VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM
VIỆN TOÁN HỌC

Hà Duy Hưng

TOÁN TỬ TÍCH PHÂN CỰC ĐẠI TRÊN TRƯỜNG ĐỊA PHƯƠNG

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - 2012

VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM
VIỆN TOÁN HỌC

Hà Duy Hưng

TOÁN TỬ TÍCH PHÂN CỰC ĐẠI TRÊN TRƯỜNG ĐỊA PHƯƠNG

Chuyên ngành: Phương trình vi phân và tích phân
Mã số : 62 46 01 05

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
GS. TSKH. Nguyễn Minh Chương

Hà Nội - 2012

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi. Các kết quả viết chung với tác giả khác đã được sự nhất trí của đồng tác giả khi đưa vào luận án. Các kết quả của luận án là mới và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Tác giả

Hà Duy Hưng

TÓM TẮT

Trong luận án này, chúng tôi nghiên cứu các bất đẳng thức trọng chuẩn loại yếu, mạnh, trên các trường địa phương, cho toán tử cực đại Hardy-Littlewood M, trong đó $Mf(x) = \sup_{\gamma \in \mathbb{Z}} \frac{1}{q^{d\gamma}} \int_{x+B_\gamma} |f(y)|dy$ và $f \in L^1_{\rm loc}$. Các kết quả nghiên cứu chính của luận án nằm ở chương 2 và chương 3. Trong chương 2, chúng tôi chứng minh một số bổ đề phủ quan trọng trên trường địa phương; xây dựng lại lý thuyết về các hàm trọng Muckenhoupt $\mathcal{A}_\ell$ trên trường địa phương và ứng dụng vào giải quyết một bài toán trọng nổi tiếng về toán tử M, đó là: với điều kiện nào của trọng ω thì M bị chặn từ $L^\ell(\omega)$ vào $L^\ell(\omega)$. Các kết quả đó được mở rộng cho toán tử cực đại với giá trị véctơ, từ đó nhận được các bất đẳng thức trọng chuẩn Fefferman-Stein. Chúng tôi đưa ra được một điều kiện cần và một điều kiện đủ gần tương đương nhau, cho một cặp hàm trọng để có được bất đẳng thức ngược loại yếu cho toán tử cực đại Hardy-Littlewood M; chúng tôi áp dụng kết quả đó cho lớp hàm $L\log^+ L$ với trọng của Zygmund. Cũng trong chương 2, chúng tôi giới thiệu một lớp toán tử tích phân cực đại mới và chứng minh được một ước lượng loại yếu cho nó.

Trong chương 3, chúng tôi giải quyết một bài toán trọng Muckenhoupt trên trường địa phương: tìm điều kiện cần và đủ của hàm trọng v để tồn tại một hàm trọng u hữu hạn hầu khắp nơi sao cho toán tử M là bị chặn từ $L^\ell(u)$ vào $L^\ell(v)$.

ABSTRACT

In this thesis, we investigate the weak and strong types of weighted norm inequalities for the Hardy-Littlewood maximal operator M, in which $Mf(x) = \sup_{\gamma\in\mathbb{Z}} \frac{1}{q^{d\gamma}} \int_{x+B_\gamma} |f(y)|dy$, here $f \in L^1_{\text{loc}}$. Our main results are given in chapter 2 and chapter 3. In chapter 2, we prove some necessary covering lemmas on local fields; a theory of Muckenhoupt weights is systematically introduced and we use it to solve a famous problem of characterizing all weight functions ω for which the operator M is bounded from $L^\ell(\omega)$ to $L^\ell(\omega)$. Then, we prove the Fefferman-Stein weighted inequalities for vector-valued maximal operator over local fields. We go on to obtain a sufficient and an almost similar necessary condition on a pair of weight functions for which a reverse weak type norm inequality holds for the Hardy-Littlewood maximal operator M; we apply our result to the weighted Zygmund class $L\log^+ L$. Also in this chapter, we prove a weak type estimate for a new maximal integral operator.

In chapter 3, we obtain a necessary and sufficient condition on weight functions v such that the Hardy-Littlewood maximal operator M is bounded from $L^\ell(u)$ to $L^\ell(v)$ for some finite a.e. function u. This characterization answers completely to a local field version of a similar question posed by Muckenhoupt.

Lời cảm ơn

Luận án được thực hiện và hoàn thành tại Viện Toán học thuộc Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam, dưới sự hướng dẫn tận tình và nghiêm khắc của GS.TSKH Nguyễn Minh Chương. Thầy đã hướng dẫn và truyền thụ cho tác giả những kinh nghiệm trong học tập, nghiên cứu khoa học. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và kính trọng sâu sắc đối với Thầy.

Trong quá trình nghiên cứu và hoàn thành luận án, tác giả luôn nhân được sự giúp đỡ, góp ý của GS.TSKH Hà Huy Khoái, GS.TSKH Nguyễn Mạnh Hùng, PGS.TSKH Nguyễn Minh Trí, PGS.TS Hà Tiến Ngoạn, TS. Nguyễn Văn Ngọc, TS. Cung Thế Anh. Tác giả xin chân thành cảm ơn sự quan tâm giúp đỡ của các Thầy.

Tác giả xin chân thành cảm ơn các thầy, cô giáo cùng các anh chị em nghiên cứu sinh, cao học trong xemina "*Toán tử giả vi phân, sóng nhỏ trên các trường thực, p−adic*", xemina của Phòng Phương trình vi phân đã tạo một môi trường học tập và nghiên cứu thuận lợi giúp tác giả hoàn thành luận án này. Tại đây tác giả đã nhận được nhiều chỉ dẫn, góp ý cũng như môi trường nghiên cứu sôi nổi và thân thiện, điều không thể thiếu trong quá trình nghiên cứu, hoàn thành luận án của tác giả.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban lãnh đạo Viện Toán học, Trung tâm Đào tạo sau đại học cùng toàn thể cán bộ, công nhân viên Viện Toán học đã tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tác giả trong quá trình thực hiện luận án.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn Trường THPT Chuyên Đại học Sư phạm đã tạo điều kiện giúp đỡ, động viên tác giả trong suốt thời gian làm nghiên cứu sinh và thực hiện Luận án.

Tác giả xin chân thành cảm ơn bạn bè, đồng nghiệp, đặc biệt là cha mẹ, vợ và con trai cùng những người thân trong gia đình, đã giúp đỡ động viên tác giả trong suốt thời gian thực hiện Luận án.

Hà Nội, tháng 12 năm 2011

Tác giả

Hà Duy Hưng

BẢNG KÝ HIỆU

Ký hiệu		**Diễn giải**
$\lvert x \rvert$	:	chuẩn của một phần tử x trong $\mathbb{K}^d$,
$\lvert x \rvert_p$	:	chuẩn $p-$adic của số $p-$adic x
$\mathbb{K}/k$	:	mở rộng đại số trên trường k,
$(\mathbb{K}:k)$	:	số chiều của mở rộng đại số $\mathbb{K}/k$,
$\mathbb{K}^d$	:	không gian véc tơ d chiều trên trường $\mathbb{K}$,
$\mathbb{Q}_p$	:	trường các số $p-$adic
$\mathbb{F}_q((t))$	:	trường các chuỗi số Laurent trên trường hữu hạn $\mathbb{F}_q$,
$\mathcal{O}$	:	vành các số nguyên của $\mathbb{K}$,
$\mathcal{P}$	:	ideal nguyên tố của $\mathcal{O}$,
β	:	phần tử nguyên tố của $\mathcal{P}$,
p	:	số nguyên tố và là đặc số của trường $\mathcal{O}/\mathcal{P}$,
q	:	số phần tử của trường $\mathcal{O}/\mathcal{P}$,
$x+B_\gamma, B_\gamma$	:	hình cầu đóng tâm $x,$ tâm 0 bán kính q^γ,
$x+S_\gamma, S_\gamma$	:	mặt cầu tâm $x,$ tâm 0 bán kính q^γ,
$N_{\mathbb{K}/k}(\alpha), \mathrm{Tr}_{\mathbb{K}/k}(\alpha)$	:	định thức, vết của phần tử $\alpha \in \mathbb{K}$,
M	:	toán tử Hardy-Littlewood,

$\mathcal{A}_\ell$	:	Lớp các hàm trọng Muckenhoupt,
CS_p	:	tập tất cả các dãy Cauchy trong $\mathbb{Q}$ ứng với metric $p-$adic d_p,
$Null_p$	:	tập tất cả các dãy trong $\mathbb{Q}$ có giới hạn bằng 0,
dx	:	Độ đo Haar,
L^ℓ	:	tập các hàm khả tích bậc ℓ trên $\mathbb{K}^d$,
L^ℓ_{loc}	:	tập các hàm khả tích địa phương bậc ℓ trên $\mathbb{K}^d$,
$L^\ell(u)$	:	tập các hàm khả tích bậc ℓ trên $\mathbb{K}^d$ ứng với độ đo $d\mu = udx$,
$\mathcal{D}$	:	tập các hàm hằng địa phương với giá compact,
$\mathcal{D}'$	:	tập các phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $\mathcal{D}$,
χ	:	hàm đặc trưng của nhóm cộng $(\mathbb{K},+)$ với hạng bằng 1,
ℓ^r	:	không gian các dãy phức $x=(x_k)$ sao cho $\left(\sum_{k=1}^{\infty} \lvert x_k \rvert^r\right)^{1/r} < \infty$.

Mục lục

Lời nói đầu

I. Lý do chọn đề tài

Giải tích điều hòa có nguồn gốc từ lý thuyết các chuỗi Fourier. Từ lâu, người ta đã khởi xướng việc nghiên cứu các chuỗi Fourier từ một chiều sang nhiều chiều và trên các nhóm compact địa phương. Việc nghiên cứu các chuỗi Fourier trên các nhóm compact địa phương mang đến nhiều kết quả có những ứng dụng quan trọng trong nghiên cứu lý thuyết số, lý thuyết phương trình đạo hàm riêng. Bên cạnh $\mathbb{R}$ và đường tròn đơn vị $\mathbb{T}$ của mặt phẳng phức là các ví dụ quen thuộc về các nhóm compact địa phương, thì ta còn có các nhóm cộng và nhân của trường số $p-$adic $\mathbb{Q}_p$, hoặc rộng hơn là các trường địa phương (bao gồm $\mathbb{Q}_p$, mọi mở rộng hữu hạn của $\mathbb{Q}_p$ và trường các chuỗi Laurent trên một trường hữu hạn). Trước đây không gian ba chiều Euclid $\mathbb{R}^3$ thường được nói như là không gian của các hiện tượng vật lý. Theo thông lệ đó, $\mathbb{R}^3$ thường được nhận thức như là không gian vật lý thực. Tuy nhiên, $\mathbb{R}^3$ cũng chỉ đơn giản là một mô hình hình học mà ở đó người ta dễ dàng kiểm tra được các tiên đề hình học bằng trực giác. Thực vậy, bằng phương pháp tọa độ, ta có thể mô tả các vật thể hình học thông qua hệ thống các số. Không gian Euclid sử dụng hệ thống số thực, có thể coi là làm đầy của tập các số hữu tỷ $\mathbb{Q}$ với giá trị tuyệt đối thông thường $|\cdot|$ trên $\mathbb{Q}$, ở đó một giá trị tuyệt đối là một hàm $|\cdot|: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

1. $|x| \geq 0$, $|x| = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$,

2. $|xy| = |x|\,|y|$,

3. $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Tuy nhiên, trên trường các số hữu tỷ $\mathbb{Q}$ ngoài giá trị tuyệt đối thông thường còn có các giá trị tuyệt đối $p-$adic không tương đương với nó. Năm 1916, nhà toán học Ostrowski chứng minh được rằng mọi giá trị tuyệt đối không tầm thường trên trường các số hữu tỷ $\mathbb{Q}$ đều tương đương với giá trị tuyệt đối thực thông thường, hoặc giá trị tuyệt đối $p-$adic $|\cdot|_p$, với p là một số nguyên tố. Ở đây, giá trị tuyệt đối $|\cdot|_p$ thỏa mãn các điều kiện 1., 2., và

3′. $|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$.

Chú ý rằng giá trị tuyệt đối thông thường thỏa mãn tiên đề Archimede trong khi đó tiên đề Archimede không còn đúng đối với $|\cdot|_p$. Thực vậy, ta có $|n \cdot 1|_p = |1 + \cdots + 1|_p \leq |1|_p = 1$, với mọi n nguyên dương. Do đó $|\cdot|_p$ được gọi là giá trị tuyệt đối phi-Archimede. Bao đầy của $\mathbb{Q}$ theo $|\cdot|_p$ cho ta trường các số $p-$adic $\mathbb{Q}_p$.

Trong luận án này, trường địa phương là một trường tôpô đủ, không rời rạc, compact địa phương và hoàn toàn không liên thông. Người ta chỉ ra được rằng, một trường như vậy, thì hoặc là trường các số $p-$adic $\mathbb{Q}_p$, hoặc là một mở rộng hữu hạn của $\mathbb{Q}_p$, hoặc là trường các chuỗi số Laurent trên một trường hữu hạn.

Như đã nói ở trên, nhiều lý thuyết toán học đã sớm được chuyển sang và xây dựng trên $\mathbb{Q}_p$, và tổng quát hơn trên các trường địa phương. Từ đây, các không gian hàm quan trọng trong lý thuyết phương trình đạo hàm riêng như không gian các hàm trơn vô cùng, không gian các hàm thử, không gian các phân bố được thiết lập trên các trường địa phương tương ứng là không gian $\mathcal{E}$ các hàm hằng địa phương, $\mathcal{D}$ không gian các hàm hằng địa phương với giá compact, $\mathcal{D}'$ không gian các phân bố, ... Bên cạnh đó, rất nhiều vấn đề cơ bản của giải tích điều hoà trên trường địa phương đã bắt đầu được nghiên cứu từ những năm 1934 và phát triển mạnh mẽ trong giai đoạn 1970-1980 bởi các công trình của M. Taibleson, Keith Phillips, J. A. Chao, James Daly, Charles Downey ... trong đó các nghiên cứu chủ yếu tập trung vào các toán tử cực đại, các toán tử tích phân kì dị, chuỗi Fourier (xem [47]). Vì những ứng dụng quan trọng trong khoa học công nghệ, trong y học mà những năm gần đây, các lý thuyết phương trình đạo hàm riêng $p-$adic, giải tích sóng nhỏ $p-$adic, giải tích điều hòa trên các trường trường địa phương đã thu hút được sự quan tâm nghiên cứu của rất nhiều nhà toán học như V.S. Vladimirov, I.V. Volovich, A. Kochubei, Keith Rogers, A. Yu. Khrennikov, S.V. Kozyrev, Nguyen Minh Chuong, ... Trong đó có nhiều công trình tập trung nghiên cứu về lý thuyết hàm cực đại, sóng nhỏ, các toán tử tích phân dao động, toán tử giả vi phân, bài toán Cauchy đối với phương trình giả vi phân parabolic, phổ của toán tử giả vi phân $p-$adic (xem [13], [14], [15], [16], [36], [33], [48], [51], ...).

Lý thuyết về các toán tử tích phân cực đại, là một trong những đối tượng nghiên cứu quan trọng của giải tích điều hòa hiện đại và lý thuyết phương trình đạo hàm riêng. Một trong những ứng dụng cổ điển nhất của lý thuyết các toán tử cực đại đó là trong chứng minh định lý đạo hàm Lebesgue. Bên cạnh đó, các toán tử tích phân cực đại, trong đó toán tử cực đại Hardy-Littlewood là một trong những ví dụ quan trọng nhất, được sử dụng trong nghiên cứu các không gian Sobolev bởi có một sự kiện khá đơn giản đó là tính khả vi yếu thường được bảo tồn qua toán tử cực đại. Chẳng hạn, một tính chất của toán tử cực đại Hardy-Littlewood M đó là biến một hàm Lipschitz thành một hàm Lipschitz, do đó theo định lý Rademacher, hàm cực đại của một hàm Lipschitz là khả vi hầu khắp nơi. Mặc dù toán tử cực đại không biến một hàm khả vi thành một hàm khả vi, nhưng M là toán tử bị chặn giữa các không gian Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ với $1 < p < \infty$, do đó nó bảo toàn tính khả vi yếu. Năm 2001, các nhà toán học J. Bourgain, H. Brezis, và P. Mironescu [11] đã đưa ra một đặc trưng rất mới cho các không gian Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ với $1 < p < \infty$, mà ở đó các tính chất của toán tử cực đại đóng vai trò chìa khóa trong chứng minh của họ.

Trên các trường $p-$adic và rộng hơn trên các trường địa phương, giải tích điều hòa được các nhà toán học quan tâm và nghiên cứu từ rất sớm, mà đặc biệt trong đó là lý thuyết về các toán tử tích phân kì dị, các toán tử tích phân cực đại. Rất nhiều kết quả cơ bản đã được chứng minh từ những năm 70 của thế kỷ trước. Trong thời gian gần đây, nhiều kết quả mới về lĩnh vực này cũng được công bố trong đó có những kết quả mang tính mở đường. Chẳng hạn, năm 2004, Keith Rogers [42] đã giải quyết được bài toán trung bình cực đại dọc theo một cung $p-$adic như sau: nếu kí hiệu

$\mathcal{M}_\gamma f(x) = \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \dfrac{1}{p^k} \int\limits_{|t|\le p^k} |f(x-\gamma(t))|\, dt$, trong đó $\gamma(t) = (t, t^2, \ldots, t^d)$ thì $\mathcal{M}_\gamma$ là bị chặn trong $L^q(\mathbb{Q}_p^d)$ với $1 < q < \infty$. Keith M. Rogers [43] cũng đã chứng minh được dạng $p-$adic của bổ đề van der Corput cho đa thức, qua đó mở ra hướng nghiên cứu lý thuyết tích phân dao động $p-$adic, một trong những vấn đề trung tâm của giải tích điều hòa $p-$adic. Năm 2008, các tác giả Weiyi Su và Hua Qiu xây dựng lại định nghĩa và các tính chất của đạo hàm Gibbs $p-$adic thông qua toán tử giả vi phân $p-$adic và chỉ ra rằng các đạo hàm loại đó rất có nhiều ứng dụng đáng ngạc nhiên trong giải tích fractal, trong y học. Điều đó cho thấy việc cần thiết phải phát triển lý thuyết phương trình đạo hàm riêng $p-$adic, phương trình đạo hàm riêng fractal trên các trường địa phương (xem [51]). Năm 2008, các tác giả Nguyễn Minh Chương và Nguyễn Văn Cơ [16] đã xây dựng được một hệ các cơ sở trực chuẩn mới của $L^2(\mathbb{Q}_p)$ gồm các hàm riêng của toán tử giả vi phân Vladimirov D^α, qua đó xây dựng được tường minh nghiệm ở dạng chuỗi của một lớp phương trình giả vi phân $p-$adic loại hyperbolic. Tuy nhiên, trên các trường địa phương, lý thuyết các toán tử tích phân cực đại còn chứa đựng nhiều bài toán quan trọng chưa được nghiên cứu. Chẳng hạn, các bài toán đặc trưng hàm trọng cho toán tử cực đại Hardy-Littlewood M: đặc trưng hàm trọng u để M bị chặn từ $L^\ell(u)$ vào $L^\ell(u)$, bài toán đặc trưng hàm trọng v để tồn tại u sao cho M bị chặn từ $L^\ell(u)$ vào $L^\ell(v)$, bài toán hai trọng.

Vì những nguyên nhân nói trên Giáo sư Nguyễn Minh Chương đã gợi ý cho tôi nghiên cứu các vấn đề đã nêu với đề tài **Toán tử tích phân cực đại trên trường địa phương**.

II. Đối tượng, phạm vi và phương pháp nghiên cứu

Rất nhiều các kết quả nghiên cứu của giải tích điều hòa trên trường số $p-$adic vẫn đúng cho các trường địa phương (ở đó trường địa phương bao gồm trường các số $p-$adic $\mathbb{Q}_p$, mở rộng hữu hạn của $\mathbb{Q}_p$ và trường các chuỗi Laurent trên một trường hữu hạn). Do đó luận án này đề cập đến một số kết quả của giải tích điều hòa, phương trình đạo hàm riêng không chỉ trên trường các số $p-$adic mà trên cả các trường địa phương. Chúng tôi nghiên cứu một số bài toán đặc trưng hàm trọng trên trường địa phương để có được các bất đẳng thức trọng chuẩn loại yếu và mạnh cho toán tử cực đại Hardy-Littlewood M, cho dạng véctơ của toán tử M. Cũng trong luận án này, chúng tôi đưa ra và nghiên cứu một lớp toán tử tích phân cực đại mới. Cụ thể, trong luận án này chúng tôi nghiên cứu các bài toán sau đây:

(a) Bài toán một trọng: với điều kiện nào của trọng u thì toán tử M là bị chặn từ $L^\ell(u)$ vào $L^\ell(u)$ với $1 \leq \ell \leq \infty$?. Nghiên cứu bài toán tương tự đối với dạng véctơ của toán tử M.

(b) Bài toán trọng Muckenhoupt trên trường địa phương: với điều kiện nào của hàm trọng v để tồn tại một hàm trọng u sao cho toán tử M là bị chặn từ $L^\ell(u)$ vào $L^\ell(v)$.

(c) Bài toán hai trọng: tìm các điều kiện giữa hai trọng u, v để toán tử M bị chặn trong các không gian hàm khả tích thông thường.

(d) Nghiên cứu các bất đẳng thức trọng chuẩn đối với những toán tử tích phân cực đại khác.

Trong giải tích điều hòa thực, bốn bài toán trên thu hút được sự quan tâm nghiên cứu của rất nhiều nhà toán học và đã đạt được nhiều kết quả sâu sắc. Do đó một trong những thuận lợi khi nghiên cứu các bài toán trên là nhiều vấn đề đã có sẵn những lược đồ nghiên cứu cụ thể. Tuy nhiên, việc chuyển nghiên cứu các bài toán trên trong trường địa phương sẽ gặp những khó khăn nhất định. Khó khăn thứ nhất đó là rất nhiều các kết quả nền tảng, cần thiết trong các lược đồ nghiên cứu các bài toán trên lại chưa sẵn có, phải đi thiết lập lại và không phải kết quả nào cũng dễ dàng thiết lập được một phiên bản $p-$adic thích hợp khi xét chuyển từ giải tích điều hòa thực sang giải tích điều hòa $p-$adic. Chẳng hạn, phải đến năm 2004, Keith Rogers [43] mới đưa ra được một phiên bản $p-$adic được cho là phù hợp của bổ đề van der Corput, một bổ đề mà trong lý thuyết giải tích điều hòa thực đã minh chứng rằng có một vai trò rất quan trọng khi nghiên cứu các toán tử tích phân dao động. Vì vậy kết quả của Keith Rogers mở ra hướng nghiên cứu về các tích phân dao động $p-$adic. Khó khăn thứ hai nằm ở sự khác biệt về cấu trúc số học và hình học giữa hai trường số thực và trường số $p-$adic. Điều này dẫn tới phải thay đổi nhiều kết quả tương ứng, phải đưa ra chứng minh hoàn toàn khác với các kết quả tương ứng giữa hai trường. Một số kết quả kĩ thuật sẵn có trong trường hợp Euclid gặp khó khăn trong việc chuyển sang trường địa phương nằm ở sự khác nhau về số học giữa hai trường: chẳng hạn trên $\mathbb{R}$ có thể sắp thứ tự toàn phần còn trên $\mathbb{K}$ thì không, hoặc những chuỗi số dạng $1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \cdots$ với $q > 1$ là hội tụ trong $\mathbb{R}$ nhưng không hội tụ trong trường địa phương và ngược lại có những chuỗi số hội tụ trong trường địa phương nhưng không hội tụ trong $\mathbb{R}$. Một điều có thể nhận ra, chính vì các chuẩn phi Archimede thỏa mãn bất đẳng thức mạnh hơn bất đẳng thức tam giác, nên nhiều kết quả nhận được trong trường địa phương sẽ đẹp hơn và ở dạng mạnh hơn với các kết quả tương ứng trên trường thực.

Để nghiên cứu các bài toán ở trên, chúng tôi dựa trên các lược đồ nghiên cứu đã có sẵn trong giải tích điều hòa thực. Đầu tiên, một trong những phương pháp nghiên cứu toán tử M đó là phải có những kết quả sâu sắc về cấu trúc hình học của không gian nền mà đặc biệt là các kết quả về phủ hình học. Do đó chúng tôi đi thiết lập lại các bổ đề phủ Wienner, phân tích Calderón-Zygmund trên trường địa phương. Các tính chất đặc trưng của trường địa phương được vận dụng vào trong các chứng minh của các bổ đề này. Điểm khác biệt rõ nhất của các bổ đề này giữa hai trường thực và trường địa phương đó là: trong trường địa phương, tập mức của toán tử cực đại Hardy-Littlewood M có thể viết thành hợp không quá đếm được các hình cầu rời nhau, còn trường số thực thì chưa chắc có thể phân tích được như vậy. Chính kết quả này dẫn tới sự khác nhau về chuẩn yếu và chuẩn mạnh của toán tử M. Để nghiên cứu bài toán (a), cũng như trường hợp Euclid, chúng tôi đi thiết lập lại lớp hàm trọng Muckenhoupt tương tự trên trường địa phương. Đối với bài toán một trọng cho toán tử M, kết quả nhận được không khác nhiều so với trường hợp Euclid. Tuy nhiên đối với bài toán một trọng cho toán tử dạng véctơ, chúng tôi vẫn còn nhiều vấn đề tương ứng chuyển sang mà chưa giải quyết được do gặp khó khăn với một số kết quả mang tính kĩ thuật.

Bài toán (b) trong trường hợp Euclid đã được giải quyết độc lập bởi Wo-Sang Young [49], A.E. Gatto và C.E. Gutiérrez [24]. Trong trường địa phương, chúng tôi giải quyết bài toán (b) dựa trên ý tưởng của Wo-

Sang Young. Đầu tiên chúng tôi đi thiết lập lại bất đẳng thức đối ngẫu Fefferman-Stein. Chú ý rằng việc tìm ra lớp hàm v có thể làm tương tự như trường hợp thực. Nhưng khó khăn lớn nhất ở đây đó là việc xây dựng hàm u như thế nào để lớp hàm đó thỏa mãn yêu cầu của bài toán (b). Nghiệm hàm của Wo-Sang Young không thể áp dụng được với lý do cơ bản nhất nằm ở những chuỗi số kiểu như $1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \cdots$ không hội tụ trong $\mathbb{K}$. Chính vì vậy để giải quyết bài toán này, ý tưởng của chúng tôi là giữ lại "phần đẹp" của hàm u mà Wo-Sang Young đã xây dựng và dán thêm vào một hàm thích hợp để thay thế "phần xấu".

Bài toán hai trọng (c) là một bài toán rất khó trong cả giải tích điều hòa thực và giải tích điều hòa trên trường địa phương. Ở đây, chúng tôi đi tìm các điều kiện cho cặp hàm trọng (u, v) để toán tử M thỏa mãn bất đẳng thức trọng loại yếu ngược $(1, 1)$ trên hình cầu và toàn không gian. Theo hướng nghiên cứu này, trong trường hợp thực đã có các kết quả của K. F. Andersen và Wo-Sang Young [8]. Điều thú vị là điều kiện cần và điều kiện đủ cho cặp hàm trọng (u, v) mà chúng tôi thu được là gần "tương tự nhau" (thực chất các điều kiện này tương đương sai khác một hằng số nhân). Kết quả tương ứng trong trường hợp Euclid, để có được sự tương đương giữa hai điều kiện cần và đủ thì các hàm trọng phải thỏa mãn thêm điều kiện kép.

Trong khi nghiên cứu bài toán (d), chúng tôi đưa ra được một lớp toán tử tích phân cực đại mới. Với giả thiết toán tử đó đã xác định trên L^ℓ với $1 < \ell < \infty$, chúng tôi đi nghiên cứu tính bị chặn yếu loại $(1, 1)$ của nó. Dù phương pháp chứng minh mà chúng tôi đưa ra là dựa theo lược đồ của Calderón-Zugmund, nhưng theo chúng tôi được biết, thì kết quả này chưa có một dạng tương tự nào trước đó trong trường hợp Euclid.

III. Những đóng góp mới của Luận án

Những đóng góp chính của Luận án, về mặt kết quả là:

1. Thiết lập được lý thuyết về các hàm trọng Muckenhoupt trên trường địa phương. Qua đó giải quyết được bài toán về tìm điều kiện cần và đủ của hàm trọng để toán tử Hardy-Littlewood M và dạng véctơ của nó là loại yếu và mạnh (ℓ, ℓ) với $1 \leq \ell < \infty$.

2. Đưa ra một điều kiện cần và một điều kiện đủ cho một cặp hàm trọng (u, v) để toán tử cực đại Hardy-Littlewood M thỏa mãn bất đẳng thức loại yếu ngược trên hình cầu. Trên toàn không gian, chúng tôi nhận được điều kiện cần và đủ cho cặp hàm trọng (u, v) để toán tử cực đại Hardy-Littlewood M thỏa mãn bất đẳng thức ngược loại yếu. Chúng tôi áp dụng những kết quả đạt này cho lớp hàm với trọng $L \log^+ L$ của Zygmund để nhận được điều kiện cần cho tính khả tích của hàm cực đại Hardy-Littlewood Mf.

3. Đưa ra một lớp toán tử tích phân cực đại mới và chứng minh được tính bị chặn yếu loại $(1, 1)$ nếu giả thiết toán tử thuộc loại (ℓ, ℓ) với $1 < \ell < \infty$ nào đó.

