Tóm tắt

Luận án nghiên cứu tính ổn định và số mũ Lyapunov của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính. Luận án gồm 3 chương.

Chương I giới thiệu tổng quan về phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô.

Chương II, phần đầu của chương chúng tôi giới thiệu các khái niệm ổn định ngẫu nhiên của nghiệm tầm thường của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô. Tiếp đó, chúng tôi chứng minh được một số mối liên hệ giữa các loại ổn định ngẫu nhiên của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính.

Trong chương III, chúng tôi chứng minh một số tính chất của số mũ trung tâm, số mũ bổ trợ. Chỉ ra sự trùng nhau của số mũ Lyapunov và số mũ trung tâm của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính thỏa mãn điều kiện không suy biến. Cuối cùng chúng tôi đề cập đến dáng điệu tiệm cận của số mũ Lyapunov lớn nhất của phương trình vi phân với nhiễu ngẫu nhiên Itô nhỏ.

Abstract

The thesis studies the stability and Lyapunov exponents of linear Ito stochastic differential equations. The thesis consists of three chapters.

Chapter I introduces an overview of Ito stochastic differential equations.

Chapter II, in the first part we introduce the concept of stability of the trivial solution of Ito stochastic differential equations. Next, we prove some type of relationship between the stability of linear Ito stochastic differential equations.

In chapter III we prove some properties of the central exponents, auxiliary exponents. We indicate that under a nondegeneracy condition Lyapunov exponents and central exponents of linear Ito stochastic differential equations coincide. Finally we mention asymptotic behaviour of the biggest Lyapunov exponent of differential equations with Ito small random noise.

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi. Các kết quả viết chung với tác giả khác đã được sự nhất trí của đồng tác giả khi đưa vào luận án. Các kết quả của luận án là mới và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Tác giả

Nguyễn Thị Thúy Quỳnh

Một số ký hiệu dùng trong luận án

$\mathbb{R}^+$	:	$[0, +\infty)$,
$\|x\|$	:	giá trị tuyệt đối của số thực x,
$\mathbb{R}^n$	:	không gian véc tơ Euclide n chiều,
U_*	:	tập các véc tơ khác véc tơ không của không gian véc tơ con U,
$\Phi\|_U$	:	hạn chế của toán tử Φ trong $\mathbb{R}^n$ lên không gian véc tơ con U,
$\mathcal{G}_r$	:	đa tạp Grassmannian gồm tất cả các không gian véc tơ con $r-$chiều của $\mathbb{R}^n$,
$\\|x\\|$	:	chuẩn của véc tơ x,
$< x, y >$	:	tích vô hướng của hai véc tơ x và y,
$A \circ B$	:	hợp của hai toán tử A và B,
A^*	:	ma trận chuyển vị của ma trận A,
$\\|A\\|$	:	chuẩn của ma trận A,
A^{-1}	:	ma trận nghịch đảo của ma trận A,
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	:	không gian xác suất,

$\mathbb{P}(C)$	:	xác suất của biến cố C,
$\mathbb{E}X$	:	kỳ vọng của biến ngẫu nhiên X,
DX	:	phương sai của biến ngẫu nhiên X,
$L^2(\Omega)$	:	không gian các biến ngẫu nhiên bình phương khả tích,
$\mathbb{P}(X\|\mathcal{N})$	:	xác suất có điều kiện của biến ngẫu nhiên X đối với $\sigma-$ đại số $\mathcal{N}$,
$\mathcal{F}_t = \sigma(X(s))_{0\leq s\leq t}$	:	$\sigma-$ đại số sinh bởi quá trình ngẫu nhiên X.

Mục lục

Lời nói đầu

Năm 1892, tại trường Đại học tổng hợp Kharkov, A. M. Lyapunov công bố và bảo vệ thành công luận án tiến sĩ có nhan đề "Bài toán tổng quát về tính ổn định của chuyển động". Luận án có nhiều kết quả và ý tưởng vô cùng sâu sắc. Nó đặt ra nền tảng và tạo bước ngoặt cho lý thuyết ổn định của chuyển động. Ông đã đưa ra định nghĩa và đặt ra bài toán nghiên cứu ổn định nghiệm của phương trình vi phân thường một cách chặt chẽ toán học. Ông đã giải quyết bài toán ổn định bằng hai phương pháp, đó là phương pháp số mũ Lyapunov (hay còn gọi là phương pháp thứ nhất) và phương pháp sử dụng hàm số Lyapunov (hay còn gọi là phương pháp thứ hai). Các phương pháp này đã trở thành công cụ sơ sở trong nghiên cứu lý thuyết định tính phương trình vi phân cũng như trong ứng dụng và các ngành liên quan. Những ý tưởng của ông đưa ra đều được các nhà khoa học nghiên cứu, phát triển thành những ngành khoa học chuyên sâu và thu được nhiều kết quả có ý nghĩa trong nhiều lĩnh vực. Có thể kể ra đây những nghiên cứu về ổn định với nhiễu lớn, ổn định trên khoảng thời gian hữu hạn, ổn định với nhiễu ngẫu nhiên, hệ động lực ngẫu nhiên, lý thuyết ergodic, phương pháp tính số mũ Lyapunov và tính hàm Lyapunov bằng máy tính, ... Lý thuyết số mũ Lyapunov đã phát triển mạnh và có nhiều ứng dụng quan trọng trong các ngành khác nhau như toán học, vật lý, cơ học, sinh học .... Các vấn đề lý thuyết số mũ Lyapunov được nhiều nhà khoa học trên thế giới nghiên cứu như: phổ Lyapunov của hệ phương trình vi phân tuyến tính được nghiên cứu bởi Millionshchikov, Demidovich, Bylov, Vinograd, Nemytskii, Erugin, Persidskii... (Liên Xô cũ), phổ Lyapunov của hệ động lực (hệ động lực độ đo hoặc hệ động lực sinh bởi phương trình vi phân ôtônôm) được nghiên cứu bởi Oseledets, Sinai, Pesin, Katok (Nga), Young, Bowen (Mỹ), Ruelle, Ledrapier (Pháp), Arnold (Đức), Johnson (Italy). Ngày nay có nhiều nhóm nghiên cứu ở Đức, Mỹ, Tây Ban Nha... đang quan tâm nghiên cứu phổ Lyapunov của hệ động lực không ôtônôm. Các nghiên cứu này có rất nhiều điểm liên quan tới các nghiên cứu cổ điển của Lyapunov và các nhà khoa học Liên Xô cũ về lý thuyết định tính phương trình vi phân thường không ôtônôm. Ở Việt Nam nhiều nhà toán học đã sử dụng số mũ Lyapunov để nghiên cứu các bài toán khác nhau như bài toán ổn định chuyển động, bài toán sinh thái, lý thuyết hệ động lực ngẫu nhiên... và đã đạt được nhiều kết quả có ý nghĩa, cụ thể như các nghiên cứu của Hoàng Hữu Đường, Vũ Tuấn, Nguyễn Thế Hoàn, Trần Văn Nhung, Nguyễn Đình Công, Nguyễn Hữu Dư, Trịnh Tuấn Anh...

Lý thuyết số mũ Lyapunov đã được phát triển cho phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô và đã có nhiều công trình nghiên cứu số mũ Lyapunov của hệ phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô, đặc biệt là phương trình ôtônôm (xem [11], [23]). Lý thuyết số mũ Lyapunov của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô không ôtônôm mới phát triển trong thời gian gần đây (xem Nguyễn Đình Công [17], [18], [19]). Các vấn đề được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu là tính chất của số mũ Lyapunov của hệ phương trình vi phân khi có nhiễu ngẫu nhiên nhỏ (xem Nguyễn Đình Công [19], Pardoux và Wihstutz [31], Pinsky và Wihstutz [32], Wihstutz [37]). Tuy nhiên đối với phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô các nghiên cứu lý thuyết về số mũ Lyapunov còn hạn chế so với các nghiên cứu lý thuyết về hàm Lyapunov (các kết quả cổ điển về lý thuyết hàm Lyapunov và một số kết quả về số mũ Lyapunov của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô có thể xem trong Khasminskii [23] và Kunita [25]), vì vậy nhiều vấn đề quan trọng thuộc lý thuyết số mũ Lyapunov của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô còn mở, cần được nghiên cứu và phát triển. Với lý do đó chúng tôi chọn "nghiên cứu tính ổn định và số mũ Lyapunov của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính" làm đề tài luận án tiến sĩ. Các kết quả của luận án chủ yếu dựa trên các bài toán được đặt ra bởi Millionshchikov cho phương trình vi phân ngẫu nhiên hằng từng khúc (xem [29], [41]) và được Nguyễn Đình Công phát triển đối với phương trình vi phân có nhiễu nhỏ ngẫu nhiên Itô tuyến tính, hệ số hằng và phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính (xem [13], [14], [15], [17], [19]). Luận án được cấu trúc như sau. Ngoài phần mở đầu và phần kết luận, luận án chia làm ba chương.

Chương 1 giới thiệu tổng quan về phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô.

Chương 2 giới thiệu các khái niệm ổn định ngẫu nhiên của nghiệm tầm thường của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô. Trình bày một số kết quả nghiên cứu của chúng tôi về mối liên hệ giữa các loại ổn định ngẫu nhiên của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính.

Chương 3 trình bày các kết quả nghiên cứu của chúng tôi về tính chất của số mũ trung tâm và số mũ bổ trợ của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính. Sự trùng nhau của số mũ Lyapunov và các số mũ trung tâm của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính thỏa mãn điều kiện không suy biến. Cuối cùng là dáng điệu tiệm cận của số mũ Lyapunov lớn nhất của phương trình vi phân với nhiễu ngẫu nhiên Itô nhỏ.

Các kết quả trong luận án đã được chúng tôi công bố trong ba bài báo: Bài báo thứ nhất: "Sự ổn định của nghiệm của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính", bài báo thứ hai: "Số mũ Lyapunov, số mũ trung tâm của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính" và bài báo thứ ba: "Sự trùng nhau của số mũ Lyapunov và số mũ trung tâm của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính có phần ngẫu nhiên thỏa mãn điều kiện không suy biến". Các kết quả này đã được trình bày tại tiểu ban xác suất và thống kê - Đại hội toán học toàn quốc lần thứ VII (Quy Nhơn, ngày 5/8/2008), seminar của phòng Xác suất và Thống kê toán học - Viện Toán học (25/2; 11,18,25/3/2009), Hội nghị quốc tế về phương trình vi phân và giải tích ứng dụng lần thứ IV (Viện Toán học, ngày 16-18/10/09), seminar của phòng Tối ưu và Điều khiển - Viện Toán học (15/12/2009), Hội nghị Xác suất -Thống kê toàn quốc lần thứ IV (Đại học Vinh, 20-22/5/2010). Hội nghị Nghiên cứu sinh Viện Toán học hàng năm.

Luận án được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của thầy giáo, GS-TSKH Nguyễn Đình Công. Tác giả xin được bày tỏ sự kính trọng và lòng biết ơn sâu sắc đến Thầy. Thầy đã kiên trì truyền đạt, giảng giải kiến thức chuyên môn, từng bước định hướng nghiên cứu, giúp tác giả tiếp cận vấn đề một cách tự nhiên để có thể chủ động, tự tin trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn đến GS.TS Nguyễn Hữu Dư vì những chỉ dẫn tận tình và những ý kiến đóng góp quý báu của Thầy dành cho tác giả trong suốt thời gian học tập và nghiên cứu.

Trong gần 10 năm theo học cao học cũng như làm nghiên cứu sinh ở Viện Toán, tác giả đã nhận được sự quan tâm, tạo điều kiện về mọi mặt của Ban lãnh đạo Viện Toán các thời kỳ, của Trung tâm Đào tạo Sau đại học, của toàn thể cán bộ, nhân viên Viện Toán. Tác giả thực sự cảm thấy Viện Toán là một môi trường làm việc khoa học, nghiêm túc nhưng gần gũi, chan hòa. Tất cả những điều đó đã góp thêm động lực, giúp cho tác giả vượt qua những khó khăn để hoàn thành công việc của mình. Nhân dịp này tác giả xin được nói lời cảm ơn chân thành tới toàn thể các thầy giáo, cô giáo và cán bộ, nhân viên Viện Toán.

Tác giả xin được gửi lời cảm ơn đến các thầy giáo trong phòng Xác suất và Thống kê toán học, phòng Phương trình vi phân, phòng Giải tích toán học của Viện Toán, các thầy cô giáo, các bạn trong Sêminar liên Trường-Viện: Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Sư phạm Hà Nội I, Đại học Bách Khoa, Viện Toán. Các thầy cô và các bạn đã dành cho tác giả những cơ hội được trao đổi chuyên môn, có những ý kiến đóng góp quý báu, giúp cho tác giả hiểu sâu sắc hơn vấn đề nghiên cứu của mình.

Tác giả xin được bày tỏ sự biết ơn đến Ban giám đốc Học viện Tài chính, Lãnh đạo Bộ môn Toán cùng toàn thể giáo viên trong Bộ môn Toán của Học viện đã tạo mọi điều kiện thuận lợi để tác giả hoàn thành tốt nhiệm vụ học tập, nghiên cứu cũng như giảng dạy trong nhà trường.

Một lời cảm ơn đặc biệt xin được dành cho gia đình và người thân đã động viên, giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập, nghiên cứu.

Xin cảm ơn tất cả mọi người, những ai đã quan tâm, giúp đỡ, động viên tác giả để có thể hoàn thành luận án này.

Hà Nội, tháng 10 năm 2010

Tác giả

Chương 1

Phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô

Thực tế nhiều bài toán dẫn đến nhu cầu phải tính toán một loại tích phân tạm ký hiệu là $I = \int\limits_a^b f(t, \omega) dW(t)$ trong đó $f(t, \omega)$ là một hàm ngẫu nhiên (quá trình ngẫu nhiên) nào đó, $W(t)$ là quá trình Wiener. Tuy mỗi quỹ đạo $t \longrightarrow W(t)$ là một hàm liên tục của t nhưng ta biết rằng hầu hết mọi quỹ đạo là những hàm không có biến phân giới nội trên bất kỳ khoảng hữu hạn nào. Do đó ta không thể định nghĩa tích phân Itô như tích phân Stieltjes được. Năm 1941, nhà toán học K. Itô đã đưa ra một cách xây dựng tích phân ngẫu nhiên dựa theo nguyên tắc "ánh xạ đẳng cự". Tích phân này mang tên ông - Tích phân Itô.

Phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô thực chất được hiểu là phương trình tích phân Itô trong đó có một số hạng là tích phân Riemann, một số hạng là tích phân Itô. Trước khi trình bày một số kết quả nghiên cứu về tính ổn định và số mũ Lyapunov của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính, luận án dành Chương 1 để giới thiệu những khái niệm cơ bản liên quan đến phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô (xem [8], [11], [23], [24], [25]).

1.1 Những lớp quá trình ngẫu nhiên quan trọng

Cho $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ là không gian xác suất đầy đủ, $I \subset \mathbb{R}^+$ (thông thường $I = [0, T)$, $I = [0, T]$ với $0 < T \in \mathbb{R}$ hoặc $I = \mathbb{R}^+$). Trong luận án này ta xét $I = \mathbb{R}^+$.

Định nghĩa 1.1.1 *(Quá trình Gauss)*
Quá trình ngẫu nhiên

$$X = \{X(t) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \in I\}$$

được gọi là một quá trình Gauss (hay quá trình có phân phối chuẩn), nếu các phân phối hữu hạn chiều của nó là Gauss, tức là phân phối của vec tơ ngẫu nhiên $(X(t_1), X(t_2), ..., X(t_n))$ là phân phối Gauss đối với mọi $t_1, t_2, ..., t_n \in I$.

Định nghĩa 1.1.2 *(Quá trình dừng theo nghĩa hẹp)*
Quá trình ngẫu nhiên

$$X = \{X(t) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \in I\}$$

được gọi là một quá trình dừng theo nghĩa hẹp nếu với mọi dãy số thực hữu hạn $t_1, t_2, \ldots, t_n \in I$, với mọi số thực h thỏa mãn $t_1+h, t_2+h, \ldots, t_n+h \in I$ thì các véc tơ ngẫu nhiên

$$(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)) \text{ và } (X(t_1 + h), X(t_2 + h), \ldots, X(t_n + h))$$

có cùng phân phối.

Định nghĩa 1.1.3 *(Quá trình dừng theo nghĩa rộng)*
Quá trình ngẫu nhiên

$$X = \{X(t) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \in I\}$$

có phương sai hữu hạn được gọi là một quá trình dừng theo nghĩa rộng nếu
(i) Hàm trung bình là hằng số: $\mathbb{E}X(t) = m = const$ *với mọi* $t \in I$,
(ii) Hàm tương quan (hàm covarian) chỉ phụ thuộc vào hiệu số của thời gian, tức là:

$$K(t,s) = \mathbb{E}X(t)X(s) - m^2, \text{ chỉ phụ thuộc } t - s \text{ với mọi } t, s \in I.$$

Ta có thể chứng minh được rằng:
(i) Nếu X là quá trình có phương sai hữu hạn và dừng theo nghĩa hẹp thì dừng theo nghĩa rộng,
(ii) Nếu X là quá trình Gauss thì dừng theo nghĩa hẹp và dừng theo nghĩa rộng là tương đương.

Định nghĩa 1.1.4 *(Quá trình gia số độc lập) Quá trình ngẫu nhiên*

$$X = \{X(t) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \in I\}$$

được gọi là một quá trình gia số độc lập nếu các gia số của nó trên các khoảng thời gian rời nhau là các biến ngẫu nhiên độc lập, tức là đối với mỗi phân hoạch hữu hạn: $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, $t_k \in I$, $k = 0, 1, \ldots, n$, *các gia số*

$$X(t_0), X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})$$

là những biến ngẫu nhiên độc lập.

Định nghĩa 1.1.5 *(Quá trình Markov)*

Cho $(E, \mathcal{B})$ là không gian đo sao cho tất cả các tập gồm một điểm là đo được. Quá trình ngẫu nhiên

$$X = \{X(t) : \Omega \longrightarrow E, \quad t \in I\}$$

nhận giá trị trong E được gọi là một quá trình Markov nếu với mọi $A \in \mathcal{B}$, $0 \le s < t$, ta có

$$\mathbb{P}(X(t,\omega) \in A|\mathcal{N}_s) = \mathbb{P}(X(t,\omega) \in A|X(s,\omega)),$$

trong đó $\mathcal{N}_s$ là σ-đại số sinh bởi tất cả các tập có dạng

$$\{\omega :\ X(u,\omega) \in A\} \quad (u \le s, A \in \mathcal{B}).$$

Nhận xét:

- Quá trình gia số độc lập là một quá trình Markov.
- Tồn tại một hàm bốn biến $P(s,x,t,A)$, trong đó $0 \le s \le t, x \in E, A \in \mathcal{B}$ thỏa mãn:

(i) cố định s,t,x, hàm tập $P(s,x,t,\centerdot) : \mathcal{B} \longrightarrow [0,1]$ là độ đo xác suất trên $(E,\mathcal{B})$,

(ii) cố định s,t,A, hàm số $P(s,\centerdot,t,A) : E \longrightarrow [0,1]$ là đo được đối với $\mathcal{B}$,

(iii) $P(s,x,s,A) = \delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{nếu} \quad x \in A \\ 0 & \text{nếu} \quad x \notin A, \end{cases}$

(iv) đối với mỗi s,t cho trước, $0 \le s \le t$ và $x \in E, A \in \mathcal{B}$, ta có

$$P(s,t,x,A) = \mathbb{P}(X(t) \in A|X(s) = x).$$

Hàm $P(s,x,t,A)$ được gọi là hàm chuyển (hay xác suất chuyển) của quá trình Markov. Với mọi $x \in E$, có thể trừ một tập N các giá trị của x

sao cho $\mathbb{P}(X(s) \in N) = 0$, hàm chuyển của quá trình Markov thỏa mãn phương trình Chapman-Kolmogorov:

$$P(s, x, t, A) = \int\limits_E P(s, x, u, dy) P(u, y, t, A).$$

Ngược lại nếu có một hàm chuyển thì ta có thể xây dựng được một quá trình Markov với phân phối ban đầu tùy ý. Trong nghiên cứu quá trình Markov hàm chuyển đóng một vai trò then chốt.

Định nghĩa 1.1.6 *(Martingale)*

Cho một lọc $\{\mathcal{F}_t, t \in I\}$ các σ-đại số con của $\mathcal{F}$. Quá trình ngẫu nhiên

$$X = \{X(t) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \in I\}$$

được gọi là một martingale đối với lọc $\{\mathcal{F}_t, t \in I\}$, viết là $\{X, \mathcal{F}_t, t \in I\}$ nếu:

(i) $\mathbb{E}|X(t)| < +\infty$ với mọi $t \in I$,

(ii) X thích nghi với $\{\mathcal{F}_t, t \in I\}$,

(iii) với mọi $0 \le s < t$, ta có đẳng thức

$$\mathbb{E}(X(t)|\mathcal{F}_s) = X(s) \ \textit{hầu chắc chắn.}$$

Tiếp theo ta trình bày định nghĩa chuyển động Brown (hay còn gọi là quá trình Wiener). Đây là mô hình toán học của chuyển động phấn hoa trong nước do nhà thực vật Robert Brown quan sát và mô tả từ những năm 1820. Đầu thế kỷ 20, Louis Bachelier (1900), Albert Eistein (1905) và Norbert Wiener là người đầu tiên đưa ra lý thuyết toán học của chuyển động Brown. N. Wiener là người đầu tiên đưa ra lý thuyết toán học chặt chẽ cho chuyển động Brown và chính vì vậy mà người ta gọi chuyển động Brown là quá trình Wiener.

Định nghĩa 1.1.7 *(Quá trình Wiener)*
Quá trình ngẫu nhiên

$$W = \{W(t) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \in I\}$$

được gọi là một quá trình Wiener nếu
(i) $W(0) = 0$,
(ii) W *là quá trình gia số độc lập,*
(iii) với mọi $0 \leq s < t$ *biến ngẫu nhiên* $W(t) - W(s)$ *có phân phối chuẩn với trung bình* 0 *và phương sai* $t - s$,
(iv) W *có quỹ đạo liên tục (hầu chắc chắn).*

Quá trình Wiener có phân phối hữu hạn chiều là phân phối Gauss nhiều chiều vì vậy quá trình Wiener là một quá trình Gauss. Quá trình Wiener là quá trình có gia số dừng và độc lập nên nó cũng là một quá trình Markov. Ta cũng có thể định nghĩa quá trình Wiener theo cách sau đây.

