VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

VIỆN TOÁN HỌC

TRẦN VĂN THẮNG

ĐỐI NGẪU LIÊN HỢP CHO BÀI TOÁN TỐI ƯU ĐA MỤC TIÊU VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: Toán Ứng dụng

Mã số: 62 46 01 12

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HÀ NỘI-NĂM 2014

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

VIỆN TOÁN HỌC

TRẦN VĂN THẮNG

ĐỐI NGẪU LIÊN HỢP CHO BÀI TOÁN TỐI ƯU ĐA MỤC TIÊU VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: Toán Ứng dụng

Mã số: 62 46 01 12

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

1. **TS. Phan Thiên Thạch**
2. **GS. Hoàng Tụy**

HÀ NỘI-NĂM 2014

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi. Các kết quả này được thực hiện dưới sự hướng dẫn của TS. Phan Thiên Thạch và GS. Hoàng Tụy. Các kết quả trong luận án viết chung với các thầy hướng dẫn đều đã được sự nhất trí của các thầy khi đưa vào luận án. Các số liệu, kết quả nêu trong luận án là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất cứ công trình nào khác.

Tác giả

Trần Văn Thắng

LỜI CẢM ƠN

Luận án được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình, chu đáo, đầy trách nhiệm của TS. Phan Thiên Thạch và GS. Hoàng Tụy.

Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy Phan Thiên Thạch về công lao Thầy đã tận tình hướng dẫn trong suốt thời gian tác giả làm việc với Thầy.

Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy Hoàng Tụy, người đã tiếp tục tận tình công việc hướng dẫn và giúp đỡ tác giả sau khi thầy Phan Thiên Thạch bị ốm nặng.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn PGS. TS. Trương Xuân Đức Hà, GS. TSKH. Vũ Ngọc Phát, GS. TSKH. Lê Dũng Mưu, PGS. TS. Bùi Thế Tâm, GS. TSKH. Nguyễn Đông Yên, những người đã luôn tận tình giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình học Cao học và làm nghiên cứu sinh.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban lãnh đạo Viện Toán học, Trung tâm Đào tạo Sau đại học và tập thể cán bộ công nhân viên của Viện Toán học đã tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tác giả trong thời gian học Cao học và làm nghiên cứu sinh.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban hiệu trưởng trường Đại học Điện lực, Ban lãnh đạo Sở Giáo dục và Đào tạo Bắc Giang, trường THPT Bố Hạ, Yên Thế, Bắc Giang, các thầy cô và đồng nghiệp ở trong trường THPT Bố Hạ và Khoa Khoa học cơ bản trường Đại học Điện lực.

Xin cám ơn gia đình, các bạn nghiên cứu sinh và bạn bè về sự khuyến khích, giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập và nghiên cứu.

TÓM TẮT

Luận án này trình bày một số kết quả về đối ngẫu liên hợp cho các bài toán tối ưu vô hướng và tối ưu đa mục tiêu và áp dụng các kết quả đối ngẫu này để nghiên cứu một số bài toán trong kinh tế. Luận án bao gồm 3 chương.

Trong Chương 1, chúng tôi nghiên cứu các điều kiện đặc trưng cho lớp hàm thỏa mãn tính phản xạ và đóng kín qua phép biến đổi tựa liên hợp, đưa ra khái niệm tựa dưới vi phân và chứng minh một số tính chất của tựa dưới vi phân.

Trong Chương 2, chúng tôi trình bày lý thuyết đối ngẫu liên hợp cho các bài toán tối ưu vô hướng và tối ưu đa mục tiêu.

Trong Chương 3, chúng tôi ứng dụng sơ đồ đối ngẫu liên hợp để nghiên cứu một số bài toán trong kinh tế như sau: bài toán với một ràng buộc phân bố nguồn lực, bài toán với nhiều ràng buộc phân bố nguồn lực và bài toán tối ưu không lồi với các ràng buộc phân bố nguồn lực.

ABSTRACT

This thesis is devoted to the study of conjugate duality in scalar and multiobjective optimization problems. The obtained results are applied to study some optimization problems in economy.

The thesis consists of three chapters.

In Chapter 1 necessary and sufficient conditions are established for the reflexivity and closedness of the quasi-conjugate transformation. Also the concept of quasi-subgradient is introduced and some basic properties of quasi-subgradient are proved.

In Chapter 2 the conjugate duality for scalar and multiobjective optimization problems is studied.

In Chapter 3 we apply the conjugate duality scheme to production planning and optimization problems with one or multiple resource allocation constraints

Mục lục

Một số ký hiệu

$\mathbb{R}$	tập các số thực
$\mathbb{R}^+$	tập số thực không
$\mathbb{N}$	tập các số tự nhiên
$\mathbb{R}^n$	không gian Euclide $n-$chiều
$\mathbb{R}^n_+$	tập các véctơ không âm $n-$chiều
$\mathbb{R}^n_{++}$	tập các véctơ dương $n-$chiều
$a^T x$	tích vô hướng của hai véctơ trong $\mathbb{R}^n$
$\|x\|$	chuẩn của $x \in \mathbb{R}^n$
$\{x^n\}$	dãy số thực hay dãy véctơ
$N(x, X)$	nón véctơ pháp tuyến của tập X tại điểm x
$\nabla f(x)$	gradient của f tại x
$\partial f(x)$	dưới vi phân
$\partial^\natural f(x)$	tựa dưới vi phân
int$X$	phần trong của tập X
cl(X)	bao đóng của tập X
conv(X)	bao lồi của tập X
co(X)	bao nón lồi của tập X
$\bigoplus$	tổng trực tiếp
X_E	tập nghiệm hữu hiệu của bài toán tối ưu véctơ
argmax$\{f(x) : \ x \in X\}$	tập các điểm cực đại của hàm $f(x)$ trên tập X
$f^\natural$	hàm tựa liên hợp của f
$F : X \rightrightarrows Y$	ánh xạ đa trị từ X vào Y

Mở đầu

Theo G. Dantzig, lý thuyết đối ngẫu được phỏng đoán bởi J. V. Neumann trong lý thuyết trò chơi ngay sau khi G. Dantzig trình bày các vấn đề về quy hoạch tuyến tính ([18]). Năm 1951, một chứng minh đầy đủ về đối ngẫu cho bài toán quy hoạch tuyến tính đã được công bố lần đầu bởi A. W. Tucker và nhóm của ông ([6]). Từ đó lý thuyết đối ngẫu đã trở trành một chương quan trọng của lý thuyết tối ưu, cả về phương diện lý thuyết lẫn tính toán và ứng dụng thực tế và thu hút nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu, trong đó đáng chú ý là các công trình của A. W. Tucker ([6], [9]), R. T. Rockafellar ([15]), Y. Sawaragi ([17], [20]) và ở Việt Nam là các công trình của các tác giả Hoàng Tụy ([3]), Phạm Hữu Sách ([16]), Đinh Thế Lục ([10]), Phan Thiên Thạch ([21]-[27]), Vũ Ngọc Phát ([14]), Nguyễn Định ([5]), ... Ban đầu lý thuyết đối ngẫu được xây dựng cho các bài toán tối ưu tuyến tính bởi A. W. Tucker và nhóm của ông, sau đó các nhà toán học đã mở rộng cho trường hợp phi tuyến, tối ưu đa mục tiêu và cả trong tối ưu đa trị. Lý thuyết đối ngẫu được đưa ra thực sự có ý nghĩa và có nhiều ứng dụng khi nó đảm bảo được đối ngẫu mạnh. Tuy nhiên, trong trường hợp tổng quát việc có được đối ngẫu mạnh là rất khó khăn. Cho đến nay các nhà toán học mới chỉ đưa ra được đối ngẫu mạnh cho một số lớp các bài toán thỏa mãn một số điều kiện nào đó. Đã có nhiều kết quả quan trọng về đối ngẫu cho các bài toán tối ưu, các kết quả này chủ yếu có được dựa trên lý thuyết đối ngẫu Lagrange và đối ngẫu liên hợp dựa vào các phép biến đổi liên hợp như phép biến đổi liên hợp Fenchel, phép biến đổi tựa liên hợp và một số phép biến đổi liên hợp khác.

Với bài toán tối ưu vô hướng, các nhà toán học đã thu được đối ngẫu mạnh cho lớp các bài toán tối ưu lồi bởi đối ngẫu Lagrange hay đối ngẫu Fenchel như các kết của các tác giả: R. T. Rockafellar ([15]), H.W. Kuhn và A. W. Tucker ([9]), Hoàng Tụy ([3]). Trong trường hợp bài toán tối ưu không lồi, một số kết quả hay được nói đến là của P. T. Thach ([21], [22], [23]), [24]).

Với bài toán tối ưu đa mục tiêu, việc thu được đối ngẫu mạnh trở nên khó khăn hơn. Cho đến nay các phương pháp chủ yếu là dựa trên lý thuyết đối ngẫu Lagrange và đối ngẫu Fenchel bằng cách vô hướng hóa hàm mục tiêu hay nhúng bài toán ban đầu vào trong lớp các bài toán tối ưu được nhiễu bởi các tham số. Các bài toán đối ngẫu được xây dựng bởi các phương pháp trên thường là bài toán tối ưu vô hướng hay tối ưu đa trị, do đó sơ đồ đối ngẫu thu được thường là không đối xứng ([8], [17]). Ngoài ra, trong nhiều kết quả để có đối ngẫu mạnh thì bài toán ban đầu phải là bài toán tối ưu lồi ([17], [19], [20]).

Trong lý thuyết đối ngẫu liên hợp, bài toán đối ngẫu của một bài toán gốc trong không gian X:

$$\max(\min)\{f(x)| \ \ A \subset X\}$$

được xây dựng trong không gian đối ngẫu X^*:

$$\max(\min)\{g(p)| \ \ A^* \subset X^*\},$$

trong đó g là hàm liên hợp của f và A^* là tập liên hợp của A sao cho hai bài toán liên quan chặt chẽ với nhau, thể hiện qua việc nghiên cứu bài toán đối ngẫu sẽ cung cấp thông tin về bài toán gốc hay để giúp cho việc giải bài toán gốc dễ dàng hơn trong trường hợp tốt nhất. Hiện nay, đối ngẫu liên hợp Fenchel được sử dụng một cách rộng rãi và phổ biến trong tối ưu lồi. Đối với lớp các bài toán tổng quát hơn, một số kết quả được kể ra ở đây là của Phan Thiên Thạch, tác giả đã đưa ra đối ngẫu mạnh cho lớp các bài toán tựa lồi dựa trên phép biến đổi tựa liên hợp của hàm $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ được xác định bởi:

$$f^H(p) = \begin{cases} -\inf\{f(x) :\ p^T x \geq 1\} & \text{nếu } p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ -\sup\{f(x) :\ x \in \mathbb{R}^n\} & \text{nếu } p = 0. \end{cases}$$

Các kết quả này đã được công bố trong các công trình được nhiều người biết đến ([21], [22], [23], [24]) và được nhiều nhà toán học trích dẫn. Tiếp tục các nghiên cứu của mình về đối ngẫu liên hợp, năm 2003, Phan Thiên Thạch áp dụng phép biến đổi tựa liên hợp dạng

$$f^\natural(p) = \frac{1}{\sup\{f(x) :\ p^T x \leq 1, x \geq 0\}}$$

cho lớp các bài toán quy hoạch tuyến tính và chỉ ra rằng bài toán đối ngẫu của bài toán cực đại một hàm tuyến tính không giảm trên tập lồi trong $\mathbb{R}^n_+$ là bài toán sản xuất Leontief. Chú ý rằng, trong trường hợp tuyến tính, bài toán đối ngẫu được lập bởi lý thuyết đối ngẫu Lagrange hay đối ngẫu Fenchel là trùng nhau và cũng là bài toán quy hoạch tuyến tính. Kết quả khác biệt này giúp Phan Thiên Thạch chỉ ra các đặc trưng cho tính phi dư thừa trong bài toán sản xuất Leontief dựa trên mối liên hệ đối ngẫu giữa nguyên liệu sản xuất và giá nguyên liệu, chẳng hạn như sự tồn tại giá đặc trưng để đưa ràng buộc tài nguyên về ràng buộc đơn giản hơn về vốn sản xuất. Kết quả và ứng dụng của sơ đồ đối ngẫu này ứng với trường hợp tuyến tính đã được công bố trong [2] và [25]. Kết quả mở đầu này còn mở ra cho ta những ứng dụng rộng hơn.

Trong luận án này, chúng tôi trình bày một số kết quả mới khi nghiên cứu mở rộng sơ đồ đối ngẫu liên hợp dựa trên phép biến đổi tựa liên hợp đã được trình bày trong các bài báo [2] và [25] cho lớp các bài toán rộng hơn bao gồm các bài toán tối ưu vô hướng và tối ưu đa mục tiêu phi tuyến, đồng thời ứng dụng kết quả đối ngẫu đã đạt được vào nghiên cứu một số bài toán trong kinh tế. Luận án bao gồm 3 chương.

Chương 1 "Phép biến đổi tựa liên hợp" nghiên cứu các điều kiện đặc trưng cho lớp hàm thỏa mãn tính phản xạ và đóng kín qua phép biến đổi tựa liên hợp. Kết quả này giúp chúng ta thu được tính đối xứng của đối ngẫu cho cặp bài toán gốc-đối ngẫu sẽ được trình bày trong chương 2. Nhận thấy các hàm tuyến tính không giảm trên $\mathbb{R}^n_+$ và hàm sản xuất Leontief đều là những trường hợp riêng của lớp hàm đa diện lõm thuần nhất dương và đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^n$, chúng tôi đã chứng minh được rằng lớp hàm này thỏa mãn tính phản xạ, đóng kín qua phép biến đổi tựa liên hợp và đây là sự mở rộng gần nhất cho lớp hàm tuyến tính đã được xét trước đó. Một kết quả mở rộng hơn cũng được đưa ra khi chúng tôi chứng minh được rằng lớp các hàm nửa liên tục trên, tựa lõm và đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^n_+$ là lớp hàm tổng quát thỏa mãn tính phản xạ đối với phép biến đổi tựa liên hợp. Lớp các hàm này bao hàm phần lớn các hàm sản xuất trong các mô hình kinh tế, chẳng hạn như các hàm sản xuất Leontief, Cobb-Douglas, Leontief mở rộng, Cobb-Douglas mở rộng ([4], [7]), ... Chương này cũng đưa ra khái niệm tựa dưới vi phân và chứng minh một số tính chất của tựa dưới vi phân để phục vụ cho việc chứng minh các kết quả về đối ngẫu ở các chương sau.

Chương 2 "Đối ngẫu liên hợp cho các bài toán tối ưu" trình bày điều kiện cần và đủ tối ưu dưới dạng nguyên lý Fermat mở rộng cho bài toán tối ưu vô hướng. Từ những kết quả mới về phép biến đổi tựa liên hợp đã trình bày trong Chương 1, chúng tôi đưa ra sơ đồ đối ngẫu liên hợp cho lớp các bài toán tối ưu vô hướng và tối ưu đa mục tiêu với giả thiết mục tiêu là các hàm đa diện lõm, thuần nhất dương, đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^n_+$ và tổng quát hơn nữa khi xét với các hàm mục tiêu chỉ tựa lõm, liên tục và đơn điệu tăng chặt trên $\mathbb{R}^n_+$. Kết quả, chúng ta thu được đối ngẫu mạnh, đối xứng và bài toán đối ngẫu của bài toán tối ưu đa mục tiêu cũng là bài toán tối ưu đa mục tiêu. Ngoài ra, chúng tôi còn đưa ra được đẳng thức đối ngẫu giúp đặc trưng cho cặp nghiệm hữu hiệu của các bài toán tối ưu đa mục tiêu gốc và đối ngẫu.

Chương 3 "Ứng dụng" trình bày ứng dụng sơ đồ đối ngẫu liên hợp vào nghiên cứu một số bài toán sản xuất trong kinh tế. Nhờ đối ngẫu liên hợp chúng tôi chứng minh được bài toán tìm phương án sản xuất với một ràng buộc phân bố nguồn lực (bài toán giải hệ phi tuyến) tương đương với bài toán cực đại một hàm lõm chặt trên một đa diện lồi. Điều này giúp chỉ ra rằng bài toán với một ràng buộc phân bố nguồn lực có một nghiệm duy nhất và được giải bởi bài toán tối ưu lồi đơn giản hơn. Bài toán mở rộng tìm phương án sản xuất với k $(k > 1)$ ràng buộc phân bố nguồn lực tương đương với bài toán tối ưu đa mục tiêu với các mục tiêu là các hàm sản xuất Cobb-Douglas, kết quả này giúp chúng ta quy một lớp các bài toán tối ưu không lồi với các ràng buộc phân bố nguồn lực về bài toán tối ưu trên tập nghiệm hữu hiệu Pareto của một bài toán tối ưu đa mục tiêu. Bài toán được quy về đã được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu và có thể được giải bởi một số thuật toán đã biết ([11],[13], [22]). Bằng phương pháp tiếp cận như trong bài báo [27] của P. T. Thach, H. Konno và D. Yokota, chúng tôi quy bài toán tối ưu trên tập nghiệm hữu hiệu Pareto về bài toán cực đại hàm tựa lồi trên một tập lồi compắc trong $\mathbb{R}^k_+$ và do đó ta có thể giải bài toán này bằng phương pháp xấp xỉ ngoài ([27]). Với phương pháp tiếp cận khác, dựa trên quy hoạch hai cấp và lý thuyết tối ưu đơn điệu của H. Tuy ([33]), chúng tôi chỉ ra bài toán tối ưu với các ràng buộc phân bố nguồn lực tương đương với một bài toán cơ bản của tối ưu đơn điệu.

Các kết quả trong luận án đã được báo cáo và thảo luận tại:

- Hội nghị Tối ưu và Tính toán khoa học, Ba Vì, Hà Nội (2010).

- Hội nghị Tối ưu và Tính toán khoa học, Ba Vì, Hà Nội (2011).

- Đại hội Toán học toàn quốc, Nha Trang, Khánh Hòa (2013).

- Seminar của Phòng Tối ưu và Điều khiển, Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.

- Hội nghị nghiên cứu sinh hàng năm tại Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.

Các kết quả chính của luận án đã được công bố ở tạp chí Journal of Mathematical Analysis and Applications, tạp chí Journal of Global Optimization và một bài báo đã gửi đăng trên tạp chí Acta Mathematica Vietnamica.

Chương 1

Phép biến đổi tựa liên hợp

Ở chương này, sau một số kiến thức chuẩn bị, chúng tôi trình bày các kết quả đã đạt được về điều kiện để một hàm thỏa mãn tính phản xạ qua phép biến đổi tựa liên hợp và chứng minh một số tính chất của tựa dưới vi phân.

Mục 1.1 nhắc lại một số kiến thức cơ bản của Giải tích. Mục 1.2 đưa ra các điều kiện tổng quát để một hàm số thỏa mãn tính phản xạ. Khái niệm tựa dưới vi phân và một số tính chất của khái niệm này được trình bày trong mục 1.3.

Nội dung của Chương này dựa trên các kết quả về phép biến đổi tựa liên hợp, tựa dưới vi phân đã được công bố trên các bài báo [28] và [30].

1.1 Một số kiến thức chuẩn bị

Trong luận án này, với hai véctơ bất kỳ $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $x^{'} = (x^{'}_1, x^{'}_2, ..., x^{'}_n) \in \mathbb{R}^n$, ký hiệu $x \leq x^{'}$ $(x < x^{'})$ được hiểu là $x_i \leq x^{'}_i$ $(x_i < x^{'}_i)$ với mọi $i = 1, 2, ..., n$.

Cho X là một tập con trong không gian $\mathbb{R}^n$.

Định nghĩa 1.1.1. Cho X là tập lồi. Tập liên hợp dưới của X là

$$X^0 = \{p \in \mathbb{R}^n_+ |\ p^T x \leq 1\ \forall x \in X\}.$$

Tập liên hợp trên của X là

$$X^* = \{p \in \mathbb{R}^n_+ |\ p^T x \geq 1\ \forall x \in X\}.$$

Định nghĩa 1.1.2. Véctơ $y \neq 0$ được gọi là một *phương lùi xa* của tập lồi X nếu $\{x + \lambda y |\ \lambda \geq 0\} \subset X\ \forall x \in X$.

Tập tất cả các phương lùi xa của tập lồi X cùng với véctơ 0 làm thành một nón lồi (dễ chứng minh). Nón lồi ấy gọi là *nón lùi xa* của X.

Định nghĩa 1.1.3. Tập con F của tập lồi X được gọi là *một diện* nếu:

$$x, y \in X,\ (1-\lambda)x + \lambda y \in F,\ 0 < \lambda < 1 \Rightarrow [x, y] \subset F,$$

ở đây $[x, y] = \{z |\ z = \lambda x + (1-\lambda)y,\ \lambda \in [0, 1]\}$.

Một diện có thứ nguyên bằng 0 được gọi là một *đỉnh* hay *điểm cực biên*. Một diện có thứ nguyên bằng 1 được gọi là *cạnh*. Hướng của cạnh được gọi là *hướng vô hạn* của tập X.

Định nghĩa 1.1.4. Tập X được gọi là *tập lồi đa diện* nếu X được biểu diễn như là giao của một số hữu hạn nửa không gian đóng.

Mệnh đề 1.1.5. (xem [31]) *Nếu X là tập lồi đa diện trong $\mathbb{R}^n$ và không chứa trọn một đường thẳng nào, thì tập X được biểu diễn dưới dạng là tổng của tổ hợp lồi của các đỉnh và tổ hợp không âm của các hướng vô hạn của X.*

Cho $f:\ X \to \mathbb{R}$ là một hàm số bất kỳ.

Định nghĩa 1.1.6. Hàm f được gọi là *lồi* trên tập lồi X nếu

$$f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \leq \lambda f(x^1) + (1-\lambda)f(x^2)\ \forall x^1,\ x^2 \in X,\ \forall \lambda \in [0;1].$$

Hàm f được gọi là *lõm* trên tập lồi X nếu $-f$ là lồi trên X.

Định nghĩa 1.1.7. Hàm f được gọi là *lồi chặt* trên tập lồi X nếu

$$f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) < \lambda f(x^1) + (1-\lambda)f(x^2)\ \forall x^1 \neq x^2 \in X,\ \forall \lambda \in (0;1).$$

Hàm f được gọi là *lõm chặt* trên tập lồi X nếu $-f$ là lồi chặt trên X.

Định nghĩa 1.1.8. Hàm f được gọi là *tựa lồi* trên tập lồi X nếu

$$f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \leq \max\{f(x^1); f(x^2)\}\ \forall x^1,\ x^2 \in X,\ \forall \lambda \in [0;1].$$

Hàm f được gọi là *tựa lõm* trên tập lồi X nếu $-f$ là tựa lồi trên X.

Mệnh đề 1.1.9. (xem [3]) *Hàm f tựa lồi trên tập lồi X khi và chỉ khi với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ tập mức dưới $\{x \in X:\ f(x) \leq \alpha\}$ là tập lồi. Hàm f tựa lõm trên tập lồi X khi và chỉ khi với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ tập mức trên $\{x \in X:\ f(x) \geq \alpha\}$ là tập lồi.*

Định nghĩa 1.1.10. Hàm f được gọi là *lồi đa diện* nếu trên đồ thị (epigraph) của hàm f là tập lồi đa diện. Hàm $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ được gọi là *lõm đa diện* nếu hàm $-f$ là lồi đa diện.