4. Giải quyết trọn vẹn một bài toán trọng Muckenhoupt trên trường địa phương. Chúng tôi đưa ra một lớp hàm trọng mới $\mathcal{W}_\ell$ và chứng minh được rằng: điều kiện cần và đủ để $v \in \mathcal{W}_\ell$ là tồn tại một hàm đo được không âm, hữu hạn hầu khắp nơi u sao cho M bị chặn từ $L^\ell(u)$ vào $L^\ell(v)$.

IV. Bố cục của Luận án

Bản Luận án có nhan đề **Toán tử tích phân cực đại trên trường địa phương**, được viết dựa trên hai bài báo đã được đăng của tác giả (trong danh mục công trình đã công bố liên quan đến Luận án). Như đã trình bày ở trên, các kết quả nghiên cứu mà chúng tôi đã đạt được không chỉ đúng trên các trường các số $p-$adic mà còn đúng cho một lớp rộng hơn: các trường địa phương. Do vậy, các kết quả trong Luận án này được chúng tôi trình bày trên các trường địa phương.

Luận án gồm **3 chương**:

Chương 1 trình bày một số khái niệm và kiến thức về các trường địa phương, lý thuyết tích phân, biến đổi Fourier, tích chập trên các trường địa phương. Đây là những khái niệm cần thiết cho việc trình bày các chương sau.

Chương 2 dành cho việc nghiên cứu các bổ đề phủ cần thiết, xây dựng lớp hàm trọng Muckenhoupt và giải quyết bài toán đặc trưng hàm trọng u để toán tử M bị chặn từ $L^\ell(u)$ vào $L^\ell(u)$. Các kết quả này được mở rộng cho toán tử cực đại Hardy-Littlewood với giá trị véctơ. Cũng trong chương này, chúng tôi đưa ra một điều kiện cần và một điều kiện đủ cho cặp hàm trọng (u, v) để toán tử M thỏa mãn bất đẳng thức trọng loại yếu ngược trên hình cầu. Chúng tôi áp dụng kết quả đạt được vào lớp hàm $L\log^+ L$ để nhận được một điều kiện cần đảm bảo tính khả tích của hàm cực đại Hardy-Littlewood Mf. Phần cuối chương, chúng tôi đưa ra một lớp toán tử tích phân cực đại mới trên trường địa phương và nghiên cứu tính bị chặn yếu $(1,1)$ của nó.

Chương 3 dành cho việc nghiên cứu bài toán trọng Muckenhoupt: Với điều kiện nào của v để tồn tại hàm trọng u sao cho toán tử M là bị chặn từ $L^\ell(u)$ vào $L^\ell(v)$. Chúng tôi xây dựng lớp hàm $\mathcal{W}_\ell$ là lời giải của bài toán trên và giải quyết trọn vẹn bài toán vừa nêu trong chương này.

Chương 1

MỘT SỐ KHÁI NIỆM VÀ KẾT QUẢ CHUẨN BỊ

Giải tích trên các trường địa phương đã được nhiều nhà toán học trên thế giới quan tâm và nghiên cứu, tuy nhiên ở Việt Nam có rất ít các giáo trình viết về nó. Vì lẽ đó, trong chương 1 này, chúng tôi trình bày sơ lược về các trường địa phương, lý thuyết tích phân, biến đổi Fourier và tích chập trên trường địa phương. Trong chương 1, chúng tôi có tham khảo các tài liệu [26], [29], [36], [38], [41], [50], [22], [44], [45], đặc biệt là ba tài liệu [36], [47], [48].

1.1 Trường địa phương

1.1.1 Mở rộng trường

Nếu k là một trường con của trường $\mathbb{K}$ thì ta nói $\mathbb{K}$ là một mở rộng của trường k. Để nhấn mạnh rằng $\mathbb{K}$ là một mở rộng của k ta thường kí hiệu mở rộng là $\mathbb{K}/k$. Một mở rộng $\mathbb{K}/k$ có thể coi là một không gian véc tơ trên trường k.

Định nghĩa 1.1.1. *Một mở rộng $\mathbb{K}/k$ được gọi là hữu hạn nếu $\mathbb{K}$ là một không gian véc tơ hữu hạn chiều trên trường k. Số chiều của nó được kí hiệu là $(\mathbb{K} : k)$ được gọi là bậc của mở rộng $\mathbb{K}/k$. Mỗi cơ sở của không gian véc tơ $\mathbb{K}$ trên k được gọi là cơ sở của mở rộng $\mathbb{K}/k$.*

Ta nhận thấy rằng nếu $\mathbb{K}$ là một mở rộng hữu hạn của k và $\mathbb{K}_0$ là một trường con của $\mathbb{K}$ mà $k \subset \mathbb{K}_0$ thì $\mathbb{K}/\mathbb{K}_0$ và $\mathbb{K}_0/k$ là các mở rộng hữu hạn. Hơn thế ta có $(\mathbb{K} : k) = (\mathbb{K} : \mathbb{K}_0)\,(\mathbb{K}_0 : k)$.

Định nghĩa 1.1.2. *Cho k là một trường con của trường $\mathbb{K}$, và θ là một phần tử trong $\mathbb{K}$. Nếu tồn tại một đa thức $f(x)$ với hệ số trong k nhận θ là một nghiệm, thì phần tử θ được gọi là đại số trên k. Một mở rộng $\mathbb{K}/k$ được gọi là đại số nếu mọi phần tử của $\mathbb{K}$ đều là đại số trên k.*

Mệnh đề 1.1.3. *(a) Mọi mở rộng hữu hạn $\mathbb{K}/k$ đều là đại số.*

(b) Với mọi đa thức $f \in k[x]$, $\deg f = n \geq 1$, tồn tại một mở rộng hữu hạn $\mathbb{K}/k$ sao cho f có thể biểu diễn được dưới dạng

$$f(x) = a(x - \alpha_1)\cdots(x - \alpha_n), \qquad a \in k,\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}.$$

Định nghĩa 1.1.4. *Cho f là một đa thức với các hệ số trong k. Một trường $\mathbb{K}$ được gọi là trường phân rã của đa thức f nếu nó là một mở rộng của k và thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau đây:*

(a) f có thể phân tích thành tích các nhân tử tuyến tính trong $\mathbb{K}[x]$, nghĩa là

$$f(x) = a(x - \alpha_1)\cdots(x - \alpha_n)$$

trong đó $a \in k$ và $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$

(b) *Không tồn tại một trường con $\mathbb{F}$ thực sự nào của $\mathbb{K}$ mà f có thể phân tích thành các nhân tử tuyến tính trong $\mathbb{F}[x]$.*

Kết quả sau đây nói lên sự tồn tại và duy nhất trường phân rã của mỗi đa thức

Mệnh đề 1.1.5. *Nếu k là một trường thì mọi đa thức với hệ số trong k đều có một trường phân rã. Hơn thế nếu $\mathbb{K}_1/k, \mathbb{K}_2/k$ là hai trường phân rã của f thì tồn tại một đẳng cấu trường $\phi : \mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}_2$ mà $\phi(u) = u$ với mọi $u \in k$.*

Định nghĩa 1.1.6. *Một trường k được gọi là hữu hạn nếu nó chỉ có một số hữu hạn phần tử.*

Đối với một trường hữu hạn thì số phần tử của nó có dạng $q = p^c$ trong đó p là một số nguyên tố (được gọi là đặc số của trường) và c là một số nguyên dương. Một ví dụ quen thuộc nhất về trường hữu hạn là $\mathbb{F}_p$ gồm các số $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ với các phép toán cộng và nhân thông thường lấy theo modulo p. Mọi trường hữu hạn với đặc số p đều là mở rộng hữu hạn của $\mathbb{F}_p$. Cụ thể ta có kết quả sau đây

Mệnh đề 1.1.7. *Với mọi số nguyên tố p và với mọi số nguyên dương c, trường phân rã $\mathbb{F}_q$ của đa thức $x^q - x$, trong đó $q = p^c$, là một trường hữu hạn có đúng q phần tử. Mọi trường hữu hạn với q phần tử đều đẳng cấu với $\mathbb{F}_q$. Trường $\mathbb{F}_q$ có đặc số p, $(\mathbb{F}_q : \mathbb{F}_p) = c$. Hơn thế, nếu d là một ước nguyên dương của c, thì tồn tại duy nhất một trường con của $\mathbb{F}_q$ với số phần tử là p^d.*

Giả sử $\mathbb{K}/k$ là một mở rộng hữu hạn bậc n. Với mỗi $\alpha \in \mathbb{K}$, ta xét ánh xạ tuyến tính $\psi \mapsto \alpha\psi$ trên $\mathbb{K}$, trong đó $\mathbb{K}$ có thể coi là không gian véctơ trên trường k. Gọi $\omega_1, \ldots, \omega_n$ là một cơ sở của mở rộng $\mathbb{K}/k$, khi đó

$$\alpha\omega_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\omega_j, \quad \text{với } \ a_{ij} \in k.$$

Vì định thức và vết của ma trận (a_{ij}) không phụ thuộc vào sự lựa chọn cơ sở $\{\omega_i\}$ nên ta có thể đưa ra các khái niệm về định thức và vết của một phần tử trong một mở rộng trường sau đây.

Định nghĩa 1.1.8. *Ta kí hiệu $N_{\mathbb{K}/k}(\alpha)$ và $\mathrm{Tr}_{\mathbb{K}/k}(\alpha)$ lần lượt là định thức và vết của ma trận (a_{ij}). $N_{\mathbb{K}/k}(\alpha)$ và $\mathrm{Tr}_{\mathbb{K}/k}(\alpha)$ lần lượt được gọi là định thức và vết của phần tử $\alpha \in \mathbb{K}$ ứng với mở rộng $\mathbb{K}/k$.*

1.1.2 Trường các số $p-$adic

Ta nhắc lại rằng một *giá trị tuyệt đối* trên một trường k là một hàm $|\cdot| : k \to \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các tính chất sau đây: với mọi $x, y \in k$ ta có

(Na) $|x| \geq 0$ với mọi $x \in k$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$,

(Nb) $|xy| = |x| \cdot |y|$,

(Nc) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Có thể thấy ngay hàm xác định bởi $|x| = 0$ nếu $x = 0$ và $|x| = 1$ với mọi $x \neq 0$ là một giá trị tuyệt đối trên k. Ta gọi giá trị tuyệt đối này là *tầm thường*. Một giá trị tuyệt đối được gọi là *phi-Archimede* nếu nó thỏa mãn bất đẳng thức mạnh hơn (Nc) sau đây:

(Nc') $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$ với mọi $x, y \in k$.

Rõ ràng rằng, giá trị tuyệt đối tầm thường trên một trường k là phi Archimede.

Bây giờ ta sẽ khảo sát các giá trị tuyệt đối trên trường các số hữu tỷ $\mathbb{Q}$. Giá trị tuyệt đối thông thường trên trường $\mathbb{Q}$ được kí hiệu $|\cdot|_\infty$. Giá trị tuyệt đối $|\cdot|_\infty$ là Archimede. Một giá trị tuyệt đối quan trọng khác mà ta sẽ xây dựng ngay sau đây. Cho p là một số nguyên tố, ta xác định *giá trị tuyệt đối* $p-$*adic* $|\cdot|_p$ (hay còn gọi là *chuẩn* $p-$*adic*) như sau: đặt $|0|_p = 0$. Với mỗi số hữu tỷ $x \in \mathbb{Q}$ khác không, ta viết $x = p^\gamma \cdot \dfrac{a}{b}$, trong đó a, b là các số nguyên không chia hết cho p. Khi đó ta đặt $|x|_p = p^{-\gamma}$. Dễ thấy hàm $|\cdot|_p$ thỏa mãn các tính chất sau đây

(a) $|x|_p \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{Q}$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

(b) $|xy|_p = |x|_p \cdot |y|_p$

(c) $|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$ với dấu bằng xảy ra nếu $|x|_p \neq |y|_p$.

Do vậy giá trị tuyệt đối $p-$adic là phi Archimede và do đó ta cũng nói $|\cdot|_p$ là một *chuẩn phi Archimede*.

Ví dụ 1.1.1. *Xét số hữu tỷ* $x = \frac{63}{550} = 2^{-1} \times 3^2 \times 5^{-2} \times 7 \times 11^{-1}$*. Khi đó* $|x|_2 = 2$*,* $|x|_3 = \frac{1}{9}$*,* $|x|_5 = 25$*,* $|x|_7 = \frac{1}{7}$*,* $|x|_{11} = 11$*,* $|x|_p = 1$ *với mọi số nguyên tố* $p > 11$*.*

Định lý 1.1.9. (Ostrowski 1916 [48, trang 3]) *Mọi giá trị tuyệt đối không tầm thường trên trường các số hữu tỷ* $\mathbb{Q}$ *tương đương với hoặc* $|\cdot|_\infty$ *hoặc là* $|\cdot|_p$ *với* p *là một số nguyên tố nào đó.*

Giá trị tuyệt đối $|\cdot|_p$ cảm sinh ra một metric tự nhiên $d_p(x,y) = |x-y|_p$ trên $\mathbb{Q}$. Ta kí hiệu CS_p là tập tất cả các dãy Cauchy trong $\mathbb{Q}$ ứng với metric d_p và $Null_p$ là tập tất cả các dãy trong $\mathbb{Q}$ có giới hạn bằng 0. Ta có $Null_p \subset CS_p$

Ví dụ 1.1.2. ◦ *Dãy (a_n) xác định bởi $a_n = p^n$ với mọi n. Khi đó $(a_n) \in Null_p$.*

◦ *Dãy (b_n) xác định bởi $b_n = 1+p+p^2+\cdots+p^{n-1}$. Khi đó $(b_n) \notin Null_p$ nhưng $(b_n) \in CS_p$. Hơn thế, dễ chứng minh được $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, trong đó $b = \dfrac{1}{1-p} \in \mathbb{Q}$ trong $(\mathbb{Q}, d_p)$.*

◦ *Dãy (c_n) xác định bởi $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} p^{k^2}$ với mọi $n \geq 1$. Dễ thấy $(c_n) \in CS_p$ nhưng không có một số hữu tỷ nào là giới hạn của nó. Do đó không gian $(\mathbb{Q}, d_p)$ không đủ.*

Ta xác định phép toán cộng và nhân các phần tử của CS_p như sau: với (a_n) và (b_n) thuộc CS_p ta đặt

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n) \qquad \text{và} \qquad (a_n) \times (b_n) = (a_n b_n)$$

Khi đó CS_p cùng hai phép toán trên trở thành một vành giao hoán với phần tử không $0_{CS} = (0)$ và phần tử đơn vị $1_{CS} = (1)$. Ngoài ra, $Null_p$ là một ideal hai phía của CS_p. Do đó ta có thể xác định vành thương $CS_p/Null_p$; vành thương này được gọi là *bao đầy của $\mathbb{Q}$ ứng với chuẩn $p-$adic* $|\cdot|_p$, và được kí hiệu là $\mathbb{Q}_p$. Ta sẽ kí hiệu $\{a_n\}$ để chỉ lớp tương đương của dãy Cauchy (a_n). Phần tử không và phần tử đơn vị tương ứng là $\{0\}$ và $\{1\}$. $\mathbb{Q}_p$ có thể được trang bị cấu trúc vành bởi hai phép toán cộng và nhân tự nhiên sau đây

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\} \qquad \text{và} \qquad \{a_n\} \times \{b_n\} = \{a_n b_n\}.$$

Chuẩn $p-$adic $|\cdot|_p$ có thể mở rộng lên $\mathbb{Q}_p$ bằng cách đặt

$$|\{a_n\}|_p := \lim_{n\to\infty} |a_n|_p.$$

Mỗi phần tử $x \in \mathbb{Q}_p$ được gọi là một số $p-$adic. Ta có kết quả quan trọng sau đây

Mệnh đề 1.1.10. ([48, trang 3])

(a) $\mathbb{Q}_p$ *là một trường với các phép toán trên.*

(b) Mỗi số p−adic $x \in \mathbb{Q}_p$, $x \neq 0$, *đều biểu diễn được duy nhất dưới dạng*

$$x = p^\gamma \left(x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + \cdots\right) \tag{1.1}$$

trong đó $x_j \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, $x_0 \neq 0$, $\gamma \in \mathbb{Z}$.

(c) Nếu x *có khai triển dạng (1.1) thì* $|x|_p = p^{-\gamma}$; $|\cdot|_p$ *là một giá trị tuyệt đối phi Archimede trên* $\mathbb{Q}_p$.

(d) $\mathbb{Q}_p$ *là một không gian đủ ứng với metric* d_p *xác định bởi* $d_p(x, y) = |x - y|_p$. *Hơn thế* $\mathbb{Q}_p$ *là một trường tôpô compact địa phương, hoàn toàn không liên thông.*

(e) Nếu $\mathbb{K}$ *là một mở rộng bậc hữu hạn của* $\mathbb{Q}_p$ *thì một giá trị tuyệt đối trên* $\mathbb{K}$ *là thác triển của* $|\cdot|_p$ *từ* $\mathbb{Q}_p$ *cho bởi công thức*

$$|x|_{\mathbb{K}} = \left|N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}_p}(x)\right|_p.$$

1.1.3 Trường các chuỗi Laurent hình thức trên trường hữu hạn

Ta xét trường hữu hạn $\mathbb{F}_q$ tùy ý, trong đó $q = p^c$ với p là số nguyên tố và c là một số nguyên dương. Kí hiệu $\mathbb{F}_q((t))$ là tập tất cả các chuỗi Laurent hình thức có dạng

$$\sum_{i=n}^{\infty} a_i t^i, \qquad \text{với } a_i \in \mathbb{F}_q,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Các phép cộng và nhân trên $\mathbb{F}_q((t))$ được xác định như sau

$$\left(\sum_{i=n}^{\infty} a_i t^i\right) + \left(\sum_{i=n}^{\infty} b_i t^i\right) := \sum_{i=n}^{\infty} (a_i + b_i) t^i,$$

$$\left(\sum_{i=n}^{\infty} a_i t^i\right) \times \left(\sum_{i=n}^{\infty} b_i t^i\right) := \sum_{i=n}^{\infty} c_i t^i,$$

trong đó các hệ số c_k được xác định bởi công thức $c_k = \sum\limits_{\substack{i+j=k \\ n \le i,j}} a_i b_j$. Với các phép toán trên thì $\mathbb{F}_q((t))$ lập thành một trường. Một giá trị tuyệt đối phi Archimede trên $\mathbb{F}_q((t))$ xác định như sau: đặt $||0||_q = 0$ và với mỗi $x \in \mathbb{F}((t))$ mà

$$x = \sum_{i=n}^{\infty} a_i t^i, \qquad \text{với } a_i \in \mathbb{F}_q,\ n \in \mathbb{Z},\ a_n \neq 0, \tag{1.2}$$

thì ta đặt $||x||_q = q^{-n}$. Trường $\mathbb{F}_q((t))$ cùng với metric cảm sinh tự nhiên từ định giá $|| \cdot ||_q$ làm thành một trường tôpô compact địa phương, hoàn toàn không liên thông và có đặc số p.

1.1.4 Trường địa phương

Ta nhắc lại rằng $\mathbb{K}$ được gọi là một trường tôpô nếu như nó là một trường và cũng là một không gian tôpô thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau đây:

(a) cả hai phép toán cộng và nhân là liên tục từ $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ vào $\mathbb{K}$,

(b) phép nghịch đảo $\mathbb{K} \setminus \{0\} \to \mathbb{K} \setminus \{0\}$ được xác định bởi $x \mapsto x^{-1}$ là liên tục.

Một trường tôpô được gọi là *compact địa phương* nếu như nhóm cộng $(\mathbb{K}, +)$ và nhóm nhân $\mathbb{K}^\star$ là các nhóm Abel, compact địa phương. Chú ý rằng nếu $\mathbb{K}$ là một trường tôpô với tôpô rời rạc thì $\mathbb{K}$ cũng là một trường compact địa phương. Vì vậy khi xét đến các trường tôpô compact địa phương sau này ta sẽ loại bỏ trường hợp trường tôpô rời rạc.

Định nghĩa 1.1.11. *Một trường địa phương là một trường tôpô đủ, compact địa phương, hoàn toàn không liên thông và không rời rạc.*

Có hai ví dụ quan trọng nhất về trường địa phương đó là trường các số $p-$adic $\mathbb{Q}_p$ và trường $\mathbb{F}_q((t))$ các chuỗi Laurent hình thức.

Mệnh đề 1.1.12. ([47, trang 5]) *Cho $\mathbb{K}$ là một trường tôpô đủ, compact địa phương, không rời rạc.*

(a) Nếu $\mathbb{K}$ là liên thông thì $\mathbb{K}$ sẽ hoặc là trường các số thực $\mathbb{R}$ hoặc là trường các số phức $\mathbb{C}$

(b) Nếu $\mathbb{K}$ không liên thông thì $\mathbb{K}$ là hoàn toàn không liên thông. Khi đó

- *Nếu $\mathbb{K}$ có đặc số hữu hạn p, thì $\mathbb{K}$ là trường $\mathbb{F}_q((t))$ trong đó $q = p^c$ và c là số nguyên dương nào đó.*
- *Nếu $\mathbb{K}$ có đặc số không thì $\mathbb{K}$ là mở rộng đại số hữu hạn của trường $\mathbb{Q}_p$ với p là một số nguyên tố nào đó.*

Bây giờ giả sử $\mathbb{K}$ là một trường địa phương với giá trị tuyệt đối tương ứng trên nó kí hiệu là $|\cdot|$. Ta đưa ra các kí hiệu

$$\mathcal{O} = \{x \in \mathbb{K} : \ |x| \leq 1\}, \quad \mathcal{P} = \{x \in \mathbb{K} : \ |x| < 1\}, \quad \mathcal{U} = \mathcal{O}/\mathcal{P}.$$

Khi đó $\mathcal{O}$ là một vành con của $\mathbb{K}$ và được gọi là vành các số nguyên, $\mathcal{P}$ là một ideal trong $\mathcal{O}$. Ideal $\mathcal{P}$ chứa một phần tử β thỏa mãn $\mathcal{P} = \beta\mathcal{O}$ (mỗi phần tử β như vậy sẽ được gọi là một *phần tử nguyên tố*). Biểu diễn chính tắc (1.1) của một số $p-$adic có thể mở rộng cho trường địa phương $\mathbb{K}$ tùy ý như sau: Ta xét vành thương $\mathcal{O}/\mathcal{P}$. Khi đó $\mathcal{O}/\mathcal{P}$ là một trường hữu hạn: nó sẽ là $\mathbb{F}_p$ nếu $\mathbb{K}$ là $\mathbb{Q}_p$ và là $\mathbb{F}_q$ nếu $\mathbb{K}$ là $\mathbb{F}_q((t))$. Kí hiệu p là đặc số của trường $\mathcal{O}/\mathcal{P}$ và $q = p^c$ là số phần tử của nó. Giá trị tuyệt đối $|\cdot|$ được chuẩn hoá để sao cho $|\beta| = q^{-1}$. Kí hiệu S là một hệ đầy đủ các đại diện của các lớp tương đương trong $\mathcal{O}/\mathcal{P}$. Khi đó với mỗi $x \in \mathbb{K}$, $x \neq 0$, biểu diễn được duy nhất dưới dạng chuỗi hội tụ sau đây

$$x = \beta^n \left(x_0 + x_1\beta + x_2\beta^2 + \cdots\right) \tag{1.3}$$

trong đó $n \in \mathbb{Z}$, $x_j \in S$, $x_0 \notin \mathcal{P}$ và $|x| = q^{-n}$.

Định nghĩa 1.1.13. *(a) Cho G là một nhóm Abel compact địa phương với phép cộng, $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$ là nhóm nhân các số phức với modul bằng 1. Một đồng cấu nhóm liên tục $f : G \to \mathbb{T}$ được gọi là một đặc trưng của G.*

(b) Một đặc trưng cộng tính khác hằng số của trường địa phương $\mathbb{K}$ là một đặc trưng của nhóm cộng $(\mathbb{K}, +)$.

Mệnh đề 1.1.14. ([50, trang 41]) *Nếu χ là một đặc trưng cộng tính không tầm thường của trường địa phương $\mathbb{K}$ thì mọi đặc trưng cộng tính* *của $\mathbb{K}$ đều có dạng $\chi_a(x) = \chi(ax)$, với $x \in \mathbb{K}$ và $a \in \mathbb{K}$.*

Do đó để xác định tất cả các đặc trưng cộng tính của một trường địa phương ta chỉ cần tìm được một đặc trưng không tầm thường. Đầu tiên ta xét trường $\mathbb{K} = \mathbb{Q}_p$. Từ biểu diễn (1.1) cho mỗi phần tử $x \in \mathbb{Q}_p$, và $x \neq 0$ đều có dạng

$$x = p^\gamma \left(x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + \cdots\right)$$

trong đó $x_j \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, $x_0 \neq 0$, $\gamma \in \mathbb{Z}$. Ta xác định *phần phân của một số $p-$adic x* như sau:

$$\{x\}_p = \begin{cases} 0, & \text{nếu } x = 0 \text{ hoặc } \gamma \geq 0 \\ p^\gamma \left(x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + \cdots + x_{-1-\gamma} p^{-1-\gamma}\right), & \text{nếu } \gamma < 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Hàm $\chi_p(x) = \exp\left(2\pi i \{x\}_p\right)$ là một đặc trưng cộng tính không tầm thường của $\mathbb{Q}_p$.

Đối với $\mathbb{K}$ là mở rộng hữu hạn của $\mathbb{Q}_p$ thì $\chi_p \circ \mathrm{Tr}_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}_p}$ là một đặc trưng cộng tính không tầm thường của $\mathbb{K}$.

Bây giờ ta xét trường hợp $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q((t))$. Đầu tiên ta thấy rằng nếu $q = p^c$ với p là số nguyên tố và c nguyên dương thì ánh xạ $\zeta : x \mapsto \zeta(x) = \exp\left(\frac{2i\pi}{p} \mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(x)\right)$ là một đặc trưng của $\mathbb{F}_q$. Với mỗi $x \in \mathbb{F}_q((t))$ có biểu diễn (1.2), ta đặt $\chi(x) = \zeta(a_{-1})$, trong đó a_{-1} là hệ số của biểu diễn của $x \in \mathbb{F}_q((t))$ ở dạng (1.2). Khi đó, χ là một đặc trưng không tầm thường của $\mathbb{F}_q((t))$.

Các đặc trưng trên $\mathbb{K}$ được phân loại bởi hạng của chúng. *Hạng của một đặc trưng χ* là số nguyên n lớn nhất thỏa mãn $\chi(x) = 1$ với mọi $|x| \leq q^n$.

Nếu χ là đặc trưng có hạng n thì với mọi k nguyên, $\theta(x) := \chi(\beta^k x)$ là đặc trưng có hạng $n+k$. Do tính liên tục, mọi đặc trưng đều có một hạng hữu hạn.

Bắt đầu từ đây trở đi, chúng tôi sẽ kí hiệu χ là một đặc trưng trên $\mathbb{K}$ mà có hạng bằng 0.

1.2 Độ đo và tích phân trên trường địa phương

Cho $\mathbb{K}$ là một trường địa phương. Ta nhắc lại q là số phần tử của trường $\mathcal{O}/\mathcal{P}$ được xác định như trong mục 1.1.4, phía sau mệnh đề 1.1.12. Nhóm cộng $(\mathbb{K}, +)$ là một nhóm giao hoán, compact địa phương vì vậy luôn tồn tại duy nhất (sai khác một hằng số nhân) một độ đo Haar trên $\mathbb{K}$, tức là một độ đo Borel chính quy trên $\mathbb{K}$, hữu hạn trên các tập con compact của $\mathbb{K}$ và bất biến với phép tịnh tiến. Chứng minh chi tiết về sự tồn tại của độ đo Haar trên những nhóm giao hoán compact địa phương có thể xem trong các tài liệu [25, chương 11], hoặc [26, chương 4]. Độ đo Haar này được chuẩn hoá bởi

$$\int_{\mathcal{O}} dx = 1. \tag{1.5}$$

Trên $\mathbb{K}$ ta lấy cố định một đặc trưng χ của nhóm cộng $(\mathbb{K}, +)$ mà có hạng bằng 0. Với mỗi số d nguyên dương, kí hiệu $\mathbb{K}^d$ là không gian véctơ d chiều trên $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}^d = \{x = (x_1, \ldots, x_d) : x_i \in \mathbb{K}, i = \overline{1, d}\}$. Một chuẩn $|\cdot|$ trên $\mathbb{K}^d$ được xác định như sau: với mỗi $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{K}^d$, ta đặt $|x| := \max\{|x_1|, \ldots, |x_d|\}$. Dễ thấy rằng $|\cdot|$ thỏa mãn các tính chất sau: với mọi $x, y \in \mathbb{K}^d$ ta có

(a) $|x| \geq 0$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

(b) $|a \cdot x| = |a| \cdot |x|$ với mọi $a \in \mathbb{K}$ (ở đây $a \cdot x = (ax_1, \ldots, ax_d)$).

(c) $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$ với dấu bằng xảy ra nếu $|x| \neq |y|$.

Tôpô tích trên $\mathbb{K}^d$ trùng với tôpô sinh bởi chuẩn $|\cdot|$; $\mathbb{K}^d$ là một nhóm tôpô giao hoán, compact địa phương dưới phép cộng véctơ. Một độ đo Haar của nhóm cộng $(\mathbb{K}^d, +)$ là $dx = dx_1 \ldots dx_d$, trong đó dx_i là các độ đo Haar chuẩn hóa của không gian tọa độ thứ i của $\mathbb{K}^d$. Với mỗi $a \neq 0$ thuộc $\mathbb{K}$ thì $d(ax) = |a|^d dx$. Với $x = (x_1, \ldots, x_d)$ và $y = (y_1, \ldots, y_d)$ ta kí hiệu $x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_d y_d$.