Định nghĩa 1.1.8 *Quá trình Wiener* $W = \{W(t) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, t \in I\}$ *là một quá trình Gauss với gia số dừng và độc lập thỏa mãn điều kiện*

$$\mathbb{E}W(t) = 0, \quad K(t, s) = K(t - s) = \mathbb{E}W(t)W(s) = min(s, t).$$

Định nghĩa của quá trình Wiener cho thấy hầu hết các quỹ đạo mẫu của nó là liên tục. Tuy nhiên quá trình Wiener là quá trình gia số độc lập, các gia số của nó trên các đoạn thẳng (thời gian) kề nhau là độc lập với nhau, không phụ thuộc vào độ dài đoạn thẳng, do đó hầu hết các quỹ đạo của nó không có biến phân giới nội trên mọi đoạn hữu hạn. Điều này dẫn đến một tính chất quan trọng là hầu hết các quỹ đạo của quá trình Wiener không đâu khả vi. Vì vậy tích phân Itô khác hẳn với tích phân Stieljes của giải tích cổ điển.

1.2 Tích phân Itô

Trước khi định nghĩa tích phân Itô ta xét một ví dụ điển hình của tích phân Itô.

1.2.1 Ví dụ

Xét tích phân $I = \int_0^t W(s)dW(s)$, trong đó $\{W(t), t \geq 0\}$ là quá trình Wiener.

Xét tổng Riemann-Stieljes

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} W(t_{i-1})[W(t_i) - W(t_{i-1})],$$

với

$$\tau_n : \quad 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$$

là một phân hoạch của đoạn $[0, t]$. Viết tổng S_n dưới dạng

$$S_n = \frac{1}{2}W^2(t) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[W(t_i) - W(t_{i-1})]^2 =: \frac{1}{2}W^2(t) - \frac{1}{2}Q_n(t).$$

Ta có thể chỉ ra được rằng với mỗi quỹ đạo mẫu cho trước của quá trình Wiener nếu chọn phân hoạch τ_n thích hợp thì dãy $Q_n(t)$ không hội tụ. Vì vậy ta không thể định nghĩa $I = \int_0^t W(s)dW(s)$ như tích phân Riemann-Stieljes. Tuy nhiên dãy S_n hội tụ trung bình bình phương tới $\frac{1}{2}[W^2(t) - t]$ nên ta có thể lấy giới hạn này làm giá trị của tích phân

$I = \int\limits_0^t W(s)dW(s)$. Sau này ta thấy nó chính là giá trị tích phân Itô:

$$I = \int\limits_0^t W(s)dW(s) = \frac{1}{2}[W^2(t) - t].$$

1.2.2 Định nghĩa tích phân Itô cho quá trình đơn giản

Cho quá trình Wiener $W = \{W(t), t \geq 0\}$. Lọc tự nhiên tương ứng với quá trình W là $\mathcal{F}_t = \sigma(W(s))_{0 \leq s \leq t}$, $t \geq 0$. Trước hết ta định nghĩa quá trình ngẫu nhiên đơn giản trên một đoạn hữu hạn cố định $[0, T]$.

Định nghĩa 1.2.1 *Một quá trình ngẫu nhiên $c = \{c(t),\, t \in [0, T]\}$ được gọi là đơn giản nếu các điều kiện sau thỏa mãn:*
(i) Tồn tại một phân hoạch

$$\tau_n : \quad 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T,$$

và một dãy biến ngẫu nhiên $\{Z_i,\, i = 1, 2, \ldots, n\}$ sao cho

$$c(t) = \begin{cases} Z_n & \text{nếu} \quad t = T, \\ Z_i & \text{nếu} \quad t_{i-1} \leq t < t_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

(ii) Dãy $\{Z_i,\, i = 1, 2, \ldots, n\}$ là thích nghi với lọc $\left\{\mathcal{F}_{t_{i-1}},\, i = 1, 2, \ldots, n\right\}$, tức là Z_i là hàm số đo được của quá trình Wiener tới thời điểm t_{i-1} và thỏa mãn $\mathbb{E}Z_i < +\infty$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$.

Định nghĩa 1.2.2 *Tích phân Itô của quá trình ngẫu nhiên đơn giản c trên đoạn $[0, T]$ được định nghĩa bởi công thức*

$$\int\limits_0^T c(s)dW(s) := \sum_{i=1}^n c(t_{i-1})[W(t_i) - W(t_{i-1})]$$

Tích phân Itô của quá trình ngẫu nhiên đơn giản có các tính chất sau:
1. Quá trình ngẫu nhiên $I_t(c) = \int_0^t c(s)dW(s)$, $t \in [0,T]$ là một martingale đối với lọc tự nhiên của quá trình Wiener $\{\mathcal{F}_t,\, t \in [0,T]\}$.
2. Tích phân Itô có kỳ vọng bằng 0.
3. Tích phân Itô có tính chất đẳng chuẩn, tức là

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t c(s)dW(s)\right]^2 = \int_0^t \mathbb{E}c^2(s)ds, \quad t \in [0,T].$$

4. Tích phân Itô có tính chất tuyến tính, tức là với bất kỳ các hằng số k_1, k_2 và các quá trình đơn giản $c^{(1)}, c^{(2)}$ trên $[0,T]$, với mọi $t \in [0,T]$ ta có

$$\int_0^t [k_1 c^{(1)}(s) + k_2 c^{(2)}(s)]dW(s) = k_1 \int_0^t c^{(1)}(s)dW(s) + k_2 \int_0^t c^{(2)}(s)dW(s).$$

5. Tích phân Itô có tính chất cộng tính, tức là với mọi $t \in [0,T]$ ta có

$$\int_0^T c(s)dW(s) = \int_0^t c(s)dW(s) + \int_t^T c(s)dW(s).$$

6. Quá trình ngẫu nhiên $I_t(c)$ có quỹ đạo mẫu liên tục.

1.2.3 Định nghĩa tích phân Itô

Ta sẽ luôn đặt giả thiết (H) sau đây lên các quá trình ngẫu nhiên X là các quá trình mà ta lấy tích phân Itô:
(i) X thích nghi đối với quá trình Wiener trên $[0,T]$, tức là $X(t)$ thích nghi với lọc tự nhiên sinh bởi $\{W(s),\, 0 \le s \le T\}$.

(ii) Tích phân $\int\limits_0^T \mathbb{E}X^2(s)ds$ hữu hạn, tức là $X(t,\omega)$ là bình phương khả tích, $X(t,\omega) \in L^2(\Omega \times [0,T], d\mathbb{P} \times dt)$.

Nhận xét:

. Quá trình ngẫu nhiên đơn giản, hàm số tất định bình phương khả tích đều thỏa mãn giả thiết (H).

. Nếu quá trình ngẫu nhiên X thỏa mãn giả thiết (H) thì tồn tại một dãy các quá trình ngẫu nhiên đơn giản $\{c^{(n)}, n = 1, 2, \ldots\}$ sao cho

$$\int\limits_0^T \mathbb{E}[X(s) - c^{(n)}(s)]^2 ds \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

. Tồn tại một quá trình bình phương khả tích $I_t(X)$ trên $[0,T]$ là giới hạn trung bình bình phương của các tích phân của các quá trình ngẫu nhiên đơn giản $\{c^{(n)}, n = 1, 2, \ldots\}$, tức là

$$\mathbb{E} \sup_{0\le t\le T} [I_t(X) - I_t(c^{(n)})]^2 \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Lưu ý, giới hạn trên không phụ thuộc vào việc chọn dãy các quá trình ngẫu nhiên đơn giản $\{c^{(n)}, n = 1, 2, \ldots\}$.

Định nghĩa 1.2.3 *Giới hạn trung bình bình phương $I_t(X)$ được gọi là tích phân Itô của quá trình ngẫu nhiên X và được ký hiệu*

$$I_t(X) = \int\limits_0^t X(s)dW(s), \quad t \in [0,T].$$

Tích phân Itô của quá trình ngẫu nhiên X thỏa mãn giả thiết (H) có các tính chất sau:

1. Quá trình ngẫu nhiên $I_t(X) = \int\limits_0^t X(s)dW(s)$, $t \in [0,T]$ là một martingale đối với lọc tự nhiên của quá trình Wiener $\{\mathcal{F}_t,\, t \in [0,T]\}$.

2. Tích phân Itô có kỳ vọng bằng 0.

3. Tích phân Itô có tính chất đẳng chuẩn:

$$\mathbb{E}\left[\int\limits_0^t X(s)dW(s)\right]^2 = \int\limits_0^t \mathbb{E}X^2(s)ds, \quad t \in [0,T],$$

tức là $I_t(\centerdot) : L^2(\Omega \times [0,t]) \longrightarrow L^2(\Omega)$ bảo toàn chuẩn L^2.

4. Tích phân Itô có tính chất tuyến tính, tức là với bất kỳ các hằng số k_1, k_2 và các quá trình ngẫu nhiên $X^{(1)}, X^{(2)}$ thỏa mãn giả thiết (H) trên $[0,T]$, với mọi $t \in [0,T]$ ta có

$$\int\limits_0^t [k_1 X^{(1)}(s) + k_2 X^{(2)}(s)]dW(s) = k_1 \int\limits_0^t X^{(1)}(s)dW(s) + k_2 \int\limits_0^t X^{(2)}(s)dW(s).$$

5. Tích phân Itô có tính chất cộng tính, tức là với mọi $t \in [0,T]$ ta có

$$\int\limits_0^T X(s)dW(s) = \int\limits_0^t X(s)dW(s) + \int\limits_t^T X(s)dW(s).$$

6. Quá trình ngẫu nhiên $I_t(X)$ có quỹ đạo mẫu liên tục.

1.3 Phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô

Trong không gian xác suất đầy đủ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ cho họ các σ-đại số con đầy đủ $\{\mathcal{F}_t, t \in [0,T]\}$ của $\mathcal{F}$; $\left\{W^1(t), W^2(t), \ldots, W^m(t),\, t \in [0,T]\right\}$ là các quá trình Wiener độc lập với nhau và thỏa mãn với mọi $r = 1, 2 \ldots, m$

thì $\{W^r(t), \mathcal{F}_t,\, t \in [0,T]\}$ lập thành martingale. Thông thường

$$\mathcal{F}_t = \sigma(W^1(s), W^2(s), \ldots, W^m(s))_{0 \le s \le t}.$$

Định nghĩa 1.3.1 *Phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô được viết dưới một trong hai dạng sau*

$$\begin{aligned} &dX(t) = a(t, X(t))dt + \sum_{r=1}^{m} b_r(t, X(t))dW^r(t), \\ &X(t_0) = x_0(\omega), \end{aligned} \tag{1.1}$$

hoặc

$$X(t) = x_0(\omega) + \int_{t_0}^{t} a(s, X(s))ds + \sum_{r=1}^{m} \int_{t_0}^{t} b_r(s, X(s))dW^r(s), \tag{1.2}$$

trong đó

- $0 \le t_0 \le t \le T < +\infty$,
- *Biến ngẫu nhiên n-chiều* $x_0(\omega) = (x_0^1(\omega), x_0^2(\omega), \ldots, x_0^n(\omega))$ *được gọi là giá trị ban đầu tại điểm* t_0,
- $X = \{X(t,\omega) = (X_1(t,\omega), X_2(t,\omega), \ldots, X_n(t,\omega)),\, t \in [t_0, T]\}$ *là quá trình ngẫu nhiên n-chiều thỏa mãn* $X(t_0, \omega) = x_0(\omega)$,
- $a(t,x), b_r(t,x) : [0,T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $r = 1, 2 \ldots m$ *là các véc tơ hàm n-chiều đo được. Với mỗi* (t,x) *giả thiết các hàm* $a(t,x), b_r(t,x)$ *là độc lập với* $\omega \in \Omega$, *tức là tham số ngẫu nhiên* ω *chỉ xuất hiện gián tiếp trong hệ số của phương trình (1.1) hay (1.2) dưới dạng* $a(t, X(t,\omega)), b_r(t, X(t,\omega))$.

Định nghĩa 1.3.2 *Nghiệm của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô (1.1) là quá trình ngẫu nhiên n-chiều*

$$X = \{X(t,\omega) = (X_1(t,\omega), X_2(t,\omega), \ldots, X_n(t,\omega)),\, t \in [t_0, T]\}$$

thỏa mãn các tính chất sau:

(i) $X_i(t,\omega)$ *thích nghi với* σ*-đại số* $\mathcal{F}_t^{x_0(\omega)} = \sigma(\mathcal{F}_t, x_0(\omega))$ *với mọi* $i = 1, 2, \ldots, n$ *và* $t \in [t_0, T]$

(ii) Các hàm $\overline{a}(t,\omega) = a(t, X(t,\omega))$, $\overline{b}_r(t,\omega) = b_r(t, X(t,\omega))$ *với mọi* $r = 1, 2, \ldots, m$ *thỏa mãn*

$$\mathbb{P}\Big(\{\omega : \int_0^T \|\overline{a}(t,\omega)\|\, dt < +\infty\}\Big) = 1,$$

$$\mathbb{P}\Big(\{\omega : \int_0^T \left\|\overline{b}_r(t,\omega)\right\|^2 dt < +\infty\}\Big) = 1.$$

(iii) Đẳng thức (1.2) được thỏa mãn với mọi $t \in [0, T]$ *hầu chắc chắn.*

Nghiệm đã định nghĩa ở trên được gọi là nghiệm mạnh, ở đó không gian xác suất đầy đủ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, họ các σ-đại số con đầy đủ $\{\mathcal{F}_t,\ t \in [0,T]\}$ của $\mathcal{F}$, các quá trình Wiener $\{W^r(t),\ t \in [0,T]\}$ là quá trình sao cho $\{W^r(t), \mathcal{F}_t,\ t \in [0,T]\}$ lập thành martingale với mọi $r = 1, 2, \ldots, m$ đã được cho trước. Khi các yếu tố này không được cho trước thì nghiệm được gọi là nghiệm yếu.

Nghiệm mạnh (nếu tồn tại) là nghiệm yếu. Điều ngược lại không đúng. Tính duy nhất của nghiệm yếu được hiểu theo nghĩa có cùng phân phối, tính duy nhất của nghiệm mạnh được hiểu theo nghĩa có cùng quỹ đạo.

Tương tự như trong lý thuyết phương trình vi phân cổ điển ta cũng có định lý về sự tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình (1.1).

Định lý 1.3.3 *Cho phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô (1.1)*

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + \sum_{r=1}^{m} b_r(t, X(t))dW^r(t),$$
$$X(t_0) = x_0(\omega),\ 0 \le t_0 \le t \le T < +\infty.$$

Giả sử $a(t,x), b_r(t,x) : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $r = 1, 2, \ldots, m$ *là các hàm liên tục theo hai biến* (t, x) *và tồn tại một hằng số* K *sao cho với mọi* $t \in [t_0, T]$ *và với mọi* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *ta có:*

$$\|a(t,x) - a(t,y)\| + \sum_{r=1}^{m} \|b_r(t,x) - b_r(t,y)\| \le K \|x - y\|,$$

$$\|a(t,x)\| + \sum_{r=1}^{m} \|b_r(t,x)\| \le K(1 + \|x\|).$$

Khi đó với mọi biến ngẫu nhiên n-chiều $x_0(\omega)$ *đo được đối với* σ*-đại số* $\mathcal{F}_{t_0}$*, có* $\mathbb{E}[x_0(\omega)]^2 < +\infty$ *và độc lập với các quá trình* $\{W^r(t), t \in [t_0, T]\}$ $(r = 1, 2, \ldots, m)$ *thì phương trình (1.1) có duy nhất một nghiệm là quá trình ngẫu nhiên*

$$X = \{X(t,\omega) = (X_1(t,\omega), X_2(t,\omega), \ldots, X_n(t,\omega)),\ t \in [t_0, T]\}$$

thỏa mãn điều kiện sau đây:

(i) X *có các quỹ đạo mẫu liên tục,*

(ii) $X_i(t,\omega)$ *thích nghi với* σ*-đại số* $\mathcal{F}_t^{x_0(\omega)} = \sigma(\mathcal{F}_t, x_0(\omega))$ *với mọi* $i = 1, 2, \ldots, n$ *và* $t \in [t_0, T]$,

(iii) X *là một quá trình Markov,*

(iv) với mọi $t \in [t_0, T]$, *với mọi* $i = 1, 2, \ldots, n$ *thì*

$$\mathbb{E}\left[\int_{t_0}^{t} |X_i(s,\omega)|^2 ds\right] < +\infty.$$

Trong luận án này chúng ta xét điều kiện ban đầu là tất định, tức là $x_0(\omega) \equiv x_0 \in \mathbb{R}^n$ và $t \in \mathbb{R}^+$. Theo Kunita [25, trang 114], phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô (1.1), thỏa mãn Định lý 1.3.3 sinh ra một dòng ngẫu nhiên hai tham số $\Phi_{s,t}(\omega)$ các đồng phôi của $\mathbb{R}^n$ và nó được định nghĩa như sau.

Định nghĩa 1.3.4 *Một dòng ngẫu nhiên hai tham số các đồng phôi của $\mathbb{R}^n$ là một họ ánh xạ liên tục $\{\Phi_{s,t}(\omega) : \omega \in \Omega,\ \ s,t \in \mathbb{R}^+\}$ thỏa mãn các điều kiện sau đây với mọi $\omega \in \Omega' \subset \Omega$, $\mathbb{P}(\Omega') = 1$.*

(i) $\Phi_{s,t}(\omega) = \Phi_{u,t}(\omega) \circ \Phi_{s,u}(\omega)$ với mọi $s, t, u \in \mathbb{R}^+$;

(ii) $\Phi_{s,s}(\omega)$ là ánh xạ đồng nhất với mọi $s \in \mathbb{R}^+$;

(iii) Ánh xạ $\Phi_{s,t}(\omega) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ là đồng phôi với mọi $s, t \in \mathbb{R}^+$;

Hơn nữa, nếu $\Phi_{s,t}(\omega)$ thỏa mãn thêm điều kiện (iv) dưới đây thì nó được gọi là dòng ngẫu nhiên hai tham số các vi phôi của $\mathbb{R}^n$.

(iv) $\Phi_{s,t}(\omega)x$ là khả vi theo $x \in \mathbb{R}^n$ với mọi $s, t \in \mathbb{R}^+$ và $\Phi_{s,t}(\omega)x$ cùng với đạo hàm $\frac{\partial}{\partial x}(\Phi_{s,t}(\omega)x)$ là các ánh xạ liên tục theo s, t, x.

Mỗi nghiệm của phương trình (1.1) thỏa mãn điều kiện ban đầu $X(t_0, \omega) = x_0$ được viết dưới dạng $X(t, \omega) = \Phi_{t_0,t}(\omega)x_0$.

Đối với phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính có dạng:

$$\begin{aligned} dX(t) &= F_0(t)X(t)dt + \sum_{r=1}^{m} F_r(t)X(t)dW^r(t), \\ X(t_0) &= x_0, \end{aligned} \tag{1.3}$$

trong đó $F_r(t) = (f_{ir}^j(t))_{n\times n}$ $(r = \overline{0,m})$ là các ma trận hàm, liên tục, bị chặn bởi một hằng số K, sẽ sinh ra dòng ngẫu nhiên hai tham số các toán tử tuyến tính của $\mathbb{R}^n$, tức là một dòng ngẫu nhiên hai tham số

$\Phi_{s,t}(\omega)$ các vi phôi của $\mathbb{R}^n$ cộng thêm điều kiện $\Phi_{s,t}(\omega)$ là toán tử tuyến tính.

Với bất kỳ $x \in \mathbb{R}^n$, $s, t \in \mathbb{R}^+$ và tập Borel A của $\mathbb{R}^n$ thì nghiệm $\Phi_{s,t}(\omega)x$ của phương trình (1.3) là quá trình Markov có hàm chuyển là

$$P(s,x,t,A) = \mathbb{P}\Big(\Phi_{s,t}(\omega)x \in A | \Phi_{s,s}(\omega)x = x\Big).$$

Theo Khasminskii [23, trang 96], hàm chuyển có mật độ $p(s,x,t,y)$ và mật độ của nó chính là nghiệm cơ bản của phương trình vi phân đạo hàm riêng parabolic:

$$Lu(s,x) = 0,$$

trong đó

$$\begin{aligned} Lu(s,x) &\equiv \frac{\partial u}{\partial s}(s,x) + \Big\langle F_0(s)x, \frac{\partial u}{\partial x}(s,x)\Big\rangle + \frac{1}{2}\Big\langle D(s,x)\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}\Big\rangle(s,x) \\ &\equiv \frac{\partial u}{\partial s}(s,x) + \sum_{i,j=1}^{n} f_{i0}^{j}(s)x_j \frac{\partial u}{\partial x_j}(s,x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} d_{ij}(s,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(s,x), \\ D(s,x) &= \big(d_{ij}(s,x)\big)_{n\times n} \text{ với } d_{ij}(s,x) = \sum_{r=1}^{m}\Big(\sum_{h,l=1}^{n} f_{ir}^{h}(s) f_{jr}^{l}(s) x_h x_l\Big), \\ u(s,x) &= p(s,x,t,y) \text{ với } t, y \text{ cố định.} \end{aligned}$$

Ta có thể tìm hiểu những đánh giá của mật độ hàm chuyển của quá trình nghiệm phương trình (1.3) chính là đánh giá nghiệm cơ bản của phương trình vi phân đạo hàm riêng parabolic trong các chuyên khảo Friedman [21] và Ladyzenskaja *et.al* [26].

Chương 2

Sự ổn định nghiệm của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô

Hầu hết các phương trình vi phân tất định cũng như ngẫu nhiên đều không thể giải được nghiệm chính xác. Tuy nhiên từ các hàm hệ số của phương trình chúng ta có thể suy luận được các thông tin, thường là định tính, về dáng điệu của nghiệm. Thực tế người ta quan tâm đến dáng điệu tiệm cận, độ nhạy cảm của nghiệm đối với sự thay đổi nhỏ của điều kiện ban đầu hoặc tham số của phương trình. Từ định lý về sự tồn tại và duy nhất nghiệm chúng ta biết rằng nghiệm của phương trình vi phân phụ thuộc liên tục vào giá trị ban đầu, ít nhất trên một khoảng thời gian hữu hạn. Mở rộng ý tưởng này trên khoảng thời gian vô hạn dẫn đến khái niệm ổn định nghiệm của phương trình vi phân.

Thực tế khi nghiên cứu các bài toán ổn định dưới tác động của nhiễu ngẫu nhiên của các tham số người ta thường giả thiết nhiễu (noise) có khoảng nhớ ngắn (short memory interval) hoặc một cách lý tưởng là không nhớ (memory less). Tiếng ồn trắng là một trong những loại nhiễu lý tưởng đó. Việc nghiên cứu tính ổn định nghiệm của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tương đương với nghiên cứu ổn định của phương trình nhiễu bởi tiếng ồn trắng.