Dễ thấy, hàm f là lõm đa diện trên $\mathbb{R}^n$ khi và chỉ khi f được biểu diễn dưới dạng

$$f(x) = \min\{(q^i)^T x - \alpha_i:\ i = 1, 2, ..., s\}$$

trong đó $q^1 \in \mathbb{R}^n,\ q^2 \in \mathbb{R}^n, ..., q^s \in \mathbb{R}^n$ không đồng thời bằng 0 và $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., s$.

Định nghĩa 1.1.11. Hàm f được gọi là *đơn điệu tăng* trên X nếu:

$$f(x^1) \leq f(x^2) \quad \forall x^1,\ x^2 \in X,\ x^1 \leq x^2.$$

Hàm f được gọi là *đơn điệu tăng chặt* trên X nếu:

$$f(x^1) < f(x^2) \quad \forall x^1,\ x^2 \in X,\ x^1 < x^2.$$

Hàm f được gọi là *đơn điệu giảm (đơn điệu giảm chặt)* trên X nếu $-f$ đơn điệu tăng (đơn điệu tăng chặt) trên X.

Trường hợp f là hàm lõm đa diện, thuần nhất dương và đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^n$ thì f được xác định bởi:

$$f(x) = \min\{(q^i)^T x : i = 1, 2, ..., s\}$$

trong đó $q^1 \in \mathbb{R}^n_+,\ q^2 \in \mathbb{R}^n_+, ..., q^s \in \mathbb{R}^n_+$ không đồng thời bằng 0.

Định nghĩa 1.1.12. Hàm $f(x)$ được gọi là *nửa liên tục dưới* tại $x^0 \in X$ nếu $\liminf\limits_{x \to x^0} f(x) \geq f(x^0)$. Hàm $f(x)$ được gọi là *nửa liên tục trên* tại $x^0 \in X$ nếu $\limsup\limits_{x \to x^0} f(x) \leq f(x^0)$. Nếu f là nửa liên tục dưới (nửa liên tục trên) tại mọi điểm thuộc X, thì f được gọi là nửa liên tục dưới (nửa liên tục trên) ở trên X.

Định nghĩa 1.1.13. Hàm $f(x)$ được gọi là *liên tục* tại x^0 nếu $f(x)$ đồng thời là nửa liên tục trên và nửa liên tục dưới tại x^0. Nếu f liên tục tại mọi điểm thuộc X, thì f được gọi là liên tục ở trên X.

Mệnh đề 1.1.14. (xem [31]) *Hàm $f(x)$ là nửa liên tục dưới ở trên tập đóng X khi và chỉ khi với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ tập mức dưới $\{x \in X :\ f(x) \leq \alpha\}$ là tập đóng. Hàm $f(x)$ nửa liên tục trên ở trên X khi và chỉ khi với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ tập mức trên $\{x \in X :\ f(x) \geq \alpha\}$ là tập đóng.*

Mệnh đề 1.1.15. (xem [31]) *Nếu hàm $f(x)$ là nửa liên tục dưới ở trên tập compắc khác rỗng X, thì $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên X. Nếu hàm $f(x)$ nửa liên tục trên ở trên tập compắc khác rỗng X, thì $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên X.*

Tiếp theo, chúng ta nhắc lại khái niệm hàm cận trên (dưới) của một họ các hàm cho trước. Xét họ các hàm $\{f_\alpha : \ \alpha \in I\}$ xác định trên tập lồi X.

Định nghĩa 1.1.16. Hàm *bao trên* của họ hàm $\{f_\alpha : \ \alpha \in I\}$ trên tập lồi X được định nghĩa bởi $f(x) := \sup\{f_\alpha(x) : \ \alpha \in I\} \quad \forall x \in X$. Hàm *bao dưới* của họ hàm $\{f_\alpha : \ \alpha \in I\}$ trên tập lồi X được định nghĩa bởi $g(x) := \inf\{f_\alpha(x) : \ \alpha \in I\} \quad \forall x \in X$.

Định lý 1.1.17. (xem [31]) *Nếu f_α liên tục ở trên tập X với mọi $\alpha \in I$ và tập chỉ số I là hữu hạn, thì $f(x) = \max\{f_\alpha(x) : \ \alpha \in I\}$ và $g(x) = \min\{f_\alpha(x) : \ \alpha \in I\}$ cũng liên tục ở trên tập X.*

Định lý 1.1.18. (xem [15]) *Nếu f_α là hàm lồi trên tập lồi X với mọi $\alpha \in I$, thì hàm $f(x) = \max\{f_\alpha(x) : \ \alpha \in I\}$ lồi trên tập X. Nếu f_α là hàm lõm trên tập lồi X với mọi $\alpha \in I$, thì hàm $g(x) = \min\{f_\alpha(x) : \ \alpha \in I\}$ lõm trên tập X.*

Định nghĩa 1.1.19. (xem [32]) Cho X là một tập con trong $\mathbb{R}^n_+$. Tập X được gọi là *chuẩn tắc* (*normal*) nếu $0 \le x' \le x, \ x \in X$ thì $x' \in X$. Tập X được gọi là *đối chuẩn tắc* (*conormal*) nếu $0 \le x \le x', \ x \in X$ thì $x' \in X$.

Các định lý sau cho ta mối liên hệ giữa tính đơn điệu tăng của hàm số với tính chuẩn tắc (đối chuẩn tắc) của tập mức.

Định lý 1.1.20. (xem [32]) *Nếu hàm $f(x)$ là nửa liên tục trên và đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^n_+$, thì tập mức trên $\{x \in \mathbb{R}^n_+ : \ f(x) \ge 1\}$ là đối chuẩn tắc và đóng. Đảo lại, nếu X là tập đối chuẩn tắc và đóng, thì tồn tại hàm $f(x)$ nửa liên tục trên và đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^n_+$ sao cho $X = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \ f(x) \ge 1\}$.*

Định lý 1.1.21. (xem [32]) *Nếu hàm $f(x)$ nửa liên tục dưới và đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^n_+$, thì tập mức dưới $\{x \in \mathbb{R}^n_+ : \ f(x) \le 1\}$ là chuẩn tắc và* *đóng. Đảo lại, nếu X là tập chuẩn tắc và đóng, thì tồn tại $f(x)$ nửa liên tục dưới và đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^n_+$ sao cho $X = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \ f(x) \leq 1\}$.*

Sau cùng, chúng ta nhắc lại một số kiến thức về Giải tích đa trị.

Cho ánh xạ đa trị $F: \ X \rightrightarrows \mathbb{R}^m$.

Định nghĩa 1.1.22. (xem [17]) Ánh xạ đa trị F được gọi là *nửa liên tục dưới* tại x^0 nếu với mọi dãy $\{x^k\} \subset \mathbb{R}^n$ hội tụ tới điểm x^0 đều tồn tại dãy $\{y^k\} \subset \mathbb{R}^m$, $y^k \in F(x^k)$ sao cho $y^k \to y^0 \in F(x^0)$. Nếu F nửa liên tục dưới tại mọi điểm thuộc X, thì F được gọi là nửa liên tục dưới ở trên X.

Định nghĩa 1.1.23. (xem [17]) Ánh xạ đa trị F được gọi là *nửa liên tục trên* tại x^0 nếu $\{x^k\} \subset \mathbb{R}^n$, $x^k \to x^0$, $y^k \in F(x^k)$ và $y^k \to y^0$, thì $y^0 \in F(x^0)$. Nếu F nửa liên tục trên tại mọi điểm thuộc X, thì F được gọi là nửa liên tục trên ở trên X.

Định nghĩa 1.1.24. (xem [17]) Ánh xạ đa trị F được gọi là *liên tục* tại x^0 nếu F đồng thời nửa liên tục dưới và nửa liên tục trên tại x^0. Nếu F liên tục tại mọi điểm thuộc X, thì F được gọi là liên tục ở trên X.

Định nghĩa 1.1.25. (xem [17]) Ánh xạ đa trị F được gọi là *compắc đều* (*uniformly compact*) gần $x^0 \in X$ nếu tồn tại một lân cận V của x^0 sao cho $\mathrm{cl}(\cup_{x \in V} F(x))$ là tập compắc.

Cho ánh xạ đa trị $Q: \ U \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ xác định bởi:

$$Q(u) = \{x \in V : \ g(x, u) \leq 0\},$$

trong đó V là một tập con trong $\mathbb{R}^n$, U là một tập con trong $\mathbb{R}^m$ và g là hàm véctơ từ $V \times U$ vào $\mathbb{R}^s$.

Mệnh đề 1.1.26. (xem [17], Mệnh đề 2.2.1) *Nếu mỗi thành phần của hàm véctơ g là nửa liên tục dưới ở trên tập $V \times \overline{u}$ và V đóng, thì Q nửa liên tục trên tại $\overline{u}$.*

Mệnh đề 1.1.27. (xem [17], Mệnh đề 2.2.2) *Nếu mỗi thành phần của hàm véctơ g lồi theo x khi cố định $u \in U$ và liên tục ở trên tập $Q(\overline{u}) \times \overline{u}$; V lồi và tồn tại một véctơ $x \in V$ sao cho $g(x, \overline{u}) < 0$, thì Q nửa liên tục dưới tại $\overline{u}$.*

Xét họ các bài toán tối ưu vô hướng được nhiễu bởi tham số u

$$\inf\{f(x,u) : \ x \in Q(u)\},$$

trong đó $f : \ \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}$ và $Q : \ U \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ là ánh xạ đa trị bất kỳ.

Ký hiệu

$$w(u) = \inf\{f(x,u) : \ x \in Q(u)\}.$$

Định lý sau cho ta biết về tính liên tục của ánh xạ w.

Định lý 1.1.28. (xem [17], Định lý 4.1.1) (i) *Nếu Q là ánh xạ nửa liên tục dưới tại $\overline{u}$ và f nửa liên tục trên trên tập $Q(\overline{u}) \times \overline{u}$, thì w nửa liên tục trên tại $\overline{u}$.*

(ii) *Nếu Q là ánh xạ nửa liên tục trên tại $\overline{u}$, compắc đều gần $\overline{u}$ và f nửa liên tục dưới ở trên $Q(\overline{u}) \times \overline{u}$, thì w là hàm nửa liên tục dưới tại $\overline{u}$.*

1.2 Phép biến đổi tựa liên hợp

Phần này, chúng tôi đưa ra một số kết quả về phép biến đổi tựa liên hợp của hàm f. Từ đây cho đến hết chương ta luôn giả thiết rằng $f(x)$ là hàm số không âm, nhận giá trị hữu hạn trên $\mathbb{R}^n_+$ và $f(x) > 0 \ \forall x > 0$.

Như trong [2], hàm tựa liên hợp của hàm f được định nghĩa như sau.

Định nghĩa 1.2.1. Hàm $f^\natural$ được gọi là *tựa liên hợp* của f nếu

$$f^\natural(p) = \frac{1}{\sup\{f(x) : \ p^T x \le 1, x \ge 0\}} \quad \forall p \in \mathbb{R}^n_+$$

(quy ước $\frac{1}{+\infty} = 0$).

Vì $f(x) > 0\ \forall x > 0$, $\sup\{f(x):\ p^T x \leq 1, x \geq 0\} > 0\ \forall p \in \mathbb{R}^n_+$. Do đó, $f^\natural$ nhận giá trị hữu hạn trên $\mathbb{R}^n_+$.

Từ định nghĩa của phép biến đổi tựa liên hợp chúng ta chứng minh được các mệnh đề sau.

Mệnh đề 1.2.2. *Cho $x \in \mathbb{R}^n_+$ và $p \in \mathbb{R}^n_+$. Nếu $p^T x \leq 1$, thì*

$$f(x) f^\natural(p) \leq 1. \tag{1.1}$$

Chứng minh. Nếu $f(x) = 0$, thì $f(x)f^\natural(p) = 0 \leq 1$. Nếu $f(x) > 0$, thì từ $p^T x \leq 1$ suy ra

$$f(x)f^\natural(p) = f(x)\frac{1}{\sup\{f(x'):\ p^T x' \leq 1,\ x' \geq 0\}} \leq f(x)\frac{1}{f(x)} = 1.$$

□

Mệnh đề 1.2.3. *Nếu f là hàm thuần nhất dương trên $\mathbb{R}^n_+$, thì $f^\natural$ cũng là hàm thuần nhất dương trên $\mathbb{R}^n_+$.*

Chứng minh. Nếu $p = 0$, thì với $x^0 > 0$ ta có $p^T(kx^0) = 0 \leq 1\ \ \forall k \in \mathbb{N}$ và $f(kx^0) = kf(x^0) \to +\infty$ khi $k \to +\infty$. Suy ra

$$f^\natural(0) = \frac{1}{\sup\{f(x):\ x \geq 0\}} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Nếu $p \neq 0$, thì với mọi $\theta > 0$ ta có

$$\begin{aligned}\sup\{f(x):\ \theta p^T x \leq 1, x \geq 0\} &= \sup\{f(\frac{1}{\theta}x'):\ p^T x' \leq 1, x' \geq 0\}\\ &= \frac{1}{\theta}\sup\{f(x'):\ p^T x' \leq 1, x' \geq 0\},\end{aligned}$$

do đó, $f^\natural(\theta p) = \theta f^\natural(p)$. Vậy, $f^\natural$ thuần nhất dương. □

Định nghĩa 1.2.4. Hàm số f được gọi là *có tính phản xạ* đối với phép biến đổi tựa liên hợp nếu $(f^{\natural})^{\natural} = f$, nghĩa là:

$$f(x) = \frac{1}{\sup\{f^{\natural}(p) : \ p^T x \leq 1, p \geq 0\}} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n_+.$$

Tính phản xạ của f đảm bảo cho sơ đồ đối ngẫu sẽ được trình bày trong Chương 2 và 3 là đối xứng, nghĩa là nếu lấy đối ngẫu của bài toán đối ngẫu thì ta được bài toán gốc. Do đó, tính phản xạ của f là một tính chất quan trọng mà chúng ta cần quan tâm nghiên cứu. Sau đây, chúng ta sẽ thảo luận về tính phản xạ của hàm f và các điều kiện để f có tính chất quan trọng này.

Trong trường hợp f là tuyến tính ta có mệnh đề sau.

Mệnh đề 1.2.5. (xem [25]) *Cho f là hàm tuyến tính và đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^n_+$, được xác định bởi*

$$f(x) = c^T x, \ c = (c_1, c_2, ..., c_n) > 0.$$

Khi đó, f có tính phản xạ và $f^{\natural}$ là hàm sản xuất Leontief xác định trên $\mathbb{R}^n_+$:

$$f^{\natural}(p) = \min\{\frac{p_i}{c_i} : \ i = 1, 2, ...n\} \quad \forall p \in \mathbb{R}^n_+.$$

Kết quả này được P. T. Thach chứng minh trong [25]. Từ kết quả này, TS. Phan Thiên Thạch đã chỉ ra mối liên hệ đối ngẫu giữa nguyên liệu sản xuất và giá nguyên liệu trong bài toán sản xuất Leontief. Ngoài ra, kết quả trên cũng chỉ ra rằng phép biến đổi tựa liên hợp không đóng kín đối với lớp hàm tuyến tính, nghĩa là $f^{\natural}$ không còn tuyến tính. Điều này thúc đẩy chúng ta tìm một lớp hàm rộng hơn thỏa mãn tính đóng kín qua phép biến đổi tựa liên hợp.

Nhận thấy hàm tuyến tính, đơn điệu tăng và hàm sản xuất Leontief đều là các trường hợp riêng của lớp các hàm lõm đa diện, thuần nhất dương và đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^n$, chúng tôi đã chỉ ra rằng lớp các hàm lõm đa diện, thuần nhất dương và đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^n$ thỏa mãn tính phản xạ và đóng kín qua phép biến đổi tựa liên hợp. Kết quả này được thể hiện ở định lý sau đây.

Định lý 1.2.6. *Nếu f là hàm lõm đa diện, thuần nhất dương và đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^n$, thì hàm tựa liên hợp của f cũng là hàm lõm đa diện, thuần nhất dương và đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^n$. Hơn nữa, $(f^{\natural})^{\natural} = f$.*

Chứng minh. Đặt $F = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \; f(x) \geq 1\}$. Vì f là hàm đa diện lõm, nên F là một tập lồi đa diện. Gọi $\{y^1, y^2, ..., y^r\}$ là tập gồm tất cả các đỉnh của F. Dễ thấy $y^i \in \mathbb{R}^n_+$, $y^i \neq 0 \quad \forall i = 1, 2, ..., r$. Vì f là hàm liên tục, đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^n_+$, nên F là tập đối chuẩn tắc trong $\mathbb{R}^n_+$ và do đó $\mathbb{R}^n_+$ là nón lùi xa của tập F. Theo Mệnh đề 1.1.5, chúng ta có

$$F = \mathrm{conv}\{y^1, y^2, ..., y^r\} + \mathbb{R}^n_+.$$

Đặt

$$g(p) = \min\{(y^i)^T p : \; i = 1, 2, ..., r\} \quad \forall p \geq 0.$$

Bây giờ, chúng ta sẽ chứng minh $f^{\natural} = g$. Vì f thuần nhất dương, nên $f^{\natural}$ thuần nhất dương (theo Mệnh đề 1.2.3). Đặt $F^* = \{p \in \mathbb{R}^n_+ : \; f^{\natural}(p) \geq 1\}$. Khi đó

$$f^{\natural}(p) = \max\{\gamma \geq 0 : \; p \in \gamma F^*\}.$$

Thật vậy, với mọi $p \in \mathbb{R}^n_+$ ta có

$$\begin{aligned}
&\max\{\gamma \geq 0|\ p \in \gamma F^*\}\\
&= \max\{\gamma \geq 0|\ p = \gamma p',\ p' \in F^*\}\\
&= \max\{\gamma \geq 0|\ p = \gamma p',\ f^\natural(p') \geq 1\}\\
&= \max\{\gamma \geq 0|\ f^\natural(\frac{1}{\gamma}p) \geq 1\}\\
&= \max\{\gamma \geq 0|\ \frac{1}{\gamma}f^\natural(p) \geq 1\}\\
&= \max\{\gamma \geq 0|\ f^\natural(p) \geq \gamma\}\\
&= f^\natural(p).
\end{aligned}$$

Đặt $G = \{p \in \mathbb{R}^n_+ :\ g(p) \geq 1\}$. Vì g là thuần nhất dương, bằng cách chứng minh tương tự như của $f^\natural$ ta cũng có

$$g(p) = \max\{\gamma \geq 0 :\ p \in \gamma G\}.$$

Như vậy, để chứng minh $f^\natural = g$ ta cần chỉ ra $F^* = G$. Ta có

$$\begin{aligned}
G &= \{p \in \mathbb{R}^n_+ :\ g(p) \geq 1\}\\
&= \left\{p \in \mathbb{R}^n_+ : p^T y^i \geq 1 \quad \forall i = 1, 2, ..., r\right\}\\
&= \left\{p \in \mathbb{R}^n_+ : p^T x \geq 1 \quad \forall x \in \operatorname{conv}\{y^1, y^2, ..., y^r\} + \mathbb{R}^n_+\right\}\\
&= \left\{p \in \mathbb{R}^n_+ : p^T x \geq 1 \quad \forall x \in F\right\}.
\end{aligned}$$

Do đó, G là liên hợp trên của F. Mặt khác, với mọi $p \in F^*$ ta có

$$\begin{aligned}
&f^\natural(p) \geq 1\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\sup\{f(x) :\ p^T x \leq 1, x \geq 0\}} \geq 1\\
&\Leftrightarrow \sup\{f(x) :\ p^T x \leq 1 \text{ thỏa } x \geq 0\} \leq 1\\
&\Leftrightarrow f(x) \leq 1 \quad \forall x \geq 0 \text{ thỏa } p^T x \leq 1\\
&\Leftrightarrow p^T x > 1 \quad \forall x \geq 0 \text{ thỏa } f(x) > 1. \qquad (1.2)
\end{aligned}$$

Với mọi $\overline{x} \geq 0$ thỏa mãn $f(\overline{x}) = 1$, ta luôn có $p^T\overline{x} \geq 1$. Thực vậy, do f thuần nhất và đơn điệu tăng nên $\{x \in \mathbb{R}^n_+|\ f(x) > 1\} \neq \emptyset$. Chọn dãy

$\{x^l\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n_+ | \ f(x) > 1\}$ sao cho $x^l \to \overline{x}$. Bởi (1.2) ta có $p^T x^l > 1 \ \forall \ l$. Lấy qua giới hạn hai vế của bất đẳng thức này khi $l \to +\infty$ ta thu được $p^T \overline{x} \geq 1$. Vậy, $p^T x \geq 1 \quad \forall x \geq 0$ thỏa $f(x) \geq 1$ hay $p^T x \geq 1 \quad \forall x \in F$. Điều này dẫn đến

$$F^* = \{p \in \mathbb{R}^n_+ : p^T x \geq 1, \quad \forall x \in F\},$$

và do đó F^* cũng là liên hợp trên của F. Vậy, $F^* = G$.

Vì F^* là liên hợp trên của F và $f^\natural$ cũng là hàm lõm đa diện, thuần nhất dương và đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^n$, ta có

$$(f^\natural)^\natural = \max\{\gamma \geq 0 : \ x \in \gamma (F^*)^*\}.$$

Giả thiết f thuần nhất dương, nên $f(x) = \max\{\gamma \geq 0 : \ x \in \gamma F\}$. Do đó, để chứng minh $(f^\natural)^\natural = f$ ta cần chứng minh $(F^*)^* = F$.

Vì F^* là liên hợp trên của F nên ta có $F \subset (F^*)^*$. Đảo lại, lấy $\overline{x} \geq 0$, $\overline{x} \notin F$. Từ các giả thiết của f suy ra F là tập đối chuẩn tắc, lồi, đóng trong $\mathbb{R}^n_+$ (theo Định lý 1.1.21). Do F là tập đối chuẩn tắc, F không giao với đoạn $[0; \overline{x}]$. Theo định lý tách các tập lồi, tồn tại véctơ $q \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ và số thực α sao cho

$$q^T x \geq \alpha \quad \forall x \in F, \tag{1.3}$$

$$q^T x < \alpha \quad \forall x \in [0; \overline{x}]. \tag{1.4}$$

Ta khẳng định rằng $q \geq 0$. Thật vậy, giả sử $q = (q_1, q_2, ..., q_n)$ và tồn tại $q_i < 0$. Khi đó, với $x^0 \in F$ ta có $x^k = (x_1^0, ..., x_i^0 + k, ..., x_n^0) \in F \ \forall k \in \mathbb{N}$ (do F là tập đối chuẩn tắc) và $q^T x^k \to -\infty$ khi $k \to +\infty$. Điều này mâu thuẫn với (1.3). Từ (1.4) suy ra $\alpha > 0$. Đặt $p = \frac{1}{\alpha} q$, ta có

$$p^T x \geq 1 \quad \forall x \in F, \tag{1.5}$$

$$p^T \overline{x} < 1. \tag{1.6}$$

Từ (1.5) suy ra $p \in F^*$. Điều này cùng với (1.6) suy ra $\overline{x} \notin (F^*)^*$. Như vậy, $(F^*)^* = F$ $\square$

Kết quả được phát biểu trong Định lý 1.2.6 là sự mở rộng của phép biến đổi tựa liên hợp cho lớp hàm tuyến tính và được trình bày ở bài báo [28].

Sau đây là một kết quả khác về tính phản xạ khi f là hàm sản xuất Cobb-Douglas trên $\mathbb{R}^n_+$.