Với mỗi γ là số nguyên, $a \in \mathbb{K}^d$, ta kí hiệu

$$a + B_\gamma = \{y \in \mathbb{K}^d :\ |y - a| \leq q^\gamma\},\ B_\gamma = 0 + B_\gamma,$$

$$a + S_\gamma = \{y \in \mathbb{K}^d :\ |y - a| = q^\gamma\},\ S_\gamma = 0 + S_\gamma.$$

$a + B_\gamma$, $a + S_\gamma$ lần lượt được gọi là hình cầu và mặt cầu có tâm là a, có bán kính là q^γ. Họ các hình cầu và mặt cầu trong $\mathbb{K}^d$ thỏa mãn các tính chất dưới đây.

Mệnh đề 1.2.1. *(a) $a + B_\gamma$ là một nhóm cộng giao hoán;*

$(a + B_{\gamma-1}) \subset (a + B_\gamma)$; $a + S_\gamma = (a + B_\gamma) \setminus (a + B_{\gamma-1})$;

$a + B_\gamma = \bigcup\limits_{\gamma' \leq \gamma} (a + S_{\gamma'})$; $\bigcap\limits_{\gamma \in \mathbb{Z}} (a + B_\gamma) = \{a\}$;

$\bigcup\limits_{\gamma \in \mathbb{Z}} (a + B_\gamma) = \bigcup\limits_{\gamma \in \mathbb{Z}} (a + S_\gamma) = \mathbb{K}^d$.

(b) Nếu $b \in a + B_\gamma$ thì $b + B_\gamma = a + B_\gamma$ (tức mọi điểm thuộc một hình cầu đều là tâm của hình cầu đó). Hệ quả là hai hình cầu bất kì thì hoặc rời nhau, hoặc chứa nhau.

(c) $a + B_\gamma$, $a + S_\gamma$ *là các tập vừa mở, vừa đóng và là compact trong* $\mathbb{K}^d$.

(d) Mọi tập mở trong $\mathbb{K}^d$ *đều là hợp của không quá đếm được các hình cầu đôi một rời nhau.*

Cho E là tập con đo được của $\mathbb{K}^d$ đối với độ đo Haar dx của nhóm cộng $(\mathbb{K}^d, +)$. Cũng giống như tích phân Lebesgue, đầu tiên ta xác định tích phân trên E của các hàm đơn giản đo được đối với dx. Với mỗi hàm đo được $f : \mathbb{K}^d \to [0; +\infty]$, tích phân của f trên E được xác định bởi

$$\int_E f dx := \sup \int_E s\, dx,$$

trong đó supremum được lấy qua tất cả các hàm đơn giản s mà $0 \le s \le f$. Với mỗi hàm đo được $f : \mathbb{K}^d \to [-\infty; +\infty]$, tích phân của f trên E được xác định như sau

$$\int_E f dx := \int_E f^+ dx - \int_E f^- dx,$$

ở đó $f^+ = \max\{f, 0\}$, $f^- = -\min\{f, 0\}$.

Với mỗi hàm đo được $f : \mathbb{K}^d \to \mathbb{C}$, ta viết $f = u + iv$, trong đó i là đơn vị ảo, các hàm số $u, v : \mathbb{K}^d \to \mathbb{R}$. Tích phân của f trên E được xác định như sau

$$\int_E f dx := \int_E u^+ dx - \int_E u^- dx + i \int_E v^+ dx - i \int_E v^- dx.$$

Cố định $1 \le \ell \le \infty$ và $\mathcal{U}$ là một tập con mở khác rỗng của $\mathbb{K}^d$. Ta sử dụng kí hiệu $L^\ell_{\rm loc}(\mathcal{U})$ là không gian các hàm giá trị phức khả tích địa phương bậc ℓ trên $\mathcal{U}$. Ta cũng kí hiệu $L^\ell(\mathcal{U})$ là tập các hàm $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ thỏa mãn

$$||f||_{L^\ell(\mathcal{U})} := \left(\int_{\mathcal{U}} |f(x)|^\ell dx \right)^{1/\ell} < \infty, \tag{1.6}$$

nếu $1 \leq \ell < \infty$. Trường hợp $\ell = \infty$ thì (1.6) được thay thế bằng

$$||f||_{L^\infty(\mathcal{U})} := \text{ess.}\sup_{x\in\mathcal{U}}|f(x)| < \infty.$$

Ta kí hiệu $L^\ell = L^\ell(\mathbb{K}^d)$, $L^\ell_{\text{loc}} := L^\ell_{\text{loc}}\left(\mathbb{K}^d\right)$ và $||f||_\ell := \|f\|_{L^\ell(\mathbb{K}^d)}$.

Mỗi hàm $f \in L^1_{\text{loc}}$, nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{N\to+\infty} \int\limits_{B_N} f(x)dx = \lim_{N\to+\infty} \sum_{-\infty<\gamma\leq N} \int\limits_{S_\gamma} f(x)dx, \tag{1.7}$$

thì giới hạn trên được gọi là *tích phân của hàm f trên* $\mathbb{K}^d$ và kí hiệu là $\int\limits_{\mathbb{K}^d} f(x)dx$. Với mỗi hàm $f \in L^1_{\text{loc}}\left(\mathbb{K}^d \setminus \{a\}\right)$, nếu tồn tại giới hạn

$$\int\limits_{\mathbb{K}^d} f(x)dx = \lim_{\substack{N\to+\infty \\ M\to-\infty}} \sum_{M\leq\gamma\leq N} \int_{a+S_\gamma} f(x)dx. \tag{1.8}$$

thì giới hạn đó được gọi là tích phân của f trên $\mathbb{K}^d$.

Lưu ý rằng nếu hàm $f \in L^1$ thì các giới hạn (1.7), (1.8) tồn tại và trùng với tích phân của f trên $\mathbb{K}^d$ mà ta đã xác định trước đó. Tuy nhiên, chiều ngược lại không đúng, chẳng hạn xem ví dụ 1.2.5-(i).

Tiếp theo, chúng tôi giới thiệu một vài ví dụ tính tích phân trên $\mathbb{K}^d$.

Ví dụ 1.2.1. $\int\limits_{a+B_\gamma} dx = \int\limits_{B_\gamma} dx = q^{d\gamma}$ và $\int\limits_{a+S_\gamma} dx = q^{d\gamma}\left(1 - \dfrac{1}{q^d}\right)$.

■ Thực vậy, từ công thức ta có

$$\int\limits_{a+B_\gamma} dx = \int\limits_{B_\gamma} dx = \int\limits_{|y|\leq 1} d(\beta^{-\gamma}y) = \int\limits_{|y|\leq 1} \left|\beta^{-\gamma}\right|^d dy = q^{d\gamma} \int\limits_{\mathcal{O}} dy = q^{d\gamma}$$

$$\int\limits_{a+S_\gamma} dx = \int\limits_{a+B_\gamma} dx - \int\limits_{a+B_{\gamma-1}} dx = q^{d\gamma}\left(1 - \frac{1}{q^d}\right)$$

■

Ví dụ 1.2.2. $\int\limits_{B_0} \ln|x|dx = -\dfrac{\ln q}{q^d - 1}.$

■ Thực vậy, từ công thức (1.8) ta có

$$\int\limits_{B_0} \ln|x|dx = \sum_{-\infty<\gamma\leq 0} \int\limits_{S_\gamma} \ln|x|dx = \sum_{-\infty<\gamma\leq 0} \ln q^\gamma \int\limits_{S_\gamma} dx$$

$$= \ln q \sum_{-\infty<\gamma\leq 0} \gamma \cdot q^{d\gamma}\left(1 - \frac{1}{q^d}\right) = -\left(1 - \frac{1}{q^d}\right) \ln q \sum_{\gamma=0}^{\infty} \gamma q^{-d\gamma} = -\frac{\ln q}{q^d - 1}$$

■

Ví dụ 1.2.3. *Giả sử $a \in \mathbb{K}^d$ tùy ý. Khi đó*

(i) $\int\limits_{B_\gamma} \chi(a \cdot x)dx = \begin{cases} q^{d\gamma} & \textit{nếu } |a| \leq q^{-\gamma} \\ 0 & \textit{nếu } |a| > q^{-\gamma}. \end{cases}$

(ii) $\int\limits_{S_\gamma} \chi(a \cdot x)dx = \begin{cases} q^{d\gamma}\left(1 - \dfrac{1}{q^d}\right) & \textit{nếu } |a| \leq q^{-\gamma} \\ -q^{d(\gamma-1)} & \textit{nếu } |a| = q^{-\gamma+1} \\ 0 & \textit{nếu } |a| \geq q^{-\gamma+2}. \end{cases}$

■ Nếu $|a| \leq q^{-\gamma}$ thì $|a \cdot x| \leq 1$ với mọi $x \in B_\gamma$. Do đó $\chi(a \cdot x) = 1$ với mọi $x \in B_\gamma$. Suy ra

$$\int\limits_{B_\gamma} \chi(a \cdot x)dx = \int\limits_{B_\gamma} dx = q^{d\gamma}.$$

Giả sử $|a| = q^t$, $t \geq -\gamma + 1$. Vì χ có hạng 0 nên tồn tại $x' \in S_{-t+1}$ mà $\chi(a \cdot x') \neq 1$. Xét phép đổi biến $x = y - x'$ thì

$$\int\limits_{B_\gamma} \chi(a \cdot x)dx = \int\limits_{x'+B_\gamma} \chi\left(a \cdot (y - x')\right) dy$$

$$= \chi\left(-a\cdot x'\right)\int\limits_{x'+B_\gamma}\chi\left(a\cdot y\right)dy = \chi\left(-a\cdot x'\right)\int\limits_{B_\gamma}\chi\left(a\cdot y\right)dy.$$

Do đó $\int\limits_{B_\gamma}\chi(a\cdot x)dx = 0.$

Cuối cùng, sử dụng tính chất $S_\gamma = B_\gamma \setminus B_{\gamma-1}$ ta sẽ nhận được (ii). ■

Ví dụ 1.2.4. *Nếu* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn* $\sum\limits_{\gamma=0}^{\infty}\left|f\left(q^{-\gamma}\right)\right|q^{-\gamma} < \infty$ *thì với mọi* $\xi \neq 0$ *ta có* $\int\limits_{\mathbb{K}^d} f\left(|x|\right)\chi(\xi\cdot x)dx$ *bằng*

$$\left(1-\frac{1}{q^d}\right)|\xi|^{-d}\sum_{0\le\gamma<\infty} q^{-d\gamma}f\left(q^{-\gamma}|\xi|^{-1}\right) - |\xi|^{-d}f\left(q|\xi|^{-1}\right). \tag{1.9}$$

■ Ta viết $|\xi| = q^N$, khi đó

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{K}^d} f\left(|x|\right)\chi(\xi\cdot x)dx &= \sum_{-\infty<\gamma<\infty}\int\limits_{S_\gamma} f\left(|x|\right)\chi(\xi\cdot x)dx\\
&= \sum_{-\infty<\gamma\le 1-N} f\left(q^\gamma\right)\int\limits_{S_\gamma}\chi(\xi\cdot x)dx\\
&= \sum_{-\infty<\gamma\le -N} f\left(q^\gamma\right)q^{d\gamma}\left(1-\frac{1}{q^d}\right) - f\left(q^{-N+1}\right)q^{-Nd}
\end{aligned}$$

$$= \left(1-\frac{1}{q^d}\right)|\xi|^{-d}\sum_{0\le\gamma<\infty} q^{-d\gamma}f\left(q^{-\gamma}|\xi|^{-1}\right) - |\xi|^{-d}f\left(q|\xi|^{-1}\right).$$

■

Áp dụng công thức (1.9) ta suy ra

Ví dụ 1.2.5. *(i)* $\int\limits_{\mathbb{K}^d}\chi(\xi\cdot x)dx = 0$ *với mọi* $\xi \neq 0$.

(ii) $\int\limits_{\mathbb{K}^d}|x|^{\alpha-1}\chi(\xi\cdot x)dx = \dfrac{1-q^{\alpha-1}}{1-q^{-\alpha}}|\xi|^{-\alpha}$ *với mọi* $\xi \neq 0$ *và* $\alpha > 0$.

(iii) Với $d = 1$ và với mọi $m > 0$ và $\xi \neq 0$ ta có

$$\int\limits_{\mathbb{K}} \frac{\chi(\xi \cdot x)}{|x|^2 + m^2} dx = \left(1 - \frac{1}{q}\right) \frac{|\xi|}{q^2 + m^2|\xi|^2} \sum_{0 \leq \gamma < \infty} q^{-\gamma} \frac{q^2 - q^{-2\gamma}}{q^{-2\gamma} + m^2|\xi|^2}. \tag{1.10}$$

Từ công thức (1.10) ta suy ra

$$\int\limits_{\mathbb{K}} \frac{\chi(\xi \cdot x)}{|x|^2 + m^2} dx \sim \frac{q^4 + q^3}{q^2 + q + 1} \cdot \frac{1}{m^4|\xi|^3} \qquad \text{khi } |\xi| \to +\infty.$$

Ta nhớ lại rằng, trên trường số thực $\mathbb{R}$, một tích phân tương tự như (1.10) là

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi_\infty(\xi x)}{m^2 + x^2} dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-2\pi i \xi x)}{m^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{m} \exp(-2\pi m|\xi|)$$

và do đó có độ giảm tương đương với hàm mũ.

1.3 Biến đổi Fourier và tích chập

Định nghĩa 1.3.1. *Với mỗi hàm $f \in L^1$, biến đổi Fourier $\widehat{f}$ của hàm f được xác định bởi*

$$\widehat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{K}^d} f(x)\chi(-\xi \cdot x) dx. \tag{1.11}$$

Ở đây $\xi \cdot x = \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_d x_d$ với mọi $x = (x_1, \ldots, x_d)$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d)$ thuộc $\mathbb{K}^d$.

Mệnh đề 1.3.2. ([47, trang 117])

(a) Biến đổi Fourier F là một biến đổi tuyến tính bị chặn từ L^1 vào L^∞, với $||\widehat{f}||_\infty \leq ||f||_1$.

(b) Nếu $f \in L^1$ thì $\widehat{f}$ là hàm liên tục đều.

(c) **(Riemann-Lebesgue)** *Nếu $f \in L^1$ thì $\widehat{f}(x) \to 0$ khi $|x| \to \infty$.*

Với mỗi hàm $f \in L^1 \cap L^2$ thì $||\widehat{f}||_2 = ||f||_2$. Biến đổi Fourier của $f \in L^2$, kí hiệu là $\widehat{f}$, được xác định như là giới hạn trong L^2 của $\widehat{f\chi_{B_\gamma}}$ khi $\gamma \to \infty$. Ở đây χ_{B_γ} là hàm đặc trưng của hình cầu B_γ.

Một hàm giá trị phức f xác định trên $\mathbb{K}^d$ được gọi là hằng địa phương nếu với mọi $x \in \mathbb{K}^d$, tồn tại số nguyên $k(x)$ để $f(x+y) = f(x)$ với mọi $y \in B_{k(x)}$. Kí hiệu $\mathcal{E}$ là tập tất cả các hàm hằng địa phương trên $\mathbb{K}^d$. Sự hội tụ trong $\mathcal{E}$ như sau: $f_k \to 0$ trong $\mathcal{E}$ nếu như với mọi tập compact F trong $\mathbb{K}^d$ thì (f_k) hội tụ đều trên F đến 0.

Ta kí hiệu $\mathcal{D} = \mathcal{D}\left(\mathbb{K}^d\right)$ là tập tất cả các hàm thuộc $\mathcal{E}$ mà có giá compact. Mỗi hàm $\varphi \in \mathcal{D}$ thỏa mãn tính chất: tồn tại các số nguyên k, γ sao cho φ là hằng số trên mỗi tập $x + B_k$ với $x \in \mathbb{K}^d$ và φ có giá nằm trong B_γ. $\mathcal{D}$ được trang bị tôpô như sau: $(\varphi_k) \to 0$ trong $\mathcal{D}$ nếu tồn tại một cặp các số nguyên (N, γ) sao cho mỗi hàm φ_k là hằng trên các tập $x + B_N$ và có giá nằm trong B_γ (với mỗi $x \in \mathbb{K}^d$) và dãy hàm (φ_k) hội tụ đều tới không. Không gian $\mathcal{D}$ được gọi là *không gian các hàm thử*. $\mathcal{D}$ là không gian đủ và khả ly.

Mệnh đề 1.3.3. ([47, trang 118]) *$\mathcal{D}$ là trù mật trong L^ℓ với mọi $1 \leq \ell < \infty$.*

Họ $\mathcal{D}'$ tất cả các phiếm hàm liên tục trên $\mathcal{D}$ được gọi là *không gian các phân bố*. $\mathcal{D}'$ được trang bị tôpô $*$-yếu. Tác động của $f \in \mathcal{D}'$ lên $\varphi \in \mathcal{D}$ được kí hiệu là (f, φ). Với mỗi hàm $g \in L^1_{\text{loc}}$ đều xác định một phân bố

$f \in \mathcal{D}'$ thỏa mãn $(f, \varphi) = \int g\varphi dx$, với $\varphi \in \mathcal{D}$. Biến đổi Fourier và biến đổi Fourier ngược của $f \in \mathcal{D}'$ được xác định bởi quy tắc: $(\widehat{f}, \varphi) = (f, \widehat{\varphi})$, $(\check{f}, \varphi) = (f, \check{\varphi})$. Với mọi $f \in \mathcal{D}'$ ta có $\widehat{\check{f}} = f = \check{\widehat{f}}$.

Mệnh đề 1.3.4. ([47, trang 123]) *Biến đổi Fourier là đồng phôi từ $\mathcal{D}$ lên $\mathcal{D}$ và từ $\mathcal{D}'$ lên $\mathcal{D}'$.*

Cho $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{K}^m)$ và $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{K}^n)$. Tích trực tiếp $f \times g \in \mathcal{D}'(\mathbb{K}^{m+n})$ được cho bởi công thức

$$(f(x) \times g(y), \varphi) = (f(x), (g(y), \varphi(x, y)))\,.$$

Ta kí hiệu

$$\Omega_\gamma(x) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } |x| \le q^\gamma \\ 0, & \text{nếu } |x| > q^\gamma. \end{cases}$$

Cho $f, g \in \mathcal{D}'$. *Tích chập* $f * g$ được xác định bởi

$$(f * g, \varphi) = \lim_{\gamma \to \infty} (f(x) \times g(y), \Omega_\gamma(x)\varphi(x + y))\,, \tag{1.12}$$

nếu giới hạn ở vế phải là tồn tại với mọi $\varphi \in \mathcal{D}$. Nếu $f * g$ tồn tại thì $g * f$ cũng tồn tại và $f * g = g * f$. Nếu $g \in \mathcal{D}$, thì tích chập $f * g$ có thể xác định như là một hàm trên $\mathbb{K}^d$ và

$$f * g(x) = (f(y), g(x - y))\,.$$

1.4 Định lý nội suy Marcinkiewicz

Cho số thực ℓ, $1 \le \ell < \infty$ và một hàm u khả tích địa phương, không âm trên $\mathbb{K}^d$. Ta kí hiệu $L^\ell(u)$ là tập tất cả các hàm đo được $f : \mathbb{K}^d \to \mathbb{C}$ thỏa mãn $\|f\|_{L^\ell(u)} = \left(\int\limits_{\mathbb{K}^d} |f(y)|^\ell u(y)dy\right)^{1/\ell} < +\infty$. $L^\infty(u)$ là tập tất cả các hàm đo được f trên $\mathbb{K}^d$ sao cho

$$||f||_{L^\infty(u)} = \inf\{B > 0 : \ u(\{x : \ |f(x)| > B\}) = 0\} < +\infty. \tag{1.13}$$

(Ở đây ta quy ước infimum của tập rỗng bằng $+\infty$). Với $u = 1$ ta kí hiệu các không gian tương ứng là L^ℓ và L^∞. Xét độ đo $d\mu = udx$, ta coi hai hàm trong $L^\ell(u)$ mà bằng nhau $\mu-$hầu khắp nơi là trùng nhau, thì $L^\ell(u)$ là không gian Banach với chuẩn $||\cdot||_{L^\ell(u)}$.

Bổ đề 1.4.1. (Nguyên lý Cavalieri [22, trang 4]) *Cho μ là một độ đo Borel dương, và f là hàm thuộc $L^\ell(\mu)$, $1 \le \ell < \infty$. Khi đó, ta có*

$$||f||^\ell_{L^\ell(\mu)} = \ell \int\limits_0^\infty \alpha^{\ell-1}\mu\left\{x \in \mathbb{K}^d : \ |f(x)| > \alpha\right\} d\alpha. \tag{1.14}$$

Giả sử rằng T là một toán tử xác định trên không gian các hàm đo được giá trị phức trên một không gian đo (X, μ) và lấy giá trị trong tập các hàm đo được, giá trị phức, hữu hạn hầu khắp nơi trên một không gian đo(Y, ν). Toán tử T được gọi là *dưới tuyến tính* nếu với mọi f, g, mọi $\lambda \in \mathbb{C}$ và mọi $x \in X$ ta có:

$$|T(f+g)(x)| \le |Tf(x)| + |Tg(x)|, \text{ và } |T(\lambda f)(x)| = |\lambda| \cdot |T(f)(x)|$$

Với $1 \le s < \infty$, không gian *yếu*-$L^s(X, \mu)$, hay còn được kí hiệu là $L^{s,\infty}(X, \mu)$, là tập tất cả các hàm $\mu-$đo được f thỏa mãn

$$||f||_{L^{s,\infty}} := \inf\left\{C > 0 : \ \mu\{x : \ |f(x)| > \alpha\} \le \frac{C^s}{\alpha^s} \text{ với mọi } \alpha > 0\right\} \tag{1.15}$$

hữu hạn (ta quy ước infimum của một tập rỗng bằng $+\infty$). Ta kí hiệu $L^{\infty,\infty}(X, \mu) = L^\infty(X, \mu)$.

Mệnh đề 1.4.2. ([22, trang 6]) *Với mọi* $1 \leq s \leq \infty$, *không gian* $L^{s,\infty}(X,\mu)$ *với tựa chuẩn* $||\cdot||_{L^{\ell}(\mu)}$ *là không gian đủ. Hơn thế nếu* (f_n) *hội tụ trong* $L^{s,\infty}$ *tới một hàm* f *trong* $L^{s,\infty}(X,\mu)$ *thì* (f_n) *hội tụ theo độ đo tới* f.

Một toán tử bị chặn từ $L^r(X,\mu)$ vào $L^s(Y,\nu)$ được gọi là *loại mạnh* (r,s). Một toán tử bị chặn từ $L^r(X,\mu)$ vào $L^{s,\infty}(Y,\nu)$ được gọi là *loại yếu* (r,s).

Định lý 1.4.3. (Định lý nội suy Marcinkiewicz [22, trang 31-34]) *Cho* (X,μ) *và* (Y,ν) *là hai không gian đo,* T *là một toán tử dưới tuyến tính xác định trên* $L^{s_0}(X,\mu)$ *và trên* $L^{s_1}(X,\mu)$ *với các số thực* $1 \leq s_0 < s_1 \leq \infty$ *và lấy giá trị trong không gian các hàm* $\nu-$*đo được trên* Y. *Giả sử rằng tồn tại hai hằng số dương* A_0, A_1 *thỏa mãn*

$$||Tf||_{L^{s_0,\infty}(Y,\nu)} \leq A_0||f||_{L^{s_0}(X,\mu)} \qquad \text{với mọi } f \in L^{s_0}(X,\mu),$$

$$||Tf||_{L^{s_1,\infty}(Y,\nu)} \leq A_1||f||_{L^{s_1}(X,\mu)} \qquad \text{với mọi } f \in L^{s_1}(X,\mu).$$

Khi đó với mọi $s_0 < s < s_1$ *và với mọi* f *thuộc* $L^s(X,\mu)$, *ta có đánh giá sau*

$$||Tf||_{L^s(Y,\nu)} \leq A||f||_{L^s(X,\mu)}.$$

Nói một cách khác, nếu T *là toán tử loại yếu* (s_i,s_i) *với* $i=0,1$ *thì* T *là toán tử loại mạnh* (s,s) *với mọi* $s_0 < s < s_1$.

Kí hiệu ℓ^r $(1 \leq r < \infty)$ là tập tất cả các dãy số phức $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ sao cho

$$|x|_r := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^r\right)^{1/r} < \infty.$$

Kí hiệu $\mathcal{S}(\ell^r)$ là không gian tuyến tính các dãy hàm $f = \{f_k\}$ sao cho $f_k \in \mathcal{S}$ và $f_k(x) \equiv 0$ với k đủ lớn. Ở đây $\mathcal{S}$ là không gian tuyến tính các hàm đo được $f : \mathbb{K}^d \to \mathbb{C}$ mà chỉ nhận một số hữu hạn các giá trị. Ta có các kết quả về tính trù mật quen thuộc sau đây

Bổ đề 1.4.4. *(a)* **([47, trang 118])** *$\mathcal{S}$ là trù mật trong $L^t(\mathbb{K}^d)$, với mọi t mà $1 \le t < \infty$.*

(b) **([23, Bổ đề 2.1])** *Nếu ω là một hàm khả tích địa phương trên $\mathbb{K}^d$, thì $S(\ell^r)$ trù mật trong $L^t_\omega(\ell^r)$ với mọi $1 \le t, r < \infty$, ở đó $L^t_\omega(\ell^r)$ là không gian các dãy $f = \{f_k\}$ với chuẩn*

$$||f||_{L^t_\omega(\ell^r)} := \left(\int_{\mathbb{K}^d} |f(x)|_r^t \omega(x) dx\right)^{1/t} < \infty.$$

Trong luận án này chúng tôi sẽ sử dụng một dạng véctơ của định lý nội suy Marcinkiewicz sau đây, mà thực tế thì nó lại là một hệ quả trực tiếp của định lý 1.4.3 ở trên (xem [9])

Định lý 1.4.5. *Cho $\omega(x) \ge 0$ là một hàm khả tích địa phương trên $\mathbb{K}^d$, các số $1 < r < \infty$, $1 \le \ell_1 < \ell_2 < \infty$. Giả sử rằng T là một toán tử dưới tuyến tính xác định trên $\mathcal{S}(\ell^r)$, nhận giá trị trong $\mathcal{M}(\mathbb{K}^d)$, ở đó $\mathcal{M}(\mathbb{K}^d)$ là tập tất cả các dãy hàm đo được $g = \{g_k\}$ trên $\mathbb{K}^d$. Kí hiệu $\overrightarrow{T} f = \{T f_k\}$. Biết rằng toán tử $\overrightarrow{T}$ thỏa mãn*

$$\omega\left(\left\{x \in \mathbb{K}^d : \ |\overrightarrow{T} f(x)|_r > \alpha\right\}\right) \le C_i^{\ell_i} \alpha^{-\ell_i} \int\limits_{\mathbb{K}^d} |f(x)|_r^{\ell_i} \omega(x) dx$$

với $i = 1, 2$ và với mọi $f \in \mathcal{S}(\ell^r)$.

Khi đó, với mọi $\ell_1 < s < \ell_2$, toán tử $\overrightarrow{T}$ có thể thác triển duy nhất tới *một toán tử tuyến tính trên $L^s_\omega(\ell^r)$ sao cho*

$$\int_{\mathbb{K}^d} |\overrightarrow{T} f(x)|_r^s \, \omega(x)dx \le C_s \int_{\mathbb{K}^d} |f(x)|_r^s \, \omega(x)dx,$$

với mọi $f \in L^s_\omega(\ell^r)$. Ở đây C_s là một hằng số dương.

Với mỗi hàm $f : \mathbb{K}^d \to \mathbb{C}$ thuộc L^1_{loc}, hàm cực đại Hardy-Littlewood của f được xác định bởi công thức

$$Mf(x) = \sup_{\gamma \in \mathbb{Z}} \frac{1}{q^{d\gamma}} \int_{x+B_\gamma} |f(y)|dy \tag{1.16}$$

Mệnh đề 1.4.6. ([47, trang 120])

(a) Nếu $f \in L^1$ và $\alpha > 0$ thì

$$\left|\left\{x \in \mathbb{K}^d : \; Mf(x) > \alpha\right\}\right| \le \frac{||f||_1}{\alpha}.$$

(b) Với mọi $1 < \ell < \infty$, tồn tại hằng số $c > 0$ sao cho $||Mf||_\ell \le c||f||_\ell$.

(c) Nếu $f \in L^1_{\text{loc}}$ thì với hầu khắp nơi $x \in \mathbb{K}^d$ ta có

$$\frac{1}{q^{d\gamma}} \int_{x+B_\gamma} f(y)dy \to f(x) \qquad \textit{khi } \gamma \to -\infty.$$

Chương 2

TOÁN TỬ CỰC ĐẠI HARDY - LITTLEWOOD VÀ CÁC BẤT ĐẲNG THỨC TRỌNG CHUẨN TRÊN TRƯỜNG ĐỊA PHƯƠNG

Một trong những mục đích chính của chương này là nghiên cứu các bất đẳng thức trọng chuẩn cho toán tử cực đại Hardy-Littlewood M và dạng véctơ của nó trên các trường địa phương. Trong trường hợp Euclid, các bất đẳng thức trọng chuẩn cho M đã được Muckenhoupt chứng minh hoàn thiện vào năm 1972. Dựa trên lược đồ chứng minh tương tự, hai nhà toán học Kenneth F. Andersen và Russel T. John [7] đã phát triển kết quả của Muckenhoupt sang cho toán tử cực đại dạng véctơ $\overrightarrow{M}$. Trong chương này chúng tôi nghiên cứu cả hai vấn đề trên trong trường địa phương. Đầu tiên chúng tôi đi thiết lập các bổ đề phân tích kiểu Calderón-Zygmund. Chúng tôi cố gắng vận dụng các cấu trúc hình học đặc biệt của trường địa phương trong các chứng minh để nhận được các bổ đề phân tích có thể xem là mạnh hơn so với trường hợp Euclid. Từ đó, chúng tôi thu được một số ước lượng về chuẩn của toán tử M rất khác nếu so các kết quả tương ứng trong trường hợp Euclid (xem nhận xét sau chứng minh định lý 2.2.2 và hệ quả 2.2.4). Tiếp theo, chúng tôi đi thiết lập lại các kết quả cơ bản và cần thiết về lớp hàm trọng Muckenhoupt trên trường địa phương. Với việc xây dựng được các phiên bản thích hợp của hệ các bổ đề phân tích kiểu Calderón-Zygmund và họ các hàm trọng Muckenhoupt, chúng tôi chứng minh được một số bất đẳng thức trọng chuẩn loại yếu và mạnh cho các toán tử M và $\overrightarrow{M}$.