Từ những khái niệm ổn định, ổn định tiệm cận, ổn định mũ, ổn định đều, ổn định toàn cục trong lý thuyết ổn định của phương trình vi phân tất định, kết hợp với những khái niệm hội tụ của dãy biến ngẫu nhiên trong lý thuyết xác suất người ta xây dựng các khái niệm ổn định ngẫu nhiên như: ổn định theo xác suất, ổn định yếu theo xác suất, ổn định đều theo xác suất, ổn định toàn cục theo xác suất, ổn định hầu chắc chắn. Đối với ổn định tiệm cận ta cũng có các khái niệm theo các nghĩa trên. Ngoài ra người ta còn đưa ra các khái niệm p-ổn định, p-ổn định tiệm cận, ổn định p-mũ (với $p > 0$). Những khái niệm ổn định ngẫu nhiên này đã được Khasminskii trình bày chi tiết trong cuốn sách "Ổn định ngẫu nhiên của phương trình vi phân" (xem [23]). Ông cũng đã chỉ ra và tổng kết được nhiều kết quả về các loại ổn định của phương trình vi phân ngẫu nhiên nói chung và phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô nói riêng.

Chương này của luận án sẽ nhắc lại các định nghĩa ổn định ngẫu nhiên của nghiệm tầm thường của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô (1.1) đã có trong Khasminskii [23] và trình bày các kết quả nghiên cứu của chúng tôi về mối liên hệ giữa các loại ổn định ngẫu nhiên của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính (1.3), cụ thể:

- Tính ổn định hầu chắc chắn không phụ thuộc vào thời điểm ban đầu.
- Tính ổn định theo xác suất tương đương với tính ổn định hầu chắc chắn.

. Đối với phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính 1-chiều hệ số hằng thỏa mãn điều kiện không suy biến thì tính ổn định theo xác suất và tính ổn định yếu theo xác suất là tương đương với nhau.

2.1 Các định nghĩa ổn định của nghiệm tầm thường của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô

Xét phương trình (1.1)

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + \sum_{r=1}^{m} b_r(t, X(t))dW^r(t),$$
$$a(t, 0) \equiv 0,\ b_r(t, 0) \equiv 0,\ 1 \leq r \leq m.$$

Giả thiết rằng điều kiện tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình (1.1) nêu ra trong Định lý 1.3.3 được thỏa mãn. Dễ dàng thấy rằng $X(t, \omega) \equiv 0$ là nghiệm tầm thường của phương trình (1.1).

2.1.1 Ổn định theo xác suất

Định nghĩa 2.1.1 *(Ổn định yếu theo xác suất)*
Nghiệm tầm thường $X(t, \omega) \equiv 0$ của phương trình (1.1) được gọi là ổn định yếu theo xác suất với $t \geq t_0$ (hay trên $[t_0, \infty)$) nếu với mọi $\epsilon > 0$ và $\delta > 0$ đều tồn tại một số $r > 0$ sao cho với mọi $t \geq t_0$ và $\|x_0\| < r$, ta có

$$\mathbb{P}\Big(\{\omega : \|\Phi_{t_0,t}(\omega)\, x_0\| \geq \epsilon\}\Big) < \delta. \tag{2.1}$$

Định nghĩa 2.1.2 *(Ổn định theo xác suất)*
Nghiệm tầm thường $X(t, \omega) \equiv 0$ của phương trình (1.1) được gọi là ổn

định theo xác suất với $t \geq 0$ *nếu với mọi* $t_0 \geq 0$ *và* $\epsilon > 0$ *ta có*

$$\lim_{x_0 \to 0} \mathbb{P}\Bigg(\{\omega\ : \sup_{t > t_0} \|\Phi_{t_0,t}(\omega)\, x_0\| > \epsilon\}\Bigg) = 0. \tag{2.2}$$

Định nghĩa 2.1.3 *(Ổn định toàn cục theo xác suất)*
Nghiệm tầm thường $X(t,\omega) \equiv 0$ *của phương trình (1.1) được gọi là ổn định toàn cục theo xác suất với* $t \geq t_0$ *nếu*
(i) $X(t,\omega) \equiv 0$ *ổn định yếu theo xác suất với* $t \geq t_0$*,*
(ii) với mọi $x_0 \in \mathbb{R}^n$*,* $\epsilon > 0$ *và* $\delta > 0$*, tồn tại một số* $T(x_0,\epsilon,\delta) \geq t_0$ *sao cho với mọi* $t > T(x_0,\epsilon,\delta)$ *thì*

$$\mathbb{P}\Bigg(\{\omega\ :\ \|\Phi_{t_0,t}(\omega)\, x_0\| > \epsilon\}\Bigg) < \delta.$$

Định nghĩa 2.1.4 *(Ổn định đều theo xác suất)*
Nghiệm tầm thường $X(t,\omega) \equiv 0$ *của phương trình (1.1) được gọi là ổn định đều theo xác suất với* $t > 0$ *nếu với mọi* $\epsilon > 0$ *ta có*

$$\lim_{x_0 \to 0} \mathbb{P}\Bigg(\{\omega\ : \sup_{t > t_0} \|\Phi_{t_0,t}(\omega)\, x_0\| > \epsilon\}\Bigg) = 0$$

đều theo $t_0 \geq 0$*.*

2.1.2 Ổn định tiệm cận theo xác suất

Định nghĩa 2.1.5 *(Ổn định tiệm cận yếu theo xác suất)*
Nghiệm tầm thường $X(t,\omega) \equiv 0$ *của phương trình (1.1) được gọi là ổn định tiệm cận yếu theo xác suất với* $t \geq t_0$ *nếu*
(i) $X(t,\omega) \equiv 0$ *ổn định yếu theo xác suất với* $t \geq t_0$*,*
(ii) với mọi $\epsilon > 0$*, tồn tại* $r(\epsilon) > 0$ *sao cho với mọi* $\|x_0\| < r(\epsilon)$ *thì*

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbb{P}\Bigg(\{\omega\ :\ \|\Phi_{t_0,t}(\omega)\, x_0\| > \epsilon\}\Bigg) = 0.$$

Định nghĩa 2.1.6 *(Ổn định tiệm cận theo xác suất)*

Nghiệm tầm thường $X(t, \omega) \equiv 0$ của phương trình (1.1) được gọi là ổn định tiệm cận theo xác suất với $t \geq t_0$ nếu

$$X(t, \omega) \equiv 0 \text{ là ổn định theo xác suất với } t \geq t_0 \text{ và} \tag{2.3}$$

$$\lim_{x_0 \to 0} \mathbb{P}\Big(\{\lim_{t \to +\infty} \Phi_{t_0,t}(\omega)\, x_0 = 0\}\Big) = 1. \tag{2.4}$$

Định nghĩa 2.1.7 *(Ổn định tiệm cận toàn cục theo xác suất)*

Nghiệm tầm thường $X(t, \omega) \equiv 0$ của phương trình (1.1) được gọi là ổn định tiệm cận toàn cục theo xác suất với $t \geq t_0$ nếu

$$X(t, \omega) \equiv 0 \text{ ổn định tiệm cận yếu theo xác suất với } t \geq t_0 \text{ và} \tag{2.5}$$

$$\text{với mọi } x_0 \in \mathbb{R}^n,\ \epsilon > 0 : \lim_{t \to +\infty} \mathbb{P}\Big(\{\omega : \|\Phi_{t_0,t}(\omega)\, x_0\| > \epsilon\}\Big) = 0. \tag{2.6}$$

2.1.3 p-ổn định

Cho p là số thực, dương.

Định nghĩa 2.1.8 *(p-ổn định yếu)*

Nghiệm tầm thường $X(t, \omega) \equiv 0$ của phương trình (1.1) được gọi là p-ổn định yếu với $t \geq t_0$ nếu với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại một số thực $r(\epsilon) > 0$ sao cho với mọi $\|x_0\| < r(\epsilon)$ và $t \geq t_0$ ta có

$$\mathbb{E}\, \|\Phi_{t_0,t}(\omega) x_0\|^p < \epsilon.$$

Định nghĩa 2.1.9 *(p-ổn định)*

Nghiệm tầm thường $X(t, \omega) \equiv 0$ của phương trình (1.1) được gọi là p-ổn định với $t \geq t_0$ nếu

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{\|x_0\| < \delta, t \geq t_0} \mathbb{E}\, \|\Phi_{t_0,t}(\omega) x_0\|^p = 0.$$

Định nghĩa 2.1.10 *(p-ổn định tiệm cận)*

Nghiệm tầm thường $X(t,\omega) \equiv 0$ *của phương trình (1.1) được gọi là p-ổn định tiệm cận với* $t \geq t_0$ *nếu* $X(t,\omega) \equiv 0$ *là p-ổn định với* $t \geq t_0$ *và*

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbb{E} \left\| \Phi_{t_0,t}(\omega) x_0 \right\|^p = 0.$$

Định nghĩa 2.1.11 *(p-ổn định toàn cục)*

Nghiệm tầm thường $X(t,\omega) \equiv 0$ *của phương trình (1.1) được gọi là p-ổn định toàn cục với* $t \geq t_0$ *nếu*

(i) $X(t,\omega) \equiv 0$ *là p-ổn định yếu với* $t \geq t_0$,

(ii) với mọi $\epsilon > 0$, *với mọi* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, *tồn tại* $T(\epsilon, x_0) \geq t_0$ *sao cho với mọi* $t > T(\epsilon, x_0)$ *thì*

$$\mathbb{E} \left\| \Phi_{t_0,t}(\omega) x_0 \right\|^p < \epsilon.$$

Định nghĩa 2.1.12 *(p-ổn định mũ)*

Nghiệm tầm thường $X(t,\omega) \equiv 0$ *của phương trình (1.1) được gọi là p-ổn định mũ với* $t \geq t_0$ *nếu tồn tại các hằng số* $A > 0$ *và* $\alpha > 0$ *sao cho với mọi* $t \geq t_0$ *ta có*

$$\mathbb{E} \left\| \Phi_{t_0,t}(\omega) x_0 \right\|^p \leq A \left\| x_0 \right\|^p e^{-\alpha(t-t_0)}.$$

Nếu $p = 1$ thì ta gọi là ổn định trung bình, nếu $p = 2$ thì ta gọi là ổn định trung bình bình phương.

Ta cũng có thể định nghĩa nghiệm tầm thường $X(t,\omega) \equiv 0$ của phương trình (1.1) ổn định hầu chắc chắn, ổn định tiệm cận hầu chắc chắn, p-ổn định mũ hầu chắc chắn, tức là tập các quỹ đạo có các tính chất ổn định tương ứng có xác xuất bằng 1. Dưới đây ta chỉ nhắc lại định nghĩa ổn định hầu chắc chắn.

Định nghĩa 2.1.13 *(Ổn định hầu chắc chắn)*
Nghiệm tầm thường $X(t,\omega) \equiv 0$ của phương trình (1.1) được gọi là ổn định hầu chắc chắn với $t \geqslant t_0$ nếu tồn tại tập $\Omega' \subset \Omega$, $\mathbb{P}(\Omega') = 1$ sao cho với mọi $\omega \in \Omega'$ thì nghiệm $X(t,\omega) \equiv 0$ ổn định (tất định) với $t \geqslant t_0$.

2.2 Mối liên hệ giữa các loại ổn định của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính

Trước tiên chúng tôi chứng minh một mối liên hệ được Khasminskii chỉ ra trong cuốn "Ổn định ngẫu nhiên của phương trình vi phân" [23, trang 194].

Mệnh đề 2.2.1 *Nghiệm tầm thường $X(t,\omega) \equiv 0$ của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính (1.3) ổn định tiệm cận theo xác suất thì ổn định tiệm cận toàn cục theo xác suất.*

Chứng minh. Giả sử nghiệm $X(t) \equiv 0$ của phương trình (1.3) ổn định tiệm cận theo xác suất ta phải chỉ ra nó ổn định tiệm cận toàn cục theo xác suất. Vì tính ổn định theo xác suất suy ra tính ổn định yếu theo xác suất nên ta chỉ cần chứng minh điều kiện (2.6) được thỏa mãn. Chú ý rằng (2.6) tương đương với mệnh đề sau:
Với mọi $\epsilon > 0, \delta > 0$ và $x_0 \in \mathbb{R}^n$, tồn tại $T(\epsilon,\delta,x_0)$ sao cho với mọi $t > T(\epsilon,\delta,x_0)$ ta có

$$\mathbb{P}\Big(\{\omega : \|\Phi_{t_0,t}(\omega)\, x_0\| > \epsilon\}\Big) < \delta. \tag{2.7}$$

Cho trước x_0, T, với mỗi $t > T$ ta có

$$\begin{aligned}\{\,\omega:\ \|\Phi_{t_0,t}(\omega)x_0\| > \epsilon\} \ &\subset\ \{\,\omega:\ \|\Phi_{t_0,t}(\omega)x_0\| \geqslant \epsilon\}\\ &\subset\ \left\{\omega:\ \sup_{t>T}\|\Phi_{t_0,t}(\omega)x_0\| \geqslant \epsilon\right\}.\end{aligned}$$

Vì nghiệm $X(t) \equiv 0$ của phương trình (1.3) ổn định tiệm cận theo xác suất nên với mọi $\epsilon > 0, \delta > 0$, sẽ có một số $r(\delta) > 0$ sao cho với mọi $x_0 \in \mathbb{R}^n$ thỏa mãn $\|x_0\| < r(\delta)$ đều tồn tại $T(\epsilon, \delta, x_0)$ để với mọi $t > T(\epsilon, \delta, x_0)$, ta có

$$\mathbb{P}\Big(\{\omega : \|\Phi_{t_0,t}(\omega)x_0\| > \epsilon\}\Big) \le \mathbb{P}\Big(\{\omega : \sup_{t>T(\epsilon,\delta,x_0)} \|\Phi_{t_0,t}(\omega)x_0\| \ge \epsilon\}\Big) < \delta. \qquad (2.8)$$

Suy ra với $\epsilon > 0,\ \delta > 0$ cho trước thì (2.7) đúng với mọi $x_0 \in \mathbb{R}^n$ thỏa mãn $\|x_0\| < r(\delta)$. Với $x_1 \in \mathbb{R}^n$ tùy ý thỏa mãn $\|x_1\| \geqslant r(\delta)$, đặt $x^* = \frac{r(\delta).x_1}{\|x_1\|+r(\delta)}$, ta có $\|x^*\| = r(\delta)\frac{\|x_1\|}{\|x_1\|+r(\delta)} < r(\delta)$. Với $\epsilon > 0$ cho trước, chọn $\epsilon_1 = \frac{\epsilon.r}{\|x_1\|+r} > 0$, theo (2.8) sẽ tồn tại $0 < T(\epsilon, \delta, x^*) =: T(\epsilon_1)$ sao cho

$$\mathbb{P}\Big(\{\omega : \sup_{t>T(\epsilon_1)} \|\Phi_{t_0,t}(\omega)\, x^*\| \geqslant \epsilon_1\}\Big) < \delta.$$

Ta có

$$\begin{aligned}&\left\{\omega : \sup_{t>T(\epsilon_1)} \|\Phi_{t_0,t}(\omega)x^*\| \geqslant \epsilon_1\right\}\\
&\qquad = \left\{\omega : \sup_{t>T(\epsilon_1)} \left\|\Phi_{t_0,t}(\omega)\frac{r(\delta).x_1}{\|x_1\|+r(\delta)}\right\| \geqslant \frac{\epsilon.r(\delta)}{\|x_1\|+r(\delta)}\right\}\\
&\qquad = \left\{\omega : \sup_{t>T(\epsilon_1)} \frac{r(\delta)}{\|x_1\|+r(\delta)}\|\Phi_{t_0,t}(\omega)x_1\| \geqslant \frac{\epsilon.r(\delta)}{\|x_1\|+r(\delta)}\right\}\\
&\qquad = \left\{\omega : \sup_{t>T(\epsilon_1)} \|\Phi_{t_0,t}(\omega)\, x_1\| \geqslant \epsilon\right\}.\end{aligned}$$

Do đó, với mọi $\epsilon > 0, \delta > 0$, với bất kỳ $x_1 \in \mathbb{R}^n$ thỏa mãn $\|x_1\| \geqslant r(\delta)$ sẽ tồn tại $T(\epsilon, \delta, x_1) := T(\epsilon_1)$ sao cho với $t > T(\epsilon, \delta, x_1)$ ta có

$$\mathbb{P}\Big(\{\,\omega :\ \|\Phi_{t_0,t}(\omega)x_1\| > \epsilon\}\Big) \leqslant \mathbb{P}\Big(\{\,\omega : \sup_{t>T(\epsilon,\delta,x_1)} \|\Phi_{t_0,t}(\omega)x_1\| \geqslant \epsilon\}\Big) < \delta.$$

Vậy ta có được (2.7), tức là mệnh đề được chứng minh. □

Như chúng ta đã biết đối với phương trình vi phân tất định tính ổn định của nghiệm không phụ thuộc vào thời điểm ban đầu, tức là nếu nghiệm ổn định tính từ thời điểm $t_0 \in \mathbb{R}^+$ nào đó thì cũng ổn định tính từ thời điểm $t_0' \in \mathbb{R}^+$. Đối với phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính (1.3) chúng tôi cũng chứng minh rằng tính ổn định hầu chắc chắn của nghiệm tầm thường không phụ thuộc vào thời điểm ban đầu.

Định lý 2.2.2 *Cho trước hai số thực tùy ý $t_0, t^* \in \mathbb{R}^+$. Nếu nghiệm tầm thường $X(t,\omega) \equiv 0$ của phương trình (1.3) ổn định hầu chắc chắn với $t \geqslant t_0$ thì nó ổn định hầu chắc chắn với $t \geqslant t^*$.*

Chứng minh. Giả sử nghiệm tầm thường $X(t,\omega) \equiv 0$ của phương trình (1.3) ổn định hầu chắc chắn với $t \geqslant t_0$, $t_0 \in \mathbb{R}^+$ cho trước túy ý. Ta chỉ ra rằng với bất kỳ một số thực cố định $t^* \geqslant 0$ thì tập Ω_{t^*} gồm những $\omega \in \Omega$ thỏa mãn: với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại hàm $r_{(\epsilon,t^*,\omega)} > 0$ phụ thuộc đo được vào ω, sao cho với mọi $x_0 \in \mathbb{R}^n$ và $\|x_0\| < r_{(\epsilon,t^*,\omega)}$ ta có

$$\sup_{t>t^*} \|\Phi_{t^*,t}(\omega)x_0\| < \epsilon, \text{ có xác suất bằng 1.}$$

Vì $X(t,\omega) \equiv 0$ ổn định hầu chắc chắn với $t \geqslant t_0$ nên ta có tập Ω_{t_0}, có độ đo xác suất bằng 1, thỏa mãn tính chất là: với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại một hàm $r_{(\epsilon,t_0,.)} : \Omega_{t_0} \to \mathbb{R}^+$ sao cho với mọi $x_0 \in \mathbb{R}^n$ và $\|x_0\| < r_{(\epsilon,t_0,\omega)}$ thì

$$\sup_{t\geqslant t_0} \|\Phi_{t_0,t}(\omega)x_0\| < \epsilon\ .$$

Chú ý rằng $\Phi_{t_*,t}(\omega) = \Phi_{t_0,t}(\omega) \circ \Phi_{t^*,t_0}(\omega)$ với mọi $t \in \mathbb{R}^+$.

Có hai trường hợp: $t^* \leqslant t_0$ hoặc $t^* > t_0$.

Trước tiên ta xét trường hợp $t^* \leqslant t_0$. Đặt

$$\begin{aligned} h(\omega) &:= \sup_{t^* \leqslant s \leqslant t_0} \|\Phi_{t^*,s}(\omega)\| \\ r_{(\epsilon,t^*,\omega)} &:= \min\left(\frac{r_{(\epsilon,t_0,\omega)}}{h(\omega)}, \frac{\epsilon}{h(\omega)}\right). \end{aligned}$$

Giả sử $\|x_1\| < r_{(\epsilon,t^*,\omega)}$ là tùy ý.

Nếu $t^* \leqslant t \leqslant t_0$ thì

$$\|\Phi_{t^*,t}(\omega)x_1\| \leqslant \|\Phi_{t^*,t}(\omega)\| \, \|x_1\| \leqslant h(\omega) \, \|x_1\| < h(\omega) \times \frac{\epsilon}{h(\omega)} = \epsilon.$$

Nếu $t > t_0$ thì

$$\Phi_{t^*,t}(\omega)x_1 = \Phi_{t_0,t}(\omega) \circ \Phi_{t^*,t_0}(\omega)x_1 = \Phi_{t_0,t}(\omega)\left[\Phi_{t^*,t_0}(\omega)x_1\right].$$

Vì

$$\|\Phi_{t^*,t_0}(\omega)x_1\| \leqslant \|\Phi_{t^*,t_0}(\omega)\| \, \|x_1\| \leqslant h(\omega) \, \|x_1\| < h(\omega) \times r_{(\epsilon,t^*,\omega)} \leq r_{(\epsilon,t_0,\omega)}$$

nên $\|\Phi_{t^*,t}(\omega)x_1\| = \|\Phi_{t_0,t}(\omega)\left[\Phi_{t^*,t_0}(\omega)x_1\right]\| < \epsilon$.

Vậy $\|\Phi_{t^*,t}(\omega)x_1\| < \epsilon$ với $t \geqslant t^*$. Tập $\Omega_{t^*} = \Omega_{t_0}$ ta tìm được thỏa mãn tính chất đưa ra và có xác suất bằng 1.

Trường hợp $t^* > t_0$ chứng minh hoàn toàn tương tự.

Định lý được chứng minh. $\square$

Trong lý thuyết xác suất, nói chung một tính chất nào đó đúng hầu chắc chắn thì cũng đúng theo xác suất nhưng ngược lại không đúng. Với khái niệm ổn định theo xác suất (xem [23]) được trình bày ở trên chúng tôi chứng minh rằng tính ổn định theo xác suất và ổn định hầu chắc chắn của nghiệm tầm thường $X(t,\omega) \equiv 0$ của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính (1.3) là tương đương.

