VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM
VIỆN TOÁN HỌC

NGUYỄN HỮU SÁU

TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA HỆ ĐỘNG LỰC TUYẾN TÍNH SUY BIẾN CÓ TRỄ

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HÀ NỘI - 2017

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM
VIỆN TOÁN HỌC

NGUYỄN HỮU SÁU

TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA HỆ ĐỘNG LỰC TUYẾN TÍNH SUY BIẾN CÓ TRỄ

Chuyên ngành: Phương trình vi phân và tích phân
Mã số: 9 46 01 03

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Tập thể hướng dẫn khoa học:
1. GS. TSKH. VŨ NGỌC PHÁT
2. PGS. TS. TRỊNH TUÂN

HÀ NỘI - 2017

TÓM TẮT

Luận án nghiên cứu tính ổn định mũ và tính ổn định hóa được dạng mũ cho một số lớp hệ phương trình suy biến tuyến tính có trễ trong cả hai trường hợp hệ liên tục và rời rạc. Luận án gồm ba chương.

Chương 1

Chúng tôi giới thiệu một số kiến thức cơ sở về bài toán ổn định, bài toán ổn định hóa cho hệ phương trình có trễ trong hai trường hợp hệ liên tục và rời rạc. Ngoài ra, chúng tôi trình bày lại một số bổ đề kỹ thuật bổ trợ được sử dụng trong chứng minh các kết quả chính của luận án ở các chương tiếp theo.

Chương 2

Trong chương hai chúng tôi đưa ra điều kiện cần và đủ đảm bảo hệ phương trình vi phân suy biến có trễ là hệ dương, tiếp đến dựa vào tính chất dương của hệ chúng tôi đưa ra các điều kiện đủ đảm bảo tính ổn định mũ của hệ. Bằng cách sử dụng hàm điều khiển ngược có nhớ (memory state feedback control), chúng tôi đưa ra các tiêu chuẩn đảm bảo cho tính ổn định hóa được dạng mũ của hệ suy biến dương có trễ tương ứng. Các điều kiện được đưa ra dưới dạng bài toán quy hoạch tuyến tính qua đó có thể giải số bằng máy tính.

Chương 3

Trong chương này, hệ rời rạc suy biến được nghiên cứu: chúng tôi đưa ra các điều kiện cần và đủ đảm bảo tính chất dương của hệ rời rạc suy biến với trễ biến thiên, đồng thời chúng tôi cũng chứng minh điều kiện cần và đủ cho bài toán ổn định hệ rời rạc suy biến dương có trễ biến thiên tương ứng. Sử dụng hàm điều khiển ngược chúng tôi đưa ra một số điều kiện đủ cho bài toán ổn định hóa hệ rời rạc suy biến dương có trễ, các điều kiện được biểu diễn dưới dạng bài toán quy hoạch tuyến tính.

ABSTRACT

This thesis deals with the problem of stability and stabilization for linear singular positive systems with delay. The thesis consists of three chapters.

Chapter 1

In this chapter, we present problem statement of stability, stabilization for functional differential equations with delay. Some technical propositions are presented for the proof of the main results in Chapter 2 and Chapter 3.

Chapter 2

We present a necessary and sufficient condition for positivity of linear singular continuous-time systems with delay. Moreover, we establish some sufficient conditions for exponential stability. By using memory state feedback control, we derive some criteria for exponential stabilization of linear singular positive continuous-time systems with delay. The conditions are presented in terms of linear programming problem.

Chapter 3

We first present a necessary and sufficient condition for positivity of linear singular discrete-time systems with time-varying delay, and then we establish necessary and sufficient conditions for exponential stability of such systems. Moreover, we solve the exponential stabilization problem for the systems by using memoryless state feedback control. The conditions are presented in terms of linear programming problem.

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi, được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của GS. TSKH. Vũ Ngọc Phát và PGS. TS. Trịnh Tuân. Các kết quả viết chung với tác giả khác đã được sự nhất trí của đồng tác giả khi đưa vào luận án. Các kết quả trong luận án là những kết quả mới và chưa từng được ai công bố trên bất kỳ công trình nào khác.

Tác giả luận án

Nguyễn Hữu Sáu

LỜI CẢM ƠN

Luận án Tiến sĩ này được thực hiện tại Viện Toán học - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam, dưới sự hướng dẫn khoa học của GS.TSKH. Vũ Ngọc Phát và PGS.TS Trịnh Tuân.

Tôi xin tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới GS.TSKH. Vũ Ngọc Phát người thầy đã tận tình hướng dẫn tôi từ khi tôi làm luận văn thạc sĩ và bây giờ là luận án tiến sĩ. Trong những năm tháng nghiên cứu và hoàn thành luận án tiến sĩ dưới sự hướng dẫn của thầy, tôi nhận ra rằng niềm đam mê nghiên cứu khoa học trong thầy, cùng sự quan tâm, chỉ bảo tận tình của thầy đã thôi thúc tôi cần cố gắng nhiều hơn nữa để hoàn thiện bản thân.

Tôi xin chân thành cảm ơn thầy PGS.TS. Trịnh Tuân đã nhiệt tình giúp đỡ tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận án.

Tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới các thầy, các cô trong phòng Tối ưu và Điều khiển đã ân cần chỉ bảo, dạy dỗ tôi từ khi tôi còn học Cao học cho tới khi tôi làm nghiên cứu sinh tại Phòng. Đồng thời, tôi cũng chân thành cảm ơn các bạn đồng nghiệp, các nghiên cứu sinh và các thành viên trong Xêmina Tối ưu và Điều khiển tại Viện Toán học đã quan tâm, trao đổi, góp ý cho tôi trong suốt quá trình học tập và làm luận án.

Trong quá trình học tập và nghiên cứu, tôi đã nhận được nhiều sự giúp đỡ và tạo điều kiện thuận lợi từ Ban Giám hiệu, Ban Chủ nhiệm Khoa Khoa học cơ bản, Trường Đại học Điện lực. Tôi xin trân trọng cảm ơn sự giúp đỡ của các thầy cô.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban lãnh đạo Viện Toán học, Trung tâm Đào tạo sau đại học cùng toàn thể cán bộ viên chức Viện Toán học đã tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận án.

Đặc biệt, tôi thực sự thấy hạnh phúc và tự hào khi họ luôn bên tôi, chia sẻ và động viên, là động lực để tôi cố gắng và hoàn thành luận án đó là bố, mẹ, vợ và các con tôi.

Tác giả

Nguyễn Hữu Sáu

Mục lục

Mở đầu **1**

Chương 1. Cơ sở toán học **10**

1.1. Bài toán ổn định và ổn định hóa hệ phương trình có trễ 10

1.1.1. Bài toán ổn định 10

1.1.2. Bài toán ổn định hóa 12

1.1.3. Bài toán ổn định hệ rời rạc 13

1.1.4. Bài toán ổn định hóa hệ rời rạc 14

1.2. Hệ suy biến tuyến tính 15

1.2.1. Hệ suy biến 15

1.2.2. Công thức nghiệm của phương trình vi phân suy biến có trễ 19

1.2.3. Công thức nghiệm của phương trình rời rạc suy biến có trễ 21

1.3. Một số bổ đề bổ trợ 22

Chương 2. Tính ổn định và ổn định hóa cho hệ phương trình vi phân suy biến dương có trễ **25**

2.1. Tiêu chuẩn ổn định của hệ phương trình vi phân suy biến dương có trễ 25

2.2. Tiêu chuẩn ổn định hóa của hệ phương trình vi phân suy biến dương có trễ 34

2.3. Kết luận Chương 2 47

Chương 3. Tính ổn định và ổn định hóa cho hệ phương trình rời rạc suy biến dương có trễ **48**

3.1. Tiêu chuẩn ổn định của hệ rời rạc suy biến dương có trễ biến thiên 48

3.2. Tiêu chuẩn ổn định hóa của hệ rời rạc suy biến dương có trễ 63

3.3. Kết luận Chương 3 74

Kết luận của luận án **75**
Danh mục công trình của tác giả liên quan đến luận án **76**
Tài liệu tham khảo **77**

DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU

$\mathbb{C}$	là tập các số phức
$\mathbb{R}$	là tập các số thực
$\mathbb{N}$	là tập các số tự nhiên
$\mathbb{R}^n$	không gian Euclide n chiều
$\mathbb{R}^n_{0,+}$	$= \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, \forall i = \overline{1, n}\}$
$\mathbb{R}^n_{+}$	$= \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i > 0, \forall i = \overline{1, n}\}$
$\mathbb{R}^{n\times r}$	không gian các ma trận thực kích thước $n \times r$
I_r	ma trận đơn vị kích thước $r \times r$
$\lambda(A)$	tập các giá trị riêng của ma trận A
$\lambda_{\max}(A)$	$= \max\{Re\lambda : \lambda \in \lambda(A)\}$
$\lambda_{\min}(A)$	$= \min\{Re\lambda : \lambda \in \lambda(A)\}$
$\mathrm{diag}(A, B, C)$	ma trận chéo khối $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$
$A = [a_{ij}]_{m\times n}$	ma trận có các phần tử là a_{ij}, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$
A Hurwitz	ma trận vuông, mọi giá trị riêng của ma trận A có phần thực là âm
A Monomial	ma trận vuông, trên mỗi hàng và mỗi cột của ma trận A chỉ có một số dương duy nhất
A Metzler	$A = [a_{ij}]_{n\times n}$ với $a_{ij} \geq 0,\ \forall\, i \neq j;\ i, j = \overline{1, n}$.
$(A)_{(ij)}$	phần tử nằm ở hàng i và cột j của ma trận A
$(A)^T_{(i)}$	véc tơ hàng thứ i của ma trận A

$A \geq 0$	ma trận A nửa xác định dương, tức là $x^T Ax \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$
$A > 0$	ma trận A xác định dương, tức là $x^T Ax > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
$A \succeq 0$	ma trận không âm tức là $a_{ij} \geq 0, \forall i = \overline{1,m}, \forall j = \overline{1,n}$
$A \succ 0$	ma trận dương tức là $a_{ij} \geq 0$ với mọi i, j và $A \neq 0$
$A \gg 0$	ma trận dương chặt tức là $a_{ij} > 0$ với mọi i, j
$\deg[f(s)]$	bậc của đa thức $f(s)$
$rank(A)$	hạng của ma trận A
$x^T y$	tích vô hướng của hai véc tơ $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$
$C([a,b], \mathbb{R}^n)$	không gian các hàm liên tục trên $[a,b]$ nhận giá trị trong $\mathbb{R}^n$
$C^1([a,b], \mathbb{R}^n)$	không gian các hàm khả vi liên tục trên $[a,b]$ nhận giá trị trong $\mathbb{R}^n$
$L_2([0,+\infty), \mathbb{R}^m)$	không gian các hàm bình phương khả tích trên $[0,+\infty)$ nhận giá trị trong $\mathbb{R}^m$

Mở đầu

Lý thuyết ổn định các hệ phương trình vi phân là một trong những hướng nghiên cứu quan trọng, có nhiều ứng dụng trong thực tế, kĩ thuật. Các công trình nghiên cứu về lý thuyết ổn định được bắt đầu từ những năm cuối thế kỉ XIX bởi nhà toán học người Nga A. M. Lyapunov, công bố và bảo vệ thành công luận án tiến sĩ có nhan đề "Bài toán tổng quát về tính ổn định của chuyển động". Trong công trình của mình A. M. Lyapunov đã nghiên cứu và tìm ra khái niệm tổng quát về tính ổn định của chuyển động, mà sau này nó đã trở thành nền móng quan trọng cho việc phân tích các hệ động lực trong toán học, cơ học, sinh thái học, kinh tế học, điều khiển tự động (xem [19, 25, 55]). Trong mười năm trở lại đây, các hệ động lực mô tả bởi các hệ phương trình suy biến có trễ nhận được nhiều sự quan tâm đặc biệt với hai lý do chính sau:

- Các bài toán xuất phát từ thực tế thường được mô tả bởi các hệ phương trình suy biến. Hệ suy biến còn có ứng dụng rộng rãi trong kỹ thuật, kinh tế (Leontief dynamic model [32]), ứng dụng trong mạng lưới điện ([4]), trong cơ học ([37]).

- Hầu hết các quá trình vật lý, sinh học, hóa học, kinh tế, mạng lưới điện, lò phản ứng hạt nhân đều liên quan đến độ trễ thời gian (xem [25])). Không những vậy, độ trễ thời gian còn là nguyên nhân trực tiếp dẫn đến tính không ổn định và hiệu suất kém (poor performance) của các hệ động lực (xem [25]). Do đó lớp hệ phương trình có trễ đã thu hút được nhiều sự quan tâm nghiên cứu của các nhà khoa học (xem [15, 47, 50]).

Vì vậy, giải quyết được bài toán về sự ổn định của hệ phương trình suy biến có trễ sẽ góp phần giải quyết được nhiều bài toán thực tiễn có tính ứng dụng cao. Việc nghiên cứu bài toán ổn định của hệ phương trình suy biến có trễ phức tạp hơn rất nhiều so với nghiên cứu các hệ phương trình thông thường vì ba lý do chính sau đây:

- Không giống với hệ phương trình vi phân thông thường, với hệ suy biến bài toán tồn tại duy nhất nghiệm không phải bao giờ cũng thỏa mãn, ngay cả với trường hợp hệ là tuyến tính (xem [8]).

- Khi sử dụng phương pháp hàm Lyapunov, việc xây dựng hàm Lyapunov và đánh giá đạo hàm của hàm Lyapunov dọc theo quỹ đạo nghiệm của hệ khó khăn hơn rất nhiều so với hệ thông thường (xem [14, 20, 55]).

- Nghiệm của hệ thường xuất hiện thành phần dạng xung (impulses) với trường hợp hệ liên tục, và non-causal với các hệ rời rạc (xem [4, 8, 53]). Vì vậy khi nghiên cứu các hệ suy biến một số điều kiện được đưa ra cho hệ để đảm bảo rằng các thành phần dạng xung không xuất hiện với các hệ liên tục hay hệ là causal với hệ rời rạc. Tuy nhiên các điều kiện như vậy không phải bao giờ cũng tồn tại, ngoài ra nó có thể bị mất đi khi có tác động của nhiễu.

Hệ phương trình vi phân suy biến phổ biến hơn hệ phương trình vi phân thông thường. Nhiều khái niệm và kết quả cơ bản của hệ suy biến thu được từ việc mở rộng từ các khái niệm và phương pháp từ hệ thông thường (xem [8]). Hiện nay, lí thuyết ổn định hệ suy biến đang được phát triển mạnh theo hai hướng ứng dụng và lí thuyết, được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu và đã có nhiều công trình nghiên cứu được công bố. Trong nước có các nhà toán học như: Phạm Kỳ Anh, Nguyễn Hữu Dư, Vũ Hoàng Linh, Vũ Ngọc Phát, Nguyễn Khoa Sơn ([2, 3, 5, 9, 20, 41, 48]) đã và đang nghiên cứu tính chất này và thu được nhiều kết quả, tính chất quan trọng. Có nhiều phương pháp nghiên cứu tính ổn định hệ phương trình suy biến. Có thể kể ra đây một số phương pháp chính như phương pháp số mũ đặc trưng Lyapunov (còn gọi là phương pháp phổ hay phương pháp thứ nhất của Lyapunov), phương pháp hàm Lyapunov (còn gọi là phương pháp thứ hai của Lyapunov), phương pháp xấp xỉ. Với phương pháp hàm Lyapunov có nhiều nghiên cứu mở rộng từ hệ thông thường sang hệ suy biến (xem [12, 20, 27, 49]). Khi nghiên cứu hệ suy biến các khái niệm ổn định, cặp ma trận chính quy, impulse-free với hệ liên tục hay causal với hệ rời rạc là những khái niệm quan trọng (xem [8]). Bài toán tồn tại và duy nhất nghiệm của hệ suy biến cần phải sử dụng tới điều kiện chính quy. Tính chất impulse-free của một hệ phương trình vi phân suy biến có nghĩa rằng, nghiệm của hệ sẽ không xuất hiện thành phần dạng xung với những điều kiện ban đầu tương thích (consistent initial conditions). Trong khi đó tính chất causal của một hệ rời rạc suy biến có nghĩa rằng, trạng thái của hệ chỉ phụ thuộc vào các trạng thái ở hiện tại và ở quá khứ không phụ thuộc vào các trạng thái ở tương lai của hệ (xem [8]).

Để có thể ứng dụng tốt hơn và phù hợp với thực tiễn hơn người ta không chỉ quan tâm tới việc tìm các tiêu chuẩn đảm bảo tính ổn định của các hệ có trễ mà còn quan tâm tới việc tìm các hàm điều khiển đảm bảo hệ tương ứng ổn định. Với hệ có trễ thông thường bài toán ổn định hóa là bài toán tìm điều khiển ngược sao cho hệ đóng tương ứng là ổn định, tuy nhiên với hệ suy biến bài toán ổn định hóa phức tạp hơn nhiều, hệ đóng tương ứng không những ổn định mà còn phải thỏa mãn thêm các điều kiện chính quy, impulse-free với hệ liên tục hay causal với hệ rời rạc.

Hệ dương là những hệ động lực mô tả bởi các hệ phương trình vi phân, phương trình rời rạc trong đó trạng thái của hệ sẽ không âm với những điều kiện ban đầu không âm. Hệ dương xuất hiện nhiều trong lĩnh vực về khoa học và công nghệ như các quá trình sinh học, hóa học, trong các mô hình dân số, trong cơ học, kinh tế học (xem [1, 13, 24, 32, 37]). Lý thuyết hệ dương liên hệ chặt chẽ với lý thuyết ma trận không âm (là các ma trận có phần tử trong ma trận là các số không âm), hầu hết những tính chất cơ bản của hệ dương thu được vào đầu thế kỷ XX đều dựa trên định lý Perron-Frobenius và lý thuyết về ma trận không âm (xem [36]). Trong trường hợp đơn giản nhất, với các hệ phương trình vi phân tuyến tính không có trễ đã nhận được sự quan tâm của nhiều nhà nghiên cứu ([13, 24, 32]). Với hệ có trễ, năm 2004, Haddad và Chellaboina ([18]) nghiên cứu hệ

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h), \quad t \geq 0, \\ x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-h, 0], \end{cases} \tag{0.1}$$

với kết quả thu được là một số điều kiện cần và đủ để hệ (0.1) là hệ dương và điều kiện đảm bảo tính ổn định tiệm cận của hệ dương (0.1), kết quả này chỉ ra rằng tính chất ổn định của hệ dương (0.1) không phụ thuộc vào độ trễ (delay-independent) là hằng số, với điều kiện đưa ra dưới dạng phương trình ma trận. Năm 2009, Kaczorek ([24]) đã đưa ra các điều kiện cần và đủ đảm bảo tính chất dương và ổn định tiệm cận của hệ (0.1) dưới dạng bất đẳng thức ma trận, kết quả thu được cũng chỉ ra rằng tính chất ổn định của hệ dương (0.1) là độc lập vào độ trễ. Với bài toán ổn định hóa hệ dương năm 2009, X. Liu ([29])

nghiên cứu hệ có dạng sau

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum\limits_{i=1}^{p} A_i x(t - h_i) + Bu(t), \quad t \geq 0, \\ x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-h_p, 0], \end{cases} \tag{0.2}$$

trong đó $0 < h_1 < h_2 < ... < h_p$, với hàm điều khiển ngược tìm dưới dạng $u(t) = F_0 x(t) + \sum\limits_{i=1}^{p} F_i x(t - h_i)$, kết quả thu được là một số điều kiện cần và đủ dưới dạng bài toán quy hoạch tuyến tính đảm bảo tính ổn định hóa của hệ (0.2). Năm 2009, M. A. Rami ([42]) nghiên cứu hệ với trễ biến thiên dạng

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum\limits_{i=1}^{p} A_i x(t - h_i(t)) + Bu(t), \quad t \geq 0, \\ x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-h, 0], \end{cases} \tag{0.3}$$

trong đó các hàm trễ $0 \leq h_i(t) \leq h_i$, $t \geq 0$, $h = \max\limits_{1 \leq i \leq p} h_i$. Với kết quả thu được là điều kiện cần và đủ đảm bảo hệ (0.3) (với $u(t) = 0$) là hệ dương và ổn định tiệm cận dưới dạng các bất đẳng thức ma trận. Một điều đáng ngạc nhiên là điều kiện Mustapha Ait Rami đưa ra để đảm bảo tính dương và ổn định của hệ (0.3) đã chỉ ra rằng trong trường hợp hệ với trễ biến thiên các điều kiện là không thay đổi so với trường hợp hệ trễ hằng. Đây là một tính chất hết sức đặc biệt của hệ dương. Bài toán ổn định hóa hệ (0.3) cũng được Mustapha Ait Rami nghiên cứu và đưa ra điều kiện cần và đủ dưới dạng bài toán quy hoạch tuyến tính. Năm 2010, Liu, Yu và Wang ([31]) đã chứng minh chi tiết về mối liên hệ giữa nghiệm của hệ dương trễ hằng và nghiệm của hệ dương với trễ biến thiên qua đó đưa ra điều kiện cần và đủ đảm bảo tính ổn định của hệ dương có trễ biến thiên (0.3) (với $u(t) = 0$). Những kết quả trên đều chỉ ra tính chất ổn định tiệm cận của hệ, tuy nhiên trong thực tiễn để có thể nghiên cứu đầy đủ và sâu sắc hơn, người ta không chỉ quan tâm tới việc tìm ra các tiêu chuẩn ổn định của các hệ có trễ mà còn phải đánh giá được "độ" ổn định của các hệ đó. Vì vậy, tính ổn định mũ và ổn định hóa được dạng mũ của các lớp hệ phương trình vi phân, phương trình rời rạc có trễ đã và đang được nhiều nhà nghiên cứu quan tâm trong những năm gần đây. Trong các kết quả được đề xuất bởi P.H.A. Ngọc ([22, 39]) bài toán ổn định mũ cho hệ có trễ hằng (0.1) được nghiên cứu qua đó chứng minh được rằng hệ dương có trễ hằng (0.1) là ổn định mũ khi và chỉ khi hệ dương (0.4) không có trễ tương ứng sau là ổn định mũ:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A_0 + A_1)x(t), \quad t \geq 0, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{0.4}$$

Kết quả nghiên cứu này cũng chỉ ra rằng tính chất ổn định mũ của hệ dương có trễ (0.1) cũng không phụ thuộc vào độ trễ. Năm 2012, Zhu, Li và Zhang ([57]) đã nghiên cứu tính ổn định mũ cho hệ dương có trễ hằng (0.1), các điều kiện đưa ra phụ thuộc vào độ trễ. Với hệ trễ có ma trận hệ số biến thiên, năm 2013, P.H.A. Ngọc ([40]) nghiên cứu tính ổn định mũ cho hệ này. Trong những năm gần đây hệ suy biến (singular systems, semi-state systems, implicit systems, differential-algebraic systems, generalized state-space systems) nhận được nhiều sự quan tâm của nhiều nhà nghiên cứu. Đặc biệt với những hệ suy biến mà ở đó trạng thái của hệ đặc trưng cho những đại lượng mà về bản chất là nhận giá trị không âm, ví dụ như các gói dữ liệu trong hệ thống truyền tin, điện tích, dân số, nồng độ các dung dịch hóa học, thể tích của khối chất lỏng, số phân tử, những hệ suy biến như vậy gọi chung là hệ suy biến dương. Mặc dù trong những năm gần đây đã có rất nhiều kết quả nghiên cứu về tính chất ổn định và ổn định hóa đối với lớp hệ dương có trễ thông thường, tuy nhiên đối với hệ suy biến dương, đặc biệt là hệ suy biến dương có trễ các kết quả nghiên cứu bài toán ổn định và ổn định hóa còn hạn chế. Cụ thể với hệ suy biến tuyến tính

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = A_0x(t) + Bu(t), \quad t \geq 0, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{0.5}$$

trong đó E là ma trận suy biến với $det(E) = 0$. Trong trường hợp này việc tìm ra các tiêu chuẩn đảm bảo hệ (0.5) là hệ dương và ổn định là rất khó khăn xuất phát từ tính suy biến của ma trận E. Để có thể nghiên cứu hệ suy biến (0.5), năm 2008, E. Virnik ([52]) sử dụng giả thiết tính chính quy của cặp ma trận (E, A_0), theo nghĩa luôn tồn tại số $\lambda \in \mathbb{C}$ sao cho $det(\lambda E - A_0) \neq 0$, khi đó qua phép biến đổi ma trận Virnik đã đưa hệ (0.5) về một hệ mới tương đương, qua đó đưa ra các tiêu chuẩn mới dưới dạng các bất đẳng thức ma trận tuyến tính để đảm bảo tính dương và ổn định tiệm cận của hệ (0.5), tuy nhiên các điều kiện thu được khá phức tạp. Năm 2012, Rami và Napp ([43]) đã đưa ra một số tiêu chuẩn mới đảm bảo tính dương và ổn định tiệm cận của hệ (0.5), các điều kiện của định lý được đưa về dạng bài toán quy hoạch tuyến tính, các điều kiện này dễ kiểm tra hơn so với các điều kiện được đưa ra bởi E. Virnik. Năm 2013, cũng với giả thiết cặp ma trận (E, A_0) là chính quy, Zhang cùng các cộng sự ([58]) nghiên cứu bài toán ổn định cho hệ dương (0.5) kết quả thu được là một số điều kiện cần và đủ đảm bảo hệ là ổn định dưới điều kiện là các bất đẳng thức ma trận tuyến tính. Với trường hợp hệ suy biến có trễ

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h) + Bu(t), \quad t \geq 0, \\ x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-h, 0], \end{cases} \tag{0.6}$$

năm 2014, dựa trên điều kiện chính quy của cặp ma trận (E, A_0), Zhang cùng các cộng sự ([59]) đã đưa hệ (0.6) về một hệ mới tương đương qua đó đề xuất các điều kiện cần và đủ đảm bảo tính dương của hệ có trễ (0.6). Tuy nhiên bài toán ổn định và ổn định hóa không được xét tới. Lớp hệ đầu tiên được nghiên cứu trong luận án có dạng (0.6), luận án chứng minh các điều kiện để đảm bảo tính ổn định mũ và ổn định hóa được dạng mũ cho lớp hệ phương trình vi phân suy biến dương có trễ dạng (0.6).

Lớp hệ tiếp theo được nghiên cứu trong luận án là lớp hệ rời rạc suy biến có trễ

$$\begin{cases} Ex(k+1) = A_0x(k) + A_1x(k-h(k)) + Bu(k), \quad k \in \mathbb{N}, \\ x(k) = \varphi(k), \quad k \in \{-\tau, -(\tau-1), ..., 0\}, \end{cases} \tag{0.7}$$

trong đó $x(k) \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N}$ là véc tơ trạng thái, $u(k) \in \mathbb{R}^m, k \in \mathbb{N}$ là véc tơ điều khiển, $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ là các ma trận thực cho trước, ma trận $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận suy biến, hàm trễ $h(k) \in \mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện $0 < h(k) \leq \tau; k, \tau \in \mathbb{N}$; $\varphi(\cdot) : \{-\tau, \cdots, 0\} \to \mathbb{R}^n$ là hàm véc tơ điều kiện ban đầu với chuẩn $\|\varphi\| = \max\limits_{k\in\{-\tau,-(\tau-1),...,0\}} \|\varphi(k)\|$. Trong trường hợp E là ma trận đơn vị và hệ không có trễ ta có hệ sau

$$\begin{cases} x(k+1) = A_0x(k) + Bu(k), \quad k \in \mathbb{N}, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{0.8}$$

với hệ (0.8), các điều kiện cần và đủ đảm bảo tính dương của hệ và bài toán ổn định, ổn định hóa được đề xuất trong nhiều bài báo và sách chuyên khảo (xem [13, 23, 24, 32]), điều kiện thu được đảm bảo tính ổn định tiệm cận của hệ dương (0.8) (với $u(t) = 0$) dựa trên bán kính phổ của ma trận A_0. Năm 2007, Rami, Tadeo và Benzaouia ([44]) xét bài toán ổn định hóa với hạn chế không âm trên điều khiển và đưa ra một số điều kiện cần và đủ dưới dạng bất đẳng thức ma trận đảm bảo hệ (0.8) với $u(k) = 0$, là ổn định tiệm cận, qua đó các tác giả cũng đưa ra các điều kiện cần và đủ cho bài toán ổn định hóa của hệ (0.8) dưới dạng bài toán quy hoạch tuyến tính tương ứng. Trong trường hợp hệ tuyến tính với trễ là hằng số dạng

$$\begin{cases} x(k+1) = A_0x(k) + A_1x(k-\tau) + Bu(k), \quad k \in \mathbb{N}, \\ x(k) = \varphi(k), \quad k \in \{-\tau, -(\tau-1), ..., 0\}. \end{cases} \tag{0.9}$$

Năm 2004, Haddad và Chellaboina ([18]), nghiên cứu bài toán ổn định tiệm cận cho hệ dương (0.9) (với $u(k) = 0$) và thu được điều kiện đảm bảo tính ổn định của hệ dương dưới dạng phương trình ma trận. Các điều kiện trong định lý đưa ra trong nghiên cứu của Haddad và Chellaboina ([18]) cũng chỉ ra rằng, trong trường hợp hệ dương rời rạc có trễ thì tiêu chuẩn kiểm tra tính ổn định của hệ là độc lập với độ trễ, kết quả này cũng tương tự như trường hợp hệ liên tục. Năm 2007, Hmamed cùng các cộng sự ([21]) nghiên cứu bài toán ổn định hóa hệ dương (0.9) trong cả hai trường hợp có hạn chế và không có hạn chế trên hàm điều khiển. Các điều kiện thu được dưới dạng bài toán quy hoạch tuyến tính. Liu, Yu, Wang, năm 2009, ([30]) nghiên cứu bài toán ổn định hệ có trễ biến thiên dạng

$$\begin{cases} x(k+1) = A_0x(k) + \sum\limits_{i=1}^{m} A_ix(k-\tau_i(k)) + Bu(k), \quad k \in \mathbb{N}, \\ x(k) = \varphi(k), \quad k \in \{-\tau, -(\tau-1), ..., 0\}, \end{cases} \tag{0.10}$$

trong đó $0 \leq \alpha_i \leq \tau_i(k) \leq \tau_i$, $k, \alpha_i, \tau_i(k) \in \mathbb{N}$, $\tau = \max\limits_{1\leq i\leq m}\{\tau_i : \tau_i \in \mathbb{N}, i = 1, 2, .., m\}$, kết quả thu được là một số điều kiện cần và đủ đảm bảo tính ổn định tiệm cận của hệ dương (0.10)(với $u(k) = 0$) độc lập vào độ trễ. Tương tự như trường hợp hệ liên tục, tính ổn định mũ của hệ rời rạc dương có trễ cũng được nghiên cứu trong những năm gần đây. Năm 2012, Zhu, Li và Zhang ([57]) nghiên cứu tính ổn định mũ cho lớp hệ rời rạc có trễ (0.10), tuy nhiên điều kiện thu được đảm bảo tính ổn định mũ chỉ là điều kiện đủ. Bài toán ổn định hóa hệ (0.10) được đề xuất bởi Zhu, Meng và Zhang năm 2013 ([61]) các điều kiện đưa ra dưới dạng bài toán quy hoạch tuyến tính. Trong trường hợp hệ suy biến mà đơn giản nhất là hệ tuyến tính không có trễ

$$\begin{cases} Ex(k+1) = A_0x(k) + Bu(k), \quad k \in \mathbb{N}, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{0.11}$$

trong đó E là ma trận suy biến. Một số kết quả nghiên cứu hệ (0.11) dựa trên phép đổi biến và điều kiện chính quy của cặp ma trận (E, A_0) đã đưa ra các điều kiện cần và đủ đảm bảo hệ (0.11) là hệ dương được đề xuất bởi Bru, Coll, và Sánchez ([6]), tuy nhiên tính ổn định và ổn định hóa chưa được xét tới. Tương tự như trường hợp hệ liên tục , năm 2008, E. Virnik ([52]) sử dụng giả thiết tính chính quy của cặp ma trận (E, A_0), thông qua phép biến đổi ma trận Virnik đã đưa hệ (0.11) về một hệ mới tương đương qua đó đưa ra các tiêu chuẩn đảm bảo tính dương và ổn định tiệm cận của hệ (0.11), tuy nhiên các điều kiện đưa ra khó kiểm tra. Năm 2014, D.Napp ([45]) đã đưa ra một số tiêu chuẩn mới dựa trên phương trình ma trận để đảm bảo tính chất dương của hệ (0.11), ngoài ra bài toán ổn định cũng được giải quyết dựa trên bài toán quy hoạch tuyến tính. Năm 2014, Zhang cùng các cộng sự ([60]) đã đưa ra tiêu chuẩn kiểm tra hệ suy biến có trễ hằng là hệ dương tuy nhiên bài toán ổn định và ổn định hóa không được xét đến.

