *của phương trình* $RFDE(f)$ *đi qua điểm* (t_0, ϕ) *tồn tại trên* $[t_0 - h, t_0 + \alpha)$*.*

Định lý 1.5 (Định lý tồn tại duy nhất nghiệm địa phương, Định lý 2.3 trang 42 trong [28]) *Giả sử* Ω *là một tập mở của* $\mathbb{R} \times \mathcal{C}, f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *liên tục và* $f(t, \phi)$ *là Lipschitz theo* ϕ *trong mỗi tập con compact của* Ω*. Nếu* $(t_0, \phi) \in \Omega$ *thì tồn tại duy nhất nghiệm đi qua điểm* (t_0, ϕ) *của phương trình* $RFDE(f)$*.*

Định lý 1.6 (Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm toàn cục, Định lý 1.2 trang 9 trong [37]) *Cho* $f : [0, +\infty) \times PC([-h, 0], \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *thỏa mãn các điều kiện sau:*

(i) Với bất kỳ $H > 0$*, tồn tại* $M(H) > 0$ *sao cho*

$$\|f(t, \phi)\| \leq M(H), \quad (t, \phi) \in [0, +\infty) \times PC([-h, 0], \mathbb{R}^n) \quad \text{và} \quad \|\phi\|_C \leq H;$$

(ii) Hàm $f(t, \phi)$ *là hàm liên tục theo cả hai biến trên tập* $[0, +\infty) \times PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$*;*

(iii) Hàm $f(t, \phi)$ *thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo biến thứ hai, tức là tồn tại hằng số Lipschitz* $L(H) > 0$ *sao cho*

$$\|f(t, \phi_1) - f(t, \phi_2)\| \leq L(H)\|\phi_1 - \phi_2\|_C,$$

với mọi $t \geq 0, \phi_i \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n), \|\phi_i\|_C \leq H, i = 1, 2.$

(iv)

$$\|f(t, \phi)\| \leq \eta(\|\phi\|_C), t \geq 0, \quad \phi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n),$$

trong đó $\eta(r), r \in [0, +\infty)$ *là hàm liên tục, không giảm và sao cho với* $r_0 \geq 0$ *bất kỳ điều kiện sau thỏa mãn*

$$\lim_{\mathrm{R} \to +\infty} \int_{r_0}^{R} \frac{dr}{\eta(r)} = +\infty.$$

Khi đó, với $t_0 \geq 0$ *và* $\phi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ *cho trước, hệ (1.6) có duy nhất nghiệm* $x(t_0, \phi, f)$ *xác định trên đoạn* $[t_0 - h, +\infty)$*.*

Trong cả luận án này, chúng tôi giả thiết rằng hàm $f(.)$ thỏa mãn điều kiện sao cho với mỗi điểm $(t_0, \phi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C}$, hệ (1.6) có nghiệm duy nhất đi qua điểm (t_0, ϕ) và nghiệm xác định trên $[t_0, +\infty)$. Ta cũng giả thiết $f(t, 0) \equiv 0$, tức là hệ (1.6) luôn có nghiệm không. Khi đó, ta cũng có các khái niệm nghiệm không của hệ (1.6) là ổn định, ổn định tiệm cận, ổn định mũ tương tự hệ phương trình vi phân thường, chi tiết có thể xem trong ([28, 36]). Tuy nhiên để cho ngắn gọn, thay vì nói nghiệm không của hệ (1.6) là ổn định (ổn định tiệm cận, ổn định mũ) ta sẽ nói hệ (1.6) là ổn định (ổn định tiệm cận, ổn định mũ).

Bởi vì luận án quan tâm đến tính $\alpha-$ổn định mũ của lớp hệ phương trình vi phân có trễ nên chúng tôi nhắc lại định nghĩa sau.

Định nghĩa 1.5 Cho số $\alpha > 0$. Hệ (1.6) được gọi là $\alpha-$ổn định mũ nếu tồn tại hằng số $N \geq 1$ sao cho mọi nghiệm $x(t, \phi)$ của hệ (1.6) thỏa mãn điều kiện

$$\|x(t, \phi)\| \leq N\|\phi\|e^{-\alpha(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0.$$

Như đã phân tích trong phần mở đầu, năm 1892, A.M. Lyapunov là người đầu tiên đưa ra phương pháp hàm Lyapunov để nghiên cứu tính ổn định của lớp hệ phương trình vi phân thường. Năm 1963, N.N. Krasovskii trong công trình của mình trong [38] mở rộng phương pháp thứ hai Lyapunov (hay còn gọi là phương pháp hàm Lyapunov) cho hệ phương trình vi phân có trễ và đã thu được rất nhiều kết quả có ý nghĩa. Sau đây chúng tôi trình bày khái niệm hàm Lyapunov–Krasovskii và một số kết quả của N.N. Krasovskii cho bài toán ổn định hệ phương trình vi phân có trễ. Những kết quả được trình bày dưới đây được chúng tôi tham khảo trong [28, 33, 34, 38].

Xét hệ phương trình vi phân có trễ sau:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t), \quad t \geq t_0, x_t(\theta) = x(t+\theta), \quad \theta \in [-h, 0], \\ x_{t_0}(\theta) = \phi(\theta), \quad \theta \in [-h, 0], \end{cases} \tag{1.7}$$

Ta giả thiết $f(t, 0) \equiv 0, \forall t \geq t_0$, tức là hệ (1.7) có nghiệm tầm thường $x \equiv 0$. Ký hiệu $Q_H := \{\psi \in \mathcal{C} = C([-h, 0], \mathbb{R}^n) : \|\psi\| \leq H\}$. Ta giả thiết rằng với mỗi $H > 0$ thì $f : \mathbb{R} \times Q_H \to \mathbb{R}^n$ là liên tục, bị chặn và thỏa mãn điều kiện Lipschitz địa phương đối với $\phi \in Q_H$.

Cho $V : \mathbb{R} \times Q_H \to \mathbb{R}$ là một hàm liên tục và thỏa mãn $V(t, 0) \equiv 0, \forall t \geq t_0$. Gọi Ω là tập tất cả các hàm $\omega : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ liên tục, không giảm, $\omega(0) = 0, \omega(s) > 0, \forall s > 0$. Khi đó:
Hàm $V(t, \phi)$ được gọi là xác định dương (positive-definite) nếu tồn tại một hàm $\omega_1 \in \Omega$ sao cho

$$V(t, \phi) \geq \omega_1(\|\phi(0)\|), \phi \in Q_H, t \in \mathbb{R}. \tag{1.8}$$

Hàm $V(t,\phi)$ được gọi là xác định âm (negative–definite) nếu tồn tại hàm $\omega_2, \omega_3 \in \Omega$ sao cho

$$\begin{cases} |V(t,\phi)| \leq \omega_2(\|\phi\|), \phi \in Q_H, t \in \mathbb{R}, \\ V(t,\phi) \leq -\omega_3(\|\phi(0)\|), \phi \in Q_H, t \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1.9}$$

Theo ([28, 33, 34, 38]), đạo hàm của V dọc theo nghiệm của hệ (1.7) được xác định bởi:

$$\dot{V}(t,\phi) := \lim_{h\to 0^+} \sup \frac{1}{h}\left[V(t+h, x_{t+h}(t,\phi)) - V(t,\phi))\right].$$

Trong [33, 38] đưa ra định nghĩa hàm Lyapunov–Krasovskii đối với hệ phương trình vi phân có trễ như sau:

Định nghĩa 1.6 [33] Hàm $V : \mathbb{R}\times Q_H \to \mathbb{R}$ liên tục thỏa mãn $V(t,0) \equiv 0, \forall t \geq 0$, được gọi là hàm Lyapunov–Krasovskii của hệ (1.7) nếu:

(i) Hàm $V(t,\phi)$ là hàm xác định dương,

(ii) $\dot{V}(t,\phi) \leq 0$, với mọi nghiệm $x(t)$ của hệ (1.7).

Khi đó, trong [33, 38] đưa ra một vài tiêu chuẩn cho tính ổn định và ổn định tiệm cận cho hệ phương trình vi phân có trễ (1.7) như sau:

Định lý 1.7 [33, 38] *Nếu hệ (1.7) có hàm Lyapunov–Krasovskii thì hệ là ổn định.*

Định lý 1.8 [33] *Xét hệ phương trình vi phân có trễ (1.7). Nếu tồn tại một hàm liên tục $V : \mathbb{R}\times Q_H \to \mathbb{R}$ sao cho*

$$\begin{cases} \omega_1(\|\phi(0)\|) \leq V(t,\phi) \leq \omega_2(\|\phi(\theta)\|), \quad \theta \in [-h,0], \\ \dot{V}(t,\phi) \leq -\omega_3(\|x(t)\|), \end{cases}$$

trong đó $\omega_1(.), \omega_2(.), \omega_3(.) \in \Omega$. Khi đó hệ (1.7) là ổn định tiệm cận.

Ngoài ra, trong [36], V.L. Kharitonov và D. Hinrichsen đưa ra một tiêu chuẩn ổn định mũ cho hệ (1.7). Đây là tiêu chuẩn được chúng tôi sử dụng để nghiên cứu các bài toán trong các chương tiếp theo của luận án.

Định lý 1.9 [36] *Giả sử $f : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C} \to \mathbb{R}^n$. Nếu tồn tại hàm liên tục $V : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ sao cho*

(i) $\exists \lambda_1, \lambda_2 > 0 : \lambda_1\|x(t)\|^2 \leq V(t,x_t) \leq \lambda_2\|x_t\|^2$,

(ii) $\dot{V}(t,x_t) \leq 0$, với mọi nghiệm $x(t)$ của hệ (1.7),

thì hệ (1.7) là ổn định và nghiệm của nó là bị chặn, tức là

$$\exists N > 0 : \|x(t_0,\phi,f)(t)\| \leq N\|\phi\|.$$

Nếu điều kiện (ii) được thay bằng điều kiện *(iii)* $\exists \lambda_3 > 0 : \dot{V}(t, x_t) \le -2\lambda_3 V(t, x_t)$, *với mọi nghiệm* $x(t)$ *của hệ* (1.7),

thì hệ (1.7) *là ổn định mũ và nghiệm* $x(t_0, \phi, f)(t)$ *của hệ thỏa mãn đánh giá*

$$\|x(t_0, \phi, f)(t)\| \le \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\|\phi\| e^{-\lambda_3(t-t_0)}, \quad \forall t \ge t_0.$$

1.2.2. Bài toán ổn định hóa hệ điều khiển có trễ

Xét hệ điều khiển có trễ

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t, u(t)), \quad t \ge 0, \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-h, 0], \end{cases} \tag{1.10}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véctơ trạng thái, $u \in L_2([0, +\infty), \mathbb{R}^m)$ là véctơ điều khiển, tức là hàm điều khiển thuộc lớp hàm bình phương khả tích trên $[0, +\infty)$; $h \ge 0$ là hằng số trễ, $\phi \in C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ là hàm điều kiện ban đầu và $f : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ là hàm véctơ cho trước thỏa mãn điều kiện, $f(t, 0, 0) = 0, t \ge 0$. Ta cũng giả thiết hệ điều khiển (1.10) tồn tại và duy nhất nghiệm trên $[0, +\infty)$ theo như cuốn sách chuyên khảo của E.N. Chukwu trong [15].

Định nghĩa 1.7 Hệ điều khiển (1.10) gọi là ổn định hóa được nếu tồn tại hàm $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sao cho hệ phương trình vi phân đóng (closed-loop system)

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t, g(x(t))), \tag{1.11}$$

là ổn định tiệm cận.

Định nghĩa 1.8 Cho số $\alpha > 0$. Hệ điều khiển (1.10) gọi là $\alpha-$ổn định hóa được dạng mũ nếu tồn tại hàm $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sao cho hệ đóng (1.11) là $\alpha-$ổn định mũ, tức là tồn tại hằng số $N \ge 1$ sao cho mọi nghiệm $x(t, \phi)$ của hệ đóng (1.11) thỏa mãn đánh giá

$$\|x(t, \phi)\| \le N\|\phi\| e^{-\alpha(t-t_0)}, \quad t \ge t_0.$$

1.3. Bài toán đảm bảo chi phí điều khiển

Như đã phân tích trong phần mở đầu. Bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho các hệ động lực được nghiên cứu đầu tiên bởi hai nhà toán học S.S.L. Chang và T.K.C. Peng vào năm 1972 (xem [8]). Trong bài toán này, ngoài việc thiết kế một bộ điều khiển để đảm bảo cho hệ thống điều khiển không những ổn định mà còn đảm bảo rằng một hàm chi phí toàn phương liên hệ với hệ động lực đó có giá trị hữu hạn và giá trị đó càng nhỏ càng tốt.

Xét hệ điều khiển tuyến tính ôtônôm

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \geq 0, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \tag{1.12}$$

với hàm chi phí toàn phương (hay còn gọi là hàm mục tiêu dạng toàn phương)

$$J(u) = \int_0^{+\infty} [x^\mathsf{T}(t)Qx(t) + u^\mathsf{T}(t)Ru(t)]dt, \tag{1.13}$$

trong đó $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}, R \in \mathbb{R}^{m\times m}$ là các ma trận đối xứng, xác định dương cho trước. Điều khiển $u(t) \in \mathcal{U}^\Omega, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Trong đó $\mathcal{U}^\Omega = \{u(t) \in L_2([0,\infty), \mathbb{R}^n)$, $u(t) \in \Omega$ hầu khắp trên $[0,\infty)\}$. Bài toán điều khiển tối ưu cho hệ điều khiển tuyến tính (1.12) hay còn gọi là bài toán tối ưu toàn phương là tìm điều khiển chấp nhận được $u(.) \in \mathcal{U}^\Omega$ sao cho với điều khiển này giá trị của hàm chi phí toàn phương đạt giá trị nhỏ nhất, tức là $J(u) \to \min$. Bằng cách dùng nguyên lý cực đại Pontriagin, trong [3, 80, 93] đã đưa ra một lời giải cho bài toán này. Khác với bài toán điều khiển tối ưu, bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ (1.12) là tìm một điều khiển $u(t)$ chấp nhận được nào đó sao cho với điều khiển này hệ (1.12) là ổn định tiệm cận và giá trị của hàm chi phí toàn phương (1.13) là không vượt quá một giá trị hữu hạn J^* nào đó. Như vậy, ta có thể phát biểu định nghĩa bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho lớp hệ (1.12) về mặt toán học như sau:

Định nghĩa 1.9 Xét hệ điều khiển tuyến tính (1.12) và hàm chi phí toàn phương (1.13), nếu tồn tại một luật điều khiển ngược $u^*(t) = Kx(t), K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ và một số dương J^* sao cho hệ đóng

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [A + BK]x(t), \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.14}$$

là ổn định tiệm cận và giá trị của hàm chi phí toàn phương (1.13) thỏa mãn $J \leq J^*$, thì J^* được gọi là giá trị đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ (1.12) và $u^*(t)$ được gọi là luật điều khiển ngược đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ (1.12).

Bằng cách chọn hàm Lyapunov–Krasovskii $V(x(t)) = x^\mathsf{T}(t)P^{-1}x(t)$, với $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là một ma trận đối xứng, xác định dương, ta dễ dàng chứng minh được kết quả sau:

Định lý 1.10 *Cho $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}, R \in \mathbb{R}^{m\times m}$ là các ma trận đối xứng, xác định dương. Xét hệ điều khiển tuyến tính ôtônôm* (1.12) *với hàm chi phí toàn phương* *tương ứng* (1.13). *Giả sử tồn tại một ma trận đối xứng, xác định dương* $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *một ma trận* Y *có số chiều thích hợp sao cho bất đẳng thức ma trận tuyến tính sau được thỏa mãn:*

$$\begin{bmatrix} (AP + PA^{\mathsf{T}} + BY + Y^{\mathsf{T}}B^{\mathsf{T}}) & PQ & Y^{\mathsf{T}}R \\ * & -Q & 0 \\ * & * & -R \end{bmatrix} < 0.$$

Khi đó $u(t) = YP^{-1}x(t)$ *là luật điều khiển ngược đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ tuyến tính ôtônôm* (1.12) *và giá trị đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ là* $J^* = x_0^{\mathsf{T}}P^{-1}x_0$.

Như vậy, thông qua các định nghĩa trên ta thấy về cơ bản bài toán đảm bảo chi phí điều khiển khác với bài toán điều khiển tối ưu. Ngoài ra, nếu ma trận A và ma trận B bị "nhiễu" thành $A + D_1\Delta(t)E_1$ và $B + D_1\Delta(t)E_1$, trong đó D_1, E_1 là các ma trận cho trước có số chiều thích hợp, $\Delta(t)$ là ma trận không biết trước nhưng thỏa mãn điều kiện $\Delta^{\mathsf{T}}(t)\Delta(t) \le I$, thì bài toán điều khiển tối ưu cho bài toán trên rất khó giải nhưng bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho bài toán đó đã được hai nhà toán học I.R. Petersen và D.C. McFarlane giải quyết không mấy khó khăn (xem [69]).

Tiếp theo, chúng tôi nhắc lại một số định nghĩa và kết quả về bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ phương trình vi phân có trễ. Xét hệ điều khiển tuyến tính không chắc chắn có trễ

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [A + \Delta A]x(t) + [A_1 + \Delta A_1]x(t-d) + [B + \Delta B]u(t), \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-d, 0], \end{cases} \tag{1.15}$$

với $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véctơ trạng thái, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là véctơ điều khiển. Các ma trận A, A_1, B là các ma trận thực hằng cho trước có số chiều thích hợp. Còn $\Delta A, \Delta A_1, \Delta B$ là các ma trận không biết trước nhưng thỏa mãn điều kiện $[\Delta A \quad \Delta B \quad \Delta A_1] = DF(t)[E_1 \quad E_2 \quad E_d]$, trong đó D, E_1, E_2, E_d là các ma trận thực hằng cho trước có số chiều thích hợp và ma trận $F(t)$ là không biết trước nhưng thỏa mãn điều kiện $F^{\mathsf{T}}(t)F(t) \le I$, $\phi(t)$ là hàm điều kiện ban đầu của hệ. Liên kết với hệ (1.15), ta xét hàm chi phí toàn phương sau

$$J(u) = \int_0^{+\infty} [x^{\mathsf{T}}(t)Qx(t) + u^{\mathsf{T}}(t)Ru(t)]dt, \tag{1.16}$$

trong đó $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}, R \in \mathbb{R}^{m\times m}$ là các ma trận đối xứng, xác định dương cho trước. Điều khiển $u(t) \in \mathcal{U}^{\Omega}, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

Định nghĩa 1.10 Xét hệ điều khiển tuyến tính không chắc chắn có trễ (1.15) và hàm chi phí toàn phương (1.16), nếu tồn tại một luật điều khiển ngược

$u^*(t) = Kx(t), K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ và một số dương J^* sao cho với độ trễ d, hệ đóng

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [A + \Delta A + BK + \Delta BK]x(t) + [A_1 + \Delta A_1]x(t-d), \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-d, 0], \end{cases} \tag{1.17}$$

là ổn định tiệm cận và giá trị của hàm chi phí toàn phương (1.16) thỏa mãn $J \leq J^*$, thì J^* được gọi là giá trị đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ (1.15) và $u^*(t)$ được gọi là luật điều khiển ngược đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ (1.15).

Trong [89], các tác giả L. Yu và J. Chu đã đưa ra một điều kiện đủ cho sự tồn tại một điều khiển ngược đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ (1.15) như sau.

Định lý 1.11 ([89]) *Cho $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}, R \in \mathbb{R}^{m\times m}$ là các ma trận đối xứng, xác định dương. Xét hệ điều khiển tuyến tính không chắc chắn có trễ* (1.15) *với hàm chi phí toàn phương tương ứng* (1.16). *Giả sử tồn tại các ma trận đối xứng, xác định dương $X, V \in \mathbb{R}^{n\times n}$, một ma trận $W \in \mathbb{R}^{m\times n}$ và một số dương ϵ sao cho bất đẳng thức ma trận tuyến tính sau được thỏa mãn:*

$$\begin{bmatrix} \Xi & A_1V & (E_1X + E_2W)^{\mathsf{T}} & X & W^{\mathsf{T}} & X \\ * & -V & VE_d^{\mathsf{T}} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\epsilon I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -Q^{-1} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -R^{-1} & 0 \\ * & * & * & * & * & -V \end{bmatrix} < 0,$$

trong đó $\Xi = AX + BW + (AX + BW)^{\mathsf{T}} + \epsilon DD^{\mathsf{T}}$. Khi đó $u^*(t) = WX^{-1}x(t)$ là luật điều khiển ngược đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ (1.15) *và giá trị đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ là $J^* = \phi^{\mathsf{T}}(0)X^{-1}\phi(0) + \int_{-d}^{0}\phi^{\mathsf{T}}(\tau)V^{-1}\phi(\tau)d\tau$.*

Bây giờ, ta đưa ra định nghĩa tổng quát về bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ điều khiển có trễ.

Xét hệ điều khiển có trễ

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t, u(t)), \quad t \geq 0, \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-h, 0], \end{cases} \tag{1.18}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véctơ trạng thái, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là véctơ điều khiển; $h \geq 0$ là hằng số trễ, $\phi \in \mathcal{C} := C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ là hàm điều kiện ban đầu và $f : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ là hàm véctơ cho trước thỏa mãn điều kiện, $f(t, 0, 0) = 0, t \geq 0$. Liên kết với hệ điều khiển có trễ (1.18), ta xét hàm chi phí toàn phương sau.

$$J(u) = \int_0^{+\infty} [x^{\mathsf{T}}(t)Qx(t) + u^{\mathsf{T}}(t)Ru(t)]dt, \tag{1.19}$$

trong đó $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}, R \in \mathbb{R}^{m\times m}$ là các ma trận đối xứng, xác định dương cho trước. Điều khiển $u(t) \in \mathcal{U}^{\Omega}, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Ta có định nghĩa sau.

Định nghĩa 1.11 Xét hệ điều khiển có trễ (1.18) và hàm chi phí toàn phương (1.19), nếu tồn tại một luật điều khiển ngược $u^*(t) = g(x(t)), g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ và một số dương J^* sao cho hệ đóng

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t, g(x(t))), \quad t \geq 0, \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-h, 0], \end{cases} \tag{1.20}$$

là ổn định tiệm cận và giá trị của hàm chi phí toàn phương (1.19) thỏa mãn $J \leq J^*$, thì J^* được gọi là giá trị đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ điều khiển có trễ (1.18) và $u^*(t)$ được gọi là luật điều khiển ngược đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ điều khiển có trễ (1.18).

Trong chương 3 của luận án, chúng tôi sẽ nghiên cứu bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho một số lớp hệ điều khiển có trễ có cấu trúc phức tạp và độ trễ dạng tổng quát.

1.4. Một số bổ đề bổ trợ

Để kết thúc chương này, chúng tôi nhắc lại một số bổ đề sẽ được sử dụng để chứng minh các kết quả chính trong các chương tiếp theo của luận án.

Bổ đề 1.1 (Bất đẳng thức Cauchy ma trận [95]) *Giả sử $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là một ma trận đối xứng, xác định dương. Khi đó với mọi ma trận $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}, x, y \in \mathbb{R}^n$, ta có*

$$2x^{\mathsf{T}}Qy - y^{\mathsf{T}}Sy \leq x^{\mathsf{T}}QS^{-1}Q^{\mathsf{T}}x.$$

Đặc biệt, với mọi $x, y \in \mathbb{R}^n$, ta có

$$2x^{\mathsf{T}}y \leq x^{\mathsf{T}}Sx + y^{\mathsf{T}}S^{-1}y.$$

Bổ đề 1.2 (Bất đẳng thức ma trận tích phân [83]) *Cho $Z \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là một ma trận đối xứng, xác định dương, các hằng số $h, \overline{h}$ với $0 < h < \overline{h}$ sao cho các tích phân dưới đây được xác định. Khi đó, ta có các đánh giá sau*

i) $$\int_{t-h}^{t} x^{\mathsf{T}}(s)Zx(s)\,ds \geq \frac{1}{h}\Big(\int_{t-h}^{t} x(s)\,ds\Big)^{\mathsf{T}} Z\Big(\int_{t-h}^{t} x(s)\,ds\Big);$$

ii) $$\int_{-\overline{h}}^{-h}\int_{t+s}^{t} x^{\mathsf{T}}(\tau)Zx(\tau)\,d\tau\,ds \geq \frac{2}{\overline{h}^2 - h^2}\Big(\int_{-\overline{h}}^{-h}\int_{t+s}^{t} x(\tau)\,d\tau\,ds\Big)^{\mathsf{T}} Z \times \Big(\int_{-\overline{h}}^{-h}\int_{t+s}^{t} x(\tau)\,d\tau\,ds\Big).$$

Bổ đề 1.3 (Bổ đề Schur [6]) *Giả sử* $X_{11} = X_{11}^{\mathsf{T}}, X_{12}, X_{21}, X_{22} = X_{22}^{\mathsf{T}}$ *là các ma trận với số chiều thích hợp. Khi đó các điều kiện sau là tương đương*

(i) $\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^{\mathsf{T}} & -X_{22} \end{bmatrix} < 0,$

(ii) $X_{22} > 0, X_{11} + X_{12}X_{22}^{-1}X_{12}^{\mathsf{T}} < 0.$

Chương 2

Tính ổn định và ổn định hóa được dạng mũ cho một số lớp hệ phương trình vi phân có trễ biến thiên

Chương này trình bày một số kết quả về tính ổn định mũ và ổn định hóa được dạng mũ của mô hình mạng nơ ron được mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ hỗn hợp với độ trễ là các hàm liên tục nhưng không nhất thiết khả vi. Ngoài ra, chúng tôi trình bày một vài tiêu chuẩn cho tính ổn định hóa được dạng mũ cho lớp hệ phương trình vi phân có trễ biến thiên dạng khoảng với nhiễu phi tuyến. Nội dung được trình bày trong chương này dựa trên bài báo [3], [4] trong danh mục các công trình đã công bố của tác giả.

2.1. Tính ổn định và ổn định hóa được dạng mũ cho mô hình mạng nơ ron được mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ biến thiên

Xét mô hình mạng nơ ron được mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ biến thiên hỗn hợp:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -Ax(t) + W_0 f(x(t)) + W_1 g(x(t-h(t))) + W_2 \int_{t-k(t)}^{t} c(x(s))\, ds \\ x(t) = \phi(t), t \in [-d, 0], \quad d = \max\{h_2, k\}, \end{cases} \tag{2.1}$$

ở đó $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^n$ là véctơ trạng thái của mô hình mạng nơ ron; $\phi \in C^1([-d, 0], \mathbb{R}^n)$ là hàm điều kiện ban đầu với chuẩn xác định bởi $\|\phi\|_{C^1} = \sup_{t\in[-d,0]} \{\|\phi(t)\|, \|\dot{\phi}(t)\|\}$; $A = \mathrm{diag}(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \dots, \overline{a}_n), \overline{a}_i > 0$, là ma trận đường chéo chính dương; W_0, W_1, W_2 là các ma trận thực cho trước có số chiều thích hợp và

$$
\begin{aligned}
f(x(t)) &= [f_1(x_1(t)), f_2(x_2(t)), \ldots, f_n(x_n(t))]^{\mathsf{T}},\\
g(x(t)) &= [g_1(x_1(t)), g_2(x_2(t)), \ldots, g_n(x_n(t))]^{\mathsf{T}},\\
c(x(t)) &= [c_1(x_1(t)), c_2(x_2(t)), \ldots, c_n(x_n(t))]^{\mathsf{T}}
\end{aligned}
$$

là các hàm kích hoạt thỏa mãn điều kiện Lipschitz sao cho với các hệ số $a_i > 0, b_i > 0, c_i > 0$, ta có

$$
\begin{aligned}
|f_i(\xi)| &\le a_i|\xi|, \quad i = 1,2,\ldots,n, \forall \xi \in \mathbb{R},\\
|g_i(\xi)| &\le b_i|\xi|, \quad i = 1,2,\ldots,n, \forall \xi \in \mathbb{R}, \qquad (2.2)\\
|c_i(\xi)| &\le c_i|\xi|, \quad i = 1,2,\ldots,n, \forall \xi \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Các hàm trễ $h(t), k(t)$ thỏa mãn các điều kiện

$$0 \le h_1 \le h(t) \le h_2; \quad 0 \le k(t) \le k, \quad \forall t \ge 0,$$

trong đó h_1, h_2, k là các số thực cho trước.

Mô hình mạng nơ ron mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ biến thiên hỗn hợp (2.1) với các hàm kích hoạt $f(x(t)), g(x(t-h(t))), c(x(t))$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz và điều kiện tăng trưởng (2.2) là tồn tại và duy nhất nghiệm trên khoảng $[0, +\infty)$ theo Định lý 1.6 trong Chương 1 của luận án.

Cho số $\alpha > 0$, các ma trận đối xứng xác định dương P, Q, R, S, các ma trận đường chéo chính dương D_1, D_2, D_3 và các ma trận tự do N_1, N_2, N_3, N_4. Đặt

$$
\begin{aligned}
&G = \mathrm{diag}\{b_i, i = 1,\ldots,n\}, \quad H = \mathrm{diag}\{c_i, i = 1,\ldots,n\}\\
&F = \mathrm{diag}\{a_i, i = 1,\ldots,n\}, \quad c^2 = \max\{c_i^2, i = 1,2,\ldots,n\},\\
&\lambda = \lambda_{\min}(P),\\
&\Lambda = \lambda_{\max}(P) + h_1\lambda_{\max}(Q) + \frac{1}{2}h_2^3\lambda_{\max}(R) + \frac{1}{2}(h_2-h_1)^2(h_2+h_1)\lambda_{\max}(S)\\
&\qquad + \frac{1}{2}c^2k^2\lambda_{\max}(D_2),\\
&\Xi_{11} = Q + 2\alpha P - e^{-2\alpha h_2}R + FD_0F + kHD_2H - A^{\mathsf{T}}N_1 - N_1^{\mathsf{T}}A,\\
&\Xi_{12} = -A^{\mathsf{T}}N_2 + e^{-2\alpha h_2}R,\\
&\Xi_{14} = -A^{\mathsf{T}}N_4 + P - N_1^{\mathsf{T}},\\
&\Xi_{22} = -e^{-2\alpha h_2}R - e^{-2\alpha h_2}S + GD_1G,\\
&\Xi_{33} = -e^{-2\alpha h_1}Q - e^{-2\alpha h_2}S,\\
&\Xi_{44} = h_2^2R + (h_2-h_1)^2S - N_4 - N_4^{\mathsf{T}}.
\end{aligned}
$$

Định lý dưới đây cho chúng ta một điều kiện đủ cho tính ổn định mũ của mô hình mạng nơ ron được mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ biến thiên hỗn hợp (2.1).