Định lý 2.2.3 *Nếu nghiệm tầm thường $X(t,\omega) \equiv 0$ của phương trình (1.3) ổn định hầu chắc chắn với $t \geqslant 0$ thì nó sẽ ổn định theo xác suất với $t \geqslant 0$ và ngược lại.*

Chứng minh. (i) Giả sử $X(t,\omega) \equiv 0$ ổn định hầu chắc chắn với $t \geqslant 0$. Theo Định lý 2.2.2, với mọi $t_0 \in \mathbb{R}^+$, $X(t,\omega) \equiv 0$ ổn định hầu chắc chắn với $t \geqslant t_0$. Cố định $t_0 \geqslant 0$, tập Ω' gồm những $\omega \in \Omega$ mà với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại một hàm đo được $r_{(\epsilon,t_0,\omega)} > 0$ để với mọi $x_0 \in \mathbb{R}^n$ thỏa mãn $\|x_0\| < r_{(\epsilon,t_0,\omega)}$ ta có $\| \Phi_{t_0,t}(\omega)x_0 \| < \epsilon$ với mọi $t > t_0$, có xác suất bằng 1. Vậy $\mathbb{P}(\Omega') = 1$ và với mỗi $\omega \in \Omega'$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ thỏa mãn $\|x_0\| < r_{(\epsilon,t_0,\omega)}$ ta có

$$\sup_{t>t_0} \| \Phi_{t_0,t}(\omega)x_0\| < \epsilon \ . \tag{2.9}$$

Chúng ta chứng minh phần thuận của định lý bằng phản chứng.
Giả sử rằng $X(t,\omega) \equiv 0$ không ổn định theo xác suất với $t \geqslant 0$, tức là tồn tại $\epsilon_1 > 0, t_1 \geqslant 0$ và $\delta_1 > 0$ để với mọi $r > 0$, tập A gồm những $\omega \in \Omega$ sao cho: tồn tại $x_{(\epsilon_1,t_1,\delta_1,\omega)} \in \mathbb{R}^n$, $\| x_{(\epsilon_1,t_1,\delta_1,\omega)} \| < r$ và

$$\sup_{t>t_1} \left\|\Phi_{t_1,t}(\omega)x_{(\epsilon_1,t_1,\delta_1,\omega)}\right\| > \epsilon_1 \text{ có xác suất } \mathbb{P}(A) \geqslant \delta_1. \tag{2.10}$$

Trong (2.9), chọn $\epsilon = \epsilon_1$, $t_0 = t_1$, tồn tại một hàm đo được $r_{(\epsilon_1,t_1,\omega)} > 0$ sao cho với mọi $x_0 \in \mathbb{R}^n$ thỏa mãn $\|x_0\| < r_{(\epsilon_1,t_1\omega)}$ ta co $\sup\limits_{t>t_1} \|\Phi_{t_1,t}(\omega)x_0\| < \epsilon_1$.
Vì $r_{(\epsilon_1,t_1,\omega)} > 0$ nên tồn tại $r_2 > 0$, để tập

$$B := \left\{\omega : r_{(\epsilon_1,t_1,\omega)} < r_2\right\} \text{ có xác suất } \mathbb{P}(B) < \delta_1. \tag{2.11}$$

Trong (2.10), ta chọn $r = r_2$, từ định nghĩa của tập Ω' và (2.10), (2.11) ta có $\mathbb{P}(B^c \cap A \cap \Omega') > 0$, do đó tồn tại $\omega^0 \in B^c \cap A \cap \Omega'$. Vì $\omega^0 \in B^c$ nên

$$r_{(\epsilon_1, t_1, \omega)} \geqslant r_2. \tag{2.12}$$

Vì $\omega^0 \in A$ nên có $x_{(\epsilon_1,t_1,\delta_1,\omega^0)} \in \mathbb{R}^n$ thỏa mãn $\| x_{(\epsilon_1,t_1,\delta_1,\omega^0)} \| < r_2$ sao cho

$$\sup_{t > t_1} \left\| \Phi_{t_1,t}(\omega^0) x_{(\epsilon_1,t_1,\delta_1,\omega^0)} \right\| > \epsilon_1. \tag{2.13}$$

Vì $\omega^0 \in \Omega'$, $\epsilon = \epsilon_1$, $t_0 = t_1$ và $\left\| x_{(\epsilon_1,t_1,\delta_1,\omega^0)} \right\| < r_2 \leqslant r_{(\epsilon_1,t_1,\omega^0)}$ nên ta có

$$\sup_{t > t_1} \left\| \Phi_{t_1,t}(\omega^0) x_{(\epsilon_1,t_1,\delta_1,\omega^0)} \right\| < \epsilon_1. \tag{2.14}$$

Điều này mâu thuẫn với (2.13). Phần thuận của định lý được chứng minh.
(ii) Bây giờ ta chứng minh phần ngược của định lý. Giả sử nghiệm tầm thường $X(t, \omega) \equiv 0$ của phương trình (1.3) ổn định theo xác suất với $t \geqslant 0$ ta phải chứng minh nó ổn định hầu chắc chắn. Ở đây ta cũng sử dụng phản chứng để chứng minh.
Giả sử $X(t, \omega) \equiv 0$ không ổn định hầu chắc chắn. Khi đó tập

$$C := \{\omega : X(t, \omega) \equiv 0 \ \text{ không ổn định với } \ t \geqslant 0\}$$

có xác suất $\mathbb{P}(C) = \delta^* > 0$. Vì phương trình (1.3) là tuyến tính nên giống như phương trình vi phân tất định (xem Demidovich [40, §7, chương 2, trang 81]) ta có

$$C = \left\{ \omega : \sup_{t > 0} \| \Phi_{0,t}(\omega) \| = +\infty \right\}.$$

Cho $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ là cơ sở trực chuẩn trong $\mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ là một véc tơ đơn vị tùy ý, ta có thể biểu diễn $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n$, trong đó $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ và $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_n^2 = 1$. Cho M là một toán tử trong

$\mathbb{R}^n$, lấy chuẩn của véc tơ $\|Mx\|$ ta có

$$\|Mx\| = \left\| M(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i M e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \, \|Me_i\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|Me_i\| .$$

Với mọi $\omega_0 \in C$ thì

$$\sup_{t>0} \|\Phi_{0,t}(\omega_0)\| = +\infty.$$

Suy ra

$$\sup_{t>0} \sum_{i=1}^{n} \|\Phi_{0,t}(\omega_0) e_i\| = +\infty.$$

Do đó tồn tại một số $i_{\omega_0} \in \{1, 2, ..., n\}$ sao cho

$$\sup_{t>0} \left\| \Phi_{0,t}(\omega_0) e_{i_{\omega_0}} \right\| = +\infty. \tag{2.15}$$

Vì $X(t, \omega) \equiv 0$ ổn định theo xác suất với $t \geq 0$ nên với mọi $\epsilon > 0$ và $\delta > 0$, tồn tại $r_{(\epsilon,\delta)} > 0$ để sao cho với mọi x_0 thỏa mãn $\|x_0\| < r_{(\epsilon,\delta)}$ thì

$$\mathbb{P}\bigg(\{\omega : \sup_{t>0} \|\Phi_{0,t}(\omega) x_0\| > \epsilon\} \bigg) < \delta.$$

Đặt $D_{(\epsilon,\delta,r,x_0)} = \left\{ \omega : \sup_{t>0} \|\Phi_{0,t}(\omega) x_0\| > \epsilon \right\}$, ta có $\mathbb{P}(D_{(\epsilon,\delta,r,x_0)}) < \delta$.
Cố định $\epsilon > 0$ và chọn $\delta = \frac{\delta^*}{2n}$, ta có $r_{(\epsilon,\frac{\delta^*}{2n})} > 0$ sao cho với mọi x_0 thỏa mãn $\|x_0\| < r_{(\epsilon,\frac{\delta^*}{2n})}$ thì $D_{(\epsilon,\frac{\delta^*}{2n},r_{(\frac{\delta^*}{2n})},x_0)}$ có xác xuất nhỏ hơn $\frac{\delta^*}{2n}$.
Xét n véc tơ

$$x_i = \frac{r_{(\epsilon,\frac{\delta^*}{2n})}}{2} e_i, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Khi đó $\|x_i\| = \frac{r_{(\epsilon,\frac{\delta^*}{2n})}}{2} < r_{(\epsilon,\frac{\delta^*}{2n})}$, do đó $D_{(\epsilon,\frac{\delta^*}{2n},r_{(\frac{\delta^*}{2n})},x_i)}$ có xác suất nhỏ hơn $\frac{\delta^*}{2n}$ với mọi $i = 1, 2, ..., n$.

Lấy $\omega_0 \in C$ tùy ý, theo (2.15), tồn tại một số $i_{\omega_0} \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sao cho

$$\sup_{t>0} \left\| \Phi_{0,t}(\omega_0) x_{i_{\omega_0}} \right\| = \sup_{t>0} \left\| \Phi_{0,t}(\omega_0) \frac{r_{(\epsilon,\frac{\delta^*}{2n})}}{2} e_{i_{\omega_0}} \right\| = +\infty > \epsilon.$$

Suy ra,

$$C \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_{(\epsilon, \frac{\delta^*}{2n}, r_{(\frac{\delta^*}{2n}, \varepsilon)}, x_i)}.$$

Nên

$$\mathbb{P}(C) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(D_{(\epsilon, \frac{\delta^*}{2n}, r_{(\frac{\delta^*}{2n}, \varepsilon)}, x_i)}) < \frac{\delta^*}{2}.$$

Điều này trái với giả thiết $\mathbb{P}(C) = \delta^* > 0$. Vì vậy phần ngược của định lý được chứng minh. □

Từ định nghĩa các loại ổn định của nghiệm phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô ta thấy nếu nghiệm ổn định theo xác suất thì ổn định yếu theo xác suất. Hơn nữa Khasminskii đã chỉ ra ví dụ một phương trình ngẫu nhiên có nghiệm ổn định yếu theo xác suất nhưng không ổn định theo xác suất (xem [23, trang 245]). Tuy nhiên đối với phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính 1-chiều, hệ số hằng, thỏa mãn điều kiện không suy biến thì tính ổn định yếu theo xác suất và tính ổn định theo xác suất của nghiệm là tương đương.

Định lý 2.2.4 *Cho phương trình vi phân Itô tuyến tính* 1*-chiều, hệ số hằng*

$$dX(t) = BX(t)dt + \sum_{r=1}^{m} \sigma_r X(t) dW^r(t) \tag{2.16}$$

thỏa mãn điều kiện không suy biến

$$\sum_{r=1}^{m} (\sigma_r x, \alpha)^2 \geqslant K \|x\|^2 \|\alpha\|^2,$$

trong đó K *là hằng số dương. Khi đó tính ổn định theo xác suất và tính ổn định yếu theo xác suất của nghiệm tầm thường* $X(t, \omega) \equiv 0$ *là tương đương.*

Chứng minh. Vì phương trình (2.16) là phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính 1-chiều, hệ số hằng nên ta có thể giải được nghiệm chính xác (xem [23]). Trước tiên chú ý rằng phương trình (2.16) tương đương với phương trình vi phân Stratonovich sau đây

$$dX(t) = \left(B - \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sigma_r^2\right)X(t)dt + \sum_{r=1}^{m}\sigma_r X(t) \circ dW^r(t)$$

hay tương đương với

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = \left(B - \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sigma_r^2\right)dt + \sum_{r=1}^{m}\sigma_r \circ dW^r(t).$$

Do đó,

$$\ln|X(t)| - \ln|X(t_0)| = \left(B - \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sigma_r^2\right)(t - t_0) + \sum_{r=1}^{m}\sigma_r\left[W^r(t) - W^r(t_0)\right].$$

Đặt,

$$\begin{aligned}\rho(t) &:= \ln|X(t)| \\ &= \ln|X(t_0)| + \left(B - \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sigma_r^2\right)(t - t_0) + \sum_{r=1}^{m}\sigma_r\left[W^r(t) - W^r(t_0)\right].\end{aligned}$$

Tính phương sai của $\rho(t)$ ta có

$$D\rho(t) = \sum_{r=1}^{m}\sigma_r^2\,(t - t_0).$$

Suy ra $\lim_{t\to+\infty} D\rho(t) = +\infty$. Vì vậy đối với phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính 1-chiều, hệ số hằng (2.16), điều kiện $D\rho(t) \to +\infty$ khi $t \to +\infty$ luôn thỏa mãn. Theo Định lý 11.1 của Khasminskii [23, trang 243] thì tính ổn định theo xác suất của nghiệm tầm thường của phương trình (2.16) tương đương với tính ổn định yếu theo xác suất.

Khasminskii lưu ý rằng có thể chỉ ra ví dụ phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính với hệ số hằng mà điều kiện $D\rho(t) \to +\infty$ khi

$t \to +\infty$ không được thỏa mãn [23, trang 244]. Chúng tôi đã cố gắng tìm ví dụ chứng tỏ điều này, đồng thời đặt bài toán chứng minh rằng mọi phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính hệ số hằng luôn có $D\rho(t) \to +\infty$ khi $t \to +\infty$ nhưng đến nay chúng tôi chưa thu được kết quả theo hướng này.

Chương 3

Số mũ Lyapunov và số mũ trung tâm của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính

Khi nghiên cứu bài toán ổn định của phương trình vi phân ngẫu nhiên người ta thường tìm cách mở rộng, tổng quát hóa những khái niệm, kết quả cơ bản như trong lý thuyết ổn định Lyapunov tất định lên trường hợp ngẫu nhiên. Ta biết rằng, hai phương pháp cơ bản của lý thuyết ổn định Lyapunov tất định là phương pháp hàm Lyapunov và phương pháp số mũ Lyapunov.

Đối với phương pháp hàm Lyapunov, trong cuốn "Ổn định ngẫu nhiên của phương trình vi phân" Khasminskii [23] đã đề cập khá toàn diện và chi tiết những kết quả thu được trong việc nghiên cứu bài toán ổn định của phương trình vi phân ngẫu nhiên nói chung và phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô nói riêng.

Đối với phương pháp số mũ Lypunov, năm 1966, lần đầu tiên số mũ trung tâm Ω_1 của phương trình vi phân tất định được giới thiệu bởi Vinograd [39] để làm đánh giá chặn trên của số mũ Lyapunov lớn nhất λ_1. Tương tự như đối với số mũ trung tâm Ω_1 của Vinograd, Millionshchikov [28] định nghĩa số mũ trung tâm Ω_k của hệ tất định làm chặn trên của số mũ Lypunov λ_k và Nguyễn Đình Công [14] định nghĩa số mũ trung tâm Θ_k làm chặn dưới của số mũ Lyapunov λ_k với $k = 1, 2, \cdots, n$. Nói chung các số mũ trung tâm được đưa ra thực sự khác biệt với số mũ Lyapunov. Điều này đã được Bylov chỉ ra trong ví dụ 13.5.1 [39, trang 187].

Năm 1970, tương tự như đối với trường hợp tất định, Millionshchikov [27] đưa ra định nghĩa số mũ bổ trợ cho phương trình vi phân có nhiễu ngẫu nhiên (hay phương trình vi phân ngẫu nhiên). Số mũ bổ trợ được đưa ra để hỗ trợ cho việc nghiên cứu số mũ Lyapunov. Một ưu điểm nữa là việc tính toán số mũ bổ trợ không phải theo dõi quỹ đạo của nghiệm trên toàn bộ thời gian mà chỉ cần tính toán đối với ma trận nghiệm cơ bản trên mỗi khoảng thời gian compac. Dựa trên những khái niệm này nhiều nhà toán học đã thu được kết quả có ý nghĩa trong nghiên cứu lý thuyết định tính phương trình vi phân ngẫu nhiên như: Bylov, Vinograd, Oseledets...

Nghiên cứu của chúng tôi về số mũ Lyapunov và số mũ trung tâm của phương trình vi phân ngẫu nhiên bắt đầu từ bài toán của Millionshchikov, đó là xét phương trình vi phân $\dot{u} = [B(t) + C(t,\omega)]u$, trong đó $B(t)$ là ma trận hàm liên tục, bị chặn và ma trận $C(t,\omega)$ có các phần tử là quá trình ngẫu nhiên hằng từng khúc, độc lập với nhau. Sử dụng luật 0-1 của Kolmogorov, Millionshchikov [41] đã chứng minh số mũ Lyapunov của nó không phụ thuộc vào ω. Chú ý rằng phương trình này có thể giải được theo quỹ đạo mà không cần sử dụng phép tính tích phân Itô.

Năm 1993, khi xét phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô

$$dX(t) = F_0(t)X(t)dt + \sigma \sum_{r=1}^{m} F_r X(t) dW^r(t), \tag{3.1}$$

trong đó $F_0(t)$ là ma trận hàm liên tục và bị chặn, F_r $(r = 1, 2, ..., m)$ là ma trận hằng, Nguyễn Đình Công [17] cũng đưa ra nhận xét rằng số mũ Lyapunov, số mũ trung tâm, số mũ bổ trợ thứ k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ của phương trình (3.1) không phụ thuộc vào ω và chứng minh nếu phương trình (3.1) thỏa mãn điều kiện không suy biến của nhiễu ngẫu nhiên, tức là tồn tại hai số thực dương μ_1, μ_2 sao cho với mọi $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\mu_1 \|x\|^2 \|y\|^2 \leq \sum_{r=1}^{m} \left\langle F_r x, y \right\rangle^2 \leq \mu_2 \|x\|^2 \|y\|^2 ,$$

thì số mũ trung tâm, số mũ Lyapunov, số mũ bổ trợ thứ k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ của phương trình (3.1) bằng nhau. Đến năm 2001 trong bài báo "Phổ của phương trình vi phân ngẫu nhiên tuyến tính không ôtônôm" [19], Nguyễn Đình Công mới chứng minh cụ thể cho trường hợp tổng quát (không cần điều kiện không suy biến) các số mũ Lyapunov của phương trình (1.3) không phụ thuộc vào ω, tức là không ngẫu nhiên.

Dựa trên ý tưởng chính của Nguyễn Đình Công công bố trong [14] và [17], chúng tôi đã chứng minh một số tính chất của số mũ trung tâm và số mũ bổ trợ của phương trình (1.3). Thay vì sử dụng Luật 0-1 của Kolmogorov cho dãy các biến ngẫu nhiên độc lập chúng tôi sử dụng Luật mạnh số lớn và các bất đẳng thức được đưa ra bởi Rosenblatt-Roth [34] cho xích Markov không thuần nhất để chứng minh các số mũ trung tâm, số mũ Lyapunov, số mũ bổ trợ thứ k ($k = 1, 2, \dots, n$) của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính (1.3), thỏa mãn điều kiện không suy biến, trùng nhau. Chú ý rằng phương trình (1.3) tổng quát hơn phương trình (3.1).

3.1 Các định nghĩa số mũ của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính

Xét phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính (1.3)

$$\begin{aligned} &dX(t) = F_0(t)X(t)dt + \sum_{r=1}^{m} F_r(t)X(t)dW^r(t), \\ &X(t_0) = x_0, \end{aligned}$$

trong đó $F_r(t) = (f_{ir}^j(t))_{n\times n}$ ($r = 0, 1, 2, ..., m$) là các ma trận hàm liên tục, bị chặn bởi một hằng số K. Nhắc lại rằng chúng ta ký hiệu dòng hai tham số các toán tử tuyến tính sinh bởi phương trình (1.3) là $\Phi_{s,t}(\omega)$.

Cho X là ma trận vuông cấp n không suy biến, $d_1(X) \geq d_2(X) \geq ... \geq d_n(X)$ là các căn bậc hai dương của giá trị riêng của ma trận X^*X. Khi đó với mỗi $k \in \{1, 2, ..., n\}$ ta có

$$d_k(X) = \inf_{U\in\mathcal{G}_{n-k+1}} \sup_{x\in U_*} \frac{\|Xx\|}{\|x\|} = \sup_{V\in\mathcal{G}_k} \inf_{x\in V_*} \frac{\|Xx\|}{\|x\|}.$$

Định nghĩa 3.1.1 Các biến ngẫu nhiên $\lambda_k(\omega)$, $\Omega_k(\omega)$, $\Theta_k(\omega)$ với $k \in \{1, 2, ..., n\}$ được xác định bởi

$$\lambda_k(\omega) := \min_{U\in\mathcal{G}_{n-k+1}} \max_{x\in U} \limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\ln\|\Phi_{0,t}(\omega)x\|, \tag{3.2}$$

$$\Theta_k(\omega) := \sup_{V\in\mathcal{G}_k}\sup_{T\in\mathbb{R}^+}\limsup_{m\to+\infty}\frac{1}{mT}\sum_{i=0}^{m-1}\ln\left\|\Phi_{(i+1)T,iT}(\omega)\big|_{\Phi_{0,(i+1)T}(\omega)V}\right\|^{-1}, \tag{3.3}$$

$$\Omega_k(\omega) := \inf_{U\in\mathcal{G}_{n-k+1}}\inf_{T\in\mathbb{R}^+}\limsup_{m\to+\infty}\frac{1}{mT}\sum_{i=0}^{m-1}\ln\left\|\Phi_{iT,(i+1)T}(\omega)\big|_{\Phi_{0,iT}(\omega)U}\right\|, \tag{3.4}$$

tương ứng là *số mũ Lyapunov*, *số mũ trung tâm chặn dưới* và *số mũ trung tâm chặn trên* của phương trình (1.3).

Ta sẽ chỉ ra trong chứng minh của Định lý 3.2.6 dưới đây rằng với mọi $V\in\mathcal{G}_k$ và $T\in\mathbb{R}^+$ thì

$$\limsup_{m\to+\infty}\frac{1}{mT}\sum_{i=0}^{m-1}\ln\left\|\Phi_{(i+1)T,iT}(\omega)\big|_{\Phi_{0,(i+1)T}(\omega)V}\right\|^{-1} = \limsup_{m\to+\infty}\frac{1}{2mT}\sum_{i=0}^{2m-1}\ln\left\|\Phi_{(i+1)T,iT}(\omega)\big|_{\Phi_{0,(i+1)T}(\omega)V}\right\|^{-1}$$

và

$$\frac{1}{2mT}\sum_{i=0}^{2m-1}\ln\left\|\Phi_{(i+1)T,iT}(\omega)\big|_{\Phi_{0,(i+1)T}(\omega)V}\right\|^{-1} \le \frac{1}{m(2T)}\sum_{i=0}^{m-1}\ln\left\|\Phi_{(i+1)2T,i2T}(\omega)\big|_{\Phi_{0,(i+1)2T}(\omega)V}\right\|^{-1}.$$

Do đó, công thức (3.3) tương đương với công thức sau đây và nó có thể được coi là công thức định nghĩa của $\Theta_k(\omega)$:

$$\Theta_k(\omega) = \sup_{V\in\mathcal{G}_k}\sup_{T>1}\limsup_{m\to+\infty}\frac{1}{mT}\sum_{i=0}^{m-1}\ln\left\|\Phi_{(i+1)T,iT}(\omega)\big|_{\Phi_{0,(i+1)T}(\omega)V}\right\|^{-1}. \tag{3.5}$$

Tương tự ta cũng có công thức định nghĩa tương đương của $\Omega_k(\omega)$:

$$\Omega_k(\omega) = \inf_{U\in\mathcal{G}_{n-k+1}}\inf_{T>1}\limsup_{m\to+\infty}\frac{1}{mT}\sum_{i=0}^{m-1}\ln\left\|\Phi_{iT,(i+1)T}(\omega)\big|_{\Phi_{0,iT}(\omega)U}\right\|. \tag{3.6}$$

Định nghĩa 3.1.2 Biến ngẫu nhiên $\gamma_k(\omega)$ xác định bởi công thức:

$$\gamma_k(\omega) := \limsup_{T\to+\infty} \limsup_{m\to+\infty} \frac{1}{mT} \sum_{i=0}^{m-1} \ln d_k\big[\Phi_{iT,(i+1)T}(\omega)\big], \tag{3.7}$$

với $k \in \{1,2,...,n\}$ được gọi là *số mũ bổ trợ* của phương trình (1.3). Hàm $\gamma_k(T)$ xác định bởi công thức

$$\gamma_k(T) := \limsup_{m\to+\infty} \frac{1}{mT} \sum_{i=0}^{m-1} \mathbb{E} \ln d_k\big[\Phi_{iT,(i+1)T}(\omega)\big], \tag{3.8}$$

với $k \in \{1,2,...,n\}, T \in \mathbb{R}^+$ được gọi là *hàm số bổ trợ* của phương trình (1.3).