Khi nghiên cứu hệ suy biến dương có trễ, các điều kiện đưa ra không những phải đảm bảo tính ổn định mũ của hệ mà còn phải đảm bảo các điều kiện hệ dương, chính quy, impulse-free với hệ liên tục (hay causal với hệ rời rạc). Do đó, các khó khăn phát sinh khi chúng ta cố gắng tìm ra các điều kiện ổn định mũ và đưa ra các thông số điều khiển cho hệ thống.

Trong luận án này, chúng tôi sử dụng phương pháp quy nạp toán học, bài toán quy hoạch tuyến tính, phân tích ma trận SVD (Singular Value Decomposition). Chúng tôi đưa hệ suy biến ban đầu về hệ mới gồm một hệ phương trình có trễ thông thường và một hệ ràng buộc đại số tương ứng. Trên cơ sở các kĩ thuật mới, chúng tôi thu được một số điều kiện cần và đủ để đảm bảo hệ suy biến có trễ là hệ dương, đồng thời thiết lập các điều kiện đủ đảm bảo tính chất ổn định mũ của hệ suy biến dương có trễ tương ứng. Chúng tôi cũng đưa ra các điều kiện đủ cho tính ổn định hóa được dạng mũ của hệ điều khiển suy biến dương có trễ, các điều kiện được viết dưới dạng bài toán quy hoạch tuyến tính.

Ngoài phần mở đầu, kết luận, danh mục các kí hiệu, danh mục các công trình khoa học của tác giả, tài liệu tham khảo, luận án gồm 3 chương như sau:

Chương 1 là chương kiến thức chuẩn bị, gồm 3 mục. Mục 1.1 giới thiệu bài toán ổn định, bài toán ổn định hóa cho hệ phương trình có trễ thông thường. Mục 1.2 giới thiệu hệ phương trình suy biến tuyến tính, công thức nghiệm cho hệ suy biến tuyến tính có trễ. Mục 1.3 nhắc lại một số định nghĩa và bổ đề sẽ được sử dụng trong các chương sau của luận án.

Chương 2 nghiên cứu bài toán ổn định mũ và ổn định hóa được dạng mũ cho lớp hệ phương trình vi phân suy biến dương có trễ. Mục 2.1 trình bày các điều kiện cần và đủ đảm bảo hệ phương trình vi phân suy biến có trễ là hệ dương, tiếp đến là tiêu chuẩn cho tính ổn định mũ của hệ suy biến dương có trễ tương ứng. Mục 2.2 đưa ra các tiêu chuẩn cho tính ổn định hóa của hệ phương trình vi phân suy biến dương có trễ dưới dạng bài toán quy hoạch tuyến tính.

Chương 3 nghiên cứu bài toán ổn định mũ và ổn định hóa được dạng mũ cho lớp hệ phương trình rời rạc suy biến dương có trễ. Mục 3.1 trình bày các điều kiện cần và đủ đảm bảo hệ rời rạc suy biến có trễ là hệ dương, tiếp đến là một số điều kiện cần và đủ đảm bảo cho tính ổn định mũ của hệ suy biến dương có trễ tương ứng. Mục 3.2 đưa ra các điều kiện dưới dạng bài toán quy hoạch tuyến tính cho bài toán ổn định hóa lớp hệ rời rạc suy biến dương có trễ.

Các kết quả của luận án được hoàn thành dựa trên bốn bài báo (3 bài ISI và 1 bài đã gửi đăng) đăng trên các tạp chí chuyên ngành và được báo cáo tại :

-Xêmina Phòng Tối ưu và Điều khiển, Viện Toán học.

-Các hội nghị đánh giá Nghiên cứu sinh của Viện Toán học, tháng 10-2013, tháng 10-2014, tháng 10-2015 và tháng 10-2016.

Chương 1

Cơ sở toán học

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số khái niệm và kết quả về hệ phương trình có trễ, tìm hiểu về bài toán ổn định và ổn định hoá hệ có trễ, hệ suy biến, công thức nghiệm của hệ suy biến có trễ. Chúng tôi cũng trình bày một số mô hình hệ suy biến dương và các kết quả bổ trợ sẽ được sử dụng trong chứng minh các kết quả chính của luận án cho các chương sau. Kiến thức sử dụng trong chương này được tham khảo trong [8, 25, 27].

1.1. Bài toán ổn định và ổn định hóa hệ phương trình có trễ

1.1.1. Bài toán ổn định

Trong mô tả toán học của một quá trình vật chất, một giả thuyết thường thấy là quá trình hoạt động của hệ chỉ phụ thuộc vào trạng thái hiện tại, giả thuyết này được áp dụng rộng rãi cho lớp các hệ động lực. Tuy nhiên, có những trạng thái mà giả thuyết này không còn thỏa mãn và việc sử dụng các mô hình cổ điển trong việc phân tích và thiết kế hệ thống dẫn tới một kết quả yếu, độ chính xác không cao. Trong trường hợp này, sẽ tốt hơn khi ta xem xét hoạt động của hệ dựa cả vào những thông tin trạng thái trước đó. Để mô tả một cách chính xác các quá trình này, người ta thường miêu tả chúng bằng các phương trình có trễ. Giả sử h là một số thực không âm. Ký hiệu $\mathcal{C} = C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ và $PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ lần lượt là không gian các hàm liên tục và liên tục từng khúc trên đoạn $[-h, 0]$, nhận giá trị trong không gian $\mathbb{R}^n$ và chuẩn của một phần tử $\phi \in \mathcal{C}$ hoặc $PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ được cho bởi $\|\phi\|_C = \sup_{-h\leq s\leq 0}\|\phi(s)\|$. Với $t_0 \in \mathbb{R}, \sigma \geq 0$ và $x \in C([t_0 - h, t_0 + \sigma], \mathbb{R}^n)$, hàm

$x_t \in \mathcal{C}, t \in [t_0, t_0 + \sigma]$, được xác định bởi $x_t(s) := x(t + s), s \in [-h, 0]$. Như vậy, x_t là đoạn quỹ đạo trên đoạn $[t - h, t]$ của hàm $x(\cdot)$ với chuẩn trong $\mathcal{C}$ được xác định bởi $\|x_t\| := \sup_{s\in[-h,0]}\|x(t + s)\|$. Cho $D \subset \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C}$ là một tập mở và hàm $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Phương trình vi phân có trễ trên D là phương trình dạng

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \quad t \geq 0. \tag{1.1}$$

Phương trình này kí hiệu là $RFDE(f)$. Một hàm $x(t)$ được gọi là nghiệm của phương trình vi phân có trễ (1.1) trên $[t_0 - h, t_0 + \sigma)$ nếu tồn tại $t_0 \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ sao cho $x(t) \in C([t_0 - h, t_0 + \sigma), \mathbb{R}^n), (t, x_t) \in D$ và $x(t)$ thỏa mãn phương trình (1.1) với mọi $t \in [t_0, t_0 + \sigma)$. Cho $t_0 \in \mathbb{R}, \phi \in \mathcal{C}$, ta nói $x(t_0, \phi, f)$ là một nghiệm của phương trình (1.1) với hàm điều kiện ban đầu ϕ tại t_0 hoặc đơn giản là một nghiệm đi qua điểm (t_0, ϕ) nếu tồn tại một số $\sigma > 0$ sao cho $x(t_0, \phi, f)$ là nghiệm của hệ (1.1) trên $[t_0 - h, t_0 + \sigma)$ và $x_{t_0} = \phi$. Khi t_0 đã rõ, để cho đơn giản trong cách viết, từ nay về sau ta ký hiệu $x(t, \phi)$ thay cho $x(t_0, \phi, f)(t)$.

Định lý 1.1 (Định lý tồn tại nghiệm địa phương, [19]) *Giả sử Ω là một tập mở của $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$ và $f^0 \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Nếu $(t_0, \phi) \in \Omega$ thì tồn tại nghiệm của phương trình $RFDE(f^0)$ đi qua điểm (t_0, ϕ). Tổng quát hơn, nếu $W \subset \Omega$ là tập compact và $f^0 \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ cho trước, thì tồn tại một lân cận $V \subset \Omega$ của W sao cho $f^0 \in C^0(V, \mathbb{R}^n)$, tồn tại một lân cận $U \subset C^0(V, \mathbb{R}^n)$ và $\alpha > 0$ sao cho với mọi $(t_0, \phi) \in W, f \in U$, tồn tại nghiệm $x(t_0, \phi, f)$ của phương trình $RFDE(f)$ đi qua điểm (t_0, ϕ) tồn tại trên $[t_0 - h, t_0 + \alpha]$.*

Định lý 1.2 (Định lý tồn tại duy nhất nghiệm địa phương, [19]) *Giả sử Ω là một tập mở của $\mathbb{R} \times \mathcal{C}, f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ liên tục và $f(t, \phi)$ là Lipschitz theo ϕ trong mỗi tập con compact của Ω. Nếu $(t_0, \phi) \in \Omega$ thì tồn tại duy nhất nghiệm đi qua điểm (t_0, ϕ) của phương trình $RFDE(f)$.*

Định lý 1.3 (Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm toàn cục, [25]) *Cho*

$$f : [0, +\infty) \times PC([-h, 0], \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

thỏa mãn các điều kiện sau:

(i) Với bất kỳ $H > 0$, tồn tại $M(H) > 0$ sao cho

$$\|f(t, \phi)\| \leq M(H), \quad (t, \phi) \in [0, +\infty) \times PC([-h, 0], \mathbb{R}^n) \quad \text{và} \quad \|\phi\|_C \leq H;$$

(ii) Hàm $f(t, \phi)$ là hàm liên tục theo cả hai biến;

(iii) Hàm $f(t,\phi)$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo biến thứ hai, tức là tồn tại hằng số Lipschitz $L(H) > 0$ sao cho

$$\|f(t,\phi_1) - f(t,\phi_2)\| \leq L(H)\|\phi_1 - \phi_2\|_C,$$

với mọi $t \geq 0, \phi_i \in PC([-h,0],\mathbb{R}^n), \|\phi_i\|_C \leq H, i = 1,2.$

(iv)

$$\|f(t,\phi)\| \leq \eta(\|\phi\|_C), \quad t \geq 0, \quad \phi \in PC([-h,0],\mathbb{R}^n),$$

trong đó $\eta(r), r \in [0,+\infty)$ là hàm liên tục, không giảm và sao cho với $r_0 \geq 0$ bất kỳ điều kiện sau thỏa mãn

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{r_0}^{R} \frac{dr}{\eta(r)} = +\infty.$$

Khi đó, với $t_0 \geq 0$ và $\phi \in PC([-h,0],\mathbb{R}^n)$ cho trước, hệ (1.1) có duy nhất nghiệm $x(t_0,\phi,f)$ xác định trên $[t_0 - h, +\infty)$ với điều kiện ban đầu $x_{t_0} = \phi$.

Định nghĩa 1.1 ([19]) Giả sử $f(t,0) = 0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$.

- Nghiệm $x(t) = 0$ của phương trình (1.1) được gọi là ổn định nếu với bất kì $t_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta = \delta(t_0,\varepsilon)$ sao cho nếu $||\phi||_C \leq \delta$ thì $||x(t;t_0,\phi)||_C \leq \varepsilon$ với $t \geq t_0$.
- Nghiệm $x(t) = 0$ của phương trình (1.1) được gọi là ổn định tiệm cận nếu nó ổn định và tồn tại $b_0 = b_0(t_0) > 0$ sao cho nếu $||\phi||_C \leq b_0$ thì $\lim\limits_{t\to\infty} x(t;t_0,\phi) = 0$.

Trong luận án quan tâm đến tính $\alpha-$ ổn định mũ của lớp hệ phương trình vi phân có trễ nên chúng tôi nhắc lại định nghĩa sau.

Định nghĩa 1.2 ([25]) Giả sử $f(t,0) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$ và $\alpha > 0$ cho trước. Khi đó, nghiệm $x(t) = 0$ của phương trình (1.1) được gọi là $\alpha-$ ổn định mũ nếu tồn tại hằng số $M > 0$ sao cho mọi nghiệm $x(t;t_0,\phi)$ của hệ (1.1) thỏa mãn

$$||x(t;t_0,\phi)|| \leq Me^{-\alpha(t-t_0)}||\phi||_C, \quad \forall t \geq t_0.$$

1.1.2. Bài toán ổn định hóa

Xét hệ điều khiển có trễ

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t,x_t,u(t)), \quad t \geq 0, \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-h,0], \end{cases} \tag{1.2}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái, $u \in L_2([0,+\infty),\mathbb{R}^m)$ là véc tơ điều khiển, $h \geq 0$ là hằng số trễ, $\phi \in C([-h,0],\mathbb{R}^n)$ là hàm điều kiện ban đầu, $f : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ là hàm véc tơ cho trước thỏa mãn điều kiện, $f(t,0,0) = 0, t \geq 0$.

Định nghĩa 1.3 Hệ điều khiển (1.2) gọi là ổn định hóa được nếu tồn tại hàm điều khiển $u(t) = g(x(t))$ sao cho hệ phương trình vi phân đóng

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t, g(x(t))), \quad t \geq 0, \tag{1.3}$$

là ổn định tiệm cận. Trong trường hợp này, hàm $u(t) = g(x(t))$ gọi là hàm điều khiển ngược ổn định hóa hệ thống.

Định nghĩa 1.4 Cho số $\alpha > 0$. Hệ điều khiển (1.2) gọi là $\alpha-$ổn định hóa được dạng mũ nếu tồn tại hàm điều khiển $u(t) = g(x(t))$ sao cho hệ đóng (1.3) là $\alpha-$ổn định mũ, tức là tồn tại hằng số $M > 0$ sao cho mọi nghiệm $x(t; t_0, \phi)$ của hệ đóng (1.3) thỏa mãn đánh giá

$$\|x(t;t_0,\phi)\| \leq M\|\phi\|e^{-\alpha(t-t_0)}, \quad t \geq t_0.$$

1.1.3. Bài toán ổn định hệ rời rạc

Trong mục này chúng tôi sẽ đề cập tới các hệ phương trình với biến thời gian rời rạc. Khác với trước, ở đây tốc độ thay đổi của trạng thái hệ thống không phải là $\dot{x}(t)$, mà là tốc độ trung bình $\frac{x(k+T)-x(k)}{T}$. Nếu lấy $T = 1$ (đơn vị thời gian) thì tốc độ đó là $x(k+1) - x(k)$ khi đó phương trình hệ thống trở thành

$$x(k+1) - x(k) = f(k, x(k), x(k-h)),\ k \in \mathbb{N},$$

trong đó $x(k) \in \mathbb{R}^n, \quad k \in \mathbb{N}$. Như vậy, ta sẽ xét phương trình rời rạc tổng quát dạng

$$\begin{cases} x(k+1) = f(k, x(k), x(k-h)), & k \in \mathbb{N}, \\ x(k) = \phi(k), & k \in \{-h, -(h-1), ..., 0\}, \end{cases} \tag{1.4}$$

trong đó $x(k) \in \mathbb{R}^n,\ k, h \in \mathbb{N}$; $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ là hàm véc tơ cho trước thỏa mãn điều kiện $f(k,0,0) = 0,\ k \in \mathbb{N}$. $\phi(\cdot) : \{-h, \cdots, 0\} \to \mathbb{R}^n$ là hàm điều kiện ban đầu với chuẩn xác định bởi $\|\phi\| = \max\limits_{k \in \{-h,-(h-1),...,0\}} \|\phi(k)\|$.

Định nghĩa 1.5 Giả sử $f(k,0,0) = 0$ với mọi $k \in \mathbb{N}$.

- Nghiệm $x(k) = 0$ của phương trình (1.4) được gọi là ổn định nếu với bất kì $k_0 \geq 0$, $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta = \delta(k_0, \varepsilon)$ sao cho nếu $||\phi|| \leq \delta$ thì $||x(k; k_0, \phi)|| \leq \varepsilon$ với $k \geq k_0$.
- Nghiệm $x(k) = 0$ của phương trình (1.4) được gọi là ổn định tiệm cận nếu nó ổn định và tồn tại $b_0 = b_0(k_0) > 0$ sao cho nếu $||\phi|| \leq b_0$ thì $\lim\limits_{k \to \infty} x(k; k_0, \phi) = 0$.
- Nghiệm $x(k) = 0$ của phương trình (1.4) được gọi là ổn dịnh mũ nếu tồn tại các số dương $M > 0$, và $\alpha \in (0, 1)$ sao cho

$$\|x(k; \phi)\| \leq M\|\phi\|\alpha^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

1.1.4. Bài toán ổn định hóa hệ rời rạc

Xét hệ điều khiển có trễ

$$\begin{cases} x(k+1) = f(k, x(k), x(k-h), u(k)), & k \in \mathbb{N}, \\ x(k) = \phi(k), & k \in \{-h, -(h-1), ..., 0\}, \end{cases} \tag{1.5}$$

trong đó $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ là véc tơ điều khiển $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ là hàm véc tơ cho trước thỏa mãn điều kiện, $f(k, 0, 0, 0) = 0$, $k \in \mathbb{N}$.

Định nghĩa 1.6 Hệ điều khiển (1.5) gọi là ổn định hóa được nếu tồn tại hàm điều khiển $u(k) = g(x(k))$ sao cho hệ đóng

$$x(k+1) = f(k, x(k), x(k-h), g(x(k))), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{1.6}$$

là ổn định tiệm cận.

Định nghĩa 1.7 Cho số $\alpha \in (0, 1)$. Hệ điều khiển (1.5) gọi là $\alpha-$ ổn định hóa được dạng mũ nếu tồn tại hàm điều khiển $u(k) = g(x(k))$ sao cho hệ đóng (1.6) là $\alpha-$ ổn định mũ, tức là tồn tại hằng số $M > 0$ sao cho mọi nghiệm $x(k, \phi)$ của hệ đóng (1.6) thỏa mãn

$$\|x(k; \phi)\| \leq M\|\phi\|\alpha^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

1.2. Hệ suy biến tuyến tính

1.2.1. Hệ suy biến

Dựa vào các mô hình không gian trạng thái ta có thể mô tả một quá trình, hiện tượng vật lý, thông thường sử dụng các phương trình vi phân thường, việc phân tích và tổng hợp hệ thống là những đặc điểm nòng cốt trong lý thuyết điều khiển hiện đại được phát triển từ cuối những năm 1950 đầu những năm 1960. Để có được một mô hình trạng thái, ta cần chọn một vài biến đặc trưng như về tốc độ, cân nặng, nhiệt độ và gia tốc, những biến này có đủ khả năng mô tả tầm quan trọng của hệ thống đang xét. Dựa vào các đặc tính, quy luật của các quá trình, một vài phương trình sẽ được thiết lập thông qua mối quan hệ giữa các biến. Ta mô hình toán học hóa hệ thống bằng việc sử dụng các hệ phương trình vi phân hoặc các hệ đại số. Hệ đó có cấu tạo như sau

$$F(\dot{x}(t), x(t), t) = 0, \quad t \geq 0, \tag{1.7}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là trạng thái của hệ, $x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$, f là hàm véc tơ của $x(t)$, $\dot{x}(t)$ và t với số chiều phù hợp. Khi ma trận Jacobian $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$ là suy biến ta nhận được hệ phương trình vi phân suy biến. Một trường hợp đặc biệt của hệ (1.7) được quan tâm là

$$E\dot{x}(t) = H(x(t), t), \quad t \geq 0,$$

trong đó H là hàm véc tơ của $x(t)$ và t với số chiều thích hợp, E là ma trận hằng số, suy biến. Các hệ có cấu tạo được mô tả như trên nói chung được gọi là hệ suy biến. Trong nhiều bài báo, hệ suy biến còn được gọi là hệ mô tả các biến, hệ trạng thái tổng quát, hệ phương trình vi phân đại số. Hệ suy biến xuất hiện trong rất nhiều hệ thống như các hệ kỹ thuật, hệ thống điện, hàng không vũ trụ, hệ kinh tế xã hội, công nghệ sinh học ([4, 8, 27, 32]). Các ví dụ về hệ suy biến được trình bày chi tiết bởi Kunkel và V. Mehrmann ([26]).

Sau đây ta xét lớp hệ phương trình vi phân suy biến tuyến tính với hệ số hằng (thường được gọi là hệ phương trình vi phân đại số tuyến tính với hệ số hằng) dạng

$$E\dot{x}(t) = A_0 x(t) + f(t), \quad t \in T, \tag{1.8}$$

trong đó ma trận $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ là suy biến ($det(E) = 0$), $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ là ma trận hằng số cho trước, $f(t) \in \mathbb{R}^n$, $f(t)$ được xem là khả vi tới bậc cần thiết. $T = (a,\, b)$

là một khoảng của đường thẳng thực. Trong trường hợp $rank(E) = n$, hệ (1.8) có dạng

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= E^{-1}A_0x(t) + E^{-1}f(t)\\ &:= A_1x(t) + f_1(t)\end{aligned}$$

là phương trình vi phân bậc nhất thông thường, vấn đề tồn tại nghiệm được giải quyết bằng định lý Peano hoặc Picard - Lindeloff. Khi E là ma trận suy biến, vấn đề tồn tại nghiệm sẽ trở nên phức tạp hơn do xuất hiện các ràng buộc đại số. Tiếp theo, chúng tôi tìm hiểu vấn đề tồn tại nghiệm của hệ suy biến trong trường hợp tuyến tính.

Định nghĩa 1.8 Hàm $x(t)$ được gọi là nghiệm của (1.8) trên khoảng T nếu $x(t)$ là hàm khả vi liên tục trên T (tức là $x(\cdot) \in C^1(T, \mathbb{R}^n)$) và khi thay $x(t)$ vào (1.8) thì ta được đẳng thức đúng với mọi $t \in T$.

Khác với hệ phương trình vi phân thường, không gian nghiệm của hệ phương trình vi phân suy biến (1.8) có thể là vô hạn chiều.

Ví dụ 1.1 Xét phương trình vi phân suy biến sau

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad t \in (0, 1). \tag{1.9}$$

Khi đó các hàm có dạng $x_k(t) = \begin{pmatrix} x_1^k(t) \\ x_2^k(t) \end{pmatrix}$ trong đó $x_1^k(t) = t^k$, $x_2^k(t) = -t^k$ với $k \in \mathbb{N}$ sẽ là nghiệm của hệ (1.9). Hơn nữa ta còn chứng minh được rằng dãy các hàm $\{x_k(t), \quad k \in \mathbb{N}\}$ là độc lập tuyến tính. Thật vậy, giả sử tồn tại dãy số $\{\alpha_i\}_{i=0}^{+\infty}$ sao cho

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x_i(t) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{\infty} \alpha_i t^i \\ -\sum\limits_{i=0}^{\infty} \alpha_i t^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Từ đây suy ra $\alpha_i = 0, \ \forall i$ do dãy hàm $\{t^i : \ i \in \mathbb{N}\}$ là độc lập tuyến tính. Như vậy không gian nghiệm của (1.9) là vô hạn chiều. Từ Ví dụ 1.1 cho thấy, khác với phương trình vi phân thường không phải lúc nào không gian nghiệm của phương trình vi phân suy biến cũng là một không gian hữu hạn chiều.

Nhận xét 1.1 Khác với hệ phương trình vi thường, nghiệm của hệ phương trình vi phân suy biến phụ thuộc chặt chẽ vào vế phải.

Ví dụ 1.2 Xét hệ suy biến sau

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}, \quad t \in (0,1). \tag{1.10}$$

Hệ (1.10) viết lại dưới dạng sau

$$\begin{cases} \dot{x}_2(t) + 2x_1(t) = f_1(t), \\ x_2(t) = f_2(t). \end{cases} \tag{1.11}$$

Từ (1.11) ta thu được $x_1(t) = \frac{1}{2}(f_1(t) - \dot{f}_2(t))$ và $x_2(t) = f_2(t)$. Như vậy, nếu ta chỉ giả thiết $f(\cdot) \in C((0,1), \mathbb{R})$, và f không khả vi thì hệ (1.10) sẽ không có nghiệm theo Định nghĩa 1.8, vậy hệ (1.10) là vô nghiệm. Để phương trình (1.10) có nghiệm theo Định nghĩa 1.8 ta phải đặt thêm điều kiện, ví dụ như hàm $f(\cdot)$ là hàm khả vi đến cấp 2.

Khái niệm cặp ma trận chính quy là một công cụ quan trọng để nghiên cứu cấu trúc tập nghiệm của hệ phương trình suy biến tuyến tính.

Định nghĩa 1.9 ([8]) Cặp ma trận (E, A_0) được gọi là cặp ma trận chính quy nếu tồn tại số $\lambda \in \mathbb{C}$ sao cho $det(A_0 - \lambda E) \neq 0$.

Nhận xét 1.2 Chú ý rằng nếu tồn tại số $\lambda \in \mathbb{C}$ để $det(A_0 - \lambda E) \neq 0$ thì cũng tồn tại vô số các số như vậy, chỉ trừ hữu hạn các giá trị là nghiệm của đa thức đặc trưng $det(A_0 - \lambda E) = 0$.

Xét hệ (1.8), để đảm bảo sự tồn tại và duy nhất nghiệm của hệ (1.8) ta giả sử cặp ma trận (E, A_0) thỏa mãn điều kiện chính quy và $f(t)$ là hàm khả vi tới bậc cần thiết. Khi đó tồn tại hai ma trận P, Q (Bổ đề 1-2.2, trang 7, [8]) sao cho

$$PEQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}, \quad PA_0Q = \begin{pmatrix} A_{01} & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix},$$

trong đó $N \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$ là ma trận lũy linh cấp k. Với phép biến đổi

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = Q^{-1}x(t), \quad x_1(t) \in \mathbb{R}^r, \quad x_2(t) \in \mathbb{R}^{n-r},$$

hệ (1.8) đưa về hệ vi phân đại số

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) & = A_{01}x_1(t) + f_1(t), \\ N\dot{x}_2(t) & = x_2(t) + f_2(t). \end{cases} \tag{1.12}$$

Hệ này có nghiệm là

$$x_1(t) = e^{A_{01}t}x_1(0) + \int_0^t e^{A_{01}(t-s)}f_1(s)ds,$$
$$x_2(t) = -\sum_{i=0}^{k-1} N^i f_2^{(i)}(t), \tag{1.13}$$

trong đó $f_2^{(i)}(t)$ là đạo hàm cấp i của hàm $f_2(t)$.