Mệnh đề 1.2.7. *Cho f là hàm sản xuất Cobb-Douglas trên $\mathbb{R}^n_+$:*

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \ ,$$

trong đó $\alpha_i > 0$ $i = 1, 2, ..., n$. Khi đó, $f^\natural$ cũng là hàm sản xuất Cobb-Douglas trên $\mathbb{R}^n_+$:

$$f^\natural(p) = \prod_{i=1}^{n} (\frac{p_i}{\alpha_i})^{\alpha_i} \quad \forall p \in \mathbb{R}^n_+.$$

Ngoài ra, f thỏa mãn tính phản xạ.

Chứng minh. Nếu $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$ và tồn tại $p_i = 0$ thì $p^T x^k \leq 1$ với mọi $x^k = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., k\overline{x}_i, ..., \overline{x}_n)$, trong đó $\overline{x} > 0$ thỏa mãn $p^T\overline{x} \leq 1$. Do $f(\overline{x}) > 0$ nên $f(x^k) = k^{\alpha_i} f(\overline{x}) \to +\infty$ khi $k \to +\infty$. Suy ra $f^\natural(p) = 0$. Nếu $p > 0$ ta có

$$\sup\{f(x)|\ p^T x \leq 1,\ x \geq 0\} = \prod_{i=1}^{n} (\frac{\alpha_i}{p_i})^{\alpha_i}$$

(xem [12], Ví dụ 4.9). Vậy,

$$f^\natural(p) = \prod_{i=1}^{n} (\frac{p_i}{\alpha_i})^{\alpha_i} \quad \forall p \in \mathbb{R}^n_+.$$

Bằng cách chứng minh tương tự, ta có $(f^\natural)^\natural = f$ và do đó, f phản xạ. □

Hàm sản xuất Cobb-Douglas thỏa mãn tính phản xạ và không phải là hàm lõm trên $\mathbb{R}^n_+$. Điều này chứng tỏ rằng tồn tại lớp hàm tổng quát hơn bao hàm tất cả các trường hợp riêng đã xét ở trên thỏa mãn tính chất phản xạ.

Mệnh đề sau cho ta một số tính chất của hàm liên hợp $f^\natural$.

Mệnh đề 1.2.8. *Hàm $f^\natural$ là tựa lõm và đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^n_+$.*

Chứng minh. Cho $p, p^{'} \in \mathbb{R}^n_+$. Với mỗi $t \in [0;1]$ ta có

$$\{x \geq 0 : \ (tp+(1-t)p^{'})^T x \leq 1\} \subset \{x \geq 0 : \ p^T x \leq 1\} \cup \{x \geq 0 : \ (p^{'})^T x \leq 1\}.$$

Từ đây suy ra

$$\begin{aligned} 0 &< \sup\{f(x) : (tp + (1-t)p^{'})^T x \leq 1, x \geq 0\} \\ &\leq \max\{\sup\{f(x) : p^T x \leq 1, x \geq 0\}; \ \sup\{f(x) : (p^{'})^T x \leq 1, x \geq 0\}\}. \end{aligned}$$

Do đó,

$$\frac{1}{\sup\{f(x) : \ (tp + (1-t)p^{'})^T x \leq 1, x \geq 0\}}$$
$$\geq \min\{\frac{1}{\sup\{f(x) : \ p^T x \leq 1, x \geq 0\}}; \ \frac{1}{\sup\{f(x) : \ (p^{'})^T x \leq 1, x \geq 0\}}\}.$$

Điều này tương đương với

$$f^\natural(tp + (1-t)p^{'}) \geq \min\{f^\natural(p); \ f^\natural(p^{'})\}.$$

Vậy, $f^\natural$ là tựa lõm.

Giả sử $0 \leq p \leq p^{'}$, ta có

$$\{x \in \mathbb{R}^n_+ : \ (p^{'})^T x \leq 1\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \ p^T x \leq 1\}.$$

Suy ra

$$\sup\{f(x) : \ p^T x \leq 1, x \geq 0\} \geq \sup\{f(x) : \ (p^{'})^T x \leq 1, x \geq 0\} > 0.$$

Điều này tương đương với $f^\natural(p) \leq f^\natural(p^{'})$. Do đó, $f^\natural$ là hàm đơn điệu tăng. □

Nhận xét 1.2.9. Định lý trên cho ta điều kiện cần để hàm f thỏa mãn tính phản xạ là f tựa lõm và đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^n_+$. Ngoài ra, định lý còn chỉ ra rằng phép biến đổi tựa liên hợp bảo toàn tính tựa lõm, nghĩa là liên hợp của hàm tựa lõm cũng là hàm tựa lõm. Tuy nhiên, tính chất này không còn đúng đối với lớp các hàm lõm. Thực vậy, lấy $f(x)$ là hàm lõm trên $\mathbb{R}_+$, xác định bởi:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{nếu } x \in [0;1]; \\ 1 & \text{nếu } x \in (1;+\infty). \end{cases}$$

Ta dễ dàng chứng minh được $f^\natural$ không lõm, xác định bởi:

$$f^\natural(p) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } p \in [0;1]; \\ p & \text{nếu } p \in (1;+\infty). \end{cases}$$

Điều này giải thích lý do vì sao chúng ta gọi phép biến đổi (được xác định trong Định nghĩa 1.2.1) là tựa liên hợp.

Định lý sau cho ta điều kiện tổng quát để một hàm số thỏa mãn tính phản xạ qua phép tựa liên hợp.

Định lý 1.2.10. *Nếu f là hàm tựa lõm, nửa liên tục trên và đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^n_+$, thì f có tính phản xạ qua phép biến đổi tựa liên hợp.*

Chứng minh. Đặt

$$\overline{f}(x) = \frac{1}{\sup\{f^\natural(p):\ p^T x \le 1, p \ge 0\}}.$$

Cho γ là một số thực dương, chúng ta ký hiệu F_γ và $\overline{F}_\gamma$ tương ứng lần lượt là các tập mức trên của các hàm f và $\overline{f}$ tại γ, tức là:

$$F_\gamma = \{x \in \mathbb{R}^n_+ :\ f(x) \ge \gamma\},\ \overline{F}_\gamma = \{x \in \mathbb{R}^n_+ :\ \overline{f}(x) \ge \gamma\}.$$

Để chứng minh $f(x) = \overline{f}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n_+$ chúng ta chỉ cần chứng minh $F_\gamma = \overline{F}_\gamma$ với mọi $\gamma > 0$. Giả sử $\overline{x} \in F_\gamma$ nhưng $\overline{x} \notin \overline{F}_\gamma$. Khi đó, ta có $\overline{f}(\overline{x}) < \gamma$ hay

$$\frac{1}{\sup\{f^\natural(p) : \ p^T\overline{x} \leq 1, p \geq 0\}} < \gamma.$$

Điều này có nghĩa là tồn tại véctơ $\overline{p} \geq 0$ thỏa mãn $\overline{p}^T\overline{x} \leq 1$ sao cho

$$\begin{aligned} f^\natural(\overline{p}) > \tfrac{1}{\gamma} \ &\Leftrightarrow \frac{1}{\sup\{f(x) : \ \overline{p}^T x \leq 1, x \geq 0\}} > \frac{1}{\gamma} \\ &\Leftrightarrow \sup\{f(x) : \ \overline{p}^T x \leq 1, x \geq 0\} < \gamma \\ &\Leftrightarrow f(x) < \gamma \quad \forall x \geq 0 \text{ thỏa } \overline{p}^T x \leq 1. \end{aligned}$$

Từ đây suy ra $f(\overline{x}) < \gamma$. Điều này mâu thuẫn với $\overline{x} \in F_\gamma$ và do đó, $F_\gamma \subset \overline{F}_\gamma$. Ta khẳng định rằng nếu $\overline{F}_\gamma \neq \emptyset$ thì $F_\gamma \neq \emptyset$. Thật vậy, giả sử $\overline{x} \in \overline{F}_\gamma$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} &\overline{f}(\overline{x}) \geq \gamma \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\sup\{f^\natural(p) : \ p^T\overline{x} \leq 1, p \geq 0\}} \geq \gamma \\ &\Leftrightarrow f^\natural(p) \leq \frac{1}{\gamma} \quad \forall p \geq 0 \text{ thỏa } p^T\overline{x} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\sup\{f(x) : \ p^T x \leq 1, x \geq 0\}} \leq \frac{1}{\gamma} \quad \forall p \geq 0 \text{ thỏa } p^T\overline{x} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \sup\{f(x) : \ p^T x \leq 1, x \geq 0\} \geq \gamma \quad \forall p \geq 0 \text{ thỏa } p^T\overline{x} \leq 1. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Chọn $\tilde{p} > 0$ sao cho $\tilde{p}^T\overline{x} \leq 1$. Việc chọn $\tilde{p} > 0$ cho ta $\{x \in \mathbb{R}^n_+ : \ \tilde{p}^T x \leq 1\}$ là tập compắc. Giả thiết hàm f nửa liên tục trên, từ (1.7) suy ra tồn tại véctơ $\tilde{x} \geq 0$, $\tilde{p}^T\tilde{x} \leq 1$ sao cho $f(\tilde{x}) \geq \gamma$. Từ đây suy ra $\tilde{x} \in F_\gamma$ và do đó, F_γ là tập khác rỗng. Bây giờ ta giả sử $\overline{x} \in \overline{F}_\gamma$ nhưng $\overline{x} \notin F_\gamma$. Chú ý rằng f là hàm tựa lõm, nửa liên tục trên và đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^n_+$, theo Định lý 1.1.20, ta có F_γ là một tập đối chuẩn tắc, lồi và đóng trong $\mathbb{R}^n_+$. Điều này suy ra F_γ không giao với đoạn $[0; \overline{x}]$. Theo định lý tách chặt các tập lồi, tồn tại véctơ $q \neq 0$ và số thực α sao cho

$$q^T x > \alpha \quad \forall x \in F_\gamma, \tag{1.8}$$

$$q^T x < \alpha \quad \forall x \in [0; \overline{x}]. \tag{1.9}$$

Bằng cách chứng minh tương tự như trong chứng minh Định lý 1.2.6, từ (1.8) ta suy ra $q \geq 0$ và từ (1.9) cho ta $\alpha > 0$. Điều này suy ra tồn tại $t > 0$ đủ nhỏ sao cho $(q + te)^T \overline{x} \leq \alpha$, trong đó $e = (1, 1, ..., 1)$. Đặt $\overline{p} = \frac{1}{\alpha}(q + te)$, ta có $\overline{p} > 0$ và

$$\overline{p}^T x \geq \frac{1}{\alpha} q^T x > 1 \quad \forall x \in F_\gamma, \tag{1.10}$$

$$\overline{p}^T \overline{x} \leq 1. \tag{1.11}$$

Từ (1.10) suy ra

$$\overline{p}^T x > 1 \quad \forall x \geq 0 \text{ thỏa } f(x) \geq \gamma \tag{1.12}$$

$$\Leftrightarrow f(x) < \gamma \quad \forall x \geq 0 \text{ thỏa } \overline{p}^T x \leq 1. \tag{1.13}$$

Từ (1.7) và (1.11) suy ra

$$\sup\{f(x) : \ \overline{p}^T x \leq 1, x \geq 0\} \geq \gamma.$$

Do $\{x \in \mathbb{R}^n_+ : \ \overline{p}^T x \leq 1\}$ là tập compắc và f nửa liên tục trên, nên tồn tại $\widehat{x} \geq 0$, $\overline{p}^T \widehat{x} \leq 1$ sao cho $f(\widehat{x}) \geq \gamma$, điều này mâu thuẫn với (1.13). Vì vậy, $\overline{F}_\gamma \subset F_\gamma$. □

Lớp hàm thỏa mãn giả thiết Định lý 1.2.10 là đủ rộng và được nhiều nhà toán học hay kinh tế nghiên cứu, nó bao hàm phần lớn các hàm sản xuất trong các mô hình kinh tế.

Nếu hàm f là liên tục, thì tính liên tục của $f^\natural$ được xác định trong mệnh đề sau.

Mệnh đề 1.2.11. *Nếu f liên tục trên $\mathbb{R}^n_+$, thì $f^\natural$ nửa liên tục trên tại mọi $p \geq 0$ và nửa liên tục dưới tại mọi $p > 0$.*

Chứng minh. Ta xây dựng ánh xạ đa trị $C:\ \mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^n_+$ bởi:

$$C(p) = \{x \geq 0 :\ p^T x - 1 \leq 0\}.$$

Với mỗi $\overline{p} \in \mathbb{R}^n_+$, ta có hàm $p^T x - 1$ liên tục trên $\mathbb{R}^n_+ \times \overline{p}$. Theo Mệnh đề 1.1.26, ta có C nửa liên tục trên tại $\overline{p}$. Ta cũng có $p^T x - 1$ là hàm liên tục ở trên $C(\overline{p}) \times \overline{p}$ và lồi theo x với mỗi p cố định. Hơn nữa, có $0 \in \mathbb{R}^n_+$ thỏa mãn $\overline{p}^T 0 - 1 < 0$. Áp dụng Mệnh đề 1.1.27, C là nửa liên tục dưới tại $\overline{p}$. Vậy, C là hàm liên tục ở trên $\mathbb{R}^n_+$. Từ đây cùng với Định lý 1.1.28 suy ra $p \to \sup\{f(x) :\ p^T x \leq 1, x \geq 0\}$ là hàm nửa liên tục dưới tại mọi $p \geq 0$. Do đó, hàm $f^\natural(p)$ là nửa liên tục trên tại mọi $p \geq 0$.

Bây giờ, chúng ta chứng minh $f^\natural(p)$ là nửa liên tục dưới ở trên $\mathbb{R}^n_{++}$. Với $\overline{p} > 0$ bất kỳ, ta khẳng định $C(p)$ thỏa mãn tính compắc đều gần $\overline{p}$. Thực vậy, do $\overline{p} > 0$ ta có thể lấy hình cầu đóng B tâm $\overline{p}$ sao cho $p > 0 \quad \forall p \in B$. Giả sử $\mathrm{cl}(\cup_{p\in B} C(p))$ không compắc, khi đó, tồn tại dãy $\{x^n\}$ trong $\mathrm{cl}(\cup_{p\in B} C(p))$ thỏa mãn $||x^n|| \to +\infty$. Suy ra $\forall p \in B$, $p^T x^n \to +\infty$ khi $n \to +\infty$. Điều này mâu thuẫn với thực tế phải có là $p^T x^n \leq 1$ tại ít nhất $p \in B$. Do đó, $C(p)$ thỏa mãn tính compắc đều gần $\overline{p}$. Theo Định lý 1.1.28, hàm $p \to \sup\{f(x) :\ p^T x \leq 1, x \geq 0\}$ nửa liên tục trên tại $\overline{p}$ và do đó, $f^\natural(p)$ là hàm nửa liên tục dưới tại $\overline{p} > 0$. Vì $\overline{p} > 0$ lấy bất kỳ, nên hàm $f^\natural$ nửa liên tục dưới tại mọi $p > 0$. $\square$

Ký hiệu F_γ và $F^*{}_\gamma$ tương ứng là các tập mức trên của f và $f^\natural$ tại $\gamma > 0$.

Mệnh đề 1.2.12. *Cho f là hàm liên tục, tựa lõm và đơn điệu tăng chặt trên $\mathbb{R}^n_+$. Khi đó, với mọi $\gamma > 0$ thỏa mãn $F_\gamma \neq \emptyset$ thì $F^*_{\frac{1}{\gamma}}$ và F_γ là liên hợp trên của nhau, nghĩa là:*

$$F^*_{\frac{1}{\gamma}} = \left\{p \in \mathbb{R}^n_+ : p^T x \geq 1 \quad \forall x \in F_\gamma\right\}, \tag{1.14}$$

$$F_\gamma = \left\{x \in \mathbb{R}^n_+ : p^T x \geq 1 \quad \forall p \in F^*_{\frac{1}{\gamma}}\right\}. \tag{1.15}$$

Chứng minh. Lấy tùy ý $p \in F^*_{\frac{1}{\gamma}}$, ta có $p \geq 0$ và

$$\begin{aligned}
& f^\natural(p) \geq \frac{1}{\gamma} \\
& \Leftrightarrow \frac{1}{\sup\{f(x): \ p^T x \leq 1, x \geq 0\}} \geq \frac{1}{\gamma} \\
& \Leftrightarrow f(x) \leq \gamma \quad \forall x \geq 0 \text{ thỏa } p^T x \leq 1 \\
& \Leftrightarrow p^T x > 1 \quad \forall x \geq 0 \text{ thỏa } f(x) > \gamma.
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Ta khẳng định rằng $p^T\overline{x} \geq 1$ với mọi $\overline{x} \geq 0$ thỏa mãn $f(\overline{x}) = \gamma$. Thực vậy, do f không đồng nhất bằng 0 và đơn điệu tăng chặt trên $\mathbb{R}^n_+$, nên $\{x \in \mathbb{R}^n_+ | \ f(x) > \gamma\} \neq \emptyset$. Chọn dãy $\{x^l\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n_+ | \ f(x) > \gamma\}$ sao cho $x^l \to \overline{x}$. Bởi (1.16) ta có $p^T x^l > 1 \ \forall \ l$. Cho $l \to +\infty$ ta thu được $p^T\overline{x} \geq 1$. Vậy, $p^T x \geq 1 \ \ \forall x \geq 0$ thỏa $f(x) \geq \gamma$ hay $p^T x \geq 1 \ \ \forall x \in F_\gamma$. Do đó,

$$F^*_{\frac{1}{\gamma}} \subset \left\{p \in \mathbb{R}^n_+ : p^T x \geq 1 \ \ \forall x \in F_\gamma\right\}.$$

Để chứng minh bao hàm thức ngược lại, ta lấy $p \geq 0$ tùy ý thỏa mãn $p^T x \geq 1 \ \ \forall x \in F_\gamma$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}
& p^T x \geq 1 \quad \forall x \geq 0 \text{ thỏa } f(x) \geq \gamma \\
& \Leftrightarrow f(x) < \gamma \quad \forall x \geq 0 \text{ thỏa } p^T x < 1 \\
& \Rightarrow f(x) \leq \gamma \quad \forall x \geq 0 \text{ thỏa } p^T x \leq 1 \\
& \Leftrightarrow \sup\{f(x): \ p^T x \leq 1, x \geq 0\} \leq \gamma \\
& \Leftrightarrow \frac{1}{\sup\{f(x): \ p^T x \leq 1, x \geq 0\}} \geq \frac{1}{\gamma} \\
& \Leftrightarrow f^\natural(p) \geq \frac{1}{\gamma} \\
& \Leftrightarrow p \in F^*_{\frac{1}{\gamma}}.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\left\{p \in \mathbb{R}^n_+ : p^T x \geq 1 \ \ \forall x \in F_\gamma\right\} \subset F^*_{\frac{1}{\gamma}}.$$

Như vậy, (1.14) được chứng minh.

Bây giờ, ta sẽ chứng minh (1.15). Đặt

$$A = \left\{x \in \mathbb{R}^n_+ : p^T x \geq 1 \quad \forall p \in F^*_{\frac{1}{\gamma}}\right\}.$$

Theo chứng minh (1.14), ta có $F^*_{\frac{1}{\gamma}}$ là liên hợp trên của F_γ, do đó ta có bao hàm thức $F_\gamma \subseteq A$. Đảo lại, lấy $\overline{x} \geq 0$, $\overline{x} \notin F_\gamma$. Từ giả thiết f liên tục, tựa lõm và đơn điệu tăng ở trên $\mathbb{R}^n_+$, theo Định lý 1.1.21, ta có F_γ là tập đối chuẩn tắc, lồi và đóng trong $\mathbb{R}^n_+$. Từ tính đối chuẩn tắc của F_γ dẫn đến F_γ không giao với đoạn $[0; \overline{x}]$. Theo định lý tách các tập lồi, tồn tại véctơ $q \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ và số thực α sao cho

$$q^T x \geq \alpha \quad \forall x \in F_\gamma, \tag{1.17}$$

$$q^T x < \alpha \quad \forall x \in [0; \overline{x}]. \tag{1.18}$$

Ta có F_γ là tập đối chuẩn tắc, bằng cách chứng minh tương tự như trong chứng minh Định lý 1.2.6, từ (1.17) ta suy ra $q \geq 0$. Từ (1.18) cho ta $\alpha > 0$. Đặt $p = \frac{1}{\alpha} q$, ta có

$$p^T x \geq 1 \quad \forall x \in F_\gamma, \tag{1.19}$$

$$p^T \overline{x} < 1. \tag{1.20}$$

Từ (1.19) suy ra $p \in F^*_{\frac{1}{\gamma}}$. Điều này cùng với (1.20) suy ra $\overline{x} \notin A$. Như vậy, $F_\gamma = A$. $\square$

1.3 Tựa dưới vi phân

Trong lý thuyết tối ưu lồi, các điều kiện tối ưu thường được phát biểu dưới dạng nguyên lý Fermat mở rộng hay điều kiện KKT qua khái niệm dưới vi phân ([3], [23], [31]). Trong phần này, để xây dựng điều kiện tối ưu cho bài toán tối ưu không lồi, chúng tôi đưa ra khái niệm tựa dưới gradient và chứng minh một số tính chất phục vụ cho việc thiết lập các kết quả trong các chương sau.

Xét f là hàm lồi chính thường bất kỳ trên $\mathbb{R}^n$. Chúng ta biết rằng véctơ $p \in \mathbb{R}^n$ là dưới gradient của f tại $\overline{x}$ nếu $p^T(x-\overline{x}) \le f(x)-f(\overline{x}) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$. Điều này tương đương với $f^*(p) \le p^T\overline{x} - f(\overline{x})$, trong đó f^* là hàm liên hợp Fenchel của f, xác định bởi: $f^*(p) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\{p^Tx - f(x)\}$ ([15]). Như vậy, chúng ta thấy rằng dưới gradient của hàm lồi có thể được định nghĩa qua hàm liên hợp Fenchel. Bằng cách tương tự như trên, chúng ta đưa ra khái niệm tựa dưới gradient của f qua hàm tựa liên hợp $f^\natural$ như sau.

Định nghĩa 1.3.1. Véctơ $p \in \mathbb{R}^n_+$ được gọi là *tựa dưới gradient* của f tại $\overline{x}$ nếu

$$p^T\overline{x} = 1 \text{ và } f(\overline{x})f^\natural(p) \ge 1.$$

Theo Mệnh đề 1.2.2, p là tựa dưới gradient của f tại $\overline{x}$ nếu

$$p^T\overline{x} = 1 \text{ và } f(\overline{x})f^\natural(p) = 1.$$

Tập gồm các tựa dưới gradient của f tại $\overline{x}$ được gọi là tựa dưới vi phân của f tại $\overline{x}$, ký hiệu bởi $\partial^\natural f(\overline{x})$. Nếu $\partial^\natural f(\overline{x})$ khác rỗng, thì f được gọi là có tựa dưới vi phân tại $\overline{x}$.