3.2 Một số tính chất của số mũ trung tâm và số mũ bổ trợ

Định lý 3.2.1 *Với mọi $k \in \{1,2,...,n\}$ ta có $\gamma_k(\omega) = \limsup_{T\to+\infty} \gamma_k(T)$ với xác suất 1, tức là số mũ bổ trợ $\gamma_k(\omega)$ của phương trình (1.3) không phụ thuộc vào $\omega \in \Omega$.*

Chứng minh. Trước tiên ta sẽ chứng minh rằng các biến ngẫu nhiên $\frac{1}{T}\ln\left\|\Phi_{iT,(i+1)T}(\omega)\right\|$ có moment bậc 2 bị chặn bởi một hằng số độc lập với $T > 1$ và $i \in \{0,1,2,...\}$.

Với mọi $N \in \mathbb{N}$, đặt $\eta(\omega) = \frac{1}{N}\ln\|\Phi_{0,N}(\omega)\|$. Vì

$$\|\Phi_{0,N}(\omega)\| \le \|\Phi_{N-1,N}(\omega)\| \dots \|\Phi_{1,2}(\omega)\| \, \|\Phi_{0,1}(\omega)\|,$$

và $\|A\| \geq \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ với mọi ma trận khả nghịch A nên

$$\|\Phi_{0,N}(\omega)\| \geq \frac{1}{\|\Phi_{N,0}(\omega)\|} \geq \frac{1}{\|\Phi_{1,0}(\omega)\| \ldots \|\Phi_{N,N-1}(\omega)\|}$$
$$\geq \frac{1}{\left\|\Phi_{0,1}^{-1}(\omega)\right\| \ldots \left\|\Phi_{N-1,N}^{-1}(\omega)\right\|}.$$

Do đó,

$$-\sum_{i=0}^{N-1} \ln \left\|\Phi_{i,i+1}^{-1}(\omega)\right\| \leq \ln \|\Phi_{0,N}(\omega)\| \leq \sum_{i=0}^{N-1} \ln \|\Phi_{i,i+1}(\omega)\|.$$

Suy ra với mọi $\omega \in \Omega$ ta có

$$\left|\frac{1}{N} \|\ln \Phi_{0,N}(\omega)\|\right| \leq \left|\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln \left\|\Phi_{i,i+1}^{-1}(\omega)\right\|\right| + \left|\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln \|\Phi_{i,i+1}(\omega)\|\right|.$$

Đặt $\eta_1(\omega) = \frac{1}{N} \sum\limits_{i=0}^{N-1} \ln \left\|\Phi_{i,i+1}^{-1}(\omega)\right\|$, $\eta_2 = \frac{1}{N} \sum\limits_{i=0}^{N-1} \ln \|\Phi_{i,i+1}(\omega)\|$ thì

$$E\eta^2(\omega) \leq 2[E\eta_1^2(\omega) + E\eta_2^2(\omega)]. \tag{3.9}$$

Sử dụng bất đẳng thức Minkowski với $p = 2$ (xem Shiryaev [35, page 194]) ta có

$$\left(E|\eta_1(\omega)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left[E\left|\ln \|\Phi_{i,i+1}(\omega)\|\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq K_1, \tag{3.10}$$

trong đó hằng số K_1 độc lập với N.

Tương tự đối với phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô thời gian ngược, ta có

$$\left(E|\eta_2(\omega)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq K_2,$$

trong đó hằng số K_2 độc lập với N.

Từ (3.9) suy ra

$$E\eta^2(\omega) \leq K_3 = 2(K_1^2 + K_2^2)$$

trong đó hằng số K_3 độc lập với N. Ta cũng dễ dàng chứng minh được với mọi $s \in \mathbb{R}^+, N \in \mathbb{N}$, biến ngẫu nhiên $\widetilde{\eta} = \frac{1}{N} \ln \|\Phi_{s,s+N}(\omega)\|$ có moment bậc hai bị chặn bởi hằng số độc lập với s, N.

Trong trường hợp $\hat{\eta}(\omega) = \frac{1}{T} \ln \|\Phi_{s,s+T}(\omega)\|$, với bất kỳ $s \in \mathbb{R}^+, T \in \mathbb{R}^+, T > 1$, ta đặt $N = [T]$, là phần nguyên của T và có

$$\|\Phi_{s,s+T}(\omega)\| \leq \|\Phi_{s,s+1}(\omega)\| \ldots \|\Phi_{s+N-1,s+N}(\omega)\| \, \|\Phi_{s+N,s+T}(\omega)\| .$$

Tương tự như (3.10) ta có

$$\begin{aligned}
\big(E|\hat{\eta}_1(\omega)|^2\big)^{\frac{1}{2}} &\leq \frac{1}{T}\Big(\sum_{i=0}^{N-1}[E\big| \ln \|\Phi_{i,i+1}(\omega)\| \,\big|^2]^{\frac{1}{2}} + [E\big| \, \|\ln|\Phi_{N,T}(\omega)\| \,\big|^2]^{\frac{1}{2}}\Big) \\
&\leq \frac{(N+1)\hat{K}_1}{T} \leq 2\hat{K}_1.
\end{aligned}$$

và

$$\big(E|\hat{\eta}_1(\omega)|^2\big)^{\frac{1}{2}} \leq 2\hat{K}_2,$$

trong đó hằng số $\hat{K}_1$ và $\hat{K}_2$ độc lập với s, T. Do đó

$$E\hat{\eta}(\omega)^2 \leq \hat{K}_3 = 4(\hat{K}_1^2 + \hat{K}_2^2).$$

Như vậy chúng ta đã chỉ ra rằng, tồn tại một hằng số $M_1 > 0$ độc lập với $T > 1$ và $i \in \{0, 1, 2, ...\}$ sao cho

$$E\bigg(\frac{1}{T} \ln \big\|\Phi_{iT,(i+1)T}(\omega)\big\| \bigg)^2 \leq M_1.$$

Tương tự như trên ta có thể tìm được một hằng số $M_2 > 0$ độc lập với $T > 1$ và $i \in \{0, 1, 2, ...\}$ sao cho

$$E\big(\frac{1}{T} \ln \big\|\Phi_{(i+1)T,iT}(\omega)\big\| \big)^2 \leq M_2.$$

Cố định $k \in \{1, 2, ..., n\}$. Vì

$$0 < d_n[\Phi_{iT,(i+1)T}(\omega)] \leq d_k[\Phi_{iT,(i+1)T}(\omega)] \leq d_1[\Phi_{iT,(i+1)T}(\omega)],$$

nên ta có

$$\Big(\frac{1}{T}\ln d_k[\Phi_{iT,(i+1)T}(\omega)]\Big)^2 \leq \Big(\frac{1}{T}\ln\big\|\Phi_{iT,(i+1)T}(\omega)\big\|\Big)^2 + \Big(\frac{1}{T}\ln\big\|\Phi_{(i+1)T,iT}(\omega)\big\|\Big)^2.$$

Do đó,

$$E\Big(\frac{1}{T}\ln d_k[\Phi_{iT,(i+1)T}(\omega)]\Big)^2 \leq M_1 + M_2.$$

Vì vậy $\frac{1}{T}\ln d_k[\Phi_{iT,(i+1)T}(\omega)]$ $(i \in \{0, 1, 2, ...\})$ là dãy biến ngẫu nhiên độc lập có moment bậc hai bị chặn bởi hằng số $M_1 + M_2$. Theo luật mạnh số lớn của Kolmogorov (xem Shiryaev [35, Định lý 2, trang 389]), ta có đẳng thức sau với xác suất 1

$$\lim_{m\to+\infty}\Big(\frac{1}{mT}\sum_{i=0}^{m-1}\ln d_k\big[\Phi_{iT,(i+1)T}(\omega)\big] - \frac{1}{mT}\sum_{i=0}^{m-1}\mathrm{E}\ \ln d_k\big[\Phi_{iT,(i+1)T}(\omega)\big]\Big) = 0.$$

Suy ra, với xác xuất 1 ta có

$$\limsup_{m\to+\infty}\frac{1}{mT}\sum_{i=0}^{m-1}\ln d_k\big[\Phi_{iT,(i+1)T}(\omega)\big] = \limsup_{m\to+\infty}\frac{1}{mT}\sum_{i=0}^{m-1}\mathrm{E}\ \ln d_k\big[\Phi_{iT,(i+1)T}(\omega)\big].$$

Vậy, với xác suất 1 ta có đẳng thức sau

$$\gamma_k(\omega) = \limsup_{T\to+\infty}\gamma_k(T).$$

Định lý được chứng minh. □

Định lý 3.2.2 *Với mọi $k \in \{1, 2, ..., n\}$ số mũ trung tâm $\Theta_k(\omega)$ của phương trình (1.3) không phụ thuộc vào $\omega \in \Omega$.*

Chứng minh. Ký hiệu $\{\mathcal{F}_s^t\}_{0\leq s\leq t}$ là lọc của σ-đại số sinh bởi các quá trình Wiener $(W_u^1, W_u^2, ..., W_u^m)_{s\leq u\leq t}$ của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính (1.3) (xem Arnold [11, trang 91-92]). Rõ ràng $\Phi_{0,t}(\omega)$ đo được đối với lọc $\{\mathcal{F}_0^t\}_{t\geq 0}$. Từ công thức (3.5) ta có biến ngẫu nhiên $\Theta_k(\omega)$ là đo được đối với σ-đại số giới hạn $\mathcal{F}_0^{+\infty} := \lim_{t\to+\infty} \mathcal{F}_0^t = \bigvee_{t\geq 0} \mathcal{F}_0^t$. Cố định $k \in \{1, 2, ..., n\}$ và $N \in \mathbb{N}$, ta có

$$\begin{aligned}\Theta_k(\omega) &= \sup_{V\in\mathcal{G}_k} \sup_{T>1} \limsup_{m\to+\infty} \frac{1}{mT} \sum_{i=0}^{m-1} \ln \left\| \Phi_{(i+1)T,iT}(\omega)|_{\Phi_{0,(i+1)T}(\omega)V} \right\|^{-1} \\ &= \sup_{V\in\mathcal{G}_k} \sup_{T>1} \limsup_{m\to+\infty} \frac{1}{mT} \Bigg(\sum_{i=0}^{N} \ln \left\| \Phi_{(i+1)T,iT}(\omega)|_{\Phi_{0,(i+1)T}(\omega)V} \right\|^{-1} \\ &\qquad + \sum_{i=N+1}^{m-1} \ln \left\| \Phi_{(i+1)T,iT}(\omega)|_{\Phi_{0,(i+1)T}(\omega)V} \right\|^{-1} \Bigg).\end{aligned}$$

Vì N cố định, $\sum_{i=0}^{N} \ln \left\| \Phi_{(i+1)T,iT}(\omega)|_{\Phi_{0,(i+1)T}(\omega)V} \right\|^{-1}$ là một biến ngẫu nhiên có moment bậc hai hữu hạn nên tồn tại giới hạn sau với xác suất 1

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{1}{mT} \sum_{i=0}^{N} \ln \left\| \Phi_{(i+1)T,iT}(\omega)|_{\Phi_{0,(i+1)T}(\omega)V} \right\|^{-1} = 0.$$

Do đó,

$$\begin{aligned}\Theta_k(\omega) &= \sup_{V\in\mathcal{G}_k} \sup_{T>1} \limsup_{m\to+\infty} \frac{1}{mT} \sum_{i=N+1}^{m-1} \ln \left\| \Phi_{(i+1)T,iT}(\omega)|_{\Phi_{0,(i+1)T}(\omega)V} \right\|^{-1} \\ &= \sup_{V\in\mathcal{G}_k} \sup_{T>1} \limsup_{m\to+\infty} \frac{1}{mT} \sum_{i=N+1}^{m-1} \ln \left\| \Phi_{(i+1)T,iT}(\omega)|_{\Phi_{NT,(i+1)T}(\omega)\left(\Phi_{0,NT}(\omega)V\right)} \right\|^{-1} \\ &\leq \sup_{\widetilde{V}\in\mathcal{G}_k} \sup_{T>1} \limsup_{m\to+\infty} \frac{1}{mT} \sum_{i=N+1}^{m-1} \ln \left\| \Phi_{(i+1)T,iT}(\omega)|_{\Phi_{NT,(i+1)T}(\omega)\widetilde{V}} \right\|^{-1} =: r(\omega).\end{aligned}$$

Mặt khác theo định nghĩa của $r(\omega)$ ở trên thì với mọi $\epsilon > 0$ và $\omega \in \Omega$ đều tồn tại $\widetilde{V}_1 \in \mathcal{G}_k$ sao cho

$$r(\omega) - \epsilon < \sup_{T>1} \limsup_{m\to+\infty} \frac{1}{mT} \sum_{i=N+1}^{m-1} \ln \left\| \Phi_{(i+1)T,iT}(\omega)|_{\Phi_{NT,(i+1)T}(\omega)\widetilde{V}_1} \right\|^{-1}.$$

Gọi $\widetilde{V}_2 \in \mathcal{G}_k$ là không gian con $\Phi_{0,NT}^{-1}(\omega)\widetilde{V}_1$ của $\mathbb{R}^n$. Ta có $\Phi_{0,NT}(\omega)\widetilde{V}_2 =$

$\widetilde{V}_1$, do đó

$$\begin{aligned}
r(\omega)-\epsilon &< \sup_{T>1}\limsup_{m\to+\infty}\frac{1}{mT}\sum_{i=N+1}^{m-1}\ln\left\|\Phi_{(i+1)T,iT}(\omega)|_{\Phi_{NT,(i+1)T}(\omega)\Phi_{0,NT}\widetilde{V}_2}\right\|^{-1}\\
&= \sup_{T>1}\limsup_{m\to+\infty}\frac{1}{mT}\sum_{i=N+1}^{m-1}\ln\left\|\Phi_{(i+1)T,iT}(\omega)|_{\Phi_{0,(i+1)T}(\omega)\widetilde{V}_2}\right\|^{-1}\\
&= \sup_{T>1}\limsup_{m\to+\infty}\frac{1}{mT}\Bigg(\sum_{i=0}^{N}\ln\left\|\Phi_{(i+1)T,iT}(\omega)|_{\Phi_{0,(i+1)T}(\omega)\widetilde{V}_2}\right\|^{-1}\\
&\qquad\qquad + \sum_{i=N+1}^{m-1}\ln\left\|\Phi_{(i+1)T,iT}(\omega)|_{\Phi_{0,(i+1)T}(\omega)\widetilde{V}_2}\right\|^{-1}\Bigg)\\
&\le \sup_{V\in\mathcal{G}_k}\sup_{T>1}\limsup_{m\to+\infty}\frac{1}{mT}\sum_{i=0}^{m-1}\ln\left\|\Phi_{(i+1)T,iT}(\omega)|_{\Phi_{0,(i+1)T}(\omega)V}\right\|^{-1}\\
&= \Theta_k(\omega).
\end{aligned}$$

Vì $\epsilon>0$ là tùy ý nên ta có $r(\omega)\le\Theta_k(\omega)$. Với mọi N cố định ta có $\Theta_k(\omega) = r(\omega)$ là biến ngẫu nhiên đo được đối với σ-đại số $\mathcal{F}_{(N+1)T}^{+\infty}$ nên $\Theta_k(\omega)$ là đo được đối với σ-đại số $\mathcal{F}_{(N+1)T}^{+\infty} = \lim_{t\to+\infty}\mathcal{F}_{(N+1)T}^{t} = \bigvee_{t\ge(N+1)T}\mathcal{F}_{(N+1)T}^{t}$. Suy ra $\Theta_k(\omega)$ đo được đối với σ-đại số đuôi $\bigcap_{N=1}^{+\infty}\mathcal{F}_{(N+1)T}^{+\infty}$. Theo Luật 0-1 (xem Shiryaev [35, trang 381]), biến ngẫu nhiên $\Theta_k(\omega)$ là suy biến, tức là không ngẫu nhiên. □

Định lý 3.2.3 *Với mọi $k\in\{1,2,...,n\}$, số mũ trung tâm $\Omega_k(\omega)$ của phương trình (1.3) không phụ thuộc vào $\omega\in\Omega$.*

Chứng minh. Với mỗi $k \in \{1, 2, ..., n\}$ cố định và $N \in \mathbb{N}$, ta có

$$\begin{aligned}
\Omega_k(\omega) &= \inf_{U \in \mathcal{G}_{n-k+1}} \inf_{T>1} \limsup_{m \to +\infty} \frac{1}{mT} \sum_{i=0}^{m-1} \ln \left\| \Phi_{iT,(i+1)T}(\omega)|_{\Phi_{0,iT}(\omega)U} \right\| \\
&= \inf_{U \in \mathcal{G}_{n-k+1}} \inf_{T>1} \limsup_{m \to +\infty} \frac{1}{mT} \Bigg(\sum_{i=0}^{N} \ln \left\| \Phi_{iT,(i+1)T}(\omega)|_{\Phi_{0,iT}(\omega)U} \right\| \\
&\qquad + \sum_{i=N+1}^{m-1} \ln \left\| \Phi_{iT,(i+1)T}(\omega)|_{\Phi_{0,iT}(\omega)U} \right\| \Bigg).
\end{aligned}$$

Chứng minh tương tự như Định lý 3.2.2 ta có thể chỉ ra rằng $\Omega_k(\omega)$ đo được đối với σ-đại số đuôi $\bigcap_{N=1}^{+\infty} \mathcal{F}_{(N+1)T}^{+\infty}$ nên nó suy biến, tức là không ngẫu nhiên. □

Như vậy số mũ Lyapunov, số mũ trung tâm, số mũ bổ trợ của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính (1.3) không phụ thuộc vào ω do đó trong ký hiệu sau này của các số mũ chúng ta sẽ bỏ qua ω.

Định lý 3.2.4 *Với mọi $k \in \{1, 2, ..., n\}$, số mũ trung tâm Ω_k của phương trình (1.3) lớn hơn hoặc bằng số mũ Lyapunov λ_k.*

Chứng minh. Cố định một $\omega \in \Omega$, cho $\epsilon > 0$ tùy ý, theo định nghĩa của Ω_k, tồn tại một không gian con $U \in \mathcal{G}_{n-k+1}$ sao cho

$$\inf_{T>1} \limsup_{m \to +\infty} \frac{1}{mT} \sum_{i=0}^{m-1} \ln \left\| \Phi_{iT,(i+1)T}(\omega)|_{\Phi_{0,iT}(\omega)U} \right\| < \Omega_k + \epsilon.$$

Với mọi $x \in U$ và $T > 1$ ta có

$$\begin{aligned}
\|\Phi_{0,mT}(\omega)x\| &= \left\| \Phi_{(m-1)T,mT}(\omega) \circ \Phi_{0,(m-1)T}(\omega)x \right\| \\
&\le \left\| \Phi_{(m-1)T,mT}(\omega)|_{\Phi_{0,iT}(\omega)U} \right\| \cdot \left\| \Phi_{0,(m-1)T}(\omega)x \right\| \\
&\le \cdots \\
&\le \left\| \Phi_{(m-1)T,mT}(\omega)|_{\Phi_{0,iT}(\omega)U} \right\| \dots \|\Phi_{0,T}(\omega)|_U\| \, \|x\|
\end{aligned}$$

nên

$$\limsup_{m\to+\infty}\frac{1}{mT}\ln\|\Phi_{0,mT}(\omega)x\|\leq\limsup_{m\to+\infty}\frac{1}{mT}\sum_{i=0}^{m-1}\ln\left\|\Phi_{iT,(i+1)T}(\omega)|_{\Phi_{0,iT}(\omega)U}\right\|.$$

Theo Định lý 3.4 của Nguyễn Đình Công [19], với mọi $h\in\mathbb{R}^+$ ta có

$$\lambda_k(\omega)=\min_{\tilde{U}\in\mathcal{G}_{n-k+1}}\max_{x\in\tilde{U}}\limsup_{\substack{m\to+\infty\\ m\in\mathbb{N}}}\frac{1}{mh}\ln\|\Phi_{0,mh}(\omega)x\|.$$

Do đó

$$\begin{aligned}\lambda_k &\leq \inf_{T>1}\max_{x\in U}\limsup_{m\to+\infty}\frac{1}{mT}\ln\|\Phi_{0,mT}(\omega)x\|\\ &\leq \inf_{T>1}\limsup_{m\to+\infty}\frac{1}{mT}\sum_{i=0}^{m-1}\ln\left\|\Phi_{iT,(i+1)T}(\omega)|_{\Phi_{0,iT}(\omega)U}\right\|<\Omega_k+\epsilon.\end{aligned}$$

Vì $\epsilon>0$ là tùy ý nên ta có $\lambda_k\leq\Omega_k$. □

Định lý 3.2.5 *Với mọi $k\in\{1,2,...,n\}$, số mũ trung tâm Θ_k của phương trình (1.3) nhỏ hơn hoặc bằng số mũ Lyapunov λ_k.*

Chứng minh. Cố định một $\omega\in\Omega$, với mọi $\epsilon>0$, theo định nghĩa của Θ_k, tồn tại một không gian véc tơ con $V\in\mathcal{G}_k$ sao cho

$$\sup_{T>1}\limsup_{m\to+\infty}\frac{1}{mT}\sum_{i=0}^{m-1}\ln\left\|\Phi_{(i+1)T,iT}(\omega)|_{\Phi_{0,(i+1)T}(\omega)V}\right\|^{-1}>\Theta_k-\epsilon.$$

Theo định nghĩa của λ_k và Định lý 3.4 của Nguyễn Đình Công [19], thì tồn tại một không gian con $U\in\mathcal{G}_{n-k+1}$ sao cho với mọi $h\in\mathbb{R}^+$

$$\lambda_k=\max_{x\in U}\limsup_{m\to+\infty}\frac{1}{mh}\ln\|\Phi_{0,mh}(\omega)x\|.$$

Vì U, V là các không gian véc tơ trong $\mathbb{R}^n$, số chiều của U là $n-k+1$ và số chiều của V là k nên số chiều của không gian véc tơ con $U\cap V$ lớn hơn hoặc bằng 1. Lấy một véc tơ $x_0 \in U \cap V \setminus \{0\}$ ta có

$$\begin{aligned}
&\sup_{T>1} \limsup_{m\to+\infty} \frac{1}{mT} \sum_{i=0}^{m-1} \ln \left\| \Phi_{(i+1)T,iT}(\omega)|_{\Phi_{0,(i+1)T}(\omega)V} \right\|^{-1} \\
&\qquad\qquad\qquad \le \sup_{T>1} \limsup_{m\to+\infty} \frac{1}{mT} \ln \frac{\|\Phi_{0,mT}(\omega)x_0\|}{\|x_0\|} \\
&\qquad\qquad\qquad \le \sup_{T>1} \max_{x\in U_*} \limsup_{m\to+\infty} \frac{1}{mT} \ln \frac{\|\Phi_{0,mT}(\omega)x\|}{\|x\|} \\
&\qquad\qquad\qquad = \lambda_k.
\end{aligned}$$