Ví dụ 1.3 (xem [8], trang 14) Xét hệ suy biến

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} V_s(t), \tag{1.14}$$

trong đó $V_s(t)$ là hàm điều khiển đầu vào. Sử dụng phép đổi biến

$$Q^{-1}x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad x_1(t) \in \mathbb{R}^2, \quad x_2(t) \in \mathbb{R}^2,$$
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) & = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_1(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} V_s(t), \\ 0 & = x_2(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} V_s(t), \end{cases} \tag{1.15}$$

trong đó $A_{01} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $N = 0, f_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} V_s(t)$, $f_2(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} V_s(t)$, vậy ta thu được nghiệm có dạng

$$x_1(t) = e^{A_{01}t}x_1(0) + \int_0^t e^{A_{01}(t-\tau)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} V_s(\tau)d\tau,$$
$$x_2(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} V_s(t). \tag{1.16}$$

Tính toán trực tiếp ta thu được

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_1(t) \end{pmatrix},$$

trong đó

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{-\frac{1}{2}t} \begin{bmatrix} -\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t - \sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t & -2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ 2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t & \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t + \sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t \end{bmatrix} x_1(0) \\ &\quad + \int_0^t e^{-\frac{1}{2}(t-\tau)} \begin{bmatrix} -\sin\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\tau) - \sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\tau) \\ 2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\tau) \end{bmatrix} V_s(\tau)d\tau, \\ x_2(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} V_s(t). \end{aligned}$$

1.2.2. Công thức nghiệm của phương trình vi phân suy biến có trễ

Một hệ suy biến không chỉ phụ thuộc vào trạng thái hiện tại của hệ mà còn phụ thuộc vào cả những thông tin trạng thái trước đó gọi là hệ suy biến có trễ. Ta thường gặp chúng trong các hệ thống kỹ thuật như trong các lò phản ứng hạt nhân, các máy cán kim loại, các hệ thống chạy bằng sức nước, các quá trình sản xuất [8, 19, 27]. Trễ là nguồn gốc tạo ra sự dao động và tính không ổn định của các hệ điều khiển. Bởi vậy, việc tìm hiểu các hệ suy biến có trễ là vấn đề quan trọng và cần thiết. Xét hệ suy biến có trễ

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h), \quad t \geq 0, \\ x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-h, 0], \end{cases} \tag{1.17}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái. Ma trận $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận có $rank(E) = r < n$, $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là các ma trận thực cho trước, $h > 0$ là độ trễ hằng số. $\varphi(t) \in C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ là hàm điều kiện ban đầu.

Định nghĩa 1.10 ([8]) Cặp ma trận (E, A_0) gọi là impulse-free nếu thỏa mãn $deg(det(zE - A_0)) = rank(E) = r$.

Nhận xét 1.3 Giả sử (E, A_0) chính quy, khi đó tồn tại hai ma trận khả nghịch $P, Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (Bổ đề 1-2.2, [8]) sao cho $PEQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}$, trong đó $r = rank(E) \leq n$, $N \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$ lũy linh chỉ số ν, với ν là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn $N^\nu = 0$, $N^{\nu-1} \neq 0$. Khi đó chỉ số của hệ (1.17) là chỉ số lũy lĩnh ν của N. Khi $N = 0$ hệ (1.17) có chỉ số 1, từ Bổ đề 2.2 trong [27] suy ra hệ (1.17) impulse-free. Ngược lại nếu $rank(E) = r < n$ và hệ (1.17) impulse-free, từ Bổ đề 2.2 trong [27] hệ (1.17) có chỉ số 1. Tuy nhiên nếu $rank(E) = n$ (E khả nghịch) khi đó hệ (1.17) impulse-free (vì $deg(det(zE - A_0)) = rank(E) = n$) và có chỉ số 0.

Dựa vào tính chất chính quy và impulse-free của cặp ma trận (E, A_0) chúng ta chỉ ra rằng hệ (1.17) có thể đưa về dạng tương đương dễ nghiên cứu hơn sau đây. Xét hệ (1.17), giả sử rằng cặp ma trận (E, A_0) là chính quy và impulse-free tồn tại hai ma trận không suy biến P, Q (Bổ đề 2.2, trang 13, [27]) sao cho với phép biến đổi $y(t) = Q^{-1}x(t) = [y_1(t), y_2(t)]$, với $y_1(t) \in \mathbb{R}^r$, $y_2(t) \in \mathbb{R}^{n-r}$, khi đó hệ (1.17) viết dưới dạng hệ phương trình vi phân đại số

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = A_{01}y_1(t) + A_{11}y_1(t-h) + A_{12}y_2(t-h), \quad y_1(t) = \psi_1(t), t \in [-h, 0], \\ y_2(t) = -A_{13}y_1(t-h) - A_{14}y_2(t-h), \quad y_2(t) = \psi_2(t), t \in [-h, 0], \end{cases} \tag{1.18}$$

trong đó ta kí hiệu $PA_1Q = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{13} & A_{14} \end{pmatrix}$. Ta gọi hệ (1.18) là phân rã của hệ (1.17). Thay điều kiện ban đầu $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))$, $t \in [-h, 0]$ vào phương trình thứ hai của hệ (1.18) ta có

$$\psi_2(0) + A_{13}\psi_1(-h) + A_{14}\psi_2(-h) = 0. \tag{1.19}$$

Điều kiện (1.19) Khi $t \in [-h, 0]$ thì $t-h \in [-h, 0]$, vì vậy $y_i(t-h) = \psi_i(t-h)$, $i = 1, 2$ thay vào phương trình phương trình thứ nhất của hệ (1.18) ta được

$$\dot{y}_1(t) = A_{01}y_1(t) + A_{11}\psi_1(t-h) + A_{12}\psi_2(t-h),$$

là phương trình vi phân thường với điều kiện ban đầu $y_1(0) = \psi_1(0)$. Phương trình này có nghiệm

$$y_1(t) = e^{A_{01}t}y_1(0) + \int_0^t e^{A_{01}(t-s)}\big[A_{11}\psi_1(s-h) + A_{12}\psi_2(s-h)\big]\, ds,\ t \in [0, h]. \tag{1.20}$$

Từ phương trình thứ hai của hệ (1.18) và $y_i(t-h) = \psi_1(t-h)$, $i = 1,2$, $t \in [0,h]$ ta thu được

$$y_2(t) = -A_{13}\psi_1(t-h) - A_{14}\psi_2(t-h), \quad t \in [-h,0]. \tag{1.21}$$

Kết hợp (1.20) và (1.21) ta có

$$\begin{aligned} y(t) = &\begin{pmatrix} e^{A_{01}t} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y(0) + \int_0^t \begin{pmatrix} e^{A_{01}(t-s)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \psi(s-h)ds \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -A_{13} & -A_{14} \end{pmatrix} \psi(t-h),\ t \in [0,h]. \end{aligned}$$

Tương tự ta sẽ tìm được nghiệm $y(t)$ trên các đoạn $[h,2h]$, $[2h,3h]$, ... Như vậy ta tìm được nghiệm của hệ phương trình (1.17) dưới dạng sau

$$\begin{aligned} x(t) = &Q \begin{pmatrix} e^{A_{01}t} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}x(0) \\ &+ \int_0^t Q \begin{pmatrix} e^{A_{01}(t-s)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}\, x(s-h)ds \\ &+ Q \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -A_{13} & -A_{14} \end{pmatrix} Q^{-1}x(t-h),\ t \geq 0. \end{aligned}$$

Bổ đề 1.1 *([14]) Với mọi hàm liên tục $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))$ thỏa mãn điều kiện tương thích* (1.19) *tồn tại duy nhất hàm $y(t)$ xác định và liên tục trên $[-h,\infty)$ thỏa mãn hệ* (1.18) *trên $[0,\infty)$, và điều kiện ban đầu $y(t) = \psi(t)$, $t \in [-h,0]$.*

1.2.3. Công thức nghiệm của phương trình rời rạc suy biến có trễ

Xét hệ phương trình rời rạc có trễ sau

$$\begin{cases} Ex(k+1) = A_0x(k) + A_1x(k-\tau), & k \in \mathbb{N}, \\ x(k) = \varphi(k), & k \in \{-\tau,\ -(\tau-1),\ ...,0\}, \end{cases} \tag{1.22}$$

trong đó $x(k) \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N}$ là véc tơ trạng thái, các ma trận $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là các ma trận thực cho trước, ma trận $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận suy biến với $rank(E) = r < n$; $0 < \tau \in \mathbb{N}$ là hằng số trễ. $\varphi(\cdot) : \{-\tau, \cdots, 0\} \to \mathbb{R}^n$ là hàm điều kiện ban đầu với chuẩn xác định bởi $\|\varphi\| = \max\limits_{k\in\{-\tau,-(\tau-1),...,0\}} \|\varphi(k)\|$. Trong trường hợp E là ma trận đơn vị, hệ (1.22) luôn tìm được nghiệm bởi công thức truy hồi liên tiếp. Tuy nhiên nếu E là ma trận suy biến khi đó ta cần sử dụng tới tính chính quy của cặp ma trận (E, A_0) để có thể xây dựng được công thức nghiệm.

Định nghĩa 1.11 ([8]) Cặp ma trận (E, A_0) gọi là causal nếu thỏa mãn $deg(det(zE - A_0)) = rank(E) = r$.

Tương tự với trường hợp hệ suy biến liên tục, ở đây chúng tôi chỉ xét tới trường hợp cặp ma trận (E, A_0) thỏa mãn các điều kiện chính quy và causal. Khi đó tồn tại hai ma trận không suy biến P, Q (xem Bổ đề 2.10, trang 22, [27]) sao cho với phép biến đổi $y(k) = Q^{-1}x(k) = [y_1(k), y_2(k)]$ trong đó $y_1(k) \in \mathbb{R}^r$, $y_2(k) \in \mathbb{R}^{n-r}, k \in \mathbb{N}$ hệ (1.22) viết dưới dạng sau

$$\begin{cases} y_1(k+1) = A_{01}y_1(k) + A_{11}y_1(k-\tau) + A_{12}y_2(k-\tau), \quad y_1(s) = \psi_1(s), \\ y_2(k) = -A_{13}y_1(k-\tau) - A_{14}y_2(k-\tau), \quad y_2(s) = \psi_2(s), s \in \{-\tau, ..., 0\}, \end{cases} \tag{1.23}$$

vậy ta thu được công thức nghiệm sau

$$\begin{cases} y_1(k) = A_{01}^k\, y_1(0) + \sum\limits_{i=0}^{k-1} A_{01}^{k-1-i}\big[A_{11}\, y_1(i-\tau) + A_{12}\, y_2(i-\tau))\big], \\ y_2(k) = -A_{13}y_1(k-\tau) - A_{14}y_2(k-\tau). \end{cases} \tag{1.24}$$

Qua một số bước biến đổi, từ (1.24) ta thu được nghiệm của hệ phương trình (1.22) cho bởi

$$\begin{cases} x(k) = \overline{A}_{01}^k P_1 x(0) + \sum\limits_{i=0}^{k-1} \overline{A}_{01}^{k-1-i} \bar{A}_1 x(i-\tau) + \bar{A}_2 x(k-\tau), \\ x(k) = \varphi(k), \quad k \in \{-\tau, -(\tau-1), ..., 0\}, \end{cases}$$

trong đó

$$\overline{A}_{01} = Q\begin{bmatrix} A_{01} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1},\ P_1 = Q\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1},$$

$$\bar{A}_1 = Q\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}, \quad \bar{A}_2 = Q\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -A_{13} & -A_{14} \end{bmatrix} Q^{-1}.$$

1.3. Một số bổ đề bổ trợ

Bổ đề 1.2 *([13]) Cho ma trận $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Khi đó $e^{At} \succ 0$ với $t \geq 0$ khi và chỉ khi ma trận A là ma trận Metzler. Hơn nữa, ma trận nghịch đảo của một ma trận dương là dương nếu và chỉ nếu nó là ma trận Monomial.*

Bổ đề 1.3 *([11]) Cho A là một ma trận Metzler. Khi đó các phát biểu sau là tương đương:*

1) A là ma trận Hurwitz.

2) Tồn tại véc tơ $\gamma \in \mathbb{R}^n$ sao cho: $\gamma \gg 0$ và $A\gamma \ll 0$.

3) Tồn tại véc tơ $\lambda \in \mathbb{R}^n$ sao cho: $\lambda \gg 0$ và $\lambda^T A \ll 0$.

4) Ma trận A là khả nghịch và thỏa mãn $A^{-1} \preceq 0$.

Bổ đề 1.4 *([33]) Cho M, N là hai ma trận với số chiều phù hợp. Khi đó các phát biểu sau là tương đương:*

(i) $Mx \succeq 0$ suy ra $Nx \succeq 0$, với mọi $x \in \mathbb{R}^n$.

(ii) Tồn tại ma trận $H \succeq 0$ thỏa mãn $N = HM$.

Bổ đề 1.5 *([8]) (E, A_0) là cặp ma trận chính quy khi và chỉ khi tồn tại hai ma trận khả nghịch P, Q sao cho*

$$PEQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}, \quad PA_0Q = \begin{pmatrix} A_{01} & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix},$$

trong đó $A_{01} \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $N \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$ là ma trận lũy linh.

Bổ đề 1.6 *([27]) Giả sử rằng cặp ma trận (E, A_0) là chính quy, khi đó với hai ma trận P, Q sao cho Bổ đề 1.5 được thỏa mãn thì cặp ma trận (E, A_0) là impulse-free khi và chỉ khi $N = 0$.*

Bổ đề 1.7 *([17]) (Singular Value Decomposition) Cho ma trận $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ với $rank(E) = r \leq n$. Khi đó tồn tại hai ma trận trực giao $U \in \mathbb{R}^{n\times n}, V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sao cho*

$$E = U\Sigma V^T,$$

trong đó Σ là ma trận đường chéo, với các phần tử trên đường chéo chính là $\sigma_1, \sigma_2, ...\sigma_r, 0, ..., 0$. $\sigma_1 \geq \sigma_2, ... \geq \sigma_r > 0$.

Bổ đề 1.8 *Cho $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận suy biến với $rank(E) = r \leq n$. Khi đó tồn tại hai ma trận không suy biến P, Q sao cho $PEQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.*

Chứng minh. Từ Bổ đề 1.7 tồn tại hai ma trận trực giao $U \in \mathbb{R}^{n\times n}, V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sao cho

$$E = U\Sigma V^T.$$

Đặt
$$P = U^T,\ Q = V\ \mathrm{diag}(\sigma_1^{-1}, ..., \sigma_r^{-1}, 1, ..., 1),$$
Khi đó ta có $PEQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\square$

Nhận xét 1.4 Cho các ma trận vuông $E \in \mathbb{R}^{n\times n}, A_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}, A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ và $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, với $rank(E) = r < n$. Khi đó, từ Bổ đề 1.7 và Bổ đề 1.8 luôn tồn tại ma trận khả nghịch P, Q sao cho ta có phân tích sau đây:
$$PEQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} := \tilde{E}, \quad PA_0Q = \begin{bmatrix} A_{01} & A_{02} \\ A_{03} & A_{04} \end{bmatrix} := \tilde{A}_0,$$
$$PA_1Q = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{13} & A_{14} \end{bmatrix} := \tilde{A}_1, \quad PB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} := \tilde{B}.$$
Như vậy từ bộ ma trận (E, A_0, A_1, B) ta có thể đưa về dạng $(\tilde{E}, \tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \tilde{B})$ qua hai ma trận khả nghịch P, Q được xác định như sau:

- *Bước 1:* Sử dụng phân tích SVD đưa ma trận E về dạng $E = U\Sigma V^T$
- *Bước 2:* Ma trận P, Q được xác định
$$P = U^T,\ Q = V\ \mathrm{diag}(\sigma_1^{-1}, ..., \sigma_r^{-1}, 1, ..., 1).$$

Chương 2

Tính ổn định và ổn định hóa cho hệ phương trình vi phân suy biến dương có trễ

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu bài toán ổn định và ổn định hóa cho một số lớp hệ phương trình vi phân suy biến dương có trễ. Trước tiên chúng tôi chứng minh các điều kiện cần và đủ đảm bảo hệ suy biến có trễ là hệ dương, tiếp đó bài toán ổn định cho hệ suy biến dương được nghiên cứu. Thông qua việc giải bài toán quy hoạch tuyến tính chúng tôi tìm được hàm điều khiển để giải bài toán ổn định hóa cho hệ phương trình vi phân suy biến dương có trễ. Nội dung của chương này dựa trên bài báo [1,3] trong danh mục các công trình của tác giả.

2.1. Tiêu chuẩn ổn định của hệ phương trình vi phân suy biến dương có trễ

Xét hệ suy biến có trễ sau

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h), \quad t \geq 0, \\ x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-h, 0], \end{cases} \tag{2.1}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái, $h > 0$, $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ma trận $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ suy biến, giả sử rằng $rank(E) = r < n$, $\varphi(t) \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ là hàm điều kiện ban đầu tương thích.

Định nghĩa 2.1 [8]

- Hệ (2.1) được gọi là chính quy và impulse-free nếu cặp ma trận (E, A_0) là chính quy và impulse-free.

- Cho $\alpha > 0$. Nghiệm $x(t) = 0$ của hệ (2.1) được gọi là $\alpha-$ ổn định mũ nếu tồn tại hằng số $M > 0$ sao cho với mọi hàm ban đầu tương thích $\varphi(t)$ thì nghiệm $x(t,\, \varphi)$ của hệ (2.1) thỏa mãn điều kiện

$$\| x(t,\varphi) \| \leq Me^{-\alpha t} \| \varphi \|, \quad \forall t \geq 0.$$

Định nghĩa 2.2 [13] Hệ (2.1) được gọi là dương nếu với điều kiện ban đầu tương thích $\varphi : [-h,\, 0] \to \mathbb{R}^n_{0,+}$, thì nghiệm $x(t) \succeq 0$ với mọi $t \geq 0$.

Chú ý rằng từ điều kiện chính quy và impulse-free của cặp ma trận (E, A_0) suy ra tồn tại hai ma trận không suy biến P, Q (Bổ đề 2.3, trang 13, [27]) sao cho

$$PEQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}, \quad PA_0Q = \begin{pmatrix} A_{01} & A_{02} \\ A_{03} & A_{04} \end{pmatrix}, \quad PA_1Q = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{13} & A_{14} \end{pmatrix},$$

với $det(A_{04}) \neq 0$. Qua phép biến đổi $y(t) = Q^{-1}x(t) = [y_1(t), y_2(t)]$ trong đó $y_1(t) \in \mathbb{R}^r$, $y_2(t) \in \mathbb{R}^{n-r}$, hệ (2.1) đưa về hệ phương trình vi phân đại số

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = \overline{A}_{01}y_1(t) + \overline{A}_{11}y_1(t-h) + \overline{A}_{12}y_2(t-h), \quad y_1(t) = \psi_1(t), \\ y_2(t) = -A_{04}^{-1}\big[A_{03}y_1(t) + A_{13}y_1(t-h) + A_{14}y_2(t-h)\big], \quad y_2(t) = \psi_2(t), \end{cases} \tag{2.2}$$

trong đó

$$\overline{A}_{01} = A_{01} - A_{02}A_{04}^{-1}A_{03}, \overline{A}_{11} = A_{11} - A_{02}A_{04}^{-1}A_{13},$$
$$\overline{A}_{12} = A_{12} - A_{02}A_{04}^{-1}A_{14}.$$

Mệnh đề 2.1 *Giả sử cặp ma trận (E, A_0) là chính quy và impulse-free, Q là ma trận Monomial. Khi đó hệ (2.1) là dương nếu và chỉ nếu hệ (2.2) là dương.*

Chứng minh. Giả sử rằng hệ (2.1) là dương. Ta có $y(t) = Q^{-1}x(t)$ từ Bổ đề 1.2, $Q^{-1} \succ 0$ nếu và chỉ nếu Q là ma trận Monomial, vậy ta có $y(t) \succeq 0, t \geq 0$. Ngược lại, giả sử rằng hệ (2.2) là dương, $y(t) \succeq 0, t \geq 0$, mặt khác ta lại có $x(t) = Qy(t)$, vậy $x(t) = Qy(t) \succeq 0, t \geq 0$ vì $Q \succ 0$. □

Sau đây chúng tôi đưa ra điều kiện cần và đủ để hệ suy biến có trễ (2.2) là hệ dương.

Định lý 2.1 *Giả sử rằng các điều kiện trong Mệnh đề 2.1 được thỏa mãn, khi đó hệ* (2.2) *là dương nếu và chỉ nếu* $\overline{A}_{01}$ *là ma trận Metzler và* $\overline{A}_1 \succeq 0$, $-A_{04}^{-1}A_{03} \succeq 0$, *trong đó*

$$\overline{A}_{01} = A_{01} - A_{02}A_{04}^{-1}A_{03}, \quad \overline{A}_1 = \begin{bmatrix} \overline{A}_{11} & \overline{A}_{12} \\ -A_{04}^{-1}A_{13} & -A_{04}^{-1}A_{14} \end{bmatrix}.$$

Chứng minh. *Điều kiện cần.* Giả sử hệ (2.2) là dương. Xét phương trình thứ nhất trong hệ (2.2) trên đoạn $[0, h]$ với điều kiện ban đầu như sau:

$$\psi_1(0) = e_j, \quad \psi_1(t) = 0, \ t \in [-h, 0); \qquad \psi_2(t) = 0, \ t \in [-h, 0),$$

trong đó $e_j, j = 1, 2, ..., r$ là véc tơ đơn vị thứ j trong $\mathbb{R}^r$ (tức là có tọa độ thứ j bằng 1 và các tọa độ khác bằng 0). Khi đó trên đoạn $[0, h]$ nghiệm

$$y_1(t) = e^{\overline{A}_{01}t}e_i, \quad i = 1, 2, ..., r,$$

là dương, theo Bổ đề 1.2 ta có $\overline{A}_{01}$ là ma trận Metzler. Tiếp theo ta sẽ chứng minh $\overline{A}_{11}, \overline{A}_{12}$ là các ma trận không âm. Giả sử rằng tồn tại chỉ số i, j sao cho $[\overline{A}_{11}]_{ij} \ll 0$. Khi đó ta chọn điều kiện ban đầu

$$\psi_1(0) = 0, \quad \psi_1(t) = e_j, \ t \in [-h, 0); \qquad \psi_2(t) = 0, \ \ t \in [-h, 0),$$

với $t > 0$ đủ nhỏ, $t < h$ và $-h < t - h < 0$, từ phương trình đầu của hệ (2.2) ta có

$$y_1(t) = \int_0^t e^{\overline{A}_{01}(t-s)}\overline{A}_{11}e_j \, ds \succeq 0.$$

Từ đây suy ra

$$\begin{aligned} [y_1(t)]_i &= \int_0^t \left[\left(I + \overline{A}_{01}(t-s) + O_1((t-s)^2)\right)\overline{A}_{11}e_j\right]_i ds \\ &= \int_0^t \left([\overline{A}_{11}]_{ij} + O_2((t-s))\right) ds \ll 0, \end{aligned}$$

điều này trái với $y_1(t) \succeq 0$. Vậy ta có ma trận $\overline{A}_{11} \succeq 0$. Để chứng minh $\overline{A}_{12} \succeq 0$ ta chọn điều kiện ban đầu $\psi_2(t) = e_j, \ t \in [-h, 0); \quad \psi_1(t) = 0, t \in [-h, 0]$, trong đó $e_j, j = 1, 2, ..., n - r$ kí hiệu véc tơ đơn vị thứ j trong $\mathbb{R}^{n-r}$, khi đó nghiệm $y_1(t) = \int_0^t e^{\overline{A}_{01}(t-s)}\overline{A}_{12}e_j \, ds \succeq 0$, bằng cách chứng minh tương tự như trên ta nhận được ma trận $\overline{A}_{12} \succeq 0$. Tiếp theo ta sẽ chứng minh $-A_{04}^{-1}A_{03}, -A_{04}^{-1}A_{13}, -A_{04}^{-1}A_{14}$ là các ma trận không âm. Xét phương trình thứ hai của hệ (2.2) trên $[0, h]$. Chọn điều kiện ban đầu như sau

$$\psi_1(-h) = e_i, \quad \psi_1(t) = 0, \ t \in (-h, 0]; \qquad \psi_2(t) = 0, \ t \in [-h, 0),$$

ta được $y_2(0) = -A_{04}^{-1}A_{13}e_i \succeq 0, i = 1, 2, ..., r$, từ đây suy ra ma trận $-A_{04}^{-1}A_{13} \succeq 0$. Chọn điều kiện ban đầu

$$\psi_2(-h) = e_j, \quad \psi_2(t) = 0, \ t \in (-h, 0); \qquad \psi_1(t) = 0, \ t \in [-h, 0],$$

ta có $y_2(0) = -A_{04}^{-1}A_{14}e_j \succeq 0, j = 1, 2, ..., n-r$, vậy $-A_{04}^{-1}A_{14} \succeq 0$. Chọn điều kiện ban đầu

$$\psi_1(0) = e_i, \quad \psi_1(t) = 0, \ t \in [-h, 0); \qquad \psi_2(t) = 0, \ t \in [-h, 0),$$

ta nhận được $y_2(0) = -A_{04}^{-1}A_{03}e_i \succeq 0, i = 1, 2, ..., r$, vậy $-A_{04}^{-1}A_{03} \succeq 0$.

Điều kiện đủ. Chúng ta sẽ chứng minh rằng (2.2) là hệ dương, tức là với điều kiện ban đầu $\psi(\tau) \succeq 0, \ \tau \in [-h, 0\,]$ thì nghiệm $y_1(t) \succeq 0$ và $y_2(t) \succeq 0, t \geq 0$. Trước tiên ta chứng minh rằng $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$ là dương trên $[0, h]$. Từ phương trình thứ nhất của (2.2) ta có

$$y_1(t) = e^{\overline{A}_{01}t}y_1(0) + \int_0^t e^{\overline{A}_{01}(t-s)}\big[\ \overline{A}_{11}y_1(s-h) + \overline{A}_{12}y_2(s-h)\big]\, ds.$$

Vì $\overline{A}_{01}$ là ma trận Metzler, theo Bổ đề 1.2 ta thu được $e^{\overline{A}_{01}t} \succ 0, t \geq 0$. Từ điều kiện ban đầu $y_1(0) \succeq 0$, suy ra $e^{\overline{A}_{01}t}y_1(0) \succeq 0$. Tương tự như vậy ta có

$$e^{\overline{A}_{01}(t-s)}\overline{A}_{11}y_1(s-h) \succeq 0, \quad e^{\overline{A}_{01}(t-s)}\overline{A}_{12}y_2(s-h) \succeq 0,$$

với mọi $0 \leq s \leq t \leq h$. Từ đây suy ra $y_1(t) \succeq 0, \ t \in [0, h]$. Mặt khác, theo giả thiết ta có

$$-A_{04}^{-1}A_{03} \succeq 0, \ -A_{04}^{-1}A_{13} \succeq 0, \ -A_{04}^{-1}A_{14} \succeq 0, \ y_1(t) \succeq 0, y_1(t-h) \succeq 0,$$

$y_2(t-h) \succeq 0, \ t \in [0, h]$ và từ phương trình thứ hai của hệ (2.2) ta có

$$y_2(t) = -A_{04}^{-1}\big[A_{03}y_1(t) + A_{13}y_1(t-h) + A_{14}y_2(t-h)\big] \succeq 0.$$

Như vậy ta thu được $y(t) \succeq 0$ với $t \in [0, h]$. Tương tự, ta chứng minh được $y(t) \succeq 0$ trên các khoảng $[h, 2h\,]$, $[2h, 3h\,]$, v.v. $\square$

Nhận xét 2.1 Từ Định lý 2.1 ta thấy việc kiểm tra hệ (2.2) là hệ dương thông qua việc kiểm tra các ma trận $\overline{A}_{01}$ là ma trận Metzler và $\overline{A}_1 \succeq 0$, $-A_{04}^{-1}A_{03} \succeq 0$. Việc này rất dễ kiểm tra theo định nghĩa ma trận Metzler và ma trận không âm.

Định lý dưới đây cho chúng ta một điều kiện đủ cho tính ổn định mũ của lớp hệ phương trình vi phân suy biến dương có trễ hệ (2.1).