Cũng trong chương này, chúng tôi đưa ra một điều kiện cần và một điều kiện đủ "gần tương tự" cho cặp hàm trọng (u, v) để toán tử cực đại Hardy-Littlewood M thỏa mãn bất đẳng thức trọng chuẩn loại yếu ngược trên hình cầu và trên toàn không gian. Trong trường hợp Euclid, các tác giả K. F. Andersen và Wo-Sang Young [8] đưa ra một điều kiện cần và một điều kiện đủ khác nhau cho cặp hàm trọng để nhận được bất đẳng thức loại yếu ngược trong định lý 2.4.1. Sự khác nhau về kết quả này trong hai trường thực và trường phức có thể giải thích là do cấu trúc hình học khác biệt giữa $\mathbb{R}^d$ và $\mathbb{K}^d$. Trong trường hợp Euclid, để có được sự "gần tương tự" giữa điều kiện cần và điều kiện đủ thì hàm trọng u phải thỏa mãn thêm điều kiện kép.

Kết quả bất đẳng thức loại yếu ngược ở trên được chúng tôi ứng dụng vào lớp hàm $L \log^+ L$ với trọng của Zygmund để thu được một điều kiện cần để hàm cực đại là khả tích. Cũng trong chương này, luận án đưa ra một lớp toán tử tích phân mới, chúng tôi chứng minh các toán tử tích phân đó là loại $(1, 1)$ nếu như giả thiết các toán tử này thuộc loại mạnh

(ℓ, ℓ), với $1 < \ell < \infty$ nào đó. Phương pháp chứng minh mà chúng tôi vận dụng ở đây dựa trên phương pháp biến thực của Calderón-Zygmund. Tuy nhiên, theo chúng tôi được biết, kết quả về lớp toán tử này chưa có dạng tương tự nào trong trường hợp thực.

Nội dung của chương này được chúng tôi công bố trong bài báo thứ nhất và một phần ở bài báo thứ hai trong danh mục công trình đã công bố liên quan đến luận án.

2.1 Các bổ đề phủ loại Calderón-Zygmund

Trong quá trình lập luận các chứng minh, chúng tôi sử dụng nguyên lý sắp thứ tự tốt của tập các số nguyên sau đây

Mệnh đề 2.1.1. (Nguyên lý sắp thứ tự tốt) *Mọi tập con khác rỗng, bị chặn dưới của tập các số nguyên $\mathbb{Z}$ đều có phần tử bé nhất.*

Bổ đề 2.1.2. (Wiener) *Giả sử E là một tập con đo được của $\mathbb{K}^d$ thỏa mãn tồn tại một họ các hình cầu $\{x + B_\gamma : (x, \gamma) \in P_E\}$ phủ E; ở đây P_E là một tập con của $\mathbb{K}^d \times \mathbb{Z}$ các cặp (x, γ) thỏa mãn $\sup\limits_{(x,\gamma)\in P_E} \gamma \leq \gamma_0 < +\infty$. Khi đó, tồn tại một họ phủ con hữu hạn hoặc đếm được các hình cầu đôi một rời nhau $\{x_j + B_{\gamma_j} : j = 1, 2, \ldots\}$ của E.*

Chứng minh. Vì tôpô trên $\mathbb{K}^d$ có một cơ sở đếm được nên theo định lý Lindelöf, từ phủ các hình cầu của E đã cho ta có thể lấy ra một phủ con đếm được. Tiếp theo, ta loại bỏ đi tất cả các hình cầu không có giao với E. Họ các hình cầu còn lại phủ E và ta kí hiệu là $\mathcal{F}$. Ta thiết lập một quan hệ hai ngôi trên $\mathcal{F}$: Với $U, V \in \mathcal{F}$ ta viết $U \sim V$ nếu như tồn tại

$W \in \mathcal{F}$ mà $U \subset W$ và $V \subset W$. Dễ thấy rằng đây là một quan hệ tương đương trên $\mathcal{F}$. Trong mỗi lớp tương đương ta chọn ra hình cầu có thể tích lớn nhất. Điều này làm được bởi thể tích của mỗi hình cầu trong $\mathcal{F}$ đều không vượt quá $q^{d\gamma_0}$. Theo tính chất (b) của mệnh đề 1.2.1, với mỗi hình cầu được chọn đó, mọi hình cầu thuộc cùng lớp tương đương với nó đều phải nằm trong nó. Cũng do tính chất (b) của mệnh đề 1.2.1 thì hai hình cầu bất kì hoặc lồng nhau, hoặc rời nhau. Vậy các hình cầu được chọn là đôi một rời nhau, đếm được và là một phủ của E. □

Nhận xét 2.1.3. *Có thể thấy được sự khác biệt giữa bổ đề Wiener trên các trường địa phương và trên $\mathbb{R}^d$. Trên $\mathbb{R}^d$ ta có thể chọn ra được một phủ con đếm được nhưng chưa chắc đã đôi một rời nhau.*

Ví dụ 2.1.1. *Khoảng $E = (0;1)$ của $\mathbb{R}$ có một phủ hữu hạn $U_1 = \left(-\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right)$, $U_2 = \left(\frac{1}{8};\frac{9}{8}\right)$ nhưng không thể chọn ra phủ con đôi một rời nhau.*

Tiếp theo chúng tôi trình bày các dạng của phân tích Calderón-Zygmund của một hàm $f \in L^1(\mathbb{K}^d)$. Ý tưởng của những bổ đề này là tách hàm f ra thành hai phần, một phần tốt và một phần xấu. Đối với các nhóm compact địa phương, Keith Phillips [39, trang 336] giới thiệu và chứng minh một bổ đề phân tích kiểu như vậy (tương tự bổ đề 2.1.5 dưới đây). Trong quyển sách chuyên khảo của tác giả M. Taibleson [47, trang 148] cũng trình bày một phiên bản của bổ đề phân tích Calderón-Zygmund, nhưng là áp dụng các mặt cầu. Các bổ đề phân tích chúng tôi giới thiệu ở đây là áp dụng được cho toàn không gian và cho hình cầu. Các bổ đề phân tích mà chúng tôi thu được là *đẹp hơn* so với trường hợp thực.

Bổ đề 2.1.4. *Giả sử $f \in L^1(\mathbb{K}^d)$ và α là một số thực dương. Khi đó, tồn tại hàm g, họ các hàm b_j thuộc $L^1(\mathbb{K}^d)$, và một họ hữu hạn hoặc đếm được các hình cầu đôi một rời nhau $\{B^j\}_{j\geq 1}$, thỏa mãn $f = g + \sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j$, supp $b_j \subset B^j_\star$. Các hàm và các hình cầu đó còn thỏa mãn các điều kiện sau đây:*

(a) $|g(x)| \leq \alpha$ *với hầu khắp nơi* $x \in \mathbb{K}^d$,

(b) $||b_j||_{L^1(\mathbb{K}^d)} \leq 2q^d\alpha|B^j|$,

(c) $\int\limits_{B^j} b_j dx = 0$,

(d) $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B^j \subset E_\alpha = \{x \in \mathbb{K}^d : \ Mf(x) > \alpha\} \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B^j_\star$,

(e) $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |B^j_\star| \leq \frac{q^{2d}}{\alpha} \cdot ||f||_{L^1(\mathbb{K}^d)}$,

ở đó ta kí hiệu $B^j_\star$ là hình cầu có tâm cùng tâm với B^j nhưng bán kính bằng q lần bán kính của hình cầu B^j.

Chứng minh. Nếu $E_\alpha = \{x \in \mathbb{K}^d : \ Mf(x) > \alpha\}$ là rỗng thì không có gì để chứng minh (khi đó ta coi họ các hàm b_j và họ các hình cầu B^j là những họ rỗng). Vì vậy ta có thể coi E_α khác rỗng. Từ định nghĩa của toán tử M ta suy ra E_α là một tập con mở trong $\mathbb{K}^d$. Theo mệnh đề 1.4.6, M là loại yếu $(1, 1)$, nên E_α có độ đo hữu hạn. Vì vậy, với mỗi $x \in E_\alpha$, ta có thể tìm được một số nguyên γ sao cho $(x + B_\gamma) \cap E^c_\alpha \neq \emptyset$ (ở đó E^c là phần bù của tập E_α). Do $\bigcap\limits_{\gamma\in\mathbb{Z}} (x + B_\gamma) = \{x\}$ và E_α là tập mở, nên tồn tại số nguyên $\gamma(x)$ bé nhất sao cho $(x+B_{\gamma(x)})\cap E_\alpha^c \neq \emptyset$. Theo cách xác định của $\gamma(x)$, ta có $x+B_{\gamma(x)-1}\subset E_\alpha$ với mọi $x\in E_\alpha$. Mỗi hình cầu trong họ $\{x+B_{\gamma(x)-1}:\ x\in E_\alpha\}$ có độ đo không vượt quá độ đo của E_α. Do đó, áp dụng bổ đề 2.1.2 cho họ hình cầu $\{x+B_{\gamma(x)}:\ x\in E_\alpha\}$, ta có thể tìm được một họ con hữu hạn hoặc đếm được các hình cầu đôi một rời nhau $\{B_\star^j:\ j=1,2,\ldots\}$ phủ E_α mà thỏa mãn

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} B^j \subset E_\alpha = \{x\in\mathbb{K}^d:\ Mf(x)>\alpha\}\subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_\star^j.$$

Như vậy (d) được chứng minh.

Hàm $g(x)$ được dựng như sau

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{nếu } x\notin E_\alpha,\\ \frac{1}{|B_\star^j|}\int\limits_{B_\star^j} f(y)dy & \text{nếu } x\in B_\star^j \text{ với } j \text{ là số nguyên dương nào đó,}\end{cases} \tag{2.1}$$

và đặt $b_j(x)=\chi_{B_\star^j}(x)\cdot\left(f(x)-\frac{1}{|B_\star^j|}\int\limits_{B_\star^j} f(y)dy\right)$. Ở đây ta kí hiệu $\chi_{B_\star^j}$ là hàm đặc trưng của hình cầu $B_\star^j$. Họ các hình cầu $\{B_\star^j\}$ là đôi một rời nhau, do vậy

$$f(x)=g(x)+\sum_{j=1}^{\infty} b_j(x)=g(x)+b(x).$$

Với mỗi $x\notin E_\alpha$, ta có $\sup\limits_{\gamma\in\mathbb{Z}}\frac{1}{q^{d\gamma}}\int\limits_{x+B_\gamma}|f(y)|dy\le\alpha$. Theo mệnh đề 1.4.6-(c), ta có

$$\frac{1}{q^{d\gamma}}\int\limits_{x+B_\gamma}|f(y)|dy\to|f(x)| \quad \text{với hầu khắp nơi } x\notin E_\alpha \text{ khi } \gamma\to-\infty.$$

Do đó $|f(x)|\le\alpha$ với hầu khắp nơi $x\notin E_\alpha$. Mặt khác, nếu $x\in E_\alpha$, thì tồn tại chỉ số j sao cho $x\in B_\star^j$, và ta có $g(x)=\frac{1}{|B_\star^j|}\int\limits_{B_\star^j} f(y)dy$. Do $B_\star^j\cap E_\alpha^c\neq\emptyset$, nên có thể lấy $x' \in B_\star^j \cap E_\alpha^c$. Xét hình cầu $B_\star^j$, ta có thể coi $B_\star^j$ là hình cầu với tâm ở x'. Do $x' \in E_\alpha^c$ nên $Mf(x') \le \alpha$. Suy ra $\frac{1}{|B_\gamma|} \int\limits_{x'+B_\gamma} |f(y)|dy \le \alpha$ với mọi $\gamma \in \mathbb{Z}$. Chọn số nguyên γ sao cho hình cầu B_γ có cùng bán kính như là hình cầu $B_\star^j$. Khi đó $x' + B_\gamma = B_\star^j$, nên

$$|g(x)| = \left| \frac{1}{|B_\star^j|} \int\limits_{B_\star^j} f(y)dy \right| \le \frac{1}{|B_\gamma|} \int\limits_{x'+B_\gamma} |f(y)|dy \le \alpha.$$

Vậy (a) đã được chứng minh.

Khẳng định (b) được suy ra như sau

$$||b_j||_{L^1(\mathbb{K}^d)} = \int\limits_{B_\star^j} \left| f(x) - \frac{1}{|B_\star^j|} \int_{B_\star^j} f(y)dy \right| dx \le 2 \int\limits_{B_\star^j} |f(y)|dy \le 2q^d \alpha |B^j|.$$

Khẳng định (c) là hiển nhiên. Ngoài ra, do M là loại yếu $(1,1)$ nên từ định nghĩa của họ hình cầu $B_\star^j$ cho ta

$$\sum_{j=1}^{\infty} |B_\star^j| = q^d \sum_{j=1}^{\infty} |B^j| \le q^d \cdot |E_\alpha| \le \frac{q^{2d}}{\alpha} ||f||_{L^1(\mathbb{K}^d)}.$$

Do vậy (e) được chứng minh. □

Bổ đề 2.1.5. *Giả sử rằng $f \in L^1(\mathbb{K}^d)$ và α là một số thực dương. Khi đó tồn tại một họ hữu hạn hoặc đếm được các hình cầu đôi một rời nhau $\{B^j\}_{j \ge 1}$ thỏa mãn*

(a) $E_\alpha = \left\{ x \in \mathbb{K}^d : \ Mf(x) > \alpha \right\} = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B^j$,

(b) $\alpha < \frac{1}{|B^j|} \int\limits_{B^j} |f(y)|dy \le q^d \alpha$ *với mọi* j.

Chứng minh. Nếu E_α là rỗng thì không có gì để chứng minh (vì khi đó ta có thể coi họ các hình cầu $\{B^j\}_{j \ge 1}$ là họ rỗng). Xét trường hợp E_α khác rỗng. Lấy $x \in E_\alpha$ tùy ý. Vì $Mf(x) > \alpha$ và $f \in L^1(\mathbb{K}^d)$, nên có thể chọn được số nguyên lớn nhất $\gamma(x)$ thỏa mãn

$$\frac{1}{q^{d\gamma(x)}} \int\limits_{x+B_{\gamma(x)}} |f(y)|dy > \alpha.$$

Như vậy, với mỗi $x \in E_\alpha$ ta có

$$\frac{1}{q^{d(\gamma(x)+1)}} \int\limits_{x+B_{\gamma(x)+1}} |f(y)|dy \leq \alpha \quad \text{và do đó} \quad q^{d\gamma(x)} < \frac{1}{\alpha}||f||_{L^1(\mathbb{K}^d)} < \infty.$$

Họ các hình cầu $\{x + B_{\gamma(x)} : \ x \in E_\alpha\}$ có độ đo bị chặn đều bởi hằng số $\frac{1}{\alpha}||f||_{L^1(\mathbb{K}^d)} < \infty$. Theo bổ đề 2.1.2, ta có thể trích ra một họ con đếm được các hình cầu đôi một rời nhau $\{B^j\}$ sao cho $E_\alpha \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B^j$. Chú ý rằng với mỗi $x \in E_\alpha$, thì $x + B_{\gamma(x)} \subset E_\alpha$. Thực vậy, với mỗi $y \in x + B_{\gamma(x)}$ nên $y + B_{\gamma(x)} = x + B_{\gamma(x)}$. Do đó,

$$Mf(y) \geq \frac{1}{q^{d\gamma(x)}} \int\limits_{y+B_{\gamma(x)}} |f(z)|dz = \frac{1}{q^{d\gamma(x)}} \int\limits_{x+B_{\gamma(x)}} |f(z)|dz > \alpha.$$

Vậy $y \in E_\alpha$. Thành thử ra ta có $E_\alpha \supset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B^j$. Như vậy, (a) đã được chứng minh.

Chú ý rằng

$$\frac{1}{q^{d(\gamma(x)+1)}} \int\limits_{x+B_{\gamma(x)+1}} |f(y)|dy \leq \alpha.$$

Ta suy ra

$$\alpha < \frac{1}{|B^j|} \int\limits_{B^j} |f(y)|dy = \frac{q^d}{|B^j_\star|} \int\limits_{B^j} |f(y)|dy \leq \frac{q^d}{|B^j_\star|} \int\limits_{B^j_\star} |f(y)|dy \leq q^d\alpha,$$

trong đó $B^j_\star$ là hình cầu cùng tâm với B^j nhưng có bán kính bằng q lần bán kính của B^j. $\square$

Sự khác biệt của phân tích Calderón-Zygmund giữa $\mathbb{R}^d$ và $\mathbb{K}^d$ thể hiện rất rõ qua bổ đề 2.1.5. Trên $\mathbb{R}^d$, thì tập mức $\{x \in \mathbb{R}^d : Mf(x) > \alpha\}$ nói chung không phân tích được thành hợp đếm được rời nhau các hình cầu như trong bổ đề 2.1.5 phần (a). Nguyên nhân của sự khác biệt là từ sự khác nhau như đã chỉ ra của bổ đề Wienner trên $\mathbb{R}^d$ và trên $\mathbb{K}^d$.

Hệ quả 2.1.6. *Nếu $f \in L^1(\mathbb{K}^d)$ và α là một số thực dương. Khi đó tồn tại một phân tích của $\mathbb{K}^d$ sao cho*

(a) $\mathbb{K}^d = \Omega \bigcup F$ *và* $\Omega \cap F = \emptyset$,

(b) $|\{x \in F : \ |f(x)| > \alpha\}| = 0$,

(c) $\Omega = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B^j$ *là hợp đếm được các hình cầu rời nhau* $\{B^j\}$ *thỏa mãn*

$$\alpha \leq \frac{1}{|B^j|} \int\limits_{B^j} |f(x)|dx \leq q^d \alpha.$$

Đối với trường hợp trên hình cầu, ta có kết quả sau

Bổ đề 2.1.7. *Cho $(z, s) \in \mathbb{K}^d \times \mathbb{Z}$. Giả sử rằng $f \in L^1(z + B_s)$, α là một số thực dương thỏa mãn $\alpha \geq \frac{1}{q^{ds}} \int\limits_{z+B_s} |f(y)|dy$. Khi đó tồn tại một họ hữu hạn hoặc đếm được các hình cầu đôi một rời nhau $\{B^j\}_{j\geq 1}$ nằm trong $z + B_s$ và thỏa mãn*

(a) $|f(x)| \leq \alpha$ *với hầu khắp nơi* $x \in (z + B_s) \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B^j$

(b) $\alpha < \frac{1}{|B^j|} \int\limits_{B^j} |f(y)|dy \leq q^d \alpha$ *với mọi* j.

Chứng minh. Đặt $E_\alpha = \{x \in z + B_s : \ M(f \cdot \chi_{z+B_s})(x) > \alpha\}$, ở đó χ_{z+B_s} là hàm đặc trưng của hình cầu $z + B_s$ trong $\mathbb{K}^d$. Lấy $x \in E_\alpha$ tùy ý. Khi đó tồn tại số nguyên γ sao cho

$$\frac{1}{q^{d\gamma}} \int\limits_{(x+B_\gamma)\cap(z+B_s)} |f(y)|dy > \alpha. \tag{2.2}$$

Vì $\alpha > 0$ nên $(x + B_\gamma) \cap (z + B_s) \neq \emptyset$, ta suy ra hai hình cầu này là lồng nhau. Hơn nữa $\gamma < s$. Thực vậy, nếu $\gamma = s$ thì $z + B_s = x + B_\gamma$, do đó (2.2) trở thành $\frac{1}{q^{ds}} \int\limits_{z+B_s} |f(y)|dy > \alpha$, mâu thuẫn. Mặt khác, nếu $\gamma > s$ thì $(z + B_s) \subset (x + B_\gamma)$. Từ (2.2), ta suy ra

$$\alpha < \frac{1}{q^{d\gamma}} \int\limits_{z+B_s} |f(y)|dy \leq \frac{1}{q^{ds}} \int\limits_{z+B_s} |f(y)|dy, \text{ mâu thuẫn với giả thiết của } \alpha.$$

Trong các số γ thỏa mãn (2.2), ta chọn ra số $\gamma(x) < s$ lớn nhất. Khi đó

$$\frac{1}{q^{d\gamma(x)}} \int\limits_{(x+B_{\gamma(x)})\cap(z+B_s)} |f(y)|dy > \alpha \geq \frac{1}{q^{d(\gamma(x)+1)}} \int\limits_{(x+B_{\gamma(x)+1})\cap(z+B_s)} |f(y)|dy. \tag{2.3}$$

Theo bổ đề 2.1.2, ta có thể trích ra một họ con đếm được các hình cầu đôi một rời nhau $\{B^j\}$ sao cho $E_\alpha \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B^j$. Chú ý rằng với mỗi $x \in E_\alpha$, thì $x + B_{\gamma(x)} \subset E_\alpha$. Thực vậy, với mỗi $y \in x + B_{\gamma(x)}$ nên $y + B_{\gamma(x)} = x + B_{\gamma(x)}$. Vậy

$$M(f \cdot \chi_{z+B_s})(y) \geq \frac{1}{q^{d\gamma(x)}} \int\limits_{y+B_{\gamma(x)}} |f(z)|dz = \frac{1}{q^{d\gamma}} \int\limits_{x+B_{\gamma(x)}} |f(z)|dz > \alpha.$$

Thành thử $y \in E_\alpha$. Tóm lại ta đã chứng minh được $E_\alpha = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B^j$. Do đó, mỗi $x \in (z + B_s) \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B^j$ thì $M(f \cdot \chi_{z+B_s})(x) \leq \alpha$. Từ đây dễ dàng suy ra (a).

Lại từ (2.3), ta suy ra

$$\alpha < \frac{1}{|B^j|}\int\limits_{B^j}|f(y)|dy = \frac{q^d}{|B^j_\star|}\int\limits_{B^j}|f(y)|dy \le \frac{q^d}{|B^j_\star|}\int\limits_{B^j_\star}|f(y)|dy \le q^d\alpha,$$

ở đây $B^j_\star$ là hình cầu cùng tâm với B^j nhưng có bán kính bằng q lần bán kính của B^j. □

2.2 Toán tử cực đại Hardy-Littlewood và lớp hàm trọng Muckenhoupt $\mathcal{A}_\ell$ trên trường địa phương

Định nghĩa 2.2.1. *Cho u là một hàm không âm, $u \in L^1_{\rm loc}\left(\mathbb{K}^d\right)$, ta xác định toán tử tích phân cực đại M_u như sau: với mỗi hàm $f \in L^1_{\rm loc}\left(\mathbb{K}^d\right)$ ta đặt*

$$M_u f(x) = \sup_{\gamma\in\mathbb{Z}} \frac{1}{u(x+B_\gamma)}\int\limits_{x+B_\gamma}|f(y)|u(y)dy. \tag{2.4}$$

Ở đây ta sử dụng kí hiệu $u(A) := \int\limits_A u(x)dx$. Khi $u = 1$, toán tử M_u trùng với toán tử cực đại Hardy-Littlewood M.

Một kết quả cơ bản cho toán tử M_u là định lý sau đây

Định lý 2.2.2. *Giả sử $u \in L^1_{\rm loc}\left(\mathbb{K}^d\right)$ là hàm không âm*

(a) Toán tử cực đại M_u là loại yếu $(1,1)$,

$$u\left(\{x\in\mathbb{K}^d : M_u f(x) > \alpha\}\right) \le \frac{1}{\alpha}\cdot\|f\|_{L^1(u)}, \tag{2.5}$$

với mọi $\alpha > 0$ và với mọi $f \in L^1(u)$.

(b) Với mọi $1 < \ell \le +\infty$, thì

$$\|M_u f\|_{L^\ell(u)} \le 2\left(\frac{\ell}{\ell-1}\right)^{1/\ell}\|f\|_{L^\ell(u)} \qquad \text{với mọi } f\in L^\ell(u). \tag{2.6}$$

Chứng minh. (a) Kí hiệu $E_\alpha = \{x \in \mathbb{K}^d : M_u f(x) > \alpha\}$. Lấy F là một tập con tùy ý của E_α mà F là compact. Với mỗi $x \in E_\alpha$, tồn tại $\gamma(x) \in \mathbb{Z}$ sao cho

$$\int\limits_{x+B_{\gamma(x)}} |f(y)|u(y)dy > \alpha\, u(x + B_{\gamma(x)}).$$

Họ các hình cầu $\{x + B_{\gamma(x)}\}$ phủ F nên có thể tìm được một phủ con hữu hạn mà ta kí hiệu là $\{x_k + B_{\gamma_k} : k = 1, \ldots, m\}$. Do hai hình cầu bất kì là lồng nhau hoặc rời nhau, nên ta có thể coi họ các hình cầu $\{x_k + B_{\gamma_k} : k = 1, \ldots, m\}$ là đôi một rời nhau. Ta có

$$u(F) \leq \sum_{j=1}^{m} u\left(x_j + B_{\gamma_j}\right) \leq \frac{1}{\alpha} \int\limits_{\mathbb{K}^d} |f(y)|u(y)dy.$$

Do E_α là tập mở nên bằng cách lấy supremum theo F, ta thu được (2.5).

(b) Với mỗi $f \in L^\infty$ thì $||M_u f||_\infty \leq ||f||_\infty$, do đó (2.6) đúng khi $\ell = \infty$. Ta xét trường hợp $1 < \ell < \infty$. Để chứng minh, ta chẻ hàm f thành f^α và f_α như sau

$$f^\alpha(x) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } |f(x)| > \alpha/2 \\ 0 & \text{ngược lại,} \end{cases}$$

và

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } |f(x)| \leq \alpha/2 \\ 0 & \text{ngược lại,} \end{cases}$$

Chú ý rằng $\{x \in \mathbb{K}^d : M_u f_\alpha(x) > \alpha\} = \emptyset$ nên

$$\{x \in \mathbb{K}^d : M_u f(x) > \alpha\} \subset \{x \in \mathbb{K}^d : M_u f^\alpha > \alpha/2\}.$$

Vì $f^\alpha \in L^1$, nên theo (2.5) ta có

$$u\left(\{x \in \mathbb{K}^d : M_u f(x) > \alpha\}\right) \leq \frac{2}{\alpha} \int\limits_{\mathbb{K}^d} |f^\alpha(x)| u(x) dx = \frac{2}{\alpha} \int\limits_{\{|f| > \alpha/2\}} |f(x)| u(x) dx.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{K}^d} |M_u f(x)|^\ell \, u(x) dx &= \int\limits_0^\infty \ell \alpha^{\ell-1} u\left(\{M_u f > \alpha\}\right) d\alpha \\
&\leq 2\ell \int\limits_0^\infty \alpha^{\ell-2} \int\limits_{\{|f| > \alpha/2\}} |f(x)| u(x) dx d\alpha \\
&\leq 2\ell \int\limits_{\mathbb{K}^d} |f(x)| u(x) \int\limits_0^{2|f|} \alpha^{\ell-2} d\alpha dx = \frac{2^\ell \ell}{\ell - 1} \int\limits_{\mathbb{K}^d} |f(x)|^\ell u(x) dx.
\end{aligned}$$

□

Nhận xét 2.2.3. *Ta thấy rằng, hằng số* $2\left(\dfrac{\ell}{\ell-1}\right)^{1/\ell}$ *ở bất đẳng thức (2.6) (ta gọi là một* L^ℓ*-cận của toán tử* M*) không phụ thuộc vào hàm* u *và cũng không phụ thuộc vào số chiều* d*. Trong trường hợp Euclid, E.M. Stein và J.-O. Strömberg [46] chỉ ra chuẩn của toán tử* M *(toán tử cực đại Hardy-Littlewood có tâm) từ* $L^\ell(\mathbb{R}^d)$ *vào* $L^\ell(\mathbb{R}^d)$ *bé hơn hoặc bằng* c_ℓ*, là một hằng số dương không phụ thuộc vào số chiều* d*. Đối với toán tử cực đại Hardy-Littlewood không tâm thì chuẩn từ* $L^\ell(\mathbb{R}^d)$ *vào* $L^\ell(\mathbb{R}^d)$ *phụ thuộc vào số chiều* d*.*

Ta xét các hằng số c dương (chỉ phụ thuộc vào q, d, u) sao cho bất đẳng thức

$$u\left(\{x \in \mathbb{K}^d : M_u f(x) > \alpha\}\right) \leq \frac{c}{\alpha} \cdot \|f\|_{L^1(u)}, \tag{2.7}$$

đúng với mọi $f \in L^1(u)$ và mọi $\alpha > 0$. *Chuẩn yếu loại* $(1,1)$ của toán tử M_u là infimum của tất cả các hằng số c trên. Từ bất đẳng thức (2.5) ta suy ra một tính chất lý thú của toán tử cực đại Hardy-Littlewood trên trường địa phương, một sự khác biệt với trường hợp trên trường thực.

Hệ quả 2.2.4. *Chuẩn yếu loại* $(1,1)$ *của toán tử cực đại* M_u *là không lớn hơn* 1.