Suy ra, $\Theta_k - \epsilon < \lambda_k$ với mọi $\epsilon > 0$. Vậy $\Theta_k \le \lambda_k$. □

Định lý 3.2.6 *Với mọi $k \in \{1, 2, ..., n\}$, số mũ trung tâm Θ_k của phương trình (1.3) nhỏ hơn hoặc bằng số mũ bổ trợ γ_k.*

Chứng minh. Trước tiên, như khẳng định ở đầu mục 3.1, chúng ta sẽ chỉ ra rằng công thức (3.3) của $\Theta_k(\omega)$ tương đương với công thức (3.5).
Với $\widetilde{V} \in \mathcal{G}_k, T \in \mathbb{R}^+, \omega \in \Omega, m \in \mathbb{N}$ ta đặt

$$g(T, m, \widetilde{V}) := \frac{1}{mT} \sum_{i=0}^{m-1} \ln \left\| \Phi_{(i+1)T,iT}(\omega)|_{\Phi_{0,(i+1)T}(\omega)\widetilde{V}} \right\|^{-1}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned}
g(T, 2m, \widetilde{V}) &= \frac{1}{2mT} \sum_{i=0}^{2m-1} \ln \left\| \Phi_{(i+1)T,iT}(\omega)|_{\Phi_{0,(i+1)T}(\omega)\widetilde{V}} \right\|^{-1} \\
&= \frac{1}{2mT} \sum_{i=0}^{2m-1} \ln \inf_{z\in\widetilde{V}_*} \frac{\left\|\Phi_{0,(i+1)T}(\omega)z\right\|}{\|\Phi_{0,iT}(\omega)z\|} \\
&= \frac{1}{2mT} \sum_{i=0}^{m-1} \left(\ln \inf_{z\in\widetilde{V}_*} \frac{\left\|\Phi_{0,(2i+1)T}(\omega)z\right\|}{\|\Phi_{0,2iT}(\omega)z\|} + \ln \inf_{z\in\widetilde{V}_*} \frac{\left\|\Phi_{0,(2i+2)T}(\omega)z\right\|}{\left\|\Phi_{0,(2i+1)T}(\omega)z\right\|} \right) \\
&\le \frac{1}{2mT} \sum_{i=0}^{m-1} \ln \left(\inf_{z\in\widetilde{V}_*} \frac{\left\|\Phi_{0,(2i+1)T}(\omega)z\right\|}{\|\Phi_{0,2iT}(\omega)z\|} \times \frac{\left\|\Phi_{0,(2i+2)T}(\omega)z\right\|}{\left\|\Phi_{0,(2i+1)T}(\omega)z\right\|} \right)
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2mT}\sum_{i=0}^{m-1}\ln\left(\inf_{z\in\widetilde{V}_*}\frac{\left\|\Phi_{0,(2i+1)T}(\omega)z\right\|}{\|\Phi_{0,2iT}(\omega)z\|}\times\frac{\left\|\Phi_{0,(2i+2)T}(\omega)z\right\|}{\left\|\Phi_{0,(2i+1)T}(\omega)z\right\|}\right)$$
$$= \frac{1}{2mT}\sum_{i=0}^{m-1}\ln\inf_{z\in\widetilde{V}_*}\frac{\left\|\Phi_{0,(2i+2)T}(\omega)z\right\|}{\|\Phi_{0,2iT}(\omega)z\|}$$
$$= \frac{1}{2mT}\sum_{i=0}^{m-1}\ln\left\|\Phi_{(i+1)2T,i2T}(\omega)|_{\Phi_{0,(i+1)2T}(\omega)\widetilde{V}}\right\|^{-1} = g(2T,m,\widetilde{V}).$$

Do đó với mọi $\widetilde{V}\in\mathcal{G}_k, T\in\mathbb{R}^+, \omega\in\Omega, m\in\mathbb{N}$ ta có

$$g(T,2m,\widetilde{V}) \leq g(2T,m,\widetilde{V}). \tag{3.11}$$

Bây giờ chúng ta sẽ chứng minh rằng với không gian véc tơ con cố định $\widetilde{V}\in\mathcal{G}_k$ cho trước, với mọi $T\in\mathbb{R}^+$ ta có đẳng thức sau

$$\limsup_{m\to+\infty} g(T,2m,\widetilde{V}) = \limsup_{m\to+\infty} g(T,m,\widetilde{V}) \tag{3.12}$$

với xác suất 1. Chú ý rằng

$$\frac{m+1}{m}g(T,m+1,\widetilde{V})-g(T,m,\widetilde{V})=\frac{1}{mT}\ln\left\|\Phi_{(m+1)T,mT}(\omega)|_{\Phi_{0,(m+1)T}(\omega)\widetilde{V}}\right\|^{-1},$$

và

$$-\frac{1}{mT}\ln\left\|\Phi^{-1}_{mT,(m+1)T}(\omega)\right\| \leq \frac{1}{mT}\ln\left\|\Phi_{(m+1)T,mT}(\omega)|_{\Phi_{0,(m+1)T}(\omega)\widetilde{V}}\right\|^{-1}$$
$$\leq \frac{1}{mT}\ln\left\|\Phi_{mT,(m+1)T}(\omega)\right\|. \tag{3.13}$$

Đặt

$$\begin{aligned}
B_j &:= \left\{\omega\in\Omega : \left\|\Phi_{jT,(j+1)T}(\omega)\right\| \geq jT + n^2e^{KT}\right\}, \quad j\in\{0,1,2...\},\\
\tilde{B}_j &:= \left\{\omega\in\Omega : \left\|\Phi_{(j+1)T,jT}(\omega)\right\| \geq jT + n^2e^{KT}\right\}, \quad j\in\{0,1,2...\},\\
B &:= \bigcup_{i=1}^{+\infty}\bigcap_{j=i}^{+\infty}[\Omega\setminus(B_j\cup\tilde{B}_j)],
\end{aligned}$$

trong đó K là hằng số được cho trong điều kiện của phương trình (1.3). Theo Bổ đề 3.3 của Nguyễn Đình Công [19] ta có $\mathbb{P}(B) = 1$. Với mỗi $\omega \in B$ tùy ý đều tồn tại $M(\omega) > 0$ sao cho với mọi $m > M(\omega)$ ta có các bất đẳng thức sau

$$\frac{1}{mT}\ln\left\|\Phi_{mT,(m+1)T}(\omega)\right\| \leq \frac{\ln(mT + n^2e^{KT})}{mT}, \tag{3.14}$$

$$-\frac{1}{mT}\ln\left\|\Phi^{-1}_{mT,(m+1)T}(\omega)\right\| \geq -\frac{\ln(mT + n^2e^{KT})}{mT}. \tag{3.15}$$

Từ (3.13), (3.14) và (3.15) dẫn đến

$$\lim_{m\to+\infty}\left[\frac{m+1}{m}g(T, m+1, \widetilde{V}) - g(T, m, \widetilde{V})\right] = 0$$

với xác suất 1. Trong trường hợp riêng $m = 2l$ ta có

$$\lim_{l\to+\infty}\left[\frac{2l+1}{2l}g(T, 2l+1, \widetilde{V}) - g(T, 2l, \widetilde{V})\right] = 0.$$

Vì $\lim\limits_{l\to+\infty} \frac{2l+1}{2l} = 1$, nên với xác suất 1 ta có

$$\limsup_{l\to+\infty} g(T, 2l+1, \widetilde{V}) = \limsup_{l\to+\infty} g(T, 2l, \widetilde{V}).$$

Do đó ta có được đẳng thức (3.12).

Do (3.11) và (3.12) nên với mọi $\widetilde{V} \in \mathcal{G}_k, T \in \mathbb{R}^+$, với xác suất 1 ta có

$$\limsup_{m\to+\infty} g(T, m, \widetilde{V}) \leq \limsup_{m\to+\infty} g(2T, m, \widetilde{V}).$$

Bất đẳng thức này dẫn đến công thức (3.3) tương đương với công thức (3.5). Hơn nữa, từ đây ta cũng suy ra

$$\sup_{T>1}\limsup_{m\to+\infty} g(T, m, \widetilde{V}) = \limsup_{T\to+\infty}\limsup_{m\to+\infty} g(T, m, \widetilde{V}).$$

Sử dụng công thức (3.7) ta nhận được

$$\begin{aligned}
\Theta_k &= \sup_{V\in\mathcal{G}_k}\sup_{T>1}\limsup_{m\to+\infty}\frac{1}{mT}\sum_{i=0}^{m-1}\ln\left\|\Phi_{(i+1)T,iT}(\omega)|_{\Phi_{0,(i+1)T}(\omega)V}\right\|^{-1}\\
&= \sup_{V\in\mathcal{G}_k}\sup_{T>1}\limsup_{m\to+\infty} g(T,m,V)\\
&= \sup_{V\in\mathcal{G}_k}\limsup_{T\to+\infty}\limsup_{m\to+\infty} g(T,m,V)\\
&= \sup_{V\in\mathcal{G}_k}\limsup_{T\to+\infty}\limsup_{m\to+\infty}\frac{1}{mT}\sum_{i=0}^{m-1}\ln\left\|\Phi_{(i+1)T,iT}(\omega)|_{\Phi_{0,(i+1)T}(\omega)V}\right\|^{-1}\\
&= \sup_{V\in\mathcal{G}_k}\limsup_{T\to+\infty}\limsup_{m\to+\infty}\frac{1}{mT}\sum_{i=0}^{m-1}\ln\inf_{z\in\Phi_{0,iT}(\omega)V_*}\frac{\left\|\Phi_{iT,(i+1)T}(\omega)z\right\|}{\|z\|}\\
&\le \limsup_{T\to+\infty}\limsup_{m\to+\infty}\frac{1}{mT}\sum_{i=0}^{m-1}\ln d_k\left[\Phi_{iT,(i+1)T}(\omega)\right]=\gamma_k.
\end{aligned}$$

Định lý đã được chứng minh. □

Định lý 3.2.7 *Đối với phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính (1.3) ta luôn có*

$$\gamma_1\ge\Omega_1\ \ \text{và}\ \ \gamma_n=\Theta_n.$$

Chứng minh. Trước hết, theo định nghĩa ta có

$$\begin{aligned}
d_1[\Phi_{iT,(i+1)T}(\omega)] &= \left\|\Phi_{iT,(i+1)T}(\omega)\right\|,\\
d_n[\Phi_{iT,(i+1)T}(\omega)] &= \left\|\Phi_{iT,(i+1)T}(\omega)^{-1}\right\|^{-1}.
\end{aligned}$$

Vì không gian $\mathcal{G}_n$ chỉ có duy nhất một điểm là không gian $\mathbb{R}^n$, sử dụng (3.3) và những lập luận như trong chứng minh Định lý 3.2.6 ta có

$$\begin{aligned}
\Theta_n &= \sup_{T\in\mathbb{R}^+}\limsup_{m\to+\infty}\frac{1}{mT}\sum_{i=0}^{m-1}\ln d_n[\Phi_{iT,(i+1)T}(\omega)]\\
&= \limsup_{T\to+\infty}\limsup_{m\to+\infty}\frac{1}{mT}\sum_{i=0}^{m-1}\ln d_n[\Phi_{iT,(i+1)T}(\omega)]=\gamma_n.
\end{aligned}$$

Tương tự như chứng minh đối với Θ_k trong Định lý 3.2.6 ta có thể chứng minh được rằng với mọi không gian con $U \in \mathcal{G}_{n-k+1}$ thì

$$\begin{aligned}
\Omega_k &= \inf_{U\in\mathcal{G}_{n-k+1}} \inf_{T>1} \limsup_{m\to+\infty} \frac{1}{mT} \sum_{i=0}^{m-1} \ln \left\| \Phi_{iT,(i+1)T}(\omega)\big|_{\Phi_{0,iT}(\omega)U} \right\| \\
&= \inf_{U\in\mathcal{G}_{n-k+1}} \liminf_{T\to+\infty} \limsup_{m\to+\infty} \frac{1}{mT} \sum_{i=0}^{m-1} \ln \left\| \Phi_{iT,(i+1)T}(\omega)\big|_{\Phi_{0,iT}(\omega)U} \right\|.
\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \inf_{T>1} \limsup_{m\to+\infty} \frac{1}{mT} \sum_{i=0}^{m-1} \ln \left\| \Phi_{iT,(i+1)T}(\omega) \right\| \\
&= \liminf_{T\to+\infty} \limsup_{m\to+\infty} \frac{1}{mT} \sum_{i=0}^{m-1} \ln \left\| \Phi_{iT,(i+1)T}(\omega) \right\| \\
&\le \limsup_{T\to+\infty} \limsup_{m\to+\infty} \frac{1}{mT} \sum_{i=0}^{m-1} \ln \left\| \Phi_{iT,(i+1)T}(\omega) \right\| \\
&= \limsup_{T\to+\infty} \limsup_{m\to+\infty} \frac{1}{mT} \sum_{i=0}^{m-1} \ln d_1[\Phi_{iT,(i+1)T}(\omega)] = \gamma_1.
\end{aligned}$$

Định lý được chứng minh. $\square$

3.3 Sự trùng nhau của số mũ Lyapunov và số mũ trung tâm của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính thỏa mãn điều kiện không suy biến

Trong phần này chúng ta xét phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính (1.3) có phần ngẫu nhiên thỏa mãn *điều kiện không suy biến* sau đây:

Tồn tại hai số thực dương μ_1, μ_2 sao cho với mọi $x, y \in \mathbb{R}^n$ và $t \in \mathbb{R}^+$

$$\mu_1 \|x\|^2 \|y\|^2 \leq \big\langle D(t,x)y, y \big\rangle \leq \mu_2 \|x\|^2 \|y\|^2, \tag{3.16}$$

trong đó

$$D(t,x) = \big(d_{ij}(t,x)\big)_{n\times n} \text{ với } d_{ij}(t,x) = \sum_{r=1}^{m} \bigg(\sum_{h,l=1}^{n} f_{ir}^h(t) f_{jr}^l(t) x_h x_l \bigg).$$

Trước tiên ta nhắc lại một mệnh đề đã được Nguyễn Đình Công chứng minh trong Bổ đề 2 của bài báo [15] và Định lý của bài báo [17]. Đó là

Mệnh đề 3.3.1 *Với mọi $\epsilon > 0$, đều tồn tại $0 < \delta = \delta(\epsilon) < 1$ sao cho với mọi không gian véc tơ con $V \in \mathcal{G}_k$, $U \in \mathcal{G}_{n-k}$ $(k = 1, 2, ..., n-1)$ và với mọi $\tau \in \mathbb{R}^+$ thì tập hợp các $\omega \in \Omega$ thỏa mãn*

$$\big[\Phi_{\tau,\tau+1}(\omega)V\big] \cap \hat{U}[\delta(\epsilon)] \not\equiv \{0\}$$

có độ đo xác suất nhỏ hơn hoặc bằng ϵ, trong đó $\hat{U}(\varrho)$ biểu thị nón gồm những véc tơ trong $\mathbb{R}^n$ tạo với không gian véc tơ con U một góc nhỏ hơn hoặc bằng ϱ.

Tiếp sau đây ta sẽ tóm tắt hai kết quả đã được chứng minh chi tiết trong bài báo của Rosenblatt-Roth [34] về Luật mạnh số lớn của xích Markov không thuần nhất. Những kết quả này được sử dụng để chứng minh định lý chính của chương này.

Cho $(\mathcal{U}_i, \Sigma_i)$ là không gian đo được, x_i là phần tử của $\mathcal{U}_i$, A_i là tập đo được và là phần tử trong σ-đại số Σ_i $(i = 1, 2, \ldots)$. Xác suất chuyển (hay hàm chuyển) $P_i(x_i, A_{i+1})$ trên miền xác định $(\mathcal{U}_i, \Sigma_i, \mathcal{U}_{i+1}, \Sigma_{i+1})$ với $i = 1, 2, \ldots$ xác định một xích Markov. Ta ký hiệu $\alpha_i = \alpha(P_i)$ là hệ số ergodic của P_i (định nghĩa và các tính chất của hệ số ergodic của xích Markov có thể xem chi tiết trong R. L. Dobrushin [20], M. Rosenblatt-Roth [33], [34]). Xét dãy biến ngẫu nhiên ξ_i, $(i = 1, 2, \ldots)$, phụ thuộc vào $r \geq 1$ bước thời gian (hay r-phụ thuộc) đối với xích Markov và giả sử rằng với mọi $i = 1, 2, \ldots$ các biến ngẫu nhiên ξ_i đều có phương sai $D\xi_i$ hữu hạn. Đặt

$$\begin{aligned} \alpha^{(m)} &= \min_{1\leq i\leq m} \alpha_i, \qquad D_m = \sum_{i=1}^{m} D\xi_i, \\ S_m &= \sum_{i=1}^{m} \xi_i, \qquad U_m = \max_{1\leq s\leq m} |S_s - \mathbb{E}S_s|, \quad (m = 1, 2, \ldots). \end{aligned}$$

Mệnh đề 3.3.2 *[34, Định lý 2, trang 567]*
Nếu $\alpha_i > \rho > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots)$ *và* $\sum_{m=1}^{+\infty} m^{-2} D\xi_m < +\infty$ *thì dãy các biến ngẫu nhiên* ξ_i $(i = 1, 2, \ldots)$ *thỏa mãn luật mạnh số lớn.*

Mệnh đề 3.3.3 *[34, Bổ đề 1, trang 568]*
Nếu $\alpha_i > \rho > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots)$ *thì*

$$\mathbb{P}(U_m > \epsilon) < \frac{[20(1+\sqrt{6})]^2 \rho^2}{\epsilon} D_m.$$

Bây giờ ta sẽ phát biểu và chứng minh định lý chính của chương này.

Định lý 3.3.4 *Tồn tại một hằng số* $c_1 > 0$ *sao cho với mọi* $\epsilon \in (0, 1)$, $T \in \mathbb{R}$, $T > 1$ *và* $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ *các bất đẳng thức sau xảy ra*

$$|\Omega_k - \gamma_k(T)| \leq (2c_1 + 1)\sqrt{\epsilon} - \frac{1}{T} \ln \frac{\delta(\epsilon)}{2}, \tag{3.17}$$

$$|\Theta_k - \gamma_k(T)| \leq (2c_1 + 1)\sqrt{\epsilon} - \frac{1}{T} \ln \frac{\delta(\epsilon)}{2}, \tag{3.18}$$

trong đó $\delta(\epsilon)$ *được xác định như ở trong Mệnh đề 3.3.1.*

Chứng minh. Cho $\epsilon \in (0,1)$, cố định $k \in \{1,2,...,n\}$. Ta xác định $\delta = \delta(\epsilon)$ phụ thuộc vào ϵ theo Mệnh đề 3.3.1. Cho $T \in \mathbb{R}, T > 1$ tùy ý. Cố định một không gian véc tơ con tùy ý $V \in \mathcal{G}_k$. Với mỗi $i \in \{0,1,2,...\}$, để ngắn gọn ta viết Φ_i thay cho ma trận $\Phi_{iT,(i+1)T}(\omega)$. Gọi $\{f_1,...,f_k,f_{k+1},...,f_n\}$ là cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^n$ gồm các véc tơ riêng tương ứng với các giá trị riêng

$$d_1^2(\Phi_i) \geq \cdots \geq d_k^2(\Phi_i) \geq d_{k+1}^2(\Phi_i) \geq \cdots \geq d_n^2(\Phi_i)$$

của ma trận $\Phi_i^*\Phi_i$, gọi $U_{i,\omega}^{n-k}$ là không gian véc tơ con sinh bởi $n-k$ véc tơ $\{f_{k+1},...,f_n\}$. Đặt

$$\begin{aligned} C_i &:= \Big\{\omega \in \Omega : \big[\Phi_{0,iT}(\omega)V\big] \cap \hat{U}_{i,\omega}^{n-k}\big[\delta(\epsilon)\big] \not\equiv \{0\}\Big\}, \\ \eta_i(\omega) &:= \frac{1}{T}\ln\,\big\|\Phi_{(i+1)T,iT}(\omega)\big\|, \\ \zeta_i(\omega) &:= \inf_{y\in V_*}\frac{1}{T}\ln\frac{\big\|\Phi_{0,(i+1)T}(\omega)y\big\|}{\|\Phi_{0,iT}(\omega)y\|}. \end{aligned}$$

Gọi $\chi_i(\omega)$ là hàm chỉ số của tập C_i. Theo Mệnh đề 3.3.1 và tính chất Markov của nghiệm phương trình (1.3) ta có

$$\mathbb{P}(C_i) \leq \epsilon, \quad \mathbb{E}(\chi_i(\omega)) \leq \epsilon.$$

Từ định nghĩa của C_i và χ_i, nếu $\chi_i(\omega) = 0$ thì mọi véc tơ của không gian véc tơ con $\Phi_{0,iT}(\omega)V$ tạo với không gian véc tơ con $U_{i,\omega}^{n-k}$ một góc lớn hơn $\delta(\epsilon)$ nên

$$\begin{aligned} \zeta_i(\omega) &= \inf_{z\in\Phi_{0,iT}(\omega)V_*}\frac{1}{T}\ln\frac{\|\Phi_i(z)\|}{\|z\|} \\ &\geq \inf_{z\in\Phi_{0,iT}(\omega)V_*}\frac{1}{T}\ln\Big(d_k(\Phi_i)\,\sin\angle(z,U_{i,\omega}^{n-k})\Big) \\ &\geq \frac{1}{T}\ln\Big(d_k(\Phi_i)\,\sin[\delta(\epsilon)]\Big) \\ &\geq \frac{1}{T}\ln d_k\big[\Phi_{iT,(i+1)T}(\omega)\big] + \frac{1}{T}\ln\frac{\delta(\epsilon)}{2}. \end{aligned}$$

Nếu $\chi_i(\omega) = 1$ thì

$$\zeta_i(\omega) \geq \inf_{z \in V_*} \frac{1}{T} \ln \frac{\left\|\Phi_{iT,(i+1)T}(\omega) z\right\|}{\|z\|} \geq -\frac{1}{T} \ln \left\|\Phi^{-1}_{iT,(i+1)T}(\omega)\right\| = -\eta_i(\omega).$$

Do đó ta có

$$\begin{aligned}
\zeta_i(\omega) \;&\geq\; \big[1 - \chi_i(\omega)\big]\left(\frac{1}{T} \ln d_k\big[\Phi_{iT,(i+1)T}(\omega)\big] + \frac{1}{T} \ln \frac{\delta(\epsilon)}{2}\right) - \chi_i \eta_i(\omega) \\
&\geq\; \frac{1}{T} \ln d_k\big[\Phi_{iT,(i+1)T}(\omega)\big] + \frac{1}{T} \ln \frac{\delta(\epsilon)}{2} \\
&\qquad\qquad\qquad -\chi_i(\omega)\frac{1}{T} \ln d_k\big[\Phi_{iT,(i+1)T}(\omega)\big] - \chi_i \eta_i(\omega).
\end{aligned}$$

Dễ dàng chứng minh được các biến ngẫu nhiên $\frac{1}{T} \ln d_k\big[\Phi_{iT,(i+1)T}(\omega)\big]$, $\eta_i(\omega)$ và $\zeta_i(\omega)$ có moment bậc hai bị chặn bởi một hằng số $c_1 > 0$ độc lập với $T \in \mathbb{R}$, $T > 1$, $i \in \{0, 1, 2, ...\}$ và $\epsilon \in (0, 1)$ (xem H. Kunita [25, Bổ đề 4.5.3, trang 156]) sao cho

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left|\chi_i(\omega)\frac{1}{T} \ln d_k[\Phi_{iT,(i+1)T}(\omega)]\right| \\
&\qquad\qquad \leq \frac{1}{T}\Big(\mathbb{E}\chi_i^2(\omega)\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\mathbb{E} \ln^2 d_k[\Phi_{iT,(i+1)T}(\omega)]\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad\qquad \leq\; c_1\big(\int_\Omega \chi_i^2(\omega) d\mathbb{P}\big)^{\frac{1}{2}} \;=\; c_1\, \mathbb{P}\big(\, \{\omega \,|\, \chi_i(\omega) = 1\}\,\big)^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad\qquad \leq\; c_1 \sqrt{\epsilon},
\end{aligned}$$

và

$$\mathbb{E}\big|\chi_i(\omega)\eta_i(\omega)\big| \leq \big[\mathbb{E}\chi_i^2(\omega)\big]^{\frac{1}{2}}\big[\mathbb{E}\eta_i^2(\omega)\big]^{\frac{1}{2}} \leq c_1\sqrt{\epsilon}.$$

Suy ra,

$$\mathbb{E}\zeta_i(\omega) \geq \frac{1}{T}\mathbb{E} \ln d_k\big[\Phi_{iT,(i+1)T}(\omega)\big] + \frac{1}{T} \ln \frac{\delta(\epsilon)}{2} - 2c_1\sqrt{\epsilon}. \qquad (3.19)$$

Bây giờ ta sẽ sử dụng kết quả của Rosenblatt-Roth [34] để chứng minh dãy các biến ngẫu nhiên $\zeta_i(\omega)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ thỏa mãn Luật mạnh số lớn. Chú ý rằng các biến ngẫu nhiên $\zeta_i(\omega)$, $i = 0, 1, 2, \dots$ nói chung là không độc lập.