Định lý 2.2 *Cho $\alpha > 0$. Giả sử rằng cặp ma trận (E, A_0) thỏa mãn điều kiện chính quy và impulse-free, Q là ma trận Monomial, các ma trận $\overline{A}_{01}$, $\overline{A}_{11}$, $\overline{A}_{12}$, A_{03}, A_{04}, A_{13}, A_{14} được xác định trong* (2.2) *thỏa mãn các điều kiện: $\|A_{04}^{-1}A_{14}\| < 1$, tồn tại véc tơ $\lambda \gg 0$ sao cho $\lambda^T[\alpha\tilde{E} + \overline{A}_0 + \overline{A}_1 e^{\alpha h}] \preceq 0$, trong đó*

$$\tilde{E} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \overline{A}_0 = \begin{bmatrix} \overline{A}_{01} & 0 \\ -A_{04}^{-1}A_{03} & -I_{n-r} \end{bmatrix}, \overline{A}_1 = \begin{bmatrix} \overline{A}_{11} & \overline{A}_{12} \\ -A_{04}^{-1}A_{13} & -A_{04}^{-1}A_{14} \end{bmatrix}.$$

Khi đó, hệ (2.1) *là $\alpha-$ ổn định mũ.*

Chứng minh. Hệ (2.1) viết lại dưới dạng sau

$$\begin{cases} \tilde{E}\dot{y}(t) = \overline{A}_0 y(t) + \overline{A}_1 y(t-h), \quad t \geq 0, \\ y(t) = \psi(t) = [\psi_1^T(t), \psi_2^T(t)]^T \quad t \in [-h, 0]. \end{cases} \tag{2.3}$$

Hệ (2.1) là hệ dương, từ Bổ đề 2.1 suy ra hệ (2.3) là hệ dương, từ Định lý 2.1 suy ra ma trận $\overline{A}_1 \succeq 0$. Xét hàm không âm

$$V(t, y_t) = e^{\alpha t}\lambda^T \tilde{E} y(t) + \int_{t-h}^{t} e^{\alpha(s+h)}\lambda^T \overline{A}_1 y(s)\, ds. \tag{2.4}$$

Lấy đạo hàm dọc theo nghiệm của hệ (2.3) ta thu được

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, y_t) &= \alpha\lambda^T e^{\alpha t}\tilde{E}y(t) + \lambda^T e^{\alpha t}\tilde{E}\dot{y}(t) + \lambda^T\overline{A}_1 e^{\alpha(t+h)}y(t) - \lambda^T\overline{A}_1 e^{\alpha t}y(t-h) \\ &= \alpha\lambda^T e^{\alpha t}\tilde{E}y(t) + \lambda^T e^{\alpha t}\overline{A}_0 y(t) + \lambda^T e^{\alpha(t+h)}\overline{A}_1 y(t) \\ &= \lambda^T e^{\alpha t}[\alpha\tilde{E} + \overline{A}_0 + \overline{A}_1 e^{\alpha h}]y(t). \end{aligned}$$

Từ giả sử của định lý, ta có $\dot{V}(t, y_t) \leq 0, \quad \forall t \geq 0$. Lấy tích phân hai vế của bất đẳng thức trên từ 0 tới t ta thu được

$$V(t, y_t) \leq V(0, y_0) = \lambda^T \tilde{E} y(0) + \int_{-h}^{0} e^{\alpha(s+h)}\lambda^T\overline{A}_1 y(s)\, ds \leq \gamma\|\psi\|, \tag{2.5}$$

trong đó $\gamma = n\|\lambda\| + nhe^{\alpha h}\|\overline{A}_1^T\lambda\|$. Mặt khác, ta lại có

$$V(t, y_t) \geq \lambda^T e^{\alpha t}\tilde{E}y(t) \geq \beta e^{\alpha t}\|y_1(t)\|, \tag{2.6}$$

trong đó $\beta = \min\limits_{i=1,2,\ldots,n} \lambda_i$. Kết hợp (2.5) - (2.6) ta nhận được

$$\|y_1(t)\| \leq \frac{\gamma}{\beta}e^{-\alpha t}\|\psi\| := \nu e^{\alpha h}\|\psi\|e^{-\alpha t}, \quad \forall t \geq 0. \tag{2.7}$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh nghiệm $y_2(t)$ của hệ (2.3) là ổn định mũ.
Đặt: $p(t) = -A_{04}^{-1}A_{03}y_1(t) - A_{04}^{-1}A_{13}y_1(t-h)$. Dễ thấy rằng, nếu $t > h$ thì

$$\|y_1(t-h)\| \leq \frac{\gamma}{\beta}e^{-\alpha(t-h)}\|\psi\| \leq \frac{\gamma}{\beta}e^{\alpha h}\|\psi\|e^{-\alpha t} = \nu e^{\alpha h}\|\psi\|\, e^{-\alpha t}, \quad \forall t > h. \quad (2.8)$$

Với $t \in [0,\, h]$ ta có $\|y_1(t-h)\| = \|\psi_1\| \leq \|\psi\| \leq \|\psi\|\, e^{-\alpha(t-h)} \leq e^{\alpha h}\|\psi\|e^{-\alpha t}$ vì vậy

$$\|y_1(t-h)\| \leq \nu\, e^{\alpha h}\|\psi\|\, e^{-\alpha t}, \quad \forall t \in [0,\, h]. \quad (2.9)$$

Từ các bất đẳng thức (2.8), (2.9) ta thu được

$$\|y_1(t-h)\| \leq \nu e^{\alpha h}\, \|\psi\|\, e^{-\alpha t}, \quad \forall\, t \geq 0. \quad (2.10)$$

Từ(2.7), (2.10) và hàm $p(t)$ ta có

$$\|p(t)\| \leq \|A_{04}^{-1}A_{03}\|\|y_1(t)\| + \|A_{04}^{-1}A_{13}\|\|y_1(t-h)\| \leq \nu_1\, \|\psi\|\, e^{-\alpha t}, \quad \forall t \geq 0,$$

trong đó $\nu_1 = \nu e^{\alpha h}\left(\|A_{04}^{-1}A_{03}\| + \|A_{04}^{-1}A_{13}\|\right)$. Hơn nữa, từ phương trình thứ hai của hệ (2.3) ta có

$$\begin{aligned} y_2(t) &= -A_{04}^{-1}A_{14}y_2(t-h) - A_{04}^{-1}A_{03}y_1(t) - A_{04}^{-1}A_{13}y_1(t-h) \\ &= -A_{04}^{-1}A_{14}y_2(t-h) + p(t). \end{aligned}$$

Do đó,

$$\|y_2(t)\| \leq \|A_{04}^{-1}A_{14}\|\|y_2(t-h)\| + \|p(t)\|, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.11)$$

Đặt $\sigma := \max\{\nu\, e^{\alpha h}\big(\|A_{04}^{-1}A_{03}\| + \|A_{04}^{-1}A_{13}\|\big);\, e^{\alpha h}\}$. Nếu $t \in [0,\, h]$ thì $t - h \in [-h,\, 0]$. Từ bất đẳng thức (2.11) ta nhận được

$$\|y_2(t)\| \leq \|A_{04}^{-1}A_{14}\|\|\psi\| + \|p(t)\| \leq \Bigg(\|A_{04}^{-1}A_{14}\|\sigma + \sigma\Bigg)\|\psi\|e^{-\alpha t}. \quad (2.12)$$

Nếu $t \in [h,\, 2h]$ thì $t - h \in [0,\, h]$. Từ (2.11) và (2.12) ta có

$$\|y_2(t)\| \leq \Bigg(\|A_{04}^{-1}A_{14}\|^2\sigma + \|A_{04}^{-1}A_{14}\|\sigma + \sigma\Bigg)\|\psi\|e^{-\alpha t}.$$

Giả sử rằng $\forall t \in [(k-1)h, kh]$, ta có

$$\|y_2(t)\| \leq \Bigg(\sigma + \sigma\|A_{04}^{-1}A_{14}\| + ... + \sigma(\|A_{04}^{-1}A_{14}\|)^k\Bigg)\|\psi\|e^{-\alpha t}.$$

Ta có $t \in [kh, (k+1)h], t - h \in [(k-1)h, kh]$,từ giả thiết quy nạp và (2.11), (2.12) ta thu được

$$\begin{aligned}\|y_2(t)\| &\leq \|A_{04}^{-1}A_{14}\|\left(\sigma + \sigma\|A_{04}^{-1}A_{14}\| + ... + \sigma\|A_{04}^{-1}A_{14}\|^k\right)\|\psi\|e^{-\alpha t} + \|p(t)\| \\ &\leq \left(\sigma + \sigma\|A_{04}^{-1}A_{14}\| + ... + \sigma\|A_{04}^{-1}A_{14}\|^{k+1}\right)\|\psi\|\, e^{-\alpha t}.\end{aligned}$$

Nếu $\|A_{04}^{-1}A_{14}\| < 1$, bằng quy nạp, ta có

$$\begin{aligned}\|y_2(t)\| &\leq \|\psi\|\, e^{-\alpha t}\left(\sigma + \sigma\|A_{04}^{-1}A_{14}\| + ... + \sigma\|A_{04}^{-1}A_{14}\|^k + ...\right) \\ &\leq \frac{\sigma\,\|\psi\|\, e^{-\alpha t}}{1 - \|A_{04}^{-1}A_{14}\|}.\end{aligned} \tag{2.13}$$

Từ (2.7) và (2.13) ta thu được $\|y(t)\| < N\|\psi\|\, e^{-\alpha t}, t \geq 0$. Định lý được chứng minh hoàn toàn. $\square$

Nhận xét 2.2 Ma trận Q trong Định lý 2.2 là ma trận Monomial để đảm bảo hệ (2.2) là hệ dương tương đương với hệ (2.1) là đương. Tuy nhiên, nếu chỉ cần điều kiện đủ để đảm bảo hệ (2.1) là hệ đương thì $Q \succeq 0$ mà không cần là ma trận Monomial. Với $h > 0, \alpha > 0$ cho trước, điều kiện $\lambda^T[\alpha\tilde{E} + \overline{A}_0 + \overline{A}_1 e^{\alpha h}] \preceq 0$ trong Định lý 2.2 là hệ bất phương trình tuyến tính đối với ẩn λ do đó có thể đưa về bài toán quy hoạch hoạch tuyến tính để tìm λ.

Nhận xét 2.3 Điều kiện đủ đảm bảo hệ (2.1) ổn định mũ trong Định lý 2.2 là độc lập vào độ trễ theo nghĩa sau: Cho $h > 0$, giả sử tồn tại $\lambda \in \mathbb{R}^n_+$, $\alpha > 0$ sao cho thỏa mãn điều kiện

$$\lambda^T[\alpha\tilde{E} + \overline{A}_0 + \overline{A}_1 e^{\alpha h}] \preceq 0,$$

và $\|A_{04}^{-1}A_{14}\| < 1$. Như vậy theo Định lý 2.2 hệ (2.1) là ổn định mũ. Khi đó với mọi $0 < h_1 \neq h$ thì hệ (2.1) cũng ổn định mũ với trễ h_1. Thật vậy, ta sẽ chứng minh rằng tồn tại số $\alpha_1 > 0$ sao cho

$$\lambda^T[\alpha_1\tilde{E} + \overline{A}_0 + \overline{A}_1 e^{\alpha_1 h_1}] \preceq 0.$$

Nếu độ trễ h_1 thỏa mãn $0 < h_1 < h$ thì dễ dàng chứng minh được

$$\lambda^T[\alpha\tilde{E} + \overline{A}_0 + \overline{A}_1 e^{\alpha h_1}] \preceq \lambda^T[\alpha\tilde{E} + \overline{A}_0 + \overline{A}_1 e^{\alpha h}] \preceq 0,$$

vậy ta có hệ (2.1) với độ trễ h_1 là ổn định mũ. Nếu $0 < h < h_1$ thì tồn tại số $\alpha_1 > 0$ sao cho $\alpha_1 h_1 = \alpha\, h$. Vì $0 < h < h_1$ nên ta có $\dfrac{h_1}{h} > 1$. Mặt khác vì

$\alpha_1 h_1 = \alpha h$ nên ta có $\dfrac{\alpha}{\alpha_1} = \dfrac{h_1}{h} > 1$, từ đây suy ra $\alpha_1 < \alpha$. Vì $\tilde{E} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \succeq 0$ nên ta thu được

$$\alpha_1 \tilde{E} + \overline{A}_0 + \overline{A}_1 e^{\alpha_1 h_1} \preceq \alpha \tilde{E} + \overline{A}_0 + \overline{A}_1 e^{\alpha h},$$

bất đẳng thức này tương đương với

$$\alpha \tilde{E} + \overline{A}_0 + \overline{A}_1 e^{\alpha h} - [\alpha_1 \tilde{E} + \overline{A}_0 + \overline{A}_1 e^{\alpha_1 h_1}] \succeq 0. \tag{2.14}$$

Nhân trái hai vế của bất đẳng thức (2.14) với véc tơ $\lambda^T \in \mathbb{R}^n_+$ ta thu được

$$\lambda^T [\alpha \tilde{E} + \overline{A}_0 + \overline{A}_1 e^{\alpha h}] - \lambda^T [\alpha_1 \tilde{E} + \overline{A}_0 + \overline{A}_1 e^{\alpha_1 h_1}] \succeq 0. \tag{2.15}$$

Bất đẳng thức (2.15) tương đương với

$$\lambda^T [\alpha \tilde{E} + \overline{A}_0 + \overline{A}_1 e^{\alpha h}] \succeq \lambda^T [\alpha_1 \tilde{E} + \overline{A}_0 + \overline{A}_1 e^{\alpha_1 h_1}]. \tag{2.16}$$

Từ bất đẳng thức $\lambda^T [\alpha \tilde{E} + \overline{A}_0 + \overline{A}_1 e^{\alpha h}] \preceq 0$ kết hợp với (2.16) ta thu được

$$\lambda^T [\alpha_1 \tilde{E} + \overline{A}_0 + \overline{A}_1 e^{\alpha_1 h_1}] \preceq 0.$$

Ví dụ 2.1 Xét hệ (2.1) với các ma trận

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_0 = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 0 & 9 & -34 \\ -26 & 10 & 0 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{5} & -2 \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix}.$$

Tính trực tiếp ta thu được $\det(sE - A_0) = -2s^2 - 160s - 2388 \neq 0$, và

$$\deg(\det(sE - A_0)) = rank(E) = 2.$$

Vậy hệ là chính quy và impulse-free. Hơn nữa tồn tại hai ma trận khả nghịch

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

sao cho các ma trận E, A_0, A_1 được phân tích thành

$$PEQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, PA_0Q = \begin{bmatrix} -26 & 0 & 5 \\ 0 & -68 & 9 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, PA_1Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{10} \\ 0 & 1 & \frac{1}{10} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}.$$

Vậy ta có

$$\overline{A}_{01} = \begin{bmatrix} -21 & 5 \\ 9 & -59 \end{bmatrix}, \overline{A}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}, \overline{A}_{12} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$A_{04}^{-1}A_{03} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}, A_{04}^{-1}A_{13} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}, A_{04}^{-1}A_{14} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} \end{bmatrix},$$

$$\overline{A}_0 = \begin{bmatrix} -21 & 5 & 0 \\ 9 & -59 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \overline{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 5 & \frac{2}{5} \\ 0 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{10} \end{bmatrix}, \tilde{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Do đó, theo Định lý 2.1 hệ là dương. Hơn nữa, với

$$\lambda = (64, 49, 827), \alpha = 0.1,\ h = 0.6$$

dễ dàng chỉ ra được $\|A_{04}^{-1}A_{14}\| = \frac{1}{10} < 1$, và $\lambda^T[\alpha\tilde{E} + \overline{A}_0 + \overline{A}_1 e^{\alpha h}] \preceq 0$, từ Định lý 2.2 suy ra hệ là ổn định mũ .

Nhận xét 2.4 Khi ma trận E trong hệ (2.1) là ma trận đơn vị ta nhận được phương trình vi phân có trễ thông thường, điều kiện cần và đủ để hệ dương là ma trận A_0 Metzler và $A_1 \succeq 0$. Tuy nhiên khi E là ma trận suy biến, điều này không còn đúng nữa, như ta thấy trong Định lý 2.1 điều kiện đảm bảo hệ (2.1) dương trở nên phức tạp hơn rất nhiều, ta cần thêm cặp (E, A_0) là chính quy và impulse-free. Ngoài ra việc chứng minh tính ổn định mũ của hệ cũng trở nên khó khăn và phức tạp.

Nhận xét 2.5 Định lý 2.2 cho ta điều kiện đủ đảm bảo tính ổn định mũ của hệ suy biến dương (2.1), tuy nhiên với những hệ suy biến không thỏa mãn điều kiện chính quy, impulse-free thì định lý không còn đúng nữa. Để giải quyết hạn chế này ta xét bài toán ổn định hóa hệ suy biến dương có trễ.

Nhận xét 2.6 Các điều kiện về tính ổn định mũ cho hệ (2.1) trong bài báo [35] được phát biểu theo điều kiện về phổ của ma trận $\Delta(\lambda) := \lambda E - A_0 - A_1 e^{-\lambda h}$. Hệ (2.1) ổn định mũ nếu $\sup\{Re(\lambda) :\ det\Delta(\lambda) = 0\} < 0$ ([35]). Tuy nhiên, điều kiện này dựa trên giải phương trình đặc trưng tìm giá trị riêng là phi tuyến (không như hệ suy biến tuyến tính không có trễ mà ở đó phương trình đặc trưng là tuyến tính) nên không dễ dàng giải được. Các điều kiện đủ trong Định lý 2.2 được phát biểu thông qua các bất phương trình tuyến tính mà dễ dàng giải được dựa trên phương pháp giải bài toán quy hoạch tuyến tính.

2.2. Tiêu chuẩn ổn định hóa của hệ phương trình vi phân suy biến dương có trễ

Để giải bài toán ổn định hóa cho lớp hệ phương trình vi phân có trễ ta có thể thiết kế các hàm điều khiển *"không nhớ"* (memoryless controllers) dạng $u(t) = Kx(t)$ ([16]). Mặc dù lớp điều khiển *"không nhớ"* dễ thiết kế hơn nhưng nó được chỉ ra rằng ([38]) lớp điều khiển này trở nên bảo thủ (conservative), kém hiệu quả hơn trong trường hợp trễ nhỏ. Vì vậy việc thiết kế các hàm điều khiển sử dụng thông tin trên trạng thái hiện tại và quá khứ có thể cho hiệu quả tốt hơn hàm điều khiển *"không nhớ"*. Trong phần này trình bày kết quả nghiên cứu bài toán ổn định hóa cho hệ phương trình vi phân suy biến dương có trễ sử dụng hàm điều khiển có nhớ (memory state feedback control). Xét hệ điều khiển suy biến có trễ có dạng sau

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h) + Bu(t), \quad t \geq 0, \\ x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-h, 0], \end{cases} \tag{2.17}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là véc tơ điều khiển, A_0,$A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, và ma trận $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là suy biến có rank $E = r < n$, độ trễ $h > 0$.

Định nghĩa 2.3 Cho số $\alpha > 0$. Hệ (2.17) (với $u(t) = 0$) được gọi là $\alpha-$ ổn định mũ nếu hệ là chính quy, impulse-free và tồn tại số dương $N > 0$ sao cho mọi nghiệm $x(t, \varphi)$ của hệ thỏa mãn điều kiện

$$\|x(t, \varphi)\| \leq Ne^{-\alpha t}\|\varphi\|, \quad \forall t \geq 0.$$

Định nghĩa 2.4 Cho số $\alpha > 0$. Hệ (2.17) gọi là $\alpha-$ ổn định hóa được dạng mũ, nếu tồn tại hàm điều khiển ngược $u(t) = Kx(t) + Fx(t-h)$, K, $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sao cho hệ đóng tương ứng

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = (A_0 + BK)x(t) + (A_1 + BF)x(t-h), \quad t \geq 0 \\ x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-h, 0], \end{cases}$$

là $\alpha-$ ổn định mũ.

Với hệ suy biến (2.17) không có điều kiện chính quy, impulses-free trên cặp ma trận (E, A_0) ta sẽ dùng phân tích SVD để đưa hệ (2.17) về hệ mới như sau:

Theo giả thiết ma trận suy biến E có $rank(E) = r < n$, áp dụng Bổ đề 1.8 tồn tại hai ma trận khả nghịch P, Q sao cho ta có phân tích $PEQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Đặt

$$PEQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} := \tilde{E}, \quad PA_0Q = \begin{bmatrix} A_{01} & A_{02} \\ A_{03} & A_{04} \end{bmatrix} := \tilde{A}_0,$$

$$PA_1Q = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{13} & A_{14} \end{bmatrix} := \tilde{A}_1, \quad PB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} := \tilde{B}.$$

Chú ý P, Q được tìm theo các bước trong Nhận xét 1.4. Qua phép đổi biến $y(t) = Q^{-1}x(t) = [\, y_1(t),\ y_2(t)\,]$ trong đó $y_1(t) \in \mathbb{R}^r$,
$y_2(t) \in \mathbb{R}^{n-r}$, hệ (2.17) đưa về dạng sau

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = & A_{01}y_1(t) + A_{02}y_2(t) + A_{11}y_1(t-h) + A_{12}y_2(t-h) + B_1u(t), \\ y_1(t) = & \phi_1(t), \quad t \in [-h, 0], \\ 0 = & A_{03}y_1(t) + A_{04}y_2(t) + A_{13}y_1(t-h) + A_{14}y_2(t-h) + B_2u(t), \\ y_2(t) = & \phi_2(t), \qquad t \in [-h, 0], \end{cases} \tag{2.18}$$

trong đó $Q^{-1}\varphi(t) = [\phi_1(t), \phi_2(t)]$. Sử dụng hàm điều khiển ngược

$$u(t) = K_1y_1(t) + K_2y_2(t) + F_1y_1(t-h) + F_2y_2(t-h), \tag{2.19}$$

trong đó

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}, \ F = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \end{bmatrix}, \ K_1,\ F_1 \in \mathbb{R}^{m\times r},\ K_2,\ F_2 \in \mathbb{R}^{m\times(n-r)},$$

khi đó hệ (2.18) đưa về dạng sau

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = & (A_{01} + B_1K_1)y_1(t) + (A_{02} + B_1K_2)y_2(t) + (A_{11} + B_1F_1)y_1(t-h) \\ & \quad +(A_{12} + B_1F_2)y_2(t-h), \\ 0 = & (A_{03} + B_2K_1)y_1(t) + (A_{04} + B_2K_2)y_2(t) + (A_{13} + B_2F_1)y_1(t-h) \\ & \quad +(A_{14} + B_2F_2)y_2(t-h). \end{cases} \tag{2.20}$$

Bổ đề 2.1 *([12]) Giả sử hệ* (2.17) *(với $u(t) = 0$) là chính quy và impulse-free, viết được dưới dạng* (2.18) *với $det(A_{04}) \neq 0$. Hệ* (2.18) *(với $u(t) = 0$) là hệ dương khi và chỉ khi A_{04} là ma trận Hurwitz, $\tilde{A}_0$ là ma trận Metzler và $\tilde{A}_1 \succeq 0$.*

Mệnh đề 2.2 *Giả sử ma trận $Q \succeq 0$. Hệ (2.18) là $\alpha-$ ổn định hóa được dạng mũ với hàm điều khiển ngược (2.19), thì hệ (2.17) là $\alpha-$ ổn định hóa được dạng mũ với hàm điều khiển ngược $u(t) = KQ^{-1}x(t) + FQ^{-1}x(t-h)$.*

Chứng minh. Thật vậy, hệ (2.20) là chính quy và impulse-free nếu và chỉ nếu $det(A_{04} + B_2K_2) \neq 0$ (xem Bổ đề 2.3, trang 13, [27]). Đặt

$$\overline{P} = \begin{bmatrix} I_r & -(A_{02} + B_1K_2)(A_{04} + B_2K_2)^{-1} \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} P,$$

$$\overline{Q} = Q \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ -(A_{04} + B_2K_2)^{-1}(A_{03} + B_2K_1) & (A_{04} + B_2K_2)^{-1} \end{bmatrix}.$$

Dễ dàng tính được

$$\overline{P}E\overline{Q} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \overline{P}(A_0 + BKQ^{-1})\overline{Q} = \begin{bmatrix} \hat{A}_0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \overline{P}(sE - (A_0 + BKQ^{-1}))\overline{Q} &= s\overline{P}E\overline{Q} - \overline{P}(A_0 + BKQ^{-1})\overline{Q} \\ &= \begin{bmatrix} sI_r - \hat{A}_0 & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

trong đó $\hat{A}_0 = (A_{01} + B_1K_1) - (A_{02} + B_1K_2)(A_{04} + B_2K_2)^{-1}(A_{03} + B_2K_1)$. Vậy ta tính được

$$\begin{aligned} det(sE - (A_0 + BKQ^{-1})) &= det(\overline{P}^{-1}\,\overline{P}(sE - (A_0 + BKQ^{-1}))\overline{Q}\,\overline{Q}^{-1}) \\ &= (-1)^{n-r}det(\overline{P}^{-1})\,det(sI_r - \hat{A}_0)det(\overline{Q}^{-1}). \end{aligned}$$

Hơn nữa, chú ý rằng

$$det(sI_r - \hat{A}_0) = \sum_{k=1}^{r} a_k s^k, \ a_r = 1, \ \ det(\overline{P}^{-1}) \neq 0, \ det(\overline{Q}^{-1}) \neq 0,$$

từ tính khả nghịch của hai ma trận $\overline{P}$, $\overline{Q}$ ta chỉ ra được

$$det(sE - (A_0 + BKQ^{-1})) \neq 0$$

và

$$deg(det(sE - (A_0 + BKQ^{-1}))) = r = rankE,$$

điều này chỉ ra rằng hệ đóng của (2.17) là chính quy và impulse-free. Mặt khác,

$$\|y(t)\| \leq Me^{-\alpha t}\|\phi\|, \quad \forall t \geq 0.$$

Vậy ta có $\|x(t)\| \leq \|Q\|\|y(t)\| \leq Ne^{-\alpha t}\|\varphi\|, \quad \forall t \geq 0.$ $\square$

Mệnh đề 2.3 *Cho số dương $\nu > 0$, $X \in \mathbb{R}^{m\times m}$ là ma trận Metzler, Hurwitz, $Y \succeq 0$, $Y \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Cho véc tơ $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$ thỏa mãn điều kiện*

$$\lambda^T\big(X + e^{\nu}Y\big) \ll 0. \tag{2.21}$$

Khi đó, tồn tại véc tơ $\eta \in \mathbb{R}^m_+$, số $\rho \in (0,\, 1)$ thỏa mãn

$$\eta^T(-X^{-1})Y \preceq \rho\,\eta^T. \tag{2.22}$$

Chứng minh. Thật vậy, ta có $\lambda \gg 0$, $Y \succeq 0$, $e^{\nu} > 1$ kết hợp với bất đẳng thức (2.21) suy ra rằng

$$\lambda^T\big(X + Y\big) \ll 0. \tag{2.23}$$

Hơn nữa, chú ý rằng ma trận $X+Y$ là Metzler , áp dụng Bổ đề 1.3 và bất đẳng thức (2.23) suy ra tồn tại véc tơ $\eta_1 \in \mathbb{R}^m_+$ sao cho

$$\big(X + Y\big)\eta_1 \ll 0. \tag{2.24}$$

Vì ma trận X vừa là ma trận Hurwitz vừa là ma trận Metzler, nên áp dụng Bổ đề 1.3 ta thu được $-X^{-1} \succeq 0$. Ta nhân trái cả hai vế của bất đẳng thức (2.24) với ma trận không suy biến $-X^{-1} \succeq 0$, ta thu được

$$\Bigg(-X^{-1}Y - I_m\Bigg)\eta_1 \ll 0. \tag{2.25}$$

Vì ma trận $-X^{-1}Y \succeq 0$ nên ta có ma trận $\Bigg(-X^{-1}Y - I_m\Bigg)$ là ma trận Metzler, từ Bổ đề 1.3 và bất đẳng thức (2.25) suy ra tồn tại véc tơ $\eta \in \mathbb{R}^m_+$ sao cho

$$\eta^T\Bigg(-X^{-1}Y - I_m\Bigg) \ll 0. \tag{2.26}$$

Từ bất đẳng thức (2.26), ta sẽ chỉ ra rằng tồn tại một số $\rho \in (0, 1)$ thỏa mãn

$$-\eta^T X^{-1}Y \preceq \rho\,\eta^T. \tag{2.27}$$

Thật vậy, ta đặt $\eta^T := (\xi_1\ \ \xi_2\ \ ...\ \xi_m) \gg 0$ và $q := -\eta^T X^{-1}Y = (q_1\ \ q_2\ \ ...\ q_m) \succeq 0$. Nếu như $q_i = 0, \forall i = 1, 2, ..., m$, thì với mọi $\rho \in (0,\, 1)$ ta có bất đẳng thức (2.27) luôn đúng. Nếu $q \neq 0$, ta đặt $\rho := \max\limits_{i=1,2,...,m} \left\{\frac{q_i}{\xi_i}\right\}$. Bất đẳng thức (2.26) suy ra $q \ll \eta^T$, hay ta có $q_i < \xi_i$, $\forall i = 1, 2, ..., m$, vậy suy ra $\rho \in (0,\, 1)$. Mặt khác ta lại có, $q_i \leq \rho\xi_i$, với mọi $i = 1, 2, ..., m$, vậy ta thu được $q \preceq \rho\eta^T$, từ đây ta thu được bất đẳng thức (2.22). □

Định lý sau đây cho ta một điều kiện đủ để giải bài toán ổn định hóa cho hệ suy biến liên tục có trễ. Ta kí hiệu: $\tilde{A}_0 = [a_{ij}^{(0)}]_{n\times n}$, $\tilde{A}_1 = [a_{ij}^{(1)}]_{n\times n}$, b_i^T là véc tơ hàng thứ i của ma trận $\tilde{B}$.

Định lý 2.3 *Cho số $\alpha > 0$. Giả sử tồn tại các véc tơ $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $k_j,\ f_j \in \mathbb{R}^m,\ j = 1, 2, ..., n$ sao cho các bất đẳng thức sau thỏa mãn*

$$\begin{cases} a_{ij}^{(0)}\beta_j + b_i^T k_j \geq 0, \quad i, j = 1, ..., n,\ i \neq j, \\ a_{ij}^{(1)}\beta_j + b_i^T f_j \geq 0, \quad i, j = 1, ..., n, \end{cases} \tag{2.28}$$

$$\big(\alpha\tilde{E} + \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 e^{\alpha h}\big)\beta + \tilde{B}\big(\sum_{i=1}^{n} k_i + e^{\alpha h}\sum_{j=1}^{n} f_i\big) \ll 0. \tag{2.29}$$

Khi đó, hệ (2.17) là dương và $\alpha-$ ổn định hóa được dạng mũ. Ngoài ra, điều khiển ngược ổn định hóa hệ (2.17) cho bởi công thức

$$u(t) = KQ^{-1}x(t) + FQ^{-1}x(t-h), \quad t \geq 0,$$

trong đó

$$K = \left[\frac{k_1}{\beta_1}\ \frac{k_2}{\beta_2}\ ...\ \frac{k_n}{\beta_n}\right],\ \ F = \left[\frac{f_1}{\beta_1}\ \frac{f_2}{\beta_2}\ ...\ \frac{f_n}{\beta_n}\right].$$

Chứng minh. Dựa vào Mệnh đề 2.2 ta chỉ cần chứng minh α-ổn định mũ cho hệ (2.20). Chứng minh được chia làm hai bước chính, trước tiên ta sẽ chứng minh hệ (2.20) thỏa mãn các điều kiện chính quy, impulse-free và là hệ dương. Tiếp đó, ta sẽ chứng minh hệ (2.20) ổn định mũ.