Trong trường hợp Euclid, chuẩn yếu loại $(1,1)$ của toán tử Hardy-Littlewood không có được ước lượng cụ thể như trên. Trong [46], E.M. Stein và J.-O. Strömberg đã chứng minh được rằng chuẩn loại yếu $(1,1)$ của toán tử M (toán tử cực đại Hardy-Littlewood có tâm) là bằng $\mathcal{O}(d)$, tức là phụ thuộc vào số chiều d. Lưu ý rằng, một cận yếu quen thuộc thường được sử dụng trong trường hợp Euclid là 3^d (xem [22, Chương 2, trang 78-81]).

Định nghĩa 2.2.5. *Cho* $1 < \ell < \infty$. *Với mỗi hàm* u *không âm, khả tích địa phương trên* $\mathbb{K}^d$ *được gọi là thuộc vào lớp* $\mathcal{A}_\ell$, *nếu tồn tại một hằng số* $c > 0$ *thỏa mãn điều kiện sau*

$$\left(\frac{1}{q^{dk}}\int\limits_{x+B_k} u(y)dy\right)\cdot\left(\frac{1}{q^{dk}}\int\limits_{x+B_k} (u(y))^{-\frac{1}{\ell-1}}\,dy\right)^{\ell-1} \leq c \qquad (2.8)$$

với mọi $(k,x)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{K}^d$.

Hàm u *được gọi là thuộc lớp* $\mathcal{A}_\infty$, *nếu tồn tại* ϵ,δ *thuộc khoảng* $(0;1)$ *sao cho với mọi* $(k,x)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{K}^d$ *và với mọi tập con đo được* E *của* $x+B_k$ *mà* $|E| < \epsilon\, q^{dk}$, *thì* $u(E) < \delta\cdot u(x+B_k)$.

Hàm u *được gọi là thuộc lớp* $\mathcal{A}_1$ *nếu tồn tại hằng số* $C > 0$ *sao cho với* *mọi* $(x,\gamma) \in \mathbb{K}^d \times \mathbb{Z}$ *thì*

$$\frac{1}{|B_\gamma|} \int\limits_{x+B_\gamma} u(y)dy \le C \operatorname{ess.inf} u(y),$$

ở đó ess.inf được lấy qua tất cả các y thuộc hình cầu $x + B_\gamma$.

Ví dụ 2.2.1. *Với* $1 < \ell < \infty$, *hàm* $u(x) = |x|^\alpha$ *thuộc lớp* $\mathcal{A}_\ell$ *nếu* $-d < \alpha < d(\ell - 1)$. *Mọi hàm* $u(x)$ *đo được nhận giá trị trong đoạn* $[a;b]$ *với* $0 < a < b$ *thì đều thuộc lớp* $\mathcal{A}_\ell$. *Nếu* $u(x)$ *thuộc lớp* $\mathcal{A}_\ell$ *thì* $u(x-h)$ *và* $\delta u(x)$, *với* $h \in \mathbb{K}^d$ *và* δ *là hằng số thực dương, cũng thuộc lớp* $\mathcal{A}_\ell$.

■ Giả sử $-d < \alpha < d(\ell - 1)$ và $u(x) = |x|^\alpha$. Lấy hình cầu $x + B_k$ tùy ý.

Nếu $|x| \le q^k$ thì $x + B_k = B_k$. Khi đó

$$\frac{1}{q^{kd}} \int\limits_{x+B_k} u(y)dy = \frac{1}{q^{kd}} \int\limits_{B_k} u(y)dy = \frac{1}{q^{kd}} \sum_{-\infty<\gamma\le k} q^{\gamma(\alpha+d)} \left(1 - \frac{1}{q^d}\right)$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{q^d}}{1 - \frac{1}{q^{\alpha+d}}} \cdot q^{k\alpha}.$$

Thay thế α bởi $\alpha' = -\dfrac{\alpha}{\ell - 1}$ ta nhận được

$$\left(\frac{1}{q^{kd}} \int\limits_{x+B_k} (u(y))^{\ell-1} dy\right)^{\frac{1}{\ell-1}} = \left(\frac{1 - \frac{1}{q^d}}{1 - \frac{1}{q^{\alpha'+d}}}\right)^{\frac{1}{\ell-1}} \cdot q^{-k\alpha}.$$

Suy ra,

$$\left(\frac{1}{q^{kd}} \int\limits_{x+B_k} u(y)dy\right) \left(\frac{1}{q^{kd}} \int\limits_{x+B_k} (u(y))^{\ell-1} dy\right)^{\frac{1}{\ell-1}} = \frac{1 - \frac{1}{q^d}}{1 - \frac{1}{q^{\alpha+d}}} \cdot \left(\frac{1 - \frac{1}{q^d}}{1 - \frac{1}{q^{\alpha'+d}}}\right)^{\frac{1}{\ell-1}},$$

là một hằng số không phụ thuộc x, k (với mọi $|x| \le q^k$).

Nếu $|x| > q^k$ thì $|y| = |x|$ với mọi $y \in x + B_k$. Bằng tính toán tương tự trên, ta sẽ nhận được

$$\left(\frac{1}{q^{kd}} \int\limits_{x+B_k} u(y)dy\right)\left(\frac{1}{q^{kd}} \int\limits_{x+B_k} (u(y))^{\ell-1}\, dy\right)^{\frac{1}{\ell-1}} = 1$$

với mọi $|x| > q^k$. Tóm lại u thuộc lớp $\mathcal{A}_\ell$. ■

Ví dụ 2.2.2. *Hàm* $u(x) = |x|^\alpha$, *với* $-d < \alpha < 0$, *thuộc lớp* $\mathcal{A}_1$. *Mọi hàm* $u(x)$ *đo được nhận giá trị trong đoạn* $[a; b]$, *với* $0 < a < b$ *đều thuộc lớp* $\mathcal{A}_1$.

■ Kiểm tra $u(x) = |x|^\alpha$, với $-d < \alpha < 0$, thuộc lớp $\mathcal{A}_1$ được làm tương tự như trên. Cụ thể ta có đánh giá $\dfrac{1}{q^{kd}} \int\limits_{x+B_k} u(y)dy \leq C \operatorname{ess.inf} u(y)$, trong đó hằng số C có thể chọn là $C = \max\left\{1, \dfrac{1-\frac{1}{q^d}}{1-\frac{1}{q^{\alpha+d}}}\right\}$ ■

Một trong những tính chất đặc trưng của các hàm trọng lớp $\mathcal{A}_\ell$ đó là chúng tuân theo bất đẳng thức Hölder ngược. Điều này cũng đúng trên các trường địa phương.

Định lý 2.2.6. *Giả sử rằng* u *là một hàm thuộc lớp* $\mathcal{A}_\ell$, *trong đó* $1 < \ell < +\infty$. *Khi đó bất đẳng thức Hölder đảo ngược sau đây là đúng*

$$\left(\frac{1}{q^{dk}} \int\limits_{x+B_k} (u(y))^{1+\delta}\, dy\right)^{\frac{1}{1+\delta}} \leq \frac{c}{q^{dk}} \int\limits_{x+B_k} u(y)dy \tag{2.9}$$

với mọi $(k, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{K}^d$, *trong đó* $c > 0$, $\delta > 0$ *là các hằng số không phụ thuộc vào* (k, x).

Chứng minh. Để cho tiện ta sẽ kí hiệu $u_k(x)$ là giá trị trung bình của hàm u trong hình cầu $x + B_k$, tức là $u_k(x) = \frac{1}{q^{dk}} \int\limits_{x+B_k} u(y)dy$. Ta sẽ chứng minh tồn tại các số thực dương α, β không phụ thuộc vào x, k sao cho

$$|\{y \in x + B_k : u(y) > \beta \cdot u_k(x)\}| > \alpha q^{dk}. \tag{2.10}$$

với mọi hình cầu $x + B_k$. Ta đặt $E = \{y \in x + B_k : u(y) \le \beta u_k(x)\}$, trong đó β là một hằng số dương sẽ xác định sau, và để ý rằng

$$\frac{1}{\beta}\left(\frac{|E|}{q^{dk}}\right)^{\ell-1} = u_k(x) \cdot \left(\frac{1}{q^{dk}}\int\limits_E (\beta u_k(x))^{-\frac{1}{\ell-1}}\,dy\right)^{\ell-1} \le$$

$$\le u_k(x)\left(\frac{1}{q^{dk}}\int\limits_E (u(y))^{-\frac{1}{\ell-1}}\,dy\right)^{\ell-1} \le c < +\infty.$$

(Ở đây c là hằng số dương trong bất đẳng thức (2.8)). Chọn β dương đủ bé sao cho $\alpha = 1 - (\beta \cdot c)^{\frac{1}{\ell-1}} > 0$, ta sẽ nhận được (2.10).

Cố định $(k, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{K}^d$. Ta sẽ chỉ ra rằng với mọi $\lambda > u_k(x)$ thì

$$\int\limits_{\{y \in x + B_k :\, u(y) > \lambda\}} u(y)dy \le \frac{q^d}{\alpha} \cdot \lambda \cdot |\{y \in x + B_k : u(y) > \beta\lambda\}|. \tag{2.11}$$

Áp dụng bổ đề 2.1.7 cho hàm $y \mapsto u(x+y)$ (hiển nhiên hàm này thuộc $L^1(B_k)$), ta suy ra tồn tại một họ không quá đếm được các hình cầu $\{x_j + B_{\gamma_j} : j \in P_\lambda\}$ đôi một rời nhau (P_λ là một tập con của $\mathbb{Z}_+$, γ_j là số nguyên) sao cho $(x_j + B_{\gamma_j}) \subset B_k$, $u(x+y) \le \lambda$ với hầu khắp nơi y thuộc $B_k \setminus \bigcup\limits_{j \in P_\lambda} (x_j + B_{\gamma_j})$ và $\lambda < \frac{1}{q^{d\gamma_j}} \int\limits_{x_j + B_{\gamma_j}} u(x+y)dy \le q^d\lambda$. Do đó ta có

$$\int\limits_{\{y \in x + B_k :\, u(y) > \lambda\}} u(y)dy = \int\limits_{\{y \in B_k :\, u(x+y) > \lambda\}} u(x+y)dy$$

$$\le \sum_{j \in P_\lambda} \int\limits_{x_j + B_{\gamma_j}} u(x+y)dy \le q^d\lambda \sum_{j \in P_\lambda} q^{d\gamma_j}$$

$$\leq \frac{q^d\lambda}{\alpha}\sum_{j\in P_\lambda}|\{y\in x_j+B_{\gamma_j}:\, u(x+y)>\beta u_{\gamma_j}(x+x_j)\}| \quad \text{(theo (2.10))}$$

$$\leq \frac{q^d\lambda}{\alpha}\sum_{j\in P_\lambda}|\{y\in x_j+B_{\gamma_j}:\, u(x+y)>\beta\lambda\}|$$

$$\leq \frac{q^d\lambda}{\alpha}|\{y\in x+B_k:\, u(y)>\beta\lambda\}|.$$

Vậy (2.11) đã được chứng minh. Nhân cả hai vế của (2.11) với $\lambda^{\delta-1}$, lấy tích phân hai về và sử dụng nguyên lý Cavalieri, ta nhận được

$$\int_{u_k(x)}^{+\infty}\lambda^{\delta-1}\left(\int_{\{y\in x+B_k:\, u(y)>\lambda\}}u(y)dy\right)d\lambda$$

$$\leq \frac{q^d}{\alpha}\int_0^{+\infty}\lambda^{\delta}\,|\{y\in x+B_k:\, u(y)>\beta\lambda\}|\,d\lambda \leq \frac{q^d}{(1+\delta)\alpha\beta^{1+\delta}}\int_{x+B_k}(u(y))^{1+\delta}\,dy.$$

Theo định lý Fubini, vế trái bằng

$$\int_{\{y\in x+B_k:\, u(y)>u_k(x)\}}u(y)\left(\int_{u_k(x)}^{u(y)}\lambda^{\delta-1}d\lambda\right)dy$$

$$=\int_{\{y\in x+B_k:\, u(y)>u_k(x)\}}u(y)\left[\frac{(u(y))^{\delta}}{\delta}-\frac{(u_k(x))^{\delta}}{\delta}\right]dy$$

$$\geq \frac{1}{\delta}\int_{x+B_k}(u(y))^{1+\delta}\,dy-\frac{q^{dk}}{\delta}\,(u_k(x))^{1+\delta}\,.$$

Do vậy,

$$\left(\frac{1}{\delta}-\frac{q^d}{(1+\delta)\alpha\beta^{1+\delta}}\right)\frac{1}{q^{dk}}\int_{x+B_k}(u(y))^{1+\delta}dy\leq \frac{(u_k(x))^{1+\delta}}{\delta}.$$

Chọn δ dương đủ bé sao cho $\frac{1}{\delta}-\frac{q^d}{(1+\delta)\alpha\beta^{1+\delta}}>0$. Khi đó ta nhận được bất đẳng thức (2.9). $\square$

Hệ quả 2.2.7. *Cho u là một hàm thuộc lớp $\mathcal{A}_\ell$, với $1 < \ell < +\infty$. Khi đó tồn tại một số thực s, với $1 < s < \ell$, sao cho u cũng thuộc lớp $\mathcal{A}_s$.*

Chứng minh. Đặt $v(x) = (u(x))^{-\frac{1}{\ell-1}}$. Khi đó $v \in A_{\ell'}$, ở đó $\frac{1}{\ell} + \frac{1}{\ell'} = 1$. Áp dụng định lý 2.2.6 cho hàm v, ta suy ra u thuộc lớp $\mathcal{A}_s$ với $s = \frac{\ell+\delta}{1+\delta}$. □

Hệ quả 2.2.8. *Nếu u là một hàm thuộc lớp $\mathcal{A}_\ell$, với $1 < \ell < +\infty$, thì u thuộc lớp $\mathcal{A}_\infty$.*

Chứng minh. Sử dụng bất đẳng thức Hölder cho $\int\limits_{\mathbb{K}^d} \chi_E(x)u(x)dx$ và bất đẳng thức Hölder ngược (2.9) ta được ngay kết quả. □

Với những kết quả đã nhận được về lớp hàm trọng $\mathcal{A}_\ell$, ta có thể chứng minh được dạng tương tự định lý Muckenhoupt trên trường địa phương sau đây

Định lý 2.2.9. *Cho ℓ là một số thực thỏa mãn $1 < \ell < +\infty$ và u là một hàm không âm khả tích địa phương. Khi đó các mệnh đề sau là tương đương*

(a) u thuộc lớp $\mathcal{A}_\ell$.

(b) Với mọi $f \in L^\ell(u)$ và $\alpha > 0$ thì

$$u\left(\left\{x \in \mathbb{K}^d :\ Mf(x) > \alpha\right\}\right) \leq B \cdot \alpha^{-\ell} \int\limits_{\mathbb{K}^d} |f(x)|^\ell u(x)dx. \tag{2.12}$$

(c) Với mọi $f \in L^\ell(u)$ thì

$$||Mf||_{L^\ell(u)} \leq A \cdot \|f\|_{L^\ell(u)}. \tag{2.13}$$

ở đây A, B là các hằng số chỉ phụ thuộc vào u, q và d.

Chứng minh. Đầu tiên, dễ thấy rằng từ bất đẳng thức Chebyshev ta suy ra (c) kéo theo (b). Tiếp theo ta sẽ chứng minh (b) suy ra (a). Giả sử rằng B là hình cầu tùy ý và f là hàm không âm, đo được với giá nằm trong B. Với mỗi $x \in B$, vì ta có thể coi B như là hình cầu với tâm x nên $Mf(x) \geq f_B$, ở đó f_B là giá trị trung bình của f trên hình cầu B. Chọn $\alpha = f_B$, ta nhận được

$$u(B) \cdot (f_B)^\ell \leq C_1 \int\limits_B |f(x)|^\ell u(x) dx. \tag{2.14}$$

Ta chọn $f = (u+\epsilon)^{-\frac{1}{\ell-1}} \cdot \chi_B$, trong đó $\epsilon > 0$. Thay vào (2.14), ta được

$$u(B) \cdot \left(\frac{1}{|B|} \int\limits_B (u+\epsilon)^{-\frac{1}{\ell-1}} dx \right)^\ell \leq C_1 \int\limits_B (u+\epsilon)^{-\frac{1}{\ell-1}} dx.$$

Vì $u \in L^1_{\text{loc}}$ nên

$$\int\limits_B (u+\epsilon)^{-\frac{1}{\ell-1}} dx \leq \int\limits_B (u+\epsilon)^{-\frac{\ell}{\ell-1}} u(x) dx < \infty.$$

Do đó

$$u(B) \cdot \left(\frac{1}{|B|} \int\limits_B (u+\epsilon)^{-\frac{1}{\ell-1}} dx \right)^{\ell-1} \leq C_1.$$

Cho $\epsilon \to 0^+$ ta nhận được (2.8), hay u thuộc lớp $\mathcal{A}_\ell$.

Cuối cùng, ta sẽ chứng minh (a) kéo theo (c). Giả sử u thuộc lớp $\mathcal{A}_\ell$. Ta lấy f là hàm không âm tùy ý mà $f \in L^\ell(u)$. Theo bất đẳng thức Hölder

$$f_k(x) = \frac{1}{q^{dk}} \int_{x+B_k} f(y) dy$$

$$\leq \frac{1}{q^{dk}} \left(\int_{x+B_k} (f(y))^\ell u(y) dy \right)^{\frac{1}{\ell}} \cdot \left(\int_{x+B_k} (u(y))^{-\frac{1}{\ell-1}} dy \right)^{\frac{\ell-1}{\ell}}.$$

Suy ra

$$Mf(x) = \sup_{k\in\mathbb{Z}} f_k(x) \le c \cdot (M_u(f^\ell)(x))^{\frac{1}{\ell}}.$$

Áp dụng định lý 2.2.2 ta suy ra

$$\int\limits_{\mathbb{K}^d} (Mf(x))^s u(x)dx \le c_s \cdot \int_{\mathbb{K}^d} (M_u(f^\ell)(x)^{\frac{s}{\ell}} u(x)dx \le c_s \int\limits_{\mathbb{K}^d} |f(y)|^s u(y)dy \tag{2.15}$$

với mọi $s > \ell$. Theo hệ quả 2.2.8, tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho u thuộc lớp $A_{\ell-\epsilon}$, trong đó $\ell - \epsilon > 1$. Áp dụng (2.15) cho trường hợp cặp (s, ℓ) được thay thế bằng cặp $(\ell, \ell - \epsilon)$ ta nhận được

$$\int_{\mathbb{K}^d} (Mf(x))^\ell u(x)dx \le c_\ell \cdot \int_{\mathbb{K}^d} |f(y)|^\ell u(y)dy.$$

$\square$

2.3 Bất đẳng thức trọng chuẩn Fefferman-Stein cho toán tử cực đại giá trị vectơ trên trường địa phương

Định nghĩa 2.3.1. *Toán tử cực đại Hardy-Littlewood giá trị vectơ được xác định như sau: với mỗi dãy $f = \{f_k\}_{k=1}^\infty$ (để cho tiện ta sẽ sử dụng kí hiệu $f = \{f_k\}$) các hàm khả tích địa phương trên $\mathbb{K}^d$, ta đặt $\overrightarrow{M}f = \{Mf_k\}$, trong đó M là toán tử cực đại Hardy-Littlewood.*

Các bất đẳng thức về chuẩn của toán tử cực đại Hardy-Littlewood với giá trị véctơ được C. Fefferman và E. Stein giới thiệu lần đầu tiên trong bài báo [21] (vì vậy các bất đẳng thức về chuẩn cho toán tử cực đại giá trị véctơ sau này thường được gọi là bất đẳng thức Fefferman-Stein). Hai ông đã thu được các bất đẳng thức cực đại mở rộng cho trường hợp các hàm với giá trị ℓ^r và đưa ra những ứng dụng thú vị vào các tích phân với hạch Poisson. Hai nhà toán học Kenneth F. Andersen và Russel T. John [7], mở rộng các bất đẳng thức cực đại của C. Fefferman và E. Stein cho trường hợp có trọng. Năm 2009, Loukas Grafakos, Liguang Liu, và Dachun Yang [23] đã nghiên cứu các bất đẳng thức Fefferman-Stein trên các không gian thuần nhất, trong trường hợp không có trọng. Trên trường địa phương, các bất đẳng thức trọng chuẩn Fefferman-Stein cho toán tử cực đại giá trị vectơ chưa được nghiên cứu trước đó. Phương pháp chứng minh của chúng tôi là vận dụng định lý nội suy, bổ đề phân tích Calderón-Zygmund đã thiết lập được và dựa trên ý tưởng từ các công trình [21], [7], [23].

Trong mục này chúng tôi trình bày các kết quả nghiên cứu mà chúng tôi đã đạt được về các bất đẳng thức trọng chuẩn Fefferman-Stein cho toán tử cực đại giá trị vectơ trên trường địa phương. Ta kí hiệu $|f(x)|_r = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}|f_k(x)|^r\right)^{1/r}$. Giả sử t, r là các số thực thỏa mãn $1 \le t, r < \infty$ và ω là một hàm trọng $\mathbb{K}^d$. Ta kí hiệu $L^t_\omega(\ell^r)$ là không gian tất cả các dãy $f = \{f_k\}$ các hàm đo được trên $\mathbb{K}^d$ với *chuẩn*:

$$||f||_{L^t_\omega(\ell^r)} := \left(\int_{\mathbb{K}^d} |f(x)|^t_r \omega(x) dx\right)^{1/t} < \infty. \tag{2.16}$$

Định lý 2.3.2. *Kí hiệu M là toán tử cực đại Hardy-Littlewood và ω là một hàm không âm, khả tích địa phương. Cho ℓ, r là các số thực tùy ý.*

(a) Giả sử rằng $1 \le \ell \le r < \infty$. Khi đó $\omega \in \mathcal{A}_\ell$, khi và chỉ khi, tồn tại một hằng số dương $C = C(r, \ell, q, d)$, chỉ phụ thuộc vào các hằng số

r, ℓ, q, d, sao cho

$$\omega\left(\left\{x \in \mathbb{K}^d : \, |\overrightarrow{M}f|_r > \alpha\right\}\right) \leq \frac{C}{\alpha^\ell} \int\limits_{\mathbb{K}^d} |f(x)|_r^\ell \omega(x)dx, \tag{2.17}$$

với mọi dãy hàm $f = \{f_j\}$ thuộc $L^\ell_\omega(\ell^r)$, và mọi $\alpha > 0$.

(b) Giả sử rằng $1 < \ell \leq r < \infty$. Khi đó $\omega \in \mathcal{A}_\ell$, khi và chỉ khi, tồn tại một hằng số $C = C(r, \ell, q, d)$ chỉ phụ thuộc vào r, ℓ, q, d thỏa mãn

$$\int\limits_{\mathbb{K}^d} |\overrightarrow{M}f(x)|_r^\ell \omega(x)dx \leq C \int\limits_{\mathbb{K}^d} |f(x)|_r^\ell \omega(x)dx, \tag{2.18}$$

với mọi $f = \{f_j\} \in L^\ell_\omega(\ell^r)$.

Chứng minh. Đầu tiên ta thấy điều kiện cần là hiển nhiên. Thật vậy, nếu bất đẳng thức (2.17) hoặc (2.18) đúng thì ta chọn $f = \{f_k\}$, ở đó $f_k(x) = 0$ với mọi $k = 2, 3, \ldots$, thì theo định lý 2.2.9 ta có $\omega \in \mathcal{A}_\ell$. Bây giờ giả sử rằng $\omega \in \mathcal{A}_\ell$. Ta sẽ chứng minh các bất đẳng thức (2.17) và (2.18) tuần tự như sau.

Bước 1: Nếu $\ell = r$ thì (2.18) là hệ quả trực tiếp từ (2.13). Thực vậy

$$\int\limits_{\mathbb{K}^d} |\overrightarrow{M}f(x)|_r^r \, \omega(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{K}^d} |Mf_k(x)|^r \, \omega(x)dx$$

$$\leq C_{r,q,d} \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{K}^d} |f_k(x)|^r \, \omega(x)dx = C_{r,q,d} \int\limits_{\mathbb{K}^d} |f(x)|_r^r \, \omega(x)dx. \tag{2.19}$$

Bước 2: *Xét trường hợp $\ell < r$*. Lấy α là một số thực dương tùy ý. Không mất tính tổng quát ta giả sử rằng $f \in \mathcal{S}(\ell^r)$. Vì $|f(x)|_r$ khả tích trên $\mathbb{K}^d$, nên theo bổ đề 2.1.5, tồn tại một số hữu hạn hoặc đếm được các hình cầu đôi một rời nhau $\{B_\star^j\}$ thỏa mãn

$$|f(x)|_r \le \alpha \qquad \text{hầu khắp nơi } x \notin B = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_\star^j, \tag{2.20}$$

$$\alpha < \frac{1}{|B_\star^j|} \int\limits_{B_\star^j} |f(x)|_r dx \le q^d \alpha \qquad \text{với mọi } j = 1, 2, 3, \ldots. \tag{2.21}$$

Ta kí hiệu $f' = \{f_k'\}$, ở đó $f_k'(x) = f_k(x)\chi_{\mathbb{K}^d - B}(x)$ và đặt $f = f' + f''$. Theo bất đẳng thức Minkowski, ta có

$$|\overrightarrow{M} f|_r \le |\overrightarrow{M} f'|_r + |\overrightarrow{M} f''|_r.$$

Vậy (2.17) sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được

$$\omega\left(\left\{x \in \mathbb{K}^d : \ |\overrightarrow{M} f'|_r > \alpha\right\}\right) \le \frac{C_{r,\ell,q,d}}{\alpha^\ell} \int\limits_{\mathbb{K}^d} |f(x)|_r^\ell \omega(x) dx, \tag{2.22}$$

và

$$\omega\left(\left\{x \in \mathbb{K}^d : \ |\overrightarrow{M} f''|_r > \alpha\right\}\right) \le \frac{C_{r,\ell,q,d}}{\alpha^\ell} \int\limits_{\mathbb{K}^d} |f(x)|_r^\ell \omega(x) dx. \tag{2.23}$$

Áp dụng hệ quả 2.2.7, từ $\omega \in \mathcal{A}_\ell$ và $\ell < r$ ta suy ra $\omega \in \mathcal{A}_r$. Từ (2.20) ta suy ra rằng $|f'(x)|_r^r \le \alpha^{r-\ell} \cdot |f'(x)|_r^\ell$. Áp dụng bất đẳng thức Chebyshev và (2.19), ta nhận được

$$\omega\left(\left\{x \in \mathbb{K}^d : \ |\overrightarrow{M} f'|_r > \alpha\right\}\right) \le \frac{1}{\alpha^r} \int\limits_{\mathbb{K}^d} |\overrightarrow{M} f'(x)|_r^r \omega(x) dx$$

$$\le \frac{C_{r,\ell,q,d}}{\alpha^r} \int\limits_{\mathbb{K}^d} |f'(x)|_r^r \omega(x) dx$$

$$\le \frac{C_{r,\ell,q,d}}{\alpha^\ell} \int\limits_{\mathbb{K}^d} |f'(x)|_r^\ell \omega(x) dx \le \frac{C_{r,\ell,q,d}}{\alpha^\ell} \int\limits_{\mathbb{K}^d} |f(x)|_r^\ell \omega(x) dx.$$

Để chứng minh (2.23), ta xác định dãy hàm $\overline{f} = \{\overline{f}_k\}$ như sau:

$$\overline{f}_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{|B_\star^j|} \int\limits_{B_\star^j} |f_k(y)| dy & \text{nếu } x \in B_\star^j,\ j = 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{nếu } x \notin B. \end{cases}$$

Với mỗi $x \in B_\star^j$,

$$|\overline{f}(x)|_r = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{|B_\star^j|} \int\limits_{B_\star^j} |f_k(y)| dy \right)^r \right)^{1/r}$$

$$\leq \frac{1}{|B_\star^j|} \int\limits_{B_\star^j} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(y)|^r \right)^{1/r} dy \leq \frac{1}{|B_\star^j|} \int\limits_{B_\star^j} |f(y)|_r dy \leq q^d \alpha,$$

(ở đây ta sử dụng (2.21) và bất đẳng thức Hölder).

Với mỗi $x \notin B$, thì $\overline{f}_k(x) = 0$ với mọi k, do đó $|\overline{f}(x)|_r = 0$. Vậy, hàm $|\overline{f}|_r$ có giá nằm trong B và bị chặn bởi hằng số $q^d \alpha$. Sử dụng lập luận giống như đối với chứng minh của (2.22), trong đó thay thế hàm f' bởi hàm $\overline{f}$, thì ta sẽ nhận được

$$\omega\left(\left\{x \in \mathbb{K}^d :\ |\overrightarrow{M}\overline{f}|_r > \alpha\right\}\right) \leq \frac{C_{r,\ell,q,d}}{\alpha^\ell} \int\limits_{\mathbb{K}^d} |\overline{f}(x)|_r^\ell \omega(x) dx \leq C_{r,\ell,q,d}\, \omega(B). \tag{2.24}$$

Bây giờ ta đi ước lượng $\omega(B)$. Nếu $\ell = 1$, thì từ điều kiện của lớp $\mathcal{A}_1$ và từ (2.21), ta suy ra

$$\omega(B_\star^j) \leq \frac{\omega(B_\star^j)}{|B_\star^j|} \cdot \frac{1}{\alpha} \int\limits_{B_\star^j} |f(x)|_r dx \leq \frac{C_{r,\ell,q,d}}{\alpha} \int\limits_{B_\star^j} |f(x)|_r\, \omega(x) dx,$$

do vậy $\omega(B) \leq \frac{C_{r,\ell,q,d}}{\alpha} \int\limits_B |f(x)|_r\, \omega(x) dx$.