Trước tiên ta xây dựng một xích Markov trong không gian trạng thái $\mathcal{G}_k \times Gl(n, \mathbb{R})$ với σ-đại số Borel như sau:

Xích Markov của chúng ta bắt đầu (tại thời điểm $\tau = 0$) từ trạng thái $(V, I) \in \mathcal{G}_k \times Gl(n, \mathbb{R})$, ở đây I là ma trận đơn vị cấp n. Trạng thái $(V_1, Y_1) \in \mathcal{G}_k \times Gl(n, \mathbb{R})$ ở thời điểm $\tau = iT$ sẽ chuyển đến trạng thái $(V_2, Y_2) \in \mathcal{G}_k \times Gl(n, \mathbb{R})$ vào thời điểm tiếp theo $\tau = (i+1)T$ theo quy luật $V_2 = \Phi_{iT,(i+1)T}(\omega)V_1$, $Y_2 = \Phi_{(i+1)T,(i+2)T}(\omega)$. Như vậy thành phần thứ nhất của xích Markov được xây dựng như trên là một xích Markov trên không gian trạng thái compac $\mathcal{G}_k$ sinh bởi nghiệm của phương trình (1.3), thành phần thứ hai của nó là một dãy các biến ngẫu nhiên độc lập (và nó cũng là một xích Markov). Hơn nữa, thành phần thứ hai là độc lập với hiện tại và quá khứ của thành phần thứ nhất nên xác suất chuyển của xích Markov ta xây dựng được là tích xác suất chuyển của hai thành phần.

Cụ thể, lấy tùy ý hai phần tử $x_i = (V_1, Y_1)$, $x_i' = (V_1', Y_1) \in \mathcal{G}_k \times Gl(n, \mathbb{R})$ và A là tập đo được thuộc σ-đại số Borel của $\mathcal{G}_k \times Gl(n, \mathbb{R})$, tức là $A = (B, C)$ với $B \subset \mathcal{G}_k, C \subset Gl(n, \mathbb{R})$. Ký hiệu

$P_i(x_i, A)$: là xác suất chuyển của xích Markov ta xây dựng
tại thời điểm iT ở trạng thái x_i,
đến thời điểm $(i+1)T$ nó nằm trong tập A,

$P_i^{(1)}(V_1, B)$: là xác suất chuyển của xích Markov thành phần thứ nhất tại thời điểm iT ở trạng thái V_1, đến thời điểm $(i+1)T$ ở trạng thái $\Phi_{iT,(i+1)T}(\omega)V_1 \in B$,

$P_i^{(2)}(Y_1, C)$: là xác suất chuyển của xích Markov thành phần thứ hai tại thời điểm iT ở trạng thái $Y_1 = \Phi_{iT,(i+1)T}(\omega)$ đến thời điểm $(i+1)T$ ở trạng thái $\Phi_{(i+1)T,(i+2)T}(\omega) \in C$.

Khi đó ta có đánh giá xác suất chuyển như sau

$$\begin{aligned}
|P_i(x_i, A) - P_i(x_i', A)| &= |P_i^{(1)}(V_1, B)\, P_i^{(2)}(Y_1, C) - P_i^{(1)}(V_1', B)\, P_i^{(2)}(Y_1, C)| \\
&= P_i^{(2)}(Y_1, C)\, |P_i^{(1)}(V_1, B) - P_i^{(1)}(V_1', B)| \\
&\le |P_i^{(1)}(V_1, B) - P_i^{(1)}(V_1', B)|.
\end{aligned}$$

Như vậy để đánh giá hệ số ergodic của xích Markov mà ta xây dựng ta đưa về đánh giá hệ số ergodic của xích Markov của thành phần thứ nhất. Ký hiệu μ là độ đo Riemannian trên không gian compắc $\mathcal{G}_k$. Ta biết rằng xác suất chuyển của xích Markov thành phần thứ nhất trên $\mathcal{G}_k$ có hàm mật độ thỏa mãn phương trình đạo hàm riêng parabolic được xác định bởi phương trình (1.3) (xem Khasminskii [23, trang 96]). Vì $\mathcal{G}_k$ là đa tạp compac và điều kiện không suy biến (3.16) đều theo thời gian nên ta có thể tìm được các hằng số dương $K_3, K_4 > 0$ (xem Aronson [12, trang 891]) sao cho với mọi $i = 0, 1, 2, \ldots$, với mọi $V_1 \in \mathcal{G}_k$ và với mọi tập con $B \subset \mathcal{G}_k$ ta có

$$K_3\mu(B) \le P_i^{(1)}(V_1, B) \le K_4\mu(B). \tag{3.20}$$

trong đó các hằng số K_3, K_4 chỉ phụ thuộc vào n, T, μ_1, μ_2 và hằng số K của phương trình (1.3).

Bây giờ ta sẽ chứng minh rằng

$$\sup |P_i^{(1)}(V_1, B) - P_i^{(1)}(V_1', B)| \leq \frac{K_4}{K_3 + K_4}, \qquad (3.21)$$

trong đó cận trên được lấy với mọi $V_1, V_1' \in \mathcal{G}_k, B \subset \mathcal{G}_k$.

Giả sử ngược lại rằng tồn tại $V_0, V_0' \in \mathcal{G}_k, B_0 \subset \mathcal{G}_k$ sao cho

$$|P_i^{(1)}(V_0, B_0) - P_i^{(1)}(V_0', B_0)| > \frac{K_4}{K_3 + K_4}.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $P_i^{(1)}(V_0, B_0) > P_i^{(1)}(V_0', B_0)$, khi đó ta có

$$P_i^{(1)}(V_0, B_0) - P_i^{(1)}(V_0', B_0) > \frac{K_4}{K_3 + K_4}. \qquad (3.22)$$

Suy ra $P_i^{(1)}(V_0, B_0) > \frac{K_4}{K_3+K_4}$ nên $P_i^{(1)}(V_0, \mathcal{G}_k \setminus B_0) < \frac{K_3}{K_3+K_4}$.

Sử dụng (3.20) cho V_0 và $\mathcal{G}_k \setminus B_0$, ta có

$$K_3\mu(\mathcal{G}_k \setminus B_0) \leq P_i^{(1)}(V_0, \mathcal{G}_k \setminus B_0) < \frac{K_3}{K_3 + K_4}.$$

Suy ra

$$\mu(\mathcal{G}_k \setminus B_0) < \frac{1}{K_3 + K_4}.$$

Sử dụng (3.20) cho V_0' và $\mathcal{G}_k \setminus B_0$ ta nhận được

$$P_i^{(1)}(V_0', \mathcal{G}_k \setminus B_0) \leq K_4\mu(\mathcal{G}_k \setminus B_0) < \frac{K_4}{K_3 + K_4},$$

cho nên

$$P_i^{(1)}(V_0', B_0) > \frac{K_3}{K_3 + K_4}.$$

Do đó ta có

$$P_i^{(1)}(V_0, B_0) - P_i^{(1)}(V_0', B_0) < 1 - \frac{K_3}{K_3 + K_4} = \frac{K_4}{K_3 + K_4}.$$

Ta nhận được mâu thuẫn do điều này trái với (3.22). Vậy khẳng định (3.21) là đúng. Từ đây suy ra xích Markov mà ta đã xây dựng có hệ số ergodic

$$\alpha_i = \alpha(P_i) = 1 - \sup |P_i(x_i, A) - P_i(x_i', A)| \geq \frac{K_3}{K_3 + K_4}, \tag{3.23}$$

trong đó cận trên được lấy với mọi $x_i, x_i' \in \mathcal{G}_k \times G(n, \mathbb{R})$ và A là tập đo được thuộc σ-đại số Borel của $\mathcal{G}_k \times G(n, \mathbb{R})$ (xem thêm chi tiết định nghĩa và cách tính hệ số ergodic trong R. L. Dobrushin [20], M. Rosenblatt-Roth [33], [34]). Vì vậy với mọi $m \in \{1, 2, 3, ...\}$ ta có

$$\alpha^{(m)} := \min_{0 \leq i \leq m-1} \alpha_i \geq \frac{K_3}{K_3 + K_4} > 0.$$

Nhận xét rằng dãy biến ngẫu nhiên $\zeta_i(\omega)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ xây dựng ở trên là 1-phụ thuộc đối với xích Markov mà chúng ta đã xây dựng và các biến ngẫu nhiên ζ_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$ có moment bậc hai bị chặn bởi hằng số $c_1 > 0$ độc lập với $T \in \mathbb{R}, T > 1$ và $i \in \{0, 1, 2, ...\}$ nên

$$D\zeta_i \leq \mathbb{E}|\zeta_i|^2 \leq c_2.$$

Suy ra

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2} D\zeta_n < c_2 \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2} < +\infty.$$

Theo Mệnh đề 3.3.2, dãy biến ngẫu nhiên $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, ...$ thỏa mãn luật mạnh số lớn nên với xác suất 1 ta có đẳng thức sau

$$\limsup_{m \to +\infty} \frac{1}{mT} \sum_{i=0}^{m-1} \ln \left\| \Phi_{(i+1)T, iT}(\omega)|_{\Phi_{0,(i+1)T}(\omega)V} \right\|^{-1}$$
$$= \limsup_{m \to +\infty} \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \zeta_i(\omega) = \limsup_{m \to +\infty} \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \mathbb{E}\zeta_i(\omega).$$

Theo định nghĩa số mũ trung tâm Θ_k và bất đẳng thức (3.19) ta có

$$\begin{aligned}
\Theta_k &= \sup_{\widetilde{V}\in\mathcal{G}_k}\sup_{T>1}\limsup_{m\to+\infty}\frac{1}{mT}\sum_{i=0}^{m-1}\ln\left\|\Phi_{(i+1)T,iT}(\omega)|_{\Phi_{0,(i+1)T}(\omega)\widetilde{V}}\right\|^{-1}\\
&\geq \limsup_{m\to+\infty}\frac{1}{mT}\sum_{i=0}^{m-1}\ln\left\|\Phi_{(i+1)T,iT}(\omega)|_{\Phi_{0,(i+1)T}(\omega)V}\right\|^{-1}\\
&= \limsup_{m\to+\infty}\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1}\zeta_i(\omega) = \limsup_{m\to+\infty}\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1}\mathbb{E}(\zeta_i(\omega))\\
&\geq \limsup_{m\to+\infty}\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1}\left(\frac{1}{T}\mathbb{E}\ln d_k\big[\Phi_{iT,(i+1)T}(\omega)\big] + \frac{1}{T}\ln\frac{\delta(\epsilon)}{2} - 2c_1\sqrt{\epsilon}\right)\\
&= \limsup_{m\to+\infty}\frac{1}{mT}\sum_{i=0}^{m-1}\mathbb{E}\ln d_k\big[\Phi_{iT,(i+1)T}(\omega)\big] + \frac{1}{T}\ln\frac{\delta(\epsilon)}{2} - 2c_1\sqrt{\epsilon}.
\end{aligned}$$

Do đó ta có

$$\Theta_k \geq \gamma_k(T) + \frac{1}{T}\ln\frac{\delta(\epsilon)}{2} - 2c_1\sqrt{\epsilon}. \tag{3.24}$$

Bây giờ ta chuyển sang đánh giá số mũ trung tâm Ω_k của phương trình (1.3). Phương pháp đánh giá tương tự như đối với Θ_k nhưng ở đây ta phải xây dựng một xích Markov thời gian ngược từ mT đến 0.

Trên không gian trạng thái $\mathcal{G}_{n-k+1}\times Gl(n,\mathbb{R})$ với σ-đại số Borel ta xây dựng một xích Markov thời gian ngược bắt đầu (tại thời điểm $\tau = mT$) từ trạng thái $(U, I)\in\mathcal{G}_{n-k+1}\times Gl(n,\mathbb{R})$. Trạng thái $(U_1, Z_1)\in\mathcal{G}_{n-k+1}\times Gl(n,\mathbb{R})$ ở thời điểm $\tau = (m-i)T$ sẽ chuyển đến trạng thái $(U_2, Z_2)\in\mathcal{G}_{n-k+1}\times Gl(n,\mathbb{R})$ ở thời điểm tiếp theo $\tau = (m-i-1)T$ theo quy luật $U_2 = \Phi_{(m-i)T,(m-i-1)T}(\omega)U_1,\ Z_2 = \Phi_{(m-i)T,(m-i-1)T}(\omega)$. Tương tự như phần đánh giá Θ_k ta có thể chứng minh được rằng tồn tại một hằng số dương ν chỉ phụ thuộc vào n, T, μ_1, μ_2 và hằng số K của phương trình (1.3) sao cho với mọi $i = 0, 1, \ldots, m-1$ hệ số ergodic β_i của xác suất chuyển của xích Markov thời gian ngược thỏa mãn bất đẳng thức sau

$$\beta_i > \nu > 0. \tag{3.25}$$

Tiếp theo ta xây dựng dãy biến ngẫu nhiên 1-phụ thuộc vào xích Markov thời gian ngược như sau: Cố định một không gian con $(n-k+1)$-chiều $U \in \mathcal{G}_{n-k+1}$, với mỗi $m \in \mathbb{N}$ ta đặt

$$\zeta_i^m(\omega) = \inf_{y \in U_*} \frac{1}{T} \ln \frac{\left\|\Phi_{mT,(m-i-1)T}(\omega)y\right\|}{\left\|\Phi_{mT,(m-i)T}(\omega)y\right\|} - \frac{1}{T} \ln d_{n-k+1}\left[\Phi_{(m-i)T,(m-i-1)T}(\omega)\right].$$

Tương tự như dãy $\zeta_i,\ i = 0, 1, \ldots$ ta có thể chứng minh các biến ngẫu nhiên $\zeta_i^m(\omega)$ $(i = 0, 1, \ldots, m-1)$ có moment bậc hai bị chặn bởi cùng hằng số $c_1 > 0$ độc lập với T, i và $\epsilon \in (0,1)$ đã chỉ ra ở trên (có thể dễ dàng đạt được cùng hằng số c_1 bằng cách tăng c_1 nếu cần) và

$$\mathbb{E}\zeta_i^m(\omega) \geq \frac{1}{T} \ln \frac{\delta(\epsilon)}{2} - 2c_1\sqrt{\epsilon},$$

$$\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1} \mathbb{E}\zeta_i^m(\omega) \geq \frac{1}{T} \ln \frac{\delta(\epsilon)}{2} - 2c_1\sqrt{\epsilon}. \tag{3.26}$$

Lấy $m \in \mathbb{N}$ lớn, cố định một số $1 < l \in \mathbb{N}$. Với mọi $t \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $1 < l^t < l^{t+1} < m$ ta xét xích Markov thời gian ngược với l^{t+1} bước

$$\zeta_{m-l^{t+1}}^m(\omega), \zeta_{m-l^{t+1}+1}^m(\omega), \ldots, \zeta_{m-1}^m(\omega).$$

Đặt

$$\begin{aligned}
S_i^m(\omega) &:= \sum_{u=0}^{i-1} \zeta_{m-l^{t+1}+u}^m(\omega) \quad (i = 1, 2, \ldots, l^{t+1}),\\
U_{l^{t+1}}^m(\omega) &:= \left\{\omega : \max_{1\leq i\leq l^{t+1}} \left|S_i^m(\omega) - \mathbb{E}S_i^m(\omega)\right|\right\},\\
\widetilde{S}_i^m(\omega) &:= \sum_{u=1}^{i} \zeta_{m-u}^m(\omega) \quad (i = 1, 2, \ldots, l^{t+1}),\\
\widetilde{U}_{l^{t+1}}^m(\omega) &:= \left\{\omega : \max_{1\leq i\leq l^{t+1}} \left|\widetilde{S}_i^m(\omega) - \mathbb{E}\widetilde{S}_i^m(\omega)\right|\right\}.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$S^m_{l^{t+1}}(\omega)=\widetilde{S}^m_{l^{t+1}}(\omega), \widetilde{S}^m_i(\omega)=S^m_{l^{t+1}}(\omega)-S^m_{l^{t+1}-i}(\omega), S^m_i(\omega)=\widetilde{S}^m_{l^{t+1}}(\omega)-\widetilde{S}^m_{l^{t+1}-i}(\omega).$$

Cho một số thực $a > 0$ thì

$$\begin{aligned}
&\Big\{\omega:\ \widetilde{U}^m_{l^{t+1}}(\omega)\ge 2a\Big\}\\
&=\Big\{\omega:\ \max_{1\le i\le l^{t+1}}\Big|\widetilde{S}^m_i(\omega)-\mathbb{E}\widetilde{S}^m_i(\omega)\Big|\ge 2a\Big\}\\
&=\Big\{\omega:\ \max_{1\le i\le l^{t+1}}\Big|[S^m_{l^{t+1}}(\omega)-S^m_{l^{t+1}-i}(\omega)]-[\mathbb{E}S^m_{l^{t+1}}(\omega)-\mathbb{E}S^m_{l^{t+1}-i}(\omega)]\Big|\ge 2a\Big\}\\
&=\Big\{\omega:\ \max_{1\le i\le l^{t+1}}\Big|[S^m_{l^{t+1}}(\omega)-\mathbb{E}S^m_{l^{t+1}}(\omega)]-[S^m_{l^{t+1}-i}(\omega)-\mathbb{E}S^m_{l^{t+1}-i}(\omega)]\Big|\ge 2a\Big\}\\
&\subset\Big\{\omega:\ \max_{1\le i\le l^{t+1}}|S^m_i(\omega)-\mathbb{E}S^m_i(\omega)|\ge a\Big\}=\{\omega:\ U^m_{l^{t+1}}(\omega)\ge a\}
\end{aligned}$$

nên

$$\mathbb{P}\Big(\Big\{\omega:\ \widetilde{U}^m_{l^{t+1}}(\omega)\ge 2a\Big\}\Big)\le\mathbb{P}\Big(\{\omega:\ U^m_{l^{t+1}}(\omega)\ge a\}\Big).$$

Theo Mệnh đề 3.3.3 và (3.25) thì

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(\Big\{\omega:\ \widetilde{U}^m_{l^{t+1}}(\omega)\ge 2\sqrt{\epsilon}\Big\}\Big)&\le\mathbb{P}\Big(\Big\{\omega:\ U^m_{l^{t+1}}(\omega)\ge\sqrt{\epsilon}\Big\}\Big)\\
&\le(20c_2)^2\epsilon^{-2}\nu^2 l^{t+1}c_1,
\end{aligned}\tag{3.27}$$

trong đó $c_2 = 1+\sqrt{6}$. Đặt

$$\begin{aligned}
A_{m,t} &:= \Big\{\omega:\ \max_{l^t\le i<l^{t+1}}|S^m_i(\omega)-\mathbb{E}S^m_i(\omega)|\ge\sqrt{\epsilon}i\Big\},\\
B_{m,t} &:= \Big\{\omega:\ \max_{l^t\le i<l^{t+1}}|S^m_i(\omega)-\mathbb{E}S^m_i(\omega)|\ge\sqrt{\epsilon}l^t\Big\},\\
\widetilde{A}_{m,t} &:= \Big\{\omega:\ \max_{l^t\le i<l^{t+1}}|\widetilde{S}^m_i(\omega)-\mathbb{E}\widetilde{S}^m_i(\omega)|\ge 2\sqrt{\epsilon}i\Big\},\\
\widetilde{B}_{m,t} &:= \Big\{\omega:\ \max_{l^t\le i<l^{t+1}}|\widetilde{S}^m_i(\omega)-\mathbb{E}\widetilde{S}^m_i(\omega)|\ge 2\sqrt{\epsilon}l^t\Big\},
\end{aligned}$$

ta có $B_{m,t} \supset A_{m,t}$ và $\widetilde{B}_{m,t} \supset \widetilde{A}_{m,t}$. Suy ra

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\widetilde{A}_{m,t}) &\leq \mathbb{P}(\widetilde{B}_{m,t}) \leq \mathbb{P}\left(\left\{\omega : \ \widetilde{U}^m_{l^{t+1}}(\omega) \geq 2\sqrt{\epsilon} l^t\right\}\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(\left\{\omega : \ U^m_{l^{t+1}}(\omega) \geq \sqrt{\epsilon} l^t\right\}\right) \\
&\leq (20c_2)^2 \epsilon^{-1} l^{-2t} \nu^2 l^{t+1} c_1 \\
&= (20c_2)^2 \epsilon^{-1} \nu^2 l^{-t+1} c_1.
\end{aligned}$$