Bước 1. Ta viết lại hệ (2.20) dưới dạng sau

$$\begin{cases} \overline{E}\dot{y}(t) = \overline{A}_0 y(t) + \overline{A}_1 y(t-h), \quad t \geq 0, \\ y(t) = \phi(t),\ t \in [-h, 0], \end{cases} \tag{2.30}$$

trong đó $\overline{E} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\overline{A}_0 = \begin{bmatrix} A_{01} + B_1K_1 & A_{02} + B_1K_2 \\ A_{03} + B_2K_1 & A_{04} + B_2K_2 \end{bmatrix}$,

$$\overline{A}_1 = \begin{bmatrix} A_{11} + B_1F_1 & A_{12} + B_1F_2 \\ A_{13} + B_2F_1 & A_{14} + B_2F_2 \end{bmatrix}.$$

Từ điều kiện,

$$a_{ij}^{(0)}\beta_j + b_i^T k_j \geq 0, \quad i, j = 1, .., n;\ i \neq j,$$

tương đương với

$$a_{ij}^{(0)} + b_i^T \frac{k_j}{\beta_j} \geq 0, \quad i, j = 1, .., n; \; i \neq j,$$

vậy ta có $\tilde{A}_0 + \tilde{B}K$ là ma trận Metzler. Hơn nữa

$$\begin{aligned}\overline{A}_0 &= \begin{bmatrix} A_{01} + B_1K_1 & A_{02} + B_1K_2 \\ A_{03} + B_2K_1 & A_{04} + B_2K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{01} & A_{02} \\ A_{03} & A_{04} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1K_1 & B_1K_2 \\ B_2K_1 & B_2K_2 \end{bmatrix} \\ &= \tilde{A}_0 + \tilde{B}K,\end{aligned}$$

vậy ta thu được ma trận $\overline{A}_0$ là Metzler. Tương tự ta có,

$$a_{ij}^{(1)}\beta_j + b_i^T f_j \geq 0 \Longleftrightarrow a_{ij}^{(1)} + b_i^T \frac{f_j}{\beta_j} \geq 0,$$

ta thu được $\tilde{A}_1 + \tilde{B}F \succeq 0$. Vì

$$\begin{aligned}\overline{A}_1 &= \begin{bmatrix} A_{11} + B_1F_1 & A_{12} + B_1F_2 \\ A_{13} + B_2F_1 & A_{14} + B_2F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{13} & A_{14} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1F_1 & B_1F_2 \\ B_2F_1 & B_2F_2 \end{bmatrix} \\ &= \tilde{A}_1 + \tilde{B}F,\end{aligned}$$

nên ta có $\overline{A}_1 \succeq 0$. Ta đặt

$$\sum_{i=1}^{n} k_i = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{\beta_1} & \frac{k_2}{\beta_2} & \dots & \frac{k_n}{\beta_n} \end{bmatrix} \beta = K\beta, \quad \sum_{i=1}^{n} f_i = \begin{bmatrix} \frac{f_1}{\beta_1} & \frac{f_2}{\beta_2} & \dots & \frac{f_n}{\beta_n} \end{bmatrix} \beta = F\beta,$$

sử dụng điều kiện (2.29) ta thu được

$$\begin{aligned}\big(\alpha\tilde{E} + \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 e^{\alpha h}\big)\beta + \tilde{B}\Big(\sum_{i=1}^{n} k_i + e^{\alpha h}\sum_{j=1}^{n} f_i\Big) &= \big(\alpha\tilde{E} + \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 e^{\alpha h}\big)\beta \\ + \tilde{B}(K + e^{\alpha h}F)\beta &= \big(\alpha\tilde{E} + \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 e^{\alpha h} + \tilde{B}(K + e^{\alpha h}F)\big)\beta \ll 0.\end{aligned} \tag{2.31}$$

$$\begin{aligned}\alpha\overline{E} + \overline{A}_0 + \overline{A}_1 e^{\alpha h} =& \alpha \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{01} + B_1K_1 & A_{02} + B_1K_2 \\ A_{03} + B_2K_1 & A_{04} + B_2K_2 \end{bmatrix} \\ &+ e^{\alpha h} \begin{bmatrix} A_{11} + B_1F_1 & A_{12} + B_1F_2 \\ A_{13} + B_2F_1 & A_{14} + B_2F_2 \end{bmatrix} \\ =& \alpha \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{01} & A_{02} \\ A_{03} & A_{04} \end{bmatrix} + e^{\alpha h} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{13} & A_{14} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} B_1K_1 & B_1K_2 \\ B_2K_1 & B_2K_2 \end{bmatrix} + e^{\alpha h} \begin{bmatrix} B_1F_1 & B_1F_2 \\ B_2F_1 & B_2F_2 \end{bmatrix} \\ =& \alpha\tilde{E} + \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 e^{\alpha h} + \tilde{B}(K + e^{\alpha h}F).\end{aligned} \tag{2.32}$$

Kết hợp (2.31) và (2.32) ta nhận được

$$\big(\alpha\overline{E} + \overline{A}_0 + \overline{A}_1 e^{\alpha h}\big)\beta \ll 0. \tag{2.33}$$

Mặt khác, từ bất đẳng thức $\big(\alpha\overline{E} + \overline{A}_1 e^{\alpha h}\big)\beta \succeq 0$ và (2.33) suy ra

$$\overline{A}_0\beta \ll 0. \tag{2.34}$$

Ta kí hiệu $\beta := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n_+$, $v_1 \in \mathbb{R}^r_+$, $v_2 \in \mathbb{R}^{n-r}_+$, từ điều kiện (2.34) ta thu được

$$\overline{A}_0\beta = \begin{bmatrix} A_{01} + B_1K_1 & A_{02} + B_1K_2 \\ A_{03} + B_2K_1 & A_{04} + B_2K_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \ll 0, \tag{2.35}$$

vậy ta có

$$(A_{03} + B_2K_1)v_1 + (A_{04} + B_2K_2)v_2 \ll 0. \tag{2.36}$$

Vì ma trận $\overline{A}_0$ là Metzler, $v_1 \in \mathbb{R}^r_+$, nên ta có $(A_{03} + B_2K_1)v_1 \succeq 0$, vì vậy từ (2.36), ta nhận được

$$(A_{04} + B_2K_2)v_2 \ll 0. \tag{2.37}$$

Chú ý rằng ma trận $A_{04}+B_2K_2$ là Metzler, sử dụng Bổ đề 1.3 và bất đẳng thức (2.37) ta suy ra rằng ma trận $A_{04} + B_2K_2$ là ma trận Hurwitz, và $det(A_{04} + B_2K_2) \neq 0$, từ đây ta có hệ (2.20) là chính quy, impulse-free. Hơn nữa, vì $\overline{A}_1 \succeq 0$, $\overline{A}_0$ là ma trận Metzler và $A_{04}+B_2K_2$ là Hurwitz, $det(A_{04}+B_2K_2) \neq 0$, áp dụng Bổ đề 2.1 ta thu được hệ (2.20) là hệ dương.

Bước 2. Tiếp theo, ta sẽ chỉ ra rằng hệ (2.20) là ổn định mũ. Chú ý rằng vì ma trận $\alpha\overline{E} + \overline{A}_0 + \overline{A}_1 e^{\alpha h}$ là ma trận Metzler thỏa mãn điều kiện (2.33), áp dụng Bổ đề 1.3, suy ra tồn tại véc tơ $\lambda \in \mathbb{R}^n_+$ sao cho

$$\lambda^T[\alpha\overline{E} + \overline{A}_0 + \overline{A}_1 e^{\alpha h}] \ll 0. \tag{2.38}$$

Ta xét hàm không âm sau

$$V\left(t, y_t\right) = e^{\alpha t}\lambda^T\overline{E}y(t) + \int\limits_{t-h}^{t} e^{\alpha(s+h)}\lambda^T\overline{A}_1 y(s)ds. \tag{2.39}$$

Lấy đạo hàm của $V(t, y_t)$ theo t dọc theo nghiệm của hệ (2.39) ta thu được

$$\begin{aligned}\dot{V}(t, y_t) &= \alpha\lambda^T e^{\alpha t}\overline{E}y(t) + \lambda^T e^{\alpha t}\overline{E}\dot{y}(t) + \lambda^T\overline{A}_1 e^{\alpha(t+h)}y(t) - \lambda^T\overline{A}_1 e^{\alpha t}y(t-h)\\ &= \alpha\lambda^T e^{\alpha t}\overline{E}y(t) + \lambda^T e^{\alpha t}\overline{A}_0 y(t) + \lambda^T e^{\alpha(t+h)}\overline{A}_1 y(t)\\ &= e^{\alpha t}\lambda^T[\alpha\overline{E} + \overline{A}_0 + \overline{A}_1 e^{\alpha h}]y(t).\end{aligned} \tag{2.40}$$

Từ (2.38) và (2.40) ta nhận được

$$\dot{V}(t, y_t) \leq 0, \quad t \geq 0. \tag{2.41}$$

Lấy tích phân hai vế của bất đẳng thức (2.41) từ 0 tới t ta thu được

$$V(t, y_t)) \leq V(0, y_0) = \lambda^T\overline{E}y(0) + \int_{-h}^{0} \lambda^T\overline{A}_1 e^{\alpha(s+h)}y(s)ds \leq \gamma\|\phi\|, \tag{2.42}$$

trong đó $\gamma = n\|\lambda\| + nhe^{\alpha h}\|\overline{A}_1^T\lambda\|$, $\overline{A}_1 = \tilde{A}_1 + \tilde{B}F$. Mặt khác, ta lại có

$$V(t, y_t) \geq \lambda^T e^{\alpha t}\overline{E}y(t) \geq \Lambda e^{\alpha t}\|y_1(t)\|, \tag{2.43}$$

với $\Lambda = \min\limits_{i=1,2,\ldots,n} \lambda_i$. Kết hợp (2.42) với (2.43) ta nhận được

$$\|y_1(t)\| \leq \frac{\gamma}{\Lambda}e^{-\alpha t}\|\phi\| := \nu\|\phi\|\, e^{-\alpha t}, \quad \forall t \geq 0. \tag{2.44}$$

Tiếp theo ta sẽ chứng minh nghiệm $y_2(t)$ cũng ổn định mũ. Đặt: $\lambda = \begin{bmatrix}\lambda_1^T & \lambda_2^T\end{bmatrix}^T$, trong đó $\lambda_1 \in \mathbb{R}^r$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}^{n-r}$, ta có

$$\begin{aligned}\lambda^T[\alpha\overline{E} + \overline{A}_0 + \overline{A}_1 e^{\alpha h}] &= \begin{bmatrix}\lambda_1^T & \lambda_2^T\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}\alpha I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}A_{01} + B_1K_1 & A_{02} + B_1K_2\\ A_{03} + B_2K_1 & A_{04} + B_2K_2\end{bmatrix}\right.\\ &\qquad \left. + e^{\alpha h}\begin{bmatrix}A_{11} + B_1F_1 & A_{12} + B_1F_2\\ A_{13} + B_2F_1 & A_{14} + B_2F_2\end{bmatrix}\right)\\ &= \begin{bmatrix}\lambda_1^T & \lambda_2^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Sigma_1 & \Sigma_2\\ \Sigma_3 & \Sigma_4\end{bmatrix},\end{aligned} \tag{2.45}$$

trong đó

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \alpha I_r + A_{01} + B_1K_1 + e^{\alpha h}\big(A_{11} + B_1F_1\big),\\ \Sigma_2 &= A_{02} + B_1K_2 + e^{\alpha h}\big(A_{12} + B_1F_2\big),\\ \Sigma_3 &= A_{03} + B_2K_1 + e^{\alpha h}\big(A_{13} + B_2F_1\big),\\ \Sigma_4 &= A_{04} + B_2K_2 + e^{\alpha h}\big(A_{14} + B_2F_2\big).\end{aligned}$$

Từ (2.38) và (2.45) ta có

$$\begin{bmatrix}\lambda_1^T & \lambda_2^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Sigma_1 & \Sigma_2\\ \Sigma_3 & \Sigma_4\end{bmatrix} \ll 0. \tag{2.46}$$

Vậy ta có

$$\lambda_1^T\Sigma_2 + \lambda_2^T\Sigma_4 \ll 0. \tag{2.47}$$

Vì ma trận $\overline{A}_0$ là ma trận Metzler, $\overline{A}_1 \succeq 0$, $\lambda_1 \gg 0$, ta thu được

$$\lambda_1^T\big(A_{02} + B_1K_2 + e^{\alpha h}\big(A_{12} + B_1F_2\big)\big) \succeq 0$$

và từ (2.47) suy ra rằng

$$\lambda_2^T\big(A_{04} + B_2K_2 + e^{\alpha h}\big(A_{14} + B_2F_2\big)\big) \ll 0.$$

Hơn nữa, ta có $A_{04} + B_2K_2$ là ma trận Metzler và Hurwitz, ma trận $(A_{14} + B_2F_2) \succeq 0$ vì $\overline{A}_1 \succeq 0$. Áp dụng Mệnh đề 2.3 suy ra tồn tại số $\rho \in (0,\,1)$ và véc tơ $\eta \in \mathbb{R}_+^{n-r}$ sao cho

$$-\eta^T(A_{04} + B_2K_2)^{-1}\big(A_{14} + B_2F_2\big) \preceq \rho\,\eta^T. \tag{2.48}$$

Ta kí hiệu :

$$p(t) = -(A_{04} + B_2K_2)^{-1}\Big((A_{03} + B_2K_1)y_1(t) + (A_{13} + B_2F_1)y_1(t-h)\Big).$$

Dễ thấy rằng, nếu $t > h$ thì

$$\|y_1(t-h)\| \le \frac{\gamma}{\Lambda}e^{-\alpha(t-h)}\|\phi\| \le \frac{\gamma}{\Lambda}e^{\alpha h}\|\phi\|\,e^{-\alpha t} = \nu e^{\alpha h}\|\phi\|\,e^{-\alpha t}, \quad \forall t > h. \tag{2.49}$$

Với $t \in [0,\,h]$ ta có $\|y_1(t-h)\| = \|\phi_1\| \le \|\phi\| \le \|\phi\|\,e^{-\alpha(t-h)} \le e^{\alpha h}\|\phi\|\,e^{-\alpha t}$ vì vậy ta thu được

$$\|y_1(t-h)\| \le \nu\, e^{\alpha h}\|\phi\|\,e^{-\alpha t}, \quad \forall t \in [0,\,h]. \tag{2.50}$$

Kết hợp bất đẳng thức (2.49) và (2.50) suy ra rằng

$$\|y_1(t-h)\| \le \nu e^{\alpha h}\,\|\phi\|\,e^{-\alpha t}, \quad \forall\, t \ge 0. \tag{2.51}$$

Từ các bất đẳng thức (2.44), (2.51) và hàm $p(t)$, ta có

$$
\begin{aligned}
\eta^T p(t) =& -\eta^T (A_{04} + B_2 K_2)^{-1}\Big((A_{03} + B_2 K_1) y_1(t) + (A_{13} + B_2 F_1) y_1(t-h)\Big) \\
\leq & r\|\eta^T (A_{04} + B_2 K_2)^{-1}(A_{03} + B_2 K_1)\| \|y_1(t)\| \\
& + r\|\eta^T (A_{04} + B_2 K_2)^{-1}(A_{13} + B_2 F_1)\| \|y_1(t-h)\| \\
\leq & \nu_1 \|\phi\| \, e^{-\alpha t}, \quad \forall\, t \geq 0,
\end{aligned}
\tag{2.52}
$$

trong đó

$$
\begin{aligned}
\nu_1 = & \, r\, \nu\, e^{\alpha h} \left(\|\eta^T (A_{04} + B_2 K_2)^{-1}(A_{03} + B_2 K_1)\|\right) \\
& + r\, \nu\, e^{\alpha h} \left(\|\eta^T (A_{04} + B_2 K_2)^{-1}(A_{13} + B_2 F_1)\|\right).
\end{aligned}
$$

Hơn nữa, từ phương trình thứ hai của hệ (2.20) ta nhận được

$$
\begin{aligned}
y_2(t) =& -(A_{04} + B_2 K_2)^{-1}\Big((A_{03} + B_2 K_1) y_1(t) + (A_{13} + B_2 F_1) y_1(t-h) \\
& + \big(A_{14} + B_2 F_2\big) y_2(t-h)\Big) \\
=& -(A_{04} + B_2 K_2)^{-1}(A_{14} + B_2 F_2) y_2(t-h) + p(t).
\end{aligned}
$$

Do đó ta có

$$
\eta^T y_2(t) = -\eta^T (A_{04} + B_2 K_2)^{-1}(A_{14} + B_2 F_2) y_2(t-h) + \eta^T p(t). \tag{2.53}
$$

Từ (2.48), (2.52) và (2.53) ta thu được

$$
\eta^T y_2(t) \leq \rho\, \eta^T y_2(t-h) + \eta^T p(t) \leq \rho\, \eta^T y_2(t-h) + \nu_1 \|\phi\| \, e^{-\alpha t}, \quad \forall\, t \geq 0. \tag{2.54}
$$

Đặt: $N = \max\{(n-r)\|\eta\| e^{\alpha h},\, \nu_1 e^{\alpha h}\}$. Nếu $t \in [0,\, h]$ thì $t - h \in [-h,\, 0]$. Ta có

$$
\|y_2(t-h)\| = \|\phi_2\| \leq \|\phi\| \leq \|\phi\| \, e^{-\alpha(t-h)} \leq e^{\alpha h} \|\phi\| \, e^{-\alpha t},
$$

và vì vậy ta thu được,

$$
\|y_2(t-h)\| \leq e^{\alpha h} \|\phi\| \, e^{-\alpha t}, \quad \forall t \in [0,\, h]. \tag{2.55}
$$

Kết hợp (2.54) và (2.55) ta nhận được

$$
\begin{aligned}
\eta^T y_2(t) & \leq \rho\, (n-r) \|\eta\| \|y_2(t-h)\| + \nu_1 \|\phi\| \, e^{-\alpha t} \\
& \leq \rho\, N \|\phi\| \, e^{-\alpha t} + N \|\phi\| \, e^{-\alpha t} \\
& \leq N(1+\rho) \|\phi\| \, e^{-\alpha t}.
\end{aligned}
\tag{2.56}
$$

Nếu $t \in [h,\, 2h]$ thì $t - h \in [0,\, h]$. Từ các bất đẳng thức (2.54) và (2.56) ta có

$$\eta^T y_2(t) \le \rho\bigg(N\,(1+\rho)\|\phi\|e^{-\alpha t}\bigg) + \nu_1\|\phi\|\,e^{-\alpha t} \le N\,(1+\rho+\rho^2)\|\phi\|e^{-\alpha t}. \tag{2.57}$$

Giả sử rằng với $\forall t \in [(k-1)h, kh]$, khi đó

$$\eta^T y_2(t) \le N\bigg(\rho + \rho + \dots + \rho^k\bigg)\|\phi\|\,e^{-\alpha t}.$$

Như vậy ta có $t \in [kh, (k+1)h], t - h \in [(k-1)h, kh]$, theo giả thiết quy nạp và bất đẳng thức (2.54), ta thu được

$$\begin{aligned}\eta^T y_2(t) \le &\rho\bigg(N\big(1+\rho+\dots+\rho^k\big)\|\phi\|\,e^{-\alpha t}\bigg) + \nu_1\|\phi\|\,e^{-\alpha t}\\ \le &N\bigg(1+\rho+\rho+\dots+\rho^{k+1}\bigg)\|\phi\|\,e^{-\alpha t}.\end{aligned}$$

Theo chứng minh trên ta có $\rho \in (0,\, 1)$, vì vậy bằng quy nạp, ta thu được

$$\eta^T y_2(t) \le N\|\phi\|\,e^{-\alpha t}\big(1+\rho+\rho+\dots+\rho^k+\dots\big) \le \frac{N}{1-\rho}\|\phi\|\,e^{-\alpha t}. \tag{2.58}$$

Vậy ta nhận được

$$\|y_2(t)\| \le \frac{N}{(1-\rho)\eta_{\min}}\|\phi\|\,e^{-\alpha t}, \tag{2.59}$$

trong đó $\eta_{\min} = \min\limits_{1\le i\le n-r} |\xi_i|\,;\, \eta = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}) \in \mathbb{R}_+^{n-r}$. Kết hợp các bất đẳng thức (2.44) và (2.59) cuối cùng ta thu được $\|y(t)\| \le M\|\phi\|\,e^{-\alpha t}, \quad \forall t \ge 0$. Định lý được chứng minh. □

Nhận xét 2.7 Gần đây các kết quả nghiên cứu bài toán ổn định, ổn định hóa hệ dương có trễ [29, 30, 44, 45] thu được các điều kiện dưới dạng bài toán quy hoạch tuyến tính tương tự như điều kiện (2.28), (2.29). Các điều kiện này là có thể giải được thông qua các thuật toán giải bài toán quy hoạch tuyến tính.

Nhận xét 2.8 Định lý 2.3 cho ta một điều kiện đủ dưới dạng bài toán quy hoạch tuyến tính, thông qua việc giải bài toán quy hoạch tuyến tính này để tìm được một hàm điều khiển ngược đảm bảo hệ đóng tương ứng của hệ (2.17) thỏa mãn các điều kiện sau:

- Hệ đóng tương ứng là chính quy và impulse-free.

- Hệ đóng tương ứng là hệ dương.
- Hệ đóng tương ứng là $\alpha-$ ổn định mũ.

Nhận xét 2.9 Các kết quả về tính ổn định cho hệ dương có trễ được nghiên cứu trong [29, 40], tuy nhiên các kết quả này đều xét cho hệ có trễ thông thường không phải hệ suy biến và phương pháp được sử dụng cũng không thể áp dụng trong trường hợp hệ là suy biến có trễ.

Nhận xét 2.10 Ta có thể xây dựng hàm điều khiển ngược cho bài toán ổn định hóa thông qua các bước sau đây:

- *Bước 1:* Xác định hai ma trận khả nghịch P, Q, trong đó ma trận $Q \succeq 0$, sao cho các ma trận (E, A_0, A_1, B) của hệ ban đầu có phân tích thành các ma trận $(\tilde{E},\ \tilde{A}_0,\ \tilde{A}_1,\ \tilde{B})$.
- *Bước 2:* Tìm các véc tơ $\beta \in \mathbb{R}^n_+,\ k_j,\ f_j \in \mathbb{R}^m,\ j = \overline{1,n}$ sao cho các điều kiện (2.28) -(2.29) của Định lý 2.3 được thỏa mãn bằng việc sử dụng các thuật toán giải bài toán quy hoạch tuyến tính ([51]).
- *Bước 3:* Xây dựng các ma trận K, F cho bởi công thức
$$K = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{\beta_1} & \frac{k_2}{\beta_2} & ... & \frac{k_n}{\beta_n} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \frac{f_1}{\beta_1} & \frac{f_2}{\beta_2} & ... & \frac{f_n}{\beta_n} \end{bmatrix}.$$
- *Bước 4:* Xác định hàm điều khiển ngược cho bởi :
$$u(t) = KQ^{-1}x(t) + FQ^{-1}x(t-h).$$

Sau đây, chúng tôi đưa ra ví dụ số minh họa cho Định lý 2.3.

Ví dụ 2.2 Xét hệ điều khiển (2.17) với $h = 2.85$, các ma trận

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix},\ A_0 = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -16 & 1 & 2 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 5 & -20 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 6 & -20 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ta tìm được hai ma trận khả nghịch P, Q như sau,

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

khi đó các ma trận $E, A_0,\ A_1,\ B$ có phân tích

$$\tilde{E} = PEQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \tilde{A}_0 = PA_0Q = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A}_1 = PA_1Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -10 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix},\ \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Do đó ta có,

$$A_{01} = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},\ A_{02} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{}{2} \end{bmatrix},\ A_{03} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix},\ A_{04} = [0],\ B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},\ A_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \end{bmatrix},\ A_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix},\ A_{14} = [-1],\ \ B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Với $\alpha = 0.5$ và việc giải bài toán quy hoạch tuyến tính (2.28)-(2.29) ta tìm được:

$$k_1 = (-20,\ 1),\quad k_2 = (-100,\quad 0),\quad k_3 = (-10,\ -100),$$

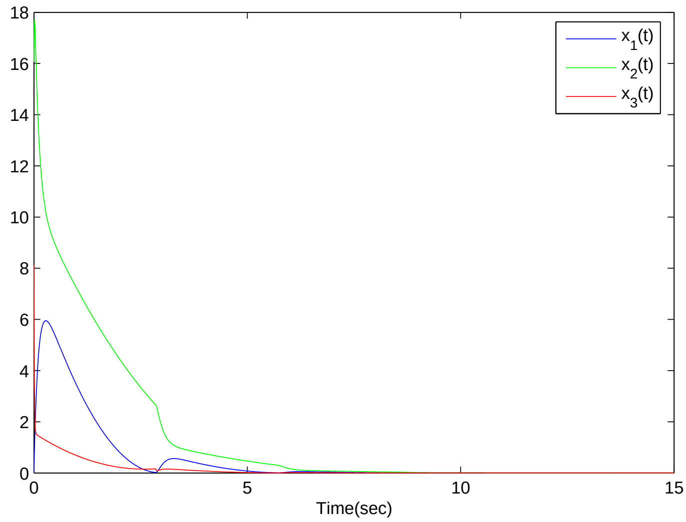
$$f_1 = (1,\ 1),\quad f_2 = (1,\ 1),\quad f_3 = (200,\ 20),\quad \beta = (10, 1, 20).$$

Vì vậy ta xác định được các ma trận,

$$K = \begin{bmatrix} -2 & -100 & -0.5 \\ 0.1 & 0 & -5 \end{bmatrix},\quad F = \begin{bmatrix} 0.1 & 1 & 10 \\ 0.1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Trong ví dụ này, dễ dàng tính toán được $det(sE - A_0) \equiv 0$, với mọi $s \in \mathbb{C}$, như vậy hệ khi chưa có điều khiển là không chính quy, vì vậy không thể xét được bài toán ổn định cho hệ suy biến này. Tuy nhiên sử dụng Định lý 2.3 ta chứng minh được hệ là $0.5-$ ổn định hóa được dạng mũ với hàm điều khiển ngược xác định bởi :

$$\begin{cases} u_1(t) = & -2x_1(t) + 0.1x_1(t-2.85) - 0.5x_2(t) + 10x_2(t-2.85) - 100x_3(t) \\ & \quad +x_3(t-2.85), \\ u_2(t) = & 0.1x_1(t) + 0.1x_1(t-2.85) - 5x_2(t) + x_2(t-2.85) + x_3(t-2.85). \end{cases}$$



Hình 2.1: Quỹ đạo của hệ đóng với điều kiện ban đầu tương thích: $\varphi(t) = (9t^2, \frac{1}{50}(39t^2 + 99(t-2.85)^2), (t+2.85)^2), t \in [-2.85, 0]$.

2.3. Kết luận Chương 2

Chương 2 trình bày kết quả nghiên cứu tính ổn định và ổn định hóa cho một lớp hệ phương trình vi phân suy biến dương có trễ. Kết quả đạt được như sau:

- Chúng tôi chứng minh một số điều kiện cần và đủ để đảm bảo hệ phương trình vi phân suy biến là hệ dương (Định lý 2.1). Chứng minh điều kiện đủ cho tính ổn định mũ hệ suy biến dương tương ứng (Định lý 2.2).
- Thiết kế các điều kiện đủ dưới dạng bài toán quy hoạch tuyến tính để giải bài toán ổn định hóa cho hệ phương trình vi phân suy biến dương có trễ (Định lý 2.3).

Chương 3

Tính ổn định và ổn định hóa cho hệ phương trình rời rạc suy biến dương có trễ

Trong chương này trình bày một số kết quả về tính ổn định và ổn định hóa cho một số lớp hệ phương trình rời rạc suy biến dương có trễ. Trước tiên chúng tôi chứng minh một số điều kiện cần và đủ đảm bảo hệ rời rạc suy biến có trễ là hệ dương, tiếp đó điều kiện cần và đủ của bài toán ổn định được nghiên cứu. Thông qua việc giải bài toán quy hoạch tuyến tính chúng tôi sẽ tìm được hàm điều khiển để giải bài toán ổn định hóa cho hệ rời rạc suy biến dương có trễ. Nội dung của chương này dựa trên các bài báo ([2], [4]) trong danh mục các công trình của tác giả.

3.1. Tiêu chuẩn ổn định của hệ rời rạc suy biến dương có trễ biến thiên

Xét hệ suy biến rời rạc có trễ:

$$\begin{cases} Ex(k+1) = A_0x(k) + A_1x(k-h(k)), \quad k \in \mathbb{N}, \\ x(k) = \varphi(k), \quad k \in \{-\tau, -(\tau-1), ..., 0\}, \end{cases} \tag{3.1}$$

trong đó $x(k) \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N}$ là véc tơ trạng thái, các ma trận $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ma trận $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận suy biến, giả sử rằng $rank(E) = r < n$; $h(k) \in \mathbb{N}$ là hàm trễ thỏa mãn điều kiện $0 < h(k) \le \tau$; $k, \tau \in \mathbb{N}$; $\varphi(\cdot) : \{-\tau, \cdots, 0\} \to \mathbb{R}^n$ là hàm điều kiện ban đầu tương thích với chuẩn được xác định bởi $\|\varphi\| = \max\limits_{k\in\{-\tau,-(\tau-1),...,0\}} \|\varphi(k)\|$.

Định nghĩa 3.1 ([13]) Hệ (3.1) gọi là hệ dương nếu với điều kiện ban đầu tương thích $\varphi(\cdot) \succeq 0$ thì nghiệm $x(k;\varphi) \succeq 0$ với mọi $k \in \mathbb{N}$.

Định nghĩa 3.2 ([8])

i) Hệ (3.1) gọi là chính quy nếu cặp ma trận (E, A_0) là chính quy.

ii) Hệ (3.1) gọi là causal nếu thỏa mãn $deg(det(zE - A_0)) = rank(E) = r$.