Định lý 2.1 *Cho số $\alpha > 0$. Giả sử rằng các ma trận hệ số của hệ (2.1) thỏa mãn điều kiện: tồn tại các ma trận đối xứng xác định dương P, Q, R, S, ba ma trận đường chéo chính xác định dương D_0, D_1, D_2 và các ma trận N_1, N_2, N_3, N_4 sao cho bất đẳng thức ma trận tuyến tính sau được thỏa mãn*

$$\Xi = \begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & -A^{\mathsf{T}}N_3 & \Xi_{14} & N_1^{\mathsf{T}}W_0 & N_1^{\mathsf{T}}W_1 & kN_1^{\mathsf{T}}W_2 \\ * & \Xi_{22} & e^{-2\alpha h_2}S & -N_2^{\mathsf{T}} & N_2^{\mathsf{T}}W_0 & N_2^{\mathsf{T}}W_1 & kN_2^{\mathsf{T}}W_2 \\ * & * & \Xi_{33} & -N_3^{\mathsf{T}} & N_3^{\mathsf{T}}W_0 & N_3^{\mathsf{T}}W_1 & kN_3^{\mathsf{T}}W_2 \\ * & * & * & \Xi_{44} & N_4^{\mathsf{T}}W_0 & N_4^{\mathsf{T}}W_1 & kN_4^{\mathsf{T}}W_2 \\ * & * & * & * & -D_0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -D_1 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -ke^{-2\alpha k}D_2 \end{bmatrix} < 0. \tag{2.3}$$

Khi đó hệ (2.1) là $\alpha-$ổn định mũ. Hơn nữa, nghiệm bất kì $x(t,\phi)$ của hệ (2.1) thỏa mãn đánh giá mũ sau:

$$\|x(t,\phi)\| \le \sqrt{\frac{\Lambda}{\lambda}}\|\phi\|_{C^1}e^{-\alpha t}, \quad \forall t \ge 0.$$

Chứng minh. Xét hàm Lyapunov–Krasovskii cho hệ (2.1) như sau:

$$V(t,x_t) = \sum_{i=1}^{5} V_i(t,x_t),$$

ở đó $x_t := x(t+s), s \in [-d,0]$, và

$$\begin{aligned} V_1(t,x_t) &= x^{\mathsf{T}}(t)Px(t), \\ V_2(t,x_t) &= \int_{t-h_1}^{t} e^{2\alpha(s-t)}x^{\mathsf{T}}(s)Qx(s)\,ds, \\ V_3(t,x_t) &= h_2\int_{-h_2}^{0}\int_{t+s}^{t} e^{2\alpha(\theta-t)}\dot{x}^{\mathsf{T}}(\theta)R\dot{x}(\theta)\,d\theta\,ds, \\ V_4(t,x_t) &= (h_2-h_1)\int_{-h_2}^{-h_1}\int_{t+s}^{t} e^{2\alpha(\theta-t)}\dot{x}^{\mathsf{T}}(\theta)S\dot{x}(\theta)\,d\theta\,ds, \\ V_5(t,x_t) &= \int_{-k}^{0}\int_{t+s}^{t} e^{2\alpha(\theta-t)}c^{\mathsf{T}}(x(\theta))D_2c(x(\theta))\,d\theta\,ds. \end{aligned}$$

Lấy đạo hàm của $V_i(t,x_t), i = 1,\dots,5$, theo t dọc theo nghiệm của hệ (2.1), ta thu được

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t,x_t) &= 2x^{\mathsf{T}}(t)P\dot{x}(t), \\ \dot{V}_2(t,x_t) &= x^{\mathsf{T}}(t)Qx(t) - e^{-2\alpha h_1}x^{\mathsf{T}}(t-h_1)Qx(t-h_1) - 2\alpha V_2(t,x_t), \\ \dot{V}_3(t,x_t) &\le h_2^2\dot{x}^{\mathsf{T}}(t)R\dot{x}(t) - h_2e^{-2\alpha h_2}\int_{t-h_2}^{t}\dot{x}^{\mathsf{T}}(s)R\dot{x}(s)\,ds - 2\alpha V_3(t,x_t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}_4(t,x_t) &\le (h_2-h_1)^2\dot{x}^{\mathsf{T}}(t)S\dot{x}(t) - 2\alpha V_4(t,x_t)\\
&\qquad - (h_2-h_1)e^{-2\alpha h_2}\int_{t-h_2}^{t-h_1}\dot{x}^{\mathsf{T}}(s)S\dot{x}(s)\,ds,\\
\dot{V}_5(t,x_t) &\le kc^{\mathsf{T}}(x(t))D_2c(x(t)) - 2\alpha V_5(t,x_t)\\
&\qquad - e^{-2\alpha k}\int_{t-k}^{t}c^{\mathsf{T}}(x(s))D_2c(x(s))\,ds.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Sử dụng điều kiện (2.2) và giả thiết D_2 là ma trận đường chéo chính dương, ta có:

$$kc^{\mathsf{T}}(x(t))D_2c(x(t)) \le kx^{\mathsf{T}}(t)HD_2Hx(t). \tag{2.5}$$

Từ các điều kiện (2.4) và (2.5), ta có đánh giá sau:

$$\begin{aligned}
&\dot{V}(t,x_t) + 2\alpha V(t,x_t)\\
&\le 2x^{\mathsf{T}}(t)P\dot{x}(t) + x^{\mathsf{T}}(t)[Q + 2\alpha P + kHD_2H]x(t)\\
&\quad + \dot{x}^{\mathsf{T}}(t)[h_2^2R + (h_2-h_1)^2S]\dot{x}(t) - e^{-2\alpha h_1}x^{\mathsf{T}}(t-h_1)Qx(t-h_1)\\
&\quad - h_2e^{-2\alpha h_2}\int_{t-h_2}^{t}\dot{x}^{\mathsf{T}}(s)R\dot{x}(s)\,ds - (h_2-h_1)e^{-2\alpha h_2}\int_{t-h_2}^{t-h_1}\dot{x}^{\mathsf{T}}(s)S\dot{x}(s)\,ds\\
&\quad - e^{-2\alpha k}\int_{t-k}^{t}c^{\mathsf{T}}(x(s))D_2c(x(s))\,ds.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Áp dụng Bổ đề 1.2 và công thức Newton-Leibniz, ta có các ước lượng sau:

$$\begin{aligned}
-h_2\int_{t-h_2}^{t}\dot{x}^{\mathsf{T}}(s)R\dot{x}(s)\,ds &\le -h(t)\int_{t-h(t)}^{t}\dot{x}^{\mathsf{T}}(s)R\dot{x}(s)\,ds\\
&\le -\Big(\int_{t-h(t)}^{t}\dot{x}(s)\,ds\Big)^{\mathsf{T}}R\Big(\int_{t-h(t)}^{t}\dot{x}(s)\,ds\Big)\\
&= -[x(t)-x(t-h(t))]^{\mathsf{T}}R[x(t)-x(t-h(t))]\\
&= -x^{\mathsf{T}}(t)Rx(t) + 2x^{\mathsf{T}}(t)Rx(t-h(t))\\
&\quad - x^{\mathsf{T}}(t-h(t))Rx(t-h(t));
\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
&-(h_2-h_1)\int_{t-h_2}^{t-h_1}\dot{x}^{T}(s)S\dot{x}(s)\,ds \le -(h(t)-h_1)\int_{t-h(t)}^{t-h_1}\dot{x}^{T}(s)S\dot{x}(s)\,ds\\
&\le -\left(\int_{t-h(t)}^{t-h_1}\dot{x}(s)\,ds\right)^{\mathsf{T}}S\left(\int_{t-h(t)}^{t-h_1}\dot{x}(s)\,ds\right)\\
&= -\big[x(t-h_1)-x(t-h(t))\big]^{\mathsf{T}}S[x(t-h_1)-x(t-h(t))]\\
&= -x^{\mathsf{T}}(t-h_1)Sx(t-h_1) + 2x^{\mathsf{T}}(t-h_1)Sx(t-h(t))\\
&\quad - x^{\mathsf{T}}(t-h(t))Sx(t-h(t)).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Đặt

$$\begin{aligned}
&\zeta^{\mathsf{T}}(t) = \begin{bmatrix} x^{\mathsf{T}}(t) & x^{\mathsf{T}}(t-h(t)) & x^{\mathsf{T}}(t-h_1) & \dot{x}^{\mathsf{T}}(t) \end{bmatrix},\\
&\mathcal{N} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

và sử dụng đẳng thức sau

$$-\dot{x}(t) - Ax(t) + W_0 f(x(t)) + W_1 g(x(t-h(t))) + W_2 \int_{t-k(t)}^{t} c(x(s))\,ds = 0,$$

ta thu được

$$\begin{aligned}
2\zeta^{\mathsf{T}}(t)\mathcal{N}^{\mathsf{T}}\Big[&-\dot{x}(t) - Ax(t) + W_0 f(x(t))\\
&+ W_1 g(x(t-h(t))) + W_2 \int_{t-k(t)}^{t} c(x(s))\,ds \Big] = 0.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Từ các điều kiện (2.6)-(2.9), ta có đánh giá sau:

$$\begin{aligned}
&\dot{V}(t,x_t) + 2\alpha V(t,x_t)\\
&\le 2x^{\mathsf{T}}(t)P\dot{x}(t) + x^{\mathsf{T}}(t)[Q + 2\alpha P + kHD_2H - e^{-2\alpha h_2}R]x(t)\\
&\quad + \dot{x}^{\mathsf{T}}(t)\left[h_2^2 R + (h_2-h_1)^2 S\right]\dot{x}(t)\\
&\quad - x^{\mathsf{T}}(t-h_1)\left[e^{-2\alpha h_1}Q + e^{-2\alpha h_2}S\right]x(t-h_1)\\
&\quad - x^{\mathsf{T}}(t-h(t))\left[e^{-2\alpha h_2}R + e^{-2\alpha h_2}S\right]x(t-h(t))\\
&\quad + 2e^{-2\alpha h_2}x^{\mathsf{T}}(t)Rx(t-h(t)) + 2e^{-2\alpha h_2}x^{\mathsf{T}}(t-h_1)Sx(t-h(t))\\
&\quad - e^{-2\alpha k}\int_{t-k}^{t} h^{\mathsf{T}}(x(s))D_2 h(x(s))\,ds + 2\zeta^{\mathsf{T}}(t)\mathcal{N}^{\mathsf{T}}\left[-Ax(t) - \dot{x}(t)\right]\\
&\quad + 2\zeta^{\mathsf{T}}(t)\mathcal{N}^{\mathsf{T}}W_0 f(x(t)) + 2\zeta^{\mathsf{T}}(t)\mathcal{N}^{\mathsf{T}}W_1 g(x(t-h(t)))\\
&\quad + 2\zeta^{\mathsf{T}}(t)\mathcal{N}^{\mathsf{T}}W_2 \int_{t-k(t)}^{t} c(x(s))\,ds.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ma trận (Bổ đề 1.1), ta thu được các đánh giá sau:

$$2\zeta^{\mathsf{T}}(t)\mathcal{N}^{\mathsf{T}}W_0 f(x(t)) \le \zeta^{\mathsf{T}}(t)\mathcal{N}^{\mathsf{T}}W_0 D_0^{-1}W_0^{\mathsf{T}}\mathcal{N}\zeta(t) + f^{\mathsf{T}}(x(t))D_0 f(x(t)), \tag{2.11}$$

và

$$\begin{aligned}
2\zeta^{\mathsf{T}}(t)\mathcal{N}^{\mathsf{T}}W_1 g(x(t-h(t))) \le\, &\zeta^{\mathsf{T}}(t)\mathcal{N}^{\mathsf{T}}W_1 D_1^{-1}W_1^{\mathsf{T}}\mathcal{N}\zeta(t)\\
&+ g^{\mathsf{T}}(x(t-h(t)))D_1 g(x(t-h(t))),
\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$
\begin{aligned}
&2\zeta^{\mathsf{T}}(t)\mathcal{N}^{\mathsf{T}}W_2\int_{t-k(t)}^{t} c(x(s))\,ds \\
&\leq ke^{2\alpha k}\zeta^{\mathsf{T}}(t)\mathcal{N}^{\mathsf{T}}W_2D_2^{-1}W_2^{\mathsf{T}}\mathcal{N}\zeta(t) + k^{-1}e^{-2\alpha k}\left(\int_{t-k(t)}^{t} c(x(s))\,ds\right)^{\mathsf{T}} \\
&\quad \times D_2\left(\int_{t-k(t)}^{t} c(x(s))\,ds\right) \\
&\leq ke^{2\alpha k}\zeta^{\mathsf{T}}(t)\mathcal{N}^{\mathsf{T}}W_2D_2^{-1}W_2^{\mathsf{T}}\mathcal{N}\zeta(t) + e^{-2\alpha k}\int_{t-k}^{t} c^{\mathsf{T}}(x(s))D_2c(x(s))\,ds.
\end{aligned} \tag{2.13}
$$

Sử dụng điều kiện tăng trưởng (2.2) và giả thiết các ma trận D_0, D_1 là ma trận đường chéo dương, ta có các ước lượng sau:

$$
\begin{aligned}
&f^{\mathsf{T}}(x(t))D_0f(x(t)) \leq x^{\mathsf{T}}(t)FD_0Fx(t); \\
&g^{\mathsf{T}}(x(t-h(t)))D_1g(x(t-h(t))) \leq x^{\mathsf{T}}(t-h(t))GD_1Gx(t-h(t)).
\end{aligned} \tag{2.14}
$$

Từ điều kiện (2.10)-(2.14), ta thu được đánh giá sau:

$$
\begin{aligned}
&\dot{V}(t,x_t) + 2\alpha V(t,x_t) \\
&\leq 2x^{\mathsf{T}}(t)P\dot{x}(t) + x^{\mathsf{T}}(t)\left[Q + 2\alpha P - e^{-2\alpha h_2}R + kHD_2H + FD_0F\right]x(t) \\
&\quad + \dot{x}^{\mathsf{T}}(t)\left[h_2^2R + (h_2-h_1)^2S\right]\dot{x}(t) \\
&\quad - x^{\mathsf{T}}(t-h_1)\left[e^{-2\alpha h_1}Q + e^{-2\alpha h_2}S\right]x(t-h_1) \\
&\quad + x^{\mathsf{T}}(t-h(t))\left[-e^{-2\alpha h_2}R - e^{-2\alpha h_2}S + GD_1G\right]x(t-h(t)) \\
&\quad + 2e^{-2\alpha h_2}x^{\mathsf{T}}(t)Rx(t-h(t)) + 2e^{-2\alpha h_2}x^{\mathsf{T}}(t-h_1)Sx(t-h(t)) \\
&\quad + 2\zeta^{\mathsf{T}}(t)\mathcal{N}^{\mathsf{T}}\left[-Ax(t) - \dot{x}(t)\right] \\
&\quad + \zeta^{T}(t)\big[\mathcal{N}^{\mathsf{T}}W_0D_0^{-1}W_0^{\mathsf{T}}\mathcal{N} + \mathcal{N}^{\mathsf{T}}W_1D_1^{-1}W_1^{\mathsf{T}}\mathcal{N} \\
&\quad + ke^{2\alpha k}\mathcal{N}^{\mathsf{T}}W_2D_2^{-1}W_2^{\mathsf{T}}\mathcal{N}\,\big]\zeta(t).
\end{aligned} \tag{2.15}
$$

Từ đó suy ra

$$\dot{V}(t,x_t) + 2\alpha V(t,x_t) \leq \zeta^{\mathsf{T}}(t)\Omega\zeta(t),$$

ở đó

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & -A^{\mathsf{T}}N_3 & \Xi_{14} \\ * & \Xi_{22} & e^{-2\alpha h_2}S & -N_2^{\mathsf{T}} \\ * & * & \Xi_{33} & -N_3^{\mathsf{T}} \\ * & * & * & \Xi_{44} \end{pmatrix} + \overline{\Omega},$$

với

$$\overline{\Omega} = \mathcal{N}^{\mathsf{T}}W_0D_0^{-1}W_0^{\mathsf{T}}\mathcal{N} + \mathcal{N}^{\mathsf{T}}W_1D_1^{-1}W_1^{\mathsf{T}}\mathcal{N} + ke^{2\alpha k}\mathcal{N}^{\mathsf{T}}W_2D_2^{-1}W_2^{\mathsf{T}}\mathcal{N}.$$

Sử dụng Bổ đề Schur, ta có $\Omega < 0$ khi và chỉ khi $\Xi < 0$. Vậy, ta có

$$\dot{V}(t,x_t) + 2\alpha V(t,x_t) \leq 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Đặt $v(t) = e^{2\alpha t}V(t, x_t)$. Lấy đạo hàm theo thời gian của $v(t)$, ta có

$$\dot{v}(t) = e^{2\alpha t}\left(\dot{V}(t, x_t) + 2\alpha V(t, x_t)\right) \leq 0 \tag{2.16}$$

Lấy tích phân hai vế của bất đẳng thức (2.16) từ 0 tới t, ta thu được

$$v(t) - v(0) \leq 0 \Leftrightarrow e^{2\alpha t}V(t, x_t) - V(0, x_0) \leq 0.$$

Từ đó suy ra

$$V(t, x_t) \leq V(0, x_0)e^{-2\alpha t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

Ngoài ra, bằng các tính toán đơn giản, ta có

$$\lambda\|x(t, \phi)\|^2 \leq V(t, x_t) \leq V(0, x_0)e^{-2\alpha t} \leq \Lambda e^{-2\alpha t}\|\phi\|^2_{C^1},$$

và do đó

$$\|x(t, \phi)\| \leq \sqrt{\frac{\Lambda}{\lambda}}e^{-\alpha t}\|\phi\|_{C^1}, \quad t \geq 0.$$

Định lý được chứng minh hoàn toàn.

□

Nhận xét 2.1 Bằng cách xây dựng hàm Lyapunov–Krasovskii mới trong đó có chứa các cận trên và cận dưới của hàm trễ, tốc độ ổn định mũ α và đặc biệt không chứa thành phần $\int_{t-h(t)}^{t} x^{\mathsf{T}}(s)Ux(s)\,ds$, với U là một ma trận đối xứng, xác định dương như trong các công trình khác (xem [9, 41, 45, 52, 68, 85, 91]), chúng tôi tìm được một điều kiện đủ mới cho tính ổn định mũ cho mô hình mạng nơ ron mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ biến thiên hỗn hợp với các hàm kích hoạt khác nhau và độ trễ là các hàm liên tục nhưng không nhất thiết khả vi. Với cách xây dựng hàm Lyapunov–Krasovskii mới đó, tiêu chuẩn ổn định mũ mà chúng tôi đề xuất không những khắc phục được các hạn chế trong các kết quả đã có về tính khả vi của độ trễ (xem [9, 41, 45, 52, 68, 85, 91]) mà còn mở rộng các kết quả trong [79, 96] cho trường hợp độ trễ rời rạc (độ trễ $h(t)$ trong hệ (2.1)) là trễ biến thiên dạng khoảng tức là cận dưới của độ trễ là số lớn hơn 0. Hơn nữa, trong điều kiện đủ mà chúng tôi đề xuất, các chỉ số ổn định Lyapunov được xác định một cách tường minh và có thể tính toán được bằng phần mềm Matlab.

Nhận xét 2.2 Điều kiện đủ cho tính ổn mũ cho mô hình mạng nơ ron mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ biến thiên hỗn hợp được đưa ra dưới dạng bất đẳng thức ma trận tuyến tính (LMIs). Việc giải các LMIs có thể được thực hiện bằng công cụ LMI Toolbox trên phần mềm Matlab. Trong các công trình của mình, các tác giả S. Boyd cùng các cộng sự [6], P. Gahinet cùng các cộng sự [21] đã đưa ra những thuật toán và phần mềm hiệu quả để giải LMIs. Ngoài ra, trong [35], M. Kothare cùng các cộng sự cũng có những bình luận sâu sắc về sự hữu hiệu của cách tiếp cận dùng bất đẳng thức ma trận tuyến tính.

Tiếp theo, chúng tôi xét bài toán ổn định hóa dạng mũ cho mô hình mạng nơ ron được mô ta bởi hệ điều khiển có trễ biến thiên hỗn hợp sau:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -Ax(t) + W_0 f(x(t)) + W_1 g(x(t-h(t))) \\ \qquad\quad + W_2 \int_{t-k(t)}^{t} c(x(s))\, ds + Bu(t) \\ x(t) = \phi(t), t \in [-d, 0], \quad d = \max\{h_2, k\}, \end{cases} \tag{2.17}$$

trong đó $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^n$ là véctơ trạng thái của mô hình mạng nơ ron; $\phi \in C^1([-d, 0], \mathbb{R}^n)$ là hàm điều kiện ban đầu với chuẩn xác định bởi $\|\phi\|_{C^1} = \sup_{t\in[-d,0]} \{\|\phi(t)\|, \|\dot{\phi}(t)\|\}$; $A = \mathrm{diag}(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n), \overline{a}_i > 0$, là ma trận đường chéo chính dương; W_0, W_1, W_2, B là các ma trận thực cho trước có số chiều thích hợp; $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là véctơ điều khiển; các hàm kích hoạt $f(.), g(.), c(.)$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz và điều kiện tăng trưởng (2.2) như trong mục trước.

Định nghĩa 2.1 Cho số $\alpha > 0$. Hệ (2.17) là $\alpha-$ổn định hóa được dạng mũ nếu tồn tại ma trận $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sao cho với hàm điều khiển ngược $u(t) = Kx(t)$, hệ đóng tương ứng

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -[A - BK]x(t) + W_0 f(x(t)) + W_1 g(x(t-h(t))) \\ \qquad\quad + W_2 \int_{t-k(t)}^{t} c(x(s))\, ds \\ x(t) = \phi(t), t \in [-d, 0], \quad d = \max\{h_2, k\}, \end{cases} \tag{2.18}$$

là $\alpha-$ổn định mũ.

Với điều khiển ngược thiết kế dạng $u(t) = Kx(t)$ thì hệ đóng (2.18) với các hàm kích hoạt $f(x(t)), g(x(t-h(t))), c(x(t))$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz và điều kiện tăng trưởng (2.2) là tồn tại và duy nhất nghiệm trên khoảng $[0, +\infty)$ theo Định lý 1.6 trong Chương 1 của luận án.

Cho số $\alpha > 0$, các ma trận đối xứng xác định dương $M, \overline{P}, \overline{Q}, \overline{R}, \overline{S}$, các ma trận đường chéo chính dương X_0, X_1, X_2 và một ma trận Y. Đặt

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \lambda_{\min}(M^{-1}\overline{P}M^{-1}), \\ \Lambda_2 &= \lambda_{\max}(M^{-1}\overline{P}M^{-1}) + h_1\lambda_{\max}(M^{-1}\overline{Q}M^{-1}) + \frac{1}{2}h_2^3\lambda_{\max}(M^{-1}\overline{R}M^{-1}) \\ &\quad + \frac{1}{2}(h_2 - h_1)^2(h_2 + h_1)\lambda_{\max}(M^{-1}\overline{S}M^{-1}) + \frac{1}{2}c^2k^2\lambda_{\max}(X_2^{-1}), \end{aligned}$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & (-MA^{\mathsf{T}} + Y^{\mathsf{T}}B^{\mathsf{T}}) & \Psi_{14} \\ * & \Psi_{22} & e^{-2\alpha h_2}\overline{S} & -M \\ * & * & \Psi_{33} & -M \\ * & * & * & \Psi_{44} \end{bmatrix},$$

$$\Psi_{11} = \overline{Q} + 2\alpha\overline{P} - e^{-2\alpha h_2}\overline{R} - MA^{\mathsf{T}} - AM + BY + Y^{\mathsf{T}}B^{\mathsf{T}},$$
$$\Psi_{12} = -MA^{\mathsf{T}} + Y^{\mathsf{T}}B^{\mathsf{T}} + e^{-2\alpha h_2}\overline{R},\ \Psi_{13} = -MA^{\mathsf{T}} + Y^{\mathsf{T}}B^{\mathsf{T}},$$
$$\Psi_{14} = -MA^{\mathsf{T}} + Y^{\mathsf{T}}B^{\mathsf{T}} + \overline{P} - M,$$
$$\Psi_{22} = -e^{-2\alpha h_2}\overline{R} - e^{-2\alpha h_2}\overline{S},$$
$$\Psi_{33} = -e^{-2\alpha h_1}\overline{Q} - e^{-2\alpha h_2}\overline{S},$$
$$\Psi_{44} = h_2^2\overline{R} + (h_2 - h_1)^2\overline{S} - 2M,$$
$$\Psi_{55} = X_0 - 2M,\ \Psi_{66} = X_1 - 2M,$$
$$\Psi_{77} = ke^{-2\alpha k}(X_2 - 2M).$$

Định lý sau cho một tiêu chuẩn ổn định hóa được dạng mũ cho hệ (2.17).

Định lý 2.2 *Cho số $\alpha > 0$. Giả sử rằng các ma trận hệ số của hệ (2.17) thỏa mãn điều kiện sau: tồn tại các ma trận đối xứng, xác định dương $M, \overline{P}, \overline{Q}, \overline{R}, \overline{S}$, ba ma trận đường chéo chính xác định dương X_0, X_1, X_2, và một ma trận Y, sao cho bất đẳng thức ma trận tuyến tính sau được thỏa mãn*

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} & \Psi_{14} & W_0M & W_1M & kW_2M & MF & kMH & 0 \\ * & \Psi_{22} & e^{-2\alpha h_2}\overline{S} & -M & W_0M & W_1M & kW_2M & 0 & 0 & MG \\ * & * & \Psi_{33} & -M & W_0M & W_1M & kW_2M & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Psi_{44} & W_0M & W_1M & kW_2M & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Psi_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \Psi_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \Psi_{77} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -X_0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -kX_2 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & -X_1 \end{bmatrix} < 0. \tag{2.19}$$

Khi đó hệ (2.17) là $\alpha-$ổn định hóa được dạng mũ với điều khiển ngược cho bởi

$$u(t) = YM^{-1}x(t), \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Hơn nữa, nghiệm bất kì $x(t,\phi)$ của hệ đóng (2.18) thỏa mãn đánh giá dạng mũ:

$$\|x(t,\phi)\| \leq \sqrt{\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}}e^{-\alpha t}\|\phi\|_{C^1}, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Chứng minh. Đặt

$$N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = M^{-1},$$
$$D_i = X_i^{-1}, i = 0, 1, 2, \quad K = YM^{-1}, \quad \overline{A} = A - BK.$$

Ta xét hàm Lyapunov–Krasovskii giống như trong phần chứng minh Định lý 2.1 cho hệ đóng (2.18). Bằng cách áp dụng Định lý 2.1, ta có hệ đóng (2.18) là $\alpha-$ổn định hóa được dạng mũ nếu $\Phi < 0$, trong đó

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & -\overline{A}^{\mathsf{T}} M^{-1} & \Phi_{14} & M^{-1}W_0 & M^{-1}W_1 & kM^{-1}W_2 \\ * & \Phi_{22} & e^{-2\alpha h_2}S & M^{-1} & M^{-1}W_0 & M^{-1}W_1 & kM^{-1}W_2 \\ * & * & \Phi_{33} & M^{-1} & M^{-1}W_0 & M^{-1}W_1 & kM^{-1}W_2 \\ * & * & * & \Phi_{44} & M^{-1}W_0 & M^{-1}W_1 & kM^{-1}W_2 \\ * & * & * & * & -X_0^{-1} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -X_1^{-1} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -ke^{-2\alpha k}X_2^{-1} \end{bmatrix},$$

với

$$\Phi_{11} = Q + 2\alpha P - e^{-2\alpha h_2}R + FX_0^{-1}F + kHX_2^{-1}H - \overline{A}^{\mathsf{T}} M^{-1} - M^{-1}\overline{A},$$
$$\Phi_{12} = -\overline{A}^{\mathsf{T}} M^{-1} + e^{-2\alpha h_2}R, \quad \Phi_{14} = -\overline{A}^{\mathsf{T}} M^{-1} + P - M^{-1},$$
$$\Phi_{22} = -e^{-2\alpha h_2}R - e^{-2\alpha h_2}S + GX_1^{-1}G, \quad \Phi_{33} = -e^{-2\alpha h_1}Q - e^{-2\alpha h_2}S$$
$$\Phi_{44} = h_2^2 R + (h_2 - h_1)^2 S - 2M^{-1}.$$

Bây giờ ta nhân cả bên trái và bên phải của ma trận khối Φ với ma trận

$$\Theta = \mathrm{diag}\{M, M, M, M, M, M, M\},$$

đặt $\overline{P} = MPM, \overline{Q} = MQM, \overline{R} = MRM, \overline{S} = MSM$, và chọn hàm điều khiển ngược $u(t) = Kx(t)$, với $K = YM^{-1}$, ta thu được

$$\begin{aligned}\mathcal{L} =& \Theta\Phi\Theta \\ =& \begin{bmatrix} \overline{\Psi}_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} & \Psi_{14} & W_0M & W_1M & kW_2M \\ * & \overline{\Psi}_{22} & e^{-2\alpha h_2}\overline{S} & -M & W_0M & W_1M & kW_2M \\ * & * & \Psi_{33} & -M & W_0M & W_1M & kW_2M \\ * & * & * & \Psi_{44} & W_0M & W_1M & kW_2M \\ * & * & * & * & -MX_0^{-1}M & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -MX_1^{-1}M & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -ke^{-2\alpha k}MX_2^{-1}M \end{bmatrix},\end{aligned} \tag{2.20}$$

ở đó

$$\begin{aligned}\overline{\Psi}_{11} &= \overline{Q} + 2\alpha\overline{P} - e^{-2\alpha h_2}\overline{R} - MA^{\mathsf{T}} - AM + BY \\ &\quad + Y^{\mathsf{T}}B^{\mathsf{T}} + MFX_0^{-1}FM + kMHX_2^{-1}HM, \\ \overline{\Psi}_{13} &= -MA^{\mathsf{T}} + Y^{\mathsf{T}}B^{\mathsf{T}}, \\ \overline{\Psi}_{22} &= -e^{-2\alpha h_2}\overline{R} - e^{-2\alpha h_2}\overline{S} + MGX_1^{-1}GM.\end{aligned}$$

Từ bất đẳng thức ma trận $(M - X_i)X_i^{-1}(M - X_i) \geq 0, i = 0, 1, 2,$ ta có đánh giá sau:

$$-MX_i^{-1}M \leq X_i - 2M, \quad i = 0, 1, 2. \tag{2.21}$$

Chú ý rằng $\Phi < 0$ tương đương với điều kiện $\mathcal{L} < 0$. Do đó, sử dụng Bổ đề Schur và điều kiện (2.21), ta có điều kiện $\mathcal{L} < 0$ tương đương với điều kiện (2.19). Từ đó ta có điều phải chứng minh.

□

Nhận xét 2.3 Định lý 2.2 đưa ra một điều kiện đủ cho tính ổn định hóa được dạng mũ cho mô hình mạng nơ ron mô tả bởi hệ phương trình vi phân có độ trễ biến thiên hỗn hợp dưới dạng các bất đẳng thức ma trận tuyến tính. Đồng thời, định lý cũng đưa ra một công thức xác định hàm điều khiển ngược một cách tường minh. Với cách xây dựng hàm Lyapunov–Krasovskii mới trong đó có chứa các cận trên và cận dưới của độ trễ và đặc biệt không chứa thành phần $\int_{t-h(t)}^{t} x^{\mathsf{T}}(s)Ux(s)\,ds$, với U là một ma trận đối xứng, xác định dương như ở các công trình [51], [71] nên điều kiện đủ mà chúng tôi đề xuất không đòi hỏi tính khả vi của độ trễ.

Sau đây, chúng tôi đưa ra hai ví dụ số minh họa cho các Định lý 2.1 và Định lý 2.2.

Ví dụ 2.1 Xét mô hình mạng nơ ron mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ hỗn hợp (2.1) với các hàm trễ

$$\begin{cases} h(t) = 0.1 + 0.9\sin t & \text{nếu} \quad t \in \mathcal{I} = \cup_{k\geq 0}[2k\pi, (2k+1)\pi] \\ h(t) = 0.1 & \text{nếu} \quad t \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathcal{I}, \end{cases}$$

$$k(t) = 0.9|\sin t|,$$

và các ma trận trạng thái

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, W_0 = \begin{bmatrix} 1.2 & -0.8 & 0.6 \\ 0.5 & -1.5 & 0.7 \\ -0.8 & -1.2 & -1.4 \end{bmatrix},$$
$$W_1 = \begin{bmatrix} -1.4 & 0.9 & 0.5 \\ -0.6 & 1.2 & 0.8 \\ 0.5 & -0.7 & 1.1 \end{bmatrix}, W_2 = \begin{bmatrix} 1.8 & 0.7 & -0.8 \\ 0.6 & 1.4 & 1 \\ -0.4 & -0.6 & 1.2 \end{bmatrix}.$$

Các hàm kích hoạt thỏa mãn điều kiện (2.2) với các hệ số tăng trưởng được viết gọn dưới dạng:

$$F = \mathrm{diag}\{0.2; 0.1; 0.3\},\ G = \mathrm{diag}\{0.2; 0.1; 0.3\},$$
$$H = \mathrm{diag}\{0.1; 0.3; 0.2\}.$$

Chú ý rằng các hàm trễ $h(t), k(t)$ là không khả vi. Do đó các tiêu chuẩn ổn định được đưa ra trong các bài báo [9, 41, 44, 52, 68, 85, 91] là không thể áp dụng được cho lớp hệ này.

Ta có $h_1 = 0.1, h_2 = 1, k = 0.9$. Lấy $\alpha = 0.5$ và hàm điều kiện ban đầu $\phi(t) \in C^1([-1, 0], \mathbb{R}^2)$ bất kì, khi đó các điều kiện trong Định lý 2.1 được thỏa mãn với

$$P = \begin{bmatrix} 225.2266 & -136.9227 & 88.2803 \\ -136.9227 & 209.1757 & -72.6955 \\ 88.2803 & -72.6955 & 214.4175 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 23.4071 & -14.8192 & 7.6701 \\ -14.8192 & 23.5164 & -7.7946 \\ 7.6701 & -7.7946 & 20.2922 \end{bmatrix},$$
$$Q = \begin{bmatrix} 159.3561 & -24.9029 & 3.7943 \\ -24.9029 & 147.3229 & -5.1176 \\ 3.7943 & -5.1176 & 178.9078 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 17.9542 & -13.2501 & 8.0433 \\ -13.2501 & 19.1453 & -7.1901 \\ 8.0433 & -7.1901 & 13.1656 \end{bmatrix},$$
$$D_0 = \begin{bmatrix} 312.9065 & 0 & 0 \\ 0 & 351.6339 & 0 \\ 0 & 0 & 347.9319 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 125.0585 & 0 & 0 \\ 0 & 258.0210 & 0 \\ 0 & 0 & 80.8634 \end{bmatrix},$$
$$D_2 = \begin{bmatrix} 579.1959 & 0 & 0 \\ 0 & 510.0544 & 0 \\ 0 & 0 & 602.3008 \end{bmatrix}, N_1 = \begin{bmatrix} 50.3054 & -15.3981 & 7.4437 \\ -14.2776 & 60.6923 & -6.3575 \\ 6.2282 & -5.8176 & 47.2349 \end{bmatrix},$$
$$N_2 = \begin{bmatrix} 1.1515 & -0.8492 & 0.5099 \\ -1.0296 & 1.4991 & -0.5459 \\ 0.4410 & -0.3871 & 0.7441 \end{bmatrix}, N_3 = \begin{bmatrix} 0.0019 & -0.0024 & -0.0004 \\ 0.0040 & -0.0057 & 0.0006 \\ 0.0004 & -0.0007 & 0.0005 \end{bmatrix},$$
$$N_4 = \begin{bmatrix} 36.2516 & -21.4261 & 14.0358 \\ -25.9443 & 39.8460 & -13.8050 \\ 11.8691 & -9.5680 & 30.0367 \end{bmatrix}.$$

Theo Định lý 2.1, hệ đã cho là ổn định mũ với tốc độ mũ $\alpha = 0.5$. Hơn nữa, ta có nghiệm $x(t,\phi)$ bất kì của hệ thỏa mãn đánh giá sau:

$$\|x(t,\phi)\| \le 2.5010e^{-0.5t}\|\phi\|_{C^1}, \quad \forall t \ge 0.$$

Ví dụ 2.2 Xét mô hình mạng nơ ron mô tả bởi hệ điều khiển có trễ hỗn hợp (2.17) với hàm trễ

$$h(t) = 0.1 + 0.4|\sin t|,$$
$$\begin{cases} k(t) = 0.4\cos t \quad \text{nếu} \quad t \in \mathcal{I} = \cup_{l\ge 0}[2l\frac{\pi}{2}, (2l+1)\frac{\pi}{2}] \\ k(t) = 0 \qquad\qquad\quad \text{nếu} \quad t \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathcal{I}, \end{cases}$$

và các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 0.15 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, W_0 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.12 \\ 0.1 & -0.3 \end{bmatrix},$$
$$W_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, W_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.5 & 0.1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Các hàm kích hoạt thỏa mãn điều kiện (2.2) với các hệ số tăng trưởng được viết gọn dưới dạng:

$$F = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}.$$

Chú ý rằng các hàm trễ $h(t), k(t)$ là không khả vi. Vì vậy, các tiêu chuẩn ổn định hóa đề xuất trong các bài báo [7, 48, 51, 71] là không thể áp dụng cho hệ được xét trong ví dụ này. Ta có $h_1 = 0.1, h_2 = 0.5, k = 1.4$. Cho trước số $\alpha = 0.5$ và hàm điều kiện ban đầu bất kì $\phi(t) \in C^1([-1.4, 0], \mathbb{R}^2)$. Sử dụng hộp công cụ Matlab (Matlab LMI toolbox) [21], ta tìm được một nghiệm của bất đẳng thức ma trận tuyến tính (2.19) trong Định lý 2.2 là:

$$M = \begin{bmatrix} 48.0355 & -1.0130 \\ -1.0130 & 213.9105 \end{bmatrix}, \overline{P} = \begin{bmatrix} 109.6419 & 1.2728 \\ 1.2728 & 427.2407 \end{bmatrix},$$
$$\overline{Q} = \begin{bmatrix} 108.6833 & 0.7528 \\ 0.7528 & 310.8815 \end{bmatrix}, \overline{R} = \begin{bmatrix} 151.4748 & 3.5048 \\ 3.5048 & 592.7377 \end{bmatrix},$$
$$\overline{S} = \begin{bmatrix} 49.7315 & 3.2002 \\ 3.2002 & 216.5776 \end{bmatrix}, X_0 = \begin{bmatrix} 39.7293 & 0 \\ 0 & 227.9768 \end{bmatrix},$$
$$X_1 = \begin{bmatrix} 48.5856 & 0 \\ 0 & 177.2406 \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} 19.0467 & 0 \\ 0 & 189.1716 \end{bmatrix},$$
$$Y = \begin{bmatrix} -103.6809 & -24.0034 \end{bmatrix}.$$

Do đó, theo Định lý 2.2, hệ (2.17) là 0.5-ổn định hóa được dạng mũ với hàm điều khiển ngược được cho bởi

$$u(t) = YM^{-1}x(t) = [-2.1610 \quad -0.1224]x(t).$$

Ngoài ra, nghiệm bất kì $x(t,\phi)$ của hệ đóng thỏa mãn đánh giá

$$\|x(t,\phi)\| \le 2.6216e^{-0.5t}\|\phi\|_{C^1}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

2.2. Tính ổn định hóa được dạng mũ cho hệ phương trình vi phân có trễ biến thiên với nhiễu phi tuyến

Xét hệ điều khiển có nhiễu phi tuyến có trễ biến thiên

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Dx(t-h(t)) + f(t,x(t)) + g(t,x(t-h(t))) + Bu(t) \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-h_2, 0], \end{cases} \tag{2.22}$$

ở đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véctơ trạng thái; $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là véctơ điều khiển; A, D và B là các ma trận thực cho trước có số chiều thích hợp và $\phi \in C^1([-h_2,0],\mathbb{R}^n)$ là hàm điều kiện ban đầu với chuẩn cho bởi $\|\phi\|_{C^1} = \sup\limits_{t\in[-h_2,0]}\{\|\phi(t)\|, \|\dot{\phi}(t)\|\}$. Độ trễ $h(t)$ là hàm biến thiên dạng khoảng

$$0 < h_1 \le h(t) \le h_2, \tag{2.23}$$

ở đó h_1 và h_2 lần lượt là cận dưới và cận trên của hàm trễ. Trong mục này, chúng tôi xét hàm trễ $h(t)$ thỏa mãn một trong hai điều kiện (i) hoặc (ii) như sau.