Lấy $t^*, t_1 \in \mathbb{N}$, $t^* < t_1$ và $l^{t_1+1} < m$ thì

$$\begin{aligned}
\sum_{t=t^*}^{t_1} \mathbb{P}(\widetilde{A}_{m,t}) \leq \sum_{t=t^*}^{t_1} \mathbb{P}(\widetilde{B}_{m,t}) &= \frac{c_1(20c_2)^2\nu^2}{\epsilon} [l^{-t^*+1} + l^{-t^*} + \ldots + l^{-t_1+1}] \\
&\leq \frac{c_1(20c_2)^2\nu^2}{\epsilon} l^{-t^*+1} [1 + l^{-1} + l^{-2} + \ldots + l^{-(t_1-t^*)} + \ldots] \\
&= \frac{c_1(20c_2)^2\nu^2}{\epsilon} l^{-t^*+1} \frac{1}{1 - l^{-1}}. \qquad (3.28)
\end{aligned}$$

Từ (3.28) suy ra với mọi $\vartheta > 0$ đều tồn tại $t_0 \in \mathbb{N}$ đủ lớn sao cho mọi $k > t_0$, $m = l^k + 1$, ta có

$$\mathbb{P}(F_m) \leq \sum_{t=t_0}^{k-1} \mathbb{P}(\widetilde{A}_{m,t}) < \vartheta,$$

trong đó

$$F_m := \bigcup_{t=t_0}^{k-1} \widetilde{A}_{m,t}, \quad m = l^k + 1 \quad (k \geq t_0 + 1).$$

Đặt

$$H_m := \Omega \setminus F_m, \quad \hat{H}_{t_0} := \bigcap_{r=t_0+1}^{+\infty} \bigcup_{k=r}^{+\infty} H_{l^k+1},$$

thì $\mathbb{P}(H_m) = 1 - \mathbb{P}(F_m) > 1 - \vartheta$ và vì $H_{l^k+1} \supset H_{l^{k+1}+1} \supset H_{l^{k+2}+1} \supset \cdots$ nên

$$\mathbb{P}(\hat{H}_{t_0}) = \lim_{k \to +\infty} \mathbb{P}(H_{l^k+1}) \geq 1 - \vartheta.$$

Ta đặt

$$\hat{H} := \bigcup_{\hat{t}=t_0}^{+\infty} \hat{H}_{\hat{t}}.$$

Từ (3.28) suy ra $\mathbb{P}(\hat{H}_{t_0})$ tiến đến 1 khi $t_0 \to \infty$. Do đó

$$\mathbb{P}(\hat{H}) = \lim_{\hat{t}\to+\infty} \mathbb{P}(\hat{H}_{\hat{t}}) = 1.$$

Với mọi $\omega_0 \in \hat{H}$ bất kỳ, tồn tại $\hat{t} \in \mathbb{N}$ sao cho $\omega_0 \in \hat{H}_{\hat{t}}$. Do định nghĩa của $\hat{H}_{\hat{t}}$ suy ra tồn tại một dãy $k_1, k_2, \ldots \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $\hat{t}+1 < k_1 < k_2 < \ldots$ sao cho $\omega_0 \in H_{l^{k_i}+1}$ với mọi $i = 1, 2, \ldots$. Cho trước $j_0 \in \mathbb{N}$, ta xét trường hợp $m = l^{k_{j_0}} + 1$, vì $\omega_0 \in H_{l^{k_{j_0}}+1}$ nên với mọi $t \in [\hat{t}, k_{j_0} - 1]$ ta có $\omega_0 \notin \widetilde{A}_{m,t}$. Do đó với mọi $u \in [l^{\hat{t}}, l^{k_{j_0}} - 1]$ ta có

$$|\widetilde{S}^m_u(\omega_0) - \mathbb{E}\widetilde{S}^m_u(\omega)| < 2u\sqrt{\epsilon}$$

nên

$$\frac{1}{u}\widetilde{S}^m_u(\omega_0) > \frac{1}{u}\mathbb{E}\widetilde{S}^m_u(\omega) - 2\sqrt{\epsilon}.$$

Từ (3.26) ta có

$$\begin{aligned}
\frac{1}{u}\widetilde{S}^m_u(\omega_0) &\geq \frac{1}{u}\sum_{i=m-u}^{m-1} \mathbb{E}\zeta^m_i(\omega) - 2\sqrt{\epsilon} \\
&\geq \frac{1}{T}\ln\frac{\delta(\epsilon)}{2} - 2c_1\sqrt{\epsilon} - 2\sqrt{\epsilon}.
\end{aligned}$$

Mặt khác ta có

$$\begin{aligned}
\frac{1}{u}\widetilde{S}^m_u(\omega_0) &= \frac{1}{u}\sum_{i=m-u}^{m-1} \zeta^m_i(\omega_0) \\
&= -\sum_{j=0}^{u-1}\frac{1}{uT}\ln\left\|\Phi_{jT,(j+1)T}(\omega_0)\big|_{\Phi_{0,jT}(\omega_0)\circ\Phi_{mT,0}(\omega_0)U}\right\| \\
&\qquad + \sum_{j=0}^{u-1}\frac{1}{uT}\ln d_k\big[\Phi_{jT,(j+1)T}(\omega_0)\big].
\end{aligned}$$

Vì vậy, với mọi $\omega_0 \in \hat{H}$ và $u \in [l^{\hat{t}}, l^{k_i} - 1]$ $(i = 1, 2, \ldots)$ ta có

$$-\sum_{j=0}^{u-1} \frac{1}{uT} \ln \left\| \Phi_{jT,(j+1)T}(\omega_0)\big|_{\Phi_{0,jT}(\omega_0)\circ\Phi_{(l^{k_i}+1)T,0}(\omega_0)U} \right\|$$

$$+\sum_{j=0}^{u-1} \frac{1}{uT} \ln d_k\big[\Phi_{jT,(j+1)T}(\omega_0)\big] \geq \frac{1}{T}\ln\frac{\delta(\epsilon)}{2} - (2c_1+1)\sqrt{\epsilon}. \quad (3.29)$$

Vì đa tạp Grassmann $\mathcal{G}_{n-k+1}$ là compac nên dãy điểm nằm trong đa tạp $\big\{\Phi_{(l^{k_i}+1)T,0}(\omega_0)U\big\}$, $i = 1, 2, \ldots$ sẽ chứa một dãy con hội tụ đến một điểm thuộc đa tạp đó. Để đơn giản cho ký hiệu ta giả sử dãy $\big\{\Phi_{(l^{k_i}+1)T,0}(\omega_0)U\big\}$, $i = 1, 2, \ldots$ hội tụ đến $\widetilde{U} \in \mathcal{G}_{n-k+1}$. Sử dụng sự hội tụ này và chú ý rằng $k_1 < k_2 < \ldots$ tiến ra $+\infty$, từ (3.29) ta có bất đẳng thức sau với mọi $u \geq l^{\hat{t}}$

$$\sum_{j=0}^{u-1} \frac{1}{uT} \ln \left\| \Phi_{jT,(j+1)T}(\omega_0)\big|_{\Phi_{0,jT}(\omega_0)\widetilde{U}} \right\|$$

$$\leq \sum_{j=0}^{u-1} \frac{1}{uT} \ln d_k[\Phi_{jT,(j+1)T}(\omega_0)] - \frac{1}{T}\ln\frac{\delta(\epsilon)}{2} + (2c_1+1)\sqrt{\epsilon}. \quad (3.30)$$

Vì các biến ngẫu nhiên $d_k[\Phi_{jT,(j+1)T}(\omega)]$ là độc lập và có moment bậc hai bị chặn bởi $c_1 > 0$ nên đẳng thức sau có được với xác suất 1

$$\limsup_{m\to+\infty} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{mT} \ln d_k[\Phi_{jT,(j+1)T}(\omega)] = \limsup_{m\to+\infty} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{mT} \ln \mathbb{E} d_k[\Phi_{jT,(j+1)T}(\omega)].$$

Vì $\mathbb{P}(\hat{H}) = 1$, từ (3.30) và định nghĩa của Ω_k suy ra với mọi $T > 1$ thì

$$\begin{aligned}
\Omega_k &\leq \limsup_{m\to+\infty} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{mT} \ln d_k\big[\Phi_{jT,(j+i)T}(\omega)\big] + (2c_1+1)\sqrt{\epsilon} - \frac{1}{T}\ln\frac{\delta(\epsilon)}{2} \\
&\leq \limsup_{m\to+\infty} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{mT} \ln \mathbb{E} d_k\big[\Phi_{jT,(j+i)T}(\omega)\big] + (2c_1+1)\sqrt{\epsilon} - \frac{1}{T}\ln\frac{\delta(\epsilon)}{2} \\
&\leq \gamma_k(T) + (2c_1+1)\sqrt{\epsilon} - \frac{1}{T}\ln\frac{\delta(\epsilon)}{2}. \quad (3.31)
\end{aligned}$$

Từ Định lý 3.2.4, Định lý 3.2.5 và các bất đẳng thức (3.24), (3.31) suy ra

$$|\Omega_k - \gamma_k(T)| \leq (2c_1 + 1)\sqrt{\epsilon} - \frac{1}{T}\ln\frac{\delta(\epsilon)}{2}$$
$$|\Theta_k - \gamma_k(T)| \leq (2c_1 + 1)\sqrt{\epsilon} - \frac{1}{T}\ln\frac{\delta(\epsilon)}{2}.$$

Định lý được chứng minh. □

Định lý 3.3.5 *Nếu phương trình (1.3) thỏa mãn điều kiện không suy biến (3.16) thì với mọi $k \in \{1, 2, ..., n\}$ giới hạn sau tồn tại và bằng với số mũ bổ trợ*

$$\gamma_k := \lim_{T\to+\infty} \gamma_k(T) = \gamma_k(\omega). \tag{3.32}$$

Hơn nữa ta có đẳng thức sau

$$\Omega_k = \lambda_k = \Theta_k = \gamma_k.$$

Chứng minh. Với $\epsilon \in (0,1)$ chọn $T_\epsilon \in \mathbb{R}, T_\epsilon > 1$ đủ lớn để sao cho với mọi $T \geq T_\epsilon$ ta có

$$|\frac{1}{T}\ln\frac{\delta(\epsilon)}{2}| < \sqrt{\epsilon}.$$

Từ (3.17) và (3.18) suy ra

$$|\gamma_k(T_1) - \gamma_k(T_2)| \leq (4c_1 + 6)\sqrt{\epsilon}$$

với T_1, $T_2 \in \mathbb{R}$, $T_1 \geq T_\epsilon$ và $T_2 \geq T_\epsilon$. Do đó giới hạn (3.32) tồn tại. Vì ta có thể chọn $T > 1$ đủ lớn để số hạng $\frac{1}{T}\ln\frac{\delta(\epsilon)}{2}$ bé tùy ý và $\gamma_k(T)$ gần tới γ_k tùy ý nên ta có các bất đẳng thức sau:

$$|\Omega_k - \gamma_k| \leq 3(c_1 + 1)\sqrt{\epsilon},$$

$$|\Theta_k - \gamma_k| \leq 3(c_1 + 1)\sqrt{\epsilon}.$$

Vì $\epsilon \in (0,1)$ là tùy ý nên suy ra

$$\Omega_k = \gamma_k = \Theta_k. \tag{3.33}$$

Theo Định lý 3.2.4 và Định lý 3.2.5 ta có $\Theta_k \leq \lambda_k \leq \Omega_k$ nên

$$\Omega_k = \lambda_k = \Theta_k = \gamma_k. \tag{3.34}$$

Định lý được chứng minh. □

3.4 Dáng điệu tiệm cận của số mũ Lyapunov lớn nhất của phương trình vi phân với nhiễu ngẫu nhiên Itô nhỏ

Xét phương trình vi phân tuyến tính tất định n-chiều

$$dX(t) = F_0(t)X(t)dt, \tag{3.35}$$

trong đó $t \in \mathbb{R}^+, F_0(t) = (f_{i0}^j)_{n\times n}$ là ma trận hàm, liên tục, bị chặn bởi hằng số K. Ta xét phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính n-chiều có dạng

$$\begin{aligned} &dX(t) = F_0(t)X(t)dt + \sigma \sum_{r=1}^{m} F_r(t)X(t)dW^r(t),\\ &X(t_0) = x_0, \end{aligned} \tag{3.36}$$

trong đó $F_r(t) = (f_{ir}^j(t))_{n\times n}$ $(r = 1, 2, \ldots, m)$ là các ma trận hàm, liên tục, bị chặn bởi một hằng số K và phương trình (3.36) thỏa mãn điều kiện không suy biến (3.16). Ta có thể coi phương trình (3.36) là phương trình vi phân tất định (3.35) được nhiễu bởi tiếng ồn trắng có dạng ngẫu nhiên Itô tuyến tính thỏa mãn điều kiện không suy biến (3.16). Khi đó ta có định lý sau.

Định lý 3.4.1 *Số mũ Lyapunov lớn nhất của phương trình (3.36) sẽ tiến đến số mũ trung tâm lớn nhất của phương trình (3.35) khi σ tiến đến 0.*

Chứng minh định lý này tương tự như chứng minh Định lý 1 trong bài báo "Tính ổn định ngẫu nhiên của số mũ Lyapunov lớn nhất" của Nguyễn Đình Công [13].

Kết luận của Luận án

Luận án nghiên cứu tính ổn định và số mũ Lyapunov của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính.

Những kết quả chính của luận án

1. Luận án chỉ ra được một số mối liên hệ giữa các loại ổn định ngẫu nhiên của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính.
2. Luận án chứng minh được một số tính chất của số mũ trung tâm, số mũ bổ trợ. Chỉ ra sự trùng nhau của số mũ Lyapunov và số mũ trung tâm của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính thỏa mãn điều kiện không suy biến.

Các vấn đề cần tiếp tục nghiên cứu

Các nghiên cứu thực hiện trong Luận án này thuộc hướng nghiên cứu định tính phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô. Các kết quả bước đầu về phổ Lyapunov và các phổ liên quan của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính tạo ra cơ sở để tác giả có thể tiếp tục nghiên cứu các hệ có cấu trúc phức tạp hơn như hệ suy biến hoặc hệ có tính không suy biến yếu hơn so với giả thiết đặt ra trong luận án (hệ số không suy biến μ_1, μ_2 không phụ thuộc vào t chẳng hạn).

Sử dụng các kết quả và các công cụ trong luận án này tác giả có thể tiếp tục nghiên cứu tính chất ổn định của phổ Lyapunov, tính chất ổn định nghiệm của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tuyến tính; nghiên cứu các tính chất định tính của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô phi tuyến.

Một hướng phát triển thú vị là nghiên cứu tính chất định tính của các hệ đặc biệt (hệ vật lý, hệ cơ học, hệ sinh học) trong các mô hình ngẫu nhiên dạng phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô: phương trình Schor$\ddot{o}$dinger ngẫu nhiên, phương trình hệ sinh thái thú-mồi trong môi trường ngẫu nhiên...

Danh mục công trình công bố

1. Nguyễn Thị Thúy Quỳnh (2004), *Using some Financial Mathematical Methods for Analysing Vietnam stock's Market*, Journal of Science and Technique, No. 108, 86-93.

2. Nguyễn Thị Thúy Quỳnh (2009), *On the stability of solutions of Ito differential equations*, Acta Math. Vietnamica, Vol. 35, No. 2, 253-261.

3. Nguyễn Đình Công, Nguyễn Thị Thúy Quỳnh (2009), *Lyapunov exponents and central exponents of linear Ito stochastic diferential equations*, Acta Math. Vietnamica (đã được nhận đăng).

4. Nguyễn Đình Công, Nguyễn Thị Thúy Quỳnh (2009), *Coincidence of Lyapunov exponents and central exponents of linear Ito stochastic differential equations with nondegenerate stochastic term*, preprint,Viện Toán học, Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam, 09/09 và đã gửi đăng.

Tài liệu tham khảo

Tiếng Việt

[1] Nguyễn Đình Công (1999) *Tổng quan về lý thuyết số mũ Lyapunov*, Bài giảng cho sinh viên cao học của Viện Toán học.

[2] Nguyễn Đình Công (2002) **Lý thuyết hệ động lực ngẫu nhiên**, NXB Đại học Quốc gia Hà nội.

[3] Nguyễn Văn Đạo, Hoàng Hữu Đường *dịch* (1979), **Phương trình vi phân, hệ động lực và đại số tuyến tính**, NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp.

[4] Nguyễn Thế Hoàn, Phạm Phu (2000) **Cơ sở phương trình vi phân và lý thuyết ổn định**, NXB Giáo dục.

[5] Nguyễn Viết Phú, Nguyễn Duy Tiến (2004) **Cơ sở lý thuyết xác suất**, NXB Đại học Quốc gia Hà nội.

[6] Nguyễn Đình Phư (2002) **Phương trình vi phân**, NXB Đại học Quốc gia thành phố Hồ Chí Minh.

[7] Trần Hùng Thao (2000) **Tích phân ngẫu nhiên và phương trình vi phân ngẫu nhiên**, NXB Khoa học và Kỹ thuật.

[8] Nguyễn Duy Tiến (2001) **Các mô hình xác suất và ứng dụng**, NXB Đại học Quốc gia Hà nội.

[9] Nguyễn Duy Tiến, Vũ Việt Yên (2001) **Lý thuyết xác suất**, NXB Giáo dục.

[10] Trần Đức Vân (2005) **Lý thuyết phương trình vi phân đạo hàm riêng**, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

Tiếng Anh

[11] L. Arnold (1988) **Random dynamical systems**. Springer-Verlag, Berlin.

[12] D. G. Aronson (1967), *Bounds for the fundamental solution of a parabolic equation*, Bull. Amer. Math. Soc. 73, 890-896.

[13] Nguyễn Đình Công (1988), *Stochastic stability test for the highest Lyapunov exponent*, Mat Zametki, No 1, (82-97); English transl. in Math 43. Notes, 43, No 1, 49-57.

[14] Nguyễn Đình Công (1990), *On central and auxiliary exponets of linear systems with coefficients perturbed by a white noise*, Diffrentsial'nye Uravneniya, Vol. 26, No 3, 420-427, English transl. in Differential equation, Vol. 26, No 3, 307-313.

[15] Nguyễn Đình Công (1990), *On Lyapunov exponents and central exponents of linear systems of differential equations with almost*

periodic coefficients under random perturbation, Acta Mathematica Vietnamica, Vol. 15, No 1, 69-73.

[16] Nguyễn Đình Công (1991), *Lyapunov exponents and central exponents of systems with weakly varying coefficients under small random perturbation*, Differensial'nye Uravneniya, Vol. 27, No 10, 1712–1720; English transl. in *Differential Equations,* **27**(1991), # 10, 1208–1213.

[17] Nguyễn Đình Công (1993), *A property of systems of differential equations perturbed by white noises and its applications to the stochastic continuity of Lyapunow exponents*, Stochastic Anal. Appl. Vol. 11, 423-439.

[18] Nguyễn Đình Công (1997), *Lower estimation for the Lyapunov exponents of linear systems of differential equations perturbed by white noise*, Vietnam Journal of Mathematics, No 25, 253-265.

[19] Nguyễn Đình Công (2001), *Lyapunov Spectrum of Nonautonomous Linear Stochastic Differential Equations*, Stochastics and Dynamics, Vol. 1, No. 1, 127-157.

[20] R. L. Dobrushin (1956) *The central limit theorem for non-homogeneous Markov chains.* Teor. Verojatn. Primen **1**, 72-89, 365-425. English translation: Theory of Probability and Applications Vol. 1, 65-80, 329-383.

[21] Avner Friedman (1964), **Partial differential equations of parabolic type**, Prentice-Hall.

[22] I. I. Gikhman and A. B. Skorokhod (1982), **Stochastic Differenttial Equation and their Applications**, Naukova Dumka, 1982, in Russian.

[23] R. Z. Khasminskii (1980), **Stochastic stability of differential equations**, Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, The Netherlands Rockville, Maryland, USA.

[24] P. E. Kloeden, E. Platen (1992), **Numerical Solution of Stochastic Differential Equations**, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

[25] H. Kunita (1990), **Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations**, Cambridge Univ. Press.

[26] O. A. Ladyzenskaja, V. A. Solonnikov, N. N. Ural'ceva (1968), **Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type**, American Mathematical Society.

[27] V. M. Millionshchikov (1970), *Theory of characteristic Lyapunov indices*, Mat. Zametki, Vol. 7, No. 4, 503-513; English transl. in Math. Notes, Vol. 7, 305-311.

[28] V. M. Millionshchikov (1983), *Typical properties of conditional exponential stability I*, Differentsial'nye Uravneniya, Vol. 19, No 8, 1344-1356; English transl. in Differential equations, Vol. 19(1983), 1008-1018.

[29] V. M. Millionshchikov (1986), *Formulae for the Lyapunov exponents of a family of endomorphirms of a metrized vector bundle*,

Mat. Zametki, Vol. 39, No 1, 29-51; English transl. in Math. Notes, Vol. 39, No1-2, 17-30.

[30] OSELEDETS V. I. (1968), *A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems.* Trans. Moscow Math. Soc., No 19, 197-231.

[31] PARDOUX E. AND WIHSTUTZ V. (1988), *Lyapunov exponents and rotation number of two-dimesional linear stochastic systems with small diffusion.* SIAM Journal of Applied Mathematics, Vol. 48, 442-457.

[32] PINSKY M. A. AND WIHSTUTZ V. (1988), *Lyapunov exponents of nilpotent Itô systems.* Stochastics, Vol. 25, 43-47.

[33] M. ROSENBLATT-ROTH (1963), *Some Theorems Concerning the Law of Large Numbers for Non-Homogeneous Markoff Chains*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 1, 433-445.

[34] M. ROSENBLATT-ROTH (1964), *Some Theorems Concerning the Strong Law of Large Numbers for Non-Homogeneous Markoff Chains*, Annals of Mathematical Statistics, 566-576.

[35] A. N. SHIRYAEV (1996), **Probability**, 2nd Edition. Springer-Verlag, Berlin.

[36] DANIEL W. STROOCK (2005), **An Introduction to Markov Processes**, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

[37] WIHSTUTZ V. (1986), *Parameter dependence of the Lyapunov exponent for linear stochastic systems. A survey.* In: Arnold L. and

Wihstutz V. (eds). *Lyapunov exponents.* Proccedings of a conference, Bremen, Vol. 1186 of Lecture Notes in Mathematics. Springer Verlag, 200-215.

[38] David Williams (1991), **Probability with martingales,** Cambridge University Press.

Tiếng Nga

[39] Б. Ф. Былов, Р. Е. Виноград, Д. М. Гробман, В. В. Немыцкий (1966), **Теория показателей Ляпунова,** Наука, Москва.

[40] Б. П. Демидович (1967), **Лекции по математической теории устойчивости,** Наука, Москва.

[41] В. М. Миллионщиков (1987), *Формулы для показателей Ляпунова систем линейных дифференциальных уравнений,* Труды Института прикладной математики имени И. Н. Векуа, **22**(1987), 150-179. Тбилисский Государственный Университет, Тбилиси, Грузия.