Ví dụ 1.3.2. Cho $f(x) = c^Tx \ \forall x \in \mathbb{R}^n_+,\ c = (c_1, c_2, ..., c_n) > 0$. Theo Mệnh đề 1.2.5, $f^\natural(p) = \min\{\frac{p_i}{c_i} :\ i = 1, 2, ...n\} \quad \forall p \in \mathbb{R}^n_+$. Suy ra $f^\natural(p) = 0\ \forall p \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \mathbb{R}^n_{++}$. Với $\overline{x} \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$, ta đặt $I = \{i \in \{1, 2, ..., n\} |\ x_i = 0\}$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}
\partial^\natural f(\overline{x}) &= \{p > 0 |\ f(\overline{x}) = \frac{1}{f^\natural(p)},\ p^T\overline{x} = 1\} \\
&= \{p > 0 |\ c^T\overline{x} = \max\{\frac{c_i}{p_i} :\ i = 1, 2, ...n\},\ p^T\overline{x} = 1\} \\
&= \{p > 0 |\ p_i \ge \frac{1}{c^T\overline{x}} c_i\ \forall i = 1, 2, ...n,\ p^T\overline{x} = 1\} \\
&= \{p > 0 |\ p_i = \frac{1}{c^T\overline{x}} c_i\ \forall i \notin I,\ p_i \ge \frac{1}{c^T\overline{x}} c_i\ \forall i \in I\}.
\end{aligned}$$

Dễ thấy $\partial^\natural f(0) = \emptyset$. Vậy,

$$\partial^\natural f(\overline{x}) = \begin{cases} \{p > 0 |\ p_i = \frac{c_i}{c^T\overline{x}}\ \forall i \notin I,\ p_i \geq \frac{c_i}{c^T\overline{x}}\ \forall i \in I\} & \text{nếu } \overline{x} \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}; \\ \emptyset & \text{nếu } \overline{x} = 0. \end{cases}$$

Định lý sau cho ta một điều kiện để hàm f là có tựa dưới vi phân tại x.

Định lý 1.3.3. *Cho f liên tục, tựa lõm và đơn điệu tăng chặt trên $\mathbb{R}^n_+$. Khi đó, $\partial^\natural f(x)$ là tập lồi khác rỗng tại mọi $x > 0$. Ngoài ra,*

$$p \in \partial^\natural f(x) \Leftrightarrow x \in \partial^\natural f^\natural(p).$$

Chứng minh. Vì f liên tục, tựa lõm, đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^n_+$, $F_{f(x)}$ là tập đối chuẩn tắc, lồi và đóng trong $\mathbb{R}^n_+$. Giả sử tồn tại hình cầu mở B tâm tại x sao cho $B \subset F_{f(x)}$. Khi đó, tồn tại $\hat{x} \in B$ sao cho $\hat{x} < x$, và do đó $f(\hat{x}) < f(x)$ (f đơn điệu tăng chặt). Điều này mâu thuẫn với $\hat{x} \in F_{f(x)}$. Như vậy, x là điểm biên của tập lồi $F_{f(x)}$. Điều này dẫn đến tồn tại véctơ $q \neq 0$ và số thực α sao cho

$$q^T z \geq \alpha \quad \forall z \in F_{f(x)}, \tag{1.21}$$

$$q^T x = \alpha. \tag{1.22}$$

Bằng cách chứng minh tương tự như trong chứng minh Định lý 1.2.6, (1.21) cho ta $q \geq 0$ (do $F_{f(x)}$ là tập đối chuẩn tắc). Từ (1.22), ta có $\alpha > 0$. Đặt $p = \frac{1}{\alpha}q$, chúng ta có $p \geq 0$ và

$$p^T z \geq 1 \quad \forall z \in F_{f(x)}, \tag{1.23}$$

$$p^T x = 1. \tag{1.24}$$

Vì $f(x) > 0$, từ (1.23) và (1.14) suy ra $p \in F^*_{\frac{1}{f(x)}}$ hay $f^\natural(p)f(x) \geq 1$. Điều này cùng với (1.24) dẫn đến $p \in \partial^\natural f(x)$.

Vì $f^\natural(p)$ tựa lồi, nên dễ dàng suy ra $\partial^\natural f(x)$ là tập lồi.

Giả sử $p \in \partial^\natural f(x)$. Theo Định lý 1.2.10, ta có $(f^\natural)^\natural = f$. Do đó, $x \in \partial^\natural f^\natural(p)$. Định lý được chứng minh. $\square$

Mệnh đề 1.3.4. *Nếu f là hàm liên tục, tựa lõm, đơn điệu tăng chặt trên $\mathbb{R}^n_+$, thì điều kiện đủ để $p \in \partial^\natural f(x)$ là $p^T x = 1$ và $p^T z \geq 1 \quad \forall z \in F_{f(x)}$.*

Chứng minh. Nếu $f(x) = 0$ thì $F_{f(x)} = F_0 = \mathbb{R}^n_+$. Điều này cùng với giả thiết $p^T z \geq 1 \quad \forall z \in F_{f(x)}$ suy ra $p^T 0 = 0 \geq 1$ (vô lý). Vậy, $f(x) > 0$. Theo (1.14), ta có $p \in F^*_{\frac{1}{f(x)}}$. Suy ra $f^\natural(p) \geq \frac{1}{f(x)}$ hay $f^\natural(p) f(x) \geq 1$. Điều này cùng với giả thiết $p^T x = 1$ dẫn đến $p \in \partial^\natural f(x)$. $\square$

Mệnh đề sau cho ta mối liên hệ giữa khái niệm dưới gradient của hàm lồi với khái niệm tựa dưới gradient.

Mệnh đề 1.3.5. *Cho f là hàm liên tục, tựa lõm và đơn điệu tăng chặt trên $\mathbb{R}^n_+$. Khi đó, với mọi $\overline{x} > 0$ chúng ta có*

$$-p \in \partial(-f)(\overline{x}) \setminus \{0\} \Rightarrow \frac{1}{p^T \overline{x}} p \in \partial^\natural f(\overline{x}),$$

trong đó $\partial(-f)(\overline{x})$ là tập dưới vi phân của $-f$ tại $\overline{x}$.

Chứng minh. Cho $-p \in \partial(-f)(\overline{x}) \setminus \{0\}$. Khi đó, với mọi x ta có

$$p^T(x - \overline{x}) \geq f(x) - f(\overline{x}).$$

Suy ra

$$p^T x \geq p^T \overline{x} \quad \forall x \in F_{f(\overline{x})}. \tag{1.25}$$

Vì f là đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^n_+$, nên ta có $F_{f(\overline{x})}$ là tập đối chuẩn tắc trong $\mathbb{R}^n_+$. Bằng cách chứng minh tương tự như trong chứng minh của Định lý 1.2.10, từ (1.25) suy ra $p \geq 0$. Do đó, (1.25) tương đương với

$$\frac{1}{p^T \overline{x}} p^T x \geq 1 \quad \forall x \in F_{f(\overline{x})}.$$

Theo Mệnh đề 1.3.4, ta có $\frac{1}{p^T \overline{x}} p \in \partial^\natural f(\overline{x})$. $\square$

Nhận xét 1.3.6. Cho $f(x)$ là hàm lõm hữu hạn trên $\mathbb{R}^n$ và $\overline{x} \geq 0$ là điểm cực trị của f. Khi đó, ta có $0 \in \partial(-f)(\overline{x})$ nhưng $0 \notin \partial^{\natural} f(\overline{x})$. Điều này cho ta thấy tựa dưới gradient mà chúng ta đưa ra không phải là khái niệm mở rộng của khái niệm dưới gradient.

Đạo hàm theo hướng $d \in \mathbb{R}^n$ của f tại $\overline{x}$ là

$$f^{'}(\overline{x}, d) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(\overline{x} + td) - f(\overline{x})}{t},$$

nếu giới hạn vế phải tồn tại. Nếu f là hàm khả vi tại $\overline{x}$ thì f có đạo hàm theo mọi hướng $d \in \mathbb{R}^n$ tại $\overline{x}$ và

$$f^{'}(\overline{x}, d) = \nabla f(\overline{x})^T d \quad \forall d \in \mathbb{R}^n, d \neq 0.$$

Mệnh đề 1.3.7. *Cho f là hàm liên tục, tựa lõm và đơn điệu tăng chặt trên $\mathbb{R}^n_+$. Nếu f khả vi tại $\overline{x} > 0$ thỏa mãn $\nabla f(\overline{x}) \neq 0$, thì*

$$\frac{1}{\nabla f(\overline{x})^T \overline{x}} \nabla f(\overline{x}) \in \partial^{\natural} f(\overline{x}),$$

trong đó $\nabla f(\overline{x})$ là gradient của f tại $\overline{x}$.

Chứng minh. Lấy $d \in \mathbb{R}^n_+$ bất kỳ. Khi đó, ta có $\overline{x} + td \geq \overline{x} \quad \forall t \geq 0$. Vì f đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^n_+$, $f(\overline{x} + td) - f(\overline{x}) \geq 0 \quad \forall t \geq 0$. Do đó,

$$f^{'}(\overline{x}, d) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(\overline{x} + td) - f(\overline{x})}{t} \geq 0.$$

Vì f khả vi tại $\overline{x}$, ta có $\nabla f(\overline{x})^T d = f^{'}(\overline{x}, d) \geq 0 \quad \forall d \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$. Vậy, $\nabla f(\overline{x}) \geq 0$. Lấy bất kỳ $x \in F_{f(\overline{x})}$. Vì f tựa lõm trên $\mathbb{R}^n_+$, nên với mọi $t \in (0, 1)$ ta có

$$\begin{aligned} f(\overline{x} + t(x - \overline{x})) - f(\overline{x}) &= f(tx + (1-t)\overline{x}) - f(\overline{x}) \\ &\geq \min\{f(x);\ f(\overline{x})\} - f(\overline{x}) \\ &= f(\overline{x}) - f(\overline{x}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Từ đây suy ra

$$\nabla f(\overline{x})^T(x-\overline{x}) = \lim_{t\to 0^+}\frac{f(\overline{x}+t(x-\overline{x}))-f(\overline{x})}{t} \geq 0.$$

Do lấy $x \in F_{f(\overline{x})}$ là bất kỳ, nên ta có

$$\nabla f(\overline{x})^T x \geq \nabla f(\overline{x})^T \overline{x} \quad \forall x \in F_{f(\overline{x})}$$

hay

$$\frac{1}{\nabla f(\overline{x})^T\overline{x}}\nabla f(\overline{x})^T x \geq 1 \quad \forall x \in F_{f(\overline{x})}.$$

Áp dụng Mệnh đề 1.3.4, ta có

$$\frac{1}{\nabla f(\overline{x})^T\overline{x}}\nabla f(\overline{x}) \in \partial^{\natural} f(\overline{x}).$$

Mệnh đề được chứng minh. □

Kết luận của Chương 1

Các kết quả chính của chương này bao gồm:

- Điều kiện đủ cho tính phản xạ của phép biến đổi tựa liên hợp $f^{\natural}$ trong Định lý 1.2.6 và Định lý 1.2.10.

- Điều kiện đủ để hàm f có tựa dưới vi phân và mối liên hệ với dưới vi phân Fenchel trong Định lý 1.3.3, Mệnh đề 1.3.4 và Mệnh đề 1.3.5.

Chương 2

Đối ngẫu liên hợp cho các bài toán tối ưu

Chương này trình bày sơ đồ đối ngẫu liên hợp cho các bài toán tối ưu không lồi bao gồm các bài toán tối ưu vô hướng và tối ưu đa mục tiêu. Các định lý đối ngẫu yếu và mạnh cũng được đưa ra cùng với các đẳng thức đặc trưng cho cặp nghiệm của các bài toán tối ưu.

Mục 2.1 phát biểu, chứng minh điều kiện cần và đủ tối ưu cho bài toán tối ưu vô hướng và đưa ra sơ đồ đối ngẫu cho bài toán này. Các kết quả chính về đối ngẫu cho bài toán tối ưu đa mục tiêu được đưa ra trong Mục 2.3.

Nội dung của Chương này dựa trên các bài báo [28] và [30]. Trong đó, bài báo [28] công bố các kết quả về đối ngẫu trong trường hợp các hàm mục tiêu thỏa mãn tính lõm đa diện, thuần nhất dương và đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^n$, bài báo [30] trình bày các kết quả mở rộng của bài báo [28] khi xét mục tiêu là các hàm liên tục, tựa lõm, đơn điệu tăng chặt và không âm trên $\mathbb{R}^n_+$.

2.1 Đối ngẫu liên hợp cho bài toán tối ưu vô hướng

Trong phần này, chúng tôi đưa ra điều kiện cần và đủ tối ưu dưới dạng mở rộng của nguyên lý Fermat và đối ngẫu cho bài toán tối ưu vô hướng sau đây.

$$\max\{f(x) : \quad x \in X\}, \tag{2.1}$$

trong đó f là hàm liên tục, tựa lõm, đơn điệu tăng chặt, hữu hạn, không âm trên $\mathbb{R}^n_+$; X là tập chuẩn tắc, lồi, compắc với phần trong khác rỗng trong $\mathbb{R}^n_+$. Bài toán (2.1) bao hàm các trường hợp riêng đã được nghiên cứu khi f là hàm tuyến tính và đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^n_+$ ([2], [25]) hay f là hàm liên tục, lõm, thuần nhất và đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^n_+$ ([1]). Vì f liên tục và X là tập compắc, nên bài toán (2.1) có nghiệm. Ngoài ra, giá trị tối ưu của bài toán là một số dương.

Vì f đơn điệu tăng chặt, không âm trên $\mathbb{R}^n_+$, ta dễ dàng chứng minh được $f(x) > 0 \ \forall x > 0$.

Ký hiệu $N(\overline{x}, X)$ là nón pháp tuyến của X tại $\overline{x}$, được xác định bởi

$$N(\overline{x}, X) = \{p : p^T(x - \overline{x}) \le 0 \quad \forall x \in X\}.$$

Nhắc lại rằng, trong lý thuyết tối ưu lồi chúng ta có điều kiện tối ưu dưới dạng nguyên lý Fermat mở rộng sau.

Mệnh đề 2.1.1. (xem [15]) *Điều kiện đủ để $\overline{x}$ là điểm cực tiểu của hàm lồi chính thường f trên tập lồi X là $0 \in \partial f(\overline{x}) + N(\overline{x}, X)$. Nếu $X \subset \mathrm{int}(domf)$, thì chúng ta có điều kiện cần.*

Bằng cách thay dưới vi phân bởi tựa dưới vi phân chúng ta thu được điều kiện tối ưu dưới dạng nguyên lý Fermat mở rộng cho bài toán tối ưu không lồi (2.1) bởi định lý sau.

Định lý 2.1.2. *Điều kiện cần và đủ để* $\overline{x} \in X$ *là nghiệm tối ưu của bài toán* (2.1) *là*

$$0 \in \partial^{\natural} f(\overline{x}) - N(\overline{x}, X). \tag{2.2}$$

Chứng minh. Giả sử $\overline{x} \in X$ và (2.2) đúng. Khi đó, tồn tại véctơ $p \in \partial^{\natural} f(\overline{x})$ sao cho $p \in N(\overline{x}, X)$. Vì $p \in \partial^{\natural} f(\overline{x})$, nên ta có $p^T\overline{x} = 1$ và $f^{\natural}(p)f(\overline{x}) = 1$. Từ quan hệ $p \in N(\overline{x}, X)$ suy ra $p^T(x - \overline{x}) \leq 0 \quad \forall x \in X$ hay $p^T x \leq 1 \quad \forall x \in X$. Áp dụng Mệnh đề 1.2.2, ta có $f^{\natural}(p)f(x) \leq 1 \ \forall x \in X$. Mà $f^{\natural}(p)f(\overline{x}) = 1$. Vậy

$$f^{\natural}(p)f(\overline{x}) = \max\{f^{\natural}(p)f(x) : \ x \in X\} = f^{\natural}(p) \max_{x \in X} f(x).$$

Từ đây suy ra

$$f(\overline{x}) = \max_{x \in X} f(x).$$

Do vậy, $\overline{x}$ là lời giải của (2.1). Ngược lại, giả sử $\overline{x}$ là nghiệm tối ưu của (2.1). Giả sử $\mathrm{int}X \cap \mathrm{int}F_{f(\overline{x})} \neq \emptyset$, nghĩa là tồn tại hình cầu mở B tâm tại x^0 nằm trong $X \cap F_{f(\overline{x})}$, suy ra $f(x) = f(\overline{x}) \ \forall x \in B$. Lấy $x^* \in B$ sao cho $x^* > x^0$. Vì f đơn điệu tăng chặt, ta có $f(x^*) > f(x^0) = f(\overline{x})$ (vô lý). Vậy, $\mathrm{int}X \cap \mathrm{int}F_{f(\overline{x})} = \emptyset$. Theo định lý tách, tồn tại véctơ $q \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$ và số thực α sao cho

$$q^T x \leq \alpha \quad \forall x \in X, \tag{2.3}$$

$$q^T x \geq \alpha \quad \forall x \in F_{f(\overline{x})}. \tag{2.4}$$

Do f là hàm đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^n_+$, nên $F_{f(\overline{x})}$ là tập đối chuẩn tắc. Bằng cách chứng minh tương tự như trong chứng minh Định lý 1.2.6, từ (2.4) ta suy ra $q \geq 0$. Từ (2.3) suy ra $\alpha > 0$ (do X có phần trong khác rỗng). Đặt $p = \frac{1}{\alpha}q$, ta có

$$p^T x \leq 1 \quad \forall x \in X, \tag{2.5}$$

$$p^T x \geq 1 \quad \forall x \in F_{f(\overline{x})}. \tag{2.6}$$

Từ đây suy ra $p^T\overline{x} = 1$. Điều này cùng với (2.6) và Mệnh đề 1.3.4 kéo theo $p \in \partial^\natural f(\overline{x})$. Từ (2.5) suy ra $p^T x \leq p^T \overline{x}$ hay $p \in N(\overline{x}, X)$. Vậy, chúng ta có

$$0 \in \partial^\natural f(\overline{x}) - N(\overline{x}, X).$$

$\square$

Kí hiệu P là liên hợp dưới của X, nghĩa là

$$P = \{p \geq 0 : p^T x \leq 1 \ \forall x \in X\}.$$

Bổ đề 2.1.3. *P là tập chuẩn tắc, lồi, compắc với phần trong khác rỗng trong $\mathbb{R}^n_+$.*

Chứng minh. Tính chuẩn tắc, lồi và đóng được suy ra trực tiếp từ định nghĩa của P. Giả sử P không bị chặn, tức là tồn tại dãy $\{p^m\} \subset P$ sao cho $||p^m|| \to +\infty$. Vì X có phần trong khác rỗng trong $\mathbb{R}^n_+$, nên tồn tại $\overline{x} \in X$ sao cho $\overline{x} > 0$. Suy ra $(p^m)^T\overline{x} \to +\infty$ khi $m \to +\infty$. Điều này mâu thuẫn với định nghĩa của P và vì vậy, P bị chặn.

Bây giờ ta sẽ chứng minh P có phần trong khác rỗng trong $\mathbb{R}^n_+$. Với $\overline{x} \in X$, $\overline{x} > 0$, đặt $\alpha = \max\{\overline{x}^T x : \ x \in X\}$. Khi đó, ta có $\alpha > 0$ và do đó $\frac{1}{\alpha}\overline{x}^T x \leq 1 \quad \forall x \in X$, điều này có nghĩa là $\frac{1}{\alpha}\overline{x} \in P$. Lí do này cùng với P là tập chuẩn tắc suy ra P có phần trong khác rỗng trong $\mathbb{R}^n_+$. $\square$

Bổ đề 2.1.4. *X là liên hợp dưới của P*

$$X = \{x \geq 0 : p^T x \leq 1 \ \forall p \in P\}.$$

Chứng minh. Đặt $Q = \{x \geq 0 : p^T x \leq 1 \ \forall p \in P\}$. Vì P là liên hợp dưới của X, ta có $X \subseteq Q$. Để chứng minh bao hàm thức ngược lại ta lấy $\overline{x} \geq 0$ và $\overline{x} \notin X$. Ta có $\overline{x} \notin X - \mathbb{R}^n_+$. Thực vậy, nếu ngược lại $\overline{x} \in X - \mathbb{R}^n_+$, tức là tồn tại $x \in X$ sao cho $\overline{x} \leq x$. Suy ra $\overline{x} \in X$ (do X là tập chuẩn tắc). Vì $X - \mathbb{R}^n_+$ là tập lồi, theo định lý tách, tồn tại véctơ $q \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ và số thực $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho

$$q^T x \le \alpha \quad \forall x \in X - \mathbb{R}^n_+, \tag{2.7}$$

$$q^T \overline{x} > \alpha. \tag{2.8}$$

Từ (2.7) ta có $q \geq 0$. Thật vậy, giả sử $q = (q_1, q_2, ..., q_n)$ và tồn tại $q_i < 0$. Khi đó, với $x^0 \in X$ ta có $x^k = (x^0_1, ..., x^0_i - k, ..., x^0_n) \in X - \mathbb{R}^n_+ \; \forall k \in \mathbb{N}$ và $q^T x^k \to +\infty$ khi $n \to +\infty$. Điều này mâu thuẫn với (2.7). Chọn $\hat{x} \in X$ sao cho $\hat{x} > 0$ (do tập X có phần trong khác rỗng). Từ (2.7) suy ra $\alpha \geq q^T \hat{x} > 0$. Đặt $p = \frac{1}{\alpha} q$, từ (2.7) và (2.8) ta có

$$p^T x \le 1 \quad \forall x \in X, \tag{2.9}$$

$$p^T \overline{x} > 1. \tag{2.10}$$

Từ (2.9) suy ra $p \in P$. Điều này cùng với (2.10) có nghĩa là $\overline{x} \notin Q$ và do đó $Q \subseteq X$. □

Bài toán đối ngẫu của bài toán (2.1) được định nghĩa như sau:

$$\max\{f^\natural(p) : \quad p \in P\}. \tag{2.11}$$

Theo Mệnh đề 1.2.11, $f^\natural$ là nửa liên tục trên trên $\mathbb{R}^n_+$. Do đó, bài toán (2.11) có nghiệm. Hơn nữa, vì X và P là liên hợp dưới của nhau đồng thời f thỏa mãn tính phản xạ, nên bài toán (2.1) cũng là bài toán đối ngẫu của (2.11). Điều này có nghĩa là sơ đồ đối ngẫu mà chúng ta đưa ra thỏa mãn tính đối xứng.

Nhận xét 2.1.5. Nếu f là hàm lõm đa diện, thuần nhất dương và đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^n$, thì theo Định lý 1.2.6, bài toán đối ngẫu của (2.1) cũng là bài toán cực đại một hàm lõm đa diện, thuần nhất dương và đơn điệu tăng ở trên $\mathbb{R}^n_+$.

