Tóm tắt

Cho $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ là vành đa thức n biến trên trường k tùy ý và đồ thị Γ trên tập đỉnh $V = \{1, \ldots, n\}$. Ta liên kết với Γ iđêan

$$I(\Gamma) := \Big(x_i x_j \mid \{i, j\} \in \Gamma\Big)$$

trong vành R và gọi $I := I(\Gamma)$ là *iđêan cạnh* của Γ. Vấn đề nghiên cứu của luận án là đặc trưng tập $\mathrm{Ass}(I^t)$ thông qua các tính chất tổ hợp của đồ thị. Kết quả chính của luận án là một số điều kiện cần hoặc đủ (hoàn toàn tổ hợp) để iđêan nguyên tố sinh bởi tập con của tập các biến là iđêan nguyên tố liên kết của I^t. Trong trường hợp $t = 2, 3, 4$ chúng tôi đưa ra phân loại hoàn toàn dạng các iđêan nguyên tố liên kết của I^t. Qua đó, ta có thể mô tả tường minh tập ổn định $\mathrm{Ass}^\infty(I)$ và ước lượng được chỉ số ổn định $\mathrm{astab}(I)$. Các kết quả trên còn được sử dụng để nghiên cứu tính giảm của hàm depth.

Luận án được chia thành bốn chương.

Trong Chương 1, chúng tôi giới thiệu một số khái niệm và kết quả về iđêan đơn thức và bão hòa của nó.

Trong Chương 2, chúng tôi tìm cách mô tả các iđêan nguyên tố liên kết nhúng của lũy thừa của iđêan cạnh.

Mục đích của chương 3 là phân loại đồ thị t-bão hòa và dạng các iđêan nguyên tố nhúng của I^t với t nhỏ.

Mục đích của chương 4 là nghiên cứu về tính giảm của hàm depth. Cụ thể, chúng tôi trả lời câu hỏi: dưới điều kiện nào thì $\operatorname{depth} R/I^t = 1$ kéo theo $\operatorname{depth} R/I^{t+1} = 0$ cho trường hợp $t = 1, 2$.

Abstract

Let $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ be a polynomial ring in n variables over a field k. Let Γ be a simple graph with vertex set $\{1, \ldots, n\}$. The squarefree monomial ideal

$$I = (x_i x_j \mid \{i,j\} \in \Gamma) \subset R$$

is called the *edge ideal* of Γ. The aim of this thesis is to present combinatorial characterizations for the associated primes of the tth power I^t for some t. To do that, we first describe the monomials of the saturation of I^t in terms of vertex weighted graphs associated with the monomials. This description allows us to characterize the embedded associated primes of I^t as covers of which contain certain types of subgraphs of Γ. For some small powers of I, we completely classify the associated primes of I^t in terms of Γ. As an application, we study the decrease of depth function.

This thesis is divided in four chapters.

Chapter 1 introduces some concepts, results of monomial ideals and the saturation of those.

In Chapter 2, we describe the embedded associated primes of powers of edge ideals.

In Chapter 3, we obtain a complete classification of the t-saturation graphs and the associated primes of I^t in terms of Γ for $t = 2, 3, 4$.

Chapter 4 shows when $\operatorname{depth} R/I^{t+1} = 0$ if $\operatorname{depth} R/I^t = 1$ for $t = 1, 2$.

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi. Các kết quả viết chung với các tác giả khác đã được sự nhất trí của đồng tác giả đưa vào luận án. Các kết quả nêu trong luận án là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ một công trình nào khác.

Tác giả

Hà Thị Thu Hiền

Lời cám ơn

Luận án được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của Thầy tôi, GS. TSKH. Ngô Việt Trung. Thầy đã dạy cho tôi kiến thức, kinh nghiệm trong nghiên cứu và luôn quan tâm giúp đỡ tôi trong mọi mặt. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn và kính trọng sâu sắc của mình đến Thầy.

Tác giả xin chân thành cám ơn TS. Hà Minh Lam, người đã giúp đỡ cho tác giả rất nhiều trong nghiên cứu và đặc biệt đóng góp những ý kiến quý báu cho Luận án.

Tác giả trân trọng cảm ơn Viện Toán học, Trung tâm đào tạo sau đại học và các phòng chức năng đã tạo điều kiện tốt nhất giúp tác giả học tập và nghiên cứu tại Viện Toán học. Đặc biệt, tác giả chân thành cảm ơn GS. TSKH. Lê Tuấn Hoa và GS. TSKH. Nguyễn Tự Cường đã tạo điều kiện thuận lợi cho tác giả được tham gia các sinh hoạt khoa học tại phòng Đại số của Viện Toán học và tại Viện nghiên cứu cao cấp về Toán.

Trong quá trình học tập, tác giả cũng đã nhận được sự giúp đỡ và động viên của các nghiên cứu viên và các nghiên cứu sinh của phòng Đại số. Tác giả xin chân thành cám ơn.

Cuối cùng tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn vô hạn đến đại gia đình của mình, những người luôn yêu thương và mong mỏi tác giả ngày một tiến bộ.

Tác giả
Hà Thị Thu Hiền

Mục lục

Mở đầu

Một trong những hướng phát triển gần đây của Đại số giao hoán là Đại số giao hoán Tổ hợp. Nền tảng cho sự hình thành và phát triển của hướng này là chứng minh của Stanley năm 1975 cho giả thuyết về chặn trên (Upper Bound Conjecture) đối với đơn hình cầu. Tuy ra đời gần đây nhưng Đại số giao hoán Tổ hợp đã phát triển tương đối nhanh và đạt được những thành tựu đáng kể. Một số vấn đề trong Tổ hợp có thể chuyển thành các vấn đề trong Đại số rồi sau đó ta có thể sử dụng các kỹ thuật và phương pháp của Đại số để đưa ra lời giải cho bài toán ban đầu. Tương tự, người ta cũng có thể nghiên cứu một số cấu trúc đại số bằng các phương pháp tổ hợp. Mục đích của luận án là nghiên cứu vấn đề sau đây của Đại số giao hoán Tổ hợp.

Cho R là vành Noether và I là iđêan của R. Trong [1] và [2], Brodmann đã chỉ ra rằng tập các iđêan nguyên tố liên kết của I^t ổn định với t đủ lớn, tức là tồn tại số nguyên dương t_0 sao cho $\operatorname{Ass}(I^t) = \operatorname{Ass}(I^{t_0})$ với mọi $t \geq t_0$. Tập $\operatorname{Ass}(I^{t_0})$ được gọi là *tập ổn định* của I và được ký hiệu bởi $\operatorname{Ass}^{\infty}(I)$. Số t_0 nhỏ nhất sao cho điều trên xảy ra được gọi là *chỉ số ổn định* của $\operatorname{Ass}(I^t)$ và được ký hiệu bởi $\operatorname{astab}(I)$. Vì vậy người ta quan tâm đến vấn đề xác định tập $\operatorname{Ass}^{\infty}(I)$ và ước lượng giá trị $\operatorname{astab}(I)$.

Nếu I là một iđêan tùy ý thì rất khó giải quyết vấn đề trên. Do đó người ta thường tập trung vào các iđêan có thêm các cấu trúc tổ hợp [5], [7], [8], [10], [11], [23], [29]. Ở đây chúng tôi xét lớp iđêan cạnh của đồ thị và tìm cách đặc trưng tập $\operatorname{Ass}(I^t)$ thông qua các tính chất tổ hợp của đồ thị.

Cho đồ thị Γ trên tập đỉnh $V = \{1, \ldots, n\}$, ta liên kết với Γ iđêan

$$I(\Gamma) := \Big(x_i x_j \mid \{i, j\} \in \Gamma\Big)$$

trong vành đa thức n biến $R := k[x_1, \ldots, x_n]$ trên một trường k tùy ý. Ta gọi $I(\Gamma)$ là *iđêan cạnh* của Γ.

Mọi iđêan nguyên tố liên kết của một iđêan đơn thức đều sinh bởi tập con của tập các biến. Ta có thể ký hiệu các iđêan này dưới dạng $P_F := (x_i \mid i \in F)$, trong đó $F \subseteq \{1, \dots, n\}$. Đối với lũy thừa của một iđêan cạnh I thì F phải là phủ đỉnh của đồ thị. Đặc biệt, các iđêan nguyên tố liên kết tối tiểu ứng với các phủ tối tiểu. Do đó ta chỉ cần quan tâm tới các iđêan nguyên tố liên kết không phải là tối tiểu. Để thuận tiện ta gọi các iđêan nguyên tố liên kết không tối tiểu của I^t là iđêan nguyên tố nhúng của I^t và ký hiệu $\operatorname{Emb}(I^t)$ là tập tất cả các iđêan đó.

Cho $I = I(\Gamma)$ là iđêan cạnh của đồ thị Γ. Simis, Vasconcelos và Villarreal [25] đã chỉ ra rằng $\operatorname{Emb}(I^t) = \emptyset$ với mọi t khi và chỉ khi Γ không có chu trình lẻ. Nếu Γ có chu trình lẻ thì Chen, S. Morey và A. Sung [5] đã xây dựng thuật toán xác định các iđêan nguyên tố nhúng của I^t với t đủ lớn. Trong [20], Martinez-Bernal, Morey và Villarreal đã chỉ ra rằng $\operatorname{Ass}(I^t) \subseteq \operatorname{Ass}(I^{t+1})$ với mọi t. Gần đây, tập các iđêan nguyên tố liên kết của lũy thừa của một iđêan đơn thức không chứa bình phương đã được nghiên cứu bởi Ha và Morey [10], Francisco, Ha và A. Van Tuyl [9]. Tuy nhiên các kết quả đó khi áp dụng cho iđêan cạnh thì không thể đưa ra mô tả tường minh cho các iđêan nguyên tố nhúng của I^t.

Với $t = 2$, Terai và Trung [28] đã đưa ra một đặc trưng tổ hợp cho tập các iđêan nguyên tố nhúng. Họ chỉ ra rằng $P_F \in \operatorname{Emb}(I^2)$ khi và chỉ khi F là tối tiểu trong các phủ chứa lân cận đóng của một tam giác. Một kết quả yếu hơn đã được tìm thấy độc lập bởi hai tác giả Herzog và Hibi [12] cho trường hợp P_F là iđêan thuần nhất cực đại. Luận án nghiên cứu vấn đề đặc trưng tổ hợp các iđêan nguyên tố liên kết $P_F \in \operatorname{Emb}(I^t)$ với một giá trị $t \geq 3$ cố định.

Kết quả chính của luận án là một số điều kiện cần hoặc đủ (hoàn toàn tổ hợp) để $P_F \in \operatorname{Emb}(I^t)$. Trong trường hợp $t = 2, 3, 4$ chúng tôi phân loại hoàn toàn dạng các iđêan nguyên tố nhúng của I^t. Qua đó, ta có thể mô tả tường minh tập ổn định $\operatorname{Ass}^\infty(I)$ và ước lượng được chỉ số ổn định $\operatorname{astab}(I)$. Các kết quả trên còn được sử dụng để nghiên cứu tính giảm của hàm depth.

Sử dụng kỹ thuật địa phương hóa chúng tôi chuyển vấn đề trên về bài toán khi nào $\mathfrak{m} := (x_1, \ldots, x_n) \in \operatorname{Emb}(I^t)$. Ký hiệu $\widetilde{I^t}$ là bão hòa của I^t. Để giải quyết bài toán này, ta chỉ cần tìm điều kiện cho sự tồn tại một đơn thức $x^{\mathbf{a}} \in \widetilde{I^t} \setminus I^t$ với $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n$. Ý tưởng của chúng tôi là biểu diễn đơn thức $x^{\mathbf{a}}$ bởi đồ thị có trọng $\Gamma_{\mathbf{a}}$ thu được từ đồ thị cảm sinh của Γ trên tập đỉnh $V_{\mathbf{a}} := \{i \mid a_i > 0\}$ bằng cách gán cho mỗi đỉnh $i \in V_{\mathbf{a}}$ trọng a_i. Kết quả đầu tiên chúng tôi thu được là điều kiện tổ hợp trên đồ thị có trọng $\Gamma_{\mathbf{a}}$ tương đương với điều kiện $x^{\mathbf{a}} \in \widetilde{I^t} \setminus I^t$ (Định lý 2.2.4). Từ điều kiện tổ hợp đó, ta có thể chỉ ra rằng mỗi đỉnh của tập $V \setminus V_{\mathbf{a}}$ kề với ít nhất một đỉnh của $V_{\mathbf{a}}$, mọi thành phần liên thông của đồ thị cảm sinh của $\Gamma_{\mathbf{a}}$ đều chứa ít nhất một chu trình lẻ có độ dài không vượt quá $2t-1$. Đặc biệt chúng tôi nhận được chặn trên cho bậc của đơn thức $x^{\mathbf{a}}$, đó là $\deg x^{\mathbf{a}} \leq 3(t-1)$ (Mệnh đề 2.3.9).

Sử dụng mô tả nói trên của các đơn thức trong $\widetilde{I^t} \setminus I^t$ chúng tôi đặc trưng được điều kiện $P_F \in \operatorname{Emb}(I^t)$ thông qua sự tồn tại của một loại đồ thị có trọng được gọi là t-bão hòa (Định lý 2.4.1). Từ đây chúng tôi chứng minh được nếu $P_F \in \operatorname{Emb}(I^t)$ thì F là tối tiểu trong số các phủ của Γ chứa lân cận đóng của tập $U \subseteq V$ thỏa mãn điều kiện mọi thành phần liên thông của Γ_U chứa ít nhất một chu trình lẻ có độ dài không quá $2t-1$ (Định lý 2.4.2). Tuy nhiên điều kiện này không phải là điều kiện đủ.

Với ý tưởng tương tự, chúng tôi đã đưa ra một điều kiện đủ để P_F là iđêan nguyên tố nhúng của I^t (Định lý 2.4.7). Điều kiện này chỉ phụ thuộc vào sự tồn tại của một loại đồ thị có trọng trên Γ mà chúng tôi gọi là đồ thị t-bão hòa mạnh. Hơn nữa chúng tôi còn chứng tỏ được rằng điều kiện cần trong Định lý 2.4.2 cũng đồng thời là điều kiện đủ để $P_F \in \operatorname{Ass}^\infty(I)$ (Hệ quả 2.5.5). Phương pháp của chúng tôi đưa ra một đặc trưng đơn giản hơn cho tập $\operatorname{Ass}^\infty(I)$ và một chặn trên tốt hơn cho $\operatorname{astab}(I)$ so với kết quả của Chen, Morey và Sung [5] (Hệ quả 2.5.6).

Đối với các lũy thừa I^t với $t = 2, 3, 4$, chúng tôi đưa ra phân loại đầy đủ cho các đồ thị t-bão hòa. Từ đó chúng tôi dễ dàng nhận lại được kết quả của Terai-Trung [28] và Herzog-Hibi [12] về tập $\mathrm{Emb}(I^2)$ (Định lí 3.1.1). Với trường hợp $t = 3$, chúng tôi phân loại được các iđêan nguyên tố của $\mathrm{Emb}(I^3)$ như sau: P_F là iđêan nguyên tố nhúng của I^3 khi và chỉ khi F là tối tiểu trong số các phủ của Γ chứa lân cận đóng của một tập đỉnh U thỏa mãn đồ thị cảm sinh Γ_U của Γ được căng bởi một trong các dạng: một tam giác, hợp của một cạnh và một tam giác giao nhau tại một đỉnh, hợp của hai tam giác không kề nhau, hợp của hai tam giác giao nhau tại một đỉnh, một ngũ giác.

Với trường hợp $t = 4$, chúng tôi cũng đặc trưng được cụ thể 21 dạng đồ thị tương ứng với các iđêan nguyên tố liên kết của $\mathrm{Emb}(I^4)$ (Định lý 3.3.5).

Cuối cùng, sử dụng các kết quả nhận được chúng tôi nghiên cứu tính giảm từ $\operatorname{depth} R/I^t$ sang $\operatorname{depth} R/I^{t+1}$. Cụ thể, chúng tôi chứng minh rằng nếu Γ không là một đồ thị hai phần thì $\operatorname{depth} R/I = 1$ kéo theo $\operatorname{depth} R/I^2 = 0$ (Định lí 4.2.1). Tuy nhiên, khẳng định tương tự như trên với $t \geq 2$ không còn đúng nữa. Với $t = 2$, chúng tôi chứng minh rằng nếu Γ không là đồ thị hai phần và $\operatorname{depth} R/I^2 = 1$ thì $\operatorname{depth} R/I^5 = 0$ (Định lý 4.3.1). Mặt khác, nếu $\operatorname{depth} R/I^2 = 1$ và Γ không chứa tam giác thì Γ là đồ thị hai phần (Định lí 4.3.3).

Ngoài phần mở đầu và phần kết luận, luận án được chia làm bốn chương.

Trong Chương 1, chúng tôi giới thiệu một số khái niệm và kết quả về iđêan đơn thức và bão hòa của nó. Chương này bao gồm ba mục. Mục 1.1 giới thiệu các khái niệm cơ bản được sử dụng trong luận án như iđêan đơn thức, siêu đồ thị, phức đơn hình và mối liên hệ giữa chúng. Mục 1.2 giới thiệu khái niệm đối đồng điều địa phương và công thức Takayama tính đối đồng điều địa phương của iđêan đơn thức theo các phức đơn hình. Mục 1.3 quy việc xét một iđêan nguyên tố liên kết tùy ý về việc xét iđêan thuần nhất cực đại.

Trong Chương 2, chúng tôi tìm cách mô tả các iđêan nguyên tố nhúng của lũy thừa của iđêan cạnh. Chương này bao gồm năm mục. Mục 2.1

giới thiệu khái niệm đồ thị có trọng nhằm biểu diễn các đơn thức. Mục 2.2 đưa ra tiêu chuẩn tổ hợp cho điều kiện $x^{\mathbf{a}} \in \widetilde{I^t} \setminus I^t$ theo $\Gamma_{\mathbf{a}}$. Mục 2.3 định nghĩa một lớp đồ thị có trọng đặc biệt mà chúng tôi gọi là đồ thị t-bão hòa được dùng để nghiên cứu điều kiện $x^{\mathbf{a}} \in \widetilde{I^t} \setminus I^t$. Mục 2.4 đưa ra các điều kiện cần hoặc đủ để P_F là iđêan nguyên tố nhúng của I^t. Mục 2.5 đặc trưng tập ổn định $\mathrm{Ass}^{\infty}(I)$ và đưa ra một chặn trên cho chỉ số ổn định $\mathrm{astab}(I)$.