(i) $\dot{h}(t) \le \delta < 1$ trong đó δ là một số thực dương.

(ii) $h(t)$ là hàm liên tục nhưng không khả vi.

Đồng thời chúng tôi cũng nghiên cứu hai dạng thường gặp của các nhiễu phi tuyến $f(t,x(t))$, $g(t,x(t-h(t)))$. Đó là

(i) Nhiễu phi tuyến $f(t,x(t)), g(t,x(t-h(t)))$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz toàn cục sao cho

$$f^{\mathsf{T}}(t,x(t))f(t,x(t)) \le a^2x^{\mathsf{T}}(t)F^{\mathsf{T}}Fx(t), \tag{2.24}$$

$$g^{\mathsf{T}}(t,x(t-h(t)))g(t,x(t-h(t))) \le d^2x^{\mathsf{T}}(t-h(t))G^{\mathsf{T}}Gx(t-h(t)), \tag{2.25}$$

trong đó F và G là các ma trận hằng cho trước có số chiều thích hợp, a và d là các số thực dương cho trước.

Các nhiễu phi tuyến $f(t,x(t)), g(t,x(t-h(t)))$ thỏa mãn các điều kiện (2.24) và (2.25) đã được nghiên cứu trong các công trình của Q.L. Han [27], O.M. Kwon cùng các cộng sự [42], P.L. Liu [50], W. Zhang cùng các cộng sự [94].

(ii) Nhiễu phi tuyến $f(t, x(t)), g(t, x(t-h(t)))$ được biểu diễn dưới dạng

$$f(t, x(t)) = \Delta A(t)x(t), \tag{2.26}$$
$$g(t, x(t-h(t))) = \Delta D(t)x(t-h(t)), \tag{2.27}$$

trong đó

$$\Delta A(t) = E_1F_1(t)H_1, \quad \Delta D(t) = E_2F_2(t)H_2, \tag{2.28}$$

với E_1, E_2, H_1, H_2 là các ma trận thực cho trước có số chiều thích hợp, và $F_1(t), F_2(t)$ là các ma trận thực không biết nhưng chúng thỏa mãn điều kiện

$$F_i^{\mathsf{T}}(t)F_i(t) \leq I, \ i = 1, 2. \tag{2.29}$$

Nhiễu phi tuyến có dạng cấu trúc (2.26)-(2.27) đã được quan tâm nghiên cứu trong các công trình của L.V. Hien và V.N. Phat [29], T. Li, L. Guo và Y. Zhang [45]. Tuy nhiên trong các kết quả này, các tác giả mới chỉ nghiên cứu bài toán ổn định hóa cho lớp hệ này trong trường hợp độ trễ là hàm khả vi liên tục.

Trong mục này, ta sẽ thiết kế một điều khiển ngược $u(t) = Kx(t)$ sao cho hệ đóng sau

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \big(A + BK\big)x(t) + Dx(t-h(t)) + f(t, x(t)) + g(t, x(t-h(t))), \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-h_2, 0] \end{cases} \tag{2.30}$$

là $\alpha-$ổn định mũ.

Với điều khiển ngược được thiết kế dạng $u(t) = Kx(t)$ thì hệ đóng (2.30), trong đó các nhiễu phi tuyến $f(t, x(t))$ và $g(t, x(t-h(t)))$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz toàn cục và thỏa mãn điều kiện tăng trưởng (2.24)-(2.25), là tồn tại và duy nhất nghiệm trên $[0, +\infty)$ theo Định lý 1.6 trong Chương 1 của luận án.

Trước hết, ta nghiên cứu bài toán ổn định hóa được dạng mũ cho lớp hệ điều khiển có trễ biến thiên dạng khoảng với nhiễu phi tuyến (2.22) trong trường hợp nhiễu phi tuyến thỏa mãn điều kiện tăng trưởng (2.24) và (2.25).

Cho số $\alpha > 0$, các ma trận đối xứng, xác định dương $P, Q_1, Q_2, Q_3, S_1, S_2, S_3, S_4, R_1, R_2$ và ma trận Y. Đặt

$$\lambda = \lambda_{\min}(P^{-1}),$$
$$\begin{aligned}\Lambda &= \lambda_{\max}(P^{-1}) + h_1\lambda_{\max}(P^{-1}Q_1P^{-1}) + h_2\lambda_{\max}(P^{-1}Q_2P^{-1})\\ &\quad + (h_2-h_1)\lambda_{\max}(P^{-1}Q_3P^{-1}) + \frac{1}{2}h_1^2\big[\lambda_{\max}(P^{-1}S_1P^{-1}) + \lambda_{\max}(P^{-1}S_3P^{-1})\big]\\ &\quad + \frac{1}{2}(h_2^2-h_1^2)\big[\lambda_{\max}(P^{-1}S_2P^{-1}) + \lambda_{\max}(P^{-1}S_4P^{-1})\big]\\ &\quad + \frac{1}{6}h_1^3\lambda_{\max}(P^{-1}R_1P^{-1}) + \frac{1}{6}(h_2^3-h_1^3)\lambda_{\max}(P^{-1}R_2P^{-1}),\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\Xi_{11} &= AP + PA^{\mathsf{T}} + BY + Y^{\mathsf{T}}B^{\mathsf{T}} + 2\alpha P + 2I + Q_1 + Q_2 + h_1S_3 + (h_2-h_1)S_4\\ &\quad - \frac{1}{h_1}e^{-2\alpha h_1}S_1 - 2e^{-4\alpha h_1}R_1 - 2\frac{h_2-h_1}{h_2+h_1}e^{-4\alpha h_2}R_2,\end{aligned}$$
$$\Xi_{22} = -(1-\delta)e^{-2\alpha h_2}Q_2 - \frac{2}{h_2-h_1}e^{-2\alpha h_2}S_2,$$
$$\Xi_{33} = -e^{-2\alpha h_2}Q_3 - \frac{1}{h_2-h_1}e^{-2\alpha h_2}S_2,$$
$$\Xi_{44} = e^{-2\alpha h_1}Q_3 - e^{-2\alpha h_1}Q_1 - \frac{1}{h_1}e^{-2\alpha h_1}S_1 - \frac{1}{h_2-h_1}e^{-2\alpha h_2}S_2,$$
$$\Xi_{55} = -\frac{1}{h_1}e^{-2\alpha h_1}S_3 - \frac{2}{h_1^2}e^{-4\alpha h_1}R_1,$$
$$\Xi_{66} = -\frac{1}{h_2-h_1}e^{-2\alpha h_2}S_4 - \frac{2}{h_2^2-h_1^2}e^{-4\alpha h_2}R_2,$$
$$\Xi_{77} = h_1S_1 + (h_2-h_1)S_2 + \frac{1}{2}h_1^2R_1 + \frac{1}{2}(h_2^2-h_1^2)R_2 + 2I - 2P,$$
$$\Xi_{14} = \frac{1}{h_1}e^{-2\alpha h_1}S_1,\ \Xi_{15} = \frac{2}{h_1}e^{-4\alpha h_1}R_1,\ \Xi_{16} = \frac{2}{h_2+h_1}e^{-4\alpha h_2}R_2,$$
$$\Xi_{17} = PA^{\mathsf{T}} + Y^{\mathsf{T}}B^{\mathsf{T}},\ \Xi_{23} = \Xi_{24} = \frac{1}{h_2-h_1}e^{-2\alpha h_2}S_2.$$

Định lý sau đây cho ta một tiêu chuẩn ổn định hóa được dạng mũ cho lớp hệ điều khiển có trễ biến thiên dạng khoảng với nhiễu phi tuyến (2.22) trong trường hợp các nhiễu phi tuyến thỏa mãn điều kiện tăng trưởng (2.24), (2.25) và độ trễ $h(t)$ là hàm biến thiên dạng khoảng thỏa mãn điều kiện (2.23) và điều kiện $\dot{h}(t) \le \delta < 1$.

Định lý 2.3 *Cho $\alpha > 0, h_2 > h_1 > 0, 0 \le \delta < 1$. Giả sử rằng các ma trận hệ số của hệ (2.22) thỏa mãn điều kiện sau: tồn tại các ma trận thực đối xứng, xác định dương $P, Q_1, Q_2, Q_3,\ S_1, S_2, S_3, S_4, R_1, R_2$ và một ma trận Y sao cho* *bất đẳng thức ma trận tuyến tính sau được thỏa mãn*

$$\begin{bmatrix} \Xi_{11} & DP & 0 & \Xi_{14} & \Xi_{15} & \Xi_{16} & \Xi_{17} & a^2PF^{\mathsf{T}} & 0 \\ * & \Xi_{22} & \Xi_{23} & \Xi_{24} & 0 & 0 & PD^{\mathsf{T}} & 0 & d^2PG^{\mathsf{T}} \\ * & * & \Xi_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Xi_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Xi_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \Xi_{66} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \Xi_{77} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\frac{1}{2}a^2I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\frac{1}{2}d^2I \end{bmatrix} < 0. \qquad (2.31)$$

Khi đó hệ (2.22) là $\alpha-$ổn định hóa được dạng mũ. Ngoài ra, điều khiển ngược ổn định hóa hệ (2.22) được cho bởi công thức

$$u(t) = YP^{-1}x(t), \quad t \geq 0,$$

và nghiệm bất kì $x(t,\phi)$ của hệ đóng thỏa mãn đánh giá sau

$$\|x(t,\phi)\| \leq \sqrt{\frac{\Lambda}{\lambda}} e^{-\alpha t}\|\phi\|_{C^1}, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Chứng minh. Đặt

$$\begin{aligned} &\overline{Q_i} = P^{-1}Q_iP^{-1}, i = 1,2,3, \ \overline{S_j} = P^{-1}S_jP^{-1}, j = 1,2,3,4, \\ &\overline{R_1} = P^{-1}R_1P^{-1}, \ \overline{R_2} = P^{-1}R_2P^{-1}. \end{aligned}$$

Xét hàm Lyapunov–Krasovskii cho hệ (2.30) như sau

$$V(t,x_t) = \sum_{i=1}^{5} V_i(t,x_t),$$

trong đó

$$\begin{aligned} V_1(t,x_t) &= x^{\mathsf{T}}(t)P^{-1}x(t), \\ V_2(t,x_t) &= \int_{t-h_1}^{t} e^{2\alpha(s-t)}x^{\mathsf{T}}(s)\overline{Q_1}x(s)\,ds + \int_{t-h(t)}^{t} e^{2\alpha(s-t)}x^{\mathsf{T}}(s)\overline{Q_2}x(s)\,ds \\ &\quad + \int_{t-h_2}^{t-h_1} e^{2\alpha(s-t)}x^{\mathsf{T}}(s)\overline{Q_3}x(s)\,ds, \\ V_3(t,x_t) &= \int_{-h_1}^{0}\int_{t+s}^{t} e^{2\alpha(\tau-t)}\dot{x}^{\mathsf{T}}(\tau)\overline{S_1}\dot{x}(\tau)\,d\tau\,ds \\ &\quad + \int_{-h_2}^{-h_1}\int_{t+s}^{t} e^{2\alpha(\tau-t)}\dot{x}^{\mathsf{T}}(\tau)\overline{S_2}\dot{x}(\tau)\,d\tau\,ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_4(t, x_t) &= \int_{-h_1}^{0} \int_{t+s}^{t} e^{2\alpha(\tau - t)} x^{\mathsf{T}}(\tau) \overline{S_3} x(\tau)\, d\tau\, ds \\ &\quad + \int_{-h_2}^{-h_1} \int_{t+s}^{t} e^{2\alpha(\tau - t)} x^{\mathsf{T}}(\tau) \overline{S_4} x(\tau)\, d\tau\, ds \\ V_5(t, x_t) &= \int_{-h_1}^{0} \int_{\theta}^{0} \int_{t+s}^{t} e^{2\alpha(\tau + s - t)} \dot{x}^{\mathsf{T}}(\tau) \overline{R_1} \dot{x}(\tau)\, d\tau\, ds\, d\theta \\ &\quad + \int_{-h_2}^{-h_1} \int_{\theta}^{0} \int_{t+s}^{t} e^{2\alpha(\tau + s - t)} \dot{x}^{\mathsf{T}}(\tau) \overline{R_2} \dot{x}(\tau)\, d\tau\, ds\, d\theta. \end{aligned}$$

Lấy đạo hàm $V_1(t, x_t)$ theo t dọc theo nghiệm của hệ đóng (2.30), ta có

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t, x_t) &= x^{\mathsf{T}}(t) \Big[P^{-1}(A + BK) + (A + BK)^{\mathsf{T}} P^{-1} \Big] x(t) \\ &\quad + 2x^{\mathsf{T}}(t) P^{-1} D x(t - h(t)) \\ &\quad + 2x^{\mathsf{T}}(t) P^{-1} f(t, x(t)) + 2x^{\mathsf{T}}(t) P^{-1} g(t, x(t - h(t))). \end{aligned} \tag{2.32}$$

Áp dụng Bổ đề 1.1, ta có các đánh giá sau

$$\begin{aligned} 2x^{\mathsf{T}}(t) P^{-1} f(t, x(t)) &\le x^{\mathsf{T}}(t) P^{-1} P^{-1} x(t) + f^{\mathsf{T}}(t, x(t)) f(t, x(t)) \\ &\le x^{\mathsf{T}}(t) P^{-1} P^{-1} x(t) + a^2 x^{\mathsf{T}}(t) F^{\mathsf{T}} F x(t), \end{aligned} \tag{2.33}$$

và

$$\begin{aligned} & 2x^{\mathsf{T}}(t) P^{-1} g(t, x(t - h(t))) \\ & \le x^{\mathsf{T}}(t) P^{-1} P^{-1} x(t) + g^{\mathsf{T}}(t, x(t - h(t))) g(t, x(t - h(t))) \\ & \le x^{\mathsf{T}}(t) P^{-1} P^{-1} x(t) + d^2 x^{\mathsf{T}}(t - h(t)) G^{\mathsf{T}} G x(t - h(t)). \end{aligned} \tag{2.34}$$

Từ các điều kiện (2.32), (2.33) và (2.34), ta có

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t, x_t) &= x^{\mathsf{T}}(t) \Big[P^{-1}(A + BK) + (A + BK)^{\mathsf{T}} P^{-1} + 2P^{-1} P^{-1} \\ &\quad + a^2 F^{\mathsf{T}} F \Big] x(t) + d^2 x^{\mathsf{T}}(t - h(t)) G^{\mathsf{T}} G x(t - h(t)). \end{aligned} \tag{2.35}$$

Đạo hàm $V_i(t, x_t), i = 2, 3, 4, 5$ theo t dọc theo nghiệm của hệ đóng (2.30), ta có

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t, x_t) &\le -2\alpha V_2(t, x_t) + x^{\mathsf{T}}(t) \Big[\overline{Q_1} + \overline{Q_2} \Big] x(t) \\ &\quad - e^{-2\alpha h_1} x^{\mathsf{T}}(t - h_1) \overline{Q_1} x(t - h_1) \\ &\quad - (1 - \delta) e^{-2\alpha h_2} x^{\mathsf{T}}(t - h(t)) \overline{Q_2} x(t - h(t)) \\ &\quad + e^{-2\alpha h_1} x^{\mathsf{T}}(t - h_1) \overline{Q_3} x(t - h_1) - e^{-2\alpha h_2} x^{\mathsf{T}}(t - h_2) \overline{Q_3} x(t - h_2); \end{aligned} \tag{2.36}$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_3(t,x_t) \le& -2\alpha V_3(t,x_t) + \dot{x}^{\mathsf{T}}(t)\Big[h_1\overline{S_1} + (h_2-h_1)\overline{S_2}\Big]\dot{x}(t)\\ &- e^{-2\alpha h_1}\int_{t-h_1}^{t}\dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{S_1}\dot{x}(s)\,ds - e^{-2\alpha h_2}\int_{t-h_2}^{t-h_1}\dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{S_2}\dot{x}(s)\,ds;\end{aligned} \tag{2.37}$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_4(t,x_t) \le& -2\alpha V_4(t,x_t) + x^{\mathsf{T}}(t)\Big[h_1\overline{S_3} + (h_2-h_1)\overline{S_4}\Big]x(t)\\ &- e^{-2\alpha h_1}\int_{t-h_1}^{t}x^{\mathsf{T}}(s)\overline{S_3}x(s)\,ds - e^{-2\alpha h_2}\int_{t-h_2}^{t-h_1}x^{\mathsf{T}}(s)\overline{S_4}x(s)\,ds;\end{aligned} \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_5(t,x_t) \le& -2\alpha V_5(t,x_t) + \dot{x}^{\mathsf{T}}(t)\Big[\frac{1}{2}h_1^2\overline{R_1} + \frac{1}{2}(h_2^2-h_1^2)\overline{R_2}\Big]\dot{x}(t)\\ &- e^{-4\alpha h_1}\int_{-h_1}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{R_1}\dot{x}(s)\,ds\,d\theta\\ &- e^{-4\alpha h_2}\int_{-h_2}^{-h_1}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{R_2}\dot{x}(s)\,ds\,d\theta.\end{aligned} \tag{2.39}$$

Từ các điều kiện (2.35)–(2.39), ta thu được đánh giá sau

$$\begin{aligned}&\dot{V}(t,x_t) + 2\alpha V(t,x_t)\\ &\le x^{\mathsf{T}}(t)\Big[P^{-1}(A+BK) + (A+BK)^{\mathsf{T}}P^{-1} + 2\alpha P^{-1} + 2P^{-1}P^{-1}\\ &\quad + a^2F^{\mathsf{T}}F + \overline{Q_1} + \overline{Q_2} + h_1\overline{S_3} + (h_2-h_1)\overline{S_4}\Big]x(t)\\ &\quad + x^{\mathsf{T}}(t-h(t))\Big[d^2G^{\mathsf{T}}G - (1-\delta)e^{-2\alpha h_2}\overline{Q_2}\Big]x(t-h(t))\\ &\quad + x^{\mathsf{T}}(t-h_1)\Big[e^{-2\alpha h_1}\overline{Q_3} - e^{-2\alpha h_1}\overline{Q_1}\Big]x(t-h_1)\\ &\quad + x^{\mathsf{T}}(t-h_2)\Big[-e^{-2\alpha h_2}\overline{Q_3}\Big]x(t-h_2)\\ &\quad + \dot{x}^{\mathsf{T}}(t)\Big[h_1\overline{S_1} + (h_2-h_1)\overline{S_2} + \frac{1}{2}h_1^2\overline{R_1} + \frac{1}{2}(h_2^2-h_1^2)\overline{R_2}\Big]\dot{x}(t)\\ &\quad + 2x^{\mathsf{T}}(t)P^{-1}Dx(t-h(t)) - e^{-2\alpha h_1}\int_{t-h_1}^{t}\dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{S_1}\dot{x}(s)\,ds\\ &\quad - e^{-2\alpha h_2}\int_{t-h_2}^{t-h_1}\dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{S_2}\dot{x}(s)\,ds\\ &\quad - e^{-2\alpha h_1}\int_{t-h_1}^{t}x^{\mathsf{T}}(s)\overline{S_3}x(s)\,ds\\ &\quad - e^{-2\alpha h_2}\int_{t-h_2}^{t-h_1}x^{\mathsf{T}}(s)\overline{S_4}x(s)\,ds\\ &\quad - e^{-4\alpha h_1}\int_{-h_1}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{R_1}\dot{x}(s)\,ds\,d\theta - e^{-4\alpha h_2}\int_{-h_2}^{-h_1}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{R_2}\dot{x}(s)\,ds\,d\theta.\end{aligned} \tag{2.40}$$

Áp dụng Bổ đề 1.2, ta có các đánh giá sau

$$\begin{aligned} &- e^{-2\alpha h_1}\int_{t-h_1}^{t} \dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{S_1}\dot{x}(s)\,ds \\ &\leq -\frac{1}{h_1}\Big[x(t)-x(t-h_1)\Big]^{\mathsf{T}} e^{-2\alpha h_1}\overline{S_1}\Big[x(t)-x(t-h_1)\Big]; \end{aligned} \tag{2.41}$$

$$\begin{aligned} &- e^{-2\alpha h_2}\int_{t-h_2}^{t-h_1} \dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{S_2}\dot{x}(s)\,ds \\ &= -e^{-2\alpha h_2}\int_{t-h_2}^{t-h(t)} \dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{S_2}\dot{x}(s)\,ds - e^{-2\alpha h_2}\int_{t-h(t)}^{t-h_1} \dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{S_2}\dot{x}(s)\,ds \\ &\leq -\frac{1}{h_2-h_1}\Big(\int_{t-h_2}^{t-h(t)} \dot{x}(s)\,ds\Big)^{\mathsf{T}} e^{-2\alpha h_2}\overline{S_2}\Big(\int_{t-h_2}^{t-h(t)} \dot{x}(s)\,ds\Big) \\ &\quad -\frac{1}{h_2-h_1}\Big(\int_{t-h(t)}^{t-h_1} \dot{x}(s)\,ds\Big)^{\mathsf{T}} e^{-2\alpha h_2}\overline{S_2}\Big(\int_{t-h(t)}^{t-h_1} \dot{x}(s)\,ds\Big) \\ &= -\frac{1}{h_2-h_1}\Big[x(t-h(t))-x(t-h_2)\Big]^{\mathsf{T}} e^{-2\alpha h_2}\overline{S_2}\Big[x(t-h(t))-x(t-h_2)\Big] \\ &\quad -\frac{1}{h_2-h_1}\Big[x(t-h_1)-x(t-h(t))\Big]^{\mathsf{T}} e^{-2\alpha h_2}\overline{S_2}\Big[x(t-h_1)-x(t-h(t))\Big]; \end{aligned} \tag{2.42}$$

$$\begin{aligned} &- e^{-2\alpha h_1}\int_{t-h_1}^{t} x^{\mathsf{T}}(s)\overline{S_3}x(s)\,ds \\ &\leq -\frac{1}{h_1}\Big(\int_{t-h_1}^{t} x(s)\,ds\Big)^{\mathsf{T}} e^{-2\alpha h_1}\overline{S_3}\Big(\int_{t-h_1}^{t} x(s)\,ds\Big) \\ &= -\frac{1}{h_1}\Big(\int_{t-h_1}^{t} x(\theta)\,d\theta\Big)^{\mathsf{T}} e^{-2\alpha h_1}\overline{S_3}\Big(\int_{t-h_1}^{t} x(\theta)\,d\theta\Big); \end{aligned} \tag{2.43}$$

$$\begin{aligned} &- e^{-2\alpha h_2}\int_{t-h_2}^{t-h_1} x^{\mathsf{T}}(s)\overline{S_4}x(s)\,ds \\ &\leq -\frac{1}{h_2-h_1}\Big(\int_{t-h_2}^{t-h_1} x(s)\,ds\Big)^{\mathsf{T}} e^{-2\alpha h_2}\overline{S_4}\Big(\int_{t-h_2}^{t-h_1} x(s)\,ds\Big) \\ &= -\frac{1}{h_2-h_1}\Big(\int_{t-h_2}^{t-h_1} x(\theta)\,d\theta\Big)^{\mathsf{T}} e^{-2\alpha h_2}\overline{S_4}\Big(\int_{t-h_2}^{t-h_1} x(\theta)\,d\theta\Big); \end{aligned} \tag{2.44}$$

$$\begin{aligned} &- e^{-4\alpha h_1}\int_{-h_1}^{0}\int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{R_1}\dot{x}(s)\,ds\,d\theta \\ &\leq -\frac{2}{h_1^2}\Big(\int_{-h_1}^{0}\int_{t+\theta}^{t} \dot{x}(s)\,ds\,d\theta\Big)^{\mathsf{T}} e^{-4\alpha h_1}\overline{R_1}\Big(\int_{-h_1}^{0}\int_{t+\theta}^{t} \dot{x}(s)\,ds\,d\theta\Big) \\ &= -\frac{2}{h_1^2}\Big[h_1x(t)-\int_{t-h_1}^{t} x(\theta)\,d\theta\Big]^{\mathsf{T}} e^{-4\alpha h_1}\overline{R_1}\Big[h_1x(t)-\int_{t-h_1}^{t} x(\theta)\,d\theta\Big]; \end{aligned} \tag{2.45}$$

$$
\begin{aligned}
&- e^{-4\alpha h_2} \int_{-h_2}^{-h_1} \int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{R_2}\dot{x}(s)\, ds\, d\theta \\
&\leq -\frac{2}{h_2^2 - h_1^2}\bigg(\int_{-h_2}^{-h_1} \int_{t+\theta}^{t} \dot{x}(s)\, ds\, d\theta\bigg)^{\mathsf{T}} e^{-4\alpha h_2}\overline{R_2}\bigg(\int_{-h_2}^{-h_1} \int_{t+\theta}^{t} \dot{x}(s)\, ds\, d\theta\bigg) \\
&= -\frac{2}{h_2^2 - h_1^2}\bigg[(h_2 - h_1)x(t) - \int_{t-h_2}^{t-h_1} x(\theta)\, d\theta\bigg]^{\mathsf{T}} \\
&\qquad \times e^{-4\alpha h_2}\overline{R_2}\bigg[(h_2 - h_1)x(t) - \int_{t-h_2}^{t-h_1} x(\theta)\, d\theta\bigg].
\end{aligned}
\tag{2.46}
$$

Mặt khác, từ phương trình (2.30), ta có

$$
\begin{aligned}
&2\dot{x}^{\mathsf{T}}(t)P^{-1}\Big[(A + BK)x(t) + Dx(t - h(t)) - \dot{x}(t)\Big] \\
&\qquad + 2\dot{x}^{\mathsf{T}}(t)P^{-1}f(t, x(t)) + 2\dot{x}^{\mathsf{T}}(t)P^{-1}g(t, x(t - h(t))) = 0.
\end{aligned}
\tag{2.47}
$$

Áp dụng Bổ đề 1.1 một lần nữa, ta có các đánh giá sau

$$
\begin{aligned}
2\dot{x}^{\mathsf{T}}(t)P^{-1}f(t, x(t)) &\leq \dot{x}^{\mathsf{T}}(t)P^{-1}P^{-1}\dot{x}(t) + f^{\mathsf{T}}(t, x(t))f(t, x(t)) \\
&\leq \dot{x}^{\mathsf{T}}(t)P^{-1}P^{-1}\dot{x}(t) + a^2x^{\mathsf{T}}(t)F^{\mathsf{T}}Fx(t),
\end{aligned}
\tag{2.48}
$$

$$
\begin{aligned}
&2\dot{x}^{\mathsf{T}}(t)P^{-1}g(t, x(t - h(t))) \\
&\leq \dot{x}^{\mathsf{T}}(t)P^{-1}P^{-1}\dot{x}(t) + g^{\mathsf{T}}(t, x(t - h(t)))g(t, x(t - h(t))) \\
&\leq \dot{x}^{\mathsf{T}}(t)P^{-1}P^{-1}\dot{x}(t) + d^2x^{\mathsf{T}}(t - h(t))G^{\mathsf{T}}Gx(t - h(t)).
\end{aligned}
\tag{2.49}
$$

Từ điều kiện (2.40)– (2.49), ta có đánh giá sau

$$
\dot{V}(t, x_t) + 2\alpha V(t, x_t) \leq \xi^{\mathsf{T}}(t)\Omega\xi(t), \tag{2.50}
$$

trong đó

$$
\begin{aligned}
\xi(t) = \bigg[&x^{\mathsf{T}}(t) \quad x^{\mathsf{T}}(t - h(t)) \quad x^{\mathsf{T}}(t - h_2) \quad x^{\mathsf{T}}(t - h_1) \quad \bigg(\int_{t-h_1}^{t} x(\theta)\, d\theta\bigg)^{\mathsf{T}} \\
&\bigg(\int_{t-h_2}^{t-h_1} x(\theta)\, d\theta\bigg)^{\mathsf{T}} \quad \dot{x}^{\mathsf{T}}(t)\bigg]^{\mathsf{T}}
\end{aligned}
$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & P^{-1}D & 0 & \Omega_{14} & \Omega_{15} & \Omega_{16} & \Omega_{17} \\ * & \Omega_{22} & \Omega_{23} & \Omega_{24} & 0 & 0 & D^{\mathsf{T}}P^{-1} \\ * & * & \Omega_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Omega_{44} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Omega_{55} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \Omega_{66} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \Omega_{77} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{11} &= P^{-1}(A+BK) + (A+BK)^{\mathsf{T}}P^{-1} + 2\alpha P^{-1} + 2P^{-1}P^{-1} + 2a^2F^{\mathsf{T}}F + \overline{Q_1} \\
&\quad + \overline{Q_2} + h_1\overline{S_3} + (h_2-h_1)\overline{S_4} - \frac{1}{h_1}e^{-2\alpha h_1}\overline{S_1} - 2e^{-4\alpha h_1}\overline{R_1} - 2\frac{h_2-h_1}{h_2+h_1}e^{-4\alpha h_2}\overline{R_2}, \\
\Omega_{22} &= 2d^2G^{\mathsf{T}}G - (1-\delta)e^{-2\alpha h_2}\overline{Q_2} - \frac{2}{h_2-h_1}e^{-2\alpha h_2}\overline{S_2}, \\
\Omega_{33} &= -e^{-2\alpha h_2}\overline{Q_3} - \frac{1}{h_2-h_1}e^{-2\alpha h_2}\overline{S_2}, \\
\Omega_{44} &= e^{-2\alpha h_1}\overline{Q_3} - e^{-2\alpha h_1}\overline{Q_1} - \frac{1}{h_1}e^{-2\alpha h_1}\overline{S_1} - \frac{1}{h_2-h_1}e^{-2\alpha h_2}\overline{S_2}, \\
\Omega_{55} &= -\frac{1}{h_1}e^{-2\alpha h_1}\overline{S_3} - \frac{2}{h_1^2}e^{-4\alpha h_1}\overline{R_1}, \\
\Omega_{66} &= -\frac{1}{h_2-h_1}e^{-2\alpha h_2}\overline{S_4} - \frac{2}{h_2^2-h_1^2}e^{-4\alpha h_2}\overline{R_2}, \\
\Omega_{77} &= h_1\overline{S_1} + (h_2-h_1)\overline{S_2} + \frac{1}{2}h_1^2\overline{R_1} + \frac{1}{2}(h_2^2-h_1^2)\overline{R_2} + 2P^{-1}P^{-1} - 2P^{-1}, \\
\Omega_{14} &= \frac{1}{h_1}e^{-2\alpha h_1}\overline{S_1},\ \Omega_{15} = \frac{2}{h_1}e^{-4\alpha h_1}\overline{R_1},\ \Omega_{16} = \frac{2}{h_2+h_1}e^{-4\alpha h_2}\overline{R_2}, \\
\Omega_{17} &= (A+BK)^{\mathsf{T}}P^{-1}, \\
\Omega_{23} &= \Omega_{24} = \frac{1}{h_2-h_1}e^{-2\alpha h_2}\overline{S_2}.
\end{aligned}$$

Ta nhân cả bên trái và bên phải của ma trận Ω với ma trận

$$\mathrm{diag}\{P,P,P,P,P,P,P\}$$

và đặt

$$K = YP^{-1}, \tag{2.51}$$

và áp dụng Bổ đề Schur, ta có điều kiện $\Omega < 0$ là tương đương với điều kiện (2.31). Từ đó suy ra

$$\dot{V}(t,x_t) + 2\alpha V(t,x_t) \le 0, \quad \forall t \ge 0. \tag{2.52}$$

Đặt $v(t) = e^{2\alpha t}V(t,x_t)$. Lấy đạo hàm theo thời gian của $v(t)$, ta có

$$\dot{v}(t) = e^{2\alpha t}\left(\dot{V}(t,x_t) + 2\alpha V(t,x_t)\right) \le 0 \tag{2.53}$$

Lấy tích phân hai vế của bất đẳng thức (2.53) từ 0 tới t, ta thu được

$$v(t) - v(0) \leq 0 \Leftrightarrow e^{2\alpha t}V(t, x_t) - V(0, x_0) \leq 0.$$

Từ đó suy ra

$$V(t, x_t) \leq V(0, x_0)e^{-2\alpha t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Bằng các tính toán đơn giản, ta có

$$V(t, x_t) \geq \lambda_{\min}(P^{-1})\|x(t)\|^2 = \lambda\|x(t)\|^2, \quad \forall t \geq 0.$$

và

$$V(0, x_0) \leq \Lambda\|\phi\|^2_{C^1}.$$

Suy ra

$$\lambda\|x(t,\phi)\|^2 \leq V(t, x_t) \leq V(0, x_0)e^{-2\alpha t} \leq \Lambda e^{-2\alpha t}\|\phi\|^2_{C^1},$$

và do đó nghiệm bất kì $x(t, \phi)$ của hệ đóng thỏa mãn đánh giá mũ

$$\|x(t,\phi)\| \leq \sqrt{\frac{\Lambda}{\lambda}}e^{-\alpha t}\|\phi\|_{C^1}, \quad \forall t \geq 0,$$

điều này chứng tỏ hệ đóng (2.30) là $\alpha-$ổn định mũ. Định lý được chứng minh hoàn toàn.