Định nghĩa 3.3 Cho $\alpha \in (0, 1)$. Hệ (3.1) gọi là $\alpha-$ ổn định mũ nếu tồn tại số dương $M > 0$ sao cho với điều kiện ban đầu tương thích $\varphi(\cdot)$ thì nghiệm $x(k; \varphi)$ thỏa mãn

$$\|x(k;\varphi)\| \leq M\|\varphi\|\alpha^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Từ điều kiện chính quy và causal của hệ (3.1), theo Bổ đề 1.6 tồn tại hai ma trận khả nghịch P, Q sao cho ta có phân tích

$$PEQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}, \quad PA_0Q = \begin{pmatrix} A_{01} & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}, \quad PA_1Q = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{13} & A_{14} \end{pmatrix}.$$

Bằng tính toán và các phép biến đổi ma trận, ta có nghiệm của hệ (3.1) cho bởi

$$\begin{cases} x(k) = \overline{A}_{01}^{k} P_1 x(0) + \sum\limits_{i=0}^{k-1} \overline{A}_{01}^{k-1-i} \bar{A}_1 x(i - h(i)) + \bar{A}_2 x(k - h(k)), \\ x(k) = \varphi(k), \quad k \in \{-\tau, -(\tau - 1), ..., 0\}, \end{cases} \tag{3.2}$$

trong đó

$$\overline{A}_{01} = Q \begin{bmatrix} A_{01} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1},\ P_1 = Q \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1},$$

$$\bar{A}_1 = Q \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}, \quad \bar{A}_2 = Q \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -A_{13} & -A_{14} \end{bmatrix} Q^{-1}.$$

Mệnh đề 3.1 *Giả sử rằng hệ* (3.1) *thỏa mãn điều kiện chính quy và causal. Với* $x(k;\varphi)$ *là nghiệm của hệ* (3.1)*. Khi đó ta có các tính chất sau:*

(i) $\quad P_1 x(k;\varphi) = x(k;\varphi) - \bar{A}_2 x(k - h(k);\varphi),\ \forall k \in \mathbb{N}.$

(ii) $\quad x(k+1;\varphi) = \overline{A}_{01} x(k;\varphi) + \bar{A}_1 x(k-h(k);\varphi) + \bar{A}_2 x(k+1-h(k+1);\varphi), k \in \mathbb{N}.$

(iii) $\quad x(k;\alpha\varphi) = \alpha x(k;\varphi),\ \forall \alpha > 0, \quad k \in \mathbb{N}.$

Chứng minh. (i). Ta sẽ chứng minh (i) bằng phương pháp quy nạp toán học. Để đơn giản, ta kí hiệu $x(k) := x(k;\varphi)$. Xét $k = 0$, ta chứng minh rằng

$$P_1 x(0) = x(0) - \bar{A}_2 x(-h(0)).$$

Từ phép đổi biến $y(k) = Q^{-1}x(k) = [y_1(k), y_2(k)]$ trong đó $y_1(k) \in \mathbb{R}^r$, $y_2(k) \in \mathbb{R}^{n-r}$, hệ (3.1) đưa về hai hệ con sau

$$\begin{cases} y_1(k+1) = A_{01}y_1(k) + A_{11}y_1(k-h(k)) + A_{12}y_2(k-h(k)), \\ y_2(k) = -A_{13}y_1(k-h(k)) - A_{14}y_2(k-h(k)). \end{cases} \tag{3.3}$$

Khi đó nghiệm của (3.3) cho bởi

$$\begin{cases} y_1(k) = A_{01}^k\, y_1(0) + \sum\limits_{i=0}^{k-1} A_{01}^{k-1-i}\big[A_{11}\, y_1(i-h(i)) + A_{12}\, y_2(i-h(i))\big], \\ y_2(k) = -A_{13}y_1(k-h(k)) - A_{14}y_2(k-h(k)). \end{cases} \tag{3.4}$$

Do đó ta có

$$y(0) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y(0) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -A_{13} & -A_{14} \end{pmatrix} y(-h(0)). \tag{3.5}$$

Từ phép đổi biến $y(k) = Q^{-1}x(k)$ và (3.5) suy ra rằng

$$Q^{-1}x(0) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}x(0) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -A_{13} & -A_{14} \end{pmatrix} Q^{-1}x(-h(0)).$$

Vậy ta có,

$$\begin{aligned} x(0) &= Q\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}x(0) + Q\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -A_{13} & -A_{14} \end{pmatrix} Q^{-1}x(-h(0)) \\ &= P_1x(0) + \bar{A}_2x(-h(0)). \end{aligned}$$

Giả sử rằng (i) đúng với mọi $l \le k$:

$$P_1x(l) = x(l) - \bar{A}_2x(l-h(l)), \quad \forall l \le k, \tag{3.6}$$

ta sẽ chứng minh rằng (i) đúng với $k+1$:

$$P_1x(k+1) = x(k+1) - \bar{A}_2x(k+1-h(k+1)).$$

Thật vậy, sử dụng (3.2) ta có

$$\begin{aligned}
x(k+1) &= \overline{A}_{01}^{k+1} P_1 x(0) + \sum_{i=0}^{k} \overline{A}_{01}^{k-i} \bar{A}_1 x(i-h(i)) + \bar{A}_2 x(k+1-h(k+1)) \\
&= \overline{A}_{01}^{k+1} P_1 x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \overline{A}_{01}^{k-i} \bar{A}_1 x(i-h(i)) + \bar{A}_1 x(k-h(k)) \\
&\quad + \bar{A}_2 x(k+1-h(k+1)) \\
&= \overline{A}_{01} \Big(\overline{A}_{01}^{k} P_1 x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \overline{A}_{01}^{k-1-i} \bar{A}_1 x(i-h(i)) \Big) \\
&\quad + \bar{A}_1 x(k-h(k)) + \bar{A}_2 x(k+1-h(k+1)).
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Ta có

$$\overline{A}_{01}^{k} P_1 x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \overline{A}_{01}^{k-1-i} \bar{A}_1 x(i-h(i)) = x(k) - \bar{A}_2 x(k-h(k)). \tag{3.8}$$

Kết hợp (3.7) và (3.8) ta thu được

$$\begin{aligned}
x(k+1) = \overline{A}_{01}\big(x(k) - \bar{A}_2 x(k-h(k))\big) + \bar{A}_1 x(k-h(k)) \\
+ \bar{A}_2 x(k+1-h(k+1)).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Sử dụng giả thiết quy nạp và (3.9) cho ta

$$x(k+1) = \overline{A}_{01} P_1 x(k) + \bar{A}_1 x(k-h(k)) + \bar{A}_2 x(k+1-h(k+1)), \tag{3.10}$$

và vì vậy ta thu được

$$P_1 x(k+1) = P_1 \overline{A}_{01} P_1 x(k) + P_1 \bar{A}_1 x(k-h(k)) + P_1 \bar{A}_2 x(k+1-h(k+1)). \tag{3.11}$$

Mặt khác ta lại có

$$\begin{aligned}
P_1 \overline{A}_{01} &= Q \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} Q \begin{bmatrix} A_{01} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} = \overline{A}_{01}, \\
P_1 \bar{A}_1 &= Q \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} Q \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} = \bar{A}_1, \\
P_1 \bar{A}_2 &= Q \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} Q \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -A_{13} & -A_{14} \end{bmatrix} Q^{-1} = 0.
\end{aligned}$$

Vậy từ (3.11) ta nhận được

$$\begin{aligned} P_1x(k+1) &= \overline{A}_{01}P_1x(k) + \bar{A}_1x(k-h(k)) \\ &= \overline{A}_{01}P_1x(k) + \bar{A}_1x(k-h(k)) + \bar{A}_2x(k+1-h(k+1)) \\ &\quad - \bar{A}_2x(k+1-h(k+1)). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Do đó, kết hợp (3.10) và (3.12) ta thu được

$$\begin{aligned} P_1x(k+1) &= \Big(\overline{A}_{01}P_1x(k) + \bar{A}_1x(k-h(k)) + \bar{A}_2x(k+1-h(k+1))\Big) \\ &\quad - \bar{A}_2x(k+1-h(k+1)) \\ &= x(k+1) - \bar{A}_2x(k+1-h(k+1)). \end{aligned}$$

Vậy (i) đúng với $k+1$.

(ii). Áp dụng (3.2), ta có

$$\begin{aligned} x(k+1;\varphi) &= \overline{A}_{01}^{k+1}P_1x(0;\varphi) + \sum_{i=0}^{k}\overline{A}_{01}^{k-i}\bar{A}_1x(i-h(i);\varphi) \\ &\quad + \bar{A}_2x(k+1-h(k+1);\varphi) \\ &= \overline{A}_{01}^{k+1}P_1x(0;\varphi) + \sum_{i=0}^{k-1}\overline{A}_{01}^{k-i}\bar{A}_1x(i-h(i);\varphi) + \bar{A}_1x(k-h(k);\varphi) \\ &\quad + \bar{A}_2x(k+1-h(k+1);\varphi) \\ &= \overline{A}_{01}\Big(\overline{A}_{01}^{k}P_1x(0;\varphi) + \sum_{i=0}^{k-1}\overline{A}_{01}^{k-1-i}\bar{A}_1x(i-h(i);\varphi)\Big) \\ &\quad + \bar{A}_1x(k-h(k);\varphi) + \bar{A}_2x(k+1-h(k+1);\varphi). \end{aligned}$$

Hơn nữa , chú ý rằng $\overline{A}_{01}\bar{A}_2 = Q\begin{bmatrix} A_{01} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q^{-1}Q\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -A_{13} & -A_{14} \end{bmatrix}Q^{-1} = 0$, từ đây suy ra rằng

$$\begin{aligned} x(k+1;\varphi) &= \overline{A}_{01}\Big(\overline{A}_{01}^{k}P_1x(0;\varphi) + \sum_{i=0}^{k-1}\overline{A}_{01}^{k-1-i}\bar{A}_1x(i-h(i);\varphi)\Big) \\ &\quad + \overline{A}_{01}\bar{A}_2x(k-h(k);\varphi) + \bar{A}_1x(k-h(k);\varphi) + \bar{A}_2x(k+1-h(k+1);\varphi) \\ &= \overline{A}_{01}x(k;\varphi) + \bar{A}_1x(k-h(k);\varphi) + \bar{A}_2x(k+1-h(k+1);\varphi). \end{aligned}$$

(iii). Ta sẽ chứng minh (iii) bằng phương pháp quy nạp. Với $k=1$, từ (3.2) ta có

$$\begin{aligned}
x(1;\alpha\varphi) &= \overline{A}_{01}P_1x(0;\alpha\varphi) + \bar{A}_1x(-h(0);\alpha\varphi) + \bar{A}_2x(1-h(1);\alpha\varphi)\\
&= \overline{A}_{01}P_1\alpha\varphi(0) + \bar{A}_1\alpha\varphi(-h(0)) + \bar{A}_2\alpha\varphi(1-h(1))\\
&= \alpha\Big(\overline{A}_{01}P_1\varphi(0) + \bar{A}_1\varphi(-h(0)) + \bar{A}_2\varphi(1-h(1))\Big)\\
&= \alpha x(1;\varphi).
\end{aligned}$$

Giả sử rằng (iii) đúng với mọi $l \le k$:

$$x(l;\alpha\varphi) = \alpha x(l;\varphi),\ \forall l \le k, \tag{3.13}$$

ta sẽ chứng minh (iii) đúng với $k+1$. Thật vậy, từ tính chất (ii) và (3.13) suy ra rằng

$$\begin{aligned}
x(k+1;\alpha\varphi) &= \overline{A}_{01}x(k;\alpha\varphi) + \bar{A}_1x(k-h(k);\alpha\varphi) + \bar{A}_2x(k+1-h(k+1);\alpha\varphi)\\
&= \alpha\Big(\overline{A}_{01}x(k;\varphi) + \bar{A}_1x(k-h(k);\varphi) + \bar{A}_2x(k+1-h(k+1);\varphi)\Big)\\
&= \alpha x(k+1;\varphi),
\end{aligned}$$

điều này chứng minh (iii) đúng với $k+1$. $\square$

Trong phần này chúng tôi đưa ra điều kiện cần và đủ để đảm bảo cho hệ (3.1) là hệ dương.

Định lý 3.1 *Giả sử hệ* (3.1) *là chính quy và causal. Khi đó các phát biểu sau là tương đương.*

(i) *Hệ* (3.1) *là hệ dương .*

(ii) $\bar{A}_2 \succeq 0$, *tồn tại các ma trận* $H_1 \succeq 0$, $H_2 \succeq 0$ *sao cho*

$$\overline{A}_{01} = H_1P_1; \quad \bar{A}_1 = H_1\bar{A}_2 + H_2.$$

Chứng minh. $(i) \Rightarrow (ii)$: Giả sử hệ (3.1) là hệ dương. Áp dụng tính chất (i) của Mệnh đề 3.1 với $k = 0, 1$ ta có

$$\begin{aligned}
x(0) =& P_1x(0) + \bar{A}_2x(-h(0)) = P_1\varphi(0) + \bar{A}_2\varphi(-h(0)) \succeq 0,\\
x(1) =& \overline{A}_{01}x(0) + \bar{A}_1x(-h(0)) + \bar{A}_2x(1-h(1))\\
=& \overline{A}_{01}\varphi(0) + \bar{A}_1\varphi(-h(0)) + \bar{A}_2\varphi(1-h(1)) \succeq 0,
\end{aligned}$$

vì vậy ta có

$$\begin{bmatrix} P_1 & \bar{A}_2 & 0_n\\ 0_n & I_n & 0_n\\ 0_n & 0_n & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(0)\\ \varphi(-h(0))\\ \varphi(1-h(1)) \end{bmatrix} \succeq 0,\ \ k \in \{-\tau,\, -(\tau-1),\, ...,0\},$$

$$\begin{bmatrix} \overline{A}_{01} & \bar{A}_1 & \bar{A}_2 \\ 0_n & I_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(0) \\ \varphi(-h(0)) \\ \varphi(1-h(1)) \end{bmatrix} \succeq 0, \;\; k \in \{-\tau, \, -(\tau-1), \, ..., 0\}.$$

Áp dụng (i) của Bổ đề 1.4 với

$$M = \begin{bmatrix} P_1 & \bar{A}_2 & 0_n \\ 0_n & I_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & I_n \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} \overline{A}_{01} & \bar{A}_1 & \bar{A}_2 \\ 0_n & I_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & I_n \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} \varphi(0) \\ \varphi(-h(0)) \\ \varphi(1-h(1)) \end{bmatrix},$$

khi đó tồn tại ma trận $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 & H_3 \\ H_4 & H_5 & H_6 \\ H_7 & H_8 & H_9 \end{bmatrix} \succeq 0,$$

sao cho

$$\begin{bmatrix} \overline{A}_{01} & \bar{A}_1 & \bar{A}_2 \\ 0_n & I_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 & H_3 \\ H_4 & H_5 & H_6 \\ H_7 & H_8 & H_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & \bar{A}_2 & 0_n \\ 0_n & I_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & I_n \end{bmatrix}.$$

Từ tính không âm của ma trận $\mathcal{H}$ suy ra $\bar{A}_2 = H_3 \succeq 0, H_1 \succeq 0, H_2 \succeq 0$ và

$$\overline{A}_{01} = H_1 P_1; \quad \bar{A}_1 = H_1 \bar{A}_2 + H_2.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$: Giả sử rằng ma trận $\bar{A}_2 \succeq 0$ và tồn tại các ma trận $H_1 \succeq 0, H_2 \succeq 0$ thỏa mãn điều kiện $\overline{A}_{01} = H_1 P_1, \bar{A}_1 = H_1 \bar{A}_2 + H_2$. Bằng việc sử dụng phương pháp quy nạp toán học, ta sẽ chứng minh hệ (3.1) là hệ dương, tức là với những điều kiện ban đầu tương thích $\varphi(k) \succeq 0$, $k \in \{-\tau, -(\tau-1), ..., 0\}$ thì ta có nghiệm $x(k) \succeq 0$, với mọi $k \in \mathbb{N}$. Thật vậy, với $k = 1$ ta có

$$\begin{aligned} x(1) &= \overline{A}_{01} x(0) + \bar{A}_1 x(-h(0)) + \bar{A}_2 x(1-h(1)) \\ &= H_1 P_1 x(0) + (H_1 \bar{A}_2 + H_2) x(-h(0)) + \bar{A}_2 x(1-h(1)) \\ &= H_1 [\, P_1 x(0) + \bar{A}_2 x(-h(0)) \,] + H_2 x(-h(0)) + \bar{A}_2 x(1-h(1)). \end{aligned}$$

Sử dụng tính chất (i) của Mệnh đề 3.1 ta nhận được

$$x(1) = H_1 x(0) + H_2 \varphi(-h(0)) + \bar{A}_2 \varphi(1-h(1)) \succeq 0.$$

Giả sử rằng $x(l) \succeq 0$, $\forall l \leq k$, ta sẽ chứng minh $x(k+1) \succeq 0$. Từ tính chất (ii) của Mệnh đề 3.1 suy ra rằng

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \overline{A}_{01} x(k) + \bar{A}_1 x(k-h(k)) + \bar{A}_2 x(k+1-h(k+1)) \\ &= H_1 P_1 x(k) + (H_1 \bar{A}_2 + H_2) x(k-h(k)) + \bar{A}_2 x(k+1-h(k+1)). \end{aligned}$$

Theo tính chất (i) của Mệnh đề 3.1, ta có

$$\begin{aligned} x(k+1) &= H_1\Big(x(k) - \bar{A}_2 x(k-h(k))\Big) + (H_1\bar{A}_2 + H_2)x(k-h(k)) \\ &\quad + \bar{A}_2 x(k+1-h(k+1)) \\ &= H_1 x(k) + H_2 x(k-h(k)) + \bar{A}_2 x(k+1-h(k+1)). \end{aligned}$$

Sử dụng giả thiết quy nạp:

$$x(k) \succeq 0,\ x(k-h(k)) \succeq 0,\ x(k+1-h(k+1)) \succeq 0,\ \bar{A}_2 \succeq 0,\ H_1 \succeq 0,\ H_2 \succeq 0,$$

ta nhận được

$$x(k+1) = H_1 x(k) + H_2 x(k-h(k)) + \bar{A}_2 x(k+1-h(k+1)) \succeq 0,$$

ta có điều cần chứng minh. □

Nhận xét 3.1 Chú ý rằng Định lý 3.1 là kết quả mở rộng cho kết quả [45] trong trường hợp hệ không có trễ và causal. Thật vậy, xét hệ suy biến không có trễ $Ex(k+1) = A_0 x(k)$ thì điều kiện cần và đủ để hệ này là hệ dương được chứng minh trong bài báo ([45], Định lý 3.3) là tồn tại một ma trận H sao cho $H \succeq 0$ và thỏa mãn điều kiện $\hat{E}^D\hat{A}_0 = H\hat{E}^D\hat{E}$, trong đó ma trận $\hat{A}_0$ và $\hat{E}$ được xác định bởi $\hat{E} = (\lambda E - A_0)^{-1} E$, $\quad \hat{A}_0 = (\lambda E - A_0)^{-1} A_0$, với λ là số phức sao cho $det(\lambda E - A_0) \neq 0$. $\hat{E}^D$ là ma trận Drazin inverse của ma trận $\hat{E}$. Trong trường hợp (E, A_0) thỏa mãn điều kiện chính quy và causal, bằng các phép biến đổi ma trận ([52]) ta thu được:

$$\hat{E} = Q\begin{bmatrix} (\lambda I_r - A_{01})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}, \quad \hat{A}_0 = Q\begin{bmatrix} (\lambda I_r - A_{01})^{-1}A_{01} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}.$$

Ma trận Drazin inverse của ma trận $\hat{E}$ là $\hat{E}^D = Q\begin{bmatrix} \lambda I_r - A_{01} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}$. Do đó ta có $\hat{E}^D\hat{E} = Q\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}$, $\quad \hat{E}^D\hat{A}_0 = Q\begin{bmatrix} A_{01} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}$. Như vậy điều kiện $H \succeq 0$, $\hat{E}^D\hat{A}_0 = H\hat{E}^D\hat{E}$ là tương đương với điều kiện (ii) của Định lý 3.1 với $A_1 = 0$.

Nhận xét 3.2 Nếu ma trận Q là ma trận Monomial thì điều kiện (ii) của Định lý 3.1 sẽ tương đương với điều kiện sau: $A_{01} \succeq 0$, $A_{11} \succeq 0$, $A_{12} \succeq 0$, $A_{13} \preceq 0$, $A_{14} \preceq 0$.

Sau đây chúng tôi đưa ra ví dụ số minh họa cho Định lý 3.1.

Ví dụ 3.1 Xét hệ (3.1) với các ma trận

$$E = \begin{bmatrix} -0.25 & 0.25 \\ 0.25 & -0.25 \end{bmatrix}, A_0 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 1.75 & -0.75 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}.$$

Bằng tính toán trực tiếp ta thu được $\det(sE - A_0) = \frac{1}{4}s - \frac{1}{2} \neq 0$ với $s \in \mathbb{C}$ và $\deg(\det(sE - A_0)) = rank(E) = 1$. Từ đây theo định nghĩa suy ra hệ là chính quy và causal. Hơn nữa tồn tại hai ma trận khả nghịch P, Q với

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix},$$

sao cho các ma trận E, A_0, A_1 có phân tích như sau

$$PEQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, PA_0Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, PA_1Q = \begin{bmatrix} 32 & 8 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vậy ta thu được

$$\overline{A}_{01} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ -2.5 & 2.5 \end{bmatrix}, \bar{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 10 & 30 \end{bmatrix}, \bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} -0.25 & 0.25 \\ -1.25 & 1.25 \end{bmatrix},$$

Hơn nữa, với các ma trận H_1, H_2 xác định bởi $H_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 8 & 30 \end{bmatrix}$, khi đó Định lý 3.1 được thỏa mãn, vậy hệ là dương.

Nhận xét 3.3 Điều kiện (ii) trong Định lý 3.1 là các hệ phương trình và bất phương trình tuyến tính với các ẩn H_1, H_2 do đó có thể đưa về bài toán quy hoạch tuyến tính để giải tương tự như kết quả trong [45]. Ví dụ 3.1 có số chiều nhỏ được tính toán trực tiếp để minh họa cho các điều kiện của Định lý 3.1 là tồn tại và có thể giải được.

Tiếp theo chúng tôi đưa ra một điều kiện cần và đủ để đảm bảo hệ (3.1) là hệ dương và ổn định mũ.

Định lý 3.2 *Giả sử cặp ma trận* (E, A_0) *thỏa mãn điều kiện chính quy và causal. Các ma trận* $\overline{A}_{01}$, $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, P_1 *được xác định trong* (3.2). *Khi đó các phát biểu sau là tương đương:*

(i) *Hệ* (3.1) *là hệ dương và ổn định mũ .*

(ii) *Ma trận* $\bar{A}_2 \succeq 0$ *và tồn tại các ma trận* $H_1 \succeq 0$, $H_2 \succeq 0$, *véc tơ* $p \gg 0$ *và số* $\delta \in (0, 1)$ *sao cho*

$$\overline{A}_{01} = H_1 P_1, \quad \bar{A}_1 = H_1 \bar{A}_2 + H_2 \tag{3.14}$$

$$\big(H_1 + H_2 + \bar{A}_2\big)p \preceq \delta\, p. \tag{3.15}$$

Chứng minh. $(i) \Rightarrow (ii)$: Giả sử rằng hệ (3.1) là hệ dương và ổn định mũ. Áp dụng Định lý 3.1 ta có $\bar{A}_2 \succeq 0$ và tồn tại các ma trận $H_1 \succeq 0$, $H_2 \succeq 0$ thỏa mãn điều kiện (3.14). Vì hệ (3.1) là ổn định mũ với mọi $0 < h(k) \leq \tau$, nên ta có hệ

$$\begin{cases} Ex(k+1) = A_0 x(k) + A_1 x(k-\tau), \quad k \in \mathbb{N}, \\ x(k) = \varphi(k), \quad k \in \{-\tau, -(\tau-1), ..., 0\}, \end{cases} \tag{3.16}$$

cũng ổn định mũ. Từ tính chất (ii) của Mệnh đề 3.1 suy ra rằng

$$\begin{aligned} x(k+1) =& \bar{A}_{01} x(k) + \bar{A}_1 x(k-\tau) + \bar{A}_2 x(k-(\tau-1)),\ k \in \mathbb{N}, \\ x(k) =& \varphi(k), \quad k \in \{-\tau, -(\tau-1), ..., 0\}, \end{aligned}$$

và vì vậy ta có

$$x(k+1) = H_1 P_1 x(k) + \big(H_1 \bar{A}_2 + H_2\big) x(k-\tau) + \bar{A}_2 x(k-(\tau-1)).$$

Sử dụng tính chất (i) của Mệnh đề 3.1 cho ta

$$\begin{aligned} x(k+1) &= H_1 P_1 x(k) + \big(H_1 \bar{A}_2 + H_2\big) x(k-\tau) + \bar{A}_2 x(k-(\tau-1)) \\ &= H_1\big(x(k) - \bar{A}_2 x(k-\tau)\big) + \big(H_1 \bar{A}_2 + H_2\big) x(k-\tau) \\ &\quad + \bar{A}_2 x(k-(\tau-1)) \\ &= H_1 x(k) + H_2 x(k-\tau) + \bar{A}_2 x(k-(\tau-1)). \end{aligned}$$

Từ đây ta có,

$$\begin{aligned} x(k) - x(0) =& (x(k) - x(k-1)) + (x(k-1) - x(k-2)) + ... + (x(1) - x(0)) \\ =& (H_1 - I_n) x(k-1) + H_2 x(k-1-\tau) + \bar{A}_2 x(k-1-(\tau-1)) + ... \\ & ... + (H_1 - I_n) x(0) + H_2 x(-\tau) + \bar{A}_2 x(-(\tau-1)) \\ =& (H_1 - I_n) \sum_{i=0}^{k-1} x(i) + H_2 \sum_{i=0}^{k-1} x(i-\tau) + \bar{A}_2 \sum_{i=0}^{k-1} x(i-(\tau-1)). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Sử dụng

$$x(i-\tau) = x(i) + x(i-\tau) - x(i)$$

và

$$x(i-(\tau-1)) = x(i) + x(i-(\tau-1)) - x(i)$$

vào phương trình (3.17) ta nhận được

$$\begin{aligned}
x(k)-x(0) =&(H_1-I_n)\sum_{i=0}^{k-1}x(i)+H_2\sum_{i=0}^{k-1}\big(x(i)+x(i-\tau)-x(i)\big)\\
&+\bar{A}_2\sum_{i=0}^{k-1}\big(x(i)+x(i-(\tau-1))-x(i)\big)\\
=&\Big(H_1+H_2+\bar{A}_2-I_n\Big)\sum_{i=0}^{k-1}x(i)+H_2\sum_{i=0}^{k-1}\big(x(i-\tau)-x(i)\big)\\
&+\bar{A}_2\sum_{i=0}^{k-1}\big(x(i-(\tau-1))-x(i)\big).
\end{aligned}$$

Vì hệ (3.16) là ổn định mũ nên ta có $\|x(k)\|\to 0$ khi $k\to\infty$ và vì $x(k)\succeq 0$, $\forall k\in\mathbb{N}$, nên $x(k)\to 0$ khi $k\to\infty$. Mặt khác, vì hệ (3.16) là ổn định mũ nên ta có

$$\sum_{i=0}^{\infty}\|x(i)\|\le\sum_{i=0}^{\infty}N\alpha^k<\infty,\ \alpha\in(0,1),$$

ta thu được $\sum\limits_{i=0}^{\infty}x(i)\ll\infty$. Vậy ta có

$$\begin{aligned}
-x(0)=&\Big(H_1+H_2+\bar{A}_2-I_n\Big)\sum_{i=0}^{\infty}x(i)+H_2\sum_{i=0}^{\infty}\big(x(i-\tau)-x(i)\big)\\
&+\bar{A}_2\sum_{i=0}^{\infty}\big(x(i-(\tau-1))-x(i)\big)\\
=&\Big(H_1+H_2+\bar{A}_2-I_n\Big)\sum_{i=0}^{\infty}x(i)+H_2\sum_{i=-\tau}^{-1}x(i)+\bar{A}_2\sum_{i=1-\tau}^{-1}x(i),
\end{aligned}$$

hay

$$\Big(H_1+H_2+\bar{A}_2-I_n\Big)\sum_{i=0}^{\infty}x(i)=-x(0)-H_2\sum_{i=-\tau}^{-1}x(i)-\bar{A}_2\sum_{i=1-\tau}^{-1}x(i)\ll 0. \tag{3.18}$$

Ta chọn điều kiện ban đầu $x(k)=\varphi(k)\gg 0$, $\forall k\in\{-\tau,-(\tau-1),...,0\}$. Vì hệ (3.1) là dương, nên ta có $x(k)\succeq 0$, $\forall k\in\mathbb{N}$. Mặt khác ta lại có $x(0)=\varphi(0)\gg 0$, $\sum\limits_{i=-\tau}^{-1}x(i)=\sum\limits_{i=-\tau}^{-1}\varphi(i)\gg 0$, $\sum\limits_{i=1-\tau}^{-1}x(i)=\sum\limits_{i=1-\tau}^{-1}\varphi(i)\gg 0$. Ta sẽ chứng minh rằng $\sum\limits_{i=0}^{\infty}x(i)\gg 0$. Thật vậy, giả sử rằng tồn tại chỉ số j với $j\in\{1,2,...,n\}$

sao cho $\sum\limits_{i=0}^{\infty} x_j(i) = 0$. Vì $x(k) \succeq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, nên $\sum\limits_{i=0}^{\infty} x_j(i) = 0$ khi và chỉ khi $x_j(i) = 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$, suy ra $x_j(0) = 0$ điều này mâu thuẫn với $x(0) \gg 0$. Vậy ta sẽ đặt

$$p := \sum_{i=0}^{\infty} x(i) = (p_1,\, p_2,\, ...,p_n) \gg 0$$

và

$$q := (H_1 + H_2 + \bar{A}_2)p = (q_1,\, q_2,\, ...,q_n) \succeq 0.$$

Nếu $q_i = 0, \forall i = 1, 2, ..., n$ thì (3.15) thỏa mãn với mọi $\delta \in (0,\,1)$. Nếu $q \neq 0$, thì ta đặt $\delta := \max\limits_{i=1,2,...,n} \left\{\frac{q_i}{p_i}\right\}$, từ bất đẳng thức (3.18) suy ra $q \ll p$ (hay $q_i < p_i$, $\forall i = 1, 2, ..., n$) vậy ta có $\delta \in (0,\,1)$. Hơn nữa vì $q_i \preceq \delta p_i$, với mọi $i = 1, 2, ..., n$ nên ta thu được $q \preceq \delta p$, từ đây suy ra điều kiện (3.15).