Xét trường hợp $\ell > 1$. Sử dụng bất đẳng thức Hölder và (2.21), với chú ý rằng ω thuộc lớp $\mathcal{A}_\ell$, ta được

$$\omega(B_\star^j) \leq \frac{1}{\alpha^\ell} \cdot \frac{1}{|B_\star^j|^\ell} \left(\int_{B_\star^j} |f(x)|_r dx \right)^\ell \cdot \int_{B_\star^j} \omega dx$$

$$\leq \frac{1}{\alpha^\ell} \left(\int_{B_\star^j} |f(x)|_r^\ell \omega dx \right) \cdot \left(\frac{1}{|B_\star^j|} \int_{B_\star^j} \omega(x)^{-\frac{1}{\ell-1}} dx \right)^{\ell-1} \cdot \int_{B_\star^j} \omega dx$$

$$\leq \frac{C_{r,\ell,q,d}}{\alpha^\ell} \int_{B_\star^j} |f(x)|_r^\ell \omega dx.$$

Như vậy, ta đã vừa chứng minh

$$\omega(B) \leq \frac{C_{r,\ell,q,d}}{\alpha^\ell} \int\limits_{\mathbb{K}^d} |f(x)|_r^\ell \omega dx. \tag{2.25}$$

Kết hợp (2.24) và (2.25), ta nhận được

$$\omega\left(\left\{ x \in \mathbb{K}^d : \, |\overrightarrow{M}\overline{f}|_r > \alpha \right\} \right) \leq \frac{C_{r,\ell,q,d}}{\alpha^\ell} \int\limits_{\mathbb{K}^d} |f(x)|_r^\ell \omega dx. \tag{2.26}$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh bất đẳng thức $\left|\overrightarrow{M} f''(x)\right|_r \leq \left|\overrightarrow{M}\overline{f}(x)\right|_r$ đúng với mọi $x \notin B = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_\star^j$. Để làm điều này, ta chỉ cần chứng minh các bất đẳng thức $Mf_k''(x) \leq M\overline{f_k}(x)$ đúng với mọi số nguyên dương k và với mọi $x \notin B$. Thực vậy,

$$Mf_k''(x) = \sup_{\gamma \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|B_\gamma|} \int\limits_{x+B_\gamma} |f_k''(y)| dy,$$

và với mọi $\gamma \in \mathbb{Z}$ thì

$$\frac{1}{|B_\gamma|} \int\limits_{x+B_\gamma} |f_k''(y)| dy = \frac{1}{|B_\gamma|} \sum_{j \in J} \int\limits_{B_\star^j \cap (x+B_\gamma)} |f_k''(y)| dy,$$

ở đây $J = \{j = 1, 2, \dots :\ B^j_\star \cap (x + B_\gamma) \neq \emptyset\}$. Với mỗi $y \in B^j_\star \cap (x + B_\gamma)$, ta có

$$\overline{f}_k(y) = \frac{1}{|B^j_\star|} \int\limits_{B^j_\star} |f_k(z)|dz \geq \frac{1}{|B^j_\star|} \int\limits_{B^j_\star \cap (x+B_\gamma)} |f''_k(z)|dz.$$

Do đó

$$\frac{1}{|B_\gamma|} \int\limits_{x+B_\gamma} |f''_k(y)|dy \leq \frac{1}{|B_\gamma|} \sum_{j\in J} \int\limits_{B^j_\star} |\overline{f}_k(y)|dy. \tag{2.27}$$

Theo mệnh đề 1.2.1-(b), với mỗi $j \in J$, ta có $B^j_\star \subset (x + B_\gamma)$ hay $B^j_\star \supset (x + B_\gamma)$. Vì $x \notin B$ nên $B^j_\star \subset x + B_\gamma$. Do vậy với mọi $x \notin B$, ta nhận được $\bigcup\limits_{j\in J} B^j_\star \subset (x + B_\gamma)$. Từ đây và từ (2.27), ta suy ra rằng

$$\frac{1}{|B_\gamma|} \int\limits_{x+B_\gamma} |f''_k(y)|dy \leq \frac{1}{|B_\gamma|} \int\limits_{x+B_\gamma} |\overline{f}_k(y)|dy \qquad \text{với } x \notin B.$$

Điều này có nghĩa là $Mf''_k(x) \leq M\overline{f_k}(x)$ với mọi $x \notin B$ và mọi số nguyên dương k.

Từ (2.24) và (2.25) ta nhận được

$$\begin{aligned}\omega\left(\left\{x \in \mathbb{K}^d :\ |\overrightarrow{M} f''|_r > \alpha\right\}\right) &\leq \omega(B) + \omega\left(\left\{x \in \mathbb{K}^d :\ |\overrightarrow{M}\overline{f}(x)|_r > \alpha\right\}\right)\\ &\leq \frac{C_{r,\ell,q,d}}{\alpha^\ell} \int\limits_{\mathbb{K}^d} |f(x)|^\ell_r \omega(x)dx.\end{aligned}$$

Do đó, (2.23) đúng và như vậy (2.17) đúng. Tóm lại, với $\omega \in \mathcal{A}_\ell$ thì (2.17) đúng với mọi $\ell \leq r < \infty$.

Nếu $r > \ell > 1$ và $\omega \in \mathcal{A}_\ell$, thì $\omega \in \mathcal{A}_{\ell'}$ với mọi $\ell < \ell' \leq r$ và do đó (2.17) đúng với mọi $\ell < \ell' \leq r$. Lại theo hệ quả 2.2.7, tồn tại ℓ'' mà $1 < \ell'' < \ell$ sao cho $\omega \in \mathcal{A}_{\ell''}$. Do đó (2.17) đúng với ℓ thay thế bằng ℓ''. Vậy theo định lý 1.4.5 ta suy ra (2.18) đúng với ℓ. $\square$

2.4 Một bất đẳng thức trọng chuẩn loại yếu ngược cho toán tử cực đại

Có một câu hỏi tự nhiên được đặt ra đó là: với điều kiện nào của hàm f để hàm cực đại Mf là khả tích địa phương. A. Zygmund đưa ra lớp hàm $L\log^+ L$ và chứng minh rằng nếu f thuộc $L\log^+ L$ thì Mf khả tích địa phương. Năm 1969, E.M. Stein chứng minh được chiều ngược lại, đó là: cho f là hàm khả tích trên B, nếu Mf thuộc $L^1(B)$, với B là một hình cầu nào đó, thì f thuộc lớp hàm $L\log^+ L$. Một trong những kĩ thuật chính trong chứng minh của E.M. Stein đó là phải thiết lập được một bất đẳng thức ngược với bất đẳng thức yếu loại $(1, 1)$. Kết quả này cũng được J.A. Chao [12] chứng minh đúng trên trường địa phương, với trường hợp không có hàm trọng.

Năm 1984, các nhà toán học K.F. Andersen và Wo-Sang Young [7] đã mở rộng bất đẳng thức ngược loại yếu của E.M. Stein sang trường hợp cặp hàm trọng. K.F. Andersen và Wo-Sang Young đưa ra các điều kiện về hàm trọng u và hàm trọng v để có được bất đẳng thức ngược với bất đẳng thức loại yếu $(1, 1)$. Trong mục này, chúng tôi nghiên cứu các kết quả mà K.F. Andersen và Wo-Sang Young [7] đã nhận được trong trường địa phương. Chúng tôi cũng thu được một số các kết quả tương tự như trong trường hợp Euclid của K.F. Andersen và Wo-Sang Young. Nhưng điều thú vị ở đây là: trong $\mathbb{R}^d$ các điều kiện cần và các điều kiện đủ của cặp hàm trọng đưa ra là không tương đương nhau. Để có được sự tương đương giữa các điều kiện cần và các điều kiện đủ, các hàm trọng cần phải được giả thiết thêm là thỏa mãn điều kiện kép. Tuy nhiên những kết quả tương ứng trong $\mathbb{K}^d$, dù không cần đặt thêm điều kiện kép cho các hàm trọng, thì các điều kiện cần và các điều kiện đủ đặt lên cặp hàm trọng (u, v) mà chúng tôi nhận được là *gần tương tự nhau* (thực chất là các điều kiện tương đương nhưng sai khác một hằng số). Chính sự khác biệt giữa hai hệ bổ đề phân tích loại Calderón-Zygmund, giữa hai cấu trúc hình học của hai trường thực và trường địa phương dẫn tới sự nhau về mặt kết quả nói trên. Cũng trong mục này, chúng tôi ứng dụng kết quả thu được về bất đẳng thức ngược loại yếu, để chứng minh được điều kiện cần đảm bảo tính khả tích của hàm cực đại Mf trong không gian trọng là f thuộc lớp trọng $L\log^+ L$ tương ứng. Từ kết quả này, chúng tôi thu được kết quả của J.A. Chao [12] như là một hệ quả trực tiếp.

Để cho tiện việc trình bày, ta kí hiệu $u(A) = \int\limits_A u(x)dx$.

Định lý 2.4.1. *Cho $(s, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{K}^d$ và hai hàm u, v không âm, khả tích trên hình cầu $x + B_s$.*

(a) Giả sử rằng tồn tại một hằng số $c_1 > 0$ sao cho

$$\frac{u\left(x + y + B_k\right)}{q^{dk}} \geq c_1 \cdot \operatorname{ess.sup}_{z \in y + B_k} v(x + z),$$

với mọi $(y + B_k) \subset B_s$. Khi đó

$$u\left(\{y \in x + B_s : Mf(y) > \lambda\}\right) \geq \frac{c_1}{q^d \lambda} \int\limits_{\{y \in x + B_s : |f(y)| > \lambda\}} |f(y)| v(y) dy, \tag{2.28}$$

với mọi hàm $f \in L^1(x + B_s)$ và với mọi $\lambda \geq \frac{1}{q^{sd}} \int\limits_{x + B_s} |f(y)| dy$.

(b) Đảo lại, nếu (2.28) đúng với mọi $f = \chi_E$, hàm đặc trưng của tập đo

được $E \subset \mathbb{K}^d$ *với* $0 < |E| < +\infty$*, và với mọi* $0 < \lambda \leq 1$*, thì*

$$\frac{u\left(x+y+B_k\right)}{q^{dk}} \geq \frac{c_1}{q^d} \cdot \text{ess.}\sup_{z\in y+B_k} v(x+z),$$

với mọi $(y + B_k) \subset B_s$*.*

Trong trường hợp Euclid, K. F. Andersen và Wo-Sang Young [8, Định lý 1, trang 257] đưa ra một điều kiện cần và một điều kiện đủ khác nhau cho cặp hàm trọng để nhận được bất đẳng thức loại yếu ngược trong định lý 2.4.1. Kết quả mà chúng tôi nhận được trong định lý 2.4.1, thì điều kiện cần và điều kiện đủ để có (2.28) là *gần tương tự* nhau theo nghĩa: nếu đồng nhất các hằng số sai khác một hằng số nhân là c_1 và $\frac{c_1}{q^d}$ thì các điều kiện cần và đủ là tương đương nhau.

Chứng minh. (a) Giả sử $\lambda \geq \frac{1}{q^{ds}} \int\limits_{x+B_s} |f(x)|dy$ và $f \in L^1(x + B_s)$. Bằng cách thay $f(y)$ bởi $|f(y)|$, ta có thể giả sử f là hàm không âm. Áp dụng bổ đề 2.1.7 cho hàm $f(x + y) \in L^1(B_s)$, ta suy ra tồn tại một họ không quá đếm được các hình cầu đôi một rời nhau $\{x_j + B_{\gamma_j} : j \in P_\lambda\}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

$$\bigcup_{j\in P_\lambda}(x_j + B_{\gamma_j}) \subset B_s, \quad \lambda \leq \frac{1}{q^{d\gamma_j}} \int\limits_{x_j+B_{\gamma_j}} f(x+y)dy \leq q^d\lambda,$$

và $f(x + y) \leq \lambda$ với hầu khắp nơi $y \in B_s \setminus \bigcup\limits_{j\in P_\lambda}(x_j + B_{\gamma_j})$.

Với mỗi $y \in (x + x_j) + B_{\gamma_j}$ và $j \in P_\lambda$, ta có $y + B_{\gamma_j} = (x + x_j) + B_{\gamma_j}$. Suy ra

$$Mf(y) \geq \frac{1}{q^{d\gamma_j}} \int\limits_{y+B_{\gamma_j}} f(z)dz = \frac{1}{q^{d\gamma_j}} \int\limits_{x+x_j+B_{\gamma_j}} f(z)dz$$

$$= \frac{1}{q^{d\gamma_j}} \int\limits_{x_j+B_{\gamma_j}} f(x+z)dz \geq \lambda.$$

Do đó

$$\bigcup_{j\in P_\lambda} \left(x + x_j + B_{\gamma_j}\right) \subset \{y \in x + B_s :\ Mf(y) > \lambda\}.$$

Vậy ta nhận được

$$u\left(\{y \in x + B_s :\ Mf(y) > \lambda\}\right) \geq \sum_{j\in P_\lambda} u(x + x_j + B_{\gamma_j})$$

$$\geq \frac{1}{q^d\lambda} \sum_{j\in P_\lambda} \frac{1}{q^{d\gamma_j}} \int\limits_{x_j+B_{\gamma_j}} f(x+y)\cdot u(x+x_j+B_{\gamma_j})dy$$

$$\geq \frac{c_1}{q^d\lambda} \sum_{j\in P_\lambda} \operatorname{ess.sup}_{z\in x_j+B_{\gamma_j}} v(x+z) \int\limits_{x_j+B_{\gamma_j}} f(x+z)dz$$

$$\geq \frac{c_1}{q^d\lambda} \sum_{j\in P_\lambda} \int\limits_{x_j+B_{\gamma_j}} f(x+z)v(x+z)dz.$$

Với hầu khắp nơi $y \in B_s$ mà $f(x+y) > \lambda$, thì y thuộc $\bigcup\limits_{j\in P_\lambda} (x_j + B_{\gamma_j})$. Suy ra

$$\sum_{j\in P_\lambda} \int\limits_{x_j+B_{\gamma_j}} f(x+z)v(x+z)dz$$

$$\geq \int\limits_{\{y\in B_s:\, f(x+y)>\lambda\}} f(x+y)v(x+y)dy \geq \int\limits_{\{y\in B_s:\, f(x+y)>\lambda\}} f(y)v(y)dy.$$

Thành thử ta có

$$u(\{y \in x + B_s :\ Mf(y) > \lambda\}) \geq \frac{c_1}{q^d\lambda} \int\limits_{\{y\in x+B_s:\, f(y)>\lambda\}} f(y)v(y)dy.$$

(b) Lấy $\epsilon > 0$ và hình cầu $(y + B_k) \subset B_s$ tùy ý. Khi đó, tồn tại một tập đo được $E_\epsilon \subset y + B_k$ sao cho $0 < |E_\epsilon| < q^{dk}$ và $v(x+t) > \operatorname{ess.sup}_{z\in y+B_k} v(x+z) - \epsilon$ với hầu khắp nơi $t \in E_\epsilon$. Xét $f = \chi_{x+E_\epsilon}$ là hàm đặc trưng của tập

$x + E_\epsilon$. Với mỗi $z \notin (x+y+B_k)$, ta sẽ chỉ ra rằng $Mf(z) \leq \lambda = \frac{|E_\epsilon|}{q^{dk}}$. Thực vậy, với mỗi $j \in \mathbb{Z}$, ta có

$$\frac{1}{q^{dj}} \int\limits_{z+B_j} |f(t)|dt = \frac{1}{q^{dj}} \int\limits_{(z+B_j)\cap(x+E_\epsilon)} dt.$$

Nếu $j \geq k$ thì $q^{dj} \geq q^{dk}$, do đó $\frac{1}{q^{dj}} \int\limits_{z+B_j} |f(t)|dt \leq \frac{|x+E_\epsilon|}{q^{dk}} = \lambda$.

Nếu $j < k$ thì đặt $z = x + z'$, từ $z \notin (x+y) + B_k$ ta suy ra $z' \notin y + B_k$. Điều này có nghĩa là $|z'-y| \geq q^{k+1}$. Nếu tồn tại t thuộc $(z'+B_j)\cap(y+B_k)$ thì $|z'-y| = |z'-t+t-y| \leq \max\{|z'-t|, |t-y|\} \leq q^k < q^{k+1}$, mâu thuẫn. Như vậy $(z'+B_j)\cap(y+B_k) = \emptyset$, nên $(z+B_j)\cap(x+y+B_k) = \emptyset$. Từ $E_\epsilon \subset y + B_k$ ta suy ra $(z+B_j)\cap(x+E_\epsilon) = \emptyset$. Trong trường hợp này $\frac{1}{q^{dj}} \int\limits_{z+B_j} |f(t)|dt = 0$.

Từ hai trường hợp trên cho ta

$$Mf(z) = \sup_{j\in\mathbb{Z}} \frac{1}{q^{dj}} \int\limits_{z+B_j} |f(t)|dt \leq \frac{|E_\epsilon|}{q^{dk}} = \lambda.$$

Điều này có nghĩa là $\{z \in x + B_s : Mf(z) > \lambda\} \subset (x+y+B_k)$. Suy ra,

$$\begin{aligned} u(x+y+B_k) &\geq u\left(\{z \in x+B_s : Mf(z) > \lambda\}\right) \\ &\geq \frac{c_1}{q^d\lambda} \int\limits_{\{z\in x+B_s:\, f(z)>\lambda\}} f(z)v(z)dz \\ &\geq \frac{c_1}{q^d|E_\epsilon|} q^{dk} \int\limits_{x+E_\epsilon} v(z)dz \\ &\geq \frac{c_1}{q^d} q^{dk} (\operatorname{ess.sup}_{z\in y+B_k} v(z) - \epsilon). \end{aligned}$$

Tóm lại, ta đã chứng minh được

$$u(x+y+B_k) \geq \frac{c_1}{q^d} q^{dk} \left(\operatorname{ess.sup}_{z\in y+B_k} v(z) - \epsilon\right)$$

với mọi số dương ϵ và mọi hình cầu $(y + B_k) \subset B_s$. Cho $\epsilon \to 0^+$, chúng ta nhận được

$$\frac{u(x + y + B_k)}{q^{dk}} \geq \frac{c_1}{q^d} \cdot \text{ess.}\sup_{z \in y + B_k} v(x + z)$$

với mọi $(y + B_k) \subset B_s$.

$\square$

Định lý 2.4.2. *Giả sử rằng u, v là các hàm không âm, khả tích địa phương trên $\mathbb{K}^d$.*

(a) Nếu tồn tại một hằng số dương c_2 sao cho

$$\frac{u(x + B_k)}{q^{dk}} \geq c_2 \cdot \text{ess.}\sup_{y \in x + B_k} v(y),$$

với mọi $(k, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{K}^d$ thì

$$u(\{x \in \mathbb{K}^d : Mf(x) > \lambda\}) \geq \frac{c_2}{q^d \lambda} \int\limits_{\{x \in \mathbb{K}^d : |f(x)| > \lambda\}} |f(x)| v(x) dx, \quad (2.29)$$

với mọi $f \in L^1(\mathbb{K}^d)$ và với mọi λ dương.

(b) Đảo lại, nếu (2.29) đúng với mọi hàm đặc trưng $f = \chi_E$ của tập đo được $E \subset \mathbb{K}^d$ mà $0 < |E| < +\infty$ và với mọi $0 < \lambda \leq 1$, thì

$$\frac{u(x + B_k)}{q^{dk}} \geq \frac{c_2}{q^d} \cdot \text{ess.}\sup_{y \in x + B_k} v(y), \quad (2.30)$$

với mọi $(k, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{K}^d$.

Chứng minh. (a) Lấy $f \in L^1(\mathbb{K}^d)$ là một hàm không âm, $\lambda > 0$ và các số nguyên dương m, k. Đặt $f^k(x) = f(x)$ nếu $|f(x)| \leq q^k$ và $x \in B_k$, $f^k(x) = 0$ trong trường hợp còn lại. Theo định lý 2.4.1 ta có

$$u(\{x \in B_m | Mf^k(x) > \lambda\}) \geq \frac{c_2}{q^d \lambda} \int\limits_{\{x \in B_m | f_k(x) > \lambda\}} f^k(x) v(x) dx,$$

với mọi m đủ lớn sao cho $\frac{1}{q^{md}}\int\limits_{\mathbb{K}^d} f^k dx \leq \lambda$ và $m \geq k$. Khi đó $\{f^k\}_{k\geq 1}$ là một dãy hàm không âm, tăng và hội tụ điểm tới f và $Mf^k \uparrow Mf(x)$ khi $k \to \infty$. Vì vậy, theo định lý hội tụ đơn điệu, lần lượt cho $m \to \infty$ và $k \to \infty$, ta sẽ nhận được (2.29).

(b) Giả sử $(k, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{K}^d$ và $\epsilon > 0$. Khi đó tồn tại một tập đo được $E_\epsilon \subset x + B_k$ sao cho $0 < |E_\epsilon| < q^{dk}$ và $v(z) > \operatorname{ess.sup}_{y\in x+B_k} v(y) - \epsilon$ với hầu khắp nơi $z \in E_\epsilon$. Đặt $f = \chi_{E_\epsilon}$ và $\lambda = \frac{|E_\epsilon|}{q^{dk}}$. Cố định $y \notin x + B_k$. Ta có $|x - y| \geq q^{k+1}$.

Với mỗi $j \in \mathbb{Z}$ thì

$$\frac{1}{q^{dj}} \int\limits_{y+B_j} |f(z)|dz = \frac{1}{q^{dj}} |(y + B_j) \cap E_\epsilon|.$$

Nếu $j \geq k$ thì $\frac{1}{q^{dj}} \int\limits_{y+B_j} |f(z)|dz \leq \frac{|E_\epsilon|}{q^{dk}} = \lambda$. Xét trường hợp $j < k$. Ta sẽ chỉ ra rằng $E_\epsilon \cap (y + B_j) = \emptyset$. Thực vậy, nếu tồn tại $z \in (y + B_j) \cap (x + B_k)$ thì $|x - y| \leq \max\{|x - z|, |z - y|\} \leq q^k < q^{k+1}$, mâu thuẫn. Do đó $E_\epsilon \cap (y + B_j) \subset (x + B_k) \cap (y + B_j) = \emptyset$. Từ hai trường hợp trên, ta suy ra

$$Mf(y) = \sup_{j\in\mathbb{Z}} \frac{1}{q^{dj}} \int\limits_{y+B_j} |f(z)|dz \leq \lambda.$$

Do đó $\{y \in \mathbb{K}^d : Mf(y) > \lambda\} \subset x + B_k$. Thành thử ta có

$$\begin{aligned} u(x + B_k) &\geq u(\{y \in \mathbb{K}^d : Mf(y) > \lambda\}) \\ &\geq \frac{c_2}{q^d |E_\epsilon|} q^{dk} \int\limits_{E_\epsilon} v(x)dx \geq \frac{c_2}{q^d} q^{dk} \left(\operatorname{ess.sup}_{y\in x+B_k} v(y) - \epsilon\right). \end{aligned}$$

Cho $\epsilon \to 0^+$, ta nhận được (2.30). $\square$

Với mỗi số thực x, ta kí hiệu $\log^+ x = \begin{cases} \log x & \text{nếu } x > 1 \\ 0 & \text{ngược lại.} \end{cases}$

Định lý 2.4.3. *Giả sử rằng* u, v *là hai hàm không âm, khả tích địa phương và* $(s, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{K}^d$ *thỏa mãn*

$$\frac{u(x + y + B_k)}{q^{dk}} \geq c \cdot \operatorname{ess.sup}_{z \in y + B_k} v(x + z), \tag{2.31}$$

với mọi hình cầu $(y + B_k) \subset B_s$*. Ở đây* c *là một hằng số không phụ thuộc vào cách chọn hình cầu* $y + B_k$*. Với mọi hàm* f *khả tích địa phương, có giá nằm trong* $x + B_s$*, nếu* $\int\limits_{x+B_s} Mf(y)u(y)dy < +\infty$ *thì*

$$\int\limits_{x+B_s} |f(y)| \cdot \log^+ |f(y)| v(y)dy < +\infty.$$

Chứng minh. Nếu $v = 0$ hầu khắp nơi trong $x + B_s$ thì kết luận của định lý là hiển nhiên đúng. Do đó không mất tính tổng quát có thể giả sử rằng $v(x) > 0$ trên một tập con có độ đo dương của tập $x + B_s$. Từ (2.31) ta suy ra $u(x + B_s) > 0$. Giả sử $f \geq 0$ khả tích địa phương, có giá nằm trong $x + B_s$ mà

$$\int\limits_{x+B_s} Mf(y)u(y)dy < +\infty. \tag{2.32}$$

Nếu $f = 0$ hầu khắp nơi trong $x + B_s$ thì kết luận của định lý là hiển nhiên. Vì vậy, ta có thể giả sử f nhận giá trị dương trên một tập con có độ đo dương của $x + B_s$. Chú ý rằng với mỗi $y \in x + B_s$ thì $y + B_s = x + B_s$, nên $Mf(y) \geq \frac{1}{q^{ds}} \int\limits_{y+B_s} f(z)dz > 0$. Kết hợp với (2.32), ta suy ra u khả tích trên $x + B_s$. Từ (2.31) ta suy ra v cũng khả tích trên $x + B_s$. Ta có

$$\int\limits_{x+B_s} f(y) \log^+ f(y) v(y)dy = \int\limits_{\{y \in x+B_s : f(y) > 1\}} f(y)v(y)dy \int\limits_1^{f(y)} \frac{d\lambda}{\lambda}$$

$$\leq \int\limits_1^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda} \int\limits_{\{y \in x+B_s : f(y) > \lambda\}} f(y)v(y)dy \leq \frac{q^d}{c} \int\limits_{x+B_s} Mf(y)u(y)dy < +\infty.$$

$\square$

Định lý 2.4.3 có một hệ quả trực tiếp sau đây

Hệ quả 2.4.4. *Giả sử rằng f là một hàm thuộc $L^1(\mathbb{K})$ có giá nằm trên mặt cầu S nào đó. Khi đó:*

$$\text{nếu} \int\limits_S M_\star f(x)dx < \infty \text{ thì} \int\limits_S |f(x)| \log^+ |f(x)|dx < \infty.$$

ở đây toán tử $M_\star$ được xác định bởi công thức $M_\star f(z) = \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \dfrac{1}{q^k} \int\limits_{z+S_k} |f(t)|dt$

Chứng minh. Áp dụng định lý 2.4.3 với $u = v = 1$ và f là hàm có giá trong mặt cầu S. Điều kiện (2.31) tự nhiên được thỏa mãn. Dễ thấy rằng

$$Mf(y) \leq \left(1 - \frac{1}{q}\right) M_\star f(y)$$

với mọi hàm f có giá trong mặt cầu S và với mọi y. Do đó nếu $M_\star f$ thỏa mãn điều kiện $\int\limits_S M_\star f(x)dx < \infty$ thì Mf thỏa mãn điều kiện (2.32) với $u = 1$. Từ đó ta có ngay kết luận của hệ quả 2.4.4. $\square$

Hệ quả 2.4.4 được J.A. Chao công bố trong bài báo [12, trang 302].

2.5 Ước lượng loại yếu cho một lớp toán tử tích phân

Trên trường địa phương, một số toán tử tích phân kì dị đã được nghiên cứu thường có các hạch $\zeta \in L^1_{\text{loc}}$ thỏa mãn một số điều kiện trong các điều kiện được cho dưới đây:

(i) $|\zeta(x)| \leq \frac{c}{|x|^d}$ hầu khắp nơi $x \neq 0$.

(ii) $\sup\limits_{|y|=1} \sum\limits_{j=1}^{+\infty} \int\limits_{S_0} |\zeta(x+\beta^j y) - \zeta(x)|dx < +\infty$. Ở đây β là phần tử nguyên tố của $\mathcal{P}$.

(iii) $|\zeta(x) - \zeta(x-y)| \leq \frac{c|y|}{|x|^{d+1}}$ với mọi $|y| < |x|$.

(iv) $\sup\limits_{y\neq 0} \int\limits_{|x|\geq q^2|y|} |\zeta(x-y) - \zeta(x)|dx \leq c < +\infty$.

Các điều kiện (i), (iii) và (iv) được chuyển sang tương tự như trường hợp Euclid (trong đó (iii) và (iv) tương tự với các điều kiện Hörmander trên $\mathbb{R}^d$). Điều kiện (i), (ii) được các tác giả K. Phillips và M. Taibleson [40] đặt lên hạch ζ khi nghiên cứu các tích phân kì dị loại Calderón-Zygmund trên trường địa phương. Mệnh đề sau đây nói nên mối quan hệ giữa các điều kiện trên.