□

Nhận xét 2.4 Bằng cách xây dựng hàm Lyapunov–Krasovskii mới trong đó có chứa các cận trên và cận dưới của độ trễ, tốc độ ổn định mũ α và đặc biệt là tích phân bội ba trong [83], kết hợp với các đánh giá mới (Bổ đề 1.3), Định lý 2.3 đưa ra một điều kiện đủ mới cho tính ổn định hóa được dạng mũ cho lớp hệ điều khiển có trễ biến thiên với nhiễu phi tuyến, trong đó nhiễu phi tuyến thỏa mãn điều kiện tăng trưởng. Đồng thời Định lý 2.3 cũng đưa ra một công thức tường minh để xác định điều khiển ngược ổn định hóa và cho biết các chỉ số ổn định Lyapunov. Ngoài ra, theo như hiểu biết của chúng tôi, đây là một trong những kết quả đầu tiên nghiên cứu bài toán ổn định hóa được dạng mũ cho lớp hệ điều khiển có trễ biến thiên dạng khoảng với nhiễu phi tuyến thỏa mãn điều kiện tăng trưởng (2.24)-(2.25).

Sau đây, chúng tôi đưa ra một ví dụ số minh họa cho Định lý 2.3.

Ví dụ 2.3 Xét hệ điều khiển có nhiễu phi tuyến có trễ biến thiên (2.22), trong đó

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \ D = \begin{bmatrix} -2 & -0.1 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix}, \ F = G = I, \ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\|f(t, x(t))\| \leq 0.1\|x(t)\|, \ \|g(t, x(t - h(t)))\| \leq 0.1\|x(t - h(t))\|,$$

và $h(t) = 0.1 + 0.3\sin^2\frac{5}{3}t$. Ta có $h_1 = 0.1$, $h_2 = 0.4$, $\delta = 0.5$. Trong ví dụ này, ta thấy nhiễu phi tuyến thỏa mãn các điều kiện (2.24), (2.25) với $G = F = I$, $a = 0.1$ và $d = 0.1$. Ta dễ kiểm tra được các ma trận A và $A + D$ là không ổn định. Do đó hệ (2.22) khi không có điều khiển là không ổn định. Cho số $\alpha = 0.2$. Bằng cách sử dụng hộp công cụ Matlab, ta thấy bất đẳng thức ma trận tuyến tính (2.31) trong Định lý 2.3 được thỏa mãn với các ma trận

$$P = \begin{bmatrix} 11.3967 & -0.2577 \\ -0.2577 & 13.2139 \end{bmatrix}, Q_1 = \begin{bmatrix} 0.8090 & 1.7401 \\ 1.7401 & 12.6133 \end{bmatrix}, Q_2 = \begin{bmatrix} 0.0974 & 0.0983 \\ 0.0983 & 0.9995 \end{bmatrix},$$

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 0.6348 & 1.0057 \\ 1.0057 & 4.3166 \end{bmatrix}, S_1 = \begin{bmatrix} 19.2787 & -2.5985 \\ -2.5985 & 14.6220 \end{bmatrix}, S_2 = \begin{bmatrix} 20.5908 & -0.2157 \\ -0.2157 & 9.2005 \end{bmatrix},$$

$$S_3 = \begin{bmatrix} 6.8511 & 0.2863 \\ 0.2863 & 44.7318 \end{bmatrix}, S_4 = \begin{bmatrix} 0.5965 & -0.0064 \\ -0.0064 & 5.2520 \end{bmatrix}, R_1 = \begin{bmatrix} 19.0366 & -7.8298 \\ -7.8298 & 76.8225 \end{bmatrix},$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} 1.5744 & -1.8201 \\ -1.8201 & 14.1727 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 0.8193 & -20.1793 \end{bmatrix}.$$

Do đó, theo Định lý 2.3 hệ đóng là $0.2-$ổn định mũ và nghiệm bất kì $x(t, \phi)$ của hệ đóng (2.30) thỏa mãn đánh giá

$$\|x(t, \phi)\| \leq 1.2776 e^{-0.2t} \|\phi\|_{C^1}.$$

Ngoài ra, điều khiển ngược ổn định hóa hệ (2.22) được cho bởi công thức

$$u(t) = YP^{-1}x(t) = \begin{bmatrix} 0.0374 & -1.5264 \end{bmatrix} x(t).$$

Chú ý rằng khi độ trễ $h(t)$ là biến thiên dạng khoảng và là hàm không khả vi, bằng cách đặt $\overline{Q_2} = 0$ trong $V_2(t, x_t)$, trong hàm Lyapunov–Krasovskii được chọn để chứng minh Định lý 2.3, ta có hệ quả sau đây được suy ra trực tiếp từ định lý đó.

Hệ quả 2.1 *Cho $\alpha > 0, h_2 > h_1 > 0$. Giả sử rằng các ma trận hệ số của hệ (2.22) thỏa mãn điều kiện sau: tồn tại các ma trận đối xứng, xác định dương $P, Q_1, Q_3, S_1, S_2, S_3, S_4, R_1, R_2$ và một ma trận Y sao cho bất đẳng thức ma trận tuyến tính sau được thỏa mãn*

$$\begin{bmatrix} \hat{\Xi}_{11} & DP & 0 & \Xi_{14} & \Xi_{15} & \Xi_{16} & \Xi_{17} & a^2PF^{\mathsf{T}} & 0 \\ * & \hat{\Xi}_{22} & \Xi_{23} & \Xi_{24} & 0 & 0 & PD^{\mathsf{T}} & 0 & d^2PG^{\mathsf{T}} \\ * & * & \Xi_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Xi_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Xi_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \Xi_{66} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \Xi_{77} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\frac{1}{2}a^2I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\frac{1}{2}d^2I \end{bmatrix} < 0, \qquad (2.54)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \hat{\Xi}_{11} &= AP + PA^{\mathsf{T}} + BY + Y^{\mathsf{T}}B^{\mathsf{T}} + 2\alpha P + 2I + Q_1 + h_1S_3 + (h_2 - h_1)S_4 \\ &\quad - \frac{1}{h_1}e^{-2\alpha h_1}S_1 - 2e^{-4\alpha h_1}R_1 - 2\frac{h_2 - h_1}{h_2 + h_1}e^{-4\alpha h_2}R_2, \\ \hat{\Xi}_{22} &= -\frac{2}{h_2 - h_1}e^{-2\alpha h_2}S_2. \end{aligned}$$

Khi đó hệ (2.22) là $\alpha-$ổn định hóa được dạng mũ. Ngoài ra, điều khiển ngược ổn định hóa hệ (2.22) được cho bởi

$$u(t) = YP^{-1}x(t), \quad t \geq 0,$$

và nghiệm bất kì $x(t, \phi)$ của hệ đóng thỏa mãn đánh giá sau

$$\|x(t, \phi)\| \leq \sqrt{\frac{\Lambda_1}{\lambda}}e^{-\alpha t}\|\phi\|_{C^1}, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

trong đó

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \lambda_{\max}(P^{-1}) + h_1\lambda_{\max}(P^{-1}Q_1P^{-1}) + (h_2 - h_1)\lambda_{\max}(P^{-1}Q_3P^{-1}) \\ &\quad + \frac{1}{2}h_1^2\big[\lambda_{\max}(P^{-1}S_1P^{-1}) + \lambda_{\max}(P^{-1}S_3P^{-1})\big] \\ &\quad + \frac{1}{2}(h_2^2 - h_1^2)\big[\lambda_{\max}(P^{-1}S_2P^{-1}) + \lambda_{\max}(P^{-1}S_4P^{-1})\big] \\ &\quad + \frac{1}{6}h_1^3\lambda_{\max}(P^{-1}R_1P^{-1}) + \frac{1}{6}(h_2^3 - h_1^3)\lambda_{\max}(P^{-1}R_2P^{-1}). \end{aligned}$$

Tiếp theo, chúng tôi nghiên cứu bài toán ổn định hóa được dạng mũ cho lớp hệ điều khiển có trễ biến thiên dạng khoảng với nhiễu phi tuyến trong trường hợp các nhiễu phi tuyến $f(t, x(t)), g(t, x(t - h(t)))$ thỏa mãn điều kiện (2.26), (2.27), tương ứng, trong cả hai trường hợp độ trễ $h(t)$ là hàm khả vi và độ trễ $h(t)$ là hàm liên tục nhưng không khả vi.

Hệ (2.30) có nhiễu phi tuyến thỏa mãn các điều kiện (2.26) và (2.27) được viết lại dưới dạng tương đương sau:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [A + E_1F_1(t)H_1 + BK]x(t) + [D + E_2F_2(t)H_2]x(t - h(t)), \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-h_2, 0], \end{cases} \tag{2.55}$$

Hệ điều khiển có trễ biến thiên (2.55) được gọi là hệ điều khiển tuyến tính không chắc chắn có trễ biến thiên. Bây giờ, ta nghiên cứu bài toán ổn định hóa được dạng mũ cho lớp hệ (2.55) trong trường hợp độ trễ $h(t)$ là hàm khả vi thỏa mãn điều kiện $\dot{h}(t) \le \delta < 1$.

Cho các số $\alpha > 0, \epsilon_1 > 0, \epsilon_2 > 0, h_2 > h_1 > 0, 0 \le \delta < 1$, các ma trận đối xứng, xác định dương $P, Q_1, Q_2, Q_3, S_1, S_2, S_3, S_4, R_1, R_2$ và một ma trận Y. Đặt

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11} &= AP + PA^{\mathsf{T}} + BY + Y^{\mathsf{T}}B^{\mathsf{T}} + 2\alpha P + Q_1 + Q_2 + h_1S_3 \\
&\quad + (h_2 - h_1)S_4 + \epsilon_1E_1E_1^{\mathsf{T}} + \epsilon_2E_2E_2^{\mathsf{T}} \\
&\quad - \frac{1}{h_1}e^{-2\alpha h_1}S_1 - 2e^{-4\alpha h_1}R_1 - 2\frac{h_2 - h_1}{h_2 + h_1}e^{-4\alpha h_2}R_2, \\
\Gamma_{22} &= -(1 - \delta)e^{-2\alpha h_2}Q_2 - \frac{2}{h_2 - h_1}e^{-2\alpha h_2}S_2, \\
\Gamma_{33} &= -e^{-2\alpha h_2}Q_3 - \frac{1}{h_2 - h_1}e^{-2\alpha h_2}S_2, \\
\Gamma_{44} &= e^{-2\alpha h_1}Q_3 - e^{-2\alpha h_1}Q_1 - \frac{1}{h_1}e^{-2\alpha h_1}S_1 - \frac{1}{h_2 - h_1}e^{-2\alpha h_2}S_2, \\
\Gamma_{55} &= -\frac{1}{h_1}e^{-2\alpha h_1}S_3 - \frac{2}{h_1^2}e^{-4\alpha h_1}R_1, \\
\Gamma_{66} &= -\frac{1}{h_2 - h_1}e^{-2\alpha h_2}S_4 - \frac{2}{h_2^2 - h_1^2}e^{-4\alpha h_2}R_2, \\
\Gamma_{77} &= h_1S_1 + (h_2 - h_1)S_2 + \frac{1}{2}h_1^2R_1 + \frac{1}{2}(h_2^2 - h_1^2)R_2 \\
&\quad + \epsilon_1E_1E_1^{\mathsf{T}} + \epsilon_2E_2E_2^{\mathsf{T}} - 2P, \\
\Gamma_{14} &= \frac{1}{h_1}e^{-2\alpha h_1}S_1,\ \Gamma_{15} = \frac{2}{h_1}e^{-4\alpha h_1}R_1,\ \Gamma_{16} = \frac{2}{h_2 + h_1}e^{-4\alpha h_2}R_2, \\
\Gamma_{17} &= PA^{\mathsf{T}} + Y^{\mathsf{T}}B^{\mathsf{T}}, \Gamma_{23} = \Gamma_{24} = \frac{1}{h_2 - h_1}e^{-2\alpha h_2}S_2.
\end{aligned}$$

Định lý 2.4 *Cho $\alpha > 0, h_2 > h_1 > 0, 0 \le \delta < 1$. Giả sử rằng các ma trận hệ số của hệ (2.55) thỏa mãn điều kiện sau: tồn tại các số dương ϵ_1, ϵ_2, các ma trận đối xứng, xác định dương $P, Q_1, Q_2, Q_3, S_1, S_2, S_3, S_4, R_1, R_2$ và một ma trận Y sao cho bất đẳng thức ma trận tuyến tính sau được thỏa mãn*

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & DP & 0 & \Gamma_{14} & \Gamma_{15} & \Gamma_{16} & \Gamma_{17} & PH_1^{\mathsf{T}} & 0 \\ * & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} & \Gamma_{24} & 0 & 0 & PD^{\mathsf{T}} & 0 & PH_2^{\mathsf{T}} \\ * & * & \Gamma_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Gamma_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Gamma_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \Gamma_{66} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \Gamma_{77} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\frac{1}{2}\epsilon_1 I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\frac{1}{2}\epsilon_2 I \end{bmatrix} < 0. \tag{2.56}$$

Khi đó hệ (2.55) là $\alpha-$ổn định hóa được dạng mũ. Ngoài ra, điều khiển ngược ổn định hóa hệ (2.55) cho bởi

$$u(t) = YP^{-1}x(t), \quad t \geq 0,$$

và nghiệm bất kì $x(t,\phi)$ của hệ thỏa mãn đánh giá sau

$$\|x(t,\phi)\| \leq \sqrt{\frac{\Lambda}{\lambda}} e^{-\alpha t}\|\phi\|_{C^1}, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Chứng minh. Xét hàm Lyapunov–Krasoskii giống như trong Định lý 2.3. Khi đó đạo hàm của hàm Lyapunov–Krasoskii theo t dọc theo nghiệm của hệ (2.55) thỏa mãn bất đẳng thức

$$\begin{aligned} &\dot{V}(t,x_t) + 2\alpha V(t,x_t) \\ &\leq \xi^{\mathsf{T}}(t)\mathcal{M}\xi(t) + x^{\mathsf{T}}(t)\Big[P^{-1}E_1F_1(t)H_1 + H_1^{\mathsf{T}}F_1^{\mathsf{T}}(t)E_1^{\mathsf{T}}P^{-1}\Big]x(t) \\ &\quad + 2x^{\mathsf{T}}(t)P^{-1}E_2F_2(t)H_2x(t-h(t)) \\ &\quad + 2\dot{x}^{\mathsf{T}}(t)P^{-1}E_1F_1(t)H_1x(t) \\ &\quad + 2\dot{x}^{\mathsf{T}}(t)P^{-1}E_2F_2(t)H_2x(t-h(t)), \end{aligned} \tag{2.57}$$

trong đó

$$\begin{aligned} \xi(t) = \Big[& x^{\mathsf{T}}(t) \quad x^{\mathsf{T}}(t-h(t)) \quad x^{\mathsf{T}}(t-h_2) \quad x^{\mathsf{T}}(t-h_1) \quad \left(\int_{t-h_1}^{t} x(\theta)\,d\theta\right)^{\mathsf{T}} \\ & \left(\int_{t-h_2}^{t-h_1} x(\theta)\,d\theta\right)^{\mathsf{T}} \quad \dot{x}^{\mathsf{T}}(t)\Big]^{\mathsf{T}} \end{aligned}$$

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & P^{-1}D & 0 & M_{14} & M_{15} & M_{16} & M_{17} \\ * & M_{22} & M_{23} & M_{24} & 0 & 0 & D^\mathsf{T}P^{-1} \\ * & * & M_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & M_{44} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & M_{55} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & M_{66} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & M_{77} \end{bmatrix},$$

với

$$\begin{aligned}
M_{11} &= P^{-1}(A+BK) + (A+BK)^\mathsf{T}P^{-1} + 2\alpha P^{-1} + \overline{Q_1} + \overline{Q_2} \\
&\quad + h_1\overline{S_3} + (h_2-h_1)\overline{S_4} - \frac{1}{h_1}e^{-2\alpha h_1}\overline{S_1} - 2e^{-4\alpha h_1}\overline{R_1} - 2\frac{h_2-h_1}{h_2+h_1}e^{-4\alpha h_2}\overline{R_2}, \\
M_{22} &= -(1-\delta)e^{-2\alpha h_2}\overline{Q_2} - \frac{2}{h_2-h_1}e^{-2\alpha h_2}\overline{S_2}, \\
M_{33} &= -e^{-2\alpha h_2}\overline{Q_3} - \frac{1}{h_2-h_1}e^{-2\alpha h_2}\overline{S_2}, \\
M_{44} &= e^{-2\alpha h_1}\overline{Q_3} - e^{-2\alpha h_1}\overline{Q_1} - \frac{1}{h_1}e^{-2\alpha h_1}\overline{S_1} - \frac{1}{h_2-h_1}e^{-2\alpha h_2}\overline{S_2}, \\
M_{55} &= -\frac{1}{h_1}e^{-2\alpha h_1}\overline{S_3} - \frac{2}{h_1^2}e^{-4\alpha h_1}\overline{R_1}, \\
M_{66} &= -\frac{1}{h_2-h_1}e^{-2\alpha h_2}\overline{S_4} - \frac{2}{h_2^2-h_1^2}e^{-4\alpha h_2}\overline{R_2}, \\
M_{77} &= h_1\overline{S_1} + (h_2-h_1)\overline{S_2} + \frac{1}{2}h_1^2\overline{R_1} + \frac{1}{2}(h_2^2-h_1^2)\overline{R_2} - 2P^{-1}, \\
M_{14} &= \frac{1}{h_1}e^{-2\alpha h_1}\overline{S_1},\ M_{15} = \frac{2}{h_1}e^{-4\alpha h_1}\overline{R_1},\ M_{16} = \frac{2}{h_2+h_1}e^{-4\alpha h_2}\overline{R_2}, \\
M_{17} &= (A+BK)^\mathsf{T}P^{-1}, M_{23} = M_{24} = \frac{1}{h_2-h_1}e^{-2\alpha h_2}\overline{S_2}.
\end{aligned}$$

Áp dụng Bổ đề 1.1, ta có đánh giá sau

$$P^{-1}E_1F_1(t)H_1 + H_1^\mathsf{T}F_1^\mathsf{T}(t)E_1^\mathsf{T}P^{-1} \le \epsilon_1 P^{-1}E_1E_1^\mathsf{T}P^{-1} + \epsilon_1^{-1}H_1^\mathsf{T}H_1.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}
&x^\mathsf{T}(t)\Big[P^{-1}E_1F_1(t)H_1 + H_1^\mathsf{T}F_1^\mathsf{T}(t)E_1^\mathsf{T}P^{-1}\Big]x(t) \\
&\quad \le x^\mathsf{T}(t)\Big[\epsilon_1 P^{-1}E_1E_1^\mathsf{T}P^{-1} + \epsilon_1^{-1}H_1^\mathsf{T}H_1\Big]x(t).
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Mặt khác theo Bổ đề 1.1 ta có

$$\begin{aligned}
&2x^{\mathsf{T}}(t)P^{-1}E_2F_2(t)H_2x(t-h(t))\\
&\le \epsilon_2 x^{\mathsf{T}}(t)P^{-1}E_2E_2^{\mathsf{T}}P^{-1}x(t)+\epsilon_2^{-1}x^{\mathsf{T}}(t-h(t))H_2^{\mathsf{T}}H_2x(t-h(t));\\
&2\dot{x}^{\mathsf{T}}(t)P^{-1}E_1F_1(t)H_1x(t)\\
&\le \epsilon_1\dot{x}^{\mathsf{T}}(t)P^{-1}E_1E_1^{\mathsf{T}}P^{-1}\dot{x}(t)+\epsilon_1^{-1}x^{\mathsf{T}}(t)H_1^{\mathsf{T}}H_1x(t);\\
&2\dot{x}^{\mathsf{T}}(t)P^{-1}E_2F_2(t)H_2x(t-h(t))\\
&\le \epsilon_2\dot{x}^{\mathsf{T}}(t)P^{-1}E_2E_2^{\mathsf{T}}P^{-1}\dot{x}(t)+\epsilon_2^{-1}x^{\mathsf{T}}(t-h(t))H_2^{\mathsf{T}}H_2x(t-h(t)).
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Từ điều kiện (2.57)–(2.59), ta có

$$\dot{V}(t,x_t)+2\alpha V(t,x_t)\le \xi^{\mathsf{T}}(t)\Psi\xi(t), \tag{2.60}$$

trong đó

$$\Psi=\begin{bmatrix}
\hat{M}_{11} & P^{-1}D & 0 & M_{14} & M_{15} & M_{16} & M_{17}\\
* & \hat{M}_{22} & M_{23} & M_{24} & 0 & 0 & D^{\mathsf{T}}P^{-1}\\
* & * & M_{33} & 0 & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & M_{44} & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & M_{55} & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & M_{66} & 0\\
* & * & * & * & * & * & \hat{M}_{77}
\end{bmatrix},$$

với

$$\begin{aligned}
\hat{M}_{11}&=P^{-1}(A+BK)+(A+BK)^{\mathsf{T}}P^{-1}+2\alpha P^{-1}+\overline{Q_1}+\overline{Q_2}+h_1\overline{S_3}\\
&\quad+(h_2-h_1)\overline{S_4}+\epsilon_1P^{-1}E_1E_1^{\mathsf{T}}P^{-1}+\epsilon_2P^{-1}E_2E_2^{\mathsf{T}}P^{-1}+2\epsilon_1^{-1}H_1^{\mathsf{T}}H_1\\
&\quad-\frac{1}{h_1}e^{-2\alpha h_1}\overline{S_1}-2e^{-4\alpha h_1}\overline{R_1}-2\frac{h_2-h_1}{h_2+h_1}e^{-4\alpha h_2}\overline{R_2},\\
\hat{M}_{22}&=-(1-\delta)e^{-2\alpha h_2}\overline{Q_2}-\frac{2}{h_2-h_1}e^{-2\alpha h_2}\overline{S_2}+2\epsilon_2^{-1}H_2^{\mathsf{T}}H_2,\\
\hat{M}_{77}&=h_1\overline{S_1}+(h_2-h_1)\overline{S_2}+\frac{1}{2}h_1^2\overline{R_1}+\frac{1}{2}(h_2^2-h_1^2)\overline{R_2}\\
&\quad+\epsilon_1P^{-1}E_1E_1^{\mathsf{T}}P^{-1}+\epsilon_2P^{-1}E_2E_2^{\mathsf{T}}P^{-1}-2P^{-1}.
\end{aligned}$$

Nhân cả bên trái và bên phải của ma trận Ψ với

$$\mathrm{diag}\{P,P,P,P,P,P,P\},$$

đặt

$$K=YP^{-1},$$

và sử dụng Bổ đề Schur ta có điều kiện $\Psi < 0$ là tương đương với điều kiện (2.56). Từ đó suy ra

$$\dot{V}(t, x_t) + 2\alpha V(t, x_t) \leq 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Phần còn lại của chứng minh định lý này được thực hiện tương tự như trong Định lý 2.3.

□

Nhận xét 2.5 Trong Định lý 2.3, chúng tôi xây dựng hàm Lyapunov–Krasovskii cải tiến so với cách chọn hàm Lyapunov–Krasovskii trong các công trình của các tác giả trong [5, 29, 39, 45]. Đó là trong hàm Lyapunov–Krasovskii mà chúng tôi xây dựng, có thêm thông tin về cận trên và cận dưới của độ trễ, tốc độ hội tụ mũ α (các hàm Lyapunov–Krasovskii được lựa chọn trong công trình của O.M. Kwon, J.H. Park trong [39] và T. Li cùng các cộng sự trong [45] không chứa tốc độ hội tụ mũ α nên các kết quả này chỉ nghiên cứu được bài toán ổn định tiệm cận cho hệ điều khiển tuyến tính không chắc chắn có chễ chứ chưa đánh giá được "độ" ổn định của lớp hệ này). Ngoài ra, trong hàm Lyapunov–Krasovskii mà chúng tôi lựa chọn, chúng tôi cải tiến kết quả của J. Sun cùng các cộng sự trong [83] để đưa thêm thành phần có chứa tích phân bội ba (hàm $V_5(t, x_t)$ trong chứng minh Định lý 2.3) nhằm mục đích cải tiến biên của độ trễ. Với cách xây dựng hàm Lyapunov–Krasovskii mới đó kết hợp với một vài đánh giá và biến đổi thích hợp, chúng tôi đã đưa ra một điều kiện mới cho tính ổn định hóa được dạng mũ cho lớp hệ điều khiển tuyến tính không chắc chắn có trễ thông qua việc giải một bất đẳng thức ma trận tuyến tính. Ngoài ra, theo như hiểu biết của chúng tôi cái khó của bài toán ổn định hóa không phải là phải lựa chọn hàm Lyapunov–Krasovskii như thế nào mà là trên cơ sở hàm Lyapunov–Krasovskii được lựa chọn đó, ta phải thiết kế được một điều khiển ngược để hệ đóng tương ứng là $\alpha-$ổn định. Đồng thời điều khiển ngược đó phải được xác định một cách tường minh và có thể tính toán được.

Khi thông tin về đạo hàm của độ trễ là không biết hoặc độ trễ là hàm liên tục nhưng không khả vi, bằng cách đặt $\overline{Q_2} = 0$ trong $V_2(t, x_t)$ của hàm Lyapunov–Krasovskii được xây dựng trong chứng minh Định lý 2.4, ta có hệ quả sau đây được suy ra trực tiếp từ định lý đó.

Hệ quả 2.2 *Cho $\alpha > 0, h_2 > h_1 > 0$. Giả sử rằng các ma trận hệ số của hệ (2.55) thỏa mãn điều kiện: tồn tại các số thực dương ϵ_1, ϵ_2, các ma trận đối xứng, xác định dương $P, Q_1, Q_3, S_1, S_2, S_3, S_4, R_1, R_2$, và một ma trận Y sao cho* *bất đẳng thức ma trận tuyến tính sau được thỏa mãn*

$$\begin{bmatrix} \hat{\Gamma}_{11} & DP & 0 & \Gamma_{14} & \Gamma_{15} & \Gamma_{16} & \Gamma_{17} & PH_1^{\mathsf{T}} & 0 \\ * & \hat{\Gamma}_{22} & \Gamma_{23} & \Gamma_{24} & 0 & 0 & PD^{\mathsf{T}} & 0 & PH_2^{\mathsf{T}} \\ * & * & \Gamma_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Gamma_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Gamma_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \Gamma_{66} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \Gamma_{77} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\frac{1}{2}\epsilon_1 I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\frac{1}{2}\epsilon_2 I \end{bmatrix} < 0, \qquad (2.61)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_{11} &= AP + PA^{\mathsf{T}} + BY + Y^{\mathsf{T}}B^{\mathsf{T}} + 2\alpha P + Q_1 + h_1 S_3 + (h_2 - h_1)S_4 + \epsilon_1 E_1 E_1^{\mathsf{T}} \\ &\quad + \epsilon_2 E_2 E_2^{\mathsf{T}} - \frac{1}{h_1} e^{-2\alpha h_1} S_1 - 2e^{-4\alpha h_1} R_1 - 2\frac{h_2 - h_1}{h_2 + h_1} e^{-4\alpha h_2} R_2, \\ \hat{\Gamma}_{22} &= -\frac{2}{h_2 - h_1} e^{-2\alpha h_2} S_2. \end{aligned}$$

Khi đó hệ (2.55) là $\alpha-$ổn định hóa được dạng mũ. Ngoài ra, điều khiển ngược ổn định hóa hệ (2.55) được cho bởi công thức

$$u(t) = YP^{-1}x(t), \quad t \geq 0,$$

và nghiệm bất kì $x(t, \phi)$ của hệ (2.55) thỏa mãn đánh giá sau

$$\|x(t, \phi)\| \leq \sqrt{\frac{\Lambda_1}{\lambda}} e^{-\alpha t} \|\phi\|_{C^1}, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Nhận xét 2.6 Hệ quả 2.2 đưa ra một điều kiện đủ cho tính ổn định hóa được dạng mũ cho lớp hệ tuyến tính không chắc chắn có trễ (2.55) trong trường hợp thông tin về đạo hàm của độ trễ là không biết hoặc độ trễ là hàm liên tục nhưng không nhất thiết khả vi. Ví dụ 2.4 sau đây sẽ minh họa cho tính ưu việt của tiêu chuẩn chúng tôi đề xuất so với các kết quả đã được công bố trong [45].

Ví dụ 2.4 Xét hệ điều khiển tuyến tính không chắc có trễ (2.55):

$$\dot{x}(t) = [A + E_1 F_1(t) H_1]x(t) + [D + E_2 F_2(t) H_2]x(t - h(t)) + Bu(t),$$

trong đó $h(t)$ là là hàm liên tục nhưng không khả vi và là độ trễ biến thiên dạng khoảng, tức là $h(t)$ thỏa mãn điều kiện $h_1 < h(t) \leq h_2$, với

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -2 & -0.5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, E_1 = E_2 = 0.2I, H_1 = I, H_2 = 0.$$

Cho $h_1 = 0.3$, giá trị lớn nhất của cận trên h_2 của độ trễ mà với giá trị đó hệ (2.55) là ổn định hóa được bởi một điều khiển ngược ổn định hóa được đưa ra trong công trình của T. Li cùng các các cộng sự (xem [45]) là $h_2 = 0.9$. Tuy nhiên, bằng cách áp dụng Hệ quả 2.2 với tốc độ mũ α cho trước là $\alpha = 0.001$, giá trị lớn nhất thu được của cận trên h_2 của độ trễ là $h_2 = 1.22$. Ngoài ra, nếu cho $h_1 = 0.3$ và $h_2 = 0.9$ như trong công trình của T. Li cùng các cộng sự (xem [45]) thì bằng cách áp dụng Hệ quả 2.2 ta có hệ (2.55) là ổn định hóa được với tốc độ mũ $\alpha = 0.296$. Bảng 2.1 dưới đây cho ta kết quả so sánh giữa kết quả của Hệ quả 2.2 với kết quả của T. Li cùng các cộng sự (xem [45]). Từ bảng 2.1, có thể thấy rằng kết quả của chúng tôi là tốt hơn kết quả của T. Li và các cộng sự.

Bảng 2.1: Giá trị lớn nhất của h_2 với $h_1 = 0.3$ cho trước để hệ ổn định hóa được

Phương pháp	h_1	h_2	Ma trận điều khiên K
T. Li cùng các cộng sự (2008)	0.3	0.9	$[-70.22 \quad -33.14]$
Hệ quả 2.2 ($\alpha = 0.001$)	0.3	1.22	$[-0.0060 \quad -1.0487]$
Hệ quả 2.2 ($\alpha = 0.296$)	0.3	0.9	$[-0.0015 \quad -1.0164]$

Trong trường hợp cho $\alpha = 0.001, h_1 = 0.3, h_2 = 1.22$, chúng tôi tìm được một nghiệm của bất đẳng thức ma trận tuyến tính (2.61) là $\epsilon_1 = 1.1345 \times 10^3, \epsilon_2 = 16.6876$ và các ma trận

$$\begin{aligned}
P &= \begin{bmatrix} 288.2003 & -33.0327 \\ -33.0327 & 190.0667 \end{bmatrix}, Q_1 = \begin{bmatrix} 3.7758 & -6.7049 \\ -6.7049 & 23.8409 \end{bmatrix}, \\
Q_3 &= \begin{bmatrix} 17.6632 & 19.1953 \\ 19.1953 & 72.8241 \end{bmatrix}, S_1 = \begin{bmatrix} 411.1875 & -25.3731 \\ -25.3731 & 148.7446 \end{bmatrix}, \\
S_2 &= \begin{bmatrix} 432.1371 & -43.1242 \\ -43.1242 & 249.3136 \end{bmatrix}, S_3 = \begin{bmatrix} 15.6575 & -11.8170 \\ -11.8170 & 52.9336 \end{bmatrix}, \\
S_4 &= \begin{bmatrix} 4.8929 & -8.5002 \\ -8.5002 & 30.2842 \end{bmatrix}, R_1 = \begin{bmatrix} 16.0543 & -3.3676 \\ -3.3676 & 23.8945 \end{bmatrix}, \\
R_2 &= \begin{bmatrix} 7.8087 & -16.7842 \\ -16.7842 & 47.9581 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 32.9266 & -199.1300 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Do đó, theo Hệ quả 2.2 hệ (2.55) là $0.001-$ổn định mũ và nghiệm bất kì $x(t,\phi)$ của hệ đóng (2.55) thỏa mãn đánh giá

$$\|x(t,\phi)\| \leq 2.0677 e^{-0.001t} \|\phi\|_{C^1}.$$

Ngoài ra, điều khiển ngược ổn định hóa hệ (2.22) được cho bởi công thức

$$u(t) = YP^{-1}x(t) = \begin{bmatrix} -0.0060 & -1.0487 \end{bmatrix} x(t).$$

KẾT LUẬN CHƯƠNG 2

Trong mục 2.1, bằng cách cải tiến hàm Lyapunov trong [71], kết hợp với công thức Newton–Leibniz và bất đẳng thức tích phân của K. Gu (xem [24]), chúng tôi tìm được một điều kiện đủ cho tính ổn định mũ và ổn định hóa được dạng mũ cho mô hình mạng nơ ron được mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ hỗn hợp với độ trễ là các hàm liên tục không nhất thiết khả vi. So sánh với các kết quả hiện tại, tính ưu việt trong kết quả của chúng tôi thể hiện ở ba điểm. *Thứ nhất,* chúng tôi tìm được một điều kiện đủ cho tính ổn định mũ cho mô hình mạng nơ ron được mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ hỗn hợp với các hàm kích hoạt khác nhau và độ trễ là các hàm liên tục không nhất thiết khả vi. Kết quả này không những khắc phục được các hạn chế trong các kết quả đã có về tính khả vi của độ trễ (xem [9, 41, 45, 52, 68, 85, 91]) mà còn mở rộng các kết quả trong [79, 96] cho trường hợp độ trễ rời rạc (độ trễ $h(t)$ trong hệ (2.1)) là trễ biến thiên dạng khoảng tức là cận dưới của độ trễ là số lớn hơn 0. *Thứ hai,* chúng tôi đưa ra một điều kiện đủ cho tính ổn định hóa được dạng mũ của mô hình mạng nơ ron được mô tả bởi hệ điều khiển có trễ hỗn hợp với độ trễ là các hàm liên tục nhưng không nhất thiết khả vi với điều khiển ngược ổn định hóa được thiết kế dựa trên việc tìm nghiệm của một bất đẳng thức ma trận tuyến tính. Tiêu chuẩn ổn định hóa này là mở rộng tiêu chuẩn của V.N. Phat và H. Trinh trong [71]. *Thứ ba,* trong các tiêu chuẩn ổn định và ổn định hóa cho mô hình mạng nơ ron được mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ hỗn hợp với độ trễ là các hàm liên tục không nhất thiết khả vi do chúng tôi đề xuất, các chỉ số ổn định Lyapunov được xác định một cách tường minh và có thể tính toán được bằng phần mềm Matlab.