Ví dụ 2.1.6. Xét bài toán gốc:

$$\max\{c^T x| \;\; x \in X\} \tag{2.12}$$

trong đó $c > 0$ và X là một tập đa diện được xác định bởi các bất đẳng thức tuyến tính:

$$X = \{x \geq 0 : {a^j}^T x \leq 1 \;\; j = 1, 2, ..., m\}, \tag{2.13}$$

với $a^j \in \mathbb{R}^n$, $a^j > 0 \; \forall j = 1, 2, ..., m$. Tập X có thể được biểu diễn dưới dạng:

$$X = \{-{e_i}^T x \leq 0 \;\; i = 1, 2, ..., n, \; {a^j}^T x \leq 1 \;\; j = 1, 2, ..., m\}, \tag{2.14}$$

trong đó e_i là véctơ đơn vị thứ i trong $\mathbb{R}^n_+$ (véctơ có thành phần thứ i bằng 1, các thành phần khác đều bằng 0). Khi đó, tập P được xác định bởi:

$$\begin{aligned} P &= \operatorname{conv}\{a^1, a^2, ..., a^m\} + \operatorname{co}\{-e_1, -e_2, ..., -e_n\} \\ &= \operatorname{conv}\{a^1, a^2, ..., a^m\} - \mathbb{R}^n_+ \\ &= \{p \geq 0 : \; p \leq \sum_{j=1}^{m} y_j a^j, \; \sum_{j=1}^{m} y_j = 1, \; y_j \geq 0, \; j = 1, 2, ..., m\}. \end{aligned}$$

Theo theo Mệnh đề 1.2.5, bài toán đối ngẫu của (2.12) là bài toán sản xuất Leontief:

$$\max\{\min\{\frac{p_i}{c_i} : \; i = 1, 2, ..., n\}| \;\; p \in P\}$$

Nhận xét 2.1.7. Trong sơ đồ đối ngẫu Lagrange hay Fenchel thì bài toán đối ngẫu của bài toán quy hoạch tuyến tính cũng là bài toán quy hoạch tuyến tính (xem [15], [31]), trong khi đó bài toán đối ngẫu của (2.1) theo sơ đồ đối ngẫu tựa liên hợp là bài toán sản xuất Leontief. Từ kết quả này P.T. Thach đã đưa ra các đặc trưng cho tính phi dư thừa trong bài toán sản xuất Leontief dựa trên mối liên hệ đối ngẫu giữa nguyên liệu sản xuất và giá nguyên liệu. Kết quả và ứng dụng của sơ đồ đối ngẫu này ứng với trường hợp tuyến tính đã được công bố trong [2] và [25].

Định lý sau được xem là định lý đối ngẫu yếu cho các bài toán (2.1) và (2.11).

Định lý 2.1.8. *Với mọi $x \in X$ và $p \in P$ ta có $f(x)f^{\natural}(p) \leq 1$.*

Chứng minh. Do X và P là liên hợp dưới của nhau, theo Mệnh đề 1.2.2 ta có điều phải chứng minh. □

Đối ngẫu mạnh được phát biểu trong định lý sau.

Định lý 2.1.9. *Cho $\overline{x} \in X$ và $\overline{p} \in P$. Khi đó, $\overline{x}$ là nghiệm tối ưu của* (2.1) *và $\overline{p}$ là nghiệm tối ưu của* (2.11) *nếu và chỉ nếu*

$$f(\overline{x})f^{\natural}(\overline{p}) = 1. \tag{2.15}$$

Chứng minh. Giả sử $\overline{x} \in X$ và $\overline{p} \in P$ thỏa mãn đẳng thức (2.15). Theo Mệnh đề 1.2.2, ta có $f^{\natural}(p)f(x) \leq 1 \;\; \forall x \in X, \forall p \in P$. Mà $f^{\natural}(\overline{p})f(\overline{x}) = 1$. Suy ra

$$\begin{aligned} f(\overline{x})f^{\natural}(\overline{p}) &= \max\{f(x)f^{\natural}(p) : \; x \in X, p \in P\} \\ &= \max_{x \in X} f(x) \max_{p \in P} f^{\natural}(p). \end{aligned}$$

Điều này suy ra

$$f(\overline{x}) = \max_{x \in X} f(x), \;\; f^{\natural}(\overline{p}) = \max_{p \in P} f^{\natural}(p).$$

Do đó, $\overline{x}$ là lời giải của (2.1) và $\overline{p}$ là lời giải của (2.11). Đảo lại, giả sử $\overline{x}$ là lời giải của (2.1) và $\overline{p}$ là lời giải của (2.11). Vì $\overline{x}$ là lời giải của (2.1), nên theo Định lý 2.1.2 ta có

$$0 \in \partial^{\natural} f(\overline{x}) - N(\overline{x}, X).$$

Từ đây suy ra tồn tại véctơ $q \in \mathbb{R}^n_+$ sao cho

$$q^T\overline{x} = 1, \tag{2.16}$$

$$f(\overline{x})f^\natural(q) = 1, \tag{2.17}$$

$$q^T x \leq 1 \quad \forall x \in X. \tag{2.18}$$

Từ (2.18) suy ra $q \in P$. Vì $\overline{x} \in X$, nên $\overline{x}^T p \leq 1\ \forall p \in P$. Điều này cùng với (2.16) dẫn đến $\overline{x}^T(p - q) \leq 0\ \forall p \in P$ hay $\overline{x} \in N(q, P)$. Từ (2.16) và (2.17) ta có $\overline{x} \in \partial^\natural f^\natural(q)$ (theo Định lý 1.3.3). Do đó,

$$0 \in \partial^\natural f^\natural(q) - N(q, P).$$

Theo Định lý 2.1.2, q là nghiệm tối ưu của (2.1). Vì $\overline{p}$ cũng là nghiệm tối ưu của (2.11), nên $f^\natural(q) = f^\natural(\overline{p})$. Do đó, $f^\natural(\overline{p})f(\overline{x}) = 1$. □

Nhận xét 2.1.10. Định lý đối ngẫu mạnh cho cặp bài toán (2.1) và (2.11) trong trường hợp f là hàm lõm đa diện, thuần nhất dương và đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^n$ đã được chúng tôi chứng minh một cách đơn giản hơn trong bài báo [28]. Sau đó, Nguyễn Anh Đào chứng minh kết quả rộng hơn với giả thiết f là hàm liên tục, lõm, thuần nhất và đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^n_+$ ([1]).

Từ kết quả của Định lý 2.1.9, chúng ta có thể nói (2.15) là đẳng thức đối ngẫu cho các bài toán (2.1) và (2.11). Do đó, chúng ta có đối ngẫu mạnh cho lớp bài toán tối ưu không lồi (2.1) đã xét. Chú ý rằng trong lý thuyết đối ngẫu Lagrange hay Fenchel để thu được định lý đối ngẫu mạnh thì bài toán gốc phải được giả thiết là bài toán tối ưu lồi ([3], [15], [31]).

Hệ quả sau được suy trực tiếp từ định lý trên.

Hệ quả 2.1.11. *Cho $\overline{x} \in X$ và $\overline{p} \in P$. Khi đó, $\overline{x}$ là nghiệm tối ưu của* (2.1) *và $\overline{p}$ là nghiệm tối ưu của* (2.11) *nếu và chỉ nếu*

$$\overline{p} \in \partial^\natural f(\overline{x}).$$

Chứng minh. Giả sử $\overline{p} \in \partial^\natural f(\overline{x})$. Suy ra $f^\natural(\overline{p})f(\overline{x}) = 1$. Theo Định lý 2.1.9, ta có điều kiện đủ.

Giả thiết rằng $\overline{x}$ là nghiệm tối ưu của (2.1) và $\overline{p}$ là nghiệm tối ưu của (2.11). Theo Định lý 2.1.9, ta có

$$f^\natural(\overline{p})f(\overline{x}) = 1.$$

Do đó, để chứng minh điều kiện cần chúng ta chỉ cần chứng minh có đẳng thức $\overline{p}^T\overline{x} = 1$. Vì $\overline{x}$ là nghiệm tối ưu của (2.1), nên $f(\overline{x}) > 0$. Theo (2.15), ta có

$$f^\natural(\overline{p}) = \frac{1}{\sup\{f(x) :\ \overline{p}^T x \leq 1, x \geq 0\}} = \frac{1}{f(\overline{x})}.$$

Suy ra

$$\sup\{f(x) :\ \overline{p}^T x \leq 1, x \geq 0\} = f(\overline{x}). \tag{2.19}$$

Giả sử rằng $\overline{p}^T\overline{x} = \alpha < 1$. Khi đó, tồn tại số thực $t > 0$ sao cho $\overline{p}^T(\overline{x}+te) = 1$ $(e = (1, 1, ..., 1))$. Vì f đơn điệu tăng chặt, $f(\overline{x}) < f(\overline{x}+te)$. Điều này mâu thuẫn với (2.19). □

2.2 Đối ngẫu liên hợp cho bài toán tối ưu đa mục tiêu

Phần này, chúng tôi mở rộng sơ đồ đối ngẫu liên hợp đã được trình bày trong Mục 2.1 cho bài toán tối ưu đa mục tiêu:

$$\begin{aligned} &\max(f_1(x), f_2(x), ..., f_k(x)) \\ &x \in X. \end{aligned} \tag{2.20}$$

trong đó $f_i :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; X là một tập con trong $\mathbb{R}^n$.

Định nghĩa 2.2.1. (xem [17]) $\overline{x} \in X$ được gọi là *nghiệm hữu hiệu Pareto* của bài toán (2.20) nếu không tồn tại $x \in X$ sao cho $f_i(\overline{x}) \leq f_i(x) \quad \forall i \in \{1, 2, ..., k\}$ và tồn tại $i \in \{1, 2, ..., k\}$ sao cho $f_i(\overline{x}) < f_i(x)$.

Định nghĩa 2.2.2. (xem [17]) $\overline{x} \in X$ được gọi là *nghiệm hữu hiệu yếu Pareto* của bài toán (2.20) nếu không tồn tại $x \in X$ sao cho

$$f_i(\overline{x}) < f_i(x) \quad \forall i \in \{1, 2, ..., k\}.$$

Chúng ta nhắc lại một số điều kiện hữu hiệu cơ bản đã biết cho bài toán tối ưu đa mục tiêu.

Định lý 2.2.3. (xem [17]) *Cho véctơ $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$ sao cho $\lambda_i > 0, \quad \forall i = 1, 2, ..., k$. Khi đó, mọi nghiệm tối ưu của bài toán tối ưu vô hướng*

$$\max\{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(x) : \ x \in X\}$$

đều là nghiệm hữu hiệu Pareto của bài toán (2.20).

Từ định lý trên ta thu được hệ quả sau.

Hệ quả 2.2.4. (xem [17]) *Nếu X là tập compắc và các hàm f_i là nửa liên tục trên với mọi $i = 1, 2, ..., k$, thì bài toán* (2.20) *có nghiệm hữu hiệu.*

Định lý 2.2.5. (xem [17]) *Cho véctơ $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k) \in \mathbb{R}^k_+ \setminus \{0\}$. Khi đó, mọi nghiệm tối ưu của bài toán tối ưu vô hướng*

$$\max\{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(x) : \ x \in X\}$$

đều là nghiệm hữu hiệu yếu Pareto của bài toán (2.20).

Định lý 2.2.6. (xem [35]) *Cho f_i là hàm lõm chặt trên tập lồi X với mọi $i = 1, 2, ..., k$. Khi đó, mọi nghiệm tối ưu của bài toán tối ưu vô hướng*

$$\max\{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(x) : \; x \in X\}$$

với $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k) \in \mathbb{R}^k_+ \setminus \{0\}$ đều là nghiệm hữu hiệu Pareto của bài toán (2.20).

Định lý 2.2.7. (xem [17]) *Cho f_i là hàm lõm trên tập lồi X với mọi $i = 1, 2, ..., k$. Khi đó, mọi nghiệm hữu hiệu Pareto $\overline{x}$ của bài toán* (2.20) *đều tồn tại véctơ $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k) \in \mathbb{R}^k_+ \setminus \{0\}$ sao cho $\overline{x}$ là nghiệm tối ưu của bài toán tối ưu vô hướng*

$$\max\{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(x) : \; x \in X\}.$$

Giả sử $\mathbb{R}^n$ là tích Đề các của các không gian $\mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, 2, ..., k$ $(k \geq 1)$

$$\mathbb{R}^n = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{R}^{n_i},$$

trong đó $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ và $n_i \geq 1$ $i = 1, 2, ..., k$. Đặt $x = (x^1, x^2, ..., x^k)$, trong đó $x^i \in \mathbb{R}^{n_i}_+$ với mọi $i = 1, 2, ..., k$. Từ đây cho đến hết chương, chúng ta luôn xét bài toán (2.20) với giả thiết $f_i(x) = f_i(x^i)$, f_i là hàm hữu hạn trên $\mathbb{R}^{n_i}_+$ thỏa mãn tính liên tục, tựa lõm, đơn điệu tăng, thuần nhất và $f_i(x^i) > 0 \;\; \forall x^i \in \mathbb{R}^{n_i}_{++}$, $i = 1, 2, ..., k$; X là tập chuẩn tắc, lồi, compắc có phần trong khác rỗng trong $\mathbb{R}^n_+$. Vì f_i liên tục ở trên $\mathbb{R}^{n_i}_+$ với mọi $i = 1, 2, ..., k$ và X là tập compắc nên bài toán (2.20) có nghiệm hữu hiệu.

Chú ý rằng: nếu f_i thuần nhất dương, đơn điệu tăng, không âm trên $\mathbb{R}^{n_i}_+$ và $f_i(x^i) > 0 \;\; \forall x^i \in \mathbb{R}^{n_i}_{++}$, thì f_i là đơn điệu tăng chặt trên $\mathbb{R}^{n_i}_+$. Thực vậy, giả sử $0 \leq x^i < y^i$. Nếu $f(x^i) = 0$, thì $f(x^i) < f(y^i)$ là hiển nhiên.

Vì $x^i < y^i$, nên tồn tại $\overline{x}^i = kx^i, k > 1$ sao cho $\overline{x}^i \leq y^i$. Do đó, nếu $f(x^i) > 0$ thì $f(x^i) < kf(x^i) = f(kx^i) = f(\overline{x}^i) \leq f(y^i)$.

Bài toán đối ngẫu của (2.20) được định nghĩa bởi

$$\begin{aligned} &\max(f_1^\natural(p^1), f_2^\natural(p^2), ..., f_k^\natural(p^k)) \\ &p = (p^1, p^2, ..., p^k) \in P,\ p^i \in \mathbb{R}^{n_i}_+,\ i = 1, 2, ..., k, \end{aligned} \tag{2.21}$$

trong đó $f_i^\natural$ là hàm tựa liên hợp của f_i trên $\mathbb{R}^{n_i}_+$ với mọi $i = 1, 2, ..., k$ và P là liên hợp dưới của X. Bài toán đối ngẫu là giải được vì $f_i^\natural$ nửa liên tục trên ở trên $\mathbb{R}^{n_i}_+$ với mọi $i = 1, 2, ..., k$ và P compắc. Do X cũng là liên hợp dưới của P và f_i phản xạ với mọi $i = 1, 2, ..., k$, nên sơ đồ đối ngẫu cho bài toán tối ưu đa mục tiêu là đối xứng.

Trong trường hợp $k = 1$, các bài toán (2.20) và (2.21) trùng với các bài toán tối ưu vô hướng đã được trình bày trong phần trước.

Ví dụ 2.2.8. Xét bài toán tối ưu đa mục tiêu

$$\begin{aligned} &\max(f_1(x^1), f_2(x^2), ..., f_k(x^k)) \\ &x = (x^1, x^2, ..., x^k) \in X, \end{aligned} \tag{2.22}$$

trong đó f_i là hàm lõm đa diện, thuần nhất và đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^{n_i}$ với mọi $i = 1, 2, ..., k$; X là tập lồi đa diện được xác định bởi (2.13). Theo Định lý 1.2.6, hàm tựa liên hợp $f_i^\natural$ của f_i trên $\mathbb{R}^{n^i}_+$ cũng là hàm lõm đa diện, thuần nhất và đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^{n_i}$ với mọi $i = 1, 2, ..., k$. Do đó, ta có bài toán đối ngẫu của bài toán (2.22):

$$\begin{aligned} &\max(f_1^\natural(p^1), f_2^\natural(p^2), ..., f_k^\natural(p^k)) \\ &p = (p^1, p^2, ..., p^k) \in P, \end{aligned}$$

P là liên hợp dưới của X và được xác định như trong Ví dụ 2.1.6.

Ví dụ 2.2.9. Cho bài toán tối ưu đa mục tiêu

$$\begin{aligned} &\max(f_1(x^1), f_2(x^2), ..., f_k(x^k)) \\ &x = (x^1, x^2, ..., x^k) \in X, \end{aligned} \tag{2.23}$$

trong đó $f_i(x^i) = \prod_{j=1}^{n_i}(x_j^i)^{\alpha_j^i},\ i = 1, 2, ..., k,\ \sum_{j=1}^{n_i}\alpha_j^i = 1,\ \alpha_j^i > 0\ j = 1, 2, ..., n_i$; X là tập lồi đa diện được xác định bởi (2.13). Theo Mệnh đề 1.2.7, bài toán đối ngẫu của của bài toán (2.23) là:

$$\begin{aligned}&\max(f_1^\natural(p^1), f_2^\natural(p^2), ..., f_k^\natural(p^k))\\&p = (p^1, p^2, ..., p^k) \in P,\end{aligned}$$

trong đó $f_i^\natural(p^i) = \prod_{j=1}^{n_i}(\frac{p_j^i}{\alpha_j^i})^{\alpha_j^i}\ \ i = 1, 2, ..., k$, P là liên hợp dưới của X và được xác định như trong Ví dụ 2.1.6.

Định lý sau được xem là định lý đối ngẫu yếu cho các bài toán tối ưu đa mục tiêu gốc và đối ngẫu.

Định lý 2.2.10. *Với mọi $x \in X$ và $p \in P$, chúng ta có*

$$\sum_{i=1}^{k} f_i(x^i)f_i^\natural(p^i) \le 1. \tag{2.24}$$

Chứng minh. Với mỗi $i \in \{1, 2, ..., k\}$ ta có $f_i(x^i)f_i^\natural(p^i) \le \alpha_i$ với mọi $x^i \in \mathbb{R}_+^{n_i}$ và $p^i \in \mathbb{R}_+^{n_i}$ sao cho $(p^i)^T x^i \le \alpha_i$, trong đó $\alpha_i \ge 0$. Thực vậy, nếu $\alpha_i = 0$ và $f_i(x^i) = 0$ thì bất đẳng thức cần chứng minh là hiển nhiên.

Nếu $\alpha_i = 0$ và $f_i(x^i) > 0$, ta có $(p^i)^T(mx^i) = 0\ \ \forall m \in \mathbb{N}$ và $f(mx^i) = mf(x^i) \to +\infty$ (do f_i thuần nhất dương trên $\mathbb{R}_+^{n_i}$) khi $m \to +\infty$. Do đó,

$$f_i^\natural(p^i) = \frac{1}{\sup\{f_i(y^i) :\ (p^i)^T y^i \le 1, y^i \ge 0\}} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Vì vậy, $f_i(x^i)f_i^\natural(p^i) = 0 \le \alpha_i$.

Nếu $\alpha_i > 0$, thì $(p^i)^T x^i \le \alpha_i$ tương đương với $\frac{1}{\alpha_i}(p^i)^T x^i \le 1$. Theo Mệnh đề 1.2.2, ta có $f_i(\frac{1}{\alpha_i}x^i)f_i^\natural(p^i) \le 1$ và do đó, $f_i(x^i)f_i^\natural(p^i) \le \alpha_i$. Vì P là liên hợp dưới của X, ta có

$$\sum_{i=1}^{k}(p^i)^T x^i \le 1.$$

Với mỗi $i = 1, 2, ..., k$, ta đặt $\alpha_i = (p^i)^T x^i$. Suy ra $\alpha_i \geq 0 \; \forall i = 1, 2, ..., k$ và $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \leq 1$. Do vậy,

$$\sum_{i=1}^{k} f_i(x^i) f_i^{\natural}(p^i) \leq \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \leq 1.$$

Định lý được chứng minh. $\square$

Mệnh đề 2.2.11. *Cho $\overline{x} \in X$ và $\overline{p} \in P$. Nếu cặp $(\overline{x}, \overline{p})$ thỏa mãn đẳng thức*

$$\sum_{i=1}^{k} f_i(\overline{x}^i) f_i^{\natural}(\overline{p}^i) = 1, \tag{2.25}$$

thì $\overline{x}$ là nghiệm hữu hiệu yếu Pareto của (2.20) *và $\overline{p}$ là nghiệm hữu hiệu yếu Pareto của* (2.21).

Chứng minh. Vì $\overline{x} \in X$ và $\overline{p} \in P$ thỏa mãn đẳng thức (2.25), nên tồn tại $i \in \{1, 2, ..., k\}$ sao cho $f_i^{\natural}(\overline{p}) > 0$. Theo Định lý 2.2.10, ta có

$$\sum_{i=1}^{k} f_i^{\natural}(\overline{p}^i) f_i(x^i) \leq \sum_{i=1}^{k} f_i^{\natural}(\overline{p}^i) f_i(\overline{x}^i) \; \forall x \in X.$$

Điều này có nghĩa là $\overline{x}$ là nghiệm tối ưu của bài toán tối ưu vô hướng:

$$\max\{\sum_{i=1}^{k} f_i^{\natural}(\overline{p}^i) f_i(x^i) : \; x \in X\}.$$

Theo Định lý 2.2.5, $\overline{x}$ là nghiệm hữu hiệu yếu Pareto của (2.20).

Bằng cách chứng minh tương tự ở trên, ta có $\overline{p}$ là nghiệm hữu hiệu yếu Pareto của bài toán đối ngẫu (2.21). $\square$

Mệnh đề 2.2.12. *Cho $\overline{x} \in X$ và $\overline{p} \in P$ sao cho $(\overline{x}, \overline{p})$ thỏa mãn đẳng thức (2.25). Nếu $f_i^{\natural}(\overline{p}^i) > 0$ với mọi $i = 1, 2, ..., k$, thì $\overline{x}$ là nghiệm hữu hiệu Pareto của* (2.20). *Nếu $f_i(\overline{x}^i) > 0$ với mọi $i = 1, 2, ..., k$, thì $\overline{p}$ là nghiệm hữu hiệu Pareto của* (2.21).

Chứng minh. Giả sử $\overline{x} \in X$, $\overline{p} \in P$ thỏa mãn đẳng thức (2.25) và $f_i^{\natural}(\overline{p}) > 0$ với mọi $i = 1, 2, ..., k$. Theo Định lý 2.2.10, ta có

$$\sum_{i=1}^{k} f_i^{\natural}(\overline{p}^i) f_i(x^i) \leq \sum_{i=1}^{k} f_i^{\natural}(\overline{p}^i) f_i(\overline{x}^i) \ \forall x \in X.$$

Điều này có nghĩa là $\overline{x}$ là nghiệm tối ưu của bài toán tối ưu vô hướng:

$$\max\{\sum_{i=1}^{k} f_i^{\natural}(\overline{p}^i) f_i(x^i) : \ x \in X\}.$$

Theo Định lý 2.2.3, $\overline{x}$ là nghiệm hữu hiệu Pareto của (2.20).

Bằng cách chứng minh tương tự ở trên, ta có $\overline{p}$ là nghiệm hữu hiệu Pareto của bài toán đối ngẫu (2.21). □

Ví dụ 2.2.13. Xét bài toán

$$\max \ (f_1(x_1), f_2(x_2))$$
$$x = (x_1, x_2) \in X,$$

với $f_1(x_1) = x_1, f_2(x_2) = 2x_2$ và $X = \{(x_1, x_2) \geq 0 : \ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 \leq 1, \ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \leq 1\}$. Theo Mệnh đề (1.2.5), ta có $f_1^{\natural}(p_1) = p_1, f_2^{\natural}(p_2) = \frac{1}{2}p_2$. Do đó, ta có bài toán đối ngẫu:

$$\max \ (p_1, \frac{1}{2}p_2)$$
$$p_1 \leq \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{3}y_2,$$
$$p_2 \leq \frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{2}y_2,$$
$$y_1 + y_2 = 1,$$
$$p_1 \geq 0, \quad p_2 \geq 0, \quad y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0.$$

Lấy $\overline{x} = (\frac{6}{5}, \frac{6}{5})$, $\overline{p} = (\frac{6}{5}, \frac{6}{5})$, dễ dàng kiểm tra được $\overline{x}$ là một phương án của bài toán gốc và $\overline{p}$ là một phương án của bài toán đối ngẫu ứng với $\overline{y} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Hơn nữa, ta có

$$f_1(\overline{x}_1) f^{\natural}(\overline{p}_1) + f_2(\overline{x}_2) f^{\natural}(\overline{p}_2) = \frac{6}{5}\frac{5}{12} + 2\frac{6}{5}\frac{5}{24} = 1.$$

Theo Mệnh đề 2.2.11, ta có $\overline{x}$ và $\overline{p}$ lần lượt là các nghiệm hữu hiệu yếu Pareto của bài toán gốc và đối ngẫu ở trên. Do

$$f_1(\overline{x}_1) = \frac{6}{5}, \quad f_2(\overline{x}_2) = \frac{12}{5}, \quad f^{\natural}(\overline{p}_1) = \frac{5}{12}, \quad f^{\natural}(\overline{p}_2) = \frac{5}{24}$$

nên theo Mệnh đề 2.2.12 ta có $\overline{x}$ và $\overline{p}$ lần lượt cũng là các nghiệm hữu hiệu Pareto của bài toán gốc và đối ngẫu.