Mệnh đề 2.5.1. *Nếu (iii) thỏa mãn thì (ii) và (iv) cũng được thỏa mãn.*

Chứng minh. Giả sử rằng ζ thỏa mãn điều kiện (iii). Lấy $y \neq 0$, $|y| = q^{k-2}$ ở đó $k \in \mathbb{Z}$. Ta có

$$\int\limits_{|x|\geq q^2|y|} |\zeta(x-y) - \zeta(x)|dx \leq \int\limits_{|x|\geq q^k} \frac{c|y|}{|x|^{d+1}} = cq^{k-2} \sum_{j=k}^{+\infty} \int_{S_j} \frac{dx}{q^{j(d+1)}}$$

$$\leq c \sum_{j=k}^{+\infty} q^{k-2} q^{dj} \left(1 - \frac{1}{q^d}\right) \frac{1}{q^{j(d+1)}} \leq c\left(1 - \frac{1}{q^d}\right) \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{q^{j-k+2}}$$

$$\leq c\left(1 - \frac{1}{q^d}\right) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{q^j} < +\infty.$$

Vậy ζ thỏa mãn (iv). Mặt khác với mọi j nguyên dương và $y \in S_0$ thì $|\beta^j y| = q^{-j} < 1$. Do đó ta có

$$\sup_{|y|=1} \sum_{j=1}^{+\infty} \int\limits_{S_0} |\zeta(x+\beta^j y) - \zeta(x)|dx$$

$$\leq \sup_{|y|=1} \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{S_0} \frac{c}{q^j} = c\left(1 - \frac{1}{q}\right) \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{q^j} < +\infty.$$

Vậy ζ thỏa mãn (ii). □

Trong mục này chúng tôi sẽ đi nghiên cứu một lớp toán tử tích phân cực đại được sinh ra tự nhiên từ một dãy các nhân $\{\zeta_m\}_{m\geq 1}$. Giả sử $\{\zeta_m\}_{m\geq 1}$ là một dãy các hàm thuộc lớp L^1_{loc}, thỏa mãn điều kiện

$$\sup_{y\neq 0} \sum_{m=1}^{+\infty} \int_{|x|\geq q^2|y|} |\zeta_m(x-y) - \zeta_m(x)| dx \leq c_2 < +\infty. \tag{2.33}$$

Ta đặt $Tf(x) = \sup\limits_{m\geq 1} |\zeta_m * f(x)|$. Sau đây là kết quả chính của mục này

Định lý 2.5.2. *Giả sử rằng T có thể xác định như là một toán tử bị chặn từ $L^\ell(\mathbb{K}^d)$ tới $L^\ell(\mathbb{K}^d)$, với ℓ là một số thực thỏa mãn $1 < \ell < +\infty$. Khi đó, T có thể thác triển tới một toán tử loại yếu $(1,1)$ và thỏa mãn*

$$|\{x : Tf > \lambda\}| \leq \frac{C_T}{\lambda} \cdot \|f\|_1 \quad \text{với mọi } f \in L^1\left(\mathbb{K}^d\right) \text{ và mọi } \lambda > 0. \tag{2.34}$$

Ở đây C_T là một hằng số dương và có thể chọn

$$C_T = 2\frac{\ell}{(\ell-1)^{1-\frac{1}{\ell}}} \cdot q^{2d(1-\frac{1}{\ell})} \cdot \|T\|_\ell + 4c_2.$$

Chứng minh. Ta lấy cố định α dương và một hàm không âm $f \in \mathcal{D}$ (nhắc lại rằng $\mathcal{D}$ là tập tất cả các hàm $f : \mathbb{K}^d \to \mathbb{C}$ hằng địa phương với giá compact). Theo hệ quả 2.1.6, tồn tại một tập con P_α của $\mathbb{Z}$ và một dãy điểm x_k trong $\mathbb{K}^d$ sao cho họ các hình cầu $\{x_k + B_k : k \in P_\alpha\}$ là đôi một rời nhau, $\alpha \leq \frac{1}{|B_k|} \int\limits_{x_k+B_k} f(y)dy \leq \alpha q^d$ và $f(x) \leq \alpha$ hầu khắp nơi trong $(E_\alpha)^c$, phần bù của E_α. Ở đây

$$E_\alpha = \{x : Mf(x) > \alpha\} = \bigcup_{k\in P_\alpha} (x_k + B_k).$$

Ta có $|E_\alpha| < +\infty$ và $\alpha|E_\alpha| \leq \int\limits_{E_\alpha} f(y)dy \leq q^d \cdot \alpha \cdot |E_\alpha|$. Đặt $f(x) = g(x) + b(x)$, trong đó

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } x \notin E_\alpha \\ \frac{1}{|B_k|} \int\limits_{x_k+B_k} f(y)dy & \text{nếu } x \in B_k \end{cases}$$

và $b_k(x) = b(x)\chi_{x_k+B_k}$, ở đó $\chi_{x_k+B_k}$ là hàm đặc trưng của hình cầu $x_k + B_k$, với mọi $k \in P_\alpha$. Dễ thấy rằng $b(x) = 0$ với mỗi $x \in (E_\alpha)^c$, $b_k \in \mathcal{D}$ với mọi $k \in \mathcal{P}_\alpha$ và

$$\int\limits_{\mathbb{K}^d} b_k(y)dy = 0 \ \text{ với mọi } \ k \in P_\alpha.$$

Vì $Tf(x) \leq Tg(x) + Tb(x)$ với hầu khắp nơi $x \in \mathbb{K}^d$, nên với mọi $\lambda > 0$ ta có

$$|\{x : Tf(x) > \lambda\}| \leq \left|\left\{x : Tg(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| + \left|\left\{x : Tb(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right|.$$

Do đó để có được ước lượng (2.34), ta đi tìm các ước lượng tương ứng cho g và b.

Đối với hàm g: Đầu tiên ta chứng minh $g \in L^\ell(\mathbb{K}^d)$. Thực vậy,

$$\|g\|_\ell^\ell = \int\limits_{(E_\alpha)^c} |g(x)|^\ell dx + \int\limits_{E_\alpha} |g(x)|^\ell dx$$

$$\leq \alpha^{\ell-1} \int\limits_{(E_\alpha)^c} |f(x)|dx + \sum_{k \in P_\alpha} \int_{x_k+B_k} \frac{1}{|B_k|^\ell} \cdot \left(\int\limits_{x_k+B_k} |f(y)|dy \right)^\ell dx$$

$$\leq \lambda^{\ell-1} \int\limits_{(E_\alpha)^c} |f(x)|dx + \sum_{k \in P_\alpha} \frac{1}{|B_k|^{\ell-1}} \left(\int\limits_{x_k+B_k} |f(y)|dy \right)^\ell$$

$$\leq \lambda^{\ell-1} \int\limits_{(E_\alpha)^c} |f(x)|dx + \sum_{k \in P_\alpha} (\alpha \cdot q^d)^{\ell-1} \cdot \int\limits_{x_k+B_k} |f(y)|dy$$

$$\leq \lambda^{\ell-1} \int\limits_{(E_\alpha)^c} |f(x)|dx + (\alpha.q^d)^{\ell-1} \cdot \int\limits_{E_\alpha} |f(y)|dy$$

$$\leq (\alpha.q^d)^{\ell-1} \cdot \int\limits_{\mathbb{K}^d} |f(x)|dx < +\infty.$$

Vì vậy, Tg được xác định như là một phần tử của $L^\ell(\mathbb{K}^d)$ và ta có

$$\left|\left\{x : Tg(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \leq \frac{2^\ell}{\lambda^\ell} \cdot \int |Tg(x)|^\ell dx$$

$$\leq \frac{2^\ell}{\lambda^\ell} \cdot C_\ell \cdot ||g||_\ell^\ell \leq \frac{2^\ell \cdot C_\ell \cdot \alpha^{\ell-1} \cdot q^{d(\ell-1)}}{\lambda^\ell} \cdot \|f\|_1.$$

Đối với hàm b: Vì $b_k \in \mathcal{D}$ nên Tb_k được xác định như là một phần tử của $L^\ell(\mathbb{K}^d)$. Do đó với hầu khắp nơi x, $Tb(x)$ xác định và bằng $Tb_k(x)$ với $k \in \mathcal{P}_\alpha$ nào đó. Vậy $Tb(x) \leq \sum\limits_{k \in P_\alpha} Tb_k(x)$ với hầu khắp nơi $x \in \mathbb{K}^d$. Đặt $E_\alpha^* = \bigcup\limits_{k \in P_\alpha} (x_k + B_{k+1})$, thì

(a) $|E_\alpha^*| \leq q^d.|E_\alpha|$ và $(E_\alpha^*)^c \subset (E_\alpha)^c$.

(b) Nếu $x \notin x_k + B_{k+1}$ và $y \in x_k + B_k$ thì $|x - x_k| \geq q^{k+2} \geq q^2|y - x_k|$.

Ta suy ra

$$\int\limits_{(E_\alpha^*)^c} Tb(x)dx \leq \sum_{k \in P_\alpha} \int\limits_{(x_k+B_{k+1})^c} Tb_k(y)dy$$

$$\leq \sum_{k \in P_\alpha} \int\limits_{(x_k+B_{k+1})^c} dy \cdot \sup_{j \geq 1} \int\limits_{x_k+B_k} |\zeta_j(y-z) - \zeta_j(y-x_k)| \cdot |b_k(z)|dz$$

$$\leq \sum_{k\in P_\alpha} \int\limits_{(x_k+B_{k+1})^c} dy \cdot \sum_{j=1}^{+\infty} \int\limits_{x_k+B_k} |\zeta_j(y-z)-\zeta_j(y-x_k)|\cdot|b_k(z)|dz$$

$$\leq \sum_{k\in P_\alpha} \int\limits_{x_k+B_k} dz \left(\int\limits_{\substack{|y-x_k| \\ \geq q^2|z-x_k|}} \sum_{j=1}^{+\infty} |\zeta_j(y-z)-\zeta_j(y-x_k)|.|b_k(z)|\, dy \right)$$

$$\leq \sum_{k\in P_\alpha} \int\limits_{B_k} |b_k(z+x_k)|dz \left\{ \int\limits_{|y|\geq q^2|z|} \sum_{j=1}^{+\infty} |\zeta_j(y-z)-\zeta_j(y)|dy \right\}$$

$$\leq c_2 \sum_{k\in P_\alpha} \int\limits_{x_k+B_k} |b_k(z)|dz = c_2 \sum_{k\in P_\alpha} \int\limits_{x_k+B_k} |b(z)|dz$$

$$\leq c_2 \sum_{k\in P_\alpha} \left(\int\limits_{x_k+B_k} |f(z)|dz + \int\limits_{x_k+B_k} |g(z)|dz \right)$$

$$\leq c_2 \int\limits_{E_\alpha} |f(z)|dz + c_2 \sum_{k\in P_\alpha} \int\limits_{x_k+B_k} \frac{1}{|B_k|} \int\limits_{x_k+B_k} |f(y)|dydz$$

$$\leq c_2 \int\limits_{E_\alpha} |f(z)|dz + c_2 \sum_{k\in P_\alpha} \int\limits_{x_k+B_k} |f(y)|dy$$

$$\leq 2c_2 \int_{E_\alpha} |f(z)|dz.$$

Do vậy

$$\left|\left\{x : Tb(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \leq \left|\left\{x \in (E_\alpha^*)^c : Tb(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| + \left|\left\{x \in E_\alpha^* : Tb(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right|$$

$$\leq \frac{2}{\lambda} \int\limits_{(E_\alpha^*)^c} Tb(x)dx + |E_\alpha^*| \leq \frac{2}{\lambda} \cdot 2c_2 \cdot \int\limits_{E_\alpha} |f(x)|dz + q^d.|E_\alpha|$$

$$\leq \frac{4c_2}{\lambda} \int\limits_{E_\alpha} |f(z)|dz + \frac{q^d}{\alpha} \cdot \int\limits_{E_\alpha} |f(z)|dz \leq \left(\frac{4c_2}{\lambda} + \frac{q^d}{\alpha}\right) \int\limits_{E_\alpha} |f(z)|dz$$

$$\leq \left(\frac{4c_2}{\lambda} + \frac{q^d}{\alpha}\right) \|f\|_1.$$

Tóm lại, ta thu được

$$|\{x : Tf(x) > \lambda\}| \leq \left(\frac{2_\ell \cdot C_\ell \cdot (\alpha q^d)^{\ell-1}}{\lambda^\ell} + \frac{4c_2}{\lambda} + \frac{q^d}{\alpha}\right) \cdot \|f\|_1.$$

Chọn $\alpha = \epsilon\lambda$ với $\epsilon^\ell = \frac{q^d(\ell-1)}{2^\ell C_\ell q^{d(\ell-1)}}$ và $C_\ell = \|T\|_\ell$, khi đó

$$|\{x :\ Tf(x) > \lambda\}| \leq \frac{C_T}{\lambda}\|f\|_1 \qquad \text{với mọi } f \in \mathcal{D},\ \text{mọi } \lambda > 0.$$

ở đây $C_T = \frac{2\ell}{(\ell-1)^{1-\frac{1}{\ell}}} \cdot q^{2d\left(1-\frac{1}{\ell}\right)} \cdot ||T||_\ell + 4c_2$, không phụ thuộc vào cách chọn $f \in \mathcal{D}$. Vì $\mathcal{D}$ trù mật trong L^1, nên với mọi $f \in L^1$, tồn tại một dãy hàm $(f_n) \subset \mathcal{D}$ và $f_n \to f$ trong L^1. Chú ý rằng

$$\{x :\ |Tf_m(x) - Tf_n(x)| > \lambda\} \subset \{x :\ T(f_m - f_n)(x) > \lambda\}$$

Do đó

$$|\{x :\ |Tf_m(x) - Tf_n(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C_T}{\lambda}\|f_m - f_n\|_1$$

với mọi $\lambda > 0$. Điều này chứng tỏ rằng, (Tf_n) là một dãy Cauchy trong $L^{1,\infty}$. Vì $L^{1,\infty}$ là một không gian đủ nên (Tf_n) hội tụ trong $L^{1,\infty}$ tới một hàm ta cũng kí hiệu là Tf thuộc $L^{1,\infty}$. Đặc biệt (Tf_n) hội tụ theo độ đo tới Tf. Với mọi $\epsilon > 0$, ta có

$$\{x :\ |Tf(x)| > \lambda\} \subset \{x :\ |Tf_n(x)| > \lambda - \epsilon\} \cup \{x :\ |Tf_n(x) - Tf(x)| > \epsilon\}$$

Suy ra

$$|\{x: \ |Tf(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C_T}{\lambda - \epsilon}\|f_n\|_1 + \epsilon < \frac{C_T}{\lambda - \epsilon}\|f\|_1 + \epsilon\left(1 + \frac{C_T}{\lambda - \epsilon}\right)$$

với mọi $n \geq n_0$, ở đó $n_0 = n_0(\epsilon)$ đủ lớn. Cho $\epsilon \to 0^+$ ta thu được (2.34). $\square$

Kết luận của chương 2.

Trong chương 2, chúng tôi nhận được các kết quả sau:

- Xây dựng và chứng minh được một hệ các bổ đề phân tích kiểu Calderón-Zygmund trên trường địa phương.
- Xây dựng được lớp hàm trọng Muckenhoupt và giải quyết được bài toán đặc trưng hàm trọng u để toán tử M là bị chặn từ $L^\ell(u)$ vào $L^\ell(u)$ trên trường địa phương. Bài toán đặc trưng hàm trọng này cũng được chúng tôi nghiên cứu và giải quyết cho trường hợp toán tử cực đại với giá trị véctơ.
- Đưa ra một điều kiện cần và một điều kiện đủ cho cặp hàm trọng (u, v) để toán tử cực đại Hardy-Littlewood M thỏa mãn bất đẳng thức trọng chuẩn loại yếu ngược. Chúng tôi ứng dụng kết quả đó vào lớp hàm $L\log^+ L$ với trọng của Zygmund để nhận được một điều kiện cần cho tính khả tích của hàm cực đại Hardy-Littlewood.
- Chúng tôi đưa ra một lớp toán tử tích phân cực đại mới trên trường địa phương và chứng minh được rằng nếu toán tử đó là xác định như là một toán tử loại mạnh (ℓ, ℓ), với $1 < \ell < \infty$ nào đó, thì toán tử đó là loại yếu $(1, 1)$. Một cận yếu của toán tử này cũng được chúng tôi chỉ ra.

Chương 3

BÀI TOÁN MUCKENHOUPT TRÊN TRƯỜNG ĐỊA PHƯƠNG

Vào năm 1979, trong bài báo [37], Benjamin Muckenhoupt đã đặt ra câu hỏi rằng một hàm trọng v, tức là một hàm không âm và khả tích địa phương, phải thỏa mãn điều kiện gì để tồn tại một hàm u không âm, đo được, hữu hạn hầu khắp nơi, sao cho toán tử cực đại Hardy-Littlewood M bị chặn từ $L^p(\mathbb{R}^n, udx)$ vào $L^p(\mathbb{R}^n, vdx)$. Bài toán này đã được giải độc lập bởi Wo-Sang Young [49] và muộn hơn sau đó bởi nhóm các tác giả Angel E. Gatto, Cristian E. Gutiérrez [24] với hai phương pháp chứng minh khác nhau. Trong chương này chúng tôi đi trả lời câu hỏi tương tự đặt ra trên $\mathbb{K}^d$: với điều kiện nào của hàm trọng v để toán tử Hardy-Littlewood M là bị chặn từ $L^\ell\left(\mathbb{K}^d, udx\right)$ vào $L^\ell\left(\mathbb{K}^d, vdx\right)$, với một hàm trọng u nào đó.

Bài toán trên trong trường hợp thực đã có hai phương pháp chứng minh: một là của Wo-Sang Young [49] và một là của E. Gatto, Cristian E. Gutiérrez [24]. Phương pháp của chúng tôi dựa trên lược đồ của Wo-Sang Young. Chú ý rằng phương pháp của E. Gatto, Cristian E. Gutiérrez [24] là xây dựng một hàm cực đại mới dựa vào thứ tự trong $\mathbb{R}$, tuy nhiên phương pháp là chuyển vào trong trường địa phương rất khó khả thi bởi trong $\mathbb{K}$ không có một thứ tự toàn phần nào. Bên cạnh đó, một số bổ đề kĩ thuật được sử dụng trong [24] không dễ dàng xây dựng được một phiên bản tương tự trong trường địa phương.

Lớp hàm v là nghiệm của bài toán về hình thức là giống với trong trường hợp $\mathbb{R}^d$. Thực tế thì việc tìm ra điều kiện cần, tức là v thuộc lớp hàm nào khá đơn giản, với chứng minh tương tự như trong $\mathbb{R}^d$. Phần khó khăn nhất chính là việc xây dựng hàm u như thế nào để thỏa mãn yêu cầu: nếu v thuộc lớp hàm đã tìm được thì toán tử M sẽ bị chặn từ $L^\ell(u)$ vào $L^\ell(v)$. Tuy nhiên, chúng tôi đã tính toán được rằng, nếu giữ nguyên về mặt hình thức hàm u do Wo-Sang Young xây dựng sang trường hợp trường địa phương thì chứng minh sẽ bị đổ vỡ vì một số chuỗi lũy thừa kiểu như $1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \cdots$ không hội tụ trong $\mathbb{K}$. Chính vì vậy, khó khăn lớn nhất khi nghiên cứu bài toán trọng Muckenhoupt trên trường địa phương là việc xây dựng hàm u thích hợp khi mà các hàm sẵn có trong $\mathbb{R}^d$ không còn dùng được nữa. Ý tưởng xây dựng hàm u của chúng tôi là giữ lại phần "đẹp" của hàm u mà Wo-Sang Young [49] đã xây dựng được và dán thêm một hàm thích hợp khác thay thế cho phần "xấu". Vì thế hàm u được xây dựng trong luận án này, về mặt hình thức, rất khác biệt so với trường hợp thực đã được xây dựng bởi Wo-Sang Young [49], hay bởi Angel E. Gatto, Cristian E. Gutiérrez [24].

3.1 Bất đẳng thức đối ngẫu Fefferman-Stein

Định lý 3.1.1. (Bất đẳng thức Fefferman-Stein) *Với mỗi số thực ℓ, $1 < \ell < \infty$, tồn tại một hằng số thực dương c_ℓ sao cho, với mọi hàm $\phi \geq 0$ mà $M\phi$ hữu hạn hầu khắp nơi trên $\mathbb{K}^d$ và với mọi hàm f đo được trên $\mathbb{K}^d$ thì bất đẳng thức sau đúng :*

$$\int_{\mathbb{K}^d} |Mf(x)|^\ell \phi(x)dx \leq c_\ell \cdot \int_{\mathbb{K}^d} |f(x)|^\ell M\phi(x)dx. \tag{3.1}$$

Chứng minh. Do $M\phi$ hữu hạn hầu khắp nơi nên $M\phi(x)$ là mật độ của độ đo dương μ, với $d\mu(x) = M\phi(x)dx$ và ϕ là mật độ của một độ đo dương ν sao cho $d\nu(x) = \phi(x)dx$. Khi đó để chứng minh (3.1), ta cần chỉ ra rằng M là một toán tử bị chặn từ $L^\ell(\nu)$ vào $L^\ell(\mu)$. Mặt khác theo định lý 1.4.3, ta chỉ cần chứng minh M thuộc loại (∞, ∞) và loại yếu $(1, 1)$ là đủ.

Trường hợp (∞, ∞): Nếu tồn tại $x \in \mathbb{K}^d$ sao cho $M\phi(x) = 0$, thì $\phi(y) = 0$ hầu khắp nơi $y \in \mathbb{K}^d$. Khi đó $L^\infty(\nu) = \{0\}$, vì vậy hiển nhiên M thuộc loại (∞, ∞). Giả sử $M\phi(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{K}^d$. Cố định $\alpha > ||f||_{L^\infty(\mu)}$. Khi đó $\int\limits_{\{|f|>\alpha\}} M\phi(y)dy = 0$ nên $|\{|f| > \alpha\}| = 0$ (nếu không thì tập $\{|f| > \alpha\}$ có độ đo dương, nên tồn tại y để $M\phi(y) = 0$, mâu thuẫn). Vậy $|f| \leq \alpha$ hầu khắp nơi trong $\mathbb{K}^d$, điều này kéo theo $Mf(x) \leq \alpha$ và khi ấy $||Mf||_{L^\infty(\nu)} \leq \alpha$. Do đó $||Mf||_{L^\infty(\nu)} \leq ||f||_{L^\infty(\mu)}$.

Trường hợp M là loại yếu $(1, 1)$: Ta sẽ chứng minh rằng

$$\int_{\{Mf(x)>\alpha\}} \phi(x)dx \leq \frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{K}^d} |f(x)|(M\phi)(x)dx. \tag{3.2}$$

Vì f là hàm đo được nên có thể chọn được một dãy các hàm khả tích f_γ thỏa mãn $f_\gamma \to f$ hầu khắp nơi và

$$\{x \in \mathbb{K}^d : \ Mf(x) > \alpha\} = \bigcup_{\gamma=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{K}^d : \ Mf_\gamma(x) > \alpha\}.$$

Do đó không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng f là khả tích, có giá compact và $f \geq 0$. Áp dụng bổ đề 2.1.5 cho hàm f, tồn tại một họ hữu hạn hoặc đếm được các hình cầu đôi một rời nhau $\{B^j\}$ thỏa mãn

$$E_\alpha = \left\{x \in \mathbb{K}^d : \ Mf(x) > \alpha\right\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} B^j$$

và $\alpha < \frac{1}{|B^j|} \int\limits_{B^j} |f(y)|dy \leq q^d \alpha$ với mọi j. Do đó

$$\int_{\{Mf(x)>\alpha\}} \phi(x)dx \leq \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{B^j} \phi(x)dx$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{|B^j|} \int\limits_{B^j} |f(y)|dy \int\limits_{B^j} \phi(x)dx \leq \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{B^j} |f(y)| \left(\frac{1}{|B^j|} \cdot \int\limits_{B^j} \phi(x)dx \right) dy$$

$$\leq \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{B^j} |f(y)| M\phi(y)dy \leq \frac{1}{\alpha} \int\limits_{E_\alpha} |f(y)| M\phi(y)dy.$$

Vậy M là loại yếu $(1, 1)$ từ $L^\ell(\nu)$ vào $L^\ell(\mu)$. $\square$

3.2 Lớp hàm trọng $\mathcal{W}_\ell$ và bài toán trọng của Muckenhoupt trên trường địa phương

Bổ đề 3.2.1. *Cho v là một hàm đo được không âm trên $\mathbb{K}^d$ và ℓ là một số thực thỏa mãn $1 < \ell < \infty$. Khi đó ba điều kiện sau đây là tương đương :*

(a) $\int\limits_{\mathbb{K}^d} \frac{v(x)}{(1+|x|^d)^\ell} < \infty$,

(b) $\sum\limits_{\gamma\in\mathbb{Z}} \frac{q^{d\gamma(\ell-1)}}{(1+q^{d\gamma})^\ell} \int\limits_{S_0} v(\beta^{-\gamma}x)dx < \infty$*, ở đó* β *là một phần tử của* $\mathbb{K}^d$ *thỏa mãn* $B_{-1} = \beta B_0$

(c) $\begin{cases} \int\limits_{B_0} v(x)dx < \infty \\ \int\limits_{(B_0)^c} \frac{v(x)}{|x|^{d\ell}}dx < \infty \end{cases}$, *ở đó* $(B_0)^c$ *là phần bù của hình cầu đơn vị* B_0.

Chứng minh. Từ (1.7), nếu (a) hoặc (b) đúng thì

$$\int\limits_{\mathbb{K}^d} \frac{v(x)}{(1+|x|^d)^\ell}\,dx = \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}} \int_{S_\gamma} \frac{v(x)}{(1+q^{d\gamma})^\ell} = \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}} \frac{q^{\gamma d(\ell-1)}}{(1+q^{d\gamma})^\ell} \int_{S_0} v(\beta^{-\gamma}x)dx < \infty,$$

do đó (a) và (b) là tương đương nhau.

Tiếp theo ta có

$$\int\limits_{\mathbb{K}^d} \frac{v(x)}{(1+|x|^d)^\ell}\,dx = \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}} \int_{S_\gamma} \frac{v(x)}{(1+q^{d\gamma})^\ell}$$

$$= \sum_{\gamma=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+q^{d\gamma})^\ell} \int_{S_\gamma} v(x)dx + \sum_{\gamma=0}^{+\infty} \frac{q^{d\gamma}}{(1+q^{d\gamma})^\ell} \int\limits_{S_{-\gamma}} v(x)dx < \infty.$$

Tồn tại một hằng số c dương sao cho $(1+q^{d\gamma})^\ell \geq q^{d\gamma\ell} \geq c(1+q^{d\gamma})^\ell$ với mọi $\gamma \geq 0$. Điều này có nghĩa là

$$\int\limits_{\mathbb{K}^d} \frac{v(x)}{(1+|x|^d)^\ell}\,dx \approx \left(\int\limits_{(B_0)^c} \frac{v(x)}{|x|^{d\ell}}dx + \int\limits_{\mathcal{B}_0} v(x)dx \right).$$

Do đó (a) và (c) là tương đương. $\square$

Định nghĩa 3.2.2. *Cho ℓ là một số thực thỏa mãn $1 < \ell < \infty$. Ta kí hiệu $\mathcal{W}_\ell$ là tập tất cả các hàm đo được không âm v trên $\mathbb{K}^d$ mà thỏa mãn một trong ba điều kiện (a), (b) hoặc (c) của bổ đề 3.2.1. Nếu v là hàm thuộc $\mathcal{W}_\ell$ thì ta nói v là thuộc lớp $\mathcal{W}_\ell$.*

Lớp các hàm $\mathcal{W}_\ell$ thỏa mãn các tính chất sau đây:

(1) Tổng của hai hàm thuộc lớp $\mathcal{W}_\ell$ thì cũng thuộc lớp $\mathcal{W}_\ell$.

(2) Tích của một hàm đo được không âm và bị chặn với một hàm thuộc lớp $\mathcal{W}_\ell$ là một hàm thuộc lớp $\mathcal{W}_\ell$.

(3) Mỗi hàm không âm thuộc L^∞ đều thuộc lớp $\mathcal{W}_\ell$.

Các tính chất (1), (2) của lớp $\mathcal{W}_\ell$ là hiển nhiên. Tính chất (3) là hệ quả trực tiếp của bổ đề sau đây

Bổ đề 3.2.3. *Nếu $1 < \ell < \infty$, thì $\int\limits_{\mathbb{K}^d} \frac{dx}{(1+|x|^d)^\ell} < \infty$.*

Chứng minh. Thực vậy, từ (1.7) ta suy ra

$$\int\limits_{\mathbb{K}^d} \frac{dx}{(1+|x|^d)^\ell} = \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}} \int\limits_{S_\gamma} \frac{dx}{(1+|x|^d)^\ell}.$$

Ta chia tổng trên thành hai tổng theo các chỉ số $\gamma > 0$ và $\gamma \le 0$, và đặt $-\gamma$ bởi γ ta nhận được

$$\int\limits_{\mathbb{K}^d} \frac{dx}{(1+|x|^d)^\ell} = \sum_{0<\gamma\in\mathbb{Z}} \frac{q^{d\gamma}}{(1+q^{d\gamma})^\ell}\left(1-\frac{1}{q^d}\right) + \sum_{0\le\gamma\in\mathbb{Z}} \frac{q^{d\gamma(\ell-1)}}{(1+q^{d\gamma})^\ell}\left(1-\frac{1}{q^d}\right) < \infty.$$

□

Định lý 3.2.4. *Cho ℓ là một số thực thỏa mãn $1 < \ell < \infty$ và v là một hàm đo được không âm trên $\mathbb{K}^d$ nhận giá trị trong $[0; +\infty]$. Khi đó điều* *kiện cần và đủ để v thuộc lớp $\mathcal{W}_\ell$ là tồn tại một hàm u đo được, không âm, hữu hạn hầu khắp nơi trên $\mathbb{K}^d$, nhận giá trị trong $[0; +\infty]$, thỏa mãn*

$$\int\limits_{\mathbb{K}^d} |Mf|^\ell v dx \leq C \int\limits_{\mathbb{K}^d} |f|^\ell u dx \tag{3.3}$$

với mọi $f \in L^\ell(u)$. Ở đây C là một hằng số dương chỉ phụ thuộc vào ℓ, q và d.