Trong mục 2.2, với cách xây dựng hàm Lyapunov–Krasovskii mới trong đó có chứa tốc độ hội tụ mũ α, tích phân bội ba kết hợp với một vài đánh giá mới, chúng tôi đưa ra các tiêu chuẩn mới cho bài toán ổn định hóa được dạng mũ cho lớp hệ điều khiển có trễ biến thiên dạng khoảng với nhiễu phi tuyến trong các trường hợp hoặc là nhiễu phi tuyến thỏa mãn điều kiện Lipschitz toàn cục và điều kiện tăng trưởng (2.24)– (2.25) hoặc là nhiễu phi tuyến có cấu trúc dạng (2.26)– (2.27). Trong mục này chúng tôi xét cả trường hợp độ trễ hoặc là hàm khả vi có đạo hàm nhỏ hơn 1 (Định lý 2.3, Định lý 2.4) hoặc độ trễ là hàm liên tục nhưng không nhất thiết khả vi (Hệ quả 2.1, Hệ quả 2.2).

Chương 3

Bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho một số lớp hệ phương trình vi phân có trễ

Chương này trình bày một số kết quả về bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho một số lớp hệ điều khiển có trễ biến thiên, bao gồm: hệ điều khiển có trễ biến thiên hỗn hợp trên cả biến trạng thái và biến điều khiển và hệ điều khiển tuyến tính có trễ thiên dạng khoảng trên biến trạng thái và biến quan sát. Nội dung được trình bày trong chương này dựa trên các bài báo [1], [2] trong danh mục các công trình đã công bố của tác giả.

3.1. Bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho lớp hệ phương trình vi phân có trễ hỗn hợp trên cả biến trạng thái và biến điều khiển

Xét hệ phương trình vi phân có trễ hỗn hợp biến thiên trên cả biến trạng thái và biến điều khiển:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h_1(t)) + A_2\int_{t-k_1(t)}^{t} x(s)\,ds \\ \qquad +B_0u(t) + B_1u(t-h_2(t)) + B_2\int_{t-k_2(t)}^{t} u(s)\,ds, \\ x(t) = \phi(t), \quad t\in[-d,0], \quad d=\max\{h_{1\max}, h_{2\max}, k_1, k_2\}, \end{cases} \tag{3.1}$$

ở đó $x(t)\in\mathbb{R}^n, u(t)\in\mathbb{R}^m$ là các véctơ trạng thái và véctơ điều khiển tương ứng; $\phi\in C^1([-d,0],\mathbb{R}^n)$ là hàm ban đầu với chuẩn được cho bởi công thức: $\|\phi\|_{C^1} = \sup\limits_{-d\le t\le 0}\{\|\phi(t)\|, \|\dot{\phi}(t)\|\}$; $A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2$ là các ma trận thực cho trước có số chiều thích hợp; các hàm trễ $h_i(t), k_i(t), i=1,2,$ là hàm liên tục thỏa mãn điều kiện:

$$
\begin{aligned}
&0 \leq h_{i\min} \leq h_i(t) \leq h_{i\max},\\
&0 \leq k_i(t) \leq k_i, \quad i = 1, 2.
\end{aligned}
$$

Cho số $\alpha > 0$. Nhắc lại rằng hệ (3.1), trong đó $u(t) = 0$, là $\alpha-$ổn định mũ nếu tồn tại hằng số $\beta > 1$ sao cho nghiệm bất kì $x(t, \phi)$ của hệ thỏa mãn điều kiện:

$$\|x(t, \phi)\| \leq \beta e^{-\alpha t} \|\phi\|_{C^1}, \quad \forall t \geq 0.$$

Cho số $\alpha > 0$. Nhắc lại rằng hệ (3.1) là $\alpha-$ổn định hóa được dạng mũ nếu tồn tại một điều khiển ngược $u(t) = Kx(t), K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sao cho nghiệm bất kì $x(t, \phi)$ của hệ đóng sau

$$
\begin{cases}
\dot{x}(t) = [A_0 + B_0K]x(t) + A_1x(t - h_1(t)) + A_2 \int_{t-k_1(t)}^{t} x(s)\, ds\\
\qquad\quad +B_1Kx(t - h_2(t)) + B_2K \int_{t-k_2(t)}^{t} x(s)\, ds,\\
x(t) = \phi(t), \quad t \in [-d, 0].
\end{cases}
\tag{3.2}
$$

là $\alpha-$ổn định mũ.

Với điều khiển ngược ổn định hóa hệ (3.2) được thiết kế dưới dạng $u(t) = Kx(t)$ thì hệ đóng (3.2) là tồn tại và duy nhất nghiệm toàn cục theo Định lý 1.6 trong Chương 1 của luận án.

Ta xét hàm chi phí toàn phương sau:

$$J = \int_0^{+\infty} [x^{\mathsf{T}}(t)Qx(t) + u^{\mathsf{T}}(t)Ru(t)]\, dt, \tag{3.3}$$

ở đó $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ và $R \in \mathbb{R}^{m\times m}$ là các ma trận thực, đối xứng, xác định dương cho trước.

Mục đích chính của mục này là ta sẽ thiết kế một điều khiển ngược ổn định hóa $u(t) = Kx(t), K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sao cho nghiệm bất kì của hệ đóng (3.2) là $\alpha-$ổn định mũ và hàm chi phí toàn phương (3.3) thỏa mãn điều kiện $J \leq J^*$, với J^* là một hằng số dương nào đó.

Cho số $\alpha > 0$, các ma trận đối xứng, xác định dương $Q, R, N, P, Q_1, Q_2, R_1, R_2, S_1, S_2, T_1, T_2$ và các ma trận tự do $Y, M_i, Z_i, i = 1, \ldots, 4$. Để thuận tiện cho việc trình bày các kết quả chính của mục này, ta đặt:

$$
\begin{aligned}
&h_{i\mathrm{med}} = \frac{1}{2}\big(h_{i\min} + h_{i\max}\big), i = 1, 2, \quad \delta_i = \frac{1}{2}\big(h_{i\max} - h_{i\min}\big), i = 1, 2,\\
&\lambda = [\lambda_{\min}(P)].[\lambda_{\max}(N)]^{-2},\\
&\Lambda = [\lambda_{\min}(N)]^{-2}\bigg(\lambda_{\max}(P) + h_{1\mathrm{med}}\lambda_{\max}(Q_1) + h_{2\mathrm{med}}\lambda_{\max}(Q_2)\\
&\qquad\qquad + \frac{k_1^2}{2}\lambda_{\max}(T_1) + \frac{k_2^2}{2}\lambda_{\max}(T_2) + \frac{1}{2}h_{1\mathrm{med}}^2\lambda_{\max}(R_1)\\
&\qquad\qquad + \frac{1}{2}h_{2\mathrm{med}}^2\lambda_{\max}(R_2) + 2\delta_1 h_{1\mathrm{med}}\lambda_{\max}(S_1) + 2\delta_2 h_{2\mathrm{med}}\lambda_{\max}(S_2)\bigg),\\
&H_1 = \begin{bmatrix} h_{1\mathrm{med}}M_1 & h_{1\mathrm{med}}M_2 & h_{1\mathrm{med}}M_3 & h_{1\mathrm{med}}M_4 \end{bmatrix}^\top,\\
&H_2 = \begin{bmatrix} h_{2\mathrm{med}}Z_1 & h_{2\mathrm{med}}Z_2 & h_{2\mathrm{med}}Z_3 & h_{2\mathrm{med}}Z_4 \end{bmatrix}^\top,\\
&H_3 = \begin{bmatrix} \delta_1 N A_1^\top & \delta_1 N A_1^\top & \delta_1 N A_1^\top & \delta_1 N A_1^\top \end{bmatrix}^\top,\\
&H_4 = \begin{bmatrix} \delta_2 Y^\top B_1^\top & \delta_2 Y^\top B_1^\top & \delta_2 Y^\top B_1^\top & \delta_2 Y^\top B_1^\top \end{bmatrix}^\top,\\
&H_5 = \begin{bmatrix} k_1 N A_2^\top & k_1 N A_2^\top & k_1 N A_2^\top & k_1 N A_2^\top \end{bmatrix}^\top,\\
&H_6 = \begin{bmatrix} k_2 Y^\top B_2^\top & k_2 Y^\top B_2^\top & k_2 Y^\top B_2^\top & k_2 Y^\top B_2^\top \end{bmatrix}^\top,\\
&H_7 = \begin{bmatrix} QN & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top, H_8 = \begin{bmatrix} RY & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top,\\
&\Xi = \begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & \Xi_{13} & \Xi_{14}\\ * & \Xi_{22} & \Xi_{23} & \Xi_{24}\\ * & * & \Xi_{33} & \Xi_{34}\\ * & * & * & \Xi_{44} \end{bmatrix},\\
&\Xi_{11} = 2\alpha P + Q_1 + Q_2 + k_1 T_1 + k_2 T_2 + M_1^\top + M_1 + Z_1^\top + Z_1\\
&\qquad + A_0 N + N A_0^\top + B_0 Y + Y^\top B_0^\top,\\
&\Xi_{12} = M_2 + Z_2 - M_1^\top + N A_0^\top + A_1 N + Y^\top B_0^\top,\\
&\Xi_{13} = M_3 + Z_3 - Z_1^\top + B_1 Y + N A_0^\top + Y^\top B_0^\top,\\
&\Xi_{14} = P + M_4 + Z_4 + N A_0^\top + Y^\top B_0^\top - N,\\
&\Xi_{22} = -e^{-2\alpha h_{1\mathrm{med}}}Q_1 - M_2^\top - M_2 + A_1 N + N A_1^\top,\\
&\Xi_{23} = -M_3 - Z_2^\top + N A_1^\top + B_1 Y, \quad \Xi_{24} = -M_4 + N A_1^\top - N,\\
&\Xi_{33} = -e^{-2\alpha h_{2\mathrm{med}}}Q_2 - Z_3^\top - Z_3 + B_1 Y + Y^\top B_1^\top,\\
&\Xi_{34} = -Z_4 + Y^\top B_1^\top - N,\\
&\Xi_{44} = h_{1\mathrm{med}}R_1 + h_{2\mathrm{med}}R_2 + 2\delta_1 S_1 + 2\delta_2 S_2 - 2N,\\
&\Xi_{55} = -h_{1\mathrm{med}}e^{-2\alpha h_{1\mathrm{med}}}R_1,\ \Xi_{66} = -h_{2\mathrm{med}}e^{-2\alpha h_{2\mathrm{med}}}R_2,\\
&\Xi_{77} = -\delta_1 e^{-2\alpha(h_{1\mathrm{med}}+\delta_1)}S_1,\ \Xi_{88} = -\delta_2 e^{-2\alpha(h_{2\mathrm{med}}+\delta_2)}S_2.
\end{aligned}
$$

Định lý sau đây đưa ra một điều kiện đủ cho sự tồn tại của một điều khiển ngược $u(t)$ đảm bảo cho hệ phương trình vi phân có trễ hỗn hợp trên cả biến trạng thái và biến điều khiển (3.1) là $\alpha-$ổn định hóa được dạng mũ và giá trị của hàm chi phí toàn phương (3.3) thỏa mãn $J \leq J^*$.

Định lý 3.1 *Cho số $\alpha > 0$, các ma trận thực, đối xứng, xác định dương có số chiều thích hợp Q, R. Xét hệ điều khiển có trễ hỗn hợp trên cả biến trạng thái và biến điều khiển* (3.1) *với hàm chi phí toàn phương* (3.3)*. Giả sử rằng các ma trận hệ số của hệ* (3.1) *và hàm chi phí toàn phương* (3.3) *thỏa mãn điều kiện: tồn tại các ma trận đối xứng, xác định dương $N, P, Q_1, Q_2, R_1, R_2, S_1, S_2, T_1, T_2$ và các ma trận $Y, M_i, Z_i, i = 1, \ldots, 4$, sao cho bất đẳng thức ma trận tuyến tính sau được thỏa mãn*

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} \Xi & H_1 & H_2 & H_3 & H_4 & H_5 & H_6 & H_7 & H_8 \\ * & \Xi_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Xi_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Xi_{77} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Xi_{88} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -k_1 e^{-2\alpha k_1} T_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -k_2 e^{-2\alpha k_2} T_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -Q & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -R \end{bmatrix} < 0. \tag{3.4}$$

Khi đó $u(t) = YN^{-1}x(t)$ là luật điều khiển ngược đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ (3.1) *và giá trị đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ* (3.1) *là:*

$$J \leq J^* = \Lambda \|\phi\|^2_{C^1}.$$

Chứng minh. Đặt

$$\begin{aligned} &W = N^{-1},\ \overline{P} = WPW,\ \overline{Q_i} = WQ_iW,\ \overline{R_i} = WR_iW, \\ &\overline{S_i} = WS_iW,\ \overline{T_i} = WT_iW,\ i = 1, 2, \\ &K = YN^{-1}, \quad \overline{M_j} = WM_jW,\ \overline{Z_j} = WZ_jW,\ j = 1, \ldots, 4. \end{aligned}$$

Áp dụng công thức Newton–Leibniz ta có

$$x(t - h_{\mathrm{imed}}) - x(t - h_i(t)) = \int_{t-h_i(t)}^{t-h_{\mathrm{imed}}} \dot{x}(s)\, ds \quad (i = 1, 2).$$

Khi đó hệ đóng (3.2) được viết lại như sau

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [A_0 + B_0K]x(t) + A_1x(t - h_{1\text{med}}) - A_1 \int_{t-h_1(t)}^{t-h_{1\text{med}}} \dot{x}(s)\, ds \\ \qquad +A_2 \int_{t-k_1(t)}^{t} x(s)\, ds + B_1Kx(t - h_{2\text{med}}) \\ \qquad -B_1K \int_{t-h_2(t)}^{t-h_{2\text{med}}} \dot{x}(s)\, ds + B_2K \int_{t-k_2(t)}^{t} x(s)\, ds, \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-d, 0]. \end{cases} \tag{3.5}$$

Xét hàm Lyapunov–Krasovskii cho hệ đóng (3.5)

$$V(t, x_t) = \sum_{i=1}^{9} V_i(t, x_t),$$

ở đó

$$\begin{aligned} V_1(t, x_t) &= x^{\mathsf{T}}(t)\overline{P}x(t), \\ V_2(t, x_t) &= \int_{t-h_{1\text{med}}}^{t} e^{2\alpha(s-t)}x^{\mathsf{T}}(s)\overline{Q_1}x(s)\, ds, \\ V_3(t, x_t) &= \int_{t-h_{2\text{med}}}^{t} e^{2\alpha(s-t)}x^{\mathsf{T}}(s)\overline{Q_2}x(s)\, ds, \\ V_4(t, x_t) &= \int_{-h_{1\text{med}}}^{0} \int_{t+s}^{t} e^{2\alpha(\theta-t)}\dot{x}^{\mathsf{T}}(\theta)\overline{R_1}\dot{x}(\theta)\, d\theta\, ds, \\ V_5(t, x_t) &= \int_{-h_{2\text{med}}}^{0} \int_{t+s}^{t} e^{2\alpha(\theta-t)}\dot{x}^{\mathsf{T}}(\theta)\overline{R_2}\dot{x}(\theta)\, d\theta\, ds, \\ V_6(t, x_t) &= \int_{-h_{1\text{med}}-\delta_1}^{-h_{1\text{med}}+\delta_1} \int_{t+s}^{t} e^{2\alpha(\theta-t)}\dot{x}^{\mathsf{T}}(\theta)\overline{S_1}\dot{x}(\theta)\, d\theta\, ds, \\ V_7(t, x_t) &= \int_{-h_{2\text{med}}-\delta_2}^{-h_{2\text{med}}+\delta_2} \int_{t+s}^{t} e^{2\alpha(\theta-t)}\dot{x}^{\mathsf{T}}(\theta)\overline{S_2}\dot{x}(\theta)\, d\theta\, ds, \\ V_8(t, x_t) &= \int_{-k_1}^{0} \int_{t+s}^{t} e^{2\alpha(\theta-t)}x^{\mathsf{T}}(\theta)\overline{T_1}x(\theta)\, d\theta\, ds, \\ V_9(t, x_t) &= \int_{-k_2}^{0} \int_{t+s}^{t} e^{2\alpha(\theta-t)}x^{\mathsf{T}}(\theta)\overline{T_2}x(\theta)\, d\theta\, ds. \end{aligned}$$

Lấy đạo hàm của $V_i(t, x_t), i = 1, \ldots, 9$, theo t dọc theo nghiệm của hệ đóng (3.5), ta thu được

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t, x_t) &= 2x^{\mathsf{T}}(t)\overline{P}\dot{x}(t), \\ \dot{V}_2(t, x_t) &= -2\alpha V_2(t, x_t) + x^{\mathsf{T}}(t)\overline{Q_1}x(t) - e^{-2\alpha h_{1\text{med}}}x^{\mathsf{T}}(t - h_{1\text{med}})\overline{Q_1}x(t - h_{1\text{med}}), \\ \dot{V}_3(t, x_t) &= -2\alpha V_3(t, x_t) + x^{\mathsf{T}}(t)\overline{Q_2}x(t) - e^{-2\alpha h_{2\text{med}}}x^{\mathsf{T}}(t - h_{2\text{med}})\overline{Q_2}x(t - h_{2\text{med}}), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{V}_4(t,x_t) &\le -2\alpha V_4(t,x_t) + h_{1\text{med}}\dot{x}^{\mathsf{T}}(t)\overline{R_1}\dot{x}(t)\\
&\quad - e^{-2\alpha h_{1\text{med}}}\int_{-h_{1\text{med}}}^{0}\dot{x}^{\mathsf{T}}(t+s)\overline{R_1}\dot{x}(t+s)\,ds,\\
\dot{V}_5(t,x_t) &\le -2\alpha V_5(t,x_t) + h_{2\text{med}}\dot{x}^{\mathsf{T}}(t)\overline{R_2}\dot{x}(t)\\
&\quad - e^{-2\alpha h_{2med}}\int_{-h_{2\text{med}}}^{0}\dot{x}^{\mathsf{T}}(t+s)\overline{R_2}\dot{x}(t+s)\,ds,\\
\dot{V}_6(t,x_t) &\le -2\alpha V_6(t,x_t) + 2\delta_1\dot{x}^{\mathsf{T}}(t)\overline{S_1}\dot{x}(t)\\
&\quad - e^{-2\alpha(h_{1\text{med}}+\delta_1)}\int_{-h_{1\text{med}}-\delta_1}^{-h_{1\text{med}}+\delta_1}\dot{x}^{\mathsf{T}}(t+s)\overline{S_1}\dot{x}(t+s)\,ds,\\
\dot{V}_7(t,x_t) &\le -2\alpha V_7(t,x_t) + 2\delta_2\dot{x}^{\mathsf{T}}(t)\overline{S_2}\dot{x}(t)\\
&\quad - e^{-2\alpha(h_{2\text{med}}+\delta_2)}\int_{-h_{2\text{med}}-\delta_2}^{-h_{2\text{med}}+\delta_2}\dot{x}^{\mathsf{T}}(t+s)\overline{S_2}\dot{x}(t+s)\,ds,\\
\dot{V}_8(t,x_t) &\le -2\alpha V_8(t,x_t) + k_1 x^{\mathsf{T}}(t)\overline{T_1}x(t) - e^{-2\alpha k_1}\int_{t-k_1}^{t}x^{\mathsf{T}}(s)\overline{T_1}x(s)\,ds,\\
\dot{V}_9(t,x_t) &\le -2\alpha V_9(t,x_t) + k_2 x^{\mathsf{T}}(t)\overline{T_2}x(t) - e^{-2\alpha k_2}\int_{t-k_2}^{t}x^{\mathsf{T}}(s)\overline{T_2}x(s)\,ds.
\end{aligned}
$$

Từ đó suy ra

$$
\begin{aligned}
&\dot{V}(t,x_t) + 2\alpha V(t,x_t)\\
&\le 2x^{\mathsf{T}}(t)\overline{P}\dot{x}(t) + x^{\mathsf{T}}(t)\big[\,\overline{Q_1} + \overline{Q_2} + k_1\overline{T_1} + k_2\overline{T_2} + 2\alpha\overline{P}\,\big]x(t)\\
&\quad - e^{-2\alpha h_{1\text{med}}}x^{\mathsf{T}}(t-h_{1\text{med}})\overline{Q_1}x(t-h_{1\text{med}})\\
&\quad - e^{-2\alpha h_{2\text{med}}}x^{\mathsf{T}}(t-h_{2\text{med}})\overline{Q_2}x(t-h_{2\text{med}})\\
&\quad + \dot{x}^{\mathsf{T}}(t)\big[\,h_{1\text{med}}\overline{R_1} + h_{2\text{med}}\overline{R_2} + 2\delta_1\overline{S_1} + 2\delta_2\overline{S_2}\,\big]\dot{x}(t)\\
&\quad - \sum_{i=1}^{2}\bigg(e^{-2\alpha h_{i\text{med}}}\int_{t-h_{i\text{med}}}^{t}\dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{R_i}\dot{x}(s)\,ds\\
&\quad + e^{-2\alpha(h_{i\text{med}}+\delta_i)}\int_{t-h_{i\text{med}}-\delta_i}^{t-h_{i\text{med}}+\delta_i}\dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{S_i}\dot{x}(s)\,ds\bigg)\\
&\quad - \sum_{i=1}^{2}e^{-2\alpha k_i}\int_{t-k_i}^{t}x^{\mathsf{T}}(s)\overline{T_i}x(s)\,ds.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Chú ý rằng, khi $h_i(t) \ge h_{i\text{med}}$, ta có

$$
-\int_{t-h_{i\text{med}}-\delta_i}^{t-h_{i\text{med}}+\delta_i}\dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{S_i}\dot{x}(s)\,ds \le -\int_{t-h_i(t)}^{t-h_{i\text{med}}}\dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{S_i}\dot{x}(s)\,ds,
$$

và khi $h_i(t) < h_{i\text{med}}$, ta có

$$
-\int_{t-h_{i\text{med}}-\delta_i}^{t-h_{i\text{med}}+\delta_i}\dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{S_i}\dot{x}(s)\,ds \le -\int_{t-h_{i\text{med}}}^{t-h_i(t)}\dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{S_i}\dot{x}(s)\,ds.
$$

Do đó, với $\Delta h_i(t) := h_i(t) - h_{i\text{med}}, i = 1, 2$, ta có đánh giá sau:

$$-\int_{t-h_{i\text{med}}-\delta_i}^{t-h_{i\text{med}}+\delta_i} \dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{S_i}\dot{x}(s)\,ds \le -\text{sgn}(\Delta h_i(t)) \int_{t-h_i(t)}^{t-h_{i\text{med}}} \dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{S_i}\dot{x}(s)\,ds, i = 1, 2. \tag{3.7}$$

Đặt

$$\zeta^{\mathsf{T}}(t) = \begin{bmatrix} x^{\mathsf{T}}(t) & x^{\mathsf{T}}(t-h_{1\text{med}}) & x^{\mathsf{T}}(t-h_{2\text{med}}) & \dot{x}^{\mathsf{T}}(t) \end{bmatrix},$$
$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \overline{M_1} & \overline{M_2} & \overline{M_3} & \overline{M_4} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Z} = \begin{bmatrix} \overline{Z_1} & \overline{Z_2} & \overline{Z_3} & \overline{Z_4} \end{bmatrix}, \mathcal{W} = \begin{bmatrix} W & W & W & W \end{bmatrix}.$$

Từ công thức Newton–Leibniz và công thức (3.5), ta có

$$2\zeta^{\mathsf{T}}(t)\mathcal{M}^{\mathsf{T}}\left[x(t) - x(t-h_{1\text{med}}) - \int_{t-h_{1\text{med}}}^{t} \dot{x}(s)\,ds\right] = 0, \tag{3.8}$$

$$2\zeta^{\mathsf{T}}(t)\mathcal{Z}^{\mathsf{T}}\left[x(t) - x(t-h_{2\text{med}}) - \int_{t-h_{2\text{med}}}^{t} \dot{x}(s)\,ds\right] = 0, \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} 2\zeta^{\mathsf{T}}(t)\mathcal{W}^{\mathsf{T}} \Bigg[&[A_0 + B_0K]x(t) + A_1x(t-h_{1\text{med}}) - A_1\int_{t-h_1(t)}^{t-h_{1\text{med}}} \dot{x}(s)\,ds \\ &+ A_2\int_{t-k_1(t)}^{t} x(s)\,ds + B_1Kx(t-h_{2\text{med}}) \\ &- B_1K\int_{t-h_2(t)}^{t-h_{2\text{med}}} \dot{x}(s)\,ds + B_2K\int_{t-k_2(t)}^{t} x(s)\,ds - \dot{x}(t)\Bigg] = 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Áp dụng các Bổ đề 1.1 và Bổ đề 1.2, ta có các đánh giá sau:

$$\begin{aligned} &-2\zeta^{\mathsf{T}}(t)\mathcal{M}^{\mathsf{T}}\int_{t-h_{1\text{med}}}^{t} \dot{x}(s)\,ds \\ &\le e^{2\alpha h_{1\text{med}}} h_{1\text{med}}\zeta^{\mathsf{T}}(t)\mathcal{M}^{\mathsf{T}}\overline{R_1}^{-1}\mathcal{M}\zeta(t) \\ &\quad + \frac{1}{h_{1\text{med}}}e^{-2\alpha h_{1\text{med}}}\left(\int_{t-h_{1\text{med}}}^{t} \dot{x}(s)\,ds\right)^{\mathsf{T}}\overline{R_1}\left(\int_{t-h_{1\text{med}}}^{t} \dot{x}(s)\,ds\right) \\ &\le e^{2\alpha h_{1\text{med}}} h_{1med}\zeta^{\mathsf{T}}(t)\mathcal{M}^{\mathsf{T}}\overline{R_1}^{-1}\mathcal{M}\zeta(t) + e^{-2\alpha h_{1\text{med}}}\int_{t-h_{1\text{med}}}^{t} \dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{R_1}\dot{x}(s)\,ds; \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} &-2\zeta^{\mathsf{T}}(t)\mathcal{Z}^{\mathsf{T}}\int_{t-h_{2\text{med}}}^{t} \dot{x}(s)\,ds \\ &\le e^{2\alpha h_{2\text{med}}} h_{2\text{med}}\zeta^{\mathsf{T}}(t)\mathcal{Z}^{\mathsf{T}}\overline{R_2}^{-1}\mathcal{Z}\zeta(t) + e^{-2\alpha h_{2\text{med}}}\int_{t-h_{2\text{med}}}^{t} \dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{R_2}\dot{x}(s)\,ds. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Khi $h_1(t) \geq h_{1\text{med}}$, áp dụng các Bổ đề 1.1 và Bổ đề 1.2, ta có

$$\begin{aligned}
&-2\zeta^{\mathsf{T}}(t)\mathcal{W}^{\mathsf{T}}A_1\int_{t-h_1(t)}^{t-h_{1\text{med}}}\dot{x}(s)\,ds\\
&\leq e^{2\alpha(h_{1med}+\delta_1)}\delta_1\zeta^{\mathsf{T}}(t)\mathcal{W}^{\mathsf{T}}A_1\overline{S_1}^{-1}A_1^{\mathsf{T}}\mathcal{W}\zeta(t)\\
&\quad+\frac{1}{\delta_1}e^{-2\alpha(h_{1\text{med}}+\delta_1)}\bigg(\int_{t-h_1(t)}^{t-h_{1\text{med}}}\dot{x}(s)\,ds\bigg)^{\mathsf{T}}\overline{S_1}\bigg(\int_{t-h_1(t)}^{t-h_{1\text{med}}}\dot{x}(s)\,ds\bigg)\\
&\leq e^{2\alpha(h_{1\text{med}}+\delta_1)}\delta_1\zeta^{\mathsf{T}}(t)\mathcal{W}^{\mathsf{T}}A_1\overline{S_1}^{-1}A_1^{\mathsf{T}}\mathcal{W}\zeta(t)\\
&\quad+e^{-2\alpha(h_{1\text{med}}+\delta_1)}\int_{t-h_1(t)}^{t-h_{1\text{med}}}\dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{S_1}\dot{x}(s)\,ds.
\end{aligned}$$

Một cách hoàn toàn tương tự, khi $h_1(t) < h_{1\text{med}}$, ta có

$$\begin{aligned}
&-2\zeta^{\mathsf{T}}(t)\mathcal{W}^{\mathsf{T}}A_1\int_{t-h_1(t)}^{t-h_{1\text{med}}}\dot{x}(s)\,ds=2\zeta^{\mathsf{T}}(t)\mathcal{W}^{\mathsf{T}}A_1\int_{t-h_{1\text{med}}}^{t-h_1(t)}\dot{x}(s)\,ds\\
&\leq e^{2\alpha(h_{1\text{med}}+\delta_1)}\delta_1\zeta^{\mathsf{T}}(t)\mathcal{W}^{\mathsf{T}}A_1\overline{S_1}^{-1}A_1^{\mathsf{T}}\mathcal{W}\zeta(t)\\
&\quad+e^{-2\alpha(h_{1\text{med}}+\delta_1)}\delta_1^{-1}\bigg(\int_{t-h_{1\text{med}}}^{t-h_1(t)}\dot{x}(s)\,ds\bigg)^{\mathsf{T}}\overline{S_1}\bigg(\int_{t-h_{1\text{med}}}^{t-h_1(t)}\dot{x}(s)\,ds\bigg)\\
&\leq e^{2\alpha(h_{1\text{med}}+\delta_1)}\delta_1\zeta^{\mathsf{T}}(t)\mathcal{W}^{\mathsf{T}}A_1\overline{S_1}^{-1}A_1^{\mathsf{T}}\mathcal{W}\zeta(t)\\
&\quad+e^{-2\alpha(h_{1\text{med}}+\delta_1)}\int_{t-h_{1\text{med}}}^{t-h_1(t)}\dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{S_1}\dot{x}(s)\,ds.
\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}
&-2\zeta^{\mathsf{T}}(t)\mathcal{W}^{\mathsf{T}}A_1\int_{t-h_1(t)}^{t-h_{1\text{med}}}\dot{x}(s)\,ds\\
&\leq e^{2\alpha(h_{1\text{med}}+\delta_1)}\delta_1\zeta^{\mathsf{T}}(t)\mathcal{W}^{\mathsf{T}}A_1\overline{S_1}^{-1}A_1^{\mathsf{T}}\mathcal{W}\zeta(t)\\
&\quad+\operatorname{sgn}(\Delta h_1(t))e^{-2\alpha(h_{1\text{med}}+\delta_1)}\int_{t-h_1(t)}^{t-h_{1\text{med}}}\dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{S_1}\dot{x}(s)\,ds.
\end{aligned}\tag{3.13}$$

Tương tự như đánh giá (3.13), ta có

$$\begin{aligned}
&-2\zeta^{\mathsf{T}}(t)\mathcal{W}^{\mathsf{T}}B_1K\int_{t-h_2(t)}^{t-h_{2\text{med}}}\dot{x}(s)\,ds\\
&\leq e^{2\alpha(h_{2med}+\delta_2)}\delta_2\zeta^{\mathsf{T}}(t)\mathcal{W}^{\mathsf{T}}B_1K\overline{S_2}^{-1}K^{\mathsf{T}}B_1^{\mathsf{T}}\mathcal{W}\zeta(t)\\
&\quad+\operatorname{sgn}(\Delta h_2(t))e^{-2\alpha(h_{2\text{med}}+\delta_2)}\int_{t-h_2(t)}^{t-h_{2\text{med}}}\dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{S_2}\dot{x}(s)\,ds.
\end{aligned}\tag{3.14}$$

Theo Bổ đề 1.1 và Bổ đề 1.2, ta có các đánh giá sau:

$$\begin{aligned}
&2\zeta^{\mathsf T}(t)\mathcal W^{\mathsf T}A_2\int_{t-k_1(t)}^{t}x(s)\,ds\\
&\le e^{2\alpha k_1}k_1\zeta^{\mathsf T}(t)\mathcal W^{\mathsf T}A_2\overline{T_1}^{\,-1}A_2^{\mathsf T}\mathcal W\zeta(t)\\
&\quad+\frac{1}{k_1}e^{-2\alpha k_1}\Big(\int_{t-k_1(t)}^{t}x(s)\,ds\Big)^{\mathsf T}\overline{T_1}\Big(\int_{t-k_1(t)}^{t}x(s)\,ds\Big)\\
&\le e^{2\alpha k_1}k_1\zeta^{\mathsf T}(t)\mathcal W^{\mathsf T}A_2\overline{T_1}^{\,-1}A_2^{\mathsf T}\mathcal W\zeta(t)\\
&\quad+e^{-2\alpha k_1}\int_{t-k_1}^{t}x^{\mathsf T}(s)\overline{T_1}x(s)\,ds.
\end{aligned}\tag{3.15}$$

Tương tự như đánh giá (3.15), ta có ước lượng sau:

$$\begin{aligned}
&2\zeta^{\mathsf T}(t)\mathcal W^{\mathsf T}B_2K\int_{t-k_2(t)}^{t}x(s)\,ds\\
&\le k_2e^{2\alpha k_2}\zeta^{\mathsf T}(t)\mathcal W^{\mathsf T}B_2K\overline{T_2}^{\,-1}K^{\mathsf T}B_2^{\mathsf T}\mathcal W\zeta(t)+e^{-2\alpha k_2}\int_{t-k_2}^{t}x^{\mathsf T}(s)\overline{T_2}x(s)\,ds.
\end{aligned}\tag{3.16}$$

Từ các đánh giá (3.6)-(3.16), ta có

$$\begin{aligned}
&\dot V(t,x_t)+2\alpha V(t,x_t)\\
&\le 2x^{\mathsf T}(t)\overline{P}\dot x(t)+x^{\mathsf T}(t)\big[\,\overline{Q_1}+\overline{Q_2}+k_1\overline{T_1}+k_2\overline{T_2}+2\alpha\overline{P}\,\big]x(t)\\
&\quad-e^{-2\alpha h_{1\mathrm{med}}}x^{\mathsf T}(t-h_{1\mathrm{med}})\overline{Q_1}x(t-h_{1\mathrm{med}})\\
&\quad-e^{-2\alpha h_{2\mathrm{med}}}x^{\mathsf T}(t-h_{2\mathrm{med}})\overline{Q_2}x(t-h_{2\mathrm{med}})\\
&\quad+\dot x^{\mathsf T}(t)\big[\,h_{1\mathrm{med}}\overline{R_1}+h_{2\mathrm{med}}\overline{R_2}+2\delta_1\overline{S_1}+2\delta_2\overline{S_2}\,\big]\dot x(t)\\
&\quad+2\zeta^{\mathsf T}(t)\mathcal M^{\mathsf T}\big[x(t)-x(t-h_{1\mathrm{med}})\big]\\
&\quad+2\zeta^{\mathsf T}(t)\mathcal Z^{\mathsf T}\big[x(t)-x(t-h_{2\mathrm{med}})\big]\\
&\quad+2\zeta^{\mathsf T}(t)\mathcal W^{\mathsf T}\big[(A_0+B_0K)x(t)+A_1x(t-h_{1\mathrm{med}})+B_1Kx(t-h_{2\mathrm{med}})-\dot x(t)\big]\\
&\quad+\zeta^{\mathsf T}(t)\Big[e^{2\alpha h_{1\mathrm{med}}}h_{1\mathrm{med}}\mathcal M^{\mathsf T}\overline{R_1}^{\,-1}\mathcal M+e^{2\alpha h_{2\mathrm{med}}}h_{2\mathrm{med}}\mathcal Z^{\mathsf T}\overline{R_2}^{\,-1}\mathcal Z\\
&\qquad+e^{2\alpha(h_{1\mathrm{med}}+\delta_1)}\delta_1\mathcal W^{\mathsf T}A_1\overline{S_1}^{\,-1}A_1^{\mathsf T}\mathcal W\\
&\qquad+e^{2\alpha(h_{2\mathrm{med}}+\delta_2)}\delta_2\mathcal W^{\mathsf T}B_1K\overline{S_2}^{\,-1}K^{\mathsf T}B_1^{\mathsf T}\mathcal W\\
&\qquad+k_1e^{2\alpha k_1}\mathcal W^{\mathsf T}A_2\overline{T_1}^{\,-1}A_2^{\mathsf T}\mathcal W+k_2e^{2\alpha k_2}\mathcal W^{\mathsf T}B_2K\overline{T_2}^{\,-1}K^{\mathsf T}B_2^{\mathsf T}\mathcal W\Big]\zeta(t).
\end{aligned}\tag{3.17}$$