Tiếp theo, chúng ta chứng minh định lý đối ngẫu mạnh cho các bài toán tối ưu đa mục tiêu.

Định lý 2.2.14. *Nếu $\overline{x}$ là nghiệm hữu hiệu yếu Pareto của* (2.20)*, thì tồn tại véctơ $\overline{p} \in P$ sao cho $(\overline{x}, \overline{p})$ thỏa mãn đẳng thức (2.25). Tương tự, nếu $\overline{p}$ là nghiệm hữu hiệu yếu Pareto của* (2.21)*, thì tồn tại véctơ $\overline{x} \in X$ sao cho $(\overline{x}, \overline{p})$ thỏa mãn đẳng thức* (2.25)*.*

Chứng minh. Giả sử $\overline{x}$ là nghiệm hữu hiệu yếu Pareto của (2.20). Đặt

$$\Omega_{\overline{x}} = \{z \in \mathbb{R}^n_+ : \ f_i(z^i) \geq f_i(\overline{x}^i), \ i = 1, 2, ..., k\},$$

ta có $\Omega_{\overline{x}}$ là tập đối chuẩn tắc, lồi, đóng trong $\mathbb{R}^n_+$. Giả sử $\text{int}\Omega_{\overline{x}} \cap \text{int}X \neq \emptyset$, khi đó, tồn tại hình cầu mở B tâm $\bar{z}$ nằm trong $\Omega_{\overline{x}} \cap X$. Vì $\bar{z} \in \Omega_{\overline{x}}$, $f_i(\bar{z}^i) \geq f_i(\overline{x}^i)$ với mọi $i \in \{1, 2, ..., k\}$. Chọn $\hat{z} \in B$ sao cho $\hat{z} > \bar{z}$. Khi đó, ta có $f_i(\hat{z}^i) > f_i(\bar{z}^i) \geq f_i(\overline{x}^i)$ $\forall i \in \{1, 2, ..., k\}$ (do f_i đơn điệu tăng chặt). Điều này mâu thuẫn với giả thiết $\overline{x}$ là nghiệm hữu hiệu yếu Pareto của (2.20). Vậy, $\text{int}\Omega_{\overline{x}} \cap \text{int}X = \emptyset$. Theo định lý tách các tập lồi, tồn tại véctơ $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ và số thực $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho

$$u^T z \leq \alpha \quad \forall z \in X, \tag{2.26}$$

$$u^T z \geq \alpha \quad \forall z \in \Omega\overline{x}. \tag{2.27}$$

Vì $\Omega_{\overline{x}}$ là tập đối chuẩn tắc trong $\mathbb{R}^n_+$, nên từ (2.27) suy ra $u \geq 0$ (chứng minh tương tự như trong chứng minh Định lý 1.2.6). Từ (2.26) suy ra

$\alpha > 0$ (vì X có phần trong khác rỗng). Đặt $\overline{p} = \frac{1}{\alpha}u$, khi đó (2.26) và (2.27) tương ứng tương đương với

$$\overline{p}^T z \leq 1 \quad \forall z \in X, \tag{2.28}$$

$$\overline{p}^T z \geq 1 \quad \forall z \in \Omega\overline{x}. \tag{2.29}$$

Từ (2.28) dẫn đến $\overline{p} \in P$. Từ (2.28) và (2.29), ta có đẳng thức $\overline{p}^T\overline{x} = 1$ và

$$\begin{aligned} \min\{\overline{p}^T z : \; z \in \Omega\overline{x}\} &= \sum_{i=1}^{k} \min\{(\overline{p}^i)^T z^i : z^i \in \mathbb{R}^{n_i}_+, f_i(z^i) \geq f_i(\overline{x}^i)\} \\ &= \overline{p}^T\overline{x} \\ &= 1. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Với mỗi $i \in \{1, 2, ..., k\}$, ta đặt

$$\alpha_i = \min\{(\overline{p}^i)^T z^i : z^i \in \mathbb{R}^{n_i}_+, \; f_i(z^i) \geq f_i(\overline{x}^i)\}.$$

Khi đó, từ (2.30) suy ra

$$\alpha_i = \min\{(\overline{p}^i)^T z^i : z^i \in \mathbb{R}^{n_i}_+, f_i(z^i) \geq f_i(\overline{x}^i)\} = (\overline{p}^i)^T\overline{x}^i. \tag{2.31}$$

Đặt $I = \{i \in \{1, 2, ..., k\} : f_i(\overline{x}^i) > 0, \; \alpha_i > 0\}$. Ta khẳng định

$$f_i(\overline{x}^i) f_i^\natural(\overline{p}^i) = \alpha_i = 0 \;\; \forall i \in \{1, 2, ..., k\} \setminus I. \tag{2.32}$$

Thật vậy, nếu $f_i(\overline{x}^i) = 0$ thì từ (2.31) suy ra

$$\alpha_i = \min\{(\overline{p}^i)^T z^i : z^i \in \mathbb{R}^{n_i}_+, f_i(z^i) \geq 0\} = (\overline{p}^i)^T 0 = 0 \; (\text{do} f_i(0) = 0).$$

Nếu $\alpha_i = 0$ và $f_i(\overline{x}^i) > 0$ thì $(\overline{p}^i)^T(m\overline{x}^i) = 0 \;\; \forall m \in \mathbb{N}$ và $f(m\overline{x}^i) = mf(\overline{x}^i) \to +\infty$ (do f_i thuần nhất dương trên $\mathbb{R}^{n_i}_+$) khi $m \to +\infty$. Do đó,

$$f_i^\natural(\overline{p}^i) = \frac{1}{\sup\{f_i(x^i) : \; \overline{p}^{iT} x^i \leq 1, \; x^i \geq 0\}} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Do đó, $f_i(\overline{x}^i)f_i^\natural(\overline{p}^i) = \alpha_i = 0 \;\; \forall i \in \{1, 2, ..., k\} \setminus I$.

Với $i \in I$, ta có $f_i(\overline{x}^i) > 0$ và $\alpha_i > 0$. Từ (2.31) suy ra

$$(\overline{p}^i)^T z^i \geq \alpha_i \quad \forall z^i \in \{z^i \in \mathbb{R}_+^{n_i} : f_i(z^i) \geq f_i(\overline{x}^i)\}$$

hay

$$\frac{1}{\alpha_i}(\overline{p}^i)^T z^i \geq 1 \quad \forall z^i \in F_{f_i(\overline{x}^i)}.$$

Theo Mệnh đề 1.3.4, ta có

$$\frac{1}{\alpha_i}\overline{p}^i \in \partial^\natural f_i(\overline{x}^i) \quad \forall i \in I.$$

Suy ra

$$f_i(\overline{x}^i)f_i^\natural(\overline{p}^i) = \alpha_i \quad \forall i \in I. \tag{2.33}$$

Như vậy, từ (2.32) và (2.33), ta có

$$\sum_{i=1}^{k} f_i(\overline{x}^i)f_i^\natural(\overline{p}^i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1.$$

Tiếp theo, chúng ta giả sử $\overline{p}$ là nghiệm hữu hiệu yếu Pareto của bài toán (2.21). Vì sơ đồ đối ngẫu là đối xứng, nên bằng cách chứng minh tương tự như ở trên ta có thể chỉ ra rằng tồn tại véctơ $\overline{x} \in X$ sao cho đẳng thức (2.25) đúng tại $(\overline{x}, \overline{p})$. Định lý được chứng minh. □

Nhận xét 2.2.15. Trong trường hợp f_i là hàm lõm đa diện, thuần nhất và đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^{n_i}$ với mọi $i = 1, 2, ..., k$, thì Định lý 2.2.14 có thể được chứng minh chỉ dựa trên các công cụ của Giải tích lồi. Chứng minh đó đã được đưa ra ở bài báo [28]. Sau đây là chi tiết của chứng minh.

Đặt

$$\widehat{\Omega}_{\overline{x}} = \{z \in \mathbb{R}^n : \; f_i(z^i) > f_i(\overline{x}^i), \; i = 1, 2, ..., k\}.$$

Từ giả thiết lồi và đơn điệu tăng của f_i với mọi $i = 1, 2, ..., k$, ta có $\widehat{\Omega}_{\overline{x}}$ là tập lồi mở và $\mathbb{R}_+^n$ nằm trong nón lùi xa của $\widehat{\Omega}_{\overline{x}}$. Theo định lý tách, tồn tại véctơ $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ và số thực α sao cho

$$u^T z \leq \alpha \quad \forall z \in X, \tag{2.34}$$

$$u^T z > \alpha \quad \forall z \in \widehat{\Omega}_{\overline{x}}. \tag{2.35}$$

Ta khẳng định rằng $u \geq 0$. Thật vậy, giả sử $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ và tồn tại $u_i < 0$. Khi đó, với $x^0 \in \widehat{\Omega}_{\overline{x}}$ ta có $x^m = (x_1^0, ..., x_i^0 + m, ..., x_n^0) \in \widehat{\Omega}_{\overline{x}}$ $\forall m \in \mathbb{N}$ (do $\mathbb{R}^n_+$ nằm trong nón lùi xa của $\widehat{\Omega}_{\overline{x}}$) và $u^T x^m \to -\infty$ khi $m \to +\infty$. Điều này mâu thuẫn với (2.35). Từ (2.34) suy ra $\alpha > 0$ (vì X có phần trong khác rỗng). Đặt $\overline{q} = \frac{1}{\alpha} u$. Khi đó, (2.34) và (2.35) tương ứng tương đương với

$$\overline{p}^T z \leq 1 \quad \forall z \in X, \tag{2.36}$$

$$\overline{p}^T z > 1 \quad \forall z \in \widehat{\Omega}_{\overline{x}} \tag{2.37}$$

Từ (2.36) suy ra $\overline{p} \in P$. Theo Bổ đề Farkas-Minskowski mở rộng (xem [31]), từ (2.37) suy ra tồn tại $\mu \in \mathbb{R}^k_+ \setminus \{0\}$ sao cho

$$\overline{q}^T z - 1 + \sum_{i=1}^{k} \mu_i (f_i(\overline{x}^i) - f_i(z^i)) \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}^n \tag{2.38}$$

hay

$$\overline{q}^T z - \sum_{i=1}^{k} \mu_i f_i(z^i) \geq \overline{q}^T \overline{x} - \sum_{i=1}^{k} \mu_i f_i(\overline{x}^i) \quad \forall z \in \mathbb{R}^n.$$

Điều này có nghĩa $\overline{x}$ là điểm cực tiểu của hàm $g(z) = \overline{q}^T z - \sum_{i=1}^k \mu_i f_i(z^i)$ trên $\mathbb{R}^n$. Theo Mệnh đề (2.1.1), ta có $0 \in \partial g(\overline{x})$. Do đó, tồn tại véctơ $q \in \mathbb{R}^n$ sao cho

$$\overline{p} = \bigoplus_{i=1}^{k} \mu_i q^i, \tag{2.39}$$

$$-q^i \in \partial(-f_i)(\overline{x}^i) \quad i = 1, 2, ..., k, \tag{2.40}$$

trong đó $\bigoplus$ ký hiệu là tổng trực tiếp, $\partial(-f_i)(\overline{x}^i)$ là tập dưới vi phân của $-f_i$ tại $\overline{x}^i$ với mọi $i = 1, 2, ..., k$. Từ (2.40) ta có

$$f_i(0) \leq f_i(\overline{x}^i) - (q^i)^T \overline{x}^i,$$

$$f_i(2\overline{x}^i) \leq f_i(\overline{x}^i) + (q^i)^T \overline{x}^i.$$

Do đó,

$$(q^i)^T\overline{x}^i \leq f_i(\overline{x}^i),$$
$$f_i(\overline{x}^i) \leq (q^i)^T\overline{x}^i.$$

Hệ quả là $f_i(\overline{x}^i) = (q^i)^T\overline{x}^i$. Ngoài ra, ta có

$$f_i(x^i) - f(\overline{x}^i) \geq (q^i)^T x^i - (q^i)^T \overline{x}^i \quad \forall x^i \in \mathbb{R}^{n_i}$$

hay

$$f_i(x^i) - (q^i)^T x^i + (q^i)^T\overline{x}^i \geq f_i(\overline{x}^i) \quad \forall x^i \in \mathbb{R}^{n_i}.$$

Do đó

$$\begin{aligned}
f_i(\overline{x}^i) &= \max\{f_i(x^i) - (q^i)^T x^i + (q^i)^T\overline{x}^i,\ \forall x^i \in \mathbb{R}^{n_i}\} \\
&= \max\{f_i(x^i) - (q^i)^T x^i + (q^i)^T\overline{x}^i,\ x^i \geq 0\} \\
&= \max\{f_i(x^i) :\ (q^i)^T x^i \leq (q^i)^T\overline{x}^i,\ x^i \geq 0\} \\
&= \max\{f_i(x^i) :\ (q^i)^T x^i \leq f(\overline{x}^i),\ x^i \geq 0\}.
\end{aligned}$$

Đặt

$$I = \{i \in \{1, 2, ..., k\} :\ f_i(\overline{x}^i) > 0\}.$$

Với $i \in I$ ta có

$$\begin{aligned}
& \sup\{f_i(x^i) :\ (q^i)^T x^i \leq 1, x^i \geq 0\} \\
=\ & \sup\{f_i(x^i) :\ (q^i)^T (f_i(\overline{x}^i) x^i) \leq f_i(\overline{x}^i), x^i \geq 0\} \\
=\ & \sup\{f_i(\frac{1}{f_i(\overline{x}^i)} x^i) :\ (q^i)^T x^i \leq f_i(\overline{x}^i), x^i \geq 0\} \\
=\ & \frac{1}{f_i(\overline{x}^i)} \sup\{f_i(x^i) :\ (q^i)^T x^i \leq f_i(\overline{x}^i), x^i \geq 0\} \\
=\ & 1.
\end{aligned}$$

Điều này suy ra $f_i^\natural(q^i) = 1 \quad \forall x \in I$. Do vậy,

$$f_i^\natural(\overline{p}^i) = f_i^\natural(\mu_i q^i) = \mu_i f_i^\natural(q^i) = \mu_i \quad \forall i \in I.$$

Mặt khác, thay $z = 0$ vào (2.38) ta được

$$1 \leq \sum_{i=1}^{k} \mu_i f_i(\overline{x}^i).$$

Do đó,

$$1 \leq \sum_{i \in I} f_i(\overline{x}^i) f_i^{\natural}(\overline{p}^i) = \sum_{i=1}^{k} f_i(\overline{x}^i) f_i^{\natural}(\overline{p}^i).$$

Kết hợp điều này với (2.24) ta có

$$\sum_{i=1}^{k} f_i(\overline{x}^i) f_i^{\natural}(\overline{p}^i) = 1.$$

Khẳng định thứ hai của định lý được chứng minh tương tự.

Kết quả của Định lý 2.2.14 và Mệnh đề 2.2.11 chỉ ra rằng (2.25) là đẳng thức đối ngẫu giúp đặc trưng cho cặp nghiệm hữu hiệu yếu Pareto cho các bài toán tối ưu đa mục tiêu (2.20) và (2.21). Do đó, Định lý 2.2.14 được xem là định lý đối ngẫu mạnh của các bài toán tối ưu đa mục tiêu này.

Kết luận của Chương 2

Các kết quả chính của chương này bao gồm:

- Điều kiện cần và đủ tối ưu dưới dạng mở rộng của nguyên lý Fermat trong Định lý 2.1.2.

- Sơ đồ đối ngẫu mạnh, đối xứng cho bài toán tối ưu vô hướng không lồi trong Định lý 2.1.8, Định lý 2.1.9 và Hệ quả 2.1.11.

- Sơ đồ đối ngẫu mạnh và đối xứng cho bài toán tối ưu đa mục tiêu không lồi và đưa ra đẳng thức đối ngẫu giúp đặc trưng cho cặp nghiệm hữu hiệu yếu Pareto của bài toán gốc và đối ngẫu trong Định lý 2.2.10, Mệnh đề 2.2.11 và Định lý 2.2.14.

Chương 3

Ứng dụng

Trong chương này, chúng tôi ứng dụng sơ đồ đối ngẫu liên hợp được trình bày trong Chương 2 để nghiên cứu một số bài toán sản xuất trong kinh tế.

Mục 3.1 chỉ ra rằng bằng đối ngẫu liên hợp chúng ta có thể quy bài toán tìm phương án sản xuất với một ràng buộc phân bố nguồn lực về bài toán cực đại một hàm lõm chặt trên một tập lồi đa diện. Ở Mục 3.2, chúng tôi xét bài toán mở rộng tìm tập phương án sản xuất với k ràng buộc phân bố nguồn lực và quy bài toán này về bài toán tối ưu đa mục tiêu. Ở Mục 3.3, chúng tôi xét bài toán tối ưu với các ràng buộc phân bố nguồn lực và chứng minh rằng bài toán này tương đương với bài toán cực đại hàm tựa lồi trên tập lồi compắc. Ở Mục 3.4, bằng phương pháp tiếp cận cơ bản dựa trên quy hoạch hai cấp và lý thuyết tối ưu đơn điệu của H. Tụy chúng tôi chỉ ra rằng bài toán tối ưu với các ràng buộc phân bố nguồn lực tương đương với một bài toán cơ bản của tối ưu đơn điệu.

Nội dung của chương này dựa trên bài báo [29].

3.1 Bài toán với một ràng buộc phân bố nguồn lực

Cho m véctơ $a^i \in \mathbb{R}^n_{++},\ i = 1, \ldots, m$ và $\alpha \in \mathbb{R}^n_+$ sao cho

$$\alpha_j > 0\ \forall j = 1, \ldots, n; \quad \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1. \tag{3.1}$$

Xét bài toán tìm các véctơ $x \in \mathbb{R}^n_+$ và $p \in \mathbb{R}^n_+$, thỏa mãn hệ các đẳng thức và bất đẳng thức sau:

$$x = \sum_{i=1}^{m} \theta_i a^i,\ \theta_i \geq 0\ i = 1, 2, \ldots, m,\ \sum_{i=1}^{m} \theta_i = 1, \tag{3.2}$$

$$p_j \geq 0\ j = 1, 2, \ldots, n,\ p^T a^i \leq 1\ i = 1, 2, \ldots, m, \tag{3.3}$$

$$p_j x_j \ = \ \alpha_j \ \ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.4}$$

Bài toán này có thể gặp trong việc lập kế hoạch hoạt động của một công ty có m nhà máy để sản xuất n hàng hoá khác nhau. Để sản xuất các hàng hoá này, một nguồn lực nhất định có tổng bằng 1 được phân bố cho các nhà máy. Giả sử a^i, $\min_{j=1,\ldots,n} a^i_j > 0$ là véctơ đặc trưng cho năng lực của nhà máy thứ i, nghĩa là nhà máy thứ i chạy hết công suất có thể sản xuất được a^i_j đơn vị hàng hóa thứ j, $j = 1, \ldots, n$. Số p_j biểu thị phần nguồn lực được phân bố cho việc sản xuất một đơn vị hàng hóa thứ j và x_j là tổng lượng hàng hóa thứ j cần sản xuất bởi cả công ty. Khi đó, $p_j x_j$ là tổng nguồn lực được phân bố cho việc sản xuất hàng hóa thứ j, tức là giá vốn sản xuất lượng hàng hóa thứ j. Để đảm bảo khả năng cạnh tranh trên thị trường, cần thiết rằng $p_j x_j = \alpha_j, j = 1, \ldots, n$, trong đó $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ là các số cho trước. Bài toán đặt ra là tìm một phương án hoạt động khả thi, tức là tìm một véctơ $(x, p) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$, thỏa mãn hệ (3.2)-(3.4). Véctơ α được gọi là véctơ phân bố nguồn lực.

Ký hiệu X là tập các véctơ $x \in \mathbb{R}^n_+$, thỏa mãn (3.2) và P là tập các véctơ $p \in \mathbb{R}^n_+$, thỏa mãn (3.3). Dễ thấy cả X và P là các miền lồi đa diện. Nghiệm của hệ (3.2)-(3.4) là các véctơ $(x, p) \in X \times P$, thỏa mãn các đẳng thức (3.4). Vì (3.4) là các đẳng thức phi tuyến, nên (3.2)-(3.4) là hệ phi tuyến. Điều này dẫn đến việc giải hệ này là không đơn giản. Sau đây, ta sẽ chỉ ra rằng hệ (3.2)-(3.4) tương đương với một bài toán tối ưu lồi. Ngoài ra, ta còn chỉ ra rằng hệ này có một lời giải duy nhất $(x, p) \in X \times P$.

Bổ đề 3.1.1. *Chúng ta có*

$$P = \{p \geq 0 |\ p^T x \leq 1 \quad \forall x \in X\}, \tag{3.5}$$

$$X^- = \{x \geq 0 |\ p^T x \leq 1 \quad \forall p \in P\}, \tag{3.6}$$

trong đó $X^- := \{y : \exists\ x \in X, x \geq y \geq 0\}$.

Chứng minh. Vì X là bao lồi của $\{a^i |\ i = 1, 2, \ldots, m\}$ nên ta có (3.5). Để chứng minh (3.6), ta chú ý rằng

$$p^T y \leq p^T x \leq 1 \quad \forall p \in P \quad \forall x \in X \quad \forall y : \ x \geq y \geq 0.$$

Do đó, $X^- \subset \{x \geq 0 |\ p^T x \leq 1 \quad \forall p \in P\}$. Mặt khác, nếu $\overline{x} \geq 0$ và $\overline{x} \notin X^-$ thì theo định lý tách, tồn tại véctơ $\overline{p} \geq 0$ sao cho

$$\begin{aligned} \overline{p}^T \overline{x} &> 1, \\ \overline{p}^T x &\leq 1 \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

Điều này dẫn đến $\overline{p} \in P$. Bởi vậy, $X^- \supset \{x \geq 0 |\ p^T x \leq 1 \quad \forall p \in P\}$. Bổ đề được chứng minh. $\square$

Đặt

$$f(x) = \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j}, \quad g(p) = \prod_{j=1}^{n} p_j^{\alpha_j}. \tag{3.7}$$

Dễ thấy f và g là các hàm liên tục, tựa lõm, đơn điệu tăng, không âm trên $\mathbb{R}^n_+$ và $f(x) > 0 \quad \forall x > 0$. Hơn nữa, vì $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1,\ \alpha_i > 0\ i = 1, 2, ..., n$, nên $f(x)$ và $g(p)$ là các hàm thuần nhất dương trên $\mathbb{R}^n_+$.