Mục đích của Chương 3 là phân loại đồ thị t-bão hòa và dạng các iđêan nguyên tố nhúng của I^t với t nhỏ. Các trường hợp $t = 2, 3, 4$ được chia ra lần lượt cho các mục 3.1, 3.2, 3.3.

Chương 4 nghiên cứu về tính giảm của hàm depth. Mục 4.1 nghiên cứu tính chất này trong trường hợp $\operatorname{depth} R_j/(I^t)_j = 0$ với $j \in \{1, \ldots, n\}$. Mục 4.2 đưa ra điều kiện trên đồ thị để $\operatorname{depth} R/I^2 = 0$ nếu $\operatorname{depth} R/I = 1$. Mục 4.3 đưa ra giá trị $q_0 = f(t)$ nhỏ nhất để $\operatorname{depth} R/I^q = 0$ với mọi $q \geq q_0$ trong trường hợp $t = 2$.

Các kết quả trong luận án đã được chúng tôi công bố trong hai bài báo [15], [16] và một tiền ấn phẩm. Các khái niệm cơ bản về Đại số giao hoán sử dụng trong luận án có thể tìm thấy trong các cuốn sách [4], [21]. Các khái niệm về đồ thị có thể xem trong [6].

Chương 1

Bão hòa của iđêan đơn thức

Trong chương này chúng tôi giới thiệu một số khái niệm và kết quả về iđêan đơn thức và bão hòa của nó.

1.1 Iđêan đơn thức

Trong toàn bộ luận án ta xét $R := k[x_1, \dots, x_n]$ là vành đa thức n biến trên trường k tùy ý. Với mỗi véctơ $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$, ta ký hiệu $x^{\mathbf{a}}$ là đơn thức $x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$. Iđêan I của R được gọi là iđêan *đơn thức* nếu I được sinh bởi các đơn thức của R.

Ta biết rằng mỗi iđêan đơn thức I có một tập sinh tối tiểu gồm các đơn thức. Tập sinh này được xác định một cách duy nhất và được gọi là *tập sinh đơn thức tối tiểu* của I. Để cho tiện sử dụng về sau, ta ký hiệu tập này là $G(I)$. Mỗi đơn thức trong tập sinh đó được gọi là một *đơn thức sinh tối tiểu*.

Mặt khác, do vành đa thức $R = k[x_1, \dots, x_n]$ có cấu trúc $\mathbb{N}^n$-phân bậc tự nhiên nên mỗi iđêan đơn thức I cũng là $\mathbb{N}^n$-phân bậc. Vì vậy mỗi iđêan nguyên tố liên kết của I cũng là $\mathbb{N}^n$-phân bậc, nó chính là iđêan đơn thức sinh bởi các biến. Ta có thể ký hiệu các iđêan này dưới dạng

$$P_F := (x_i \mid i \in F),$$

trong đó $F \subseteq \{1, \ldots, n\}$.

Nếu mọi đơn thức sinh tối tiểu của I đều không chứa số mũ bội thì ta nói I là iđêan đơn thức *không chứa bình phương*. Ta có thể thấy ngay rằng mọi iđêan nguyên tố liên kết của iđêan đơn thức không chứa bình phương I đều là iđêan nguyên tố liên kết tối tiểu và I là giao của các iđêan này.

Lớp iđêan đơn thức không chứa bình phương đóng một vai trò then chốt trong Đại số giao hoán Tổ hợp vì việc nghiên cứu một iđêan đơn thức tùy ý có thể đưa về việc nghiên cứu một iđêan đơn thức không chứa bình phương bằng kỹ thuật sau đây. Cho trước iđêan đơn thức I. Ta thay mỗi đơn thức sinh tối tiểu $x^{\mathbf{a}} = x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n}$ của I bởi đơn thức không chứa bình phương

$$x_{11} \ldots x_{1a_1} \ldots x_{n1} \ldots x_{na_n}$$

trong vành

$$\widetilde{R} := k[x_{11}, \ldots, x_{1\rho_1(I)}, \ldots, x_{n1}, \ldots, x_{n\rho_n(I)}],$$

trong đó

$$\rho_j(I) := \max\{b_j | \, x^{\mathbf{b}} = x_1^{b_1} \ldots x_n^{b_n} \in G(I)\}, \, j = 1, \ldots, n.$$

Iđêan sinh bởi các đơn thức không chứa bình phương trên gọi là *phân cực* của I, ký hiệu là I^{pol}. Ta có thể thấy rằng R/I đẳng cấu với vành thương $\widetilde{R}/I^{\mathrm{pol}}$ chia cho một dãy phần tử chính quy.

Chúng ta có thể mô tả các iđêan đơn thức không chứa bình phương bằng các công cụ tổ hợp khác nhau thông qua các khái niệm iđêan cạnh và iđêan Stanley-Reisner.

A. Iđêan cạnh

Cho $V = \{1, ..., n\}$. Một họ $\mathcal{H}$ các tập con của V được gọi là một *siêu đồ thị*. Các phần tử của V được gọi là các đỉnh, các tập con trong $\mathcal{H}$ được gọi là các cạnh. Ta luôn giả thiết các cạnh của $\mathcal{H}$ không chứa lẫn nhau. Nếu mỗi cạnh của siêu đồ thị có đúng hai phần tử thì ta nhận được một *đồ thị* (vô hướng). Như vậy siêu đồ thị là khái niệm mở rộng của đồ thị. Trong suốt luận án khi nói tới đồ thị thì chúng tôi quy ước rằng đó là đồ thị đơn tức là đồ thị không có khuyên (nghĩa là cạnh có dạng $\{i, i\}$) và không có đỉnh cô lập (nghĩa là đỉnh không nằm trong cạnh nào).

Với mỗi siêu đồ thị $\mathcal{H}$ ta đặt $I(\mathcal{H})$ là iđêan sinh bởi các đơn thức $x_{i_1} \dots x_{i_s}$ trong đó $\{i_1, \dots, i_s\} \in \mathcal{H}$. Ta có $I(\mathcal{H})$ là một iđêan đơn thức không chứa bình phương và được gọi là *iđêan cạnh* của siêu đồ thị $\mathcal{H}$.

Ngược lại, mỗi iđêan đơn thức I không chứa bình phương là iđêan cạnh của siêu đồ thị gồm các cạnh $\{i_1, \dots, i_s\}$ ứng với các đơn thức sinh tối tiểu $x_{i_1} \dots x_{i_s}$ của I. Như vậy, ta có một tương ứng 1-1 giữa tập các iđêan đơn thức không chứa bình phương trong vành R và tập các siêu đồ thị trên tập đỉnh V. Do vậy các tính chất của iđêan đơn thức không chứa bình phương sẽ được thể hiện qua các tính chất của siêu đồ thị và ngược lại.

Trong trường hợp I là iđêan cạnh của siêu đồ thị $\mathcal{H}$, iđêan nguyên tố liên kết của I được mô tả tổ hợp thông qua khái niệm sau.

Tập đỉnh $F \subseteq V$ gọi là một *phủ đỉnh* (ta sẽ luôn gọi tắt là phủ) của siêu đồ thị $\mathcal{H}$ nếu F chứa ít nhất một đỉnh của mỗi cạnh trong $\mathcal{H}$. Một phủ của $\mathcal{H}$ được gọi là *tối tiểu* nếu nó không chứa một phủ nào khác của $\mathcal{H}$.

Bổ đề 1.1.1. [13, Lemma 9.1.4] *Cho trước tập $F \subseteq V$.*

(i) *Nếu P_F là iđêan nguyên tố liên kết của $I(\mathcal{H})$ thì F là một phủ của $\mathcal{H}$,*

(ii) *Iđêan P_F là iđêan nguyên tố liên kết tối tiểu của $I(\mathcal{H})$ khi và chỉ khi F là phủ tối tiểu của $\mathcal{H}$.*

B. Iđêan Stanley-Reisner

Một họ các tập con Δ của V được gọi là một *phức đơn hình* nếu từ điều kiện $F \subseteq G$ và $G \in \Delta$ ta suy ra được $F \in \Delta$. Mỗi tập F trong Δ được gọi là một *mặt* của Δ. Tập $F \subseteq V$ được gọi là *không mặt* của Δ nếu $F \notin \Delta$.

Với mỗi phức đơn hình Δ ta cũng định nghĩa một iđêan đơn thức không chứa bình phương như sau. Ký hiệu

$$I_\Delta := (x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_s} \mid 1 \le i_1 < \dots < i_s \le n, \{i_1, \dots, i_s\} \notin \Delta).$$

Ta có I_Δ là iđêan đơn thức không chứa bình phương trong vành R và được gọi là *iđêan Stanley-Reisner* của Δ. Vành thương $k[\Delta] := R/I_\Delta$ được gọi là *vành Stanley-Reisner* của phức Δ.

Ngược lại, với mỗi iđêan đơn thức không chứa bình phương I cho trước, phức đơn hình

$$\Delta := \{F \subseteq V \mid \prod_{i \in F} x_i \notin I\}$$

chính là phức thỏa mãn $I_\Delta = I$. Như vậy ta có một tương ứng 1-1 giữa tập các iđêan đơn thức không chứa bình phương và tập các phức đơn hình. Nhờ mối quan hệ này mà các tính chất của I được thể hiện qua Δ và ngược lại.

Tương tự như trường hợp siêu đồ thị, iđêan nguyên tố liên kết của I_Δ cũng được mô tả tổ hợp qua khái niệm sau của phức đơn hình. Một mặt của Δ không chứa trong một mặt nào khác được gọi là *mặt cực đại*. Tập các mặt cực đại của Δ được ký hiệu là $\mathcal{F}(\Delta)$.

Bổ đề 1.1.2. [4, Theorem 5.1.4] *Cho trước tập $F \subseteq V$. Khi đó P_F là iđêan nguyên tố liên kết của I_Δ khi và chỉ khi $V \setminus F$ là mặt cực đại của Δ.*

Ta cũng có thể tính chiều của $k[\Delta]$ thông qua Δ như sau. Ta gọi số nguyên $|F| - 1$ là *chiều* của mặt F và ký hiệu là $\dim F$. *Chiều* của Δ

được định nghĩa bởi

$$\dim \Delta := \max\{\dim F \mid F \in \Delta\}.$$

Bổ đề 1.1.3. [26, 1.3 Theorem] $\dim k[\Delta] = \dim \Delta + 1$.

1.2 Đối đồng điều địa phương

Cho trước M là R-môđun. Ký hiệu $\mathfrak{m}$ là iđêan thuần nhất cực đại của R. Ta đặt:

$$\Gamma_{\mathfrak{m}}(M) = \bigcup_{t \in \mathbb{N}} \big(0 :_M \mathfrak{m}^t\big).$$

Dễ thấy rằng $\Gamma_{\mathfrak{m}}$ là hàm tử khớp trái trên phạm trù các R-môđun. Hàm tử dẫn xuất thứ i của $\Gamma_{\mathfrak{m}}$ được gọi là *hàm tử đối đồng điều địa phương* thứ i ứng với iđêan $\mathfrak{m}$, được ký hiệu là $H^i_{\mathfrak{m}}$. $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ được gọi là *môđun đối đồng điều địa phương* thứ i của M. Chi tiết hơn về chủ đề này, xin xem [3].

Cho I là iđêan đơn thức. Do R/I có cấu trúc $\mathbb{N}^n$-phân bậc nên $H^i_{\mathfrak{m}}(R/I)$ là môđun $\mathbb{Z}^n$-phân bậc. Với mỗi phần tử $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$, ta ký hiệu $H^i_{\mathfrak{m}}(R/I)_{\mathbf{a}}$ là thành phần bậc $\mathbf{a}$ của $H^i_{\mathfrak{m}}(R/I)$. Chú ý rằng $H^i_{\mathfrak{m}}(R/I)_{\mathbf{a}}$ là một không gian véctơ trên k. Theo Takayama [27], ta có thể mô tả $H^i_{\mathfrak{m}}(R/I)_{\mathbf{a}}$ bằng các khái niệm tổ hợp sau.

Cho Δ là một phức đơn hình, ta có thể ứng với Δ phức vi phân của các nhóm tự do. Từ đồng điều của phức vi phân này ta có thể định nghĩa đồng điều rút gọn thứ i của Δ, ký hiệu là $\widetilde{H}_i(\Delta; k)$. Chi tiết xin tham khảo trong [21].

Từ iđêan đơn thức I và véctơ $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$ ta xác định một phức đơn hình được ký hiệu là $\Delta_{\mathbf{a}}(I)$ và được định nghĩa là

$$\Delta_{\mathbf{a}}(I) := \{F \backslash G_{\mathbf{a}} \mid G_{\mathbf{a}} \subseteq F \subseteq V,\ x^{\mathbf{a}} \notin I_F\},$$

trong đó

$$G_{\mathbf{a}} := \{i \mid a_i < 0\},\ I_F := k[x_i \mid i \in V \backslash F] \cap IR[x_i^{-1} \mid i \in F].$$

Phức $\Delta_{\mathbf{a}}(I)$ được gọi là *phức bậc* của I ứng với $\mathbf{a}$.

Trong [22], Minh-Trung đã chỉ ra rằng các mặt của phức bậc $\Delta_{\mathbf{a}}(I)$ chính là các mặt của một phức đơn hình được xác định từ I như sau. Ta ký hiệu

$$\Delta(I) := \{F \subseteq V \mid \prod_{i \in F} x_i \notin \sqrt{I}\}.$$

Dễ thấy rằng $\Delta(I)$ là một phức đơn hình. Ta gọi nó là *phức dấu* của I.

Một phức đơn hình Ω gọi là *phức con* của Δ nếu $\Omega \subseteq \Delta$.

Bổ đề 1.2.1. [22, Lemma 1.3] *$\Delta_{\mathbf{a}}(I)$ là phức con của $\Delta(I)$. Hơn nữa, nếu I không có iđêan nguyên tố liên kết nhúng và $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ thì mỗi mặt cực đại của $\Delta_{\mathbf{a}}(I)$ chính là một mặt cực đại của $\Delta(I)$.*

Bổ đề dưới đây là một trường hợp đặc biệt của phức bậc khi $\mathbf{a}$ là véctơ $\mathbf{0}$.

Bổ đề 1.2.2. *Cho trước iđêan đơn thức I. Khi đó:*

$$\Delta_{\mathbf{0}}(I) = \Delta(I).$$

Với các khái niệm trên và ký hiệu

$$\rho_j(I) := \max\{b_j \mid x^{\mathbf{b}} = x_1^{b_1} \ldots x_n^{b_n} \in G(I)\},$$

ta có công thức Takayama để mô tả $H^i_{\mathfrak{m}}(R/I)_{\mathbf{a}}$.

Định lý 1.2.3. [27, Theorem 2.2]

$$\dim_k H^i_{\mathfrak{m}}(R/I)_{\mathbf{a}} = \begin{cases} \dim_k \widetilde{H}_{i-|G_{\mathbf{a}}|-1}(\Delta_{\mathbf{a}}(I); k) & \text{nếu } \ G_{\mathbf{a}} \in \Delta(I) \text{ và} \\ & a_j < \rho_j(I), j = 1, \ldots n, \\ 0 & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$$

Để tính các mặt cực đại của phức bậc $\Delta_{\mathbf{a}}(I)$ ta cần đến khái niệm đại số sau.

Cho I là iđêan thuần nhất trong vành đa thức R. Ta đặt

$$\tilde{I} := \cup_{m \geq 1}(I : \mathfrak{m}^m)$$

và gọi $\tilde{I}$ là *bão hòa* của I.

Chú ý rằng bão hòa của một iđêan đơn thức lại là một iđêan đơn thức.

Cho trước véctơ $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$ và iđêan đơn thức I. Ký hiệu $\mathbf{a}_F$ là véctơ thu được từ $\mathbf{a}$ bằng cách cho tọa độ thứ i của $\mathbf{a}$ bằng 0 nếu $i \in F$, các tọa độ khác giữ nguyên. Ta có thể tính các mặt cực đại của phức bậc $\Delta_{\mathbf{a}}(I)$ với khái niệm trên như sau.

Bổ đề 1.2.4. [28, Lemma 1.3].

$$\mathcal{F}(\Delta_{\mathbf{a}}(I)) = \{F \backslash G_{\mathbf{a}} \mid G_{\mathbf{a}} \subseteq F \subseteq V, x^{\mathbf{a}_F} \in \widetilde{I_F} \backslash I_F\}.$$

Như vậy để tính được các mặt cực đại của $\Delta_{\mathbf{a}}(I)$ ta chỉ cần kiểm tra điều kiện $x^{\mathbf{a}_F} \in \widetilde{I_F} \setminus I_F$. Trước tiên ta cần xem với tập F nào thì $\widetilde{I_F} \neq I_F$.