Vậy, ta có

$$\dot V(t,x_t)+2\alpha V(t,x_t)\le\zeta^{\mathsf T}(t)\Omega\zeta(t)-x^{\mathsf T}(t)\mathcal H x(t),\tag{3.18}$$

trong đó

$$\mathcal{H} = Q + WY^{\mathsf{T}}RYW,$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} & \Omega_{14} \\ * & \Omega_{22} & \Omega_{23} & \Omega_{24} \\ * & * & \Omega_{33} & \Omega_{34} \\ * & * & * & \Omega_{44} \end{bmatrix} + \overline{\Omega},$$

với

$$\begin{aligned}
\Omega_{11} &= 2\alpha\overline{P} + \overline{Q_1} + \overline{Q_2} + k_1\overline{T_1} + k_2\overline{T_2} + \overline{M_1}^{\mathsf{T}} + \overline{M_1} + W(A_0 + B_0K) \\
&\quad + (A_0 + B_0K)^{\mathsf{T}}W + \overline{Z_1}^{\mathsf{T}} + \overline{Z_1} + Q + WY^{\mathsf{T}}RYW, \\
\Omega_{12} &= \overline{M_2} + \overline{Z_2} - \overline{M_1}^{\mathsf{T}} + WA_1 + (A_0 + B_0K)^{\mathsf{T}}W, \\
\Omega_{13} &= \overline{M_3} + \overline{Z_3} - \overline{Z_1}^{\mathsf{T}} + WB_1K + (A_0 + B_0K)^{\mathsf{T}}W, \\
\Omega_{14} &= \overline{P} + \overline{M_4} + \overline{Z_4} + (A_0 + B_0K)^{\mathsf{T}}W - W, \\
\Omega_{22} &= -e^{-2\alpha h_{1\mathrm{med}}}\overline{Q_1} - \overline{M_2}^{\mathsf{T}} - \overline{M_2} + WA_1 + A_1^{\mathsf{T}}W, \\
\Omega_{23} &= -\overline{M_3} - \overline{Z_2}^{\mathsf{T}} + A_1^{\mathsf{T}}W + WB_1K, \\
\Omega_{24} &= -\overline{M_4} + A_1^{\mathsf{T}}W - W, \\
\Omega_{33} &= -e^{-2\alpha h_{2\mathrm{med}}}\overline{Q_2} - \overline{Z_3}^{\mathsf{T}} - \overline{Z_3} + WB_1K + K^{\mathsf{T}}B_1^{\mathsf{T}}W, \\
\Omega_{34} &= -\overline{Z_4} + K^{\mathsf{T}}B_1^{\mathsf{T}}W - W, \\
\Omega_{44} &= h_{1\mathrm{med}}\overline{R_1} + h_{2\mathrm{med}}\overline{R_2} + 2\delta_1\overline{S_1} + 2\delta_2\overline{S_2} - 2W, \\
\overline{\Omega} &= e^{2\alpha h_{1\mathrm{med}}}h_{1\mathrm{med}}\mathcal{M}^{\mathsf{T}}\overline{R_1}^{-1}\mathcal{M} + e^{2\alpha h_{2\mathrm{med}}}h_{2\mathrm{med}}\mathcal{Z}^{\mathsf{T}}\overline{R_2}^{-1}\mathcal{Z} \\
&\quad + e^{2\alpha(h_{1\mathrm{med}}+\delta_1)}\delta_1\mathcal{W}^{\mathsf{T}}A_1\overline{S_1}^{-1}A_1^{\mathsf{T}}\mathcal{W} + e^{2\alpha(h_{2\mathrm{med}}+\delta_2)}\delta_2\mathcal{W}^{\mathsf{T}}B_1K\overline{S_2}^{-1}K^{\mathsf{T}}B_1^{\mathsf{T}}\mathcal{W} \\
&\quad + k_1e^{2\alpha k_1}\mathcal{W}^{\mathsf{T}}A_2\overline{T_1}^{-1}A_2^{\mathsf{T}}\mathcal{W} + k_2e^{2\alpha k_2}\mathcal{W}^{\mathsf{T}}B_2K\overline{T_2}^{-1}K^{\mathsf{T}}B_2^{\mathsf{T}}\mathcal{W}.
\end{aligned}$$

Mặt khác, bằng cách sử dụng Bổ đề Schur, điều kiện $\Omega < 0$ tương đương với điều kiện

$$\tilde{\Omega} = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} & \Omega_{14} & \overline{\Omega_1} \\ * & \Omega_{22} & \Omega_{23} & \Omega_{24} & \overline{\Omega_2} \\ * & * & \Omega_{33} & \Omega_{34} & \overline{\Omega_3} \\ * & * & * & \Omega_{44} & \overline{\Omega_4} \\ * & * & * & * & \Theta \end{bmatrix} < 0,$$

trong đó

$$\begin{aligned}
\overline{\Omega_1} &= \Big[h_{1\mathrm{med}}\overline{M_1}^{\mathsf{T}} \quad h_{2\mathrm{med}}\overline{Z_1}^{\mathsf{T}} \quad \delta_1 W A_1 \quad \delta_2 W B_1 K \quad k_1 W A_2 \quad k_2 W B_2 K\Big],\\
\overline{\Omega_2} &= \Big[h_{1\mathrm{med}}\overline{M_2}^{\mathsf{T}} \quad h_{2\mathrm{med}}\overline{Z_2}^{\mathsf{T}} \quad \delta_1 W A_1 \quad \delta_2 W B_1 K \quad k_1 W A_2 \quad k_2 W B_2 K\Big],\\
\overline{\Omega_3} &= \Big[h_{1\mathrm{med}}\overline{M_3}^{\mathsf{T}} \quad h_{2\mathrm{med}}\overline{Z_3}^{\mathsf{T}} \quad \delta_1 W A_1 \quad \delta_2 W B_1 K \quad k_1 W A_2 \quad k_2 W B_2 K\Big],\\
\overline{\Omega_4} &= \Big[h_{1\mathrm{med}}\overline{M_4}^{\mathsf{T}} \quad h_{2\mathrm{med}}\overline{Z_4}^{\mathsf{T}} \quad \delta_1 W A_1 \quad \delta_2 W B_1 K \quad k_1 W A_2 \quad k_2 W B_2 K\Big],\\
\Theta &= \mathrm{diag}\Big\{ - h_{1\mathrm{med}} e^{-2\alpha h_{1\mathrm{med}}}\overline{R_1}, -h_{2\mathrm{med}} e^{-2\alpha h_{2\mathrm{med}}}\overline{R_2}, -\delta_1 e^{-2\alpha(h_{1\mathrm{med}}+\delta_1)}\overline{S_1},\\
&\qquad - \delta_2 e^{-2\alpha(h_{2\mathrm{med}}+\delta_2)}\overline{S_2}, -k_1 e^{-2\alpha k_1}\overline{T_1}, -k_2 e^{-2\alpha k_2}\overline{T_2}\Big\}.
\end{aligned}$$

Bây giờ, ta nhân cả bên trái và bên phải của ma trận $\tilde{\Omega}$ với

$$\Gamma = \mathrm{diag}\{N, N, N, N, N, N, N, N, N, N\},$$

ta thu được $\tilde{\Xi} = \Gamma\tilde{\Omega}\Gamma$. Ta có điều kiện $\tilde{\Omega} < 0$ tương đương với điều kiện $\tilde{\Xi} < 0$. Lại áp dụng Bổ đề Schur một lần nữa, ta có điều kiện $\tilde{\Xi} < 0$ tương đương với điều kiện $\mathcal{L} < 0$. Do đó từ các điều kiện (3.4) và (3.18), ta có

$$\dot{V}(t, x_t) + 2\alpha V(t, x_t) \le -x^{\mathsf{T}}(t)\mathcal{H}x(t). \tag{3.19}$$

Vì $\mathcal{H} > 0$, ta có

$$\dot{V}(t, x_t) + 2\alpha V(t, x_t) \le 0. \tag{3.20}$$

Đặt $v(t) = e^{2\alpha t}V(t, x_t)$. Lấy đạo hàm theo thời gian của $v(t)$, ta có

$$\dot{v}(t) = e^{2\alpha t}\Big(\dot{V}(t, x_t) + 2\alpha V(t, x_t)\Big) \le 0 \tag{3.21}$$

Lấy tích phân hai vế của bất đẳng thức (3.21) từ 0 tới t, ta thu được

$$v(t) - v(0) \le 0 \Leftrightarrow e^{2\alpha t}V(t, x_t) - V(0, x_0) \le 0.$$

Từ đó suy ra

$$V(t, x_t) \le V(0, x_0)e^{-2\alpha t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

Bằng các tính toán đơn giản, ta có

$$\lambda\|x(t, \phi)\|^2 \le V(t, x_t) \le V(0, x_0)e^{-2\alpha t} \le \Lambda e^{-2\alpha t}\|\phi\|^2_{C^1},$$

và do đó nghiệm $x(t, \phi)$ bất kì của hệ đóng thỏa mãn đánh giá

$$\|x(t, \phi)\| \le \sqrt{\frac{\Lambda}{\lambda}}e^{-\alpha t}\|\phi\|_{C^1}, \quad \forall t \ge 0,$$

điều này chứng tỏ hệ đóng là $\alpha-$ổn định. Bây giờ, ta đi tìm giá trị đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ (3.1). Từ điều kiện (3.19) và $V(t,x_t) > 0$, ta có

$$\dot{V}(t,x_t) \leq -x^{\mathsf{T}}(t)\mathcal{H}x(t). \tag{3.22}$$

Lấy tích phân hai vế của bất đẳng thức (3.22) từ 0 tới s, ta có

$$V(s,x_s) - V(0,x_0) \leq -\int_0^s x^{\mathsf{T}}(t)\mathcal{H}x(t)\,dt.$$

Suy ra

$$\int_0^s x^{\mathsf{T}}(t)\mathcal{H}x(t)\,dt \leq V(0,x_0) = \Lambda\|\phi\|^2.$$

Trong biểu thức trên cho $s \to +\infty$, ta có

$$J = \int_0^{+\infty} x^{\mathsf{T}}(t)\mathcal{H}x(t)\,dt \leq \Lambda\|\phi\|^2 = J^*.$$

Định lý được chứng minh hoàn toàn.

□

Nhận xét 3.1 Như đã phân tích trong phần mở đầu, việc giải bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho lớp hệ điều khiển có trễ hỗn hợp trên cả biến trạng thái và biến điều khiển với độ trễ là các hàm khác nhau, độ trễ là hàm liên tục nhưng không nhất thiết khả vi là rất khó khăn và phức tạp. Bởi vì, ta cần phải thiết kế một điều khiển ngược $u(t) = Kx(t), K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ để hệ điều khiển (3.1) không những là ổn định hóa được dạng mũ mà giá trị của hàm chi phí toàn phương $J = \int_0^{+\infty}[x^{\mathsf{T}}(t)Qx(t) + u^{\mathsf{T}}(t)Ru(t)]\,dt$ phải nhỏ hơn một số thực dương J^* nào đó. Bằng cách xây dựng hàm Lyapunov–Krasovskii mới trong đó có chứa tốc độ ổn định mũ α, các cận trên và cận dưới của độ trễ, các trung bình cộng và trung bình hiệu của các cận trên và cận dưới của độ trễ, kết hợp với một vài đánh giá mới, chúng tôi đưa ra một tiêu chuẩn mới cho bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho lớp hệ điều khiển có trễ hỗn hợp biến thiên trên cả biến trạng thái và biến điều khiển với độ trễ biến thiên dạng khoảng và là các hàm liên tục nhưng không nhất thiết khả vi. Điều kiện đủ của chúng tôi được đưa ra dưới dạng các bất đẳng thức ma trận tuyến tính (LMIs). Tính tương thích của điều kiện dạng LMIs có thể kiểm tra được bằng hộp công cụ LMI Toolbox trong Matlab (xem [21]). Ngoài ra, trong điều kiện đủ mà chúng tôi đề xuất, điều khiển ngược ổn định hóa và các chỉ số ổn định Lyapunov được xác định một cách tường minh và có thể tính toán được bằng phần mềm Matlab.

Sau đây, chúng tôi đưa ra một ví dụ số minh họa cho Định lý 3.1.

Ví dụ 3.1 Xét hệ phương trình vi phân có trễ hỗn hợp biến thiên trên cả biến trạng thái và biến điều khiển (3.1) với

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} -0.9 & -0.5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0.9 & -0.1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{cases} h_1(t) = 0.1 + 0.2 \sin t & \text{nếu} \quad t \in \mathcal{I} = \cup_{k \geq 0} [2k\pi, (2k+1)\pi] \\ h_1(t) = 0.1 & \text{nếu} \quad t \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathcal{I}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_2(t) = 0.1 + 0.7 \sin t & \text{nếu} \quad t \in \mathcal{I} = \cup_{k \geq 0} [2k\pi, (2k+1)\pi] \\ h_2(t) = 0.1 & \text{nếu} \quad t \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathcal{I}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1(t) = 0.3 \cos t & \text{nếu} \quad t \in \mathcal{I} = \cup_{k \geq 0} [2k\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}] \\ k_1(t) = 0 & \text{nếu} \quad t \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathcal{I}, \end{cases}$$

$$k_2(t) = 0.9|\sin t|,$$

với hàm chi phí toàn phương có dạng (3.3), với

$$Q = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix}, \quad R = [10]$$

Chú ý rằng các hàm trễ $h_1(t), h_2(t), k_1(t), k_2(t)$ là các hàm không khả vi và các ma trận A_0, $A_0+A_1+A_2$ là không ổn định. Vì vậy, các phương pháp đề xuất trong các nghiên cứu [47, 63, 66] là không áp dụng được cho lớp hệ được xét trong ví dụ này. Ta có $0.1 \leq h_1(t) \leq 0.3; 0.1 \leq h_2(t) \leq 0.8; 0 \leq k_1(t) \leq 0.3; 0 \leq k_2(t) \leq 0.9, \forall t \geq 0$. Cho trước số $\alpha = 0.1$. Bằng cách sử dụng hộp công cụ Matlab (LMI toolbox of Matlab) [21], chúng tôi kiểm tra được các điều kiện trong Định lý 3.1 được nghiệm đúng với $h_{1\min} = 0.1, h_{1\max} = 0.3, h_{2\min} = 0.1, h_{2\max} = 0.8, k_1 = 0.3, k_2 = 0.9, h_{1\text{med}} = 0.2, h_{2\text{med}} = 0.45, \delta_1 = 0.1, \delta_2 = 0.35$, và các ma trận

$$N = \begin{bmatrix} 2.4483 & 0.1213 \\ 0.1213 & 0.5379 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 5.5875 & -0.0578 \\ -0.0578 & 1.0843 \end{bmatrix},$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0.0815 & 0.0102 \\ 0.0102 & 0.0139 \end{bmatrix}, Q_2 = \begin{bmatrix} 1.1563 & 0.3121 \\ 0.3121 & 0.6039 \end{bmatrix},$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} 3.9416 & 0.0836 \\ 0.0836 & 1.4300 \end{bmatrix}, \ R_2 = \begin{bmatrix} 0.9256 & -0.1628 \\ -0.1628 & 0.1699 \end{bmatrix},$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 4.9908 & 0.5717 \\ 0.5717 & 1.0352 \end{bmatrix}, \ S_2 = \begin{bmatrix} 0.0406 & 0.0034 \\ 0.0034 & 0.0048 \end{bmatrix},$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} 3.2408 & 0.0921 \\ 0.0921 & 0.0154 \end{bmatrix}, \ T_2 = \begin{bmatrix} 0.0896 & 0.0155 \\ 0.0155 & 0.0166 \end{bmatrix},$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} -18.8722 & -0.3154 \\ -0.3521 & -6.8317 \end{bmatrix}, \ M_2 = \begin{bmatrix} 18.8523 & 0.3380 \\ 0.3654 & 6.8195 \end{bmatrix},$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 0.0396 & -0.0105 \\ -0.0082 & 0.0002 \end{bmatrix}, \ M_4 = \begin{bmatrix} 0.0285 & -0.0147 \\ -0.0099 & -0.0086 \end{bmatrix},$$

$$Z_1 = \begin{bmatrix} -1.8556 & 0.3385 \\ 0.3373 & -0.3429 \end{bmatrix}, \ Z_2 = \begin{bmatrix} 0.0006 & -0.0035 \\ -0.0012 & -0.0004 \end{bmatrix},$$

$$Z_3 = \begin{bmatrix} 1.8772 & -0.3275 \\ -0.3312 & 0.3445 \end{bmatrix}, \ Z_4 = \begin{bmatrix} 0.0006 & -0.0019 \\ -0.0005 & -0.0004 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} -0.0013 & -0.0010 \end{bmatrix}.$$

Điều khiển ngược ổn định hóa hệ (3.1) được cho bởi

$$u(t) = \begin{bmatrix} -0.0004 & -0.0017 \end{bmatrix} x(t).$$

Hơn nữa, nghiệm $x(t, \phi)$ bất kì của hệ đóng thỏa mãn đánh giá mũ sau

$$\|x(t, \phi)\| \leq 11.5732 e^{-0.1t} \|\phi\|_{C^1}, \quad \forall t \geq 0,$$

và giá trị đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ đóng là

$$J \leq J^* = 133.9379 \|\phi\|^2_{C^1}.$$

3.2. Bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ phương trình vi phân tuyến tính có trễ biến thiên trên biến trạng thái và biến quan sát

Xét hệ điều khiển tuyến tính có trễ biến thiên trên biến trạng thái và biến quan sát

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Dx(t - h_1(t)) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t - h_2(t)), \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-d, 0], \end{cases} \tag{3.23}$$

ở đó $d = \max\{\overline{h}_1, \overline{h}_2\}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véctơ trạng thái; $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là véctơ điều khiển; $y(t) \in \mathbb{R}^r$ là véctơ quan sát; A, D, B, C là các ma trận thực cho trước có số chiều thích hợp; $\phi \in C^1([-d, 0], \mathbb{R}^n)$ là hàm ban đầu với chuẩn xác định bởi

$$\|\phi\|_{C^1} = \sup_{t \in [-d,0]} \{\|\phi(t)\|, \|\dot{\phi}(t)\|\};$$

Các hàm trễ $h_1(t), h_2(t)$ thỏa mãn điều kiện:

$$0 < h_1 < h_1(t) \leq \overline{h}_1, \quad 0 < h_2 < h_2(t) \leq \overline{h}_2.$$

Chú ý rằng trong bài toán này, chúng tôi xét trường hợp các hàm trễ là các hàm liên tục không nhất thiết khả vi và cận dưới của hàm trễ là thực sự lớn hơn 0.

Trong mục này, chúng tôi sẽ thiết kế một bộ điều khiển phản hồi đầu ra động (dynamic output feedback controller) sau để ổn định hóa hệ điều khiển tuyến tính có trễ biến thiên trên biến trạng thái và biến quan sát (3.23):

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = A_1\xi(t) + B_1 y(t), \quad t \geq 0, \\ \xi(t) = 0, \quad t \in [-d, 0], \\ u(t) = C_1\xi(t), \end{cases} \tag{3.24}$$

trong đó $\xi(t) \in \mathbb{R}^n$; A_1, B_1, C_1 là các ma trận hằng chưa biết sẽ được xác định sau.

Liên kết với hệ điều khiển (3.23), ta xét hàm chi phí toàn phương sau:

$$J = \int_0^{+\infty} [x^{\mathsf{T}}(t)Qx(t) + u^{\mathsf{T}}(t)Ru(t)]\, dt, \tag{3.25}$$

với $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}, R \in \mathbb{R}^{m\times m}$ là các ma trận thực, đối xứng, xác định dương cho trước. Thay bộ điều khiển phản hồi đầu ra động (3.24) vào hệ (3.23), ta thu được hệ đóng sau:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \overline{A}z(t) + \overline{D}_1 z(t - h_1(t)) + \overline{D}_2 z(t - h_2(t)), \\ z(t) = \overline{\phi}(t), \quad t \in [-d, 0], \end{cases} \tag{3.26}$$

ở đó $z(t) = [x^{\mathsf{T}}(t) \quad \xi^{\mathsf{T}}(t)]^{\mathsf{T}}, \overline{\phi}(t) = [\phi^{\mathsf{T}}(t) \quad 0]^{\mathsf{T}}$ và

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} A & BC_1 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}, \quad \overline{D}_1 = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{D}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_1 C & 0 \end{pmatrix}.$$

Ta thấy rằng hệ đóng (3.26) luôn tồn tại và duy nhất nghiệm trên $[0, +\infty)$ theo Định lý 1.6 trong Chương 1.

Khi đó hàm chi phí toàn phương (3.25) trở thành:

$$J = \int_0^{+\infty} [x^{\mathsf{T}}(t)Qx(t) + \xi^{\mathsf{T}}(t)C_1^{\mathsf{T}} RC_1\xi(t)]\, dt. \tag{3.27}$$

Trong mục này, chúng tôi sẽ thiết kế một bộ phản hồi đầu ra động (3.24) cho hệ điều khiển tuyến tính có trễ biến thiên trên biến trạng thái và biến quan sát (3.23) và hàm chi phí toàn phương (3.25) sao cho hệ đóng (3.26) là $\alpha-$ổn định mũ và giá trị của hàm chi phí toàn phương (3.25) thỏa mãn $J \leq J^*$, với J^* là một hằng số dương nào đó sẽ được xác định sau.

Cho số $\alpha > 0$, các ma trận đối xứng, xác định dương $P, Q_1, Q_2, U_1, U_2, R_1, R_2, H_1, H_2, S_i, W_i, i = 1, \ldots, 4$ và một ma trận Y. Để thuận tiện cho việc trình bày kết quả chính của mục này, ta ký hiệu:

$$\begin{aligned}
&\lambda = \lambda_{\min}(P^{-1}),\\
&\Lambda = \lambda_{\max}(P^{-1}) + h_1\lambda_{\max}(P^{-1}Q_1P^{-1}) + (\overline{h}_1 - h_1)\lambda_{\max}(P^{-1}Q_2P^{-1})\\
&\quad + \frac{1}{2}h_1^2\lambda_{\max}(P^{-1}S_1P^{-1}) + \frac{1}{2}(\overline{h}_1^2 - h_1^2)\lambda_{\max}(P^{-1}S_2P^{-1})\\
&\quad + \frac{1}{2}h_1^2\lambda_{\max}(P^{-1}S_3P^{-1}) + \frac{1}{2}(\overline{h}_1^2 - h_1^2)\lambda_{\max}(P^{-1}S_4P^{-1})\\
&\quad + \frac{1}{6}h_1^3\lambda_{\max}(P^{-1}R_1P^{-1}) + \frac{1}{6}(\overline{h}_1^3 - h_1^3)\lambda_{\max}(P^{-1}R_2P^{-1})\\
&\quad + h_2\lambda_{\max}(P^{-1}U_1P^{-1}) + (\overline{h}_2 - h_2)\lambda_{\max}(P^{-1}U_2P^{-1}) + \frac{1}{2}h_2^2\lambda_{\max}(P^{-1}W_1P^{-1})\\
&\quad + \frac{1}{2}(\overline{h}_2^2 - h_2^2)\lambda_{\max}(P^{-1}W_2P^{-1}) + \frac{1}{2}h_2^2\lambda_{\max}(P^{-1}W_3P^{-1})\\
&\quad + \frac{1}{2}(\overline{h}_2^2 - h_2^2)\lambda_{\max}(P^{-1}W_4P^{-1}) + \frac{1}{6}h_2^3\lambda_{\max}(P^{-1}H_1P^{-1})\\
&\quad + \frac{1}{6}(\overline{h}_2^3 - h_2^3)\lambda_{\max}(P^{-1}H_2P^{-1}),\\
&\Xi = (\Xi_{ij})_{15\times 15}, \quad \Xi_{ji} = \Xi_{ij}^{\mathsf{T}}, \quad \forall i \neq j,\\
&\Psi = \begin{bmatrix} QP & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}},\\
&\Xi_{11} = AP + PA^{\mathsf{T}} + 2\alpha P + Q_1 + U_1 + h_1S_3 + (\overline{h}_1 - h_1)S_4 + h_2W_3\\
&\qquad + (\overline{h}_2 - h_2)W_4 - \frac{1}{h_1}e^{-2\alpha h_1}S_1 - 2e^{-4\alpha h_1}R_1 - 2\frac{(\overline{h}_1 - h_1)}{(\overline{h}_1 + h_1)}e^{-4\alpha\overline{h}_1}R_2\\
&\qquad - \frac{1}{h_2}e^{-2\alpha h_2}W_1 - 2e^{-4\alpha h_2}H_1 - 2\frac{(\overline{h}_2 - h_2)}{(\overline{h}_2 + h_2)}e^{-4\alpha\overline{h}_2}H_2,\\
&\Xi_{22} = -\frac{2}{\overline{h_1} - h_1}e^{-2\alpha\overline{h}_1}S_2,\ \Xi_{33} = -\frac{2}{\overline{h_2} - h_2}e^{-2\alpha\overline{h}_2}W_2,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Xi_{44} &= e^{-2\alpha h_1}Q_2 - e^{-2\alpha h_1}Q_1 - \frac{1}{h_1}e^{-2\alpha h_1}S_1 - \frac{1}{\overline{h}_1 - h_1}e^{-2\alpha\overline{h}_1}S_2,\\
\Xi_{55} &= -e^{-2\alpha\overline{h}_1}Q_2 - \frac{1}{\overline{h}_1 - h_1}e^{-2\alpha\overline{h}_1}S_2,\\
\Xi_{66} &= e^{-2\alpha h_2}U_2 - e^{-2\alpha h_2}U_1 - \frac{1}{h_2}e^{-2\alpha h_2}W_1 - \frac{1}{\overline{h}_2 - h_2}e^{-2\alpha\overline{h}_2}W_2,\\
\Xi_{77} &= -e^{-2\alpha\overline{h}_2}U_2 - \frac{1}{\overline{h}_2 - h_2}e^{-2\alpha\overline{h}_2}W_2,\\
\Xi_{88} &= -\frac{1}{h_1}e^{-2\alpha h_1}S_3 - \frac{2}{h_1^2}e^{-4\alpha h_1}R_1,\\
\Xi_{99} &= -\frac{1}{\overline{h}_1 - h_1}e^{-2\alpha\overline{h}_1}S_4 - \frac{2}{\overline{h}_1^2 - h_1^2}e^{-4\alpha\overline{h}_1}R_2,\\
\Xi_{10,10} &= -\frac{1}{h_2}e^{-2\alpha h_2}W_3 - \frac{2}{h_2^2}e^{-4\alpha h_2}H_1,\\
\Xi_{11,11} &= -\frac{1}{\overline{h}_2 - h_2}e^{-2\alpha\overline{h}_2}W_4 - \frac{2}{\overline{h}_2^2 - h_2^2}e^{-4\alpha\overline{h}_2}H_2,\\
\Xi_{12,12} &= h_1S_1 + (\overline{h}_1 - h_1)S_2 + \frac{1}{2}h_1^2R_1 + \frac{1}{2}(\overline{h}_1^2 - h_1^2)R_2 + h_2W_1 + (\overline{h}_2 - h_2)W_2\\
&\quad + \frac{1}{2}h_2^2H_1 + \frac{1}{2}(\overline{h}_2^2 - h_2^2)H_2 - 2P,\\
\Xi_{13,13} &= Y + Y^{\mathsf{T}} + 2\alpha P + BRB^{\mathsf{T}},\ \Xi_{12} = DP,\ \Xi_{13} = 0,\ \Xi_{14} = \frac{1}{h_1}e^{-2\alpha h_1}S_1,
\end{aligned}
$$

$$\Xi_{15} = 0,\ \Xi_{16} = \frac{1}{h_2}e^{-2\alpha h_2}W_1,\ \Xi_{17} = 0,\ \Xi_{18} = \frac{2}{h_1}e^{-4\alpha h_1}R_1,\ \Xi_{19} = \frac{2}{\overline{h}_1 + h_1}e^{-4\alpha\overline{h}_1}R_2,$$

$$\Xi_{1,10} = \frac{2}{h_2}e^{-4\alpha h_2}H_1,\ \Xi_{1,11} = \frac{2}{\overline{h}_2 + h_2}e^{-4\alpha\overline{h}_2}H_2,\ \Xi_{1,12} = PA^{\mathsf{T}},$$

$$\Xi_{1,13} = -BB^{\mathsf{T}},\ \Xi_{1,14} = \Xi_{1,15} = 0,$$

$$\Xi_{23} = 0,\ \Xi_{24} = \Xi_{25} = \frac{1}{\overline{h}_1 - h_1}e^{-2\alpha\overline{h}_1}S_2,$$

$$\Xi_{26} = \Xi_{27} = \Xi_{28} = \Xi_{29} = \Xi_{2,10} = \Xi_{2,11} = 0,$$

$$\Xi_{2,12} = PD^{\mathsf{T}},\ \Xi_{2,13} = \Xi_{2,14} = \Xi_{2,15} = 0,\ \Xi_{34} = \Xi_{35} = 0,$$

$$\Xi_{36} = \Xi_{37} = \frac{1}{\overline{h}_2 - h_2}e^{-2\alpha\overline{h}_2}W_2,$$

$$\Xi_{38} = \Xi_{39} = \Xi_{3,10} = \Xi_{3,11} = \Xi_{3,12} = \Xi_{3,13} = 0, \Xi_{3,14} = PC^{\mathsf{T}}, \Xi_{3,15} = 0,$$

$$\Xi_{45} = \Xi_{46} = \Xi_{47} = \Xi_{48} = \Xi_{49} = \Xi_{4,10} = \Xi_{4,11} = \Xi_{4,12} = \Xi_{4,13} = \Xi_{4,14} = \Xi_{4,15} = 0,$$

$$\Xi_{56} = \Xi_{57} = \Xi_{58} = \Xi_{59} = \Xi_{5,10} = \Xi_{5,11} = \Xi_{5,12} = \Xi_{5,13} = \Xi_{5,14} = \Xi_{5,15} = 0,$$

$$\Xi_{67} = ... = \Xi_{6,15} = 0,\ \Xi_{78} = ... = \Xi_{7,15} = 0,\ \Xi_{89} = ... = \Xi_{8,15} = 0,$$

$$\Xi_{9,10} = ... = \Xi_{9,15} = 0,\ \Xi_{10,11} = ... = \Xi_{10,15} = 0,$$

$$\Xi_{11,12} = ... = \Xi_{11,15} = 0,\ \Xi_{12,13} = -BB^{\mathsf{T}},\ \Xi_{12,14} = \Xi_{12,15} = 0,$$

$$\Xi_{13,14} = 0,\ \Xi_{13,15} = PC^{\mathsf{T}},\ \Xi_{14,14} = \Xi_{15,15} = -I,\ \Xi_{14,15} = 0.$$

Định lý sau cho ta một điều kiện đủ cho sự tồn tại một bộ điều khiển phản hồi đầu ra động (3.24) đảm bảo cho hệ tuyến tính có trễ biến thiên trên biến trạng thái và biến quan sát (3.23) là $\alpha-$ổn định hóa được dạng mũ và hàm chi phí toàn phương (3.25) thỏa mãn điều kiện $J \le J^*$.