$(ii) \Rightarrow (i)$: Giả sử các điều kiện (3.14), (3.15) thỏa mãn. Theo Định lý 3.1, thì hệ (3.1) là hệ dương. Xét nghiệm $x(k;\varphi)$ của hệ (3.1) với điều kiện ban đầu $\varphi \in S_1 := \{\varphi : \|\varphi\| \leq 1\}$. Trước tiên ta sẽ chứng minh rằng

$$\|x(k,\varphi)\| \leq M\alpha^k,\ \forall k \in \mathbb{N}, \forall \varphi \in S_1. \tag{3.19}$$

Vì véc tơ $p \gg 0$, nên tồn tại một số $K > 1$ sao cho

$$Kp \gg |\varphi(j)|, \forall j \in \{-\tau, -(\tau-1), ..., 0\}, \forall \varphi \in S_1.$$

Đặt $u(k) := K\alpha^k p$, $k \in \mathbb{Z}$, trong đó $\alpha := \sqrt[\tau+1]{\delta}$. Để chứng minh (3.19), với $M = K\|p\|$, ta chỉ cần chứng minh

$$u(k) \succeq |x(k)|, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{3.20}$$

Vì $x(k) = \varphi(k)$, $k \in \{-\tau, -(\tau-1), ..., 0\}$ nên hiển nhiên ta có

$$u(k) \gg |x(k)|,\ k \in \{-\tau, -(\tau-1), ..., 0\}.$$

Vì hệ (3.1) là hệ dương nên theo Định lý 3.1 sẽ tồn tại các ma trận $H_1 \succeq 0, H_2 \succeq 0$ thỏa mãn điều kiện $\overline{A}_{01} = H_1 P_1, \bar{A}_1 = H_1\bar{A}_2 + H_2$. Với $k = 1$, ta có

$$\begin{aligned} |x(1)| &= \left|\overline{A}_{01}x(0) + \bar{A}_1 x(-h(0)) + \bar{A}_2 x(1-h(1))\right| \\ &= \left|H_1 P_1 x(0) + (H_1\bar{A}_2 + H_2)x(-h(0)) + \bar{A}_2 x(1-h(1))\right|. \end{aligned}$$

Áp dụng tính chất (i) của Mệnh đề 3.1 ta thu được

$$\begin{aligned}
|x(1)| &= \big|H_1\big(x(0) - \bar{A}_2 x(-h(0))\big) + (H_1\bar{A}_2 + H_2)x(-h(0)) + \bar{A}_2 x(1 - h(1))\big| \\
&= \big|H_1 x(0) - H_1\bar{A}_2 x(-h(0)) + (H_1\bar{A}_2 + H_2)x(-h(0)) + \bar{A}_2 x(1 - h(1))\big| \\
&= \big|H_1 x(0) + H_2 x(-h(0)) + \bar{A}_2 x(1 - h(1))\big| \\
&\preceq H_1 |x(0)| + H_2 |x(-h(0))| + \bar{A}_2 |x(1 - h(1))| \\
&\preceq H_1 Kp + H_2 Kp\,\alpha^{-h(0)} + \bar{A}_2 Kp\,\alpha^{1-h(1)} \\
&\preceq H_1 Kp + H_2 Kp\,\alpha^{-\tau} + \bar{A}_2 Kp\,\alpha^{-\tau} \\
&\preceq \Big(H_1 + H_2 + \bar{A}_2\Big) Kp\,\alpha^{-\tau} \preceq Kp\,\delta\,\alpha^{-\tau} \preceq K\alpha\, p = u(1),
\end{aligned}$$

điều này chỉ ra rằng (3.20) đúng với $k = 1$. Giả sử rằng (3.20) đúng với mọi $l \leq k:$

$$u(l) \succeq |x(l)|, \forall l \leq k.$$

Áp dụng các tính chất $(i), (ii)$ của Mệnh đề 3.1 ta có

$$\begin{aligned}
|x(k+1)| &= \big|\overline{A}_{01} x(k) + \bar{A}_1 x(k - h(k)) + \bar{A}_2 x(k + 1 - h(k+1))\big| \\
&= \big|H_1 P_1 x(k) + (H_1\bar{A}_2 + H_2)x(k - h(k)) + \bar{A}_2 x(k + 1 - h(k+1))\big| \\
&= |H_1\big(x(k) - \bar{A}_2 x(k - h(k))\big) + (H_1\bar{A}_2 + H_2)x(k - h(k)) \\
&\quad + \bar{A}_2 x(k + 1 - h(k+1))| \\
&= \big|H_1 x(k) + H_2 x(k - h(k)) + \bar{A}_2 x(k + 1 - h(k+1))\big| \\
&\preceq H_1 |x(k)| + H_2 |x(k - h(k))| + \bar{A}_2 |x(k + 1 - h(k+1))|.
\end{aligned}$$

Theo giả thiết quy nạp ta có,

$$\begin{aligned}
|x(k+1)| &\preceq H_1 u(k) + H_2 u(k - h(k)) + \bar{A}_2 u(k + 1 - h(k+1)) \\
&= H_1 K\alpha^k\, p + H_2 K\alpha^{k-h(k)}\, p + \bar{A}_2 K\alpha^{k+1-h(k+1)}\, p \\
&\preceq K\alpha^k \Big(H_1 + H_2\alpha^{-\tau} + \bar{A}_2\alpha^{-\tau}\Big) p \preceq K\alpha^{-\tau}\,\alpha^k \Big(H_1 + H_2 + \bar{A}_2\Big) p \\
&\preceq K\alpha^{-\tau}\alpha^k\,\delta\, p = K\alpha^{k+1} p = u(k+1),
\end{aligned}$$

vậy ta chứng minh được (3.20) đúng với $k + 1$. Do đó theo phương pháp quy nạp toán học ta chứng minh được

$$\|x(k;\varphi)\| \leq K\|p\|\alpha^k = M\alpha^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall \varphi \in S_1.$$

Cuối cùng ta sẽ chứng minh hệ (3.1) ổn định mũ như sau. Với $x(k, \varphi)$ là nghiệm của (3.1) với điều kiện ban đầu $\varphi(\cdot)$. Từ tính chất (iii) của Mệnh đề 3.1 suy ra

$$\frac{1}{\|\varphi\|}\|x(k;\varphi)\| = \left\| x\left(k; \frac{\varphi}{\|\varphi\|}\right) \right\| \leq M\alpha^k, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Do đó ta có

$$\|x(k;\varphi)\| \leq M\|\varphi\|\alpha^k, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Định lý được chứng minh hoàn toàn. □

Nhận xét 3.4 Điều kiện (3.15) trong Định lý 3.2 là không tuyến tính với các ẩn H_i, p, δ. Tuy nhiên, với (3.14), (3.15) ta có thể giải như sau: Vì điều kiện (3.14) là độc lập với p, δ nên trước tiên ta sẽ tìm nghiệm H_i từ ràng buộc (3.14), vậy điều kiện (3.15) chỉ còn lại ẩn p với δ cho trước. Ta có thể tìm các ẩn trong Định lý 3.2 cho bài toán ổn định thông qua các bước sau đây:

- *Bước 1:* Kiểm tra xem cặp ma trận (E, A_0) có thỏa mãn điều kiện chính quy và causal hay không (theo định nghĩa). Nếu không thỏa mãn dừng lại, nếu có chuyển sang Bước 2.

- *Bước 2:* Xác định hai ma trận khả nghịch P, Q sao cho các ma trận (E, A_0, A_1) của hệ (3.1) có phân tích thành các ma trận như trong (3.2).

- *Bước 3:* Cho trước số $\delta \in (0,1)$. Tìm các ma trận $H_1, H_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ và véc tơ $p \in \mathbb{R}^n_+$ sao cho các điều kiện (3.14) -(3.15) của Định lý 3.2 được thỏa mãn, bằng việc sử dụng các thuật toán giải bài toán quy hoạch tuyến tính.

Nhận xét 3.5 Các bước để xác định P, Q trong Bước 2 của Nhận xét 3.4 như sau (xem trang 65, [10]).

- *Bước 1:* Chọn số γ sao cho $det(\gamma\, E - A_0) \neq 0$. Chú ý rằng vì cặp (E, A_0) là chính quy nên tồn tại vô số γ để $det(\gamma\, E - A_0) \neq 0$ ngoại trừ hữu hạn các số là nghiệm của phương trình $det(\gamma\, E - A_0) = 0$.

- *Bước 2:* Đặt $\hat{E} = (\gamma E - A_0)^{-1}$, khi đó theo phân tích Jordan của ma trận, sẽ tồn tại ma trận khả nghịch $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sao cho

$$T\hat{E}T^{-1} = \mathrm{diag}(\hat{E}_1,\, \hat{E}_2),$$

trong đó $\hat{E}_1 \in \mathbb{R}^{r\times r}$ là khả nghịch, $\hat{E}_2 \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$ là ma trận lũy linh.

- *Bước 3:* Tính P, Q như sau

$$P = \mathrm{diag}(\hat{E}_1^{-1},\, (\gamma\hat{E}_2 - I_{n-r})^{-1})\, T\, (\gamma E - A_0)^{-1}; \;\; Q = T^{-1}.$$

Ta xét ví dụ minh họa sau

Ví dụ 3.2 Hệ (3.1) với các ma trận

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_0 = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.55 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}.$$

Tính toán trực tiếp ta thu được $\det(sE - A_0) = s^2 - 0.8s - 0.1375 \neq 0$ với $s \in \mathbb{C}$ và

$$\deg(\det(sE - A_0)) = rank(E) = 2.$$

Vậy hệ là chính quy và causal. Khi đó tồn tại hai ma trận khả nghịch

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

sao cho E, A_0, A_1 được phân tích thành

$$PEQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, PA_0Q = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.55 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, PA_1Q = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0 & -0.2 \end{bmatrix},$$

vậy ta có

$$\overline{A}_{01} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.55 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{A}_1 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Khi đó theo Định lý 3.2 hệ là dương và ổn định mũ với $p = (\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}) \gg 0$, $\delta = 0.9 < 1$ và

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.55 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nhận xét 3.6 Định lý 3.2 cho ta một điều kiện cần và đủ đảm bảo tính ổn định mũ của hệ suy biến (3.1), tuy nhiên với những hệ suy biến không thỏa mãn điều kiện chính quy, causal thì định lý không còn đúng nữa. Để giải quyết hạn chế này tiếp theo chúng tôi xét bài toán ổn định hóa dạng mũ cho lớp hệ phương trình rời rạc suy biến dương có trễ.

3.2. Tiêu chuẩn ổn định hóa của hệ rời rạc suy biến dương có trễ

Trong phần này bài toán ổn định hóa hệ rời rạc suy biến dương có trễ được xét đến. Các điều kiện đủ dưới dạng bài toán quy hoạch tuyến tính cho ta xác định được hàm điều khiển sao cho hệ điều khiển là ổn định mũ. Xét hệ điều khiển mô tả bởi hệ phương trình suy biến sau

$$\begin{cases} Ex(k+1) = A_0x(k) + A_1x(k-h) + Bu(k), \quad k \in \mathbb{N}, \\ x(k) = \varphi(k), \quad k \in \{-h, -(h-1), ..., 0\}, \end{cases} \tag{3.21}$$

với $x(k) \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N}$ là véc tơ trạng thái, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ là véc tơ điều khiển, $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Ma trận $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là suy biến và $rank(E) = r < n$; $h > 0$, $\varphi(\cdot) : \{-h, \cdots, 0\} \to \mathbb{R}^n$ là hàm điều kiện ban đầu với chuẩn

$$\|\varphi\| = \max_{k\in\{-h,-(h-1),...,0\}} \|\varphi(k)\|.$$

Định nghĩa 3.4 ([8])

i) Hệ (3.21) (với $u(k) = 0$) gọi là chính quy nếu tồn tại $z \in \mathbb{C}$ saoc cho $det(zE - A_0) \neq 0$.

ii) Hệ (3.21) ($u(k) = 0$) gọi là causal nếu $deg(det(zE - A_0)) = rank(E) = r$.

Định nghĩa 3.5 Cho số $\alpha \in (0, 1)$. Hệ (3.21) (với $u(k) = 0$) gọi là $\alpha-$ ổn định mũ nếu hệ là chính quy, causal và tồn tại số dương $M > 0$ sao cho với điều kiện ban đầu tương thích $\varphi(\cdot)$ thì nghiệm $x(k; \varphi)$ thỏa mãn điều kiện

$$\|x(k; \varphi)\| \leq M\|\varphi\|\alpha^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Định nghĩa 3.6 Cho số $\alpha \in (0, 1)$. Hệ (3.21) gọi là $\alpha-$ ổn định hóa được dạng mũ nếu tồn tại hàm điều khiển ngược $u(k) = Kx(k)$, $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sao cho hệ đóng tương ứng

$$\begin{cases} Ex(k+1) = (A_0 + BK)x(k) + A_1x(k-h), \quad k \in \mathbb{N} \\ x(k) = \varphi(k), \quad k \in \{-h, -(h-1), ..., 0\}, \end{cases}$$

là $\alpha-$ ổn định mũ.

Tương tự như với hệ liên tục, với hệ suy biến (3.21) không có điều kiện chính quy, causal trên cặp ma trận (E, A_0) ta sẽ dùng phân tích SVD để đưa hệ (3.21) về hệ mới như sau: Vì $rank(E) = r < n$, theo Bổ đề 1.8 tồn tại hai ma trận khả nghịch P, Q sao cho $PEQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Ta kí hiệu

$$PEQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} := \tilde{E}, \quad PA_0Q = \begin{bmatrix} A_{01} & A_{02} \\ A_{03} & A_{04} \end{bmatrix} := \tilde{A}_0,$$

$$PA_1Q = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{13} & A_{14} \end{bmatrix} := \tilde{A}_1, \quad PB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} := \tilde{B}.$$

Chú ý P, Q được tìm theo các bước trong Nhận xét 1.4. Qua phép đổi biến $y(k) = Q^{-1}x(k) = [\, y_1(k),\ y_2(k)\,]$ trong đó $y_1(k) \in \mathbb{R}^r$, $y_2(k) \in \mathbb{R}^{n-r}$, hệ (3.21) đưa về dạng sau

$$\begin{cases} y_1(k+1) = & A_{01}y_1(k) + A_{02}y_2(k) + A_{11}y_1(k-h) + A_{12}y_2(k-h) + B_1u(k), \\ 0 = & A_{03}y_1(k) + A_{04}y_2(k) + A_{13}y_1(k-h) + A_{14}y_2(k-h) + B_2u(k), \\ y_1(k) = & \phi_1(k),\, y_2(k) = \phi_2(k),\, k \in \{-h,\, -(h-1),\, ...,\, 0\}, \end{cases} \tag{3.22}$$

trong đó $Q^{-1}\varphi(k) = [\phi_1^T(k), \phi_2^T(k)]^T$. Sử dụng hàm điều khiển ngược

$$u(k) = K_1y_1(k) + K_2y_2(k) \tag{3.23}$$

trong đó $K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$, $K_1 \in \mathbb{R}^{m\times r}$, $K_2 \in \mathbb{R}^{m\times(n-r)}$, và kí hiệu $A_{1,K} = A_{01} + B_1K_1$, $A_{2,K} = A_{02} + B_1K_2$, $A_{3,K} = A_{03} + B_2K_1$, $A_{4,K} = A_{04} + B_2K_2$, khi đó hệ (3.22) trở thành

$$\begin{cases} y_1(k+1) = & A_{1,K}y_1(k) + A_{2,K}y_2(k) + A_{11}y_1(k-h) + A_{12}y_2(k-h), \\ 0 = & A_{3,K}y_1(k) + A_{4,K}y_2(k) + A_{13}y_1(k-h) + A_{14}y_2(k-h). \end{cases} \tag{3.24}$$

Mệnh đề 3.2 *Giả sử $Q \succeq 0$. Nếu hệ (3.22) là $\alpha-$ ổn định hóa được dạng mũ với hàm điều khiển ngược (3.23) thì hệ (3.21) là $\alpha-$ ổn định hóa được dạng mũ với hàm điều khiển ngược $u(k) = KQ^{-1}x(k)$.*

Chứng minh. Giả sử hệ (3.22) là $\alpha-$ ổn định hóa được dạng mũ bởi hàm điều khiển (3.23). Khi đó hệ (3.24) là chính quy, causal ta thu được $detA_{4,K} \neq 0$

(xem Bổ đề 2.10, trang 22, [27]). Đặt

$$\overline{P} = \begin{bmatrix} I_r & -A_{2,K}A_{4,K}^{-1} \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} P, \, \overline{Q} = Q \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ -A_{4,K}^{-1}A_{3,K} & A_{4,K}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Vậy ta thu được $\overline{P}E\overline{Q} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\overline{P}(A_0 + BKQ^{-1})\overline{Q} = \begin{bmatrix} \hat{A}_0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}$, và

$$\overline{P}(sE - (A_0 + BKQ^{-1}))\overline{Q} = s\overline{P}E\overline{Q} - \overline{P}(A_0 + BKQ^{-1})\overline{Q} = \begin{bmatrix} sI_r - \hat{A}_0 & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{bmatrix}$$

trong đó $\hat{A}_0 = A_{1,K} - A_{2,K}A_{4,K}^{-1}A_{3,K}$. Do đó,

$$\begin{aligned} det(sE - (A_0 + BKQ^{-1})) =& det(\overline{P}^{-1}\,\overline{P}(sE - (A_0 + BKQ^{-1}))\overline{Q}\,\overline{Q}^{-1}) \\ =& (-1)^{n-r}det(\overline{P}^{-1})\,det(sI_r - \hat{A}_0)det(\overline{Q}^{-1}). \end{aligned}$$

Hơn nữa, chú ý rằng

$$det(sI_r - \hat{A}_0) = \sum_{k=1}^{r} a_k s^k, \; a_r = 1, \; det(\overline{P}^{-1}) \neq 0, \, det(\overline{Q}^{-1}) \neq 0,$$

điều này có được do các ma trận $\overline{P}$ và $\overline{Q}$ là không suy biến, vậy đa thức $det(sE - (A_0 + BKQ^{-1}))$ không đồng nhất bằng không và

$$deg(det(sE - (A_0 + BKQ^{-1}))) = r = rankE,$$

điều này suy ra hệ đóng của hệ (3.21) là chính quy và causal. Hơn nữa nếu ta có $\|y(k)\| \leq M\alpha^k\|\phi\|$, $\forall k \in \mathbb{N}$, vậy ta thu được

$$\|x(k)\| \leq \|Q\|\|y(k)\| \leq N\|\varphi\|\alpha^k, \; \forall k \in \mathbb{N}.$$

Mệnh đề được chứng minh. $\square$

Định lý sau cho một điều kiện đủ đảm bảo tính $\alpha-$ ổn định hóa được dạng mũ của hệ (3.21).

Định lý 3.3 *Cho số dương* $0 < \alpha < 1$. *Giả sử* $\tilde{A}_1 \succeq 0$ *và tồn tại các véc tơ* $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $k_j \in \mathbb{R}^m$, $j = 1, 2, ..., n$ *sao cho các bất đẳng thức sau thỏa mãn*

$$(\tilde{A}_0)_{(i,j)}\beta_j + (\tilde{B})_i^T k_j \geq 0; \quad 1 \leq i \neq j \leq n; \; i = j = 1, ..., r. \tag{3.25}$$

$$\big(\alpha^{-1}\tilde{A}_0 + \alpha^{-(h+1)}\tilde{A}_1 - \tilde{E}\big)\beta + \tilde{B}\alpha^{-1}\sum_{i=1}^{n} k_i \ll 0. \tag{3.26}$$

Khi đó hệ (3.21) là dương và $\alpha-$ ổn định hóa được dạng mũ. Hơn nữa, hàm điều khiển ngược ổn định hóa hệ (3.21) cho bởi:

$$u(k) = KQ^{-1}x(k) = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{\beta_1} & \frac{k_2}{\beta_2} & ... & \frac{k_n}{\beta_n} \end{bmatrix} Q^{-1}x(k).$$

Chứng minh. Chứng minh được chia thành các bước chính sau đây:
Bước 1. Chứng minh tính chính quy và causal. Ta đặt

$$\sum_{i=1}^{n} k_i = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{\beta_1} & \frac{k_2}{\beta_2} & ... & \frac{k_n}{\beta_n} \end{bmatrix} \beta = K\beta.$$

Sử dụng điều kiện (3.26) ta thu được

$$\begin{aligned} &\big(\alpha^{-1}\tilde{A}_0 + \alpha^{-(h+1)}\tilde{A}_1 - \tilde{E}\big)\beta + \alpha^{-1}\tilde{B}\sum_{i=1}^{n} k_i \\ &\qquad = \big(\alpha^{-1}\tilde{A}_0 + \alpha^{-(h+1)}\tilde{A}_1 - \tilde{E}\big)\beta + \alpha^{-1}\tilde{B}K\beta \\ &\qquad = \Big(\alpha^{-1}\tilde{A}_0 + \alpha^{-(h+1)}\tilde{A}_1 - \tilde{E} + \alpha^{-1}\tilde{B}K\Big)\beta \ll 0. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Mặt khác ta lại có

$$\begin{aligned} \alpha^{-1}\overline{A}_0 + \alpha^{-(h+1)}\tilde{A}_1 - \tilde{E} =& \alpha^{-1}\begin{bmatrix} A_{1,K} & A_{2,K} \\ A_{3,K} & A_{4,K} \end{bmatrix} + \alpha^{-(h+1)}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{13} & A_{14} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ =& \alpha^{-1}\tilde{A}_0 + \alpha^{-(h+1)}\tilde{A}_1 - \tilde{E} + \alpha^{-1}\tilde{B}K. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Kết hợp (3.27) và (3.28) suy ra rằng

$$\big(\alpha^{-1}\overline{A}_0 + \alpha^{-(h+1)}\tilde{A}_1 - \tilde{E}\big)\beta \ll 0. \tag{3.29}$$

Từ điều kiện (3.29) và $\alpha^{-(h+1)}\tilde{A}_1\beta \succeq 0$ suy ra ta phải có $\big(\alpha^{-1}\overline{A}_0 - \tilde{E}\big)\beta \ll 0$, vậy ta thu được

$$\big(\overline{A}_0 - \alpha\tilde{E}\big)\beta \ll 0. \tag{3.30}$$

Đặt véc tơ $\beta := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n_+$, từ bất đẳng thức (3.30) ta có

$$\begin{aligned} \big(\overline{A}_0 - \alpha\tilde{E}\big)\beta &= \left(\begin{bmatrix} A_{1,K} & A_{2,K} \\ A_{3,K} & A_{4,K} \end{bmatrix} - \alpha\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\alpha I_r + A_{1,K} & A_{2,K} \\ A_{3,K} & A_{4,K} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \ll 0. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Vậy ta thu được

$$A_{3,K}v_1 + A_{4,K}v_2 \ll 0. \tag{3.32}$$

Mặt khác, vì $\beta_j > 0$ với mọi $j = 1, 2..., n$ nên từ điều kiện (3.25) ta thu được

$$(\tilde{A}_0)_{(i,j)}\beta_j + (\tilde{B})_i^T k_j \geq 0, \quad 1 \leq i \neq j \leq n;\ i = j = 1, ..., r,$$

điều này tương đương với điều kiện sau

$$(\tilde{A}_0)_{(i,j)} + (\tilde{B})_i^T \frac{k_j}{\beta_j} = \Big(\tilde{A}_0 + \tilde{B}K\Big)_{(i,j)} \geq 0, \quad 1 \leq i \neq j \leq n;\ i = j = 1, ..., r.$$

Hơn nữa, ta lại có $\tilde{A}_0 + \tilde{B}K = \begin{bmatrix} A_{1,K} & A_{2,K} \\ A_{3,K} & A_{4,K} \end{bmatrix}$, điều này chứng minh rằng ma trận $A_{4,K}$ là Metzler và $A_{1,K} \succeq 0$, $A_{2,K} \succeq 0$, $A_{3,K} \succeq 0$. Vì ma trận $A_{3,K}v_1 \succeq 0$ và từ điều kiện (3.32), ta phải có $A_{4,K}v_2 \ll 0$. Hơn nữa ma trận $A_{4,K}$ là ma trận Metzler, áp dụng Bổ đề 1.3 suy ra ma trận $A_{4,K}$ là Hurwitz, và $det(A_{4,K}) \neq 0$, điều này chứng tỏ rằng hệ (3.24) là chính quy, causal, sử dụng Mệnh đề 3.2 suy ra rằng hệ đóng của hệ (3.21) cũng thỏa mãn chính quy, causal.
Bước 2. Chứng minh hệ dương. Ta viết lại hệ (3.24) dưới dạng sau

$$\begin{cases} y_1(k+1) = & \overline{A}_{01}y_1(k) + \overline{A}_{11}y_1(k-h) + \overline{A}_{12}y_2(k-h), \\ \quad y_2(k) = & \overline{A}_{03}y_1(k) + \overline{A}_{13}y_1(k-h) + \overline{A}_{14}y_2(k-h), \end{cases} \tag{3.33}$$

trong đó

$$\begin{aligned} \overline{A}_{01} =& A_{1,K} - A_{2,K}A_{4,K}^{-1}A_{3,K}, \overline{A}_{11} = A_{11} - A_{2,K}A_{4,K}^{-1}A_{13}, \overline{A}_{03} = -A_{4,K}^{-1}A_{3,K} \\ \overline{A}_{12} =& A_{12} - A_{2,K}A_{4,K}^{-1}A_{14}, \overline{A}_{13} = -A_{4,K}^{-1}A_{13}, \overline{A}_{14} = -A_{4,K}^{-1}A_{14}. \end{aligned}$$

Vì ma trận $A_{4,K}$ là Metzler và cũng là ma trận Hurwitz, áp dụng Bổ đề 1.3 ta thu được $-A_{4,K}^{-1} \succeq 0$. Hơn nữa vì các ma trận $A_{1,K} \succeq 0$, $A_{2,K} \succeq 0$, $A_{3,K} \succeq 0$, $A_{11} \succeq 0$, $A_{12} \succeq 0$, $A_{13} \succeq 0$, $A_{14} \succeq 0$, từ đây suy ra rằng

$$\overline{A}_{01} \succeq 0, \overline{A}_{11} \succeq 0, \overline{A}_{12} \succeq 0, \overline{A}_{03} \succeq 0, \overline{A}_{13} \succeq 0, \overline{A}_{14} \succeq 0. \tag{3.34}$$

Trước tiên ta sẽ chứng minh nghiệm $y(k) = [y_1^T(k)\ y_2^T(k)]^T$ là dương trên $[0,\ h]$. Từ phương trình thứ nhất trong hệ (3.33) ta có

$$y_1(k) = \overline{A}_{01}^k y_1(0) + \sum_{\theta=0}^{k-1} \overline{A}_{01}^{k-\theta-1}\big(\overline{A}_{11}y_1(\theta-h) + \overline{A}_{12}y_2(\theta-h)\big).$$

Vì ma trận $\overline{A}_{01} \succeq 0$, nên ta có $\overline{A}_{01}^{k} \succeq 0$, $k \geq 0$. Ta lại có từ điều kiện ban đầu $y_1(0) \succeq 0$, vậy ta thu được $\overline{A}_{01}^{k} y_1(0) \succeq 0$. Mặt khác ta có$\overline{A}_{11} \succeq 0$, $\overline{A}_{12} \succeq 0$. Tương tự ta cũng chỉ ra được các ma trận

$$\overline{A}_{01}^{k-\theta-1}\overline{A}_{11} y_1(\theta - h) \succeq 0, \overline{A}_{01}^{k-\theta-1}\overline{A}_{12} y_2(\theta - h) \succeq 0,$$

với mọi $0 \leq \theta \leq k-1 \leq h$. Từ đó suy ra rằng,

$$y_1(k) \succeq 0, \forall k \in [0,\, h].$$

Hơn nữa các ma trận

$$\overline{A}_{03} \succeq 0,\ \overline{A}_{13} \succeq 0,\ \overline{A}_{14} \succeq 0, y_1(k) \succeq 0,\ y_1(k-h) \succeq 0,\ y_2(k-h) \succeq 0,\ \ k \in [0,\, h],$$

và từ phương trình thứ hai trong hệ (3.33) ta suy ra rằng

$$y_2(k) \succeq 0,\ \forall k \in [0,\, h].$$

Vậy ta đã chứng minh được nghiệm $y(k)$ của hệ (3.24) là dương trên $[0,\, h]$. Sử dụng phương pháp bước (step method), ta có thể chứng minh được nghiệm $y(k)$ là dương trên các khoảng $[h,\, 2h], [2h,\, 3h]$, v.v. Lặp lại quá trình trên ta sẽ chỉ ra được nghiệm $y(k) \succeq 0, \ \ \forall k \in \mathbb{N}$, vậy ta có hệ (3.24) là dương. Mặt khác, vì hệ (3.24) là hệ dương nên ta có $y(k) \succeq 0, k \in \mathbb{N}$, vậy $x(k) = Qy(k) \succeq 0,\ k \in \mathbb{N}$ vì ma trận $Q \succeq 0$, từ đây suy ra hệ đóng của hệ (3.21) là hệ dương.
Bước 3. Chứng minh hệ là ổn định mũ. Vì ma trận $\alpha^{-1}\overline{A}_0 + \alpha^{-(h+1)}\tilde{A}_1 - \tilde{E}$ là ma trận Metzler thỏa mãn bất đẳng thức (3.29), nên ta áp dụng Bổ đề 1.3 suy ra rằng tồn tại véc tơ $\lambda \in \mathbb{R}^n_+$ sao cho

$$\lambda^T[\alpha^{-1}\overline{A}_0 + \alpha^{-(h+1)}\tilde{A}_1 - \tilde{E}] \ll 0. \tag{3.35}$$