Bổ đề 1.2.5. *Cho tập đỉnh F và đặt $G = V \setminus F$. Khi đó $\widetilde{I_F} \neq I_F$ khi và chỉ khi P_G là một iđêan nguyên tố liên kết của I.*

Chứng minh. Ta đặt $A := k[x_i | \, i \in G]$ và gọi Q là iđêan thuần nhất cực đại của A. Khi đó $\widetilde{I_F} \neq I_F$ khi và chỉ khi Q là một iđêan nguyên tố liên kết của I_F. Vì

$$R = A[x_i | \, i \in F]$$

là một vành đa thức trên A và

$$P_G = QR$$

nên Q là iđêan nguyên tố liên kết của I_F khi và chỉ khi P_G là một iđêan nguyên tố liên kết của $I_F R$. Ta đặt $B := R[x_i^{-1} | \, i \in F]$. Theo định nghĩa của I_F ta có

$$I_F = A \cap IB.$$

Vì B nhận được từ R bằng cách địa phương hóa và $P_G B \neq B$ nên P_G là iđêan nguyên tố liên kết của $I_F R$ khi và chỉ khi $P_G B$ là iđêan nguyên tố liên kết của $I_F B$. Từ định nghĩa, ta thấy rằng các đơn thức sinh tối tiểu của I_F nhận được từ các đơn thức sinh tối tiểu của I bằng cách xóa đi các biến x_i với $i \in F$. Do đó mọi đơn thức của I chia hết cho ít nhất một đơn thức của I_F. Vì vậy, ta nhận được $IB \subseteq I_F B$. Mặt khác $I_F B \subseteq IB$ vì $I_F = A \cap IB$. Điều này chứng tỏ rằng

$$I_F B = IB.$$

Do đó, $P_G B$ là iđêan nguyên tố liên kết của $I_F B$ khi và chỉ khi P_G là iđêan nguyên tố liên kết của I. Ta có điều cần chứng minh. □

1.3 Iđêan nguyên tố liên kết và địa phương hóa

Từ Bổ đề 1.1.1 ta biết rằng iđêan nguyên tố liên kết của một iđêan cạnh của một siêu đồ thị được miêu tả qua khái niệm phủ của siêu đồ thị đó. Cho $I := I(\Gamma)$ là iđêan cạnh của đồ thị Γ. Tương tự như Bổ đề 1.1.1, ta cũng có một kết quả mô tả các iđêan nguyên tố liên kết của lũy thừa I^t qua các phủ của đồ thị Γ.

Bổ đề 1.3.1. [13] *Cho trước tập $F \subseteq V$.*

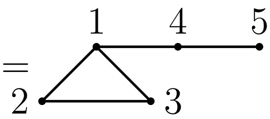
(i) *Nếu P_F là iđêan nguyên tố liên kết của I^t thì F là một phủ của* Γ,

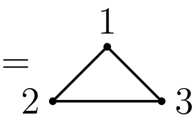
(ii) *Iđêan P_F là iđêan nguyên tố liên kết tối tiểu của I^t khi và chỉ khi F là phủ tối tiểu của* Γ.

Như vậy, theo Bổ đề 1.3.1 ta chỉ cần miêu tả tổ hợp đối với các iđêan nguyên tố liên kết nhúng của I^t. Để làm điều đó chúng tôi đưa ra khái niệm lõi của một tập đỉnh.

Cho $F \subseteq V$, ta gọi tập các đỉnh của F mà không kề với đỉnh nào trong tập $V \setminus F$ là *lõi* của F, ký hiệu $\mathrm{c}(F)$. Đồ thị *cảm sinh* của Γ trên tập $U \subseteq V$ là đồ thị có tập đỉnh U và tập cạnh gồm tất cả các cạnh của Γ nối hai đỉnh của U, ký hiệu Γ_U.

Ví dụ 1.3.2. Hình dưới đây cho ta đồ thị cảm sinh của Γ trên lõi của F.

$\Gamma =$ 

$, F = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow \Gamma_{\mathrm{c}(F)} =$ 

Hình 1.1.

Ta thấy rằng F là phủ tối tiểu khi và chỉ khi $\mathrm{c}(F) = \emptyset$. Do đó nếu P_F là một iđêan nguyên tố liên kết nhúng của I^t thì F là một phủ của Γ thỏa mãn $\mathrm{c}(F) \neq \emptyset$.

Mệnh đề dưới đây cho ta thấy rằng lõi của một phủ F có thể được dùng để đặc trưng cho việc P_F có là iđêan nguyên tố liên kết của I^t hay không. Hơn nữa, bài toán còn được quy về trường hợp khi nào một iđêan cực đại thuần nhất là iđêan nguyên tố liên kết của lũy thừa của một iđêan cạnh.

Mệnh đề 1.3.3. *Cho F là một phủ của đồ thị Γ và đặt*

$$S = k[x_i|\ i \in \mathrm{c}(F)], J = I(\Gamma_{\mathrm{c}(F)}).$$

Gọi $\mathfrak{n}$ là iđêan thuần nhất cực đại của S. Khi đó P_F là một iđêan nguyên tố liên kết của I^t khi và chỉ khi $\mathfrak{n}$ là một iđêan nguyên tố liên kết của J^t.

Chứng minh. Ta đặt

$$A := k[x_i|\, i \in F]$$

và gọi Q là iđêan thuần nhất cực đại của A. Từ chứng minh của Bổ đề 1.2.5, P_F là iđêan nguyên tố liên kết của I^t khi và chỉ khi Q là iđêan nguyên tố liên kết của $(I^t)_G$, trong đó $G = V \setminus F$. Từ định nghĩa, ta có I_G và $(I^t)_G$ được sinh bởi các đơn thức nhận được từ các đơn thức tương ứng của I và I^t sau khi xóa đi các biến $x_i, i \in G$. Do vậy $(I^t)_G = (I_G)^t$. Từ định nghĩa của $\mathrm{c}(F)$, với mọi đỉnh $j \in F \setminus \mathrm{c}(F)$ luôn tồn tại một đỉnh $i \notin F$ (tức là $i \in G$) kề với j. Vì vậy,

$$x_j = (x_i x_j) x_i^{-1} \in I_G.$$

Các đơn thức của I_G mà không chứa biến x_j nào, với $j \in F \setminus \mathrm{c}(F)$, sẽ thuộc J. Vì $J \subseteq I_G$ nên

$$I_G = \big(x_i|\ i \in F \setminus \mathrm{c}(F)\big)A + JA.$$

Chú ý rằng các iđêan $\big(x_i|\ i \in F \setminus \mathrm{c}(F)\big)A$ và JA được sinh bởi các đơn thức trong hai tập biến rời nhau. Theo kết quả của Chen, Morey và Sung [5, Lemma 2.1], Q là iđêan nguyên tố liên kết của $(I_G)^t$ khi và chỉ khi $\mathfrak{n}$ là iđêan nguyên tố liên kết của J^s với $s \leq t$. Theo kết quả của Martinez-Bernal, Morey và Villarreal [20, Theorem 2.15], điều kiện thứ hai dẫn tới $\mathfrak{n}$ là iđêan nguyên tố liên kết của J^t. Do vậy, ta có P_F là iđêan nguyên tố liên kết của I^t khi và chỉ khi $\mathfrak{n}$ là iđêan nguyên tố liên kết của J^t. □

Theo Bổ đề 1.2.1, mỗi mặt của phức bậc $\Delta_{\mathbf{a}}(I^t)$ chính là một tập độc lập của Γ.

Để tập đỉnh độc lập $G \subseteq V$ là mặt cực đại của phức bậc $\Delta_{\mathbf{a}}(I^t)$ thì theo Bổ đề 1.2.4 ta cần kiểm tra điều kiện

$$x^{\mathbf{a}_G} \in \widetilde{(I^t)_G} \setminus (I^t)_G.$$

Theo chứng minh của Mệnh đề 1.3.3, điều kiện này tương đương với điều kiện

$$x^{\mathbf{a}_G} \in \widetilde{(I_G)^t} \setminus (I_G)^t.$$

Nếu F là một phủ không tối tiểu của Γ thì $G = V \setminus F$ là tập độc lập không cực đại của nó và ngược lại. Khi đó $I_G \neq R$ và I_G là tổng của iđêan cạnh J của một đồ thị con của Γ và một iđêan sinh bởi các biến. Mệnh đề dưới đây quy điều kiện $x^{\mathbf{a}_G} \in \widetilde{(I^t)_G} \setminus (I^t)_G$ về điều kiện $x^{\mathbf{b}} \in \widetilde{J^s} \setminus J^s$, trong đó $s \leq t$.

Mệnh đề 1.3.4. *Cho $G \subseteq V$ là tập độc lập không cực đại của Γ. Ta đặt $F = V \setminus G$ và $J = I(\Gamma_{\mathrm{c}(F)})$. Khi đó*

$$x^{\mathbf{a}_G} \in \widetilde{(I^t)_G} \setminus (I^t)_G$$

khi và chỉ khi

$$x^{\mathbf{a}_{V\setminus \mathrm{c}(F)}} \in \widetilde{J^s} \setminus J^s,$$

trong đó $s = t - \sum_{i\in F\setminus \mathrm{c}(F)} a_i$.

Chứng minh. Theo chứng minh của Mệnh đề 1.3.3 và các ký hiệu trong đó ta có $(I^t)_G = (I_G)^t$ và

$$I_G = \big(x_i|\ i \in F \setminus \mathrm{c}(F)\big)A + JA$$

với $A := k[x_i|\ i \in F]$. Từ đó ta nhận được các hệ thức sau:
(1) $(I_G)^t : x_j = (I_G)^{t-1}$ với $j \in F \setminus \mathrm{c}(F)$,
(2) $(I_G)^t \cap S = J^t$ với $S = k[x_i|\ i \in \mathrm{c}(F)]$.
Hơn nữa,

$$x^{\mathbf{a}_G} = x^{\mathbf{a}_{V\setminus \mathrm{c}(F)}} \prod_{j\in F\setminus \mathrm{c}(F)} x_j^{a_j}.$$

Do vậy $x^{\mathbf{a}_G} \in (I_G)^t$ khi và chỉ khi

$$x^{\mathbf{a}_{V\setminus \mathrm{c}(F)}} \in (I_G)^t : \prod_{j\in F\setminus \mathrm{c}(F)} x_j^{a_j} = (I_G)^s,$$

ở đây đẳng thức sau cùng được suy ra từ (1). Vì $x^{\mathbf{a}_{V\setminus \mathrm{c}(F)}} \in S$ nên từ (2) ta có $x^{\mathbf{a}_{V\setminus \mathrm{c}(F)}} \in (I_G)^s$ khi và chỉ khi $x^{\mathbf{a}_{V\setminus \mathrm{c}(F)}} \in J^s$. Ta nhận được $x^{\mathbf{a}_G} \in (I_G)^t$ khi và chỉ khi $x^{\mathbf{a}_{V\setminus \mathrm{c}(F)}} \in J^s$.

Tương tự với $i \in \mathrm{c}(F)$, ta có thể chứng tỏ rằng

$$x^{\mathbf{a}_G} \in \bigcup_{m\geq 1} \big((I_G)^t : x_i^m\big)$$

khi và chỉ khi

$$x^{\mathbf{a}_{V\setminus \mathrm{c}(F)}} \in \bigcup_{m\geq 1} (J^s : x_i^m).$$

Vì

$$\bigcup_{m\geq 1} \big((I_G)^t : x_i^m\big) = A$$

với mọi $i \in F \setminus \mathrm{c}(F)$ nên ta có

$$\widetilde{(I_G)^t} = \bigcup_{m\geq 1} \big((I_G)^t : Q^m\big) = \bigcup_{m\geq 1}\bigcap_{i\in F} \big((I_G)^t : x_i^m\big) = \bigcup_{m\geq 1}\bigcap_{i\in \mathrm{c}(F)} \big((I_G)^t : x_i^m\big),$$

trong đó Q là iđêan cực đại của A. Vì vậy, $x^{\mathbf{a}_G} \in \widetilde{(I_G)^t}$ khi và chỉ khi

$$x^{\mathbf{a}_{V\setminus \mathrm{c}(F)}} \in \bigcup_{m\geq 1}\bigcap_{i\in \mathrm{c}(F)} (J^s : x_i^m) = \bigcup_{m\geq 1} (J^s : \mathfrak{n}^m) = \widetilde{J^s}.$$

Ta được $x^{\mathbf{a}_G} \in \widetilde{(I_G)^t} \setminus (I_G)^t$ khi và chỉ khi $x^{\mathbf{a}_{V\setminus \mathrm{c}(F)}} \in \widetilde{J^s} \setminus J^s$. $\square$

Chú ý rằng do ta chỉ xét các đồ thị không có đỉnh cô lập nên giá trị s trong Mệnh đề 1.3.4 thỏa mãn $s \geq 2$. Thật vậy, do $x^{\mathbf{a}} \notin (I^t)_G = (I_G)^t$ nên $\sum_{i\in F\setminus \mathrm{c}(F)} a_i \leq t-1$. Từ đó $s \geq 1$. Theo giả thiết G là tập độc lập không cực đại của Γ nên $\mathrm{c}(F) \neq \emptyset$. Vì Γ không có đỉnh cô lập và từ định nghĩa của $\mathrm{c}(F)$ ta thấy rằng mỗi đỉnh $i \in \mathrm{c}(F)$ có ít nhất một láng giềng và mọi láng giềng của i đều thuộc F. Nếu tồn tại $i \in \mathrm{c}(F)$ mà mọi láng giềng của nó đều thuộc $F \setminus \mathrm{c}(F)$ thì $\widetilde{(I^t)_G} = (I^t)_G$, mâu thuẫn với giả thiết. Do đó mọi đỉnh của $\mathrm{c}(F)$ đều có ít nhất một láng giềng trong $\mathrm{c}(F)$. Ta suy ra $J \neq 0$ và J là iđêan cạnh của một đồ thị đơn không có đỉnh cô lập. Nếu $s = 1$ thì $x^{\mathbf{a}_{V\setminus \mathrm{c}(F)}} \in \widetilde{J} \setminus J$. Điều này dẫn tới $\widetilde{J} \neq J$. Mặt khác ta biết rằng $\widetilde{J} \neq J$ khi và chỉ khi J là iđêan thuần nhất cực đại của vành S, một điều mâu thuẫn.

Chương 2

Đặc trưng $\mathrm{Emb}(I^t)$

Nhắc lại rằng bão hòa của iđêan I là iđêan

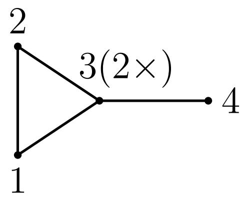
$$\tilde{I} := \cup_{m \geq 1}(I : \mathfrak{m}^m).$$

Trong chương này, trước hết chúng tôi tìm cách đặc trưng bão hòa của các lũy thừa của iđêan cạnh. Cụ thể là cho trước một đơn thức $x^{\mathbf{a}}$, chúng tôi đặc trưng điều kiện $x^{\mathbf{a}} \in \widetilde{I^t} \setminus I^t$ bằng các công cụ tổ hợp. Tiếp theo, chúng tôi tìm cách mô tả các iđêan nguyên tố liên kết nhúng của lũy thừa của iđêan cạnh.

2.1 Đồ thị có trọng

Cho trước đồ thị Γ trên tập đỉnh $V = \{1, \ldots, n\}$. Nếu ta gán cho mỗi đỉnh i của Γ số nguyên dương w_i thì ta gọi cặp $\Omega := (\Gamma, \mathbf{w})$ là *đồ thị có trọng*, trong đó $\mathbf{w} := (w_1, \ldots, w_n)$. Ta gọi Γ là *đế* của Ω và $\mathbf{w}$ là *véctơ trọng*. Hai đỉnh được gọi là *kề nhau* trong Ω nếu chúng kề nhau trong đồ thị đế. Chú ý rằng mỗi đồ thị Γ thông thường luôn có thể được xem là một đồ thị có trọng bằng cách gán cho mọi đỉnh của nó trọng 1.

Ví dụ 2.1.1. Cho Ω là đồ thị có trọng với đế là hợp của tam giác trên tập đỉnh $\{1, 2, 3\}$ với cạnh $\{3, 4\}$ và trọng của các đỉnh theo thứ tự là $1, 1, 2, 1$.



Hình 2.1. Đồ thị có trọng

Phân cực hóa và gộp đỉnh

Một đồ thị có trọng có thể được đưa về một đồ thị thông thường bằng kỹ thuật sau đây.

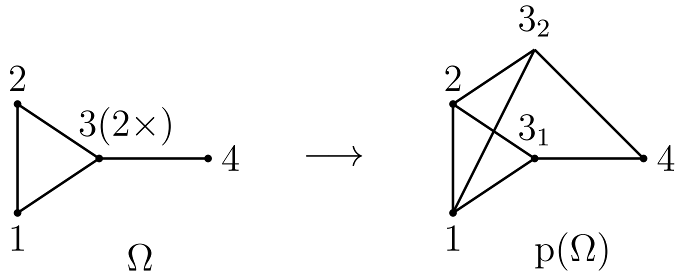
Cho Ω là một đồ thị có trọng trên tập đỉnh $V = \{1, \ldots, n\}$ với véctơ trọng $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)$. Thay mỗi đỉnh i bởi w_i đỉnh mới $i_1, \ldots, i_{w_i}$ và thay mỗi cạnh $\{i, j\}$ bởi $w_i w_j$ cạnh

$$\{i_s, j_u\},\ s = 1, \ldots, w_i;\ u = 1, \ldots, w_j,$$

ta được một đồ thị với các đỉnh đều có trọng 1. Ta gọi đồ thị này là *phân cực* của Ω, ký hiệu là $\mathrm{p}(\Omega)$. Các đỉnh $i_1, \ldots, i_{w_i}$ được gọi là các *bản sao* của đỉnh i.

Như vậy từ một đồ thị có trọng trên tập đỉnh gồm n đỉnh ta thu được một đồ thị thông thường với tập đỉnh mới gồm $\sum\limits_{i=1}^{n} w_i$ đỉnh.

Ví dụ 2.1.2. Cho Ω là đồ thị có trọng ở Ví dụ 2.1.1. Khi đó quá trình phân cực của Ω như sau:



Hình 2.2. Phân cực

Cho tập $U \subseteq V$. Tập các đỉnh trong V kề với ít nhất một đỉnh của U được gọi là *lân cận mở* của U trong Ω, ký hiệu $N_\Omega(U)$. Chú ý rằng các bản sao của một đỉnh tùy ý trong phép phân cực đồ thị có trọng là đôi một không kề nhau và có cùng lân cận mở. Ngược lại, nếu trong một đồ thị có trọng còn có các đỉnh không kề với nhau và có cùng lân cận mở thì ta có thể coi các đỉnh đó như là bản sao của cùng một đỉnh. Kỹ thuật này được thể hiện như sau.