Định lý 3.2 *Cho số $\alpha > 0$, hai ma trận thực, đối xứng xác định dương Q, R. Xét hệ điều khiển tuyến tính* (3.23) *và hàm chi phí toàn phương* (3.25)*. Giả sử rằng các ma trận hệ số của hệ* (3.23) *và hàm chi phí toàn phương* (3.25) *thỏa mãn điều kiện sau: tồn tại các ma trận đối xứng, xác định dương $P, Q_1, Q_2, U_1, U_2, R_1, R_2, H_1, H_2, S_i, W_i, i = 1, \ldots, 4,$ và một ma trận Y sao cho bất đẳng thức ma trận tuyến tính sau đây được thỏa mãn:*

$$\begin{bmatrix} \Xi & \Psi \\ \Psi^{\mathsf{T}} & -Q \end{bmatrix} < 0. \tag{3.28}$$

Khi đó có một bộ điều khiển phản hồi đầu ra động (3.24) *cho hệ* (3.23)*, trong đó các ma trận A_1, B_1, C_1 được xác định bởi:*

$$A_1 = YP^{-1}, \quad B_1 = PC^{\mathsf{T}}, \quad C_1 = -B^{\mathsf{T}}P^{-1}.$$

Hơn nữa, giá trị đảm bảo chi phí điều khiển của hệ (3.23) *xác định bởi:*

$$J^* = \Lambda\|\phi\|^2_{C^1}.$$

Chứng minh. Đặt

$\overline{Q_i} = P^{-1}Q_iP^{-1}$, $\overline{U_i} = P^{-1}U_iP^{-1}$, $\overline{R_i} = P^{-1}R_iP^{-1}$, $\overline{H_i} = P^{-1}H_iP^{-1}$, $i = 1, 2,$
$\overline{S_j} = P^{-1}S_jP^{-1}$, $\overline{W_j} = P^{-1}W_jP^{-1}$, $j = 1, 2, 3, 4.$

Xét hàm Lyapunov–Krasovskii cho (3.26) dạng:

$$V(t, z_t) = \sum_{i=1}^{9} V_i(t, z_t),$$

trong đó

$$V_1 = x^{\mathsf{T}}(t)P^{-1}x(t) + \xi^{\mathsf{T}}(t)P^{-1}\xi(t),$$
$$V_2 = \int_{t-h_1}^{t} e^{2\alpha(s-t)}x^{\mathsf{T}}(s)\overline{Q_1}x(s)\,ds + \int_{t-\bar{h}_1}^{t-h_1} e^{2\alpha(s-t)}x^{\mathsf{T}}(s)\overline{Q_2}x(s)\,ds,$$
$$V_3 = \int_{-h_1}^{0}\int_{t+s}^{t} e^{2\alpha(\tau-t)}\dot{x}^{\mathsf{T}}(\tau)\overline{S_1}\dot{x}(\tau)\,d\tau\,ds + \int_{-\bar{h}_1}^{-h_1}\int_{t+s}^{t} e^{2\alpha(\tau-t)}\dot{x}^{\mathsf{T}}(\tau)\overline{S_2}\dot{x}(\tau)\,d\tau\,ds,$$
$$V_4 = \int_{-h_1}^{0}\int_{t+s}^{t} e^{2\alpha(\tau-t)}x^{\mathsf{T}}(\tau)\overline{S_3}x(\tau)\,d\tau\,ds + \int_{-\bar{h}_1}^{-h_1}\int_{t+s}^{t} e^{2\alpha(\tau-t)}x^{\mathsf{T}}(\tau)\overline{S_4}x(\tau)\,d\tau\,ds,$$

$$
\begin{aligned}
V_5 &= \int_{-h_1}^{0}\int_{\theta}^{0}\int_{t+s}^{t} e^{2\alpha(\tau+s-t)}\dot{x}^{\mathsf{T}}(\tau)\overline{R_1}\dot{x}(\tau)\,d\tau\,ds\,d\theta \\
&\quad + \int_{-\overline{h}_1}^{-h_1}\int_{\theta}^{0}\int_{t+s}^{t} e^{2\alpha(\tau+s-t)}\dot{x}^{\mathsf{T}}(\tau)\overline{R_2}\dot{x}(\tau)\,d\tau\,ds\,d\theta, \\
V_6 &= \int_{t-h_2}^{t} e^{2\alpha(s-t)}x^{\mathsf{T}}(s)\overline{U_1}x(s)\,ds + \int_{t-\overline{h}_2}^{t-h_2} e^{2\alpha(s-t)}x^{\mathsf{T}}(s)\overline{U_2}x(s)\,ds, \\
V_7 &= \int_{-h_2}^{0}\int_{t+s}^{t} e^{2\alpha(\tau-t)}\dot{x}^{\mathsf{T}}(\tau)\overline{W_1}\dot{x}(\tau)\,d\tau\,ds + \int_{-\overline{h}_2}^{-h_2}\int_{t+S}^{t} e^{2\alpha(\tau-t)}\dot{x}^{\mathsf{T}}(\tau)\overline{W_2}\dot{x}(\tau)\,d\tau\,ds, \\
V_8 &= \int_{-h_2}^{0}\int_{t+s}^{t} e^{2\alpha(\tau-t)}x^{\mathsf{T}}(\tau)\overline{W_3}x(\tau)\,d\tau\,ds + \int_{-\overline{h}_2}^{-h_2}\int_{t+s}^{t} e^{2\alpha(\tau-t)}x^{\mathsf{T}}(\tau)\overline{W_4}x(\tau)\,d\tau\,ds, \\
V_9 &= \int_{-h_2}^{0}\int_{\theta}^{0}\int_{t+s}^{t} e^{2\alpha(\tau+s-t)}\dot{x}^{\mathsf{T}}(\tau)\overline{H_1}\dot{x}(\tau)\,d\tau\,ds\,d\theta \\
&\quad + \int_{-\overline{h}_2}^{-h_2}\int_{\theta}^{0}\int_{t+s}^{t} e^{2\alpha(\tau+s-t)}\dot{x}^{\mathsf{T}}(\tau)\overline{H_2}\dot{x}(\tau)\,d\tau\,ds\,d\theta.
\end{aligned} \tag{3.29}
$$

Lấy đạo hàm của $V_i, i = 1, \ldots, 9$ theo t dọc theo nghiệm của hệ (3.26), ta có

$$
\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= x^{\mathsf{T}}(t)\Big[P^{-1}A + A^{\mathsf{T}}P^{-1}\Big]x(t) + 2x^{\mathsf{T}}(t)P^{-1}Dx(t-h_1(t)) + 2x^{\mathsf{T}}(t)P^{-1}BC_1\xi(t) \\
&\quad + \xi^{\mathsf{T}}(t)\Big[P^{-1}A_1 + A_1^{\mathsf{T}}P^{-1}\Big]\xi(t) + 2\xi^{\mathsf{T}}(t)P^{-1}B_1Cx(t-h_2(t)), \\
\dot{V}_2 &= -2\alpha V_2 + x^{\mathsf{T}}(t)\overline{Q_1}x(t) - e^{-2\alpha h_1}x^{\mathsf{T}}(t-h_1)\overline{Q_1}x(t-h_1) \\
&\quad + e^{-2\alpha h_1}x^{\mathsf{T}}(t-h_1)\overline{Q_2}x(t-h_1) - e^{-2\alpha\overline{h}_1}x^{\mathsf{T}}(t-\overline{h}_1)\overline{Q_2}x(t-\overline{h}_1), \\
\dot{V}_3 &\le -2\alpha V_3 + \dot{x}^{\mathsf{T}}(t)\Big[h_1\overline{S_1} + (\overline{h}_1 - h_1)\overline{S_2}\Big]\dot{x}(t) - e^{-2\alpha h_1}\int_{t-h_1}^{t}\dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{S_1}\dot{x}(s)\,ds \\
&\quad - e^{-2\alpha\overline{h}_1}\int_{t-\overline{h}_1}^{t-h_1}\dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{S_2}\dot{x}(s)\,ds, \\
\dot{V}_4 &\le -2\alpha V_4 + x^{\mathsf{T}}(t)\Big[h_1\overline{S_3} + (\overline{h}_1 - h_1)\overline{S_4}\Big]x(t) - e^{-2\alpha h_1}\int_{t-h_1}^{t}x^{\mathsf{T}}(s)\overline{S_3}x(s)\,ds \\
&\quad - e^{-2\alpha\overline{h}_1}\int_{t-\overline{h}_1}^{t-h_1}x^{\mathsf{T}}(s)\overline{S_4}x(s)\,ds, \\
\dot{V}_5 &\le -2\alpha V_5 + \dot{x}^{\mathsf{T}}(t)\Big[\frac{1}{2}h_1^2\overline{R_1} + \frac{1}{2}(\overline{h}_1^2 - h_1^2)\overline{R_2}\Big]\dot{x}(t) \\
&\quad - e^{-4\alpha h_1}\int_{-h_1}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{R_1}\dot{x}(s)\,ds\,d\theta \\
&\quad - e^{-4\alpha\overline{h}_1}\int_{-\overline{h}_1}^{-h_1}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{R_2}\dot{x}(s)\,ds\,d\theta,
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}_6 &= -2\alpha V_6 + x^{\mathsf{T}}(t)\overline{U_1}x(t) - e^{-2\alpha h_2}x^{\mathsf{T}}(t-h_2)\overline{U_1}x(t-h_2)\\
&\quad + e^{-2\alpha h_2}x^{\mathsf{T}}(t-h_2)\overline{U_2}x(t-h_2) - e^{-2\alpha \overline{h}_2}x^{\mathsf{T}}(t-\overline{h}_2)\overline{U_2}x(t-\overline{h}_2),\\
\dot{V}_7 &\le -2\alpha V_7 + \dot{x}^{\mathsf{T}}(t)\Big[h_2\overline{W_1} + (\overline{h}_2 - h_2)\overline{W_2}\Big]\dot{x}(t) - e^{-2\alpha h_2}\int_{t-h_2}^{t}\dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{W_1}\dot{x}(s)\,ds\\
&\quad - e^{-2\alpha \overline{h}_2}\int_{t-\overline{h}_2}^{t-h_2}\dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{W_2}\dot{x}(s)\,ds,\\
\dot{V}_8 &\le -2\alpha V_8 + x^{\mathsf{T}}(t)\Big[h_2\overline{W_3} + (\overline{h}_2 - h_2)\overline{W_4}\Big]x(t) - e^{-2\alpha h_2}\int_{t-h_2}^{t}x^{\mathsf{T}}(s)\overline{W_3}x(s)\,ds\\
&\quad - e^{-2\alpha \overline{h}_2}\int_{t-\overline{h}_2}^{t-h_2}x^{\mathsf{T}}(s)\overline{W_4}x(s)\,ds,\\
\dot{V}_9 &\le -2\alpha V_9 + \dot{x}^{\mathsf{T}}(t)\Big[\frac{1}{2}h_2^2\overline{H_1} + \frac{1}{2}(\overline{h}_2^2 - h_2^2)\overline{H_2}\Big]\dot{x}(t)\\
&\quad - e^{-4\alpha h_2}\int_{-h_2}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{H_1}\dot{x}(s)\,ds\,d\theta\\
&\quad - e^{-4\alpha \overline{h}_2}\int_{-\overline{h}_2}^{-h_2}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{H_2}\dot{x}(s)\,ds\,d\theta.
\end{aligned}$$

Do đó, ta có

$$\begin{aligned}
&\dot{V} + 2\alpha V\\
&\le x^{\mathsf{T}}(t)\Big[P^{-1}A + A^{\mathsf{T}}P^{-1} + 2\alpha P^{-1} + \overline{Q_1} + \overline{U_1} + h_1\overline{S_3}\\
&\quad + (\overline{h}_1 - h_1)\overline{S_4} + h_2\overline{W_3} + (\overline{h}_2 - h_2)\overline{W_4}\Big]x(t)\\
&\quad + \xi^{\mathsf{T}}(t)\Big[P^{-1}A_1 + A_1^{\mathsf{T}}P^{-1} + 2\alpha P^{-1}\Big]\xi(t) + 2x^{\mathsf{T}}(t)P^{-1}Dx(t-h_1(t))\\
&\quad + 2x^{\mathsf{T}}(t)P^{-1}BC_1\xi(t) + 2\xi^{\mathsf{T}}(t)P^{-1}B_1Cx(t-h_2(t))\\
&\quad + x^{\mathsf{T}}(t-h_1)\Big[e^{-2\alpha h_1}\overline{Q_2} - e^{-2\alpha h_1}\overline{Q_1}\Big]x(t-h_1)\\
&\quad + x^{\mathsf{T}}(t-\overline{h}_1)\Big[-e^{-2\alpha \overline{h}_1}\overline{Q_2}\Big]x(t-\overline{h}_1) + x^{\mathsf{T}}(t-h_2)\Big[e^{-2\alpha h_2}\overline{U_2} - e^{-2\alpha h_2}\overline{U_1}\Big]x(t-h_2)\\
&\quad + x^{\mathsf{T}}(t-\overline{h}_2)\Big[-e^{-2\alpha \overline{h}_2}\overline{U_2}\Big]x(t-\overline{h}_2)\\
&\quad + \dot{x}^{\mathsf{T}}(t)\Big[h_1\overline{S_1} + (\overline{h}_1 - h_1)\overline{S_2} + \frac{1}{2}h_1^2\overline{R_1} + \frac{1}{2}(\overline{h}_1^2 - h_1^2)\overline{R_2} + h_2\overline{W_1} + (\overline{h}_2 - h_2)\overline{W_2}\\
&\quad + \frac{1}{2}h_2^2\overline{H_1} + \frac{1}{2}(\overline{h}_2^2 - h_2^2)\overline{H_2}\Big]\dot{x}(t)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- e^{-2\alpha h_1}\int_{t-h_1}^{t} \dot{x}^T(s)\overline{S_1}\dot{x}(s)\,ds - e^{-2\alpha\overline{h}_1}\int_{t-\overline{h}_1}^{t-h_1} \dot{x}^T(s)\overline{S_2}\dot{x}(s)\,ds\\
&- e^{-2\alpha h_1}\int_{t-h_1}^{t} x^{\mathsf{T}}(s)\overline{S_3}x(s)\,ds - e^{-2\alpha\overline{h}_1}\int_{t-\overline{h}_1}^{t-h_1} x^{\mathsf{T}}(s)\overline{S_4}x(s)\,ds\\
&- e^{-4\alpha h_1}\int_{-h_1}^{0}\int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{R_1}\dot{x}(s)\,ds\,d\theta - e^{-4\alpha\overline{h}_1}\int_{-\overline{h}_1}^{-h_1}\int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{R_2}\dot{x}(s)\,ds\,d\theta\\
&- e^{-2\alpha h_2}\int_{t-h_2}^{t} \dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{W_1}\dot{x}(s)\,ds - e^{-2\alpha\overline{h}_2}\int_{t-\overline{h}_2}^{t-h_2} \dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{W_2}\dot{x}(s)\,ds\\
&- e^{-2\alpha h_2}\int_{t-h_2}^{t} x^{\mathsf{T}}(s)\overline{W_3}x(s)\,ds - e^{-2\alpha\overline{h}_2}\int_{t-\overline{h}_2}^{t-h_2} x^{\mathsf{T}}(s)\overline{W_4}x(s)\,ds\\
&- e^{-4\alpha h_2}\int_{-h_2}^{0}\int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{H_1}\dot{x}(s)\,ds\,d\theta - e^{-4\alpha\overline{h}_2}\int_{-\overline{h}_2}^{-h_2}\int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{H_2}\dot{x}(s)\,ds\,d\theta.
\end{aligned}
$$

Bây giờ, áp dụng Bổ đề 1.2, ta có các đánh giá sau:

$$
\begin{aligned}
&- e^{-2\alpha h_1}\int_{t-h_1}^{t} \dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{S_1}\dot{x}(s)\,ds \le -\frac{1}{h_1}\Big(\int_{t-h_1}^{t}\dot{x}(s)\,ds\Big)^{\mathsf{T}} e^{-2\alpha h_1}\overline{S_1}\Big(\int_{t-h_1}^{t}\dot{x}(s)\,ds\Big)\\
&= -\frac{1}{h_1}\Big[x(t)-x(t-h_1)\Big]^{\mathsf{T}} e^{-2\alpha h_1}\overline{S_1}\Big[x(t)-x(t-h_1)\Big];
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

$$
\begin{aligned}
&- e^{-2\alpha\overline{h}_1}\int_{t-\overline{h}_1}^{t-h_1} \dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{S_2}\dot{x}(s)\,ds\\
&= -e^{-2\alpha\overline{h}_1}\int_{t-\overline{h}_1}^{t-h_1(t)} \dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{S_2}\dot{x}(s)\,ds - e^{-2\alpha\overline{h}_1}\int_{t-h_1(t)}^{t-h_1} \dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{S_2}\dot{x}(s)\,ds\\
&\le -\frac{1}{\overline{h}_1-h_1}\Big(\int_{t-\overline{h}_1}^{t-h_1(t)}\dot{x}(s)\,ds\Big)^{\mathsf{T}} e^{-2\alpha\overline{h}_1}\overline{S_2}\Big(\int_{t-\overline{h}_1}^{t-h_1(t)}\dot{x}(s)\,ds\Big)\\
&\quad -\frac{1}{\overline{h}_1-h_1}\Big(\int_{t-h_1(t)}^{t-h_1}\dot{x}(s)\,ds\Big)^{\mathsf{T}} e^{-2\alpha\overline{h}_1}\overline{S_2}\Big(\int_{t-h_1(t)}^{t-h_1}\dot{x}(s)\,ds\Big)\\
&= -\frac{1}{\overline{h}_1-h_1}\Big[x(t-h_1(t))-x(t-\overline{h}_1)\Big]^{\mathsf{T}} e^{-2\alpha\overline{h}_1}\overline{S_2}\Big[x(t-h_1(t))-x(t-\overline{h}_1)\Big]\\
&\quad -\frac{1}{\overline{h}_1-h_1}\Big[x(t-h_1)-x(t-h_1(t))\Big]^{\mathsf{T}} e^{-2\alpha\overline{h}_1}\overline{S_2}\Big[x(t-h_1)-x(t-h_1(t))\Big];
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

$$
\begin{aligned}
&- e^{-2\alpha h_1}\int_{t-h_1}^{t} x^{\mathsf{T}}(s)\overline{S_3}x(s)\,ds\\
&\le -\frac{1}{h_1}\Big(\int_{t-h_1}^{t}x(s)\,ds\Big)^{\mathsf{T}} e^{-2\alpha h_1}\overline{S_3}\Big(\int_{t-h_1}^{t}x(s)\,ds\Big) \qquad (3.32)\\
&= -\frac{1}{h_1}\Big(\int_{t-h_1}^{t}x(\theta)\,d\theta\Big)^{\mathsf{T}} e^{-2\alpha h_1}\overline{S_3}\Big(\int_{t-h_1}^{t}x(\theta)\,d\theta\Big);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- e^{-2\alpha\overline{h}_1} \int_{t-\overline{h}_1}^{t-h_1} x^{\mathsf{T}}(s)\overline{S_4}x(s)\,ds \\
&\le -\frac{1}{\overline{h}_1 - h_1}\bigg(\int_{t-\overline{h}_1}^{t-h_1} x(s)\,ds\bigg)^{\mathsf{T}} e^{-2\alpha\overline{h}_1}\overline{S_4}\bigg(\int_{t-\overline{h}_1}^{t-h_1} x(s)\,ds\bigg) \\
&= -\frac{1}{\overline{h}_1 - h_1}\bigg(\int_{t-\overline{h}_1}^{t-h_1} x(\theta)\,d\theta\bigg)^{\mathsf{T}} e^{-2\alpha\overline{h}_1}\overline{S_4}\bigg(\int_{t-\overline{h}_1}^{t-h_1} x(\theta)\,d\theta\bigg);
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

$$
\begin{aligned}
&- e^{-4\alpha h_1} \int_{-h_1}^{0}\int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{R_1}\dot{x}(s)\,ds\,d\theta \\
&\le -\frac{2}{h_1^2}\bigg(\int_{-h_1}^{0}\int_{t+\theta}^{t} \dot{x}(s)\,ds\,d\theta\bigg)^{\mathsf{T}} e^{-4\alpha h_1}\overline{R_1}\bigg(\int_{-h_1}^{0}\int_{t+\theta}^{t} \dot{x}(s)\,ds\,d\theta\bigg) \\
&= -\frac{2}{h_1^2}\bigg[h_1 x(t) - \int_{t-h_1}^{t} x(\theta)\,d\theta\bigg]^{\mathsf{T}} e^{-4\alpha h_1}\overline{R_1}\bigg[h_1 x(t) - \int_{t-h_1}^{t} x(\theta)\,d\theta\bigg];
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

$$
\begin{aligned}
&- e^{-4\alpha\overline{h}_1} \int_{-\overline{h}_1}^{-h_1}\int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{R_2}\dot{x}(s)\,ds\,d\theta \\
&\le -\frac{2}{\overline{h}_1^2 - h_1^2}\bigg(\int_{-\overline{h}_1}^{-h_1}\int_{t+\theta}^{t} \dot{x}(s)\,ds\,d\theta\bigg)^{\mathsf{T}} e^{-4\alpha\overline{h}_1}\overline{R_2}\bigg(\int_{-\overline{h}_1}^{-h_1}\int_{t+\theta}^{t} \dot{x}(s)\,ds\,d\theta\bigg) \\
&= -\frac{2}{\overline{h}_1^2 - h_1^2}\bigg[(\overline{h}_1 - h_1)x(t) - \int_{t-\overline{h}_1}^{t-h_1} x(\theta)\,d\theta\bigg]^{\mathsf{T}} e^{-4\alpha\overline{h}_1}\overline{R_2} \\
&\quad \times \bigg[(\overline{h}_1 - h_1)x(t) - \int_{t-\overline{h}_1}^{t-h_1} x(\theta)\,d\theta\bigg];
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

$$
\begin{aligned}
&- e^{-2\alpha h_2} \int_{t-h_2}^{t} \dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{W_1}\dot{x}(s)\,ds \\
&\le -\frac{1}{h_2}\bigg(\int_{t-h_2}^{t} \dot{x}(s)\,ds\bigg)^{\mathsf{T}} e^{-2\alpha h_2}\overline{W_1}\bigg(\int_{t-h_2}^{t} \dot{x}(s)\,ds\bigg) \\
&= -\frac{1}{h_2}\Big[x(t) - x(t-h_2)\Big]^{\mathsf{T}} e^{-2\alpha h_2}\overline{W_1}\Big[x(t) - x(t-h_2)\Big];
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

$$
\begin{aligned}
&- e^{-2\alpha\overline{h}_2} \int_{t-\overline{h}_2}^{t-h_2} \dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{W_2}\dot{x}(s)\,ds \\
&= -e^{-2\alpha\overline{h}_2} \int_{t-\overline{h}_2}^{t-h_2(t)} \dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{W_2}\dot{x}(s)\,ds - e^{-2\alpha\overline{h}_2} \int_{t-h_2(t)}^{t-h_2} \dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{W_2}\dot{x}(s)\,ds \\
&\leq -\frac{1}{\overline{h}_2 - h_2}\bigg(\int_{t-\overline{h}_2}^{t-h_2(t)} \dot{x}(s)\,ds\bigg)^{\mathsf{T}} e^{-2\alpha\overline{h}_2}\overline{W_2}\bigg(\int_{t-\overline{h}_2}^{t-h_2(t)} \dot{x}(s)\,ds\bigg) \\
&\quad - \frac{1}{\overline{h}_2 - h_2}\bigg(\int_{t-h_2(t)}^{t-h_2} \dot{x}(s)\,ds\bigg)^{\mathsf{T}} e^{-2\alpha\overline{h}_2}\overline{W_2}\bigg(\int_{t-h_2(t)}^{t-h_2} \dot{x}(s)\,ds\bigg) \\
&= -\frac{1}{\overline{h}_2 - h_2}\Big[x(t-h_2(t)) - x(t-\overline{h}_2)\Big]^{\mathsf{T}} e^{-2\alpha\overline{h}_2}\overline{W_2}\Big[x(t-h_2(t)) - x(t-\overline{h}_2)\Big] \\
&\quad - \frac{1}{\overline{h}_2 - h_2}\Big[x(t-h_2) - x(t-h_2(t))\Big]^{\mathsf{T}} e^{-2\alpha\overline{h}_2}\overline{W_2}\Big[x(t-h_2) - x(t-h_2(t))\Big];
\end{aligned} \tag{3.37}
$$

$$
\begin{aligned}
&- e^{-2\alpha h_2} \int_{t-h_2}^{t} x^{\mathsf{T}}(s)\overline{W_3}x(s)\,ds \\
&\leq -\frac{1}{h_2}\bigg(\int_{t-h_2}^{t} x(s)\,ds\bigg)^{\mathsf{T}} e^{-2\alpha h_2}\overline{W_3}\bigg(\int_{t-h_2}^{t} x(s)\,ds\bigg) \\
&= -\frac{1}{h_2}\bigg(\int_{t-h_2}^{t} x(\theta)\,d\theta\bigg)^{\mathsf{T}} e^{-2\alpha h_2}\overline{W_3}\bigg(\int_{t-h_2}^{t} x(\theta)\,d\theta\bigg);
\end{aligned} \tag{3.38}
$$

$$
\begin{aligned}
&- e^{-2\alpha\overline{h}_2} \int_{t-\overline{h}_2}^{t-h_2} x^{\mathsf{T}}(s)\overline{W_4}x(s)\,ds \\
&\leq -\frac{1}{\overline{h}_2 - h_2}\bigg(\int_{t-\overline{h}_2}^{t-h_2} x(s)\,ds\bigg)^{\mathsf{T}} e^{-2\alpha\overline{h}_2}\overline{W_4}\bigg(\int_{t-\overline{h}_2}^{t-h_2} x(s)\,ds\bigg) \\
&= -\frac{1}{\overline{h}_2 - h_2}\bigg(\int_{t-\overline{h}_2}^{t-h_2} x(\theta)\,d\theta\bigg)^{\mathsf{T}} e^{-2\alpha\overline{h}_2}\overline{W_4}\bigg(\int_{t-\overline{h}_2}^{t-h_2} x(\theta)\,d\theta\bigg);
\end{aligned} \tag{3.39}
$$

$$
\begin{aligned}
&- e^{-4\alpha h_2} \int_{-h_2}^{0}\int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{H_1}\dot{x}(s)\,ds\,d\theta \\
&\leq -\frac{2}{h_2^2}\bigg(\int_{-h_2}^{0}\int_{t+\theta}^{t} \dot{x}(s)\,ds\,d\theta\bigg)^{\mathsf{T}} e^{-4\alpha h_2}\overline{H_1}\bigg(\int_{-h_2}^{0}\int_{t+\theta}^{t} \dot{x}(s)\,ds\,d\theta\bigg) \\
&= -\frac{2}{h_2^2}\bigg[h_2 x(t) - \int_{t-h_2}^{t} x(\theta)\,d\theta\bigg]^{\mathsf{T}} e^{-4\alpha h_2}\overline{H_1}\bigg[h_2 x(t) - \int_{t-h_2}^{t} x(\theta)\,d\theta\bigg];
\end{aligned} \tag{3.40}
$$

$$
\begin{aligned}
&- e^{-4\alpha\overline{h}_2}\int_{-\overline{h}_2}^{-h_2}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}^{\mathsf{T}}(s)\overline{H_2}\dot{x}(s)\,ds\,d\theta\\
&\le -\frac{2}{\overline{h}_2^2-h_2^2}\bigg(\int_{-\overline{h}_2}^{-h_2}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}(s)\,ds\,d\theta\bigg)^{\mathsf{T}} e^{-4\alpha\overline{h}_2}\overline{H_2}\bigg(\int_{-\overline{h}_2}^{-h_2}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}(s)\,ds\,d\theta\bigg)\\
&= -\frac{2}{\overline{h}_2^2-h_2^2}\bigg[(\overline{h}_2-h_2)x(t)-\int_{t-\overline{h}_2}^{t-h_2}x(\theta)\,d\theta\bigg]^{\mathsf{T}} e^{-4\alpha\overline{h}_2}\overline{H_2}\\
&\times\bigg[(\overline{h}_2-h_2)x(t)-\int_{t-\overline{h}_2}^{t-h_2}x(\theta)\,d\theta\bigg].
\end{aligned}
\tag{3.41}
$$

Bây giờ, ta đặt

$$B_1 = PC^{\mathsf{T}}, \tag{3.42}$$

và áp dụng Bổ đề 1.1, ta có

$$
\begin{aligned}
&2\xi^{\mathsf{T}}(t)P^{-1}B_1Cx(t-h_2(t)) = 2\xi^{\mathsf{T}}(t)C^{\mathsf{T}}Cx(t-h_2(t))\\
&\le \xi^{\mathsf{T}}(t)C^{\mathsf{T}}C\xi(t) + x^{\mathsf{T}}(t-h_2(t))C^{\mathsf{T}}Cx(t-h_2(t)).
\end{aligned}
\tag{3.43}
$$

Mặt khác, từ đồng nhất thức

$$Ax(t) + Dx(t-h_1(t)) + BC_1\xi(t) - \dot{x}(t) = 0,$$

ta có

$$2\dot{x}^{\mathsf{T}}(t)P^{-1}\Big[Ax(t) + Dx(t-h_1(t)) + BC_1\xi(t) - \dot{x}(t)\Big] = 0. \tag{3.44}$$

Từ các điều kiện (3.30)-(3.44), ta có

$$\dot{V}(t,z_t) + 2\alpha V(t,z_t) \le \eta^{\mathsf{T}}(t)\Omega\eta(t) - \Big[x^{\mathsf{T}}(t)Qx(t) + \xi^{\mathsf{T}}(t)C_1^{\mathsf{T}}RC_1\xi(t)\Big], \tag{3.45}$$

trong đó

$$
\begin{aligned}
&\Omega = (\Omega_{ij})_{13\times 13}, \Omega_{ji} = \Omega_{ij}^{\mathsf{T}}, \forall i \ne j,\\
&\eta(t) = \bigg[x^{\mathsf{T}}(t)\quad x^{\mathsf{T}}(t-h_1(t))\quad x^{\mathsf{T}}(t-h_2(t))\quad x^{\mathsf{T}}(t-h_1)\quad x^{\mathsf{T}}(t-\overline{h}_1)\quad x^{\mathsf{T}}(t-h_2)\\
&\qquad x^{\mathsf{T}}(t-\overline{h}_2)\quad \bigg(\int_{t-h_1}^{t}x(\theta)\,d\theta\bigg)^{\mathsf{T}}\quad \bigg(\int_{t-\overline{h}_1}^{t-h_1}x(\theta)\,d\theta\bigg)^{\mathsf{T}}\quad \bigg(\int_{t-h_2}^{t}x(\theta)\,d\theta\bigg)^{\mathsf{T}}\\
&\qquad \bigg(\int_{t-\overline{h}_2}^{t-h_2}x(\theta)\,d\theta\bigg)^{\mathsf{T}}\quad \dot{x}^{\mathsf{T}}(t)\quad \xi^{\mathsf{T}}(t)\bigg]^{\mathsf{T}},
\end{aligned}
$$

với

$$
\begin{aligned}
\Omega_{11} &= P^{-1}A + A^{\mathsf{T}}P^{-1} + 2\alpha P^{-1} + \overline{Q_1} + \overline{U_1} + h_1\overline{S_3} + (\bar{h}_1 - h_1)\overline{S_4} + h_2\overline{W_3} \\
&\quad + (\bar{h}_2 - h_2)\overline{W_4} - \frac{1}{h_1}e^{-2\alpha h_1}\overline{S_1} - 2e^{-4\alpha h_1}\overline{R_1} - 2\frac{(\bar{h}_1 - h_1)}{(\bar{h}_1 + h_1)}e^{-4\alpha\bar{h}_1}\overline{R_2} \\
&\quad - \frac{1}{h_2}e^{-2\alpha h_2}\overline{W_1} - 2e^{-4\alpha h_2}\overline{H_1} - 2\frac{(\bar{h}_2 - h_2)}{(\bar{h}_2 + h_2)}e^{-4\alpha\bar{h}_2}\overline{H_2} + Q,
\end{aligned}
$$

$$\Omega_{22} = -\frac{2}{\bar{h}_1 - h_1}e^{-2\alpha\bar{h}_1}\overline{S_2},\ \Omega_{33} = -\frac{2}{\bar{h}_2 - h_2}e^{-2\alpha\bar{h}_2}\overline{W_2} + C^{\mathsf{T}}C,$$

$$\Omega_{44} = e^{-2\alpha h_1}\overline{Q_2} - e^{-2\alpha h_1}\overline{Q_1} - \frac{1}{h_1}e^{-2\alpha h_1}\overline{S_1} - \frac{1}{\bar{h}_1 - h_1}e^{-2\alpha\bar{h}_1}\overline{S_2},$$

$$\Omega_{55} = -e^{-2\alpha\bar{h}_1}\overline{Q_2} - \frac{1}{\bar{h}_1 - h_1}e^{-2\alpha\bar{h}_1}\overline{S_2},$$

$$\Omega_{66} = e^{-2\alpha h_2}\overline{U_2} - e^{-2\alpha h_2}\overline{U_1} - \frac{1}{h_2}e^{-2\alpha h_2}\overline{W_1} - \frac{1}{\bar{h}_2 - h_2}e^{-2\alpha\bar{h}_2}\overline{W_2},$$

$$\Omega_{77} = -e^{-2\alpha\bar{h}_2}\overline{U_2} - \frac{1}{\bar{h}_2 - h_2}e^{-2\alpha\bar{h}_2}\overline{W_2},$$

$$\Omega_{88} = -\frac{1}{h_1}e^{-2\alpha h_1}\overline{S_3} - \frac{2}{h_1^2}e^{-4\alpha h_1}\overline{R_1},$$

$$\Omega_{99} = -\frac{1}{\bar{h}_1 - h_1}e^{-2\alpha\bar{h}_1}\overline{S_4} - \frac{2}{\bar{h}_1^2 - h_1^2}e^{-4\alpha\bar{h}_1}\overline{R_2},$$

$$\Omega_{10,10} = -\frac{1}{h_2}e^{-2\alpha h_2}\overline{W_3} - \frac{2}{h_2^2}e^{-4\alpha h_2}\overline{H_1},$$

$$\Omega_{11,11} = -\frac{1}{\bar{h}_2 - h_2}e^{-2\alpha\bar{h}_2}\overline{W_4} - \frac{2}{\bar{h}_2^2 - h_2^2}e^{-4\alpha\bar{h}_2}\overline{H_2},$$

$$
\begin{aligned}
\Omega_{12,12} &= h_1\overline{S_1} + (\bar{h}_1 - h_1)\overline{S_2} + \frac{1}{2}h_1^2\overline{R_1} + \frac{1}{2}(\bar{h}_1^2 - h_1^2)\overline{R_2} + h_2\overline{W_1} + (\bar{h}_2 - h_2)\overline{W_2} \\
&\quad + \frac{1}{2}h_2^2\overline{H_1} + \frac{1}{2}(\bar{h}_2^2 - h_2^2)\overline{H_2} - 2P^{-1},
\end{aligned}
$$

$$\Omega_{13,13} = P^{-1}A_1 + A_1^{\mathsf{T}}P^{-1} + 2\alpha P^{-1} + C^TC + C_1^{\mathsf{T}}RC_1,\ \Omega_{12} = P^{-1}D,\ \Omega_{13} = 0,$$

$$\Omega_{14} = \frac{1}{h_1}e^{-2\alpha h_1}\overline{S_1},\ \Omega_{15} = 0,$$

$$\Omega_{16} = \frac{1}{h_2}e^{-2\alpha h_2}\overline{W_1},\ \Omega_{17} = 0,\ \Omega_{18} = \frac{2}{h_1}e^{-4\alpha h_1}\overline{R_1},\ \Omega_{19} = \frac{2}{\bar{h}_1 + h_1}e^{-4\alpha\bar{h}_1}\overline{R_2},$$

$$\Omega_{1,10} = \frac{2}{h_2}e^{-4\alpha h_2}\overline{H_1},\ \Omega_{1,11} = \frac{2}{\bar{h}_2 + h_2}e^{-4\alpha\bar{h}_2}\overline{H_2},\ \Omega_{1,12} = A^{\mathsf{T}}P^{-1},\ \Omega_{1,13} = P^{-1}BC_1,$$

$$\Omega_{23} = 0,\ \Omega_{24} = \Omega_{25} = \frac{1}{\bar{h}_1 - h_1}e^{-2\alpha\bar{h}_1}\overline{S_2},$$

$$\Omega_{26} = \Omega_{27} = \Omega_{28} = \Omega_{29} = \Omega_{2,10} = \Omega_{2,11} = 0,$$

$$\Omega_{2,12} = D^{\mathsf{T}}P^{-1},\ \Omega_{2,13} = 0,\ \Omega_{34} = \Omega_{35} = 0,\ \Omega_{36} = \Omega_{37} = \frac{1}{\bar{h}_2 - h_2}e^{-2\alpha\bar{h}_2}\overline{W_2},$$