Ta xét hàm không âm sau đây:

$$V\left(k, y_k\right) = \lambda^T \alpha^{-k} \tilde{E} y(k) + \sum_{j=k-h}^{k-1} \lambda^T \tilde{A}_1 \alpha^{-(j+1+h)} y(j) \tag{3.36}$$

trong đó $y_k := y(k+s),\ s \in \{-h,\, -(h-1),\, ..., 0\}$. Ta lấy sai phân hàm $V(y_k)$

dọc theo quỹ đạo nghiệm của hệ (3.24) thu được

$$\begin{aligned}
V(k+1, y_{k+1}) - V(k, y_k) &= \lambda^T \alpha^{-k-1} \tilde{E} y(k+1) + \sum_{j=k+1-h}^{k} \lambda^T \tilde{A}_1 \alpha^{-(j+1+h)} y(j) \\
&\quad - \lambda^T \alpha^{-k} \tilde{E} y(k) - \sum_{j=k-h}^{k-1} \lambda^T \tilde{A}_1 \alpha^{-(j+1+h)} y(j) \\
&= \lambda^T \alpha^{-k-1} \big(\overline{A}_0 y(k) + \tilde{A}_1 y(k-h) \big) - \lambda^T \alpha^{-k} \tilde{E} y(k) \\
&\quad + \lambda^T \tilde{A}_1 \alpha^{-(k+1+h)} y(k) - \lambda^T \tilde{A}_1 \alpha^{-(k-h+1+h)} y(k-h) \\
&= \alpha^{-k} \lambda^T \Big(\alpha^{-1} \overline{A}_0 + \alpha^{-(h+1)} \tilde{A}_1 - \tilde{E} \Big) y(k).
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Do đó từ điều kiện (3.35) suy ra rằng

$$V(k+1, y_{k+1}) - V(k, y_k) \leq 0, \quad k \geq 0. \tag{3.38}$$

Vậy ta thu được,

$$V(k, y_k)) \leq V(0, y_0) = \lambda^T \tilde{E} y(0) + \sum_{j=-h}^{-1} \lambda^T \tilde{A}_1 \alpha^{-(j+1+h)} y(j) \leq \gamma \|\phi\|, \tag{3.39}$$

trong đó $\gamma = n\|\lambda\| + nh\alpha^{-h}\|\tilde{A}_1^T \lambda\|$. Mặt khác ta lại có

$$V(k, y_k) \geq \lambda^T \alpha^{-k} \tilde{E} y(k) \geq \Lambda \alpha^{-k} \|y_1(k)\|, \tag{3.40}$$

trong đó $\Lambda = \min\limits_{i=1,2,\ldots,n} \lambda_i$. Kết hợp bất đẳng thức (3.39) với (3.40) ta nhận được

$$\|y_1(k)\| \leq \frac{\gamma}{\Lambda} \alpha^k \|\phi\| := \nu \|\phi\| \, \alpha^k, \ \ \forall k \geq 0. \tag{3.41}$$

Tiếp theo ta sẽ chứng minh thành phần nghiệm $y_2(k)$ của hệ là ổn định mũ. Đặt véc tơ $\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1^T & \lambda_2^T \end{bmatrix}^T$, trong đó $\lambda_1 \in \mathbb{R}^r$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}^{n-r}$, ta có

$$\begin{aligned}
\lambda^T [\alpha^{-1} \overline{A}_0 + \alpha^{-(h+1)} \tilde{A}_1 - \tilde{E}] = \begin{bmatrix} \lambda_1^T & \lambda_2^T \end{bmatrix} \Bigg(\alpha^{-1} \begin{bmatrix} A_{1,K} & A_{2,K} \\ A_{3,K} & A_{4,K} \end{bmatrix} \\
+ \alpha^{-(h+1)} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{13} & A_{14} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Bigg).
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Từ điều kiện (3.35) và (3.42) ta nhận được

$$\lambda_1^T \Big(\alpha^{-1} A_{2,K} + \alpha^{-(h+1)} A_{12} \Big) + \lambda_2^T \Big(\alpha^{-1} A_{4,K} + \alpha^{-(h+1)} A_{14} \Big) \ll 0. \tag{3.43}$$

Vì $A_{2,K} \succeq 0$, $A_{12} \succeq 0$, $\lambda_1 \gg 0$, $\alpha > 0$, nên ta có

$$\lambda_1^T\big(\alpha^{-1}A_{2,K} + \alpha^{-(h+1)}A_{12}\big) \succeq 0. \tag{3.44}$$

Kết hợp các điều kiện (3.43)-(3.44) suy ra rằng $\lambda_2^T\big(\alpha^{-1}A_{4,K} + \alpha^{-(h+1)}A_{14}\big) \ll 0$, điều này cho ta

$$\lambda_2^T\big(A_{4,K} + A_{14}\big) \ll 0, \tag{3.45}$$

do tính không âm của ma trận $A_{14} \succeq 0$. Chú ý rằng ma trận $A_{4,K} + A_{14}$ là ma trận Metzler do $A_{4,K}$ là Metzler và ma trận $A_{14} \succeq 0$, áp dụng Bổ đề 1.3 và bất đẳng thức (3.45) suy ra tồn tại véc tơ $\eta_1 \in \mathbb{R}_+^{n-r}$ sao cho

$$\big(A_{4,K} + A_{14}\big)\eta_1 \ll 0. \tag{3.46}$$

Mặt khác vì ma trận $A_{4,K}$ là ma trận Hurwitz và là ma trận Metzler, sử dụng Bổ đề 1.3 ta có $-A_{4,K}^{-1} \succeq 0$. Nhân trái hai vế của bất đẳng thức (3.46) với ma trận không suy biến $-A_{4,K}^{-1} \succeq 0$, ta thu được

$$\Bigg(-A_{4,K}^{-1}A_{14} - I_{n-r}\Bigg)\eta_1 \ll 0. \tag{3.47}$$

Vì ma trận $-A_{4,K}^{-1}A_{14} \succeq 0$ nên ta có $\big(-A_{4,K}^{-1}A_{14} - I_{n-r}\big)$ là ma trận Metzler, từ Bổ đề 1.3 và bất đẳng thức (3.47) suy ra tồn tại véc tơ $\eta \in \mathbb{R}_+^{n-r}$ sao cho

$$\eta^T\Bigg(-A_{4,K}^{-1}A_{14} - I_{n-r}\Bigg) \ll 0. \tag{3.48}$$

Từ điều kiện (3.48), ta sẽ chứng minh rằng tồn tại số $\rho \in (0, 1)$ sao cho

$$-\eta^T A_{4,K}^{-1}A_{14} \preceq \rho\, \eta^T. \tag{3.49}$$

Thật vậy, ta đặt

$$\eta^T := (\xi_1 \;\; \xi_2 \;\; ... \;\; \xi_{n-r}) \gg 0, \quad q := -\eta^T A_{4,K}^{-1}A_{14} = (q_1 \;\; q_2 \;\; ... \;\; q_{n-r}) \succeq 0.$$

Nếu $q_i = 0, \forall i = 1, 2, ..., n-r$, khi đó với mọi $\rho \in (0,\, 1)$ thì bất đẳng thức (3.49) luôn đúng. Nếu $q \neq 0$, thì ta đặt $\rho := \max\limits_{i=1,2,\dots,n-r}\left\{\frac{q_i}{\xi_i}\right\}$. Bất đẳng thức (3.48) suy ra rằng $q \ll \eta^T$, tức là $q_i < \xi_i$, $\forall i = 1, 2, ..., n-r$, vậy ta có $\rho \in (0,\, 1)$. Hơn nữa vì $q_i \leq \rho\xi_i$ với mọi $i = 1, 2, ..., n-r$ nên ta thu được $q \preceq \rho\eta^T$, điều này suy ra bất đẳng thức (3.49). Ta kí hiệu:

$$p(k) = -A_{4,K}^{-1}\Bigg(A_{3,K}y_1(k) + A_{13}y_1(k-h)\Bigg).$$

Dễ thấy rằng, nếu $k > h$ thì ta có

$$\|y_1(k-h)\| \leq \frac{\gamma}{\Lambda}\alpha^{(k-h)}\|\phi\| \leq \frac{\gamma}{\Lambda}\alpha^k\|\phi\|\,\alpha^{-h} = \nu\alpha^{-h}\|\phi\|\,\alpha^k,\ \ \forall k > h. \tag{3.50}$$

Với $k \in [0,\, h]$ thì ta có $\|y_1(k-h)\| = \|\phi_1\| \leq \|\phi\| \leq \|\phi\|\,\alpha^{(k-h)} \leq \alpha^{-h}\|\phi\|\,\alpha^k$, và vì vậy,

$$\|y_1(k-h)\| \leq \nu\alpha^{-h}\|\phi\|\,\alpha^k,\ \ \forall k \in [0,\, h]. \tag{3.51}$$

Kết hợp các điều kiện (3.50), (3.51) suy ra rằng

$$\|y_1(k-h)\| \leq \nu\alpha^{-h}\|\phi\|\,\alpha^k,\ \ \forall\, k \geq 0. \tag{3.52}$$

Từ hàm $p(k)$, kết hợp với các điều kiện (3.41), (3.52) ta có

$$\begin{aligned}\eta^T p(k) =& -\eta^T A_{4,K}^{-1}\Big(A_{3,K}y_1(k) + A_{13}y_1(k-h)\Big)\\ \leq& r\|\eta^T A_{4,K}^{-1}A_{3,K}\|\|y_1(k)\| + r\|\eta^T A_{4,K}^{-1}A_{13}\|\|y_1(k-h)\|\\ \leq& \nu_1\|\phi\|\,\alpha^k,\ \ \forall\, k \geq 0,\end{aligned} \tag{3.53}$$

trong đó $\nu_1 = r\,\nu\,\alpha^{-h}\Big(\|\eta^T A_{4,K}^{-1}A_{3,K}\| + \|\eta^T A_{4,K}^{-1}A_{13}\|\Big)$. Hơn nữa từ phương trình thứ hai của hệ (3.24) ta có $y_2(k) = -A_{4,K}^{-1}A_{14}y_2(k-h) + p(k)$, vậy

$$\eta^T y_2(k) = -\eta^T A_{4,K}^{-1}A_{14}y_2(k-h) + \eta^T p(k). \tag{3.54}$$

Kết hợp các điều kiện (3.49), (3.53) và (3.54) ta thu được

$$\eta^T y_2(k) \leq \rho\ \eta^T y_2(k-h) + \nu_1\|\phi\|\,\alpha^k,\ \ \forall\, k \geq 0. \tag{3.55}$$

Đặt $N = \max\{(n-r)\|\eta\|\alpha^{-h},\, \nu_1\alpha^{-h}\}$. Nếu $k \in [0,\, h]$ thì $k-h \in [-h,\, 0]$. Ta có $\|y_2(k-h)\| = \|\phi_2\| \leq \|\phi\| \leq \|\phi\|\,\alpha^{(k-h)} \leq \alpha^{-h}\|\phi\|\,\alpha^k$, vậy ta thu được

$$\|y_2(k-h)\| \leq \ \alpha^{-h}\|\phi\|\,\alpha^k,\ \ \forall k \in [0,\, h]. \tag{3.56}$$

Từ điều kiện (3.55) và (3.56) ta nhận được

$$\begin{aligned}\eta^T y_2(k) &\leq \rho\ (n-r)\|\eta\|\|y_2(k-h)\| + \nu_1\|\phi\|\,\alpha^k\\ &\leq \rho\ N\|\phi\|\,\alpha^k + N\|\phi\|\,\alpha^k \leq N(1+\rho)\|\phi\|\,\alpha^k.\end{aligned} \tag{3.57}$$

Nếu $k \in [h,\, 2h]$ thì $k-h \in [0,\, h]$. Kết hợp các bất đẳng thức (3.55), (3.57) ta thu được

$$\eta^T y_2(k) \leq \rho\Big(N\,(1+\rho)\|\phi\|\alpha^k\Big) + \nu_1\|\phi\|\,\alpha^k \leq N\,(1+\rho+\rho^2)\|\phi\|\alpha^k. \tag{3.58}$$

Giả sử rằng $\forall k \in [(m-1)h, mh]$, ta có $\eta^T y_2(k) \leq N\Big(\rho+\rho+...+\rho^k\Big)\|\phi\|\,\alpha^k$. Vậy khi $k \in [mh, (m+1)h], k-h \in [(m-1)h, mh]$, theo giả thiết quy nạp (3.55), ta nhận được $\eta^T y_2(k) \leq N\Big(1+\rho+\rho+...+\rho^{k+1}\Big)\|\phi\|\,\alpha^k$. Hơn nữa $\rho \in (0,\, 1)$, vậy ta thu được

$$\eta^T y_2(k) \leq N\|\phi\|\,\alpha^k\big(1+\rho+\rho+...+\rho^k+...\big) \leq \frac{N}{1-\rho}\|\phi\|\,\alpha^k. \tag{3.59}$$

Từ đây suy ra rằng

$$\|y_2(k)\| \leq \frac{N}{(1-\rho)\eta_{\min}}\|\phi\|\,\alpha^k, \tag{3.60}$$

trong đó $\eta_{\min} = \min\limits_{1\leq i\leq n-r} |\xi_i|$; $\eta = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{n-r}) \in \mathbb{R}_+^{n-r}$. Từ điều kiện (3.41) và (3.60) ta nhận được

$$\|y(k)\| \leq M\|\phi\|\,\alpha^k,\ \ \forall k \geq 0.$$

□

Nhận xét 3.7 Định lý 3.3 cũng cho ta một điều kiện đủ cho bài toán ổn định hóa hệ rời rạc suy biến dương dưới dạng bài toán LP với các biến $\beta, k_j,\ j = 1, 2, ..., n$. Ta xây dựng hàm điều khiển ngược cho bài toán ổn định hóa thông qua các bước sau đây:

- *Bước 1:* Xác định hai ma trận P, Q , sao cho các ma trận (E, A_0, A_1, B) của hệ ban đầu có phân tích thành các ma trận $(\tilde{E},\, \tilde{A}_0,\, \tilde{A}_1,\, \tilde{B})$, sao cho $\tilde{A}_1 \succeq 0$, $Q \succeq 0$.
- *Bước 2:* Tìm các véc tơ $\beta \in \mathbb{R}_+^n,\ k_j \in \mathbb{R}^m,\ j = \overline{1, n}$ sao cho thỏa mãn các điều kiện (3.25), (3.26) (sử dụng Linear Programming [51]).
- *Bước 3:* Xây dựng ma trận K cho bởi công thức
$$K = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{\beta_1} & \frac{k_2}{\beta_2} & ... & \frac{k_n}{\beta_n} \end{bmatrix}.$$
- *Bước 4:* Xác định hàm điều khiển ngược cho bởi $u(k) = KQ^{-1}x(k)$.

Ví dụ 3.3 Xét hệ suy biến rời rạc có trễ (3.21), trong đó $h = 2$,

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 50 \\ 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ A_0 = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 25 & -2.5 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 2.5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2.5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Khi đó với các ma trận $P = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}$, thì E,A_0, A_1 có phân tích như sau

$$\tilde{E} := PEQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{A}_0 := PA_0Q = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.1 & 1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ -0.1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A}_1 := PA_1Q = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0 \end{bmatrix}., \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 \\ 0.1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vậy ta thu được

$$A_{01} = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.1 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, A_{02} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, A_{03} = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{04} = 0,\ B_1 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ A_{13} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, A_{14} = 0,\ B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

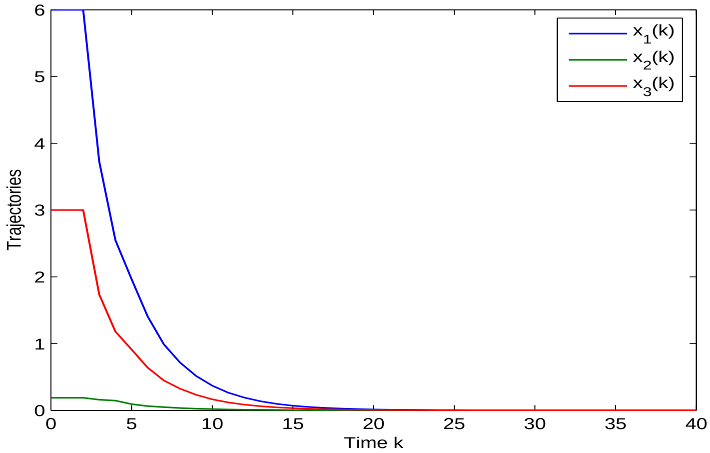
Dễ thấy rằng $det(A_{04}) = 0$ suy ra rằng hệ mở ($u(k) = 0$) là không thỏa mãn điều kiện chính quy và causal (xem trong [27]). Ta sẽ thiết kế hàm điều khiển ngược sao cho hệ đóng tương ứng là chính quy, causal, dương và ổn định mũ. Để làm điều này ta sẽ xác định ma trận K và véc tơ β thỏa mãn các điều kiện của Định lý 3.3. Cho $\alpha = 0.9$ các điều kiện (3.25)-(3.26) sẽ thỏa mãn với

$$\beta = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.01 \end{pmatrix}, \quad k_1 = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.02 \end{bmatrix}, \quad k_2 = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k_3 = \begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.08 \end{pmatrix}.$$

Ta xác định được ma trận $K = \begin{bmatrix} 0.1 & 1 & 10 \\ 0.2 & 0 & -8 \end{bmatrix}$.

Vậy theo Định lý 3.3 hệ là $0.9-$ ổn định hóa được dạng mũ với hàm điều khiển ngược cho bởi

$$\begin{cases} u_1(k) = & 0.5x_1(k) + 50x_2(k) + 5x_3(k), \\ u_2(k) = & x_1(k) - 40x_2(k). \end{cases}$$



Hình 3.1: Quỹ đạo của hệ đóng với điều kiện ban đầu tương thích $\varphi(k) = \left(6, \frac{1.5}{8}, 3\right)$, $k \in \{-2, -1, 0\}$.

3.3. Kết luận Chương 3

Chương 3 trình bày kết quả nghiên cứu tính ổn định và bài toán ổn định hóa cho một lớp hệ rời rạc suy biến có trễ. Kết quả đạt được như sau:

- Chúng tôi đưa ra một vài tính chất nghiệm của hệ rời rạc suy biến có trễ biến thiên (Mệnh đề 3.1). Dựa trên nghiệm của hệ và các tính chất định tính của nghiệm chúng tôi chứng minh các điều kiện cần và đủ để đảm bảo hệ rời rạc suy biến tương ứng là hệ dương (Định lý 3.1).

- Dựa trên phương pháp quy nạp toán học và các phép biến đổi ma trận chúng tôi đưa ra các điều kiện cần và đủ đảm bảo tính chất ổn định mũ của hệ rời rạc suy biến dương có trễ biến thiên (Định lý 3.2) .

- Chúng tôi chứng minh một số điều kiện đủ dưới dạng bài toán quy hoạch tuyến tính để giải bài toán ổn định hóa cho hệ rời rạc suy biến dương có trễ (Định lý 3.3).

Kết luận của luận án

Luận án nghiên cứu tính ổn định và bài toán ổn định hóa cho một số hệ phương trình suy biến dương có trễ trong cả hai trường hợp liên tục và rời rạc.Những kết quả đã được chứng minh trong luận án và điểm mới của luận án so với các kết quả đã có là:

- Chứng minh các điều kiện cần và đủ cho tính dương của hệ phương trình suy biến tuyến tính có trễ và chứng minh điều kiện đủ cho tính ổn định mũ của hệ suy biến dương tương ứng.
- Đưa ra một số điều kiện đủ cho tính ổn định hóa được dạng mũ của hệ điều khiển tuyến tính liên tục và rời rạc suy biến dương có trễ dưới dạng bài toán quy hoạch tuyến tính.

Luận án mở ra một số vấn đề có thể tiếp tục nghiên cứu:

- Nghiên cứu bài toán ổn định và ổn định hóa cho các hệ phương trình tuyến tính không ôtônôm suy biến dương có trễ.
- Ứng dụng giải một số bài toán điều khiển H_∞, điều khiển tối ưu cho hệ phương trình suy biến dương có trễ.

Danh mục công trình của tác giả liên quan đến luận án

[1]. V. N. Phat, N. H. Sau, On exponential stability of linear singular positive delayed systems, Applied Mathematics Letters, **38**(2014), 67-72 (SCI).

[2]. N. H. Sau, P. Niamsup, V. N. Phat, Positivity and stability analysis for linear implicit difference delay equations, Linear Algebra and its Applications, **510**(2016), 25-41 (SCI).

[3]. Nguyen H. Sau, Vu N. Phat, LP approach to exponential stabilization of singular linear positive time-delay systems via memory state feedback, Journal of Industrial and Management Optimization, 2017, doi: 10.3934/jimo.2017061 (SCIE).

[4]. N.H. Sau, V.N. Phat, New criteria for exponential stabilization of singular linear positive discrete-time delay systems, IMA Journal of Mathematical Control and Information (submitted).

Tài liệu tham khảo

[1] D. H. Anderson, *Compartmental Modeling and Tracer Kinetics,* Springer, New York, 1983.

[2] P. K. Anh, D. S. Hoang, Stability of a class of singular difference equations, International Journal of Difference Equations, **1** (2006), 181-193.

[3] P. K. Anh, H. T. N. Yen, Floquet theorem for linear implicit nonautonomous difference systems, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **321** (2006), 921-929.

[4] S.L. Campbell, *Singular Systems of Differential Equations,* Pitman, London, 1980.

[5] S.L. Campbell, V.H. Linh, Stability criteria for differential-algebraic equations with multiple delays and their numerical solutions, Applied Mathematics and Computation, **208** (2009), 397-415.

[6] B. Cantó, C. Coll, E.Sánchez, Positive solutions of a discrete-time descriptor system, International Journal of Systems Science, **39** (2008), 81-88.

[7] Ph. Clément, H. J. A. M Heijmans, S. Angenent, C. J. Duijn, B. Pagter, *One-parameter semigroups*, CWI Monographs, 5. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1987.

[8] L. Dai, *Singular Control Systems, Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[9] N.H. Du, V.H. Linh, V. Mehrmann, D.D. Thuan, Stability and robust stability of linear time-invariant delay differential-algebraic equations, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, **34** (2013) 1631-1654.

[10] G. R. Duan, *Analysis and Design of Descriptor Linear Systems,* Springer-Verlag, New York, 2010.

[11] Y. Ebihara, D. Peaucelle, D Arzelier, LMI approach to linear positive system analysis and synthesis, Systems & Control Letters, **63** (2014), 50-56.

[12] D. Efimov, A. Polyakov, J. P. Richard, Interval observer design for estimation and control of time-delay descriptor systems, European Journal of Control, **23** (2015), 26-35.

[13] L. Farina , Rinaldi, *Positive Linear Systems,* Wiley, New York, 2000.

[14] E. Fridman, Stability of linear descriptor systems with delay: a Lyapunov-based approach, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **273** (2002), 24-44.

[15] E. Fridman, Y. Orlov, Exponential stability of linear distributed parameter systems with time-varying delays, Automatica, **45** (2009), 194-201.

[16] E. Fridman, U. Shaked, An improved stabilization method for linear time-delay systems, IEEE Transactions on Automatic Control, **47** (2002), 1931-1937.

[17] G. H. Golub, C. F. V. Loan, *Matrix Computations*, Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1996.

[18] W. M. Haddad, V. Chellaboina, Stability theory for nonnegative and compartmental dynamical systems with time delay, Systems & Control Letters, **51** (2004), 355-361.

[19] J.K. Hale, *Theory of Functional Differential Equations,* Springer-Verlag, New York, 1977.

[20] L.V. Hien, L. H. Vu, V.N. Phat, Improved delay-dependent exponential stability of singular systems with mixed interval time-varying delays, IET Control Theory & Applications, **9** (2015), 1364-1372.

[21] A. Hmamed, A. Benzaouia, M.A. Rami, F. Tadeo, Positive stabilization of discrete-time systems with unknown delay and bounded controls, in Proc. European Control Conf., Kos, Greece, (2007) 5616-5622.

[22] A. Ilchmann, P.H.A Ngoc, Stability and robust stability of positive Volterra systems, International Journal of Robust and Nonlinear Control, **22** (2012), 604-629.

[23] G. James, V. Rumchev, Stability of positive linear discrete-time systems, Systems Science, **30** (2004), 51-67.

[24] T. Kaczorek , *Positive 1D and 2D Systems,* Springer-Verlag, London, 2002.

[25] V.L. Kharitonov, *Time-Delay Systems: Lyapunov Functionals and Matrices,* Birkhauser, 2013.

[26] P. Kunkel, *Differential-algebraic equations: analysis and numerical solution,* European Mathematical Society, 2006.

[27] J. Lam, S. Xu , *Robust Control and Filtering of Singular Systems,* Berlin: Springer (2006).

[28] W. Leontief, Quantitative input-output relations in the economic system of the united states, Review of Economic Statistics, **18** (1936), 105-125 .

[29] X. Liu, Constrained control of positive systems with delays, IEEE Transactions on Automatic Control, **54** (2009), 1596-1600.

[30] X. Liu, W. Yu, L. Wang, Stability analysis of positive systems with bounded time-varying delays, IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, **56** (2009), 600-604.

[31] X. Liu, W. Yu and L. Wang, Stability Analysis for Continuous-Time Positive Systems With Time-Varying Delays, in IEEE Transactions on Automatic Control, **55** (2010), 1024-1028.

[32] D.G. Luenberger, A. Arbel, Singular dynamic leontief systems, Econometrica, **45** (1977), 991-995.

[33] O.L. Mangasarian, Characherizations of real matrices of monotone kind, SIAM Review, **10** (1968), 439-441.

[34] N.H. McClamroch, Singular Systems of Differential Equations as Dynamic Models for Constrained Robot Systems, Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, **3** (1986), 21-28.

[35] W. Michiels, Spectrum-based stability analysis and stabilisation of systems described by delay differential algebraic equations, IET Control Theory & Applications **5** (2011), 1829-1842.

[36] H. Minc, *Non-negative Matrices,* John Wiley & Sons, New York,1988.

[37] P.C. Muller, Stability of linear mechanical systems with holonomic constraints, Applied Mechanics Reviews, **46** (1993), 160-164.

[38] Y.S. Moon, P. G. Park, W.H. Kwon, Robust stabilization of uncertain input delayed systems using reduction method, Automatica, **37** (2001), 307-312.

[39] P.H.A. Ngoc, A Perron-Frobenius theorem for a class of positive quasi-polynomial matrices, Applied Mathematics Letters, **19** (2006), 747-751.

[40] P.H.A. Ngoc, Stability of positive differential systems with delay, IEEE Transactions on Automatic Control, **58** (2013), 203-209.

[41] V. N. Phat, *Constrained Control Problems of Discrete Processes*, World Scientific Publisher, Singapore, 1996.

[42] M.A. Rami, Stability analysis and synthesis for linear positive systems with time-varying delays, In Positive systems, Springer Berlin Heidelberg, (2009), 205-215.

[43] M.A. Rami, D. Napp, Characterization and stability of autonomous positive descriptor systems, IEEE Transactions on Automatic Control, **57** (2012), 2668-2673.

[44] M.A. Rami, F. Tadeo, A.Benzaouia, Control of constrained positive discrete systems, In American Control Conference, (2007), 5851-5856.

[45] M. A. Rami, D. Napp, Positivity of discrete singular systems and their stability: An LP-based approach, Automatica, **50** (2014), 84-91.

[46] M.S. Silva, , T.P De Lima, Looking for nonnegative solutions of a Leontief dynamic model, Linear Algebra and its Applications, **364** (2003), 281-316.

[47] N.K. Son, P.H.A. Ngoc, Robust stability of positive linear time-delay systems under affine parameter perturbations, Acta Mathematica Vietnamica, **24** (1999), 353-372.

[48] N. K. Son, D. D. Thuan, The structured distance to non-surjectivity and its application to calculating the controllability radius of descriptor systems, Journal of Mathematical Analysis and Applications , **388** (2012), 272-281.

[49] K. Takaba, N. Morihira, T. Katayama, A generalized Lyapunov theorem for descriptor system, Systems & Control Letters, **24** (1995), 49-51.

[50] F.E. Udwadia, R. Kumar, Time-delayed control of classically damped structural systems, International Journal of Control, **60** (1994), 687-713.

[51] R. J. Vanderbei, *Linear Programming: Foundations and Extensions*, International Series in Operations Research & Management Science, (2001).

[52] E. Virnik, Stability analysis of positive descriptor systems, Linear Algebra and its Applications, **429** (2008), 2640-2659.

[53] ZG. Wu, H. Su, P. Shi, J. Chu, *Analysis and synthesis of singular systems with time-delays,* Berlin: Springer, 2013.

[54] H. Xu, K. L. Teo, Y. Zhang, *Optimization and Control Techniques and Applications,* Berlin: Springer, 2014.

[55] D.Yue, J. Lam, D.W. Ho, Delay-dependent robust exponential stability of uncertain descriptor systems with time-delaying delays, Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, **12** (2005), 129-149.

[56] P. Zhou, L.W. Fan, H.W.Tang, On stability analysis of multiple objective dynamic input-output model, Applied Mathematics and Computation, **177** (2006), 79-84.

[57] S. Zhu, Z. Li, C. Zhang, Exponential stability analysis for positive systems with delays, IET Control Theory & Applications, **6** (2012), 761-767.

[58] Y. Zhang, Q. Zhang, T. Tanaka, M. Cai, Admissibility for positive continuous-time descriptor systems, International Journal of Systems Science, **44** (2013), 2158-2165.

[59] Y. Zhang, Q. Zhang, T. Tanaka, X.G. Yan, Positivity of continuous-time descriptor systems with time delays, IEEE Transactions on Automatic Control, **59** (2014), 3093-3097.

[60] Y. Zhang, Q. Zhang, T. Tanaka, X. Meng, H. Lv, Positivity analysis for discrete-time descriptor systems with time delays, In Chinese Control Conference, IEEE, (2014), 2530-2535.

[61] S. Zhu, M. Meng, C. Zhang, Exponential stability for positive systems with bounded time-varying delays and static output feedback stabilization, Journal of the Franklin Institute, **350** (2013), 617-36.