Cho đồ thị có trọng Ω và $u_1, \ldots, u_r$ là các đỉnh đôi một không kề nhau của Ω và có cùng lân cận mở. Thay các đỉnh $u_1, \ldots, u_r$ bởi một đỉnh u có trọng

$$w_u := \sum_{i=1}^{r} w_{u_i}$$

và các cạnh có dạng $\{u_i, v\}$ bởi cạnh duy nhất $\{u, v\}$, ta được một đồ thị có trọng mới. Ta gọi đồ thị này là *gộp* của Ω theo các đỉnh $u_1, \ldots, u_r$ và ký hiệu là $\mathrm{g}(\Omega, \{u_1, \ldots, u_r\})$.

Hiển nhiên từ đồ thị phân cực $\mathrm{p}(\Omega)$ ta có thể nhận lại được Ω bằng phép gộp đỉnh.

Một *ghép cặp* của đồ thị có trọng Ω là một họ M các cạnh của Ω không nhất thiết khác nhau sao cho mỗi đỉnh của Ω có số lần xuất hiện trong M không lớn hơn trọng của nó. Tương tự như với đồ thị thông thường, số cạnh lớn nhất của một ghép cặp của Ω được gọi là *chỉ số ghép cặp* của Ω và được ký hiệu là $\nu(\Omega)$.

Chỉ số ghép cặp của đồ thị có trọng Ω được bảo toàn qua phép phân cực.

Bổ đề 2.1.3. *Cho Ω là một đồ thị có trọng và $\mathrm{p}(\Omega)$ là phân cực của Ω. Khi đó:*

$$\nu(\Omega) = \nu(\mathrm{p}(\Omega)).$$

Chứng minh. Xét ánh xạ biến mọi cạnh $\{u_i, v_j\}$ của $\mathrm{p}(\Omega)$ thành cạnh $\{u, v\}$ của Ω. Qua ánh xạ này, ảnh của các cạnh trong một ghép cặp của $\mathrm{p}(\Omega)$ lập thành một ghép cặp của Ω với lực lượng không đổi. Ngược lại, gọi $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ là véctơ trọng của Ω. Khi đó, với mọi đỉnh i ta có w_i là số đỉnh của $\mathrm{p}(\Omega)$ sinh ra từ i và w_i không nhỏ hơn số lần xuất hiện của đỉnh i trong một ghép cặp M của Ω nên với mọi ghép cặp M đó ta có thể tìm được một ghép cặp M^* của $\mathrm{p}(\Omega)$ có cùng lực lượng sao cho mỗi cạnh của M đều là ảnh của một cạnh của M^*. Vì vậy ta được

$$\nu(\Omega) = \nu(\mathrm{p}(\Omega)).$$

$\square$

Nhận xét 2.1.4. Chỉ số ghép cặp của đồ thị có trọng cũng được bảo toàn qua phép gộp đỉnh.

2.2 Đơn thức trong bão hòa

Trong phần này chúng tôi xác định một đồ thị có trọng tương ứng với mỗi véctơ **a**. Đồ thị đó được định nghĩa như sau.

Cho Ω là đồ thị có trọng trên tập đỉnh V và Γ là đế của Ω. Với $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ ta ký hiệu $V_{\mathbf{a}} := \{i \in V |\ a_i > 0\}$. Gán cho mỗi đỉnh $i \in V_{\mathbf{a}}$ trọng mới là a_i ta thu được đồ thị có trọng trên tập đỉnh $V_{\mathbf{a}}$ với đế là đồ thị cảm sinh $\Gamma_{V_{\mathbf{a}}}$. Ta ký hiệu đồ thị này là $\Gamma_{\mathbf{a}}$.

Bây giờ, việc một đơn thức $x^{\mathbf{a}}$ nằm trong một lũy thừa nào đó của $I = I(\Gamma)$ có thể được đặc trưng tổ hợp bằng bổ đề dưới đây.

Bổ đề 2.2.1. *Cho* **a** *là véctơ có các tọa độ không âm. Khi đó $x^{\mathbf{a}} \in I^t$ khi và chỉ khi $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}}) \geq t$.*

Chứng minh. Rõ ràng $x^{\mathbf{a}} \in I^t$ khi và chỉ khi tồn tại một họ gồm t cạnh

$$\{i_1, j_1\}, \ldots, \{i_t, j_t\}$$

của Γ (không nhất thiết khác nhau) sao cho

$$x^{\mathbf{a}} \vdots (x_{i_1} x_{j_1}) \ldots (x_{i_t} x_{j_t}).$$

Điều kiện này có nghĩa là mọi đỉnh của $\Gamma_{\mathbf{a}}$ xuất hiện trong các cạnh đó với số lần không lớn hơn trọng của nó, hay là t cạnh $\{i_1, j_1\}, \ldots, \{i_t, j_t\}$ lập thành một ghép cặp của $\Gamma_{\mathbf{a}}$. Do vậy, $x^{\mathbf{a}} \in I^t$ khi và chỉ khi $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}}) \geq t$. $\square$

Với đỉnh $i \in V$, ta ký hiệu $N_{\mathbf{a}}(i)$ là tập các đỉnh trong $\Gamma_{\mathbf{a}}$ kề với i và đặt $\deg_{\mathbf{a}}(i) := \sum_{j \in N_{\mathbf{a}}(i)} a_j$. Chú ý rằng với mọi $i \in V_{\mathbf{a}}$ ta có $N_{\Gamma_{\mathbf{a}}}(i) = N_{\mathbf{a}}(i)$.

Tương tự như Bổ đề 2.2.1, một đơn thức $x^{\mathbf{a}}$ nằm trong bão hòa của một lũy thừa nào đó của $I = I(\Gamma)$ có thể được đặc trưng qua chỉ số ghép cặp của một đồ thị có trọng thu được từ $\Gamma_{\mathbf{a}}$. Với mỗi tập $N \subseteq V$ ta ký hiệu $\Omega - N$ là đồ thị con cảm sinh của Ω trên tập đỉnh $V \setminus N$. Kể từ đây, ta ký hiệu $\mathbf{e}_i$ là véctơ đơn vị thứ i của $\mathbb{N}^n$.

Bổ đề 2.2.2. *$x^{\mathbf{a}} \in \widetilde{I^t}$ khi và chỉ khi*

$$\nu(\Gamma_{\mathbf{a}} - N_{\mathbf{a}}(i)) \geq t - \deg_{\mathbf{a}}(i)$$

với mọi $i \in V$.

Chứng minh. Theo định nghĩa của bão hòa của một iđêan, $x^{\mathbf{a}} \in \widetilde{I^t}$ khi và chỉ khi $x_i^m x^{\mathbf{a}} \in I^t$ với mọi $i \in V$ và m đủ lớn. Theo Bổ đề 2.2.1 $x_i^m x^{\mathbf{a}} \in I^t$ khi và chỉ khi $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}+m\mathbf{e}_i}) \geq t$. Ta sẽ chỉ ra rằng

$$\nu(\Gamma_{\mathbf{a}+m\mathbf{e}_i}) = \deg_{\mathbf{a}}(i) + \nu(\Gamma_{\mathbf{a}} - N_{\mathbf{a}}(i))$$

với $m \geq \deg_{\mathbf{a}}(i)$. Gọi Ω là đồ thị con có trọng của $\Gamma_{\mathbf{a}+m\mathbf{e}_i}$ mà các cạnh của nó chứa ít nhất một đỉnh trong tập $N_{\mathbf{a}}(i)$ và các đỉnh của nó có cùng trọng như trong đồ thị $\Gamma_{\mathbf{a}+m\mathbf{e}_i}$. Khi đó, số cạnh của một ghép cặp của Ω không thể lớn hơn số lần xuất hiện của các đỉnh của tập $N_{\mathbf{a}}(i)$ trong các cạnh đó. Do vậy

$$\nu(\Omega) \leq \sum_{j \in N_{\mathbf{a}}(i)} a_j = \deg_{\mathbf{a}}(i).$$

Khi $m \geq \deg_{\mathbf{a}}(i)$, tồn tại một ghép cặp của Ω gồm $\deg_{\mathbf{a}}(i)$ cạnh chứa đỉnh i và số lần xuất hiện của mỗi đỉnh $j \in N_{\mathbf{a}}(i)$ trong ghép cặp đó bằng a_j. Vì vậy ta có

$$\nu(\Omega) = \deg_{\mathbf{a}}(i).$$

Hơn nữa, rõ ràng hợp của ghép cặp này của Ω với một ghép cặp tùy ý của $\Gamma_{\mathbf{a}} - N_{\mathbf{a}}(i)$ cho ta một ghép cặp của $\Gamma_{\mathbf{a}+m\mathbf{e}_i}$. Do đó

$$\nu(\Gamma_{\mathbf{a}+m\mathbf{e}_i}) \geq \deg_{\mathbf{a}}(i) + \nu(\Gamma_{\mathbf{a}} - N_{\mathbf{a}}(i))$$

với $m \geq \deg_{\mathbf{a}}(i)$. Mặt khác, vì một ghép cặp của $\Gamma_{\mathbf{a}+m\mathbf{e}_i}$ là hợp rời của một ghép cặp của Ω và một ghép cặp của $\Gamma_{\mathbf{a}} - N_{\mathbf{a}}(i)$ nên

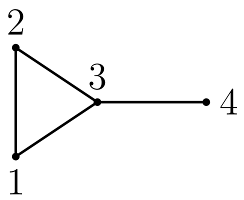
$$\nu(\Gamma_{\mathbf{a}+m\mathbf{e}_i}) \leq \nu(\Omega) + \nu(\Gamma_{\mathbf{a}} - N_{\mathbf{a}}(i)) = \deg_{\mathbf{a}}(i) + \nu(\Gamma_{\mathbf{a}} - N_{\mathbf{a}}(i)).$$

Do vậy, $x^{\mathbf{a}} \in \widetilde{I^t}$ khi và chỉ khi

$$\deg_{\mathbf{a}}(i) + \nu(\Gamma_{\mathbf{a}} - N_{\mathbf{a}}(i)) \geq t.$$

$\square$

Ví dụ 2.2.3. Xét Γ là đồ thị



Hình 2.3.

Ta có

$$x_1x_2x_3^2x_4 \notin I^3 \text{ và } x_1x_2x_3^2x_4 \in \widetilde{I^3}.$$

Từ hai Bổ đề 2.2.1 và 2.2.2 ta nhận được một tiêu chuẩn tổ hợp mô tả điều kiện $x^{\mathbf{a}} \in \widetilde{I^t} \setminus I^t$.

Định lý 2.2.4. *$x^{\mathbf{a}} \in \widetilde{I^t} \setminus I^t$ khi và chỉ khi các điều kiện sau được thỏa mãn:*

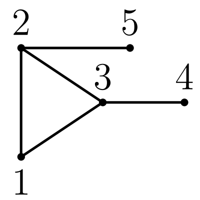
(i) $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}}) < t$,

(ii) $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}} - N_{\mathbf{a}}(i)) \geq t - \deg_{\mathbf{a}}(i)$ *với mọi* $i \in V$.

Điều kiện (ii) của Định lý 2.2.4 được áp dụng cho hai loại đỉnh. Đối với các đỉnh bên ngoài $V_{\mathbf{a}}$, điều kiện đó liên quan đến khái niệm sau.

Cho Γ là đồ thị trên V và tập đỉnh $D \subseteq V$. Nếu mọi đỉnh của tập $V \setminus D$ kề với ít nhất một đỉnh của D thì D được gọi là *tập thống trị* của đồ thị Γ. Ta cũng gọi đồ thị con của Γ trên D là *đồ thị con thống trị* của Γ.

Ví dụ 2.2.5. Trong đồ thị dưới đây thì $D = \{1, 2, 3\}$ là một tập thống trị của nó.



Hình 2.4. Tập thống trị

Đồ thị có trọng ứng với đơn thức trong $\widetilde{I^t} \setminus I^t$ có tính chất sau.

Bổ đề 2.2.6. *Nếu $x^{\mathbf{a}} \in \widetilde{I^t} \setminus I^t$ thì $V_{\mathbf{a}}$ là tập thống trị của Γ.*

Chứng minh. Từ hai Bổ đề 2.2.1 và 2.2.2 ta có

$$\deg_{\mathbf{a}}(i) \geq t - \nu(\Gamma_{\mathbf{a}} - N_{\mathbf{a}}(i)) \geq t - \nu(\Gamma_{\mathbf{a}}) \geq t - (t-1) = 1$$

với mọi $i \in V \setminus V_{\mathbf{a}}$. Vì vậy, i kề với ít nhất một đỉnh trong tập $V_{\mathbf{a}}$. $\square$

Điều kiện (ii) của Định lý 2.2.4 khi áp dụng cho các đỉnh nằm trong $V_{\mathbf{a}}$ phức tạp và sẽ được bàn trong phần sau.

2.3 Đồ thị bão hòa

Để nghiên cứu các điều kiện chỉ liên quan đến các tính chất nội tại của đồ thị $\Gamma_{\mathbf{a}}$ chúng tôi đưa ra một khái niệm, đó là đồ thị bão hòa, cụ thể như sau.

Cho đồ thị có trọng Ω trên tập đỉnh U. Số nguyên dương $\sum\limits_{j \in N_\Omega(i)} w_j$ được gọi là *bậc* của đỉnh $i \in U$ trong Ω, ký hiệu $\deg_\Omega(i)$. Nếu Ω thỏa mãn các điều kiện:

(i) $\nu(\Omega) < t$,

(ii) $\nu(\Omega - N_\Omega(i)) \geq t - \deg_\Omega(i)$ với mọi $i \in U$,

thì Ω được gọi là *đồ thị t-bão hòa*.

Ví dụ 2.3.1. Mỗi chu trình lẻ độ dài $2t-1$ mà mọi đỉnh của nó đều có trọng 1 là một đồ thị t-bão hòa.

Thật vậy. Ta ký hiệu C là chu trình lẻ đã cho. Rõ ràng $\nu(C) < t$. Với đỉnh $i \in C$ tùy ý ta có $\deg_C(i) = 2$ và $C - N_C(i)$ là một đường dẫn độ dài $2t-4$. Do vậy $\nu(C - N_C(i)) = t - 2 = t - \deg_C(i)$.

Với khái niệm đồ thị t-bão hòa thì Định lý 2.2.4 có thể được trình bày lại như sau.

Hệ quả 2.3.2. *$x^{\mathbf{a}} \in \widetilde{I^t} \setminus I^t$ khi và chỉ khi đồ thị $\Gamma_{\mathbf{a}}$ là t-bão hòa và*

$$\nu(\Gamma_{\mathbf{a}} - N_{\mathbf{a}}(i)) \geq t - \deg_{\mathbf{a}}(i)$$

với mọi $i \in V \setminus V_{\mathbf{a}}$.

Mệnh đề 2.3.3. *Các khẳng định dưới đây là tương đương:*

(i) *Đồ thị Ω là t-bão hòa,*

(ii) *Đồ thị $\mathrm{p}(\Omega)$ là t-bão hòa.*

Chứng minh. Với đỉnh i tùy ý của Ω, ta có thể dễ thấy rằng

$$\mathrm{p}(\Omega) - N_{\mathrm{p}(\Omega)}(i_t) = \mathrm{p}(\Omega - N_\Omega(i)) \text{ và } \deg_{\mathrm{p}(\Omega)}(i_t) = \deg_\Omega(i)$$

với mọi $t = 1, \ldots, a_i$ trong đó a_i là trọng của đỉnh i. Vì vậy, sử dụng định nghĩa của đồ thị t-bão hòa và Bổ đề 2.1.3 ta có sự tương đương giữa (i) và (ii).

□

Sau đây ta xét tính chất của các đồ thị t-bão hòa. Nhớ lại rằng một đỉnh trong đồ thị chỉ kề với duy nhất một đỉnh khác được gọi là một *lá*.

Bổ đề 2.3.4. *Cho Ω là đồ thị t-bão hòa trên tập đỉnh U và cho a_i là trọng của đỉnh $i \in U$. Khi đó:*

(i) $a_i < \min\{\deg_\Omega(i), \nu(\Omega) + 1\}$,

(ii) $a_i \geq 2$ *nếu i kề với một lá của đồ thị đế của Ω.*

Chứng minh. (i) Cho trước đỉnh i tùy ý, rõ ràng luôn tồn tại một họ gồm $\min\{a_i, \deg_\Omega(i)\}$ cạnh của Ω sao cho số lần xuất hiện của đỉnh $j \in N_\Omega(i)$ không vượt quá a_j. Nếu M là một ghép cặp của $\Omega - N_\Omega(i)$ thì ta có thể thêm các cạnh trên vào M và nhận được một ghép cặp của Ω. Do đó,

$$\min\{a_i, \deg_\Omega(i)\} + \nu(\Omega - N_\Omega(i)) \leq \nu(\Omega).$$

Hơn nữa, vì Ω là đồ thị t-bão hòa nên ta có

$$\deg_\Omega(i) + \nu(\Omega - N_\Omega(i)) \geq t > \nu(\Omega).$$

Từ đó, $a_i < \deg_\Omega(i)$ và $a_i + \nu(\Omega - N_\Omega(i)) \leq \nu(\Omega)$. Điều này kéo theo $a_i < \nu(\Omega) + 1$.

(ii) Nếu i kề với lá j thì $a_i = \deg_\Omega(j)$. Theo (i) ta có $\deg_\Omega(j) > a_j$. Vì $a_j \geq 1$ nên ta nhận được $a_i \geq 2$. □

Để chuẩn bị cho việc chứng minh một số kết quả tiếp theo về đồ thị t-bão hòa ta sẽ nhắc lại Định lý của Berge [19] cho đồ thị thông thường và mở rộng nó cho đồ thị có trọng tùy ý.

Dãy các đỉnh $v_1 v_2 \ldots v_{m+1}$ trong đồ thị Γ sao cho $\{v_i, v_{i+1}\}$ là một cạnh của Γ với mọi $i = 1, \ldots, m$ được gọi là một *hành trình* trong Γ. Khi đó, m được gọi là *độ dài*, v_1 được gọi là *đỉnh đầu* và v_{m+1} được gọi là *đỉnh cuối* của hành trình trên. Ta gọi chung v_1, v_{m+1} là các đỉnh đầu mút. Một hành trình có các đỉnh khác nhau được gọi là một *đường*. Một hành trình có độ dài ít nhất là 3, đỉnh đầu trùng với đỉnh cuối và khi xóa đi đỉnh cuối thì trở thành một đường được gọi là một *chu trình*.