Bổ đề 3.1.2. *Với mọi $x \geq 0$ và $p \geq 0$ ta có*

$$\begin{aligned} g(p) &= \frac{\prod_{j=1}^n \alpha_j^{\alpha_j}}{\sup\{f(x)|\ p^T x \leq 1, x \geq 0\}}\ , \\ f(x) &= \frac{\prod_{j=1}^n \alpha_j^{\alpha_j}}{\sup\{g(p)|\ p^T x \leq 1, p \geq 0\}}. \end{aligned}$$

Chứng minh. Theo Mệnh đề 1.2.7, với $p \geq 0$ bất kỳ ta có

$$\begin{aligned} f^\natural(p) &= \prod_{j=1}^n (\frac{p_j}{\alpha_j})^{\alpha_j} \\ &= \frac{\prod_{j=1}^n p_j^{\alpha_j}}{\prod_{j=1}^n \alpha_j^{\alpha_j}}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$g(p) = \frac{\prod_{j=1}^n \alpha_j^{\alpha_j}}{\sup\{f(x)|\ p^T x \leq 1, x \geq 0\}}.$$

Cũng theo Mệnh đề 1.2.7 thì với mọi $x \geq 0$ ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sup\{f^\natural(p) :\ p^T x \leq 1, p \geq 0\}} \\ &= \frac{\prod_{j=1}^n \alpha_j^{\alpha_j}}{\sup\{g(p)|\ p^T x \leq 1, p \geq 0\}}. \end{aligned}$$

□

Xét các bài toán

$$\max\{f(x) :\quad x \in X\}, \tag{3.8}$$

$$\max\{g(p) :\quad p \in P\}. \tag{3.9}$$

Vì X, P là các tập lồi đa diện chứa các véctơ dương và f, g là các hàm liên tục, nên hai bài toán (3.8) và (3.9) có nghiệm và giá trị tối ưu của chúng là các giá trị dương.

Xét bài toán

$$\max\{f(x) :\quad x \in X^-\}. \tag{3.10}$$

Giả sử x^* là một nghiệm tối ưu của (3.8). Theo định nghĩa của X^-, với mỗi $y \in X^-$ tồn tại $x \in X$ sao cho $y \leq x$. Điều này cùng với giả thiết f đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^n_+$ suy ra $f(y) \leq f(x) \leq f(x^*) \quad \forall y \in X^-$. Như vậy, ta khẳng định rằng mọi nghiệm tối ưu của bài toán (3.8) đều là nghiệm tối ưu của (3.10).

Theo Bổ đề 3.1.3 ta có $g(p) = f^\natural(p) \prod_{j=1}^n \alpha_j^{\alpha_j}$. Điều này suy ra bài toán (3.9) tương đương với bài toán

$$\max\{f^\natural(p) : \quad p \in P\}. \tag{3.11}$$

Với $x > 0$ và $p > 0$, đặt

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla} f(x) &= \frac{1}{\nabla f(x)^T x} \nabla f(x), \\ \tilde{\nabla} g(p) &= \frac{1}{\nabla g(p)^T p} \nabla g(p), \end{aligned}$$

trong đó $\nabla f(x)$ là gradient của f tại x, $\nabla g(p)$ là gradient của g tại p. Dựa vào (3.7) ta dễ dàng chỉ ra rằng với mọi $x > 0,\ p > 0$ thì

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla} f(x) &= \left(\frac{\alpha_1}{x_1}, \frac{\alpha_2}{x_2}, \ldots, \frac{\alpha_n}{x_n} \right), \\ \tilde{\nabla} g(p) &= \left(\frac{\alpha_1}{p_1}, \frac{\alpha_2}{p_2}, \ldots, \frac{\alpha_n}{p_n} \right). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Định lý sau cho thấy rằng các bài toán (3.8) và (3.9) là đối ngẫu của nhau.

Định lý 3.1.3. *Nếu* $\overline{x}$ *là nghiệm của bài toán* (3.8), *thì* $\tilde{\nabla} f(\overline{x})$ *là nghiệm của* (3.9). *Đảo lại, nếu* $\overline{p}$ *là nghiệm của* (3.9), *thì* $\tilde{\nabla} g(\overline{p})$ *là nghiệm của bài toán* (3.8).

Chứng minh. Giả sử $\overline{x}$ là nghiệm tối ưu của (3.8). Ta có $\overline{x} > 0$, $f(\overline{x}) > 0$ và $\tilde{\nabla} f(\overline{x}) \neq 0$. Theo Mệnh đề 1.3.7, ta có

$$\tilde{\nabla} f(\overline{x}) \in \partial^\natural f(\overline{x}).$$

Vì $\overline{x}$ cũng là nghiệm tối ưu của (3.10) và f thuần nhất, nên theo Hệ quả 2.1.11 ta có $\tilde{\nabla} f(\overline{x})$ là nghiệm của (3.11). Do vậy, $\tilde{\nabla} f(\overline{x})$ là nghiệm của (3.9).

Giả sử $\overline{p}$ là nghiệm tối ưu của (3.9), bằng cách chứng minh tương tự, ta cũng chỉ ra được $\tilde{\nabla} g(\overline{p})$ là nghiệm của (3.10). Hơn nữa, do $f(x)$ là hàm tựa lõm chặt nên $\tilde{\nabla} g(\overline{p})$ là nghiệm duy nhất của (3.10). Từ điều này ta có $\tilde{\nabla} g(\overline{p}) \in X$. Nếu ngược lại thì tồn tại $\widehat{x} \in X,\ \widehat{x} \neq \tilde{\nabla} g(\overline{p}), \tilde{\nabla} g(\overline{p}) \leq \widehat{x}$ sao cho $\widehat{x}$ cũng là nghiệm tối ưu của bài toán (3.10). Điều này mâu thuẫn với tính tồn tại nghiệm duy nhất của (3.10). Vậy, $\tilde{\nabla} g(\overline{p})$ cũng là nghiệm của (3.8). □

Định lý 3.1.4. *Nếu* $(\overline{x}, \overline{p})$ *là nghiệm của hệ* (3.2)-(3.4), *thì* $\overline{x}$ *là nghiệm của* (3.8) *và* $\overline{p}$ *là nghiệm của* (3.9). *Đảo lại, nếu* $\overline{x}$ *là nghiệm của* (3.8), *thì* $(\overline{x}, \overline{p})$ *với* $\overline{p} = \tilde{\nabla} f(\overline{x})$ *là nghiệm của hệ* (3.2)-(3.4); *nếu* $\overline{p}$ *là nghiệm của* (3.9), *thì* $(\overline{x}, \overline{p})$ *với* $\overline{x} = \tilde{\nabla} g(\overline{p})$ *là nghiệm của hệ* (3.2)-(3.4).

Chứng minh. Cho $(\overline{x}, \overline{p})$ là nghiệm của hệ (3.2)-(3.4). Từ (3.4) và (3.12) suy ra $\overline{x} > 0,\ f(\overline{x}) > 0$ và $\overline{p} = \tilde{\nabla} f(\overline{x})$. Theo Mệnh đề 1.3.7, ta có

$$\overline{p} \in \partial^{\natural} f(\overline{x}).$$

Điều này cùng với Hệ quả 2.1.11 và Định lý 3.1.3 dẫn đến $\overline{x}$ là nghiệm của (3.8) và $\overline{p}$ là nghiệm của (3.9).

Đảo lại, nếu $\overline{x}$ là nghiệm của (3.8) và $\overline{p} = \tilde{\nabla} f(\overline{x})$, thì $\overline{p}$ thỏa mãn (3.4) và là nghiệm tối ưu của (3.9). Do đó, $(\overline{x}, \overline{p})$ là nghiệm của hệ (3.2)-(3.4). Tương tự, nếu $\overline{p}$ là nghiệm của (3.9) và $\overline{x} = \tilde{\nabla} g(\overline{p})$, thì $\overline{x}$ thỏa mãn (3.4) và là nghiệm tối ưu của (3.8). Do đó, $(\overline{x}, \overline{p})$ là nghiệm của hệ (3.2)-(3.4). □

Dễ thấy các bài toán (3.8) và (3.9) tương ứng tương đương với các bài toán cực đại hàm lõm sau:

$$\max\{\ln(f(x)):\ x \in X\}, \tag{3.13}$$

$$\max\{\ln(g(p)):\ p \in P\}. \tag{3.14}$$

Các hàm $\ln(f(x))$ và $\ln(g(p))$ là lõm chặt trên $\mathbb{R}^n_{++}$, nên nghiệm của các bài toán (3.8) và (3.9) là tồn tại duy nhất. Do đó, từ Định lý 3.1.4 chúng ta khẳng định nghiệm của hệ (3.2)-(3.4) là tồn tại và duy nhất, đồng thời nghiệm này có được bằng cách giải bài toán (3.13) hoặc (3.14). Chú ý rằng các bài toán (3.13) và (3.14) tương đương với các bài toán tối ưu lồi, nên việc giải các bài toán này đơn giản hơn việc giải hệ phi tuyến (3.2)-(3.4).

3.2 Bài toán với ràng buộc phân bố nhiều nguồn lực

Trong phần này, chúng ta xét bài toán mở rộng của (3.2)-(3.4) khi công ty có $k \geq 1$ nguồn lực được sử dụng để sản xuất n sản phẩm trong m nhà máy, với μ_r là giá trị của nguồn lực thứ r ($r = 1, \ldots, k$). Không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết rằng $\sum_{r=1}^{k} \mu_r = 1$.

Giả sử α_j^r là phần nguồn lực thứ r được phân bố cho việc sản xuất sản phẩm thứ j và toàn bộ các nguồn lực được sử dụng hết, khi đó ta có

$$0 \leq \alpha_j^r \leq 1, \quad \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^r = 1 \qquad r = 1, \ldots, k. \tag{3.15}$$

Véctơ $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n_+$ với $\alpha_j = \sum_{r=1}^{k} \mu_r \alpha_j^r$ (tổng giá trị các nguồn lực được sử dụng để sản xuất sản phẩm thứ j), $j = 1, \ldots, n$, được gọi là *véctơ phân bố các nguồn lực*. Đặt Δ là tập gồm tất cả các véctơ phân bố các nguồn lực, nghĩa là

$$\Delta = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^n_+ |\ \alpha = \sum_{r=1}^{k} \mu_r \alpha^r,\ \sum_{r=1}^{k} \mu_r = 1, \mu_r \geq 0 \quad r = 1, 2, \ldots, k \right\}. \tag{3.16}$$

Ứng với mỗi véctơ phân bố các nguồn lực $\alpha \in \Delta$, véctơ $x \in \mathbb{R}^n_+$ thỏa mãn (3.2)-(3.4) sẽ được gọi là một phương án sản xuất. Véctơ $p = (p_1, \ldots, p_n)$ với p_j là tổng giá trị các nguồn lực được sử dụng để sản xuất một đơn vị hàng hóa thứ j (tức là giá vốn sản xuất của đơn vị hàng hóa thứ j) sẽ được gọi là véctơ chi phí sản xuất đơn vị.

Bài toán đặt ra là tìm phương án sản xuất $x \in \mathbb{R}^n_+$ và véctơ chi phí sản xuất đơn vị $p \in \mathbb{R}^n_+$, thỏa mãn $(p_1x_1, \ldots, p_nx_n) \in \Delta$, trong đó Δ được cho bởi (3.16). Điều đó có nghĩa là chúng ta cần giải hệ sau:

$$x = \sum_{i=1}^{m} \theta_i a^i,\ \theta_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \ldots, m,\ \sum_{i=1}^{m} \theta_i = 1, \tag{3.17}$$

$$p_j \geq 0\ j = 1, 2, \ldots, n,\ p^T a^i \leq 1 \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{3.18}$$

$$p_j x_j = \alpha_j \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.19}$$

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in\ \Delta. \tag{3.20}$$

Rõ ràng, hệ (3.2)-(3.4) là trường hợp đặc biệt của hệ (3.17)-(3.20) khi $k = 1$, nghĩa là khi Δ chỉ gồm một véctơ. Sau đây, chúng ta sẽ chỉ ra rằng việc giải hệ (3.17)-(3.20) được quy về việc giải một trong hai bài toán tối ưu đa mục tiêu.

Ta định nghĩa

$$\begin{aligned} f_r(x) &= \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j^r} \quad r = 1, 2, \ldots, k, \\ g_r(p) &= \prod_{j=1}^{n} p_j^{\alpha_j^r} \quad r = 1, 2, \ldots, k. \end{aligned}$$

Xét bài toán tối ưu đa mục tiêu

$$\begin{aligned}&\max(f_1(x), f_2(x), ..., f_k(x))\\ &x \in X,\end{aligned} \tag{3.21}$$

và bài toán đối ngẫu

$$\begin{aligned}&\max(g_1(p), g_2(p), ..., g_k(p))\\ &p \in P,\end{aligned} \tag{3.22}$$

trong đó X là tập các véctơ x thỏa mãn (3.17) và P là tập các véctơ p thỏa mãn (3.18).

Bổ đề 3.2.1. *$\overline{x} \in X$ là nghiệm hữu hiệu Pareto của* (3.21) *nếu và chỉ nếu tồn tại $\mu \in \mathbb{R}^k_+$ sao cho $\overline{x}$ là nghiệm tối ưu của bài toán*

$$\max\{\prod_{r=1}^{k} f_r(x)^{\mu_r} | \ \ x \in X\}. \tag{3.23}$$

Chứng minh. Ta có $\ln(f_r(x))$ là hàm lõm chặt trên $\mathbb{R}^n_{++}$ với mọi $r = 1, 2, ..., k$ và

$$\ln\left(\prod_{r=1}^{k} f_r(x)^{\mu_r}\right) = \sum_{r=1}^{k} \mu_r \ln(f_r(x)).$$

Do đó, bổ đề này có thể được suy ra trực tiếp từ Định lý 2.2.6 và Định lý 2.2.7. □

Chứng minh tương tự, chúng ta có bổ đề sau.

Bổ đề 3.2.2. *$\overline{p} \in P$ là nghiệm hữu hiệu Pareto của* (3.22) *nếu và chỉ nếu tồn tại $\mu \in \mathbb{R}^k_+$ sao cho $\overline{p} \in P$ là nghiệm tối ưu của bài toán*

$$\max\{\prod_{r=1}^{k} g_r(p)^{\mu_r} | \ \ p \in P\}. \tag{3.24}$$

Cho $\overline{x}$ là nghiệm hữu hiệu Pareto của (3.21) và $\overline{p}$ là nghiệm hữu hiệu Pareto của (3.22). Khi đó, $(\overline{x}, \overline{p})$ được gọi là *cặp nghiệm hữu hiệu Pareto gốc-đối ngẫu* nếu tồn tại $\mu \in \mathbb{R}^k_+$ sao cho $\overline{x}$ là nghiệm hữu hiệu Pareto của (3.23) và $\overline{p}$ là nghiệm hữu hiệu Pareto của (3.24).

Định lý sau chỉ ra (3.23) và (3.24) là đối ngẫu liên hợp của nhau.

Định lý 3.2.3. *Cho* $(\overline{x}, \overline{p})$ *là nghiệm của hệ* (3.17)-(3.20)*. Khi đó,* $(\overline{x}, \overline{p})$ *là cặp nghiệm hữu hiệu Pareto gốc-đối ngẫu.*

Chứng minh. Từ (3.20), tồn tại $\mu \in \mathbb{R}^k_+$ sao cho

$$\alpha \;=\; \sum_{r=1}^{k} \mu_r \alpha^r. \tag{3.25}$$

Theo Định lý 3.1.4, ta có $\overline{x}$ là nghiệm tối ưu của bài toán (3.8) và $\overline{p}$ là nghiệm tối ưu của bài toán (3.9). Mặt khác, từ (3.25) suy ra

$$\begin{aligned}
f(x) = \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j} \;&=\; \prod_{j=1}^{n} x_j^{\sum_{r=1}^{k} \mu_r \alpha_j^r} \\
&=\; \prod_{j=1}^{n} \prod_{r=1}^{k} x_j^{\mu_r \alpha_j^r} \\
&=\; \prod_{r=1}^{k} \prod_{j=1}^{n} x_j^{\mu_r \alpha_j^r} \\
&=\; \prod_{r=1}^{k} \left(\prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j^r} \right)^{\mu_r} \\
&=\; \prod_{r=1}^{k} f_r(x)^{\mu_r}.
\end{aligned}$$

Điều này cho ta thấy bài toán (3.8) lại chính là bài toán (3.23). Tương tự, ta cũng chứng minh được

$$g(p) \;=\; \prod_{r=1}^{k} g_r(p)^{\mu_r},$$

do đó, bài toán (3.9) trùng với (3.24). Như vậy, $(\overline{x}, \overline{p})$ là cặp nghiệm hữu hiệu Pareto gốc-đối ngẫu. $\square$

Định lý 3.2.4. *Giả sử $(\overline{x}, \overline{p})$ là cặp nghiệm hữu hiệu Pareto gốc-đối ngẫu. Khi đó, $(\overline{x}, \overline{p})$ là nghiệm của hệ* (3.17)-(3.20).

Chứng minh. Cho $(\overline{x}, \overline{p})$ là cặp nghiệm hữu hiệu Pareto gốc-đối ngẫu, nghĩa là tồn tại véctơ $\mu \in \mathbb{R}^k_+$ sao cho $\overline{x}$ là nghiệm tối ưu của (3.23) và $\overline{p}$ là nghiệm tối ưu của (3.24). Bằng cách chứng minh tương tự như ở Định lý 3.2.3, ta có $\overline{x}$ là nghiệm tối ưu của (3.8) và $\overline{p}$ là nghiệm tối ưu của (3.9), trong đó α được xác định bởi (3.25). Theo Định lý 3.1.4, $(\overline{x}, \overline{p})$ là nghiệm của hệ (3.17)-(3.20). $\square$

Từ kết quả của định lý trên chúng ta thu được hệ quả sau đây.

Hệ quả 3.2.5. *Véctơ $x \in \mathbb{R}^n_+$ là nghiệm hữu hiệu Pareto của* (3.21) *nếu và chỉ nếu tồn tại $p \in \mathbb{R}^n_+$ thỏa mãn hệ tuyến tính* (3.18)-(3.20).

Hệ quả này cho phép chúng ta kiểm tra một véctơ $x \in \mathbb{R}^n_+$ cho trước có là nghiệm hữu hiệu hay không một cách đơn giản.

3.3 Tối ưu với các ràng buộc phân bố nguồn lực

Xét bài toán

$$\max\ q(x) \tag{3.26}$$

$$x = \sum_{i=1}^{m} \theta_i a^i,\ \theta_i \geq 0\ i = 1, 2, \ldots, m,\ \sum_{i=1}^{m} \theta_i = 1, \tag{3.27}$$

$$p_j \geq 0\ j = 1, 2, \ldots, n,\ p^T a^i \leq 1\ i = 1, 2, \ldots, m, \tag{3.28}$$

$$p_j x_j = \alpha_j\ j = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.29}$$

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in\ \Delta. \tag{3.30}$$

trong đó $q(x)$ là hàm lõm liên tục trên $\mathbb{R}^n_+$ sao cho $q(x) > 0 \quad \forall x > 0$.

Nếu $q(x)$ là hàm biểu diễn lợi ích của công ty tại phương án sản xuất $x \in \mathbb{R}^n_+$ thì (3.26) - (3.30) trở thành bài toán tìm phương án sản xuất sao cho lợi ích của công ty là lớn nhất.

Ký hiệu X_E là tập gồm các phương án sản xuất, lúc này bài toán (3.26)-(3.30) được viết lại như sau:

$$\max\{q(x)| \quad x \in X_E\}. \tag{3.31}$$

Theo Định lý 3.2.3 và Định lý 3.2.4, X_E cũng chính là tập nghiệm hữu hiệu Pareto của bài toán tối ưu đa mục tiêu (3.21). Do đó, (3.31) là bài toán tối ưu trên tập nghiệm hữu hiệu Pareto của bài toán tối ưu đa mục tiêu. Đối với bài toán dạng này đã có nhiều phương pháp giải được đưa ra (xem [11],[13], [22], [27]).

Sau đây, chúng tôi sẽ sử dụng phương pháp được đưa ra trong các bài báo [22], [27] để biến đổi (3.31) về bài toán cực đại hàm tựa lồi trên một tập lồi compắc trong không gian k chiều. Do đó, bài toán sau khi biến đổi có thể được giải bằng phương pháp xấp xỉ ngoài như ở [27].

Bằng cách đổi thang đơn vị nếu cần thiết, không mất tính tổng quát chúng ta có thể giả thiết rằng $\min_{j=1,\dots,n} a^i_j > 2$ với mọi $i = 1, \dots, m$. Điều này dẫn đến

$$\min_{j=1,\dots,n} x_j > 2 \quad \forall x \in X. \tag{3.32}$$

Đặt

$$\begin{aligned} M &= \left\{\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k) \in \mathbb{R}^n_+ | \ \max_{x \in X} \prod_{r=1}^{k} f_r^{\eta_r}(x) \le 3\right\}, \\ h(\eta) &= \max\left\{q(x)| \ \prod_{r=1}^{k} f_r^{\eta_r}(x) \ge 3, \ x \in X\right\} \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^n_+. \end{aligned}$$

(quy ước $\max \emptyset = 0$).

Chú ý rằng với mỗi $\eta \in \mathbb{R}^k_+$ hàm

$$\ln(\prod_{r=1}^{k} f_r^{\eta_r}(x)) = \sum_{r=1}^{k} \eta_r \ln(f_r(x)) = \sum_{r=1}^{k} \eta_r \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \ln(x_j)$$

là lõm. Điều này cùng với giả thiết g lõm dẫn đến giá trị của $h(\eta)$ được xác định bởi việc giải bài toán cực đại hàm lõm trên tập lồi compắc (bài toán này tương đương với bài toán tối ưu lồi).

Bổ đề 3.3.1. *M là tập lồi, compắc và khác rỗng trong $\mathbb{R}^k_+$.*

Chứng minh. Với bất kỳ $\eta \in \mathbb{R}^k_+$ ta có

$$\max_{x\in X} \prod_{r=1}^{k} f_r^{\eta_r}(x) \leq 3 \;\Leftrightarrow\; \max_{x\in X} \sum_{r=1}^{k} \eta_r \ln(f_r(x)) \leq \ln(3).$$

Dễ thấy $\eta = 0$ thỏa mãn bất đẳng thức trên. Vì vậy, $M \neq \emptyset$.