$\Omega_{38} = \Omega_{39} = \Omega_{3,10} = \Omega_{3,11} = \Omega_{3,12} = \Omega_{3,13} = 0,$
$\Omega_{45} = \Omega_{46} = \Omega_{47} = \Omega_{48} = \Omega_{49} = \Omega_{4,10} = \Omega_{4,11} = \Omega_{4,12} = \Omega_{4,13} = 0,$
$\Omega_{56} = \Omega_{57} = \Omega_{58} = \Omega_{59} = \Omega_{5,10} = \Omega_{5,11} = \Omega_{5,12} = \Omega_{5,13} = 0,$
$\Omega_{67} = ... = \Omega_{6,13} = 0,\ \Omega_{78} = ... = \Omega_{7,13} = 0,$
$\Omega_{89} = ... = \Omega_{8,13} = 0,\ \Omega_{9,10} = ... = \Omega_{9,13} = 0,$
$\Omega_{10,11} = \Omega_{10,12} = \Omega_{10,13} = 0,\ \Omega_{11,12} = \Omega_{11,13} = 0,\ \Omega_{12,13} = P^{-1}BC_1.$

Nhân cả bên trái và bên phải của ma trận Ω với ma trận

$$\mathrm{diag}\{P, P, P, P, P, P, P, P, P, P, P, P, P\},$$

đặt

$$A_1 = YP^{-1}, \quad C_1 = -B^{\mathsf{T}}P^{-1}, \tag{3.46}$$

và áp dụng Bổ đề Schur, ta có $\Omega < 0$ tương đương với điều kiện (3.28). Từ các điều kiện (3.28) và (3.45), ta có

$$\dot{V}(t, z_t) + 2\alpha V(t, z_t) \leq -\Big[x^{\mathsf{T}}(t)Qx(t) + \xi^{\mathsf{T}}(t)C_1^{\mathsf{T}}RC_1\xi(t)\Big]. \tag{3.47}$$

Vì $\Big[x^{\mathsf{T}}(t)Qx(t) + \xi^{\mathsf{T}}(t)C_1^{\mathsf{T}}RC_1\xi(t)\Big] \geq 0$, nên ta có

$$\dot{V}(t, z_t) + 2\alpha V(t, z_t) \leq 0,\ t \in \mathbb{R}^+. \tag{3.48}$$

Đặt $v(t) = e^{2\alpha t}V(t, z_t)$. Lấy đạo hàm theo thời gian của $v(t)$, ta có

$$\dot{v}(t) = e^{2\alpha t}\Big(\dot{V}(t, z_t) + 2\alpha V(t, z_t)\Big) \leq 0 \tag{3.49}$$

Lấy tích phân hai vế của bất đẳng thức (3.49) từ 0 tới t, ta thu được

$$v(t) - v(0) \leq 0 \Leftrightarrow e^{2\alpha t}V(t, z_t) - V(0, z_0) \leq 0.$$

Từ đó suy ra

$$V(t, z_t) \leq V(0, z_0)e^{-2\alpha t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Bằng các tính toán đơn giản, ta có

$$V(t, z_t) \geq \lambda_{\min}(P^{-1})\|x(t)\|^2 + \lambda_{\min}(P^{-1})\|\xi(t)\|^2 \geq \lambda_{\min}(P^{-1})\|x(t)\|^2 = \lambda\|x(t)\|^2,$$

và

$$V(0, z_0) \leq \Lambda\|\phi\|^2_{C^1}.$$

Từ đó suy ra

$$\lambda\|x(t, \phi)\|^2 \leq V(t, z_t) \leq V(0, z_0)e^{-2\alpha t} \leq \Lambda e^{-2\alpha t}\|\phi\|^2_{C^1},$$

và do đó ta có nghiệm $x(t,\phi)$ bất kì của hệ đóng thỏa mãn đánh giá

$$\|x(t,\phi)\| \leq \sqrt{\frac{\Lambda}{\lambda}} e^{-\alpha t}\|\phi\|_{C^1}, \quad \forall t \geq 0.$$

Điều này chứng tỏ hệ đóng là $\alpha-$ổn định. Bây giờ, ta tìm giá trị đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ (3.23). Từ điều kiện (3.47), ta có

$$\dot{V}(t,z_t) \leq -\left[x^{\mathsf{T}}(t)Qx(t) + \xi^{\mathsf{T}}(t)C_1^{\mathsf{T}}RC_1\xi(t)\right]. \tag{3.50}$$

Lấy tích phân hai vế của biểu thức (3.50) từ 0 tới s, ta có

$$V(s,z_s) - V(0,z_0) \leq -\int_0^s \left[x^{\mathsf{T}}(t)Qx(t) + \xi^{\mathsf{T}}(t)C_1^{\mathsf{T}}RC_1\xi(t)\right]dt.$$

Suy ra

$$\int_0^s \left[x^{\mathsf{T}}(t)Qx(t) + \xi^{\mathsf{T}}(t)C_1^{\mathsf{T}}RC_1\xi(t)\right]dt \leq V(0,x_0,\xi(0)) = \Lambda\|\phi\|_{C^1}^2.$$

Trong biểu thức này cho $s \to +\infty$, ta thu được

$$J = \int_0^{+\infty} \left[x^{\mathsf{T}}(t)Qx(t) + \xi^{\mathsf{T}}(t)C_1^{\mathsf{T}}RC_1\xi(t)\right]dt \leq \Lambda\|\phi\|_{C^1}^2 := J^*.$$

Định lý được chứng minh hoàn toàn.

□

Nhận xét 3.2 Từ kết quả của Định lý 3.2, ta có thuật toán sau đây để xác định bộ điều khiển phản hồi đầu ra động (3.24) cho hệ điều khiển tuyến tính có trễ biến thiên trên biến trạng thái và biến quan sát (3.23):

Bước 1. Giải bất đẳng thức ma trận tuyến tính (3.28), ta tìm được ma trận đối xứng, xác định dương P và ma trận Y.

Bước 2. Tính ma trận nghịch đảo P^{-1}.

Bước 3. Tìm các ma trận A_1, B_1, C_1 theo các công thức

$$A_1 = YP^{-1}, \quad B_1 = PC^{\mathsf{T}}, \quad C_1 = -B^{\mathsf{T}}P^{-1}.$$

Nhận xét 3.3 Bằng cách xây dựng hàm Lyapunov–Krasovskii mới trong đó có chứa thông tin về cận trên và cận dưới của độ trễ, tốc độ ổn định mũ α, các tích phân bội ba, kết hợp với công thức Newton–Leibniz cùng các đánh giá mới, chúng tôi đưa ra một điều kiện đủ cho sự tồn tại một bộ điều khiển phản hồi đầu ra động đảm bảo chi phí điều khiển cho lớp hệ điều khiển tuyến tính có trễ biến thiên dạng khoảng và là các hàm liên tục nhưng không khả vi trên biến trạng thái và biến quan sát. Ngoài ra, trong điều kiện đủ mà chúng tôi đề xuất, điều khiển ngược ổn định hóa, chỉ số ổn định Lyapunov và giá trị đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ được đưa ra một cách tường minh và có thể tính toán được bằng phần mềm Matlab.

Sau đây chúng tôi đưa ra một ví dụ số minh họa cho Định lý 3.2.

Ví dụ 3.2 Xét hệ điều khiển tuyến tính có trễ biến thiên trên biến trạng thái và biến quan sát (3.23), trong đó:

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0.1 & -0.9 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -0.5 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.9 \\ -0.8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \end{bmatrix},$$

với

$$\begin{cases} h_1(t) = 0.1 + 0.3 \sin t & \text{nếu} \quad t \in \mathcal{I} = \cup_{k\geq 0}[2k\pi, (2k+1)\pi] \\ h_1(t) = 0.1 & \text{nếu} \quad t \in R^+ \setminus \mathcal{I}, \end{cases}$$
$$h_2(t) = 0.1 + 0.3\kappa(t),$$

trong đó $\kappa(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \sin(2^i t)$ là hàm Cell*é*rier. Đó là một hàm liên tục nhưng không khả vi tại mọi điểm. Chú ý rằng các hàm trễ $h_1(t), h_2(t)$ là không khả vi, do đó, các tiêu chuẩn ổn định được đề xuất trong các công trình [18, 20, 64, 65, 67] là không áp dụng được cho lớp hệ được xét trong ví dụ này. Cho $\alpha = 1$,

$$Q = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, R = [1.5].$$

Ta có $h_1 = 0.1, \overline{h}_1 = 0.4, h_2 = 0.1, \overline{h}_2 = 0.4$. Sử dụng hộp công cụ bất đẳng thức ma trận tuyến tính trong Matlab, ta tìm được một nghiệm của bất đẳng thức ma trận (3.28) trong Định lý 3.2 là:

$$P = \begin{bmatrix} 1.1694 & 0.9763 \\ 0.9763 & 8.8587 \end{bmatrix}, \ Q_1 = \begin{bmatrix} 17.2453 & 15.8160 \\ 15.8160 & 100.6733 \end{bmatrix},$$
$$Q_2 = \begin{bmatrix} 15.4517 & 14.4884 \\ 14.4884 & 75.5063 \end{bmatrix}, U_1 = \begin{bmatrix} 0.5235 & 2.5245 \\ 2.5245 & 52.3380 \end{bmatrix},$$
$$U_2 = \begin{bmatrix} 7.5832 & 9.5533 \\ 9.5533 & 161.6656 \end{bmatrix}, \ R_1 = \begin{bmatrix} 0.6904 & 0.0228 \\ 0.0228 & 0.9457 \end{bmatrix},$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0.1569 & 1.1703 \\ 1.1703 & 15.3105 \end{bmatrix}, \; H_1 = \begin{bmatrix} 0.4091 & 0.1564 \\ 0.1564 & 2.6638 \end{bmatrix},$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 0.1569 & 1.1703 \\ 1.1703 & 15.3105 \end{bmatrix}, S_1 = \begin{bmatrix} 1.5361 & 1.6940 \\ 1.6940 & 7.7595 \end{bmatrix},$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} 2.6633 & 2.5927 \\ 2.5927 & 11.4131 \end{bmatrix}, \; S_3 = \begin{bmatrix} 4.5852 & 0.5598 \\ 0.5598 & 13.0816 \end{bmatrix},$$

$$S_4 = \begin{bmatrix} 2.2391 & 3.1311 \\ 3.1311 & 50.7949 \end{bmatrix}, \; W_1 = \begin{bmatrix} 2.6749 & 3.2836 \\ 3.2836 & 35.4138 \end{bmatrix},$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} 0.2623 & -0.2928 \\ -0.2928 & 12.8799 \end{bmatrix}, W_3 = \begin{bmatrix} 6.7110 & 0.5143 \\ 0.5143 & 14.1273 \end{bmatrix},$$

$$W_4 = \begin{bmatrix} 2.2391 & 3.1311 \\ 3.1311 & 50.7949 \end{bmatrix}, \; Y = \begin{bmatrix} -94.1305 & 55.3449 \\ 35.6782 & -96.5021 \end{bmatrix}.$$

Bộ điều khiển phản hồi đầu ra động cho hệ (3.23) được xác định theo công thức (3.24) với

$$\begin{aligned} A_1 &= YP^{-1} = \begin{bmatrix} -94.3933 & 16.6507 \\ 43.6168 & -15.7005 \end{bmatrix}, \\ B_1 &= PC^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} -0.6813 \\ 3.4530 \end{bmatrix}, \\ C_1 &= -B^{\mathsf{T}}P^{-1} = \begin{bmatrix} -0.9306 & 0.1929 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Do đó theo Định lý 3.2, hệ điều khiển tuyến tính có trễ biến thiên trên biến trạng thái và biến quan sát (3.23) là 1−ổn định hóa được dạng mũ dưới sự tác động của bộ điều khiển phản hồi đầu ra động (3.24). Ngoài ra, ta có nghiệm bất kì $x(t,\phi)$ của hệ đóng thỏa mãn đánh giá sau:

$$\|x(t,\phi)\| \le 8.8068e^{-t}\|\phi\|_{C^1},$$

và giá trị đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ điều khiển tuyến tính có trễ biến thiên trên biến trạng thái và biến quan sát là:

$$J^* = 8.6323\|\phi\|^2_{C^1}.$$

KẾT LUẬN CHƯƠNG 3

Bằng cách xây dựng các hàm Lyapunov–Krasovskii mới kết hợp với cách tiết cận bằng bất đẳng thức ma trận tuyến tính, chúng tôi thu được một số tiêu chuẩn cho bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho một số lớp hệ điều khiển có trễ biến thiên dạng khoảng trong trường hợp độ trễ là các hàm liên tục nhưng không nhất thiết khả vi. Cụ thể, chương này đạt được các kết quả chính sau:

- Đưa ra một điều kiện đủ cho sự tồn tại một điều khiển ngược đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ điều khiển có trễ hỗn hợp trên cả biến trạng thái và biến điều khiển với độ trễ là các hàm liên tục nhưng không nhất thiết khả vi.

- Đưa ra một điều kiện đủ cho sự tồn tại một bộ điều khiển phản hồi đầu ra động đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ điều khiển tuyến tính có trễ trên biến trạng thái và biến quan sát với độ trễ biến thiên dạng khoảng và độ trễ là các hàm liên tục nhưng không nhất thiết khả vi.

KẾT LUẬN CỦA LUẬN ÁN

Luận án này nghiên cứu tính ổn định mũ và ổn định hóa được dạng mũ cho mô hình mạng nơ ron được mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ hỗn hợp, tính ổn định hóa được dạng mũ cho lớp hệ điều khiển có trễ biến thiên dạng khoảng với nhiễu phi tuyến. Đồng thời như những áp dụng trong lý thuyết điều khiển, chúng tôi nghiên cứu bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho một số lớp hệ điều khiển có cấu trúc phức tạp với độ trễ biến thiên tổng quát. Bằng cách xây dựng các hàm Lyapunov–Krasovskii mới trong đó có chứa các cận trên và cận dưới của độ trễ, tốc độ ổn định mũ α, các tích phân bội hai và bội ba, chúng tôi đã chứng minh các tiêu chuẩn ổn định mũ và ổn định hóa được dạng mũ mới cho mô hình mạng nơ ron được mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ hỗn hợp biến thiên, các tiêu chuẩn ổn định hóa được dạng mũ cho lớp hệ điều khiển có trễ biến thiên dạng khoảng với nhiễu phi tuyến. Ngoài ra, bằng cách tiếp cận dùng bất đẳng thức ma trận tuyến tính với cách xây dựng hàm Lyapunov–Krasovskii mới trong đó có chứa các cận trên và cận dưới của độ trễ, tốc độ ổn định mũ α, các tích phân bội hai và bội ba kết hợp với công thức Newton–Leibniz và các đánh giá mới, chúng tôi đã đưa ra một tiêu chuẩn mới cho việc tồn tại một điều khiển ngược đảm bảo chi phí điều khiển cho lớp hệ điều khiển có trễ hỗn hợp biến thiên trên cả biến trạng thái và biến điều khiển, đưa ra một điều kiện đủ cho việc tồn tại một bộ điều khiển phản hồi đầu ra động (dynamic output feedback controllers) đảm bảo chi phí điều khiển cho lớp hệ điều khiển tuyến tính có trễ biến thiên dạng khoảng trên biến trạng thái và biến quan sát. Cụ thể, luận án đã đạt được những kết quả sau:

1. Chứng minh được một số điều kiện đủ cho tính ổn định mũ và ổn định hóa được dạng mũ cho mô hình mạng nơ ron mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ hỗn hợp với độ trễ là các hàm liên tục nhưng không nhất thiết khả vi.
2. Đưa ra các điều kiện đủ cho tính ổn định hóa được dạng mũ cho hệ điều khiển có trễ biến thiên dạng khoảng với nhiễu phi tuyến .
3. Thiết lập một điều kiện đủ cho sự tồn tại một điều khiển ngược đảm bảo chi phí điều khiển cho lớp hệ điều khiển có trễ biến thiên hỗn hợp trên cả biến trạng thái và biến điều khiển với độ trễ là các hàm liên tục nhưng không nhất thiết khả vi.
4. Thiết kế được một bộ điều khiển phản hồi đầu ra động đảm bảo chi phí điều khiển cho lớp hệ điều khiển tuyến tính có trễ biến thiên trên biến trạng thái và biến quan sát với độ trễ biến thiên dạng khoảng và là các hàm liên tục nhưng không nhất thiết khả vi.

Luận án mở ra một số hướng tiếp tục nghiên cứu là:

1. Nghiên cứu tính ổn định mũ và ổn định hóa được dạng mũ cho các lớp hệ phương trình vi phân không ôtônôm có trễ hằng, trễ biến thiên.
2. Nghiên cứu bài toán ổn định mũ và ổn định hóa được dạng mũ cho một số lớp hệ phương trình vi phân hàm như hệ phương trình tích phân tổng quát, hệ phương trình vi phân trung tính có trễ.
3. Nghiên cứu bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho các hệ phương trình vi phân không ôtônôm có cấu trúc trễ mở rộng.

DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH ĐÃ CÔNG BỐ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

1. M.V. Thuan and V.N. Phat, Optimal guaranteed cost control of linear systems with mixed interval time-varying delayed state and control, *Journal of Optimization Theory and Applications,* **152** (2012) 394–412.

2. M.V. Thuan, V.N. Phat and H. Trinh, Dynamic output feedback guaranteed cost control for linear systems with interval time-varying delays in states and outputs, *Applied Mathematics and Computation,* **218** (2012) 10697–10707.

3. M.V. Thuan and V.N. Phat, New criteria for stability and stabilization of neural networks with mixed interval time-varying delays, *Vietnam Journal of Mathematics,* **40** (2012) 79–93.

4. M.V. Thuan, V.N. Phat, T. Fernando and H. Trinh, Exponential stabilization of time-varying delay systems with nonlinear perturbations, *IMA Journal of Mathematical Control and Information,* doi: 10.1093/imamci/dnt022, (2013), 24 pages.

Tài liệu tham khảo

Tiếng Việt

[1] Phan Thanh Nam, *Tính ổn định mũ và ổn định hóa được dạng mũ của hệ phương trình vi phân tuyến tính có chậm,* Luận án tiến sĩ toán học, Viện Toán học, 2008.

[2] Lê Văn Hiện, *Tính ổn định của một số lớp hệ phương trình vi phân và điều khiển,* Luận án tiến sĩ toán học, Đại học Sư phạm Hà Nội, 2010.

[3] Vũ Ngọc Phát, *Nhập môn lý thuyết điều khiển toán học,* NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2001.

Tiếng Anh

[4] U. Baser and B. Kizilsac, Dynamic output feedback control problem for linear neutral systems, *IEEE Trans. Aut. Contr.,* **52** (2007) 1113–1118.

[5] T. Botmart, P. Niamsup and V.N. Phat, Delay-dependent exponential stabilization for uncertain linear systems with interval non-differentiable time-varying delays, *Appl. Math. Comput.,* **217** (2011) 8236–8247

[6] S. Boyd, El. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities and Control Theory,* SIAM Studies in Applied Mathematic, **15**, SIAM, Philadelphia, 1994.

[7] J. Cao, S. Zhong and Y. Hu, Global stability analysis for a class of neural networks with varying delays and control input, *Appl. Math. Comput.,* **189** (2007) 1480–1490.

[8] S.S.L. Chang, T.K. Peng, Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameters, *IEEE Trans. Aut. Contr.,* **17** (1972) 474–483.

[9] Y. Chen, W. Bi and W. Li, Stability analysis for neural networks with time-varying delay: A more general delay decomposition approach, *Neurocomputing,* **73** (2010) 853–857.

[10] Y. Chen, S. Fei and K. Zhang, Improved asymptotic stability conditions for neural networks with discrete and distributed delays, *International Journal of Computer Mathematics,* **89** (2012) 1938–1951.

[11] J. Chen, J. Sun, G.P. Liu and D. Rees, New delay-dependent stability criteria for neural networks with time-varying interval delay, *Physics Letters A,* **374** (2010) 4397–4405.

[12] W.H. Chen, Z.H. Guan, X. Lu, Delay-dependent guaranteed cost control for uncertain discrete-time systems with both state and input delay, *Journal of the Franklin Institute,* **341** (2004) 419–430.

[13] L.O. Chua and L. Yang, Cellular neural networks: Theory, *IEEE Transactions on Circuits and Systems,* **10** (1988) 1257–1272.

[14] L.O. Chua and L. Yang, Cellular neural networks: Applications, *IEEE Transactions on Circuits and Systems,* **35** (1988) 1273–1290.

[15] E.N. Chukwu, *Stability and time-optimal control of hereditary systems,* Academic Press, Inc., 1992.

[16] E.F. Costa and V.A. Oliveira, On the design of guaranteed cost controllers for a class of uncertain linear systems, *Systems and Control Letters,* **46** (2002) 17–29.

[17] N.H. Du and V.H. Linh, On the robust stability of implicit linear systems containing a small parameter in leading term, *IMA J. Math. Control Inf.,* **23** (2006) 67–84.

[18] M.C. De Oliveira, J.C. Geromel and J. Bernusson, Design of dynamic output feedback decentralized controllers via a separation procedure, *Int. J. Control,* **73** (2000) 371–381.

[19] E. Fridman, Y. Orlov, Exponential stability of linear distributed parameter systems with time-varying delays, *Automatica,* **45** (2009) 194–201.

[20] D. Fu, Y. Bai and M. Sun, Delay-dependent H_∞ dynamic output feedback control for systems with time-varying delay, In: IEEE International Conference on Control and Automation Christchurch, IEEE Publisher, New Zealand, 2009.

[21] P. Gahinet, A. Nemirovskii, A.J. Laub and M. Chilali, *LMI Control Toolbox For use with MATLAB,* The Math Works, Inc., 1995.

[22] H. Gao, T. Chen and J. Lam, A new delay system approach to network-based control, *Automatica,* **44** (2008) 39–52.

[23] H. Gao, X. Meng, T. Chen, J. Lam, Stabilization of networked control systems via dynamic output-feedback controllers, *SIAM J. Control Optim.,* **48** (2010) 3643–3658.

[24] K. Gu, An integral inequality in the stability problem of time-delay systems, In: *Proc. of 39th IEEE Conf. on Decision and Control,* Sydney, Australia, December 2000, 2805–2810.

[25] K. Gu, V.L. Kharitonov and J. Chen, *Stability of Time-Delay Systems,* Birkhauser, Boston, 2003.

[26] X. Guan, Z. Lin and G. Duan, Robust guaranteed cost control for discrete-time uncertain systems with delay, *IEE Proc. Control Theory Appl.,* **146** (1999) 598–602.

[27] Q.L. Han, Robust stability for a class of linear systems with time-varying delay and nonlinear perturbations, *Computers and Mathematics with Applications,* **47** (2004) 1201–1209.

[28] J.K. Hale, *Theory of Functional Differential Equations,* Springer-Verlag, New York, 1977.

[29] L.V. Hien and V.N. Phat, Exponential stability and stabilization of a class of uncertain linear time-delay systems, *Journal of the Franklin Institute,* **346** (2009) 611–625.

[30] L. Hu, H. Gao and W.X. Zheng, Novel stability of cellular neural networks with interval time-varying delay, *Neural Networks,* **21** (2008), 1458–1463.

[31] X. Jiang and Q.L. Han, On H_∞ control for linear systems with interval time-varying delay, *Automatica,* **41** (2005) 2099–2106.

[32] C.Y. Kao and B. Lincoln, Simple stability criteria for systems with time-varying delays, *Automatica,* **40** (2004) 1429–1434.

[33] V.B. Kolmanovskii and V.R. Nosov, *Stability of Functional Differential Equations,* Academic Press, Inc., 1986.

[34] V.B. Kolmanovskii and A. Myshkis, *Applied Theory of Functional Differential Equations,* Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 1992.

[35] M. Kothare, V. Balakrishnan and M. Morari, Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities, *Automatica,* **32** (1996) 1361–1379.

[36] V.L. Kharitonov and D. Hinrichsen, Exponential estimate for time delay systems, *Systems and control Letters,* **53** (2004) 395–405.

[37] V.L. Kharitonov, *Time-Delay Systems: Lyapunov Functionals and Matrices,* Birkhauser, 2013.

[38] N.N. Krasovskii, *Stability of Motion: Applications of Lyapunov's Second Method to Differential Systems and Equations with Delay,* Stanford University Press, Stanford, California, 1963.

[39] O.M. Kwon and J.H. Park, Robust stabilization of uncertain systems with delays in control input: a matrix inequality approach, *Applied Mathematics and Computation,* **172** (2006) 1067–1077.

[40] O.M. Kwon, J.H. Park and S.M. Lee, Exponential stability for uncertain dynamic systems with time-varying delays: LMI optimization approach, *J. Optim. Theory Appl.,* **137** (2008) 521–532.

[41] O.M. Kwon and J.H. Park, Exponential stability for uncertain cellular neural networks with discrete and distributed time-varying delays, *Applied Mathematics and Computation,* **203** (2008) 813–823.

[42] O.M. Kwon, J.H. Park and S.M. Lee, On robust stability criterion for dynamic systems with time-varying delays and nonlinear perturbations, *Applied Mathematics and Computation,* **203** (2008) 937–942.

[43] V. Lakshmikantham, S. Leela and A.A. Martynyuk, *Stability Analysis of Nonlinear Systems,* Marcel Dekker, New York, 1989.

[44] T. Li, Q. Luo, C. Sun and B. Zhang, Exponential stability of recurrent neural networks with time-varying discrete and distributed delays, *Nonlinear Analysis: Real World Applications,* **10** (2009) 2581–2589.

[45] T. Li, L. Guo and Y. Zhang, Delay-range-dependent robust stability and stabilization for uncertain systems with time-varying delay. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, **18** (2008) 1372–1387.

[46] X.X. Liao, L. Wang and P. Yu, *Stability of Dynamical Systems,* Elsevier, Oxford, UK.

[47] C.H. Lien, Non-fragile guaranteed cost control for uncertain neutral dynamic systems with time-varying delays in state and control input, *Chaos, Solitions and Fractals,* **31** (2007) 889–899.

[48] M. Liu, Delayed standard neural network models for control systems, *IEEE Trans. Neural Netw.,* **18** (2007) 1376–1391.

[49] Y. Liu, Z. Wang and X. Liu, Global exponential stability of generalized recurrent neural networks with discrete and distributed delays, *Neural Networks,* **19** (2006) 667–675.

[50] P.L. Liu, New results on stability analysis for time-varying delay systems with non-linear perturbations, *ISA Transactions,* **52** (2013) 318–325.

[51] X. Lou and B. Cui, On robust stabilization of a class of neural networks with time-varying delays, *Proc. of IEEE Int. Conf. Comput. Intelligent and Security,* November 2006, 437–440.

[52] K. Ma, L. Yu and W. Zhang, Global exponential stability of cellular neural networks with time-varying discrete and distributed delays, *Neurocomputing,* **72** (2009) 2705–2709.

[53] S.O.R. Moheimani and I.R. Petersen, Optimal quadratic guaranteed cost control of a class of uncertain time-delay systems, *IEE Proc. Control Theory Appl.,* **144** (1997) 183–188.

[54] S. Mondie and V.L. Kharitonov, Exponential estimate for retarded time-delay systems: an LMI approach, *IEEE Trans. Auto. Contr.,* **50** (2005) 268–273.

[55] P.T. Nam and V.N. Phat, Robust stabilization of linear systems with delayed state and control, *J. Optim. Theory. Appl.,* **140** (2009) 287–299.

[56] A. Nemirovskii and P. Gahinet, The projective method for solving linear matrix inequalities, *Proceeding of the American Control Conference,* June 1994, 840–844.

[57] Y. Nesterov và A. Nemirovskii, An interior-point method for generalized linear-fractional programming, *Mathematical Programming,* **69** (1995) 177–204.

[58] P. Niamsup, K. Mukdasai and V.N. Phat, Improved exponential stability for time-varying systems with nonlinear delayed perturbations, *Appl. Math. Comput.,* **204** (2008) 490–495.

[59] P. Niamsup and V.N. Phat, A novel exponential stability condition of hybrid neural networks with time-varying delay, *Vietnam J. Math.,* **38** (2010) 341–351.

[60] P.H.A. Ngoc and N.K. Son, Stability radii of positive linear functional differential equations under multi-perturbations, *SIAM J. Control Optim.,* **43** (2005) 2278–2295.

[61] P.H.A. Ngoc, On exponential stability of nonlinear differential systems with time-varying delay, *Applied Mathematics Letters,* **25** (2012) 1208–1213.

[62] P.H.A. Ngoc, Novel criteria for exponential stability of functional differential equations, *Proceedings of the American Mathematical Society,* **141** (2013) 3083–3091.

[63] M.N.A. Parlakc, Robust delay-dependent guaranteed cost controller design for uncertain nonlinear neutral systems with time-varying state delays, *Int. J. Robust Nonlinear Control,* **20** (2010) 334–345.

[64] J.H. Park, H.Y. Jung, J.I. Park, S.G. Lee, Decentralized dynamic output feedback controller design for guaranteed cost stabilization of large-scale discrete-delay systems, *Appl. Math. Comput.,* **156** (2004) 307–320.

[65] J.H. Park, On design of dynamic output feedback controller for GCS of large-scale systems with delays in interconnections: LMI optimization approach, *Appl. Math. Comput.,* **161** (2005) 423–432.

[66] J.H. Park, Delay-dependent criterion for guaranteed cost control of neutral delay systems, *J. Optim. Theory. Appl.,* **124** (2005) 491–502.

[67] J.H. Park, Dynamic output guaranteed cost controller for neutral systems with input delay, *Chaos, Solitons and Fractals,* **23** (2005) 1819–1828.

[68] J.H. Park, Further result on asymptotic stability criterion of cellular neural networks with time-varying discrete and distributed delays, *Appl. Math. Comput.,* **182** (2006) 1661–1666.

[69] I.R. Petersen and D.C. Macfarlane, Optimal guaranteed cost control and filtering uncertain linear systems, *IEEE Trans. Aut. Contr.,* **39** (1994) 1971–1977.

[70] V.N. Phat and P.T. Nam, Exponential stability of delayed Hopfield neural networks with various activation functions and polytopic uncertainties, *Physics Letters A,* **374** (2010) 2527–2533.

[71] V.N. Phat and H. Trinh, Exponential stabilization of neural networks with various activation functions and mixed time-varying delays, *IEEE Trans. on Neural Networks,* **21** (2010) 1180–1184.

[72] V.N. Phat, Q.P. Ha and H. Trinh, Parameter-dependent H_∞ control for time-varying delay polytopic systems, *J. Optim. Theory Appl.,* **147** (2010) 58–70.

[73] V.N. Phat, Y. Khongtham and K. Ratchagit, LMI approach to exponential stability of linear systems with interval time-varying delays, *Linear Algebra and Its Applications,* **436** (2012) 243–251.

[74] R. Rakkiyappan, P. Balasubramaniam and R. Krishnasamy, Delay dependent stability analysis of neural systems with mixed time-varying delays and nonlinear perturbations, *J. Comput. Appl. Math.,* **235** (2011) 2147–2156.

[75] J.P. Richard, Time-delay systems: An overview of some recent advances and open problems, *Automatica,* **39** (2003) 1667-1694.

[76] H. Shao, New delay-dependent stability criteria for systems with interval delay, *Automatica,* **45** (2009) 744–749.

[77] P. Shi, E.K. Boukas, Y. Shi, R. Kagarwal, Optimal guaranteed cost control of uncertain discrete time-delay systems, *J. Comput. Appl. Math.,* **157** (2003) 435–451.

[78] N.K. Son and P.H.A. Ngoc, Robust stability of positive linear time-delay systems under affine parameter perturbations, *Acta Mathematica Vietnamica,* **24** (1999) 353–372.

[79] Q. Song, Exponential stability of recurrent neural networks with both time-varying delays and general activation functions via LMI approach, *Neurocomputing,* **71** (2008) 2823–2830.

[80] E.D. Sontag, *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems,* Springer, 1998.

[81] F. Souza and R.M. Pallhares, Interval time-varying delay stability for neural networks, *Neurocomputing,* **73** (2010) 2789–2792.

[82] J. Sun and G.P. Liu, State feedback and output feedback control of a class of nonlinear systems with delayed measurements, *Nonlinear Analysis,* **67** (2007) 1623–1636.

[83] J. Sun, G.P. Liu, J. Chen and D. Rees, Improved delay-range-dependent stability criteria for linear systems with time-varying delays, *Automatica,* **46** (2010) 466–470.

[84] J. Tian and X. Zhou, Improved asymptotic stability criteria for neural networks with interval time-varying delay, *Expert Systems with Applications,* **37** (2010) 7521–7525.

[85] J. Tian and S. Zhong, New delay-dependent exponential stability criteria for neural networks with discrete and distributed time-varying delays, *Neurocomputing,* **74** (2011) 3365–3375.

[86] F.E. Udwadia and R. Kumar, Time-delayed control of classically damped structural systems, *Int. J. Control,* **60** (1994) 687–713.

[87] S. Xu, J. Lam, D.W.C. Ho and Y. Zou, Improved global robust asymptotic stability criteria for delayed cellular neural networks, *IEEE Transactions on systems, Man, and Cybernetics–Part B: Cybernetics,* **35** (2005) 1317–1321.

[88] T. Yoshizawa, *Stability Theory by Lyapunov Second Method,* The Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1966.

[89] L. Yu and J. Chu, An LMI approach to guaranteed cost control of linear uncertain time-delay systems, *Automatica,* **35** (1999) 1155–1159.

[90] L. Yu and F. Gao, Optimal guaranteed cost control of discrete-time uncertain systems with both state and input delays, *Journal of the Franklin Institute,* **338** (2001) 101–110.

[91] D. Yue, Y. Zhang and E. Tian, Improved global robust delay-dependent stability criteria for delayed cellular neural networks, *International Journal of Computer Mathematics,* **85** (2008) 1265–1277.

[92] S.W. Yun, Y.J. Choi, P.G. Park, Dynamic output-feedback guaranteed cost control for linear systems with uniform input quantization, *Nonlinear Dynamics,* **62** (2010) 95–104.

[93] J. Zabczyk, *Mathematical Control Theory: An Introduction,* Boston, Birkhauser, 1992.

[94] W. Zhang, X.S. Cai and Z.Z. Han, Robust stability criteria for systems with interval time-varying delay and nonlinear perturbations, *Journal of Computational and Applied Mathematics,* **234** (2010) 174–180.

[95] K. Zhou and P.P. Khargonekar, Robust stabilization of linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty, *Systems and Control Letters,* **10** (1988) 17–20.

[96] X. Zhu and Y. Wang, Delay-dependent exponential stability for neural networks with discrete and distributed time-varying delays, *Physics Letters A,* **373** (2009) 4066–4072.

[97] Z.Q. Zuo and Y.J. Wang, Novel optimal guaranteed cost control of uncertain discrete systems with both state and input delays, *J. Optim. Theory. Appl.,* **139** (2008) 159–170.