Cho M là một ghép cặp của Γ. Một đường hoặc một chu trình P trong Γ được gọi là một *mở rộng* của M nếu P bắt đầu và kết thúc tại các đỉnh không thuộc M và các cạnh của P bao gồm các cạnh thuộc M và các cạnh không thuộc M xen kẽ nhau.

Nhận xét 2.3.5. (i) P luôn có độ dài lẻ,

(ii) Mọi đỉnh còn lại của P, trừ đỉnh đầu và đỉnh cuối, đều nằm trong M.

Khái niệm đường mở rộng giúp ta xác định khi nào một ghép cặp có số cạnh lớn nhất.

Bổ đề 2.3.6. [19, Theorem 1.2.1] *Cho ghép cặp M của đồ thị Γ. Khi đó $|M| = \nu(\Gamma)$ khi và chỉ khi Γ không có đường mở rộng của M.*

Bổ đề 2.3.7. *Cho Ω là đồ thị t-bão hòa với $\nu(\Omega) = t-1$ và mọi đỉnh của Ω có trọng 1. Giả sử M là một ghép cặp của Ω thỏa mãn $|M| = \nu(\Omega)$. Khi đó, với mọi đỉnh i bất kì không nằm trong M tồn tại một chu trình P_i là mở rộng của M bắt đầu và kết thúc tại i. Hơn nữa, với mọi cặp đỉnh $i \neq j$ không thuộc M, hai chu trình P_i và P_j như vậy là rời nhau.*

Chứng minh. Trước hết, ta xây dựng một đồ thị Ω_i' từ Ω bằng cách thay đỉnh i bởi $d := \deg_\Omega(i)$ đỉnh mới $i_1, i_2, \ldots, i_d$ và thay cạnh $\{i, j\}$ bởi d cạnh

$$\{i_1, j\}, \{i_2, j\}, \ldots, \{i_d, j\}.$$

Bằng cách đồng nhất i với i_1 ta có thể coi Ω như một đồ thị con của Ω_i' và M như một ghép cặp của Ω_i'. Đồ thị cảm sinh của Ω_i' trên tập đỉnh

$$N_{\Omega_i'}(i) \cup \{i_1, \ldots, i_d\}$$

chứa d cạnh rời nhau. Khi thêm d cạnh đó vào một ghép cặp tùy ý của $\Omega_i' - N_{\Omega_i'}(i)$ ta thu được một ghép cặp của Ω_i'. Vì vậy,

$$\nu(\Omega_i') \geq \nu(\Omega_i' - N_{\Omega_i'}(i)) + d.$$

Vì

$$\Omega - N_\Omega(i) = \Omega_i' - N_{\Omega_i'}(i)$$

nên

$$\nu(\Omega_i') \geq \nu(\Omega - N_\Omega(i)) + \deg_\Omega(i) \geq t.$$

Vì $\nu(\Omega'_i) \geq t$ và $|M| = \nu(\Omega) = t - 1$ nên theo Bổ đề 2.3.6, tồn tại đường P là mở rộng của M trong Ω'_i. Từ ghép cặp M, bằng cách thay các cạnh của M nằm trong P bởi các cạnh của P không nằm trong M ta được ghép cặp M' của Ω'_i. Rõ ràng M' có nhiều cạnh hơn M. Vì vậy, M' không là ghép cặp của Ω. Điều này chứng tỏ rằng các đỉnh đầu mút của P phải nằm trong tập $\{i_1, \ldots, i_d\}$. Vì $i \notin M$ nên các đỉnh còn lại của P không thuộc tập $\{i_1, \ldots, i_d\}$. Do vậy, nếu thay thế mọi đỉnh $i_1, \ldots, i_d$ bởi đỉnh i ta thu được từ P chu trình P_i là mở rộng của M trong Γ, bắt đầu và kết thúc tại i.

Giả sử tồn tại hai đỉnh khác nhau i và j không thuộc M sao cho hai chu trình mở rộng P_i và P_j tương ứng là không rời nhau. Gọi v là đỉnh đầu tiên của P_i (như một đường đóng bắt đầu từ i) thuộc P_j. Khi đó v thuộc M. Nếu đường từ i tới v trong P_i kết thúc với một cạnh thuộc M thì ta có thể tìm được một đường từ v tới j trong P_j bắt đầu với một cạnh không thuộc M (tương tự, nếu đường từ i tới v trong P_i không thuộc M thì ta có thể chọn cạnh bắt đầu tại v trong P_j thuộc M). Nối hai đường này với nhau, ta được một mở rộng của M từ i tới j. Theo Bổ đề 2.3.6, điều này mâu thuẫn với giả thiết $|M| = \nu(\Gamma)$. Vậy P_i và P_j luôn rời nhau nếu $i \neq j$. $\square$

Đối với đồ thị có trọng, ta cần mở rộng các khái niệm trên. Cho đồ thị có trọng Γ với véctơ trọng $\mathbf{w} := (w_1, \ldots, w_n)$ và M là một ghép cặp của nó. Ta gọi θ_i là tổng số lần xuất hiện của đỉnh i trong các cạnh của M. Từ định nghĩa của M ta có $\theta_i \leq w_i$. Nếu $\theta_i < w_i$ thì ta gọi đỉnh i là đỉnh *ghép chưa hết*. Dãy các đỉnh và cạnh

$$i_1, \{i_1, i_2\}, i_2, \{i_2, i_3\}, \ldots, i_{2s-1}, \{i_{2s-1}, i_{2s}\}, i_{2s}$$

(không nhất thiết khác nhau) thỏa mãn các điều kiện:

(i) các đỉnh i_1, i_{2s} là các đỉnh ghép chưa hết,

(ii) họ cạnh $\{i_{2r}, i_{2r+1}\}$ là họ con của M,

được gọi là một *hành trình mở rộng* của M.

Với các khái niệm trên ta dễ dàng chứng minh được kết quả tương tự như Bổ đề 2.3.6 dành cho đồ thị có trọng.

Bổ đề 2.3.8. *Cho ghép cặp M của đồ thị có trọng Γ. Khi đó $|M| = \nu(\Gamma)$ khi và chỉ khi Γ không có hành trình mở rộng của M.*

Sử dụng Bổ đề 2.3.8 ta nhận được chặn trên cho véctơ trọng của một đồ thị t-bão hòa.

Mệnh đề 2.3.9. *Cho Ω là đồ thị t-bão hòa trên tập đỉnh U và $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ là véctơ trọng của Ω. Khi đó: $\sum_{i \in U} a_i \leq 3(t-1)$.*

Chứng minh. Ta gọi Γ là đồ thị đế của Ω. Khi đó

$$\Gamma_{\mathbf{a}} = \Omega,\ N_{\mathbf{a}}(i) = N_{\Omega}(i) \text{ và } \deg_{\mathbf{a}}(i) = \deg_{\Omega}(i)$$

với mọi $i \in U$. Nếu ta lấy $m \geq \deg_{\mathbf{a}}(i)$ thì từ chứng minh của Mệnh đề 2.2.2 ta có

$$\nu(\Gamma_{\mathbf{a}+m\mathbf{e}_i}) = \deg_{\mathbf{a}}(i) + \nu(\Gamma_{\mathbf{a}} - N_{\mathbf{a}}(i)).$$

Vì $\Gamma_{\mathbf{a}}$ là t-bão hòa nên

$$\deg_{\mathbf{a}}(i) + \nu(\Gamma_{\mathbf{a}} - N_{\mathbf{a}}(i)) \geq t > \nu(\Gamma_{\mathbf{a}}).$$

Vì vậy $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}+m\mathbf{e}_i}) > \nu(\Gamma_{\mathbf{a}})$.

Gọi M là một ghép cặp của $\Gamma_{\mathbf{a}}$ sao cho $|M| = \nu(\Gamma_{\mathbf{a}})$. Với mỗi đỉnh i ta ký hiệu θ_i là tổng số lần xuất hiện của i trong các cạnh của M. Ta coi M là một ghép cặp của $\Gamma_{\mathbf{a}+m\mathbf{e}_i}$. Từ Bổ đề 2.3.8 tồn tại một hành trình P là mở rộng của M. Bằng cách thêm các cạnh lẻ của P vào M và xóa các cạnh chẵn của P khỏi M ta thu được một ghép cặp M^* của $\Gamma_{\mathbf{a}+m\mathbf{e}_i}$. Chú ý rằng một hành trình mở rộng của một ghép cặp luôn có độ dài lẻ và bắt đầu bằng một cạnh không nằm trong M, do đó M^* có $\nu(\Omega)+1$ cạnh. Ta suy ra M^* không phải một ghép cặp của $\Gamma_{\mathbf{a}}$. Vì $\Gamma_{\mathbf{a}}$ và $\Gamma_{\mathbf{a}+m\mathbf{e}_i}$ chỉ khác nhau trọng của đỉnh i nên i phải xuất hiện trong P và $\theta_i^* > a_i$, trong đó θ_j^* là số lần xuất hiện của đỉnh j trong M^*. Ta ký hiệu i_f, i_l tương ứng là đỉnh đầu và đỉnh cuối của P. Khi đó $\theta_j^* = \theta_j$ nếu $j \neq i_f, i_l$.

Do M là ghép cặp của $\Gamma_{\mathbf{a}}$, ta có $\theta_j \le a_j$ với mọi j. Ta nhận được $\theta_j^* \le a_j$ nếu $j \neq i_f, i_l$. Vì thế, để $\theta_i^* > a_i$ thì ta phải có $i = i_f$ hoặc $i = i_l$. Không mất tổng quát ta có thể giả sử $i = i_f$. Nếu $i \neq i_l$ thì $\theta_i^* = \theta_i + 1$. Do $\theta_i \le a_i$ nên $\theta_i^* \le a_i + 1$. Kết hợp với điều kiện $\theta_i^* > a_i$ ta nhận được $\theta_i^* = a_i + 1$ và từ đó $\theta_i = a_i$. Từ đây ta suy ra nếu $\theta_i < a_i$ thì $i = i_f = i_l$. Khi đó $\theta_i^* = \theta_i + 2$. Vì $\theta_i < a_i$ nên $\theta_i^* \le a_i + 1$. Lại sử dụng điều kiện $\theta_i^* > a_i$ ta nhận được $\theta_i^* = a_i + 1$, $\theta_i = a_i - 1$ và $\theta_j^* = \theta_j \le a_j$ với mọi $j \neq i$.

Ta ký hiệu W là tập các đỉnh $j \in U$ sao cho $\theta_j = a_j - 1$. Rõ ràng $\theta_j = a_j$ với mọi $j \notin W$. Do đó

$$\begin{aligned}\sum_{j\in U} a_j &= \sum_{j\in W} \mathbf{a}_j + \sum_{j\notin W} \mathbf{a}_j = \sum_{j\in W}(\theta_j + 1) + \sum_{j\notin W}\theta_j = \sum_{j\in W}\theta_j + |W| + \sum_{j\notin W}\theta_j \\ &= \sum_{j\in U}\theta_j + |W| = 2|M| + |W| = 2\nu(\Gamma_{\mathbf{a}}) + |W|.\end{aligned}$$

Các đỉnh của W không kề với nhau vì nếu ngược lại ta có thể thêm một cạnh tùy ý của Γ với hai đỉnh đầu mút nằm trong W vào M và nhận được một ghép cặp của $\Gamma_{\mathbf{a}}$ có $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}}) + 1$ cạnh. Với mỗi $j \in W$ ta gọi E_j là cạnh đầu tiên của P. Ta đã chứng tỏ rằng $j \in E_j$. Ta gọi đỉnh còn lại của E_j là h. Khi đó mọi đỉnh $s \in W$ sẽ không kề với h vì nếu ngược lại thì do

$$\theta_j^* = a_j + 1, \theta_s^* = \theta_s = a_s - 1$$

ta có thể thay cạnh E_j bởi cạnh $\{s, h\}$ để nhận được một ghép cặp của $\Gamma_{\mathbf{a}}$ có $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}}) + 1$ cạnh từ M^*. Do đó $E_j \cap E_s = \emptyset$. Từ đây ta suy ra tập các cạnh $E_j, j \in W$ lập thành một ghép cặp của Γ. Do đó

$$|W| \le \nu(\Gamma) \le \nu(\Gamma_{\mathbf{a}}).$$

Vậy ta được

$$\sum_{i\in U} a_i \le 3\nu(\Gamma_{\mathbf{a}}) \le 3(t-1).$$

□

Nhận xét 2.3.10. Dấu bằng trong bất đẳng thức

$$\sum_{i \in U} a_i \leq 3(t-1)$$

xảy ra khi Ω là hợp rời nhau của $t-1$ tam giác.

Từ Mệnh đề 2.3.9 ta nhận được ngay chặn trên cho bậc tổng thể của một đơn thức nằm trong $\widetilde{I^t} \setminus I^t$.

Hệ quả 2.3.11. *Nếu* $x^{\mathbf{a}} \in \widetilde{I^t} \setminus I^t$ *thì*

$$\deg x^{\mathbf{a}} \leq 3(t-1).$$

Như vậy với một giá trị t cho trước thì từ Mệnh đề 2.3.9 ta thấy rằng số đồ thị t-bão hòa là hữu hạn. Vấn đề còn lại là miêu tả đồ thị đế của những đồ thị như vậy.

Bổ đề 2.3.12. *Đồ thị đế của một đồ thị t-bão hòa chứa ít nhất một chu trình lẻ với độ dài $\leq 2t-1$.*

Chứng minh. Gọi Γ là đồ thị đế của đồ thị t-bão hòa Ω. Khi đó tồn tại véctơ $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ sao cho $\Omega = \Gamma_{\mathbf{a}}$. Vì $V = V_{\mathbf{a}}$ nên theo Hệ quả 2.3.2, ta có

$$x^{\mathbf{a}} \in \widetilde{I^t} \setminus I^t.$$

Do đó

$$\widetilde{I^t} \neq I^t.$$

Ta ký hiệu $I^{(t)}$ là lũy thừa tượng trưng thứ t của I, tức là giao của các thành phần nguyên sơ của I^t ứng với các iđêan nguyên tố liên kết tối tiểu của I. Ta đã biết rằng

$$I^{(t)} \supseteq \widetilde{I^t}.$$

Do vậy

$$I^{(t)} \neq I^t.$$

Theo [24, Lemma 3.10] (ngoài ra xem [27, Lemma 5.8, Theorem 5.9]), Γ chứa ít nhất một chu trình lẻ với độ dài $\leq 2t-1$. $\square$

Từ định nghĩa, ta thấy rằng nếu Ω là một đồ thị t-bão hòa thì Ω cũng là s-bão hòa với $s = \nu(\Omega) + 1$. Tính chất này được bảo toàn khi Ω có nhiều thành phần liên thông.

Bổ đề 2.3.13. *Cho $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$ là các thành phần liên thông của đồ thị có trọng Ω. Đặt $t = \nu(\Omega) + 1$ và $t_i = \nu(\Omega_i) + 1$, $i = 1, \ldots, m$. Khi đó Ω là t-bão hòa khi và chỉ khi Ω_i là t_i-bão hòa với $i = 1, \ldots, m$.*

Chứng minh. Dễ thấy rằng

$$\nu(\Omega) = \sum_{i=1}^{m} \nu(\Omega_i).$$

Do đó

$$t - 1 = \sum_{i=1}^{m} (t_i - 1).$$

Giả sử Ω là t-bão hòa. Khi đó

$$\deg_\Omega(i) + \nu(\Omega - N_\Omega(i)) \geq t$$

với mọi đỉnh i của Ω. Nếu i là một đỉnh của Ω_1, ta có $N_\Omega(i) = N_{\Omega_1}(i)$. Do vậy

$$\deg_{\Omega_1}(i) = \deg_\Omega(i).$$

Hơn nữa $\Omega - N_\Omega(i)$ có các thành phần liên thông là

$$\Omega_1 - N_{\Omega_1}(i) \text{ và } \Omega_2, \ldots, \Omega_m.$$

Vì vậy,

$$\nu(\Omega - N_\Omega(i)) = \nu(\Omega_1 - N_{\Omega_1}(i)) + \sum_{j=2}^{m} \nu(\Omega_i) = \nu(\Omega_1 - N_{\Omega_1}(i)) + \sum_{j=2}^{m} (t_j - 1).$$

Điều này kéo theo rằng

$$\begin{aligned}\deg_{\Omega_1}(i) + \nu(\Omega_1 - N_{\Omega_1}(i)) &= \deg_\Omega(i) + \nu(\Omega - N_\Omega(i)) - \sum_{j=2}^{m} (t_j - 1) \\ &\geq t - \sum_{j=2}^{m} (t_j - 1) = t_1.\end{aligned}$$

Do đó Ω_1 là t_1-bão hòa. Tương tự, ta cũng có Ω_i là t_i-bão hòa với $i = 2, \ldots, m$.

Ngược lại, giả sử rằng Ω_j là t_j-bão hòa với $j = 1, \ldots, m$. Xét đỉnh i tùy ý của Ω. Không mất tổng quát ta có thể giả sử rằng i là một đỉnh của Ω_1. Khi đó

$$\deg_{\Omega_1}(i) + \nu(\Omega_1 - N_{\Omega_1}(i)) \geq t_1.$$

Vì vậy,

$$\begin{aligned}
\deg_{\Omega}(i) + \nu(\Omega - N_{\Omega}(i)) &= \deg_{\Omega_1}(i) + \nu(\Omega_1 - N_{\Omega_1}(j)) + \sum_{j=2}^{m}(t_j - 1) \\
&\geq t_1 + \sum_{j=2}^{m}(t_j - 1) = t.
\end{aligned}$$

Do đó Ω là t-bão hòa. □

2.4 Đặc trưng iđêan nguyên tố liên kết

Ta biết rằng iđêan thuần nhất cực đại $\mathfrak{m}$ là iđêan nguyên tố liên kết của I^t khi và chỉ khi $\widetilde{I^t} \neq I^t$. Vì vậy ta có thể coi Hệ quả 2.3.2 là một tiêu chuẩn để $\mathfrak{m}$ là iđêan nguyên tố liên kết của I^t. Từ tiêu chuẩn đó chúng tôi đưa ra đặc trưng thuần túy tổ hợp cho các iđêan nguyên tố liên kết nhúng của I^t. Ta ký hiệu $N[V_{\mathbf{a}}] := N(V_{\mathbf{a}}) \cup V_{\mathbf{a}}$ và gọi là *lân cận đóng* của tập đỉnh $V_{\mathbf{a}}$.