Chứng minh. Đầu tiên ta giả sử rằng tồn tại một hàm đo được không âm, hữu hạn hầu khắp nơi u sao cho bất đẳng thức (3.3) đúng với mọi hàm $f \in L^\ell(u)$. Với mỗi α dương, ta kí hiệu $E_\alpha = \{x \in \mathbb{K}^d : \ |u(x)| \leq \alpha\}$. Khi đó tồn tại $\alpha > 0$ sao cho E_α có độ đo dương. Thực vậy, nếu không tồn tại $\alpha > 0$ nào như thế, thì $u = \infty$ hầu khắp nơi trong $\mathbb{K}^d$, mâu thuẫn với giả thiết về u. Vì vậy ta có thể tìm một tập con E của $\mathbb{K}^d$ với độ đo dương mà sao cho u là bị chặn trên E. Ngoài ra, nếu cần ta có thể thay E bởi tập $E \cap B_\gamma$ nên ta có thể coi E là tập con của B_γ. Kí hiệu $f = \chi_E$, thì

$$\int\limits_{\mathbb{K}^d} |f(x)|^\ell u dx = \int\limits_E u dx \leq |E| \cdot \text{ess.sup}|u| < +\infty.$$

Do đó $f \in L^\ell(u)$. Mặt khác, lấy $x \in \mathbb{K}^d$ tùy ý. Nếu $x \in B_\gamma$ thì $x + B_\gamma = B_\gamma$, do đó

$$Mf(x) \geq \frac{1}{q^{d\gamma}} \int\limits_{B_\gamma} |f(y)| dy \geq \frac{1}{q^{d\gamma}} \cdot \int\limits_E dx = \frac{|E|}{q^{d\gamma}}.$$

Nếu $x \notin B_\gamma$ thì $|x| = q^{\gamma'} > q^\gamma$, do đó

$$Mf(x) \geq \frac{1}{q^{d\gamma'}} \int\limits_{x + B'_\gamma} |f(y)| dy \geq \frac{|E|}{|x|^d}.$$

Vậy

$$Mf(x) \geq \frac{|E|}{\max\{q^{\gamma d}, |x|^d\}} \geq \frac{1}{1 + |x|^d} \cdot \frac{|E|}{q^{\gamma d}} \qquad (\forall x \in \mathbb{K}^d).$$

Suy ra

$$\int\limits_{\mathbb{K}^d} |Mf|^\ell v dx \geq \left(\frac{|E|}{q^{d\gamma}}\right)^\ell \int\limits_{\mathbb{K}^d} \frac{v(x)}{(1+|x|^d)^\ell}\, dx. \tag{3.4}$$

Do $f \in L^\ell(u)$, nên từ các bất đẳng thức (3.3) và (3.4) ta nhận được v thuộc lớp $\mathcal{W}_\ell$.

Đảo lại, giả sử v là một hàm thuộc lớp $\mathcal{W}_\ell$. Kí hiệu $v_1(x) = \max\{v(x), 1\}$. Khi đó v_1 cũng là hàm thuộc lớp $\mathcal{W}_\ell$. Vì $v \leq v_1$, nên ta chỉ cần chứng minh rằng tồn tại một hàm u đo được không âm, hữu hạn hầu khắp nơi và một hằng số $C = C(\ell, q, d) > 0$ sao cho

$$\int\limits_{\mathbb{K}^d} |Mf|^\ell v_1 dx \leq C \int\limits_{\mathbb{K}^d} |f|^\ell u dx \tag{3.5}$$

với mọi $f \in L^\ell(u)$.

Đặt $w(x) = (1+|x|^d)^{1-\ell}$. Ta sẽ chứng minh rằng $M(wv_1) < \infty$ hữu hạn hầu khắp nơi. Lấy $x \in \mathbb{K}^d$ tùy ý, thì ta có thể chọn một số nguyên không âm γ_0 sao cho $x \in B_{\gamma_0}$. Với mọi $\gamma \in \mathbb{Z}$, ta xét hai trường hợp sau đây :

∘ Nếu $\gamma \geq \gamma_0$ thì

$$\frac{1}{q^{d\gamma}} \int\limits_{x+B_\gamma} wv_1 dy \leq \frac{1}{q^{d\gamma}} \int\limits_{x+B_\gamma} \frac{v_1(y)}{(1+|y|^d)^{\ell-1}} dy \leq \frac{1+q^{d\gamma}}{q^{d\gamma}} \int\limits_{x+B_\gamma} \frac{v_1(y)}{(1+|y|^d)^\ell} dy$$

$$\leq 2 \int\limits_{\mathbb{K}^d} \frac{v_1(y)}{(1+|y|^d)^\ell} dy < +\infty.$$

∘ Nếu $\gamma < \gamma_0$ thì

$$\frac{1}{q^{d\gamma}} \int\limits_{x+B_\gamma} wv_1 dy \leq \frac{1}{q^{d\gamma}} \int\limits_{x+B_\gamma} \frac{v_1(y)}{(1+|y|^d)^{\ell-1}} dy \leq \frac{1}{q^{d\gamma}} \int\limits_{x+B_\gamma} v_1(y) \cdot \chi_{B_{\gamma_0}} dy$$

$$\le M(v_1 \chi_{B_{\gamma_0}})(x).$$

Do M là loại yếu $(1,1)$ nên $M(v_1 \chi_{B_{\gamma_0}})(x) < \infty$ hầu khắp nơi đối với x.

Tóm lại với hầu khắp nơi $x \in \mathbb{K}^d$ thì

$$M(wv_1)(x) \le \max \left\{ 2 \int\limits_{\mathbb{K}^d} \frac{v_1(y)}{(1+|y|^d)^\ell} dy,\ M(v_1 \chi_{B_{\gamma_0}})(x) \right\} < +\infty.$$

Bây giờ ta đặt $u = w^{-3} \cdot M(wv_1) \cdot \chi_{(B_{-1})^c} + |x|^{2d(1-\ell)} \cdot M(wv_1) \cdot \chi_{B_{-1}}$. Ở đây $B_{-1} = \{x \in \mathbb{K}^d :\ |x| \le q^{-1}\}$ và $(B_{-1})^c$ là phần bù của B_{-1} trong $\mathbb{K}^d$. Hàm u xác định như trên hiển nhiên là đo được, không âm, hữu hạn hầu khắp nơi trong $\mathbb{K}^d$. Với mỗi số nguyên γ ta kí hiệu $f_\gamma = f \cdot \chi_{S_\gamma}$ nếu $\gamma \ge 0$ và $f_{-1} = f \cdot \chi_{B_{-1}}$. Theo bất đẳng thức đối ngẫu Fefferman-Stein (3.1), ta có

$$\int\limits_{|x| \le q^\gamma} |Mf_\gamma|^\ell v_1 dx = \int\limits_{|x| \le q^\gamma} |Mf_\gamma|^\ell \cdot (wv_1) \cdot (1+|x|^d)^{\ell-1}$$

$$\le C \cdot \left(1+q^{d\gamma}\right)^{\ell-1} \cdot \int\limits_{\mathbb{K}^d} |f_\gamma|^\ell M(wv_1) dx.$$

Để tiếp tục ước lượng, ta chia ra hai trường hợp sau

Trường hợp 1. Nếu $\gamma \ge 0$, thì

$$\int\limits_{|x| \le q^\gamma} |Mf_\gamma|^\ell v_1 dx \le C \cdot \left(1+q^{d\gamma}\right)^{\ell-1} \cdot \int\limits_{\mathbb{K}^d} |f_\gamma|^\ell u (1+|x|^d)^{3(1-\ell)} dx$$

$$\le C \cdot \left(1+q^{d\gamma}\right)^{2(1-\ell)} \cdot \int\limits_{S_\gamma} |f|^\ell u dx$$

$$\le C \cdot q^{2d\gamma(1-\ell)} \cdot \int\limits_{S_\gamma} |f|^\ell u dx = C q^{-2d|\gamma|(\ell-1)} \cdot \int\limits_{S_\gamma} |f|^\ell u dx.$$

Trường hợp 2. Nếu $\gamma = -1$, thì

$$\int\limits_{|x|\le q^\gamma} |Mf_\gamma|^\ell v_1 dx \le C \cdot \left(1+q^{d\gamma}\right)^{\ell-1} \cdot \int\limits_{B_{-1}} |f|^\ell u \cdot |x|^{2d(\ell-1)} dx$$

$$\le Cq^{-2d(\ell-1)} \int_{\mathbb{K}^d} |f|^\ell u dx = Cq^{-2d|\gamma|(\ell-1)} \int_{\mathbb{K}^d} |f|^\ell u dx.$$

Như vậy ta vừa chứng minh được rằng với mọi số nguyên $\gamma \ge -1$, thì

$$\int\limits_{|x|\le q^\gamma} |Mf_\gamma|^\ell v_1 dx \le Cq^{-2d|\gamma|(\ell-1)} \int_{\mathbb{K}^d} |f|^\ell u dx. \tag{3.6}$$

Tiếp theo, giả sử γ' là một số nguyên và $x \in \mathbb{K}^d$ mà $|x| \ge q^{\gamma+1}$ tùy ý. Kí hiệu $S' = S_\gamma$ nếu $\gamma \ge 0$, và $S' = B_{-1}$ nếu $\gamma = -1$. Khi đó, mỗi $y \in x + B_{\gamma'} \cap S'$, ta có

$$q^{\gamma'} \ge |x-y| \ge |x| - q^\gamma \ge \left(1 - \frac{1}{q}\right)|x|.$$

Theo bất đẳng thức Hölder's

$$Mf_\gamma(x) = \sup_{\gamma'\in\mathbb{Z}} \frac{1}{q^{d\gamma'}} \int\limits_{x+B_{\gamma'}} |f_\gamma(y)|dy \le \left(\frac{q}{q-1}\right)^d \cdot \frac{1}{|x|^d} \cdot \sup_{\gamma'\in\mathbb{Z}} \int\limits_{(x+B_{\gamma'})\cap S_\gamma} |f(y)|dy$$

$$\le \left(\frac{q}{q-1}\right)^d \cdot \frac{1}{|x|^d} \cdot \int\limits_{S_\gamma} |f(y)|dy \le \frac{C}{|x|^d} \cdot \left(\int\limits_{S_\gamma} |f|^\ell u dx\right)^{1/\ell} \cdot \left(\int_{S_\gamma} u^{-\frac{1}{\ell-1}} dx\right)^{1-\frac{1}{\ell}}$$

với mọi $\gamma \ge 0$. Trường hợp $\gamma = -1$, trong bất đẳng thức trên ta thay S_γ bởi B_{-1}.

Do đó

$$\int_{|x|\ge q^{\gamma+1}} |Mf_\gamma|^\ell v_1 dx \le C \int\limits_{S_\gamma} |f|^\ell u dx \cdot \left(\int_{S_\gamma} u^{-\frac{1}{\ell-1}}\right)^{\ell-1} \cdot \int\limits_{|x|\ge q^{\gamma+1}} \frac{v_1(x)}{|x|^{d\ell}} dx.$$

với $\gamma \geq 0$ và với $\gamma = -1$ thì ta thay thế S_γ bởi B_{-1}. Vì $\gamma \geq -1$ nên $\{|x| \geq q^{\gamma+1}\}$ nằm trong $(B_{-1})^c = S_0 \bigcup (B_0)^c$. Do v_1 thuộc lớp $\mathcal{W}_\ell$, nên theo bổ đề 3.2.1, biểu thức $\int\limits_{|x|\geq q^{\gamma+1}} \frac{v_1(x)}{|x|^{d\ell}}dx$ là bị chặn bởi một hằng số C, ở đó C chỉ phụ thuộc vào ℓ, q, d.

Bây giờ ta sẽ đi ước lượng các số hạng

$$\left(\int_{S_\gamma} u^{-\frac{1}{\ell-1}}dx\right)^{\ell-1} \quad \text{với} \quad \gamma \geq 0 \quad \text{và} \left(\int_{B_{-1}} u^{-\frac{1}{\ell-1}}dx\right)^{\ell-1} \quad \text{với } \gamma = -1.$$

Đầu tiên, chú ý rằng từ $y \in S_\gamma \bigcup B_{-1}$ và từ $v_1(z) \geq 1$ với mọi z, ta nhận được

$$\begin{aligned} M(wv_1)(y) &= \sup_{\gamma'\in\mathbb{Z}} \frac{1}{q^{d\gamma'}} \int\limits_{y+B_{\gamma'}} \frac{v_1(z)dz}{(1+|z|^d)^{\ell-1}} \\ &\geq \frac{1}{q^{d\gamma}} \int\limits_{B_\gamma} \frac{v_1(z)dz}{(1+|z|^d)^{\ell-1}} \geq \frac{1}{(1+q^{d\gamma})^{\ell-1}}. \end{aligned}$$

Do đó

$$M(wv_1)(y)^{-\frac{1}{\ell-1}} \leq 1 + q^{d\gamma} \qquad \text{với mọi } y \in S_\gamma \text{ và } \gamma \geq 0$$

và với mọi $y \in B_{-1}$ đồng thời $\gamma = -1$.

Từ định nghĩa của hàm u, ta xét hai trường hợp sau đây :

Trường hợp 1. Nếu $\gamma \geq 0$, thì

$$\begin{aligned} \left(\int\limits_{S_\gamma} u^{-\frac{1}{\ell-1}}\, dx\right)^{\ell-1} &\leq \left(1+q^{d\gamma}\right)^{\ell-1} \left(\int\limits_{S_\gamma} \left(1+q^{d\gamma}\right)^{-3} dx\right)^{\ell-1} \\ &= \left(1+q^{d\gamma}\right)^{2(1-\ell)} q^{d\gamma(\ell-1)} \left(1-\frac{1}{q^d}\right)^{\ell-1} \leq Cq^{d\gamma(1-\ell)}. \end{aligned}$$

Trường hợp 2. Nếu $\gamma = -1$, thì

$$\left(\int\limits_{B_{-1}} u^{-\frac{1}{\ell-1}}\, dx\right)^{\ell-1} \le \left(1+q^{-d}\right)^{\ell-1} \left(\int\limits_{B_{-1}} |y|^{2d} dy\right)^{\ell-1} \le Cq^{-d(\ell-1)},$$

ở đây ta chú ý rằng

$$\int\limits_{B_{-1}} |y|^{2d} dy = \sum_{\gamma\le -1} \int\limits_{S_\gamma} |y|^{2d} dy = \left(1-\frac{1}{q^d}\right) \sum_{\gamma\ge 1} \frac{1}{q^{3d\gamma}} < \infty.$$

Vậy ta đã chứng minh được rằng với mọi số nguyên $\gamma \ge -1$ thì

$$\int_{|x|\ge q^{\gamma+1}} |Mf_\gamma|^\ell v_1 dx \le Cq^{-d|\gamma|(\ell-1)} \int\limits_{\mathbb{K}^d} |f|^\ell u dx \tag{3.7}$$

Các bất đẳng thức (3.6) và (3.7) cho ta

$$\int\limits_{\mathbb{K}^d} |Mf_\gamma|^\ell v_1 dx \le Cq^{-d|\gamma|(\ell-1)} \int\limits_{\mathbb{K}^d} |f|^\ell u dx. \tag{3.8}$$

Theo bất đẳng thức Minkowski

$$\left(\int_{\mathbb{K}^d} |Mf|^\ell v_1 dx\right)^{1/\ell} \le \sum_{\gamma=-1}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{K}^d} |Mf_\gamma|^\ell v_1 dx\right)^{1/\ell}$$

$$\le C\left(\sum_{\gamma=-1}^{\infty} q^{-d|\gamma|(\ell-1)/\ell}\right)\cdot \int_{\mathbb{K}^d} |f|^\ell u dx \le C\int_{\mathbb{K}^d} |f|^\ell u dx.$$

Vậy (3.5) được chứng minh và do đó định lý được chứng minh hoàn toàn.

□

Nhận xét 3.2.5. *Trường hợp* $\mathbb{R}^d$, *nếu kí hiệu* $w(x) = (1+|x|^d)^{1-\ell}$ *và* $v_1 = \max\{v,1\}$ *thì hàm* u *mà Wo-Sang Young [49] sử dụng là* $u = w^{-3}M(wv_1)$. *Trong khi đó, nhóm tác giả Angel E. Gatto và Cristian E. Gutiérrez sử dụng hàm* $u(x) = \mathcal{M}_0 v + (1+|x|)^a$ *trong đó* $a > d(\ell-1)$ *và* $\mathcal{M}_0 v(x) =$

$\sup\limits_{\substack{x\in B_r \\ r<|x|+1}} \dfrac{1}{|B_r|}\int\limits_{B_r}|v(t)|dt$, *với* B_r *là hình cầu tâm* 0*, bán kính* r*. Như đã trình bày trong phần mở đầu của chương, hai hàm* u *nói trên không sử dụng được trong trường địa phương.*

Từ định lý trên ta có ngay một hệ quả về các hàm trọng Muckenhoupt. Hệ quả này là một dạng tương tự của một định lý đã biết của Hunt, Muckenhoupt và Wheenden trong trường hợp Euclid (xem bổ đề 1 trong [27]).

Hệ quả 3.2.6. *Giả sử rằng* ℓ *là một số thực mà* $1 < \ell < \infty$ *và* ω *là một hàm thuộc lớp* $\mathcal{A}_\ell$*. Khi đó* ω *cũng thuộc lớp* $\mathcal{W}_\ell$*.*

Chứng minh. Nếu ω là hàm thuộc lớp $\mathcal{A}_\ell$ thì theo định lý 2.2.9, toán tử M bị chặn từ $L^\ell(\omega)$ vào $L^\ell(\omega)$. Do đó, ta có thể chọn $u = \omega$ để (3.3) được thỏa mãn. Vậy theo định lý 3.2.4 thì ω thuộc vào lớp $\mathcal{W}_\ell$. $\square$

Kết luận của chương 3.

Trong chương 3, chúng tôi xây dựng lớp hàm trọng $\mathcal{W}_\ell$ và chứng minh được rằng mỗi hàm trọng v thuộc $\mathcal{W}_\ell$, điều kiện cần và đủ là tồn tại hàm không âm, hữu hạn hầu khắp nơi u sao cho M bị chặn từ $L^\ell(u)$ vào $L^\ell(v)$. Do đó bài toán đặc trưng trọng của Muckenhoupt trên trường địa phương được giải quyết trọn vẹn. Từ đó nhận được một kết quả tương tự trên trường hợp Euclid của Hunt, Muckenhoupt và Wheenden.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

Những kết quả chính của Luận án

1. Xây dựng được lớp các hàm trọng Muckenhoupt trên trường địa phương. Qua đó giải quyết được bài toán về tìm điều kiện cần và đủ của hàm trọng để toán tử Hardy-Littlewood M và dạng véctơ của nó là loại yếu và mạnh (ℓ, ℓ) với $1 \leq \ell < \infty$.

2. Đưa ra một điều kiện cần và một điều kiện đủ cho cặp hàm trọng (u, v) để toán tử cực đại Hardy-Littlewood M thỏa mãn bất đẳng thức trọng chuẩn loại yếu ngược. Chúng tôi ứng dụng kết quả đó vào lớp hàm $L \log^+ L$ với trọng của Zygmund để nhận được một điều kiện cần cho tính khả tích của hàm cực đại Hardy-Littlewood.

3. Chúng tôi đưa ra một lớp toán tử tích phân cực đại mới trên trường địa phương và chứng minh được rằng nếu toán tử đó là xác định như là một toán tử loại mạnh (ℓ, ℓ), với $1 < \ell < \infty$ nào đó, thì toán tử đó là loại yếu $(1, 1)$. Một cận yếu của toán tử này cũng được chúng tôi chỉ ra.

4. Giải quyết trọn vẹn một bài toán trọng Muckenhoupt trên trường địa phương. Chúng tôi đưa ra một lớp hàm trọng mới $\mathcal{W}_\ell$ và chứng minh được rằng: điều kiện cần và đủ để $v \in \mathcal{W}_\ell$ là tồn tại một hàm đo được không âm, hữu hạn hầu khắp nơi u sao cho M bị chặn từ $L^\ell(u)$ vào $L^\ell(v)$.

Các kết quả nhận được là mới, có ý nghĩa khoa học và nằm trong vấn đề đang được nhiều nhà toán học trên thế giới và trong nước quan tâm nghiên cứu.

Những vấn đề cần tiếp tục nghiên cứu

Tiếp theo các kết quả của luận án, tác giả thấy có một số vấn đề cần được nghiên cứu là

- Nghiên cứu bài toán đặc trưng trọng của Muckenhoupt cho trường hợp toán tử cực đại Hardy-Littlewood dạng véctơ.
- Nghiên cứu bài toán đặc trưng trọng để các toán tử tích phân kì dị, tích phân dao động là bị chặn trong các không gian hàm thông thường như không gian các hàm khả tích bậc ℓ, với $1 < \ell < \infty$. Về hướng nghiên cứu này, các toán tử tích phân kì dị loại Calderón-Zygmund trên trường địa phương đã có nhiều công trình được công bố. Tuy nhiên, bài toán đặc trưng trọng cho các toán tử tích phân kì dị loại này vẫn chưa có nhiều kết quả nghiên cứu.

Danh mục công trình công bố

1. NGUYỄN MINH CHƯƠNG, HÀ DUY HƯNG (2010), *Maximal functions and weighted norm inequalities on Local Fields*, Applied and Computational Harmonic Analysis, **29**, 272-286.

2. NGUYỄN MINH CHƯƠNG, HÀ DUY HƯNG (2010), *A Muckenhoupt's weight problem and vector valued maximal inequalities over local fields*, $p-$adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications, **2**, No.4, 305-321.

Các kết quả của luận án đã được báo cáo tại

- Xemina Phòng phương trình vi phân - Viện Toán học.

- Xemina "*Toán tử giả vi phân, sóng nhỏ trên các trường thực, p−adic*" của Viện toán học.

- Hội nghị nghiên cứu sinh các năm 2008, 2009, 2010 của Viện Toán học.

Tài liệu tham khảo

Tiếng Việt

[1] Nguyễn Minh Chương, Hà Tiến Ngoạn, Nguyễn Minh Trí, Lê Quang Trung (2000), *Phương trình đạo hàm riêng*, NXB Giáo Dục, Hà Nội.

[2] Nguyễn Văn Cơ (2009), *Một số lớp phương trình giả vi phân $p-$adic*, Luận án Tiến sỹ Toán học.

[3] Nguyễn Mạnh Hùng (2006), *Phương trình đạo hàm riêng*, phần I, II, NXB Đại học Sư Phạm.

[4] Hà Huy Khoái, Phạm Huy Điển (2003), *Số học thuật toán*, NXB Đại học Quốc Gia Hà Nội, Hà Nội.

[5] Hoàng Tụy (2003), *Hàm thực và Giải tích hàm*, NXB Đại học Quốc Gia Hà Nội, Hà Nội.

[6] Trần Đức Vân (2004), *Lý thuyết phương trình đạo hàm riêng*, NXB Đại học Quốc Gia Hà Nội, Hà Nội.

Tiếng Anh

[7] Kenneth F. Andersen and Russel T. John (1980/1981), *Weighted inequalities for vector-valued maximal functions and singular integrals*, Studia Math. **69**, 19-31.

[8] Kenneth F. Andersen and Wo-Sang Young (1984), *On the reverse weak type inequality for the Hardy-Littlewood maximal function and the weight classes* $L(\log L)^k$, Pacific Jour. Math. Vol. **112**, No.2, 257-264.

[9] A. Benedek, A. P. Calderón and R. Panzone (1962), *Convolution operators on Banach space valued functions*, Proc. Nat. Acad. Sc. USA. **48**, 356-365.

[10] A. Benedek, R. Panzone (1961), *The spaces* L^p *with mixed norm*, Duke Math. Jour. **28**, 301-324.

[11] J. Bourgain, H. Brezis, and P. Mironescu (2001), *Another look at Sobolev spaces*, Optimal Control and Partial Differential Equations (J. L. Menaldi, E. Rofman and A. Sulem, eds) a volume in honour of A.Bensoussan's 60th birthday, 439-455.

[12] Jia-Arng Chao (1975), *Maximal singular integral transforms on local fields*, Proc. AMS., **50**, No. 1, 297-302.

[13] Nguyen Minh Chuong, Yu V. Egorov, A. Khrennikov, Y. Meyer, D. Mumford (2007), **Harmonic, wavelet and p-adic analysis**, World Scientific.

[14] Nguyen Minh Chuong, P. G. Ciarlet, P. Lax, D. Mumford, D. H. Phong (2007), **Advances in deterministic and stochastic analysis**, World Scientific.

[15] Nguyen Minh Chuong and Nguyen Van Co (1999), *The multidimensional p-adic Green function*, Proc. AMS. **127**, No. 3, 685-694.

[16] Nguyen Minh Chuong and Nguyen Van Co (2008), *The Cauchy problem for a class of pseudodifferential equations over p-adic field,* Jour. Math. Anal. Appl. **340**, No. 1, 629-643.

[17] Nguyen Minh Chuong and Bui Kien Cuong (2004), *Convergence estimates of Galerkin-wavelet solutions to a Cauchy problem for a class of pseudodifferential equations*, Proc. AMS. **132**, 3589-3597.

[18] Nguyen Minh Chuong (1982), *Parabolic pseudodifferential operators of variable order in S.L. Sobolev spaces with weighted norms*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **262**, No. 4, 804-807.

[19] Nguyen Minh Chuong (1983), *Degenerate parabolic pseudodifferential operators of variable order in S.L. Sobolev spaces with weighted norms,* Dokl. Akad. Nauk SSSR **268**, No. 5, 1055-1058.

[20] J. L. Rubio de Francia (1981), *Boundedness of maximal functions and singular integrals in weighted L^p spaces*, Proc. AMS. **83**, 673-679.

[21] Chales Fefferman and Elias M. Stein (1971), *Some maximal inequalities*, Amer. Jour. Math., **93**, No. 1, 107-115.

[22] Loukas Grafakos (2008), **Classical Fourier Analysis**, Second Edition, Springer.

[23] Loukas Grafakos, Liguang Liu and Dachun Yang (2009), *Vector-valued singular integrals and maximal functions on spaces of homogeneous type*, Mathematica Scandinavica, **104**, No. 2, 296-310.

[24] Angel E. Gatto and Cristian E. Gutiérrez (1983), *On weighted norm inequalities for the maximal function*, Studia Math. **83**, 59-62.

[25] Paul R. Halmos (1974), **Measure Theory**, Springer-Velarg.

[26] Edwin Hewitt and Keneth A. Ross(1979), **Abstract Harmonic Analysis**, Volume I, Second Edition,Springer-Velarg.

[27] R. A. Hunt, B. Muckenhoupt and R. Wheeden (1973), *Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform*, Trans. AMS. **176**, 227-251.

[28] Kenkichi Iwasawa (1986), **Local Class Field Theory**, Oxford University Press, New York.

[29] A. Yu. Khrennikov (1997), **Non-Archimedean analysis : quantum paradoxes, dynamical systems, and biological models**, Kluwer Academic Publishers, Dordretch/Boston/London.

[30] A. Yu. Khrennikov, S.V. Kozyrev (2005), *Pseudodifferential operators on ultrametric space and ultrametric wavelets*, English translation in Izvestia Mathematics **69**, 989-1003.

[31] A. Yu. Khrennikov, S. V. Kozyrev (2005), *Wavelets on ultrametric spaces*, Appl. Comput. Harmon. Anal., **19**, 61-67.

[32] A. Yu. Khrennikov, V. M. Shelkovich(2010), *Non-Haar $p-$adic wavelets and their application to pseudo-differential operators and equations*, Appl. Comput. Harmon. Anal., **28**, 1-23.

[33] S. Albeverio, A. Yu. Khrennikov, V. Shelkovich, **Theory of $p-$adic distributions: linear and nonlinear models**, Oxford University Press, Oxford.

[34] Yong-Cheol Kim (2009), *Carleson measures and the BMO space on the $p-$adic vector space*, Math. Narchr., **282**, No.9, 1278-1304.

[35] Neal Koblitz (1984), **$p-$adic numbers, $p-$adic analysis, and Zeta functions**, Springer-Verlag, New York.

[36] A. N. Kochubei (2001), **Pseudodifferential equations and stochastics over non-Archimedean fields**, Marcel Dekker, Inc. New York-Basel.

[37] Benjamin Muckenhoupt (1979), *Weighted norm inequalities for classical operators*, Proc. of Symposia in Pure Math., XXXV, part 1, 68-83.

[38] Jürgen Neukirch (1999), **Algebraic Number Theory**, Springer

[39] Keith Phillips (1967), *Hilbert transforms for the $p-$adic and $p-$series fields*, Pacific J. Math. **23**, 329-347.

[40] Keith Phillips and Mitchell Taibleson(1969), *Singular integrals in several variables over a local field*, Pacific J. Math. **30**, 209-231.

[41] Alain M. Robert (2000), **A course in $p-$adic Analysis**, Springer.

[42] Keith M. Rogers (2004), *Maximal averages along curves over the $p-$adic numbers*, Bull. Austral. Math. Soc. **70**, 357-375.

[43] Keith M. Rogers (2005), *A van der Corput Lemma for the $p-$adic numbers*, Proc. AMS. **133**, No.12, 3525-2534.

[44] Elias M. Stein (1970), **Singular integrals and the differentiability properties of functions**, Princeton University Press.

[45] Elias M. Stein (1993), **Harmonic analysis, real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals,** Princeton University Press.

[46] Elias M. Stein and J.-O. Strómberg (1983), *Behavior of maximal functions in $\mathbb{R}^n$ for large n*, Arkiv för Matematik, **21**, No.1-2, 259-269.

[47] Mitchell Taibleson (1975), **Fourier analysis on local fields**, Princeton University Press.

[48] V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, and E. I. Zelenov(1994), ***p*-Adic analysis and mathematical physics**, World Scientific.

[49] Wo-Sang Young (1982), *Weighted norm inequalities for the Hardy-Littlewood maximal function*, Proc. AMS. **85**, No. 1, 24-26.

[50] André Weil (1995), **Basic Number Theory**, Springer.

[51] Weiyi Su and Hua Qiu (2008), *$p-$Adic Calculus and its Applications to Fractal Analysis and Medical Science*, FACTA UNIVERSITATIS (NIŠ), SER. ELEC. ENERG., **21**, No. 3, December 2008, 339-347.