Hàm

$$h'(\eta) \;=\; \max_{x\in X} \sum_{r=1}^{k} \eta_r \ln(f_r(x))$$

là hàm cận trên của họ các hàm tuyến tính theo η nên theo Định lý 1.1.17 và Định lý 1.1.18 ta có $h'(\eta)$ là lồi liên tục trên $\mathbb{R}^k_+$. Bởi vậy, M là tập lồi đóng. Hơn nữa, từ (3.32) suy ra $\ln f_r(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^r \ln(x_j) > \ln(2)$. Do đó,

$$\begin{aligned}
\eta \in M \;\;&\Leftrightarrow\;\; \eta \geq 0,\; h'(\eta) \leq \ln(3)\\
&\Rightarrow\;\; \eta \geq 0,\; \sum_{r=1}^{k} \eta_r \ln(f_r(x)) \leq \ln(3) \quad \forall x \in X\\
&\Rightarrow\;\; \eta \geq 0,\; \sum_{r=1}^{k} \eta_r \ln(2) \leq \ln(3).
\end{aligned}$$

Vậy, M bị chặn. □

Bổ đề 3.3.2. *Hàm h là nửa liên tục trên và tựa lồi ở trên $\mathbb{R}^k_+$.*

Chứng minh. Ta xây dựng ánh xạ đa trị $C: \mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^n_+$ bởi

$$C(\eta) = \{x \in X| \; 3 - \prod_{r=1}^{k} f_r^{\eta_r}(x) \leq 0\}.$$

Vì $f_r(x)$, $r = 1, 2, \ldots, k$ liên tục theo $x \in \mathbb{R}^n_+$, nên áp dụng Mệnh đề 1.1.26 ta chứng minh được rằng C là ánh xạ nửa liên tục trên ở trên $\mathbb{R}^k_+$. Vì X là compắc nên $C(\eta)$ là compắc đều gần η với mọi $\eta \geq 0$. Từ Định lý 1.1.28 suy ra h là hàm nửa liên tục trên ở trên $\mathbb{R}^k_+$. Cho $\eta \in \mathbb{R}^k_+$, $\eta' \in \mathbb{R}^k_+$ và $\xi \in (0, 1)$, khi đó:

$$\left\{x \in X| \; \sum_{r=1}^{k} \eta_r \ln(f_r(x)) \geq \ln(3)\right\} \cup \left\{x \in X| \; \sum_{r=1}^{k} \eta'_r \ln(f_r(x)) \geq \ln(3)\right\}$$
$$\supseteq \left\{x \in X| \; \sum_{r=1}^{k} (\xi\eta_r + (1-\xi)\eta'_r) \ln(f_r(x)) \geq \ln(3)\right\}.$$

Suy ra

$$\max\{h(\eta), h(\eta')\} \;\geq\; h(\xi\eta + (1-\xi)\eta').$$

Vậy, h là tựa lồi. □

Bây giờ chúng ta sẽ chứng minh rằng bài toán (3.31) tương đương với bài toán cực đại hàm tựa lồi trên tập lồi compắc sau.

$$\max\{h(\eta) : \; \eta \in M\}. \tag{3.33}$$

Vì h nửa liên tục trên và M là compắc, nên giá trị cực đại h^* của hàm h trên M là tồn tại.

Định lý 3.3.3. *Giá trị tối ưu của các bài toán* (3.31) *và* (3.33) *là bằng nhau:* $q^* = h^*$. *Ngoài ra, nếu* η^* *là nghiệm tối ưu của* (3.33) *thì điểm cực đại* x^* *của hàm* $\prod_{r=1}^{k} f_r^{\eta_r^*}(x)$ *trên* X *là nghiệm tối ưu của* (3.31).

Chứng minh. Cho x^* là nghiệm tối ưu của (3.31), nghĩa là $x^* \in X_E$, $q(x^*) = q^*$. Vì $x^* \in X_E$, nên tồn tại véctơ $\mu \in \mathbb{R}^k_+$ sao cho x^* là nghiệm tối ưu của (3.23). Ta khẳng định rằng tồn tại $\gamma > 0$ sao cho

$$\prod_{r=1}^{k} f_r^{\gamma\mu_r}(x^*) = 3. \tag{3.34}$$

Thực vậy, đặt

$$\omega = \prod_{r=1}^{k} f_r^{\mu_r}(x^*).$$

Theo (3.32) $x_j^* > 2, j = 1, \ldots, n$, do đó $\ln(\omega) > 0$. Lấy

$$\gamma = \frac{\ln(3)}{\ln(\omega)},$$

ta có $\gamma \ln(\omega) = \ln(3)$ hay $\ln(\prod_{r=1}^{k} f_r^{\gamma\mu_r}(x^*)) = \ln(3)$. Vậy (3.34) đúng với γ đã chọn. Bây giờ, đặt $\eta = \gamma\mu$. Dễ thấy

$$\max_{x\in X} \prod_{r=1}^{k} f_r^{\eta_r}(x) = \max_{x\in X} \left(\prod_{r=1}^{k} f_r^{\mu_r}(x) \right)^{\gamma} = \left(\prod_{r}^{k} f_r^{\mu_r}(x^*) \right)^{\gamma} = 3,$$

điều này suy ra $\eta \in M$. Do vậy,

$$\begin{aligned} q^* &= q(x^*) \\ &\leq \sup \left\{ q(x) | \prod_{r=1}^{k} f_r^{\eta_r}(x) \geq 3, \ x \in X \right\} \\ &= h(\eta) \\ &\leq h^*. \end{aligned}$$

Điều này dẫn đến $h^* > 0$. Đảo lại, giả sử η^* là nghiệm tối ưu của (3.33), nghĩa là $\eta^* \in M$ và $h(\eta^*) = h^*$. Giả sử x^* là một điểm cực đại của hàm $\prod_{r=1}^{k} f_r^{\eta_r^*}(x)$ trên X. Theo Bổ đề 3.2.1, x^* là nghiệm hữu hiệu Pareto của (3.21) và do đó, $x^* \in X_E$. Vì $\eta^* \in M$, nên ta có

$$\begin{aligned} \prod_{r=1}^{k} f_r^{\eta_r^*}(x^*) &= \sup_{x\in X} \prod_{r=1}^{k} f_r^{\eta_r^*}(x) \\ &\leq 3. \end{aligned}$$

Nếu

$$\prod_{r=1}^{k} f_r^{\eta_r^*}(x^*) \; < \; 3,$$

thì

$$\begin{aligned} h(\eta^*) \; &= \; \sup\left\{ q(x) | \; \prod_{r=1}^{k} f_r^{\eta_r^*}(x) \geq 3, \; x \in X \right\} \\ &= \; \sup \emptyset \\ &= \; 0 \\ &< \; h^*, \end{aligned}$$

điều này là vô lý. Do đó,

$$\prod_{r=1}^{k} f_r^{\eta_r^*}(x^*) \; = \; 3$$

và hơn nữa,

$$\begin{aligned} h^* \; &= \; h(\eta^*) \\ &= \; \sup\left\{ q(x) | \; \prod_{r=1}^{k} f_r^{\eta_r^*}(x) \geq 3, \; x \in X \right\} \\ &= \; q(x^*) \\ &\leq \; q^*. \end{aligned}$$

Hệ quả là $q^* = h^*$ và do đó, x^* là nghiệm tối ưu của (3.31). $\square$

Như vậy, bài toán tối ưu không lồi phức tạp (3.31) trong không gian n chiều có thể được biến đổi về bài toán đơn giản hơn (3.33) trong không gian k chiều. Trong thực tế thì k thường nhỏ hơn nhiều so với n, do đó chúng ta có thể giải bài toán sau biến đổi (3.33) bằng phương pháp xấp xỉ ngoài (xem [27]).

3.4 Quy hoạch hai cấp và tối ưu đơn điệu

Trong phần này, chúng tôi sẽ chỉ ra rằng bài toán (3.33) tương đương với bài toán cơ bản của tối ưu đơn điệu. Phương pháp mà chúng tôi tiếp cận cơ bản dựa trên quy hoạch hai cấp và lý thuyết tối ưu đơn điệu của H. Tụy đưa ra ở [32], [33] và [34].

Cho $x \in X$ là một phương án sản xuất ứng với véctơ phân bố nguồn lực $\alpha = \sum_{r=1}^{k} \mu_r \alpha^r \in \Delta$. Theo Định lý 3.2.3, $x = x(\mu)$ là điểm cực đại duy nhất của hàm lõm chặt $\ln(\prod_{r=1}^{k} f_r^{\mu_r}(x))$ trên tập đa diện X. Một hàm lợi ích v có thể phụ thuộc vào cả x và μ, chẳng hạn $v(\mu, x) = q(x) - c(\mu, x)$, trong đó $q(x)$ là tổng doanh thu dựa trên giá bán và $c(\mu, x)$ là tổng chi phí hoạt động (bao gồm chi phí sản xuất và chi phí chung).

Bây giờ, chúng ta xét bài toán cực đại hàm $v(\mu, x)$ trên tập các véctơ $(\mu, x) \in \mathbb{R}_+^k \times X$ sao cho $x \in \operatorname{argmax}_{x' \in X} \prod_{r=1}^{k} f_r^{\mu_r}(x')$, nghĩa là

$$v(\mu, x) \ \to \ \max, \tag{3.35}$$

$$\mu \in \mathbb{R}_+^k, \ x \in X \tag{3.36}$$

$$x \in \ \operatorname{argmax}_{x \in X} \prod_{r=1}^{k} f_r^{\mu_r}(x). \tag{3.37}$$

Đây là bài toán quy hoạch hai cấp đã được nghiên cứu trong [33]. Sử dụng cách tiếp cận như trong [33], ta đặt

$$G = \{(\mu, t) | \ t \geq \max_{x \in X} \prod_{r=1}^{k} f_r^{\mu_r}(x)\} \tag{3.38}$$

$$F(\mu, t) = \max\{v(\mu, x) | \ x \in X, \ t \leq \prod_{r}^{k} f_r^{\mu_r}(x)\}. \tag{3.39}$$

Bổ đề 3.4.1. *Quy hoạch hai cấp* (3.35)-(3.37) *tương đương với bài toán tối ưu sau:*

$$\max\{F(\mu, t) | \ (\mu, t) \in G\}. \tag{3.40}$$

Chứng minh. Dễ thấy (3.40) là tương đương với

$$\max\{v(\mu,x)|\ \max_{x'\in X}\prod_{r=1}^{k} f_r^{\mu_r}(x') \le t \le \prod_{r=1}^{k} f_r^{\mu_r}(x),\ x\in X\}. \tag{3.41}$$

Thực vậy, giả sử $(\bar\mu,\bar t)$ là nghiệm tối ưu của (3.40) với giá trị tối ưu $\bar v = F(\bar\mu,\bar t)$. Khi đó, ta có $(\bar\mu,\bar t)\in G$ và do đó, $\bar t \ge \max_{x\in X}\prod_{r=1}^{k} f_r^{\bar\mu_r}(x)$. Từ (3.39) ta giả thiết $F(\bar\mu,\bar t) = v(\bar\mu,\bar x)$, trong đó $\bar x\in X,\ \bar t \le \prod_{r=1}^{k} f_r^{\bar\mu_r}(\bar x)$. Do đó

$$\max_{x\in X}\prod_{r=1}^{k} f_r^{\bar\mu_r}(x) \le \bar t \le \prod_{r=1}^{k} f_r^{\bar\mu_r}(\bar x),\ \bar x\in X.$$

Điều này dẫn đến $\bar v = v(\bar\mu,\bar x) \le v^*$, với v^* là giá trị tối ưu của (3.41).

Đảo lại, cho (μ^*,x^*) là lời giải của bài toán (3.41) với $v(\mu^*,x^*) = v^*$. Khi đó, tồn tại t sao cho

$$\max_{x\in X}\prod_{r=1}^{k} f_r^{\mu_r^*}(x) \le t \le \prod_{r=1}^{k} f_r^{\mu_r^*}(x^*),\ x^*\in X,$$

điều này suy ra $(\mu^*,t)\in G$ và vì vậy, $v^* \le F(\mu^*,t^*) \le \bar v$. Do đó, $\bar v = v^*$.

Vì ràng buộc của (3.41) tương đương với $x\in \operatorname{argmax}_{x\in X}\prod_{r=1}^{k} f_r^{\mu_r}(x)$, do đó (3.41) tương đương với (3.35)-(3.37). Bổ đề được chứng minh. □

Ta viết lại bài toán (3.41) dưới dạng

$$\max\{v(\mu,x)|\ \prod_{r=1}^{k} f_r^{\mu_r}(x) = \max_{x'\in X}\prod_{r=1}^{k} f_r^{\mu_r}(x'), x\in X\}. \tag{3.42}$$

Điều này cùng với kết quả của Bổ đề 3.4.1 cho ta thấy rằng bài toán (3.40) không thực sự phụ thuộc vào giá trị của t, tức là t chỉ đóng vai trò trung gian. Do đó, chúng ta có thể lấy t là hằng số $\bar t$ sao cho bất đẳng thức $\bar t \le \prod_{r=1}^{k} f_r^{\mu_r}(x)$ đúng với ít nhất một véctơ $x\in X$. Bây giờ, ta đặt

$$\overline{G} := \{\mu\in\mathbb{R}_+^k|\ \prod_{r=1}^{k} f_r^{\mu_r}(x)\} \le \bar t\ \forall x\in X\}, \tag{3.43}$$

$$\overline{F}(\mu) := \max\{v(\mu,x)|\ \prod_{r=1}^{k} f_r^{\mu_r}(x) \ge \bar t,\ x\in X\ \}. \tag{3.44}$$

Chúng ta có định lý sau.

Định lý 3.4.2. *Quy hoạch hai cấp* (3.35)-(3.37) *tương đương với bài toán tối ưu đơn điệu sau:*

$$\max\{\overline{F}(\mu)|\ \mu \in \overline{G}\}. \tag{3.45}$$

Chứng minh. Sự tương đương giữa (3.35)-(3.37) và (3.45) được suy ra từ các lập luận ở trên. Do đó, để hoàn thành chứng minh ta cần chỉ ra (3.45) là bài toán tối ưu đơn điệu.

Giả sử $\mu' \geq \mu$. Từ giả thiết (3.32) $x_j > 2\ \forall j$, ta có $\prod_{r=1}^{k} f_r^{\mu'_r}(x) \geq \prod_{r=1}^{k} f_r^{\mu_r}(x)$ với mọi $x \in X$ cố định, do đó, hàm $\prod_{r=1}^{k} f_r^{\mu_r}(x)$ là đơn điệu tăng theo μ. Điều này dẫn đến $\overline{F}(\mu)$ là đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}_+^k$. Mặt khác, từ $0 \leq \mu' \leq \mu \in \overline{G}$ suy ra $\mu' \in \overline{G}$ và do đó, $\overline{G}$ là tập chuẩn tắc trong $\mathbb{R}_+^k$. Định lý được chứng minh. $\square$

Nhận xét 3.4.3. Ở đây, chúng ta thấy rằng (3.45) là bài toán tối ưu đơn điệu cơ bản. Nếu $v(\mu, x)$ là hàm đơn điệu tăng hoặc chỉ cần là hàm d.m. (hiệu của hai hàm đơn điệu tăng), thì bài toán con (3.44) xác định $\overline{F}(\mu)$ tại μ có thể được giải bằng các phương pháp mà H. Tụy đã đưa ra trong các bài báo [32] và [34]. Bởi vậy, bài toán (3.45) có thể được giải bằng các phương pháp đã biết của tối ưu đơn điệu. Đặc biệt, khi $v(\mu, x) = q(x)$ ta có $\overline{F}(\mu) = \max\{q(x)|\ \prod_{r=1}^{k} f_r^{\mu_r}(x) \geq \bar{t},\ x \in X\}$. Vì $3 \leq \max_{x\in X} \prod_{r=1}^{k} f_r^{\mu_r}(x)$, nên ta có thể lấy $\bar{t} = 3$. Trong trường hợp này, bài toán (3.45) trùng với bài toán (3.33), do đó nó có thể được giải bởi phương pháp xấp xỉ ngoài như đã chỉ ra trong Mục 3.3.

Kết luận của Chương 3

Các kết quả chính của chương này bao gồm:

- Bài toán với một ràng buộc phân bố nguồn lực tương đương với bài toán tối ưu lồi trong Định lý 3.1.3 và Định lý 3.1.4.

- Bài toán với nhiều ràng buộc phân bố nguồn lực tương đương với bài toán tối ưu lồi đa mục tiêu trong Định lý 3.2.3, Định lý 3.2.4 và Hệ quả 3.2.5.

- Bài toán tối ưu không lồi với ràng buộc về phân bố nguồn lực tương đương với bài toán cực đại hàm tựa lồi trên tập lồi compắc trong Định lý 3.3.3 hay bài toán cơ bản của tối ưu đơn điệu trong trong Định lý 3.4.2.

Kết luận của luận án

Trong luận án này chúng tôi đã thu được những kết quả chính sau.

1. Lớp các hàm tựa lõm, nửa liên tục trên và đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^n_+$ thỏa mãn tính tự liên hợp đối với phép biến đổi tựa liên hợp, đưa ra khái niệm tựa dưới vi phân và chứng minh một số tính chất về khái niệm mới này.

2. Đưa ra điều kiện cần và đủ tối ưu dưới dạng mở rộng của nguyên lý Fermat và xây dựng sơ đồ đối ngẫu mạnh, đối xứng cho bài toán tối ưu vô hướng không lồi.

3. Đưa ra đối ngẫu mạnh và đối xứng cho bài toán tối ưu đa mục tiêu không lồi. Ngoài ra, chúng tôi còn đưa ra đẳng thức đối ngẫu giúp đặc trưng cho cặp nghiệm hữu hiệu yếu Pareto của bài toán gốc và đối ngẫu.

4. Trên cơ sở của các kết quả đã đạt được về đối ngẫu liên hợp, chúng tôi áp dụng vào nghiên cứu các bài toán sản xuất trong kinh tế và thu được các kết quả sau:
   a) Bài toán với một ràng buộc phân bố nguồn lực tương đương với bài toán tối ưu lồi.
   b) Bài toán với nhiều ràng buộc phân bố nguồn lực tương đương với bài toán tối ưu lồi đa mục tiêu.
   c) Bài toán tối ưu không lồi với ràng buộc về phân bố nguồn lực được quy về bài toán cực đại hàm tựa lồi trên tập lồi compắc hay về bài toán cơ bản của tối ưu đơn điệu.

Danh mục công trình của tác giả liên quan đến luận án

1 P. T. Thach and T. V. Thang, Conjugate duality for vector-maximization problems, *J. Math. Anal. Appl.,* 1(2011)94-102.

2 P. T. Thach and T. V. Thang, Problems with resource allocation constraints and optimization over the efficient set, *J. Glob. Optim.,* 58(2014) 481-495.

3 T. V. Thang, Conjugate duality in nonconvex optimization problems and optimization over the weakly efficient set (submit in Acta Mathematica Vietnamica).

Tài liệu tham khảo

Tiếng Việt

[1] Nguyễn Anh Đào, *Bài toán sản xuất Leontief và đối ngẫu*, Luận văn thạc sĩ, Đại học Sư phạm Hà Nội 2 (2012).

[2] Phan Thiên Thạch, Các đặc trưng cho tính phi dư thừa trong bài toán sản xuất Leontief, *Tạp chí Ứng dụng Toán học*, 2(2003).

[3] Hoàng Tụy, *Lý thuyết tối ưu*, Bài giảng lớp cao học Viện Toán học (2006).

Tiếng Anh

[4] A. Cambini, L. Martein, *Generalized Convexity and Optimization: Theory and Applications* (Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems), Springer, (2009).

[5] N. Dinh, J. J. Strodiot, V. H. Nguyen, Duality and optimality conditions for generalized equilibrium problems involving DC functions, J. Glob. Optim., 48(2010) 183-208.

[6] D. Gale, H. W. Kuhn and A. W. Tucker, Linear programming and the theory of game, *Activ. Anal. Produc. Allocation*, 13(1951), 317-335.

[7] R. C. Griffin, J. M. Montgomery, and M. E. Rister, Selecting functional form in production function analysis, *Western Journal of Agricultural Economics*, 12(1987) 216-227.

[8] X. X. Huang, X. Q. Yang, Nonlinear Lagrangian for multiobjective optimization and applications to duality and exact penalization, *SIAM J. Optimization*, 13 (3)(2002), 675–692.

[9] H. W. Kuhn and A. W. Tucker, Nonlinear programming, *Proceedings of the second berkeley symposium on mathematical statistics and probability*, (1951), 481-492.

[10] D. T Luc, *Theory of Vector Optimization*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 319. Springer-Verlag, Berlin (1989).

[11] L. T. Luc and L. D. Muu, *Global Optimization Aproach to Optimizing over the Efficient Set*, (Lecture Notes in Econom. and Math. Systems 452), Springer, Berlin (1997).

[12] D. G. Luenberger, *Microeconomic Theory*, McGraw-Hill, Inc, New York (1995).

[13] L. D. Muu, A convex-concave programming method for optimizing over the efficient set, *Acta Math. Vietnam.*, 25(2000), 67-85.

[14] V. N. Phat and V. Jeyakumarb, Stability, stabilization and duality for linear time-varying systems, *Optimization: A Journal of Mathematical Programming and Operations Research*, 59(2010), 447-460.

[15] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1970).

[16] P. H. Sach, D. S. Kim, L. A. Tuan, G. M. Lee, Duality results for generalized vector variational inequalities with set-valued maps, *J. Optim. Theory Appl.*, 136 (2008),105-123.

[17] Y. Sawaragi, H. Nakayama and T. Tanino, *Theory of Multiobjective Optimization*, Academic Press, Orlando, Florida (1985).

[18] D. Solow, *Linear Programming: An Introduction to Finite Improvement Algorithms: Second Edition*, North-Holland, (1984).

[19] T. Tanino, Conjugate duality in vector optimization, *J. Math. Anal. Appl.*, 167(1992), 84–97.

[20] T. Tanino and Y. Sawaragi, Conjugate maps and duality in multiobjective optimization, *J. Optim. Theory Appl.*, 31(1980), 473–499.

[21] P. T. Thach, Quasiconjugates of functions, duality relationship between quasiconvex minimization under a reverse convex constraint and quasiconvex maximization under a convex constraint, and applications, *J. Math. Anal. Appl.*, 159 (1991) 299–322.

[22] P. T. Thach, Global optimality criterion and duality with zero gap in nonconvex optimization, *SIAM J. Math. Anal.*, 24(1993), 1537-1556.

[23] P. T. Thach, A nonconvex duality with zero gap and applications, *SIAM J. Optimization*, 4(1994), 44-64.

[24] P.T. Thach, Diewert–Crouzeix conjugation for general quasiconvex duality and applications, *J. Optim. Theory Appl.*, 86(1995), 719–743.

[25] P. T. Thach, Dual preference in Leontief production problem and its extension, *Vietnam J. Math.*, 32(2004), 209-218.

[26] P. T. Thach, Symmetric duality for homogeneous multiple-objective problems, *J. Optim. Theory Appl.*, DOI 10. 1007/s10957-011-9822-6, Published online: 18 November 2011.

[27] P. T. Thach, H. Konno and D. Yokota, Dual approach to minimization on the set of Pareto-optimal solutions, *J. Optim. Theory Appl.*, 88(1996), 689-707.

[28] P. T. Thach and T. V. Thang, Conjugate duality for vector-maximization problems, *J. Math. Anal. Appl.,* 1(2011)94-102.

[29] P. T. Thach and T. V. Thang, Problems with resource allocation constraints and optimization over the efficient set, *J. Glob. Optim.,* 58(2014) 481-495.

[30] T. V. Thang, Conjugate duality in nonconvex optimization problems and optimization over the weakly efficient set (submit in Acta Mathematica Vietnamica).

[31] H. Tuy, *Convex Analysis and Global Optimization*, Kluwer (1998).

[32] H. Tuy, Monotonnic optimization: Problem and solution approaches, *SIAM J. Optimization*, 11(2000), 464-494.

[33] H. Tuy, A. Migdalas and N. T. Hoai-Phuong, A novel approach to bilevel nonlinear programming, *J. Glob. Optim.*, 38(2007), 527-554.

[34] H. Tuy, M. Minoux and N.T. Hoai-Phuong, Discrete monotonic mptimization with application to a discrete location problem, *SIAM J. Optimization*, 17(2006), 78-97.

[35] P. L. Yu, *Multiple-Criteria Decision Making*, Plenum Press, New York (1985).