Định lý 2.4.1. *Cho F là một phủ của Γ với $\mathrm{c}(F) \neq \emptyset$. Khi đó P_F là iđêan nguyên tố liên kết nhúng của I^t khi và chỉ khi F là tối tiểu trong số các phủ của Γ chứa $N[V_{\mathbf{a}}]$ với véctơ $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ thỏa mãn $\Gamma_{\mathbf{a}}$ là đồ thị t-bão hòa và*

$$\nu(\Gamma_{\mathbf{a}} - N_{\mathbf{a}}(i)) \geq t - \deg_{\mathbf{a}}(i)$$

với mọi $i \in \mathrm{c}(F) \setminus V_{\mathbf{a}}$.

Chứng minh. Từ Mệnh đề 1.3.3, P_F là iđêan nguyên tố liên kết của I^t khi và chỉ khi $\widetilde{J^t} \neq J^t$, trong đó $J = I(\Gamma_{c(F)})$. Điều này nghĩa là tồn tại véctơ $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ với $V_{\mathbf{a}} \subseteq c(F)$ thỏa mãn $x^{\mathbf{a}} \in \widetilde{J^t} \setminus J^t$. Hiển nhiên,

$$(\Gamma_{c(F)})_{V_{\mathbf{a}}} = \Gamma_{V_{\mathbf{a}}} \text{ và } (\Gamma_{c(F)})_{\mathbf{a}} = \Gamma_{\mathbf{a}}.$$

Sử dụng Hệ quả 2.3.2 ta nhận được $x^{\mathbf{a}} \in \widetilde{J^t} \setminus J^t$ khi và chỉ khi $\Gamma_{\mathbf{a}}$ là t-bão hòa và

$$\nu(\Gamma_{\mathbf{a}} - N_{\mathbf{a}}(i)) \geq t - \deg_{\mathbf{a}}(i)$$

với mọi $i \in c(F) \setminus V_{\mathbf{a}}$. Ta chỉ còn phải chứng tỏ rằng điều kiện $V_{\mathbf{a}} \subseteq c(F)$ tương đương với điều kiện F là tối tiểu trong số các phủ của Γ chứa $N[V_{\mathbf{a}}]$.

Nếu $V_{\mathbf{a}} \subseteq c(F)$ thì theo định nghĩa của $c(F)$ ta có $N[V_{\mathbf{a}}] \subseteq F$. Như đã chỉ ra ở trên, ta có thể giả sử rằng $x^{\mathbf{a}} \in \widetilde{J^t} \setminus J^t$. Theo Hệ quả 2.2.6, điều kiện đó kéo theo $V_{\mathbf{a}}$ là tập thống trị của đồ thị $\Gamma_{c(F)}$. Do đó $c(F) \subseteq N[V_{\mathbf{a}}]$. Lại sử dụng định nghĩa của $c(F)$, ta suy ra mọi đỉnh trong tập $F \setminus N[V_{\mathbf{a}}]$ kề với ít nhất một đỉnh trong tập $V \setminus F$. Điều này kéo theo rằng mọi tập $F \setminus \{i\}$, $i \in F \setminus N[V_{\mathbf{a}}]$ đều không phải là phủ của Γ. Vì vậy, F là phủ tối tiểu trong số các phủ của Γ chứa $N[V_{\mathbf{a}}]$. Ngược lại nếu F là tối tiểu trong số các phủ của Γ chứa $N[V_{\mathbf{a}}]$ thì $N[V_{\mathbf{a}}] \subseteq F$. Do đó mọi đỉnh của $V_{\mathbf{a}}$ không kề với đỉnh nào của $V \setminus F$. Từ đây ta suy ra $V_{\mathbf{a}} \subseteq c(F)$. □

Theo Định lý 2.4.1 để tìm các iđêan nguyên tố liên kết nhúng của I^t trước hết ta phải tìm các tập con $U \subseteq V$ sao cho tồn tại đồ thị t-bão hòa trên U. Từ các tính chất của đồ thị t-bão hòa ta thu được điều kiện cần dưới đây để P_F là iđêan nguyên tố liên kết nhúng của I^t.

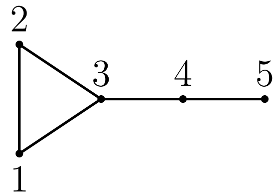
Định lý 2.4.2. *Cho P_F là iđêan nguyên tố nhúng của I^t. Khi đó F là tối tiểu trong số các phủ của Γ chứa $N[U]$ với tập $U \subseteq V$ mà mọi thành phần liên thông của Γ_U chứa ít nhất một chu trình lẻ có độ dài $\leq 2t-1$.*

Chứng minh. Từ Định lý 2.4.1, ta biết rằng một iđêan nguyên tố liên kết nhúng của I^t có dạng P_F, trong đó F là tối tiểu trong số các phủ của Γ chứa $N[V_{\mathbf{a}}]$ với véctơ $\mathbf{a}$ thỏa mãn đồ thị có trọng $\Gamma_{\mathbf{a}}$ là t-bão hòa. Từ

Bổ đề 2.3.12 và Bổ đề 2.3.13, mọi thành phần liên thông của $\Gamma_{V_{\mathbf{a}}}$ phải chứa ít nhất một chu trình lẻ có độ dài $\leq 2t-1$. $\square$

Ví dụ dưới đây chỉ ra rằng điều kiện trên không đủ để P_F là iđêan nguyên tố liên kết nhúng của I^t.

Ví dụ 2.4.3. Cho Γ là đồ thị trên tập đỉnh $V := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ như hình dưới đây và $U = \{1, 2, 3, 4\}$.



Hình 2.5.

Khi đó $N[U] = V$. Như vậy V là phủ duy nhất của Γ chứa $N[U]$. Tuy nhiên $P_V = \mathfrak{m}$ không là iđêan nguyên tố liên kết của I^2. Thật vậy, nếu $\mathfrak{m} \in \mathrm{Ass}(I^2)$ thì theo Định lý 2.4.1 tồn tại véctơ $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^5$ sao cho V là tối tiểu trong số các phủ của Γ chứa $N[V_{\mathbf{a}}]$ và $\Gamma_{\mathbf{a}}$ là 2-bão hòa. Do $\Gamma_{\mathbf{a}}$ là 2-bão hòa nên $\Gamma_{\mathbf{a}}$ phải là tam giác trên tập đỉnh $\{1, 2, 3\}$ hay $V_{\mathbf{a}} = \{1, 2, 3\}$. Hơn nữa, nếu $\mathfrak{m} \in \mathrm{Ass}(I^2)$ thì Định lý 2.4.1 chỉ ra rằng V phải là tối tiểu trong các phủ chứa $N[V_{\mathbf{a}}] = \{1, 2, 3, 4\}$. Điều này là không đúng.

Trong phần sau đây chúng tôi giới thiệu một lớp đồ thị có trọng đặc biệt, lớp đồ thị mà sự tồn tại của nó trong đồ thị Γ cho ta các iđêan nguyên tố nhúng của I^t. Lưu ý rằng chỉ riêng sự tồn tại của đồ thị t-bão hòa chưa cho ta các iđêan như vậy. Theo Định lý 2.4.1 ta cần thêm điều kiện dành cho các đỉnh bên ngoài của đồ thị t-bão hòa đó.

Cho Ω là đồ thị có trọng trên tập đỉnh U với véctơ trọng $\mathbf{a}$. Ta ký hiệu $\Omega - i$ là đồ thị cảm sinh của Ω trên tập đỉnh $U \setminus \{i\}$. Nếu các điều kiện sau được thỏa mãn:

(i) $\nu(\Omega) < t$,

(ii) $\nu(\Omega - i) \geq t - a_i$ với mọi $i \in U$,

thì Ω được gọi là đồ thị *t-bão hòa mạnh*.

Ta có thể dễ dàng kiểm tra các đồ thị với các đỉnh có trọng 1 dưới đây là t-bão hòa mạnh.

Ví dụ 2.4.4. (1) Hợp của $t-1$ tam giác giao nhau tại cùng một đỉnh,
(2) Đồ thị có $2t-1$ đỉnh và chứa một chu trình lẻ độ dài $2t-1$.

Một đồ thị t-bão hòa mạnh sẽ là đồ thị t-bão hòa nhờ tính chất dưới đây.

Bổ đề 2.4.5. *Cho Ω là đồ thị t-bão hòa mạnh và N là tập khác rỗng chứa các đỉnh của Ω. Khi đó*

$$\nu(\Omega - N) \geq t - \sum_{j \in N} a_j.$$

Chứng minh. Cho trước $i \in N$. Gọi Ω' là đồ thị con có trọng của $\Omega - i$ sao cho mỗi cạnh của nó chứa ít nhất một đỉnh của tập $N \setminus \{i\}$ và mỗi đỉnh của nó có trọng như trong Ω. Khi đó số cạnh trong một ghép cặp của Ω' không thể lớn hơn số lần xuất hiện trong các cạnh đó của các đỉnh trong tập $N \setminus \{i\}$. Do vậy

$$\nu(\Omega') \leq \sum_{j \in N} a_j - a_i.$$

Vì mọi ghép cặp của $\Omega - i$ là hợp rời của một ghép cặp của Ω' và một ghép cặp của $\Omega - N$, ta có

$$\nu(\Omega - i) \leq \nu(\Omega') + \nu(\Omega - N) \leq \sum_{j \in N} a_j - a_i + \nu(\Omega - N).$$

Điều này kéo theo

$$\nu(\Omega - N) \geq \nu(\Omega - i) + a_i - \sum_{j \in N} a_j.$$

Vì Ω là t-bão hòa mạnh nên

$$\nu(\Omega - i) \geq t - a_i.$$

Do đó,

$$\nu(\Omega - N) \geq t - \sum_{j \in N} a_j.$$

$\square$

Tương tự như tính chất t-bão hòa của một đồ thị có trọng, nếu Ω là đồ thị t-bão hòa mạnh thì Ω cũng là s-bão hòa mạnh với $s = \nu(\Omega) + 1$. Tính chất này cũng được bảo toàn khi Ω có nhiều thành phần liên thông.

Bổ đề 2.4.6. *Cho $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$ là các thành phần liên thông của đồ thị có trọng Ω. Đặt $t = \nu(\Omega) + 1$ và $t_i = \nu(\Omega_i) + 1$, $i = 1, \ldots, m$. Khi đó Ω là t-bão hòa mạnh khi và chỉ khi Ω_i là t_i-bão hòa mạnh với $i = 1, \ldots, m$.*

Chứng minh. Bổ đề được chứng minh tương tự với Bổ đề 2.3.13. Do đó chúng tôi không trình bày. $\square$

Điều kiện đủ dưới đây cho một iđêan nguyên tố liên kết nhúng của I^t chỉ ra rằng nếu tồn tại một đồ thị t-bão hòa mạnh trên một tập con của V thì ta có thể xây dựng được một iđêan như vậy.

Định lý 2.4.7. *P_F là iđêan nguyên tố liên kết nhúng của I^t nếu F là tối tiểu trong số các phủ của Γ chứa lân cận đóng $N[U]$ của tập đỉnh $U \subseteq V$ sao cho tồn tại một đồ thị t-bão hòa mạnh trên U.*

Chứng minh. Gọi $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ là véctơ thỏa mãn $V_{\mathbf{a}} = U$ và $\Gamma_{\mathbf{a}}$ là đồ thị t-bão hòa mạnh. Theo Định lý 2.4.1 ta chỉ cần chỉ ra rằng

$$\nu(\Gamma_{\mathbf{a}} - N_{\mathbf{a}}(i)) \geq t - \deg_{\mathbf{a}}(i)$$

với mọi $i \in \mathrm{c}(F) \setminus V_{\mathbf{a}}$. Tương tự như chứng minh của Định lý 2.4.1, vì F là tối tiểu trong số các phủ của Γ chứa $N[U]$ nên ta có $\mathrm{c}(F) \subseteq N[V_{\mathbf{a}}]$. Do đó i kề với ít nhất một đỉnh $j \in V_{\mathbf{a}}$. Điều này có nghĩa là $N_{\mathbf{a}}(i) \neq \emptyset$. Vì

$$\deg_{\mathbf{a}}(i) = \sum_{j \in N_{\mathbf{a}}(i)} a_j$$

nên áp dụng Bổ đề 2.4.5 với $N := N_{\mathbf{a}}(i)$ ta có điều phải chứng minh. $\square$

2.5 Đặc trưng tập ổn định

Chúng tôi không biết liệu điều kiện đủ được phát biểu trong Định lý 2.4.7 có là điều kiện cần hay không. Phần sau đây chúng tôi đặc biệt quan tâm tới các đồ thị con của Γ có $2s-1$ đỉnh và là s-bão hòa mạnh với $s < t$. Ta sẽ thấy rằng có thể thêm cạnh vào các đồ thị đó để chúng trở thành một đồ thị t-bão hòa mạnh. Phương pháp này xuất phát từ phép xây dựng các iđêan nguyên tố liên kết của Chen, Morey và Sung trong [5, Theorem 3.7].

Bổ đề 2.5.1. *Cho véc tơ $\mathbf{b} \in \mathbb{N}^n$ sao cho $\Gamma_{\mathbf{b}}$ là một đồ thị t-bão hòa mạnh thỏa mãn*

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = 2t-1 \text{ và } \nu(\Gamma_{\mathbf{b}}) = \nu(\Gamma_{\mathbf{b}-\mathbf{e}_i}) = t-1$$

với mọi $i \in V_{\mathbf{b}}$. Giả sử $h \in V_{\mathbf{b}}$ và $\{h, j\} \in \Gamma$. Ta đặt $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{e}_h + \mathbf{e}_j$. Khi đó $\Gamma_{\mathbf{a}}$ là một đồ thị $(t+1)$-bão hòa mạnh thỏa mãn

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 2t+1 \text{ và } \nu(\Gamma_{\mathbf{a}}) = \nu(\Gamma_{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i}) = t$$

với mọi $i \in V_{\mathbf{a}}$.

Chứng minh. Rõ ràng

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i + 2 = 2t+1 \text{ và } \nu(\Gamma_{\mathbf{a}}) \geq \nu(\Gamma_{\mathbf{b}}) + 1 = t.$$

Vì $2\nu(\Gamma_{\mathbf{a}}) \leq \sum_{i=1}^{n} a_i$ nên ta suy ra $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}}) = t$.

Để chứng tỏ $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i}) = t$ với mọi $i \in V_{\mathbf{a}}$ ta chú ý rằng

$$\nu(\Gamma_{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i}) \leq \nu(\Gamma_{\mathbf{a}}) = t.$$

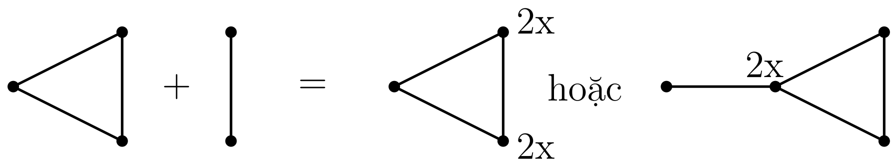
Nếu $i \in V_{\mathbf{b}}$ thì

$$\Gamma_{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i} = \Gamma_{\mathbf{b}-\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_h+\mathbf{e}_j}.$$

Do đó,
$$\nu(\Gamma_{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i}) \geq \nu(\Gamma_{\mathbf{b}-\mathbf{e}_i}) + 1 = t.$$
Nếu $i \notin V_{\mathbf{b}}$ thì do $V_{\mathbf{a}} = V_{\mathbf{b}} \cup \{j\}$ nên $i = j$. Từ đó $\Gamma_{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i} = \Gamma_{\mathbf{b}+\mathbf{e}_h}$. Giả sử v là một đỉnh của $V_{\mathbf{b}}$ kề với h. Khi đó
$$\Gamma_{\mathbf{b}+\mathbf{e}_h} = \Gamma_{\mathbf{b}-\mathbf{e}_v+\mathbf{e}_h+\mathbf{e}_v}.$$
Do vậy,
$$\nu(\Gamma_{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i}) \geq \nu(\Gamma_{\mathbf{b}-\mathbf{e}_v}) + 1 = t.$$
Ta được $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i}) = t$ với mọi $i \in V_{\mathbf{a}}$.

Để $\Gamma_{\mathbf{a}}$ là đồ thị $(t+1)$-bão hòa mạnh ta còn phải chứng tỏ điều kiện thứ hai trong định nghĩa, tức là
$$\nu(\Gamma_{\mathbf{a}} - i) \geq t + 1 - a_i$$
với mọi $i \in V_{\mathbf{a}}$. Nếu $i \in V_{\mathbf{b}}$ thì do $\Gamma_{\mathbf{b}}$ là đồ thị t-bão hòa mạnh nên
$$\nu(\Gamma_{\mathbf{b}} - i) \geq t - b_i.$$
Với $i = h$ hoặc $i = j$ (nếu $j \in V_{\mathbf{b}}$), ta có $a_i = b_i + 1$. Do đó,
$$\nu(\Gamma_{\mathbf{a}} - i) \geq \nu(\Gamma_{\mathbf{b}} - i) \geq t + 1 - a_i.$$
Với $i \neq j, h$, ta có $a_i = b_i$. Do đó,
$$\nu(\Gamma_{\mathbf{a}} - i) \geq \nu(\Gamma_{\mathbf{b}} - i) + 1 \geq t + 1 - a_i.$$
Nếu $i \notin V_{\mathbf{b}}$ thì
$$a_i = 1 \text{ và } \Gamma_{\mathbf{a}} - i = \Gamma_{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i}.$$
Ở phần trên ta đã có $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i}) = t$. Do vậy,
$$\nu(\Gamma_{\mathbf{a}} - i) = t + 1 - a_i.$$
$\square$

Để thuận tiện ta nói rằng $\Gamma_{\mathbf{a}}$ thu được từ $\Gamma_{\mathbf{b}}$ bằng cách thêm một cạnh:



Hình 2.6. Thêm một cạnh

Bổ đề 2.5.2. *Cho tập đỉnh $U \subseteq V$ sao cho Γ_U liên thông và chứa một đồ thị s-bão hòa mạnh gồm $2s-1$ đỉnh. Khi đó tồn tại đồ thị t-bão hòa mạnh có trọng Ω trên U mà $\nu(\Omega) = t-1$ với mọi $t \geq |U| - s + 1$.*

Chứng minh. Kết luận của Bổ đề 2.5.2 có thể được trình bày lại như sau: tồn tại véctơ $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ mà $V_{\mathbf{a}} = U$ sao cho $\Gamma_{\mathbf{a}}$ là đồ thị t-bão hòa mạnh thỏa mãn

$$\nu(\Gamma_{\mathbf{a}}) = t - 1$$

với mọi $t \geq |U| - s + 1$.

Từ giả thiết, tồn tại đồ thị C là s-bão hòa mạnh trên tập đỉnh $W \subseteq U$ gồm $2s-1$ đỉnh. Vì

$$s > \nu(C) \geq \nu(C - i) \geq s - 1$$

nên

$$\nu(C) = \nu(C - i) = s - 1$$

với mọi $i \in W$. Hơn nữa, vì C là đồ thị con của đồ thị cảm sinh Γ_W ta suy ra $\nu(\Gamma_W) \geq \nu(C) = s - 1$. Mặt khác, vì Γ_W có $2s-1$ đỉnh nên $\nu(\Gamma_W) \leq s - 1$. Vì vậy ta được $\nu(\Gamma_W) = s - 1$. Với mọi $i \in W$ ta có

$$\nu(\Gamma_W) \geq \nu(\Gamma_W - i) \geq \nu(C - i) = s - 1,$$

do đó ta cũng nhận được $\nu(\Gamma_W - i) = s - 1$ với mọi $i \in W$. Vậy Γ_W là đồ thị s-bão hòa mạnh. Ta gọi $\mathbf{c} \in \mathbb{N}^n$ là véctơ thỏa mãn $\Gamma_{\mathbf{c}} = \Gamma_W$. Vì Γ_U liên thông, ta có thể sử dụng liên tiếp Bổ đề 2.5.1 để thêm $|U| - 2s + 1$ cạnh của Γ_U vào $\Gamma_{\mathbf{c}}$ và nhận được đồ thị có trọng $\Gamma_{\mathbf{a}}$ là t-bão hòa mạnh thỏa mãn các điều kiện

$$V_{\mathbf{a}} = U,\ \nu(\Gamma_{\mathbf{a}}) = t - 1 \text{ với } t = s + (|U| - 2s + 1) = |U| - s + 1.$$

Đối với $t > |U| - s + 1$ ta chỉ cần thêm nhiều cạnh của Γ_U hơn để nhận được $\Gamma_{\mathbf{a}}$ như trên.

$\square$

Nhận xét 2.5.3. Giả sử $\Gamma_{\mathbf{a}}$ là đồ thị có trọng t-bão hòa mạnh thỏa mãn

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 2t - 1 \text{ và } \nu(\Gamma_{\mathbf{a}}) = \nu(\Gamma_{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i}) = t - 1$$

với mọi $i \in V_{\mathbf{a}}$. Chú ý rằng không phải đồ thị $\Gamma_{\mathbf{a}}$ nào như vậy cũng đều có thể nhận được từ một đồ thị s-bão hòa mạnh trên tập gồm $2s-1$ đỉnh ($s < t$) bằng cách thêm cạnh. Chẳng hạn, hợp của một tam giác và một hình chữ nhật giao nhau tại một đỉnh có trọng 2 là một ví dụ.

Một chu trình lẻ có độ dài $2s-1$ hiển nhiên là đồ thị s-bão hòa mạnh trên $2s-1$ đỉnh. Vì vậy sử dụng Định lý 2.4.7 và Bổ đề 2.5.2 ta có thể xác định giá trị t sao cho P_F là iđêan nguyên tố nhúng của I^t.

Định lý 2.5.4. *Giả sử F là tối tiểu trong số các phủ của Γ chứa lân cận đóng $N[U]$ của tập đỉnh $U \subseteq V$ thỏa mãn mọi thành phần liên thông của Γ_U chứa ít nhất một chu trình lẻ. Ta gọi m là số thành phần liên thông của Γ_U và s_i là số lớn nhất sao cho thành phần liên thông thứ i của Γ_U (theo một thứ tự nào đó) có đồ thị s_i-bão hòa mạnh trên $2s_i - 1$ đỉnh, $i = 1, \ldots, m$. Khi đó P_F là iđêan nguyên tố nhúng của I^t với mọi $t \geq |U| - \sum_{i=1}^{m} s_i + 1$.*

Chứng minh. Ta ký hiệu Γ_i là thành phần liên thông thứ i của Γ_U và U_i là tập đỉnh của nó, $i = 1, \ldots, m$. Theo Bổ đề 2.5.2, tồn tại đồ thị có trọng Ω_i là t_i-bão hòa mạnh trên U_i với $\nu(\Omega_i) = t_i - 1$ trong đó $t_i \geq |U_i| - s_i + 1$. Giả sử Ω là đồ thị có trọng với các thành phần liên thông là $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$. Khi đó

$$\nu(\Omega) = \sum_{i=1}^{m} \nu(\Omega_i) = \sum_{i=1}^{m} (t_i - 1).$$

Theo Bổ đề 2.4.6, Ω là đồ thị t-bão hòa mạnh với $t = \sum_{i=1}^{m}(t_i - 1) + 1$. Sử dụng Định lý 2.4.7 ta được P_F là iđêan nguyên tố liên kết của I^t với

$$t \geq \sum_{i=1}^{m}(|U_i| - s_i) + 1 = |U| - \sum_{i=1}^{m} s_i + 1.$$

$\square$

Ta biết rằng tập các iđêan nguyên tố liên kết của I^t được ký hiệu là $\operatorname{Ass}(I^t)$. Trong [1], Brodmann đã chỉ ra rằng tồn tại số t_0 thỏa mãn

$$\operatorname{Ass}(I^t) = \operatorname{Ass}(I^{t_0})$$

với mọi $t \geq t_0$. Tập $\operatorname{Ass}(I^{t_0})$ được gọi là tập *ổn định* của I và được ký hiệu bởi $\operatorname{Ass}^{\infty}(I)$. Martinez-Bernal, Morey và Villarreal [20, Theorem 2.15] đã chứng minh rằng nếu I là iđêan cạnh của đồ thị Γ thì

$$\operatorname{Ass}(I^t) \subseteq \operatorname{Ass}(I^{t+1})$$

với mọi $t \geq 1$. Hơn nữa, trong [5, Theorem 4.1] Chen, Morey và Sung đã đưa ra thuật toán xác định các iđêan nằm trong tập $\operatorname{Ass}^{\infty}(I)$ khi Γ là một đồ thị liên thông. Tuy nhiên đó là thuật toán đệ quy và khá phức tạp. Ở đây, từ Định lý 2.4.2 và Định lý 2.5.4 chúng tôi thu được một mô tả tường minh cho tập $\operatorname{Ass}^{\infty}(I)$.

Hệ quả 2.5.5. *Cho F là một phủ của Γ. Khi đó P_F thuộc $\operatorname{Ass}^{\infty}(I)$ khi và chỉ khi F hoặc là phủ tối tiểu hoặc tối tiểu trong số các phủ của Γ chứa $N[U]$ với tập con U của V thỏa mãn mọi thành phần liên thông của đồ thị cảm sinh Γ_U chứa ít nhất một chu trình lẻ.*

Số t_0 nhỏ nhất sao cho $\operatorname{Ass}(I^t) = \operatorname{Ass}(I^{t_0})$ với mọi $t \geq t_0$ được gọi là *chỉ số ổn định* của $\operatorname{Ass}(I^t)$ và được ký hiệu là $\operatorname{astab}(I)$ (xem [14]). Ngoài miêu tả tập $\operatorname{Ass}^{\infty}(I)$ như trong Hệ quả 2.5.5 chúng tôi còn đưa ra chặn trên cho chỉ số $\operatorname{astab}(I)$. Chú ý rằng nếu Γ là đồ thị hai phần (tức là đồ thị mà mọi thành phần liên thông của nó đều không có chu trình lẻ) thì theo kết quả của Simis, Vasconcelos và Villarreal [25, Theorem 5.9] ta có $\operatorname{astab}(I) = 1$.

Cho U là tập các đỉnh sao cho mọi thành phần liên thông của Γ_U chứa ít nhất một chu trình lẻ. Ta đặt $s(U) := |U| - \sum_{i=1}^{m} s_i + 1$ trong đó m là số thành phần liên thông của Γ_U và s_i là số lớn nhất sao cho thành phần liên thông thứ i của Γ_U có đồ thị s_i-bão hòa mạnh trên $2s_i - 1$ đỉnh. Ta gọi $s(\Gamma)$ là số lớn nhất trong các $s(U)$ như trên (nếu Γ là đồ thị hai phần thì ta đặt $s(\Gamma) = 1$), ta có hệ quả sau.

Hệ quả 2.5.6. *Cho I là iđêan cạnh của đồ thị Γ. Khi đó*

$$\operatorname{astab}(I) \leq s(\Gamma).$$

Chứng minh. Gọi F là một phủ của Γ sao cho P_F là iđêan nguyên tố liên kết của lũy thừa I^t với t đủ lớn. Không mất tổng quát, ta có thể giả sử P_F là iđêan nguyên tố liên kết nhúng. Từ Định lý 2.4.2, ta suy ra F tối tiểu trong số các phủ của Γ chứa lân cận đóng $N[U]$ của tập đỉnh $U \subseteq V$ mà mọi thành phần liên thông của đồ thị cảm sinh Γ_U chứa ít nhất một chu trình lẻ có độ dài $\leq 2t - 1$. Sử dụng Định lý 2.5.4, ta có P_F là iđêan nguyên tố liên kết của I^t với mọi $t \geq s(U)$. □

Trong [5, Proposition 4.2], Chen, Morey và Sung đã chứng tỏ rằng nếu Γ là đồ thị liên thông và không là đồ thị hai phần thì $\operatorname{astab}(I) \leq n - s$ trong đó $2s - 1$ là độ dài nhỏ nhất của một chu trình lẻ trong Γ và $n > 2s - 1$. Ví dụ dưới đây chỉ ra rằng cận trên $s(\Gamma)$ của chúng tôi cho chỉ số ổn định $\operatorname{astab}(I)$ nhỏ hơn nhiều so với giá trị $n - s$.

Ví dụ 2.5.7. Cho Γ là hợp của $t - 1$ tam giác cùng giao nhau tại một đỉnh chung với $t > 2$. Vì Γ có $2t-1$ đỉnh và chu trình lẻ có độ dài nhỏ nhất trong nó là tam giác nên theo Chen, Morey và Sung thì $\operatorname{astab}(I) \leq 2t-3$. Trong khi đó ta có thể tính được $s(\Gamma) = t$ nên từ Hệ quả 2.5.6 ta có $\operatorname{astab}(I) \leq t$. Để tính $s(\Gamma)$ ta chỉ xét các tập $U \subseteq V$ sao cho Γ_U chứa ít nhất một tam giác. Ta có thể thấy rằng với tập U như vậy thì Γ_U liên thông. Giả sử Γ_U chứa $s - 1$ tam giác của Γ. Ta gọi C là hợp của các tam giác đó. Rõ ràng C là đồ thị s-bão hòa mạnh trên tập gồm $2s-1$ đỉnh. Số đỉnh còn lại của U là $|U|-(2s-1)$. Các đỉnh này phải thuộc các tam giác của Γ và nằm ngoài C. Do đó $|U|-(2s-1) \leq t-s$. Vì vậy $s(U)=|U|-s+1 \leq t$. Nếu $U=V$ thì $s(V)=(2t-1)-t+1=t$. Vì $s(\Gamma) := \max\{s(U)\}$ nên $s(\Gamma)=t$.

Chương 3

Trường hợp $t = 2, 3, 4$

Trong chương này, chúng tôi phân loại đồ thị t-bão hòa và dạng các iđêan nguyên tố liên kết của I^t với $t = 2, 3, 4$. Kết quả mới của chương này được trình bày ở các bài báo [15] và [16].

3.1 Trường hợp $t = 2$

Tập các iđêan nguyên tố liên kết của I^2 đã được miêu tả bởi Herzog-Hibi [12] và Terai-Trung [28]. Với phương pháp tổng quát của chúng tôi thì kết quả đó được suy ra ngay như một hệ quả trực tiếp.

Định lý 3.1.1. [28, Theorem 3.8] *Gọi F là một phủ của Γ. Khi đó P_F là iđêan nguyên tố liên kết của I^2 khi và chỉ khi F là phủ tối tiểu hoặc tối tiểu trong số các phủ của Γ chứa lân cận đóng của một tam giác.*

Chứng minh. Một đồ thị có trọng 2-bão hòa chỉ có thể là một tam giác. Từ Định lý 2.4.1 và Định lý 2.4.7 ta nhận được điều cần chứng minh. □

Hệ quả 3.1.2. [12, Theorem 2.1], [28, Theorem 2.8] $\operatorname{depth} R/I^2 > 0$ *khi và chỉ khi Γ không có tập thống trị là một tam giác.*

Chứng minh. Ta đã biết rằng depth $R/I^2 > 0$ khi và chỉ khi $\mathfrak{m} = P_V$ không là iđêan nguyên tố liên kết của I^2. Vì V là tối tiểu trong số các phủ của Γ chứa một tập con N khi và chỉ khi $V = N$, ta chỉ cần áp dụng Định lý 3.1.1 cho trường hợp $F = V$ để thu được điều cần chứng minh. □

3.2 Trường hợp $t = 3$

Đối với trường hợp này, trước hết ta cần miêu tả tất cả các đơn thức $x^{\mathbf{a}} \in \widetilde{I^3} \setminus I^3$. Nhớ lại rằng đồ thị Γ gọi là được *căng* bởi đồ thị con Ω của nó nếu $V(\Omega) = V(\Gamma)$.

Định lý 3.2.1. *Cho véctơ $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$. Khi đó $x^{\mathbf{a}} \in \widetilde{I^3} \setminus I^3$ khi và chỉ khi $V_{\mathbf{a}}$ là tập thống trị của Γ và một trong các điều kiện dưới đây được thỏa mãn:*

(i) $\Gamma_{\mathbf{a}}$ *là một tam giác với véctơ trọng $(2, 2, 1)$,*

(ii) $\Gamma_{\mathbf{a}}$ *được căng bởi hợp của một cạnh và một tam giác giao nhau tại một đỉnh có trọng 2,*

(iii) $\Gamma_{\mathbf{a}}$ *là hợp của hai tam giác không kề nhau,*

(iv) $\Gamma_{\mathbf{a}}$ *được căng bởi hợp của hai tam giác giao nhau tại một đỉnh,*

(v) $\Gamma_{\mathbf{a}}$ *được căng bởi một ngũ giác,*

(vi) $\Gamma_{\mathbf{a}}$ *là đồ thị đầy đủ K_4 và mọi đỉnh của $V \setminus V_{\mathbf{a}}$ kề với ít nhất hai đỉnh của $V_{\mathbf{a}}$.*

Chứng minh. Dễ thấy rằng các đồ thị có trọng $\Gamma_{\mathbf{a}}$ được liệt kê ở trên thỏa mãn các điều kiện của Hệ quả 2.3.2 với $t = 3$, do vậy $x^{\mathbf{a}} \in \widetilde{I^3} \setminus I^3$.

Để chứng minh chiều ngược lại, giả sử $x^{\mathbf{a}} \in \widetilde{I^3} \setminus I^3$. Khi đó từ Hệ quả 2.3.2 ta có $\Gamma_{\mathbf{a}}$ là đồ thị có trọng 3-bão hòa và từ Bổ đề 2.2.6 ta có $V_{\mathbf{a}}$ là một tập thống trị của Γ. Vì $\Gamma_{\mathbf{a}}$ là đồ thị có trọng 3-bão hòa nên từ định nghĩa, ta có $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}}) \leq 2$. Nếu $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}}) = 1$ thì $\Gamma_{\mathbf{a}}$ là 2-bão hòa. Mà một đồ thị 2-bão hòa chỉ có thể là tam giác. Vì một tam giác không phải là đồ thị 3-bão hòa nên ta nhận được một mâu thuẫn. Do đó, $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}}) = 2$.

Nếu $\Gamma_{\mathbf{a}}$ có nhiều hơn một thành phần liên thông thì từ Bổ đề 2.3.13 ta suy ra $\Gamma_{\mathbf{a}}$ chỉ có hai thành phần liên thông và mỗi thành phần liên thông đều là 2-bão hòa. Do vậy $\Gamma_{\mathbf{a}}$ là hợp rời nhau của hai tam giác. Ta được trường hợp (iii). Vì vậy ta chỉ còn xét trường hợp $\Gamma_{\mathbf{a}}$ liên thông.

Theo Bổ đề 2.3.12, $\Gamma_{\mathbf{a}}$ chứa ít nhất một tam giác hoặc một ngũ giác. Nếu $\Gamma_{\mathbf{a}}$ chứa một ngũ giác thì $\Gamma_{\mathbf{a}}$ được căng bởi ngũ giác này vì mọi mở rộng thực sự tùy ý của một ngũ giác luôn có chỉ số ghép cặp ≥ 3. Ta được trường hợp (v). Từ đây ta có thể giả sử rằng $\Gamma_{\mathbf{a}}$ chứa ít nhất một tam giác và không chứa ngũ giác nào. Ta ký hiệu tam giác trong $\Gamma_{\mathbf{a}}$ là $C = \{i, j, h\}$. Theo Bổ đề 2.3.4 (i), trọng của mọi đỉnh của C nhiều nhất là 2. Hiển nhiên ba đỉnh của C không thể đồng thời có trọng 2.

Nếu C có hai đỉnh trọng 2, giả sử $a_i = a_j = 2$, thì $\Gamma_{\mathbf{a}}$ phải là đồ thị có trọng trên C với véctơ trọng $(2, 2, 1)$ vì mọi mở rộng thực sự của một tam giác với véctơ trọng $(2, 2, 1)$ đều có chỉ số ghép cặp ≥ 3. Ta được trường hợp (i).

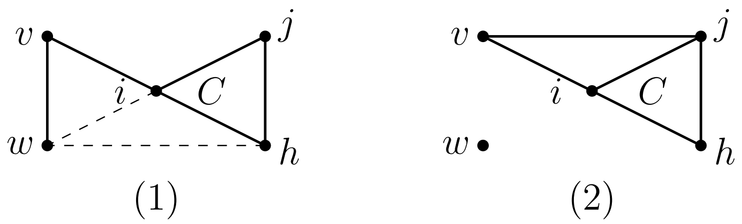
Nếu C chỉ có một đỉnh có trọng 2, giả sử $a_i = 2$, thì từ Bổ đề 2.3.4 (i) ta có $\deg_{\mathbf{a}}(i) > 2$. Vì

$$\deg_{\mathbf{a}}(i) = \sum_{v \in N_{\mathbf{a}}(i)} a_v, \ j, h \in N_{\mathbf{a}}(i) \text{ và } a_j = a_h = 1$$

nên $N_{\mathbf{a}}(i)$ phải chứa ít nhất một đỉnh $v \neq j, h$. Vì vậy $\Gamma_{\mathbf{a}}$ chứa hợp của cạnh $\{i, v\}$ và tam giác C với đỉnh i là đỉnh duy nhất có trọng 2. Vì mọi mở rộng thực sự của đồ thị đó đều có chỉ số ghép cặp ≥ 3 nên $\Gamma_{\mathbf{a}}$ được căng bởi đồ thị này. Ta được trường hợp (ii).

Nếu mọi đỉnh của C đều có trọng 1 thì $\Gamma_{\mathbf{a}}$ có ít nhất một đỉnh $v \notin C$ vì nếu ngược lại thì $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}}) = \nu(C) = 1$. Vì $\Gamma_{\mathbf{a}}$ liên thông, ta có thể giả sử rằng v kề với một đỉnh của C. Giả sử v kề với i (Hình 3.1). Vì $a_i = 1$ nên theo Bổ đề 2.3.4(ii) ta suy ra v không là đỉnh lá của $\Gamma_{\mathbf{a}}$. Do đó v kề với một đỉnh khác của $\Gamma_{\mathbf{a}}$. Ta phân biệt hai trường hợp.

Trường hợp 1: *v kề với một đỉnh w của $\Gamma_{\mathbf{a}}$ nằm ngoài C* (xem Hình 3.1(1)). Khi đó $a_v = 1$ vì nếu ngược lại các cạnh $\{w, v\}, \{v, i\}, \{j, h\}$ lập thành một ghép cặp của $\Gamma_{\mathbf{a}}$, điều này mâu thuẫn với $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}}) = 2$. Từ đó theo Bổ đề 2.3.4(ii), w không phải là đỉnh lá của $\Gamma_{\mathbf{a}}$. Mặt khác, w không thể kề với đỉnh $u \neq v$ của $\Gamma_{\mathbf{a}}$ nằm ngoài C vì nếu ngược lại thì tương tự như trên các cạnh $\{u, w\}, \{v, i\}, \{j, h\}$ cũng cho ta một ghép cặp của $\Gamma_{\mathbf{a}}$, điều này mâu thuẫn với $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}}) = 2$. Do đó w kề với ít nhất một đỉnh của C. Nếu w kề với j hoặc h thì $\Gamma_{\mathbf{a}}$ chứa một ngũ giác trên các đỉnh i, j, h, v, w, mà điều này mâu thuẫn với điều giả sử (xem Hình 3.1(1)). Vì vậy w kề với i và $\Gamma_{\mathbf{a}}$ chứa hợp của hai tam giác giao nhau tại một đỉnh. Hơn nữa mọi mở rộng thực sự của đồ thị này đều có chỉ số ghép cặp ≥ 3 nên $\Gamma_{\mathbf{a}}$ được căng bởi đồ thị này. Ta được trường hợp (iv).



Hình 3.1. Đỉnh v kề với C.

Trường hợp 2: *v không kề với bất kỳ đỉnh nào của $\Gamma_{\mathbf{a}}$ nằm ngoài C.* Khi đó v kề thêm với ít nhất một đỉnh của C ngoài i, giả sử j (xem Hình 3.1(2)). Ta gọi $w \notin C$ là một đỉnh tùy ý của $\Gamma_{\mathbf{a}}$ và kề với một đỉnh của C. Như ta đã thấy trong trường hợp 1, ta có thể giả sử rằng w không kề với bất kỳ đỉnh nào của $\Gamma_{\mathbf{a}}$ nằm ngoài C. Cùng với việc $\Gamma_{\mathbf{a}}$ liên thông nên từ điều đó ta suy ra $\Gamma_{\mathbf{a}} - C$ chỉ gồm các đỉnh cô lập. Ta lại có $C \subseteq N_{\mathbf{a}}(h)$ nên $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}} - N_{\mathbf{a}}(h)) = 0$. Theo Hệ quả 2.3.2, ta có $\deg_{\mathbf{a}}(h) \geq 3$. Do đó $N_{\mathbf{a}}(h)$ chứa ít nhất một đỉnh của $\Gamma_{\mathbf{a}}$ mà không thuộc C. Giả sử đỉnh đó là w. Tương tự như đỉnh v, đỉnh w kề thêm với ít nhất một đỉnh của C, khác với h, giả sử là i. Nếu $w \neq v$, ta sẽ nhận được một ngũ giác trên các đỉnh i, j, h, v, w, điều này mâu thuẫn với giả sử của ta. Do đó $w = v$. Vì v, w đã được chọn tùy ý nên v là đỉnh duy nhất của $\Gamma_{\mathbf{a}}$ không nằm trong C. Do đó, $\Gamma_{\mathbf{a}}$ là đồ thị đầy đủ K_4. Từ Hệ quả 2.3.2, ta có

$$\deg_{\mathbf{a}}(u) + \nu(\Gamma_{\mathbf{a}} - N_{\mathbf{a}}(u)) \geq 3$$

với mọi đỉnh $u \in V \setminus V_{\mathbf{a}}$. Vì $V_{\mathbf{a}}$ là một tập thống trị của Γ nên $N_{\mathbf{a}}(u) \neq \emptyset$.

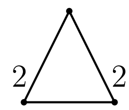
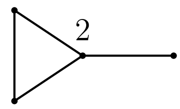
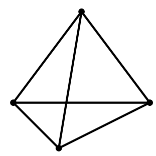
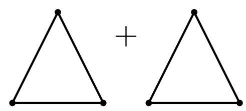
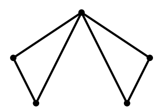
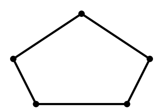
Ta suy ra $\Gamma_{\mathbf{a}} - N_{\mathbf{a}}(u)$ được chứa trong một tam giác. Từ đó ta có

$$\nu(\Gamma_{\mathbf{a}} - N_{\mathbf{a}}(u)) \leq 1.$$

Do vậy $\deg_{\mathbf{a}}(u) \geq 2$. Điều này có nghĩa là u kề với ít nhất hai đỉnh của $\Gamma_{\mathbf{a}}$. Ta được trường hợp (vi).

Định lý đã được chứng minh. □

Từ Định lý 3.2.1 ta nhận được tất cả dạng của đồ thị 3-bão hòa.

Dạng	Miêu tả	Hình
1	Ω là một tam giác với trọng (2,2,1)	
2	Ω được căng bởi một tam giác và một cạnh giao nhau tại một đỉnh với trọng 2	
3	Ω là đồ thị đầy đủ K_4	
4	Ω là hợp rời nhau của hai tam giác	
5	Ω được căng bởi hai tam giác giao nhau tại một đỉnh	
6	Ω được căng bởi một ngũ giác	

Bảng 3.1. Đồ thị 3-bão hòa.

Hệ quả 3.2.2. *Ω là đồ thị 3-bão hòa khi và chỉ khi Ω có một trong các dạng ở Bảng 3.1.*

Sử dụng Định lý 3.2.1 ta có thể miêu tả một cách thuần túy tổ hợp tập các iđêan nguyên tố liên kết của I^3 như sau.

Định lý 3.2.3. *Gọi F là một phủ của Γ. Khi đó P_F là đêan nguyên tố liên kết của I^3 khi và chỉ khi F là phủ tối tiểu hoặc tối tiểu trong số các phủ của Γ chứa lân cận đóng của một tập đỉnh U mà đồ thị cảm sinh Γ_U của Γ được căng bởi một trong các dạng sau: một tam giác, hợp của một cạnh và một tam giác giao nhau tại một đỉnh, hợp của hai tam giác không kề nhau, hợp của hai tam giác giao nhau tại một đỉnh, một ngũ giác.*

Chứng minh. Ta có thể giả sử rằng F không là phủ tối tiểu của Γ. Khi đó $\mathrm{c}(F) \neq \emptyset$. Ta đặt

$$S := k[x_i |\ i \in \mathrm{c}(F)] \text{ và } J := I(\Gamma_{\mathrm{c}(F)}).$$

Theo Hệ quả 2.3.2 và Định lý 2.4.1, P_F là iđêan nguyên tố liên kết của I^3 khi và chỉ khi F là tối tiểu trong số các phủ của Γ chứa lân cận đóng $N[V_{\mathbf{a}}]$ với véctơ $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ thỏa mãn $x^{\mathbf{a}} \in \widetilde{J^3} \setminus J^3$. Theo Định lý 3.2.1, điều thứ hai xảy ra khi và chỉ khi đồ thị đế $\Gamma_{V_{\mathbf{a}}}$ của $\Gamma_{\mathbf{a}}$ có một trong các dạng trên. Nếu $\Gamma_{\mathbf{a}}$ là đồ thị đầy đủ K_4 và mọi đỉnh của $\mathrm{c}(F) \setminus V_{\mathbf{a}}$ kề với hai đỉnh của $V_{\mathbf{a}}$ thì mọi đỉnh của $\mathrm{c}(F) \setminus V_{\mathbf{a}}$ kề với mọi tam giác của đồ thị K_4 đó. Do vậy trường hợp này có thể được biểu diễn thông qua trường hợp tam giác. $\square$

Tương tự như Hệ quả 3.1.2 ta cũng nhận được từ Định lý 3.2.3 tiêu chuẩn dưới đây.

Hệ quả 3.2.4. $\operatorname{depth} R/I^3 > 0$ *khi và chỉ khi Γ không có đồ thị con thống trị có một trong các dạng: một tam giác, hợp của một cạnh và một tam giác giao nhau tại một đỉnh, hợp của hai tam giác không kề nhau, hợp của hai tam giác giao nhau tại một đỉnh, một ngũ giác.*

3.3 Trường hợp $t = 4$

Do tính phức tạp của trường hợp này nên ta cần tìm các đồ thị 4-bão hòa trước. Nhớ lại rằng nếu đồ thị Ω là 4-bão hòa thì $\nu(\Omega) \leq 3$. Trước hết ta xét $\nu(\Omega) < 3$.

Bổ đề 3.3.1. *Cho Ω là đồ thị 4-bão hòa với $\nu(\Omega) < 3$. Khi đó Ω là đồ thị đầy đủ K_5.*

Chứng minh. Nếu $\nu(\Omega) < 3$ thì một đồ thị 4-bão hòa cũng là 3-bão hòa. Từ Định lý 3.2.1 ta có thể thấy ngay những đồ thị 3-bão hòa mà là 4-bão hòa. Dễ thấy rằng Ω không thuộc các dạng 1-4 của Bảng 3.1 vì điều kiện (ii) trong định nghĩa của đồ thị 4-bão hòa không được thỏa mãn. Do vậy, Ω là đồ thị được căng bởi một ngũ giác, hoặc bởi hai tam giác giao nhau tại một đỉnh. Với các đồ thị đó, điều kiện (ii) được thỏa mãn khi và chỉ khi $\deg_\Omega(i) = 4$ với mọi đỉnh i. Điều này tức là Ω là đồ thị đầy đủ K_5. □

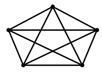
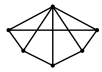
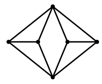
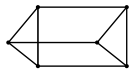
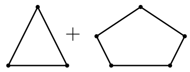
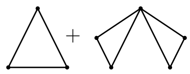
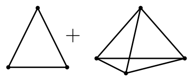
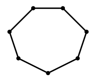
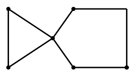
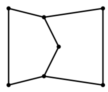
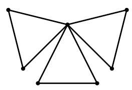
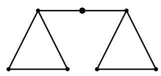
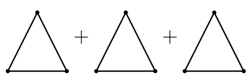
Như vậy ta chỉ có duy nhất một đồ thị 4-bão hòa với $\nu(\Omega) < 3$. Tiếp theo ta sẽ tìm các đồ thị 4-bão hòa với trọng của mọi đỉnh đều bằng 1.

Định lý 3.3.2. *Một đồ thị Ω với mọi đỉnh đều có trọng 1 là 4-bão hòa khi và chỉ khi Ω có một trong các dạng ở Bảng 3.2.*

Chứng minh. Dễ thấy rằng mọi đồ thị trong Bảng 3.2 là 4-bão hòa. Ngược lại giả sử rằng Ω là đồ thị 4-bão hòa trên tập đỉnh U, chúng tôi sẽ chứng tỏ rằng Ω có một trong các dạng của Bảng 3.2. Từ điều kiện (ii) trong định nghĩa của đồ thị 4-bão hòa ta suy ra rằng với mọi đỉnh $i \in U$ thì

$$\deg_\Omega(i) \geq 4 - \nu(\Omega - N_\Omega(i)) > 4 - \nu(\Omega).$$

Kết hợp với điều kiện (i), ta nhận được $\deg_\Omega(i) \geq 2$ với mọi $i \in U$, hay là mọi đỉnh của Ω có ít nhất hai láng giềng.

Dạng	Miêu tả	Hình
1	Ω là đồ thị đầy đủ K_5	
2	Ω được căng bởi một hình nón với đáy là chu trình C_5	
3	Ω được căng bởi hợp của bốn tam giác	
4	Ω được căng bởi một lăng trụ tam giác	
5	Ω là hợp rời nhau của một tam giác và đồ thị được căng bởi chu trình C_5	
6	Ω là hợp rời nhau của một tam giác và đồ thị được căng bởi hai tam giác giao nhau tại một đỉnh	
7	Ω là hợp rời nhau của một tam giác và đồ thị đầy đủ K_4	
8	Ω được căng bởi chu trình C_7	
9	Ω được căng bởi hợp của một tam giác và một ngũ giác giao nhau tại một đỉnh	
10	Ω được căng bởi hợp của hai ngũ giác có chung hai cạnh liên tiếp	
11	Ω được căng bởi hợp của ba tam giác giao nhau tại một đỉnh	
12	Ω được căng bởi hai tam giác nối với nhau bằng một đường dẫn độ dài 2	
13	Ω là hợp rời nhau của ba tam giác	

Bảng 3.2. Đồ thị 4-bão hòa trọng (1).

Nếu $\nu(\Omega) < 3$ thì từ Bổ đề 3.3.1 ta nhận được dạng duy nhất của Ω là dạng 1. Ta chỉ còn xét $\nu(\Omega) = 3$. Khi đó Ω có ba cạnh rời nhau nên $n := |U| \geq 6$. Mặt khác, từ Bổ đề 2.3.4 ta có $n \leq 9$. Sau đây ta xét các trường hợp tùy theo n.

Trường hợp 1: $n = 6$. Vì mọi đỉnh i có ít nhất hai láng giềng nên $\Omega - N_\Omega(i)$ có nhiều nhất ba đỉnh và do vậy

$$\nu(\Omega - N_\Omega(i)) \leq 1 \text{ với mọi } i \in U.$$

Từ điều kiện (ii) ta suy ra $3 \leq \deg_\Omega(i) \leq 5$ với mọi $i \in U$. Ta xét các tình huống sau:

Trường hợp 1.1: $\max \deg_\Omega(i) = 5$. Cho i là đỉnh mà $\deg_\Omega(i) = 5$. Vì $\nu(\Omega) = 3$, ta có $\nu(\Omega - i) = 2$. Khi đó

$$\nu(\Omega - i) = \nu(\Omega) - 1.$$

Hơn nữa, ta có

$$(\Omega - i) - N_{\Omega - i}(j) = \Omega - N_\Omega(j) \text{ với mọi } j \neq i,$$

$$\deg_{\Omega - i}(j) = \deg_\Omega(j) - 1 \text{ với mọi } j \neq i.$$

Do đó, Ω là 4-bão hòa khi và chỉ khi đồ thị cảm sinh của Ω trên tập đỉnh $U \setminus \{i\}$ là 3-bão hòa. Từ Định lý 3.2.1 ta suy ra $\Omega - i$ hoặc là một ngũ giác hoặc là hợp của hai tam giác giao nhau tại một đỉnh. Ta nhận được Ω hoặc có dạng 2 hoặc có dạng 3.

Trường hợp 1.2: $\max \deg_\Omega(i) = 4$. Gọi i là đỉnh có $\deg_\Omega(i) = 4$ với các láng giềng của i là p, q, u, v và j là đỉnh không kề với i.

Nếu $\deg_\Omega(j) = 4$ thì ta có $N_\Omega(j) = \{p, q, u, v\}$. Vì $\deg_\Omega(p) \geq 3$ nên p phải kề với ít nhất một trong ba đỉnh q, u, v. Không mất tổng quát, ta có thể giả sử rằng $\{p, q\}$ là một cạnh của Ω (xem Hình 3.2). Nếu $\{u, v\} \in \Omega$ thì Ω có dạng 3. Nếu $\{u, v\} \notin \Omega$ thì

$$\nu(\Omega - N_\Omega(p)) \leq \nu(\Omega_{\{u,v\}}) = 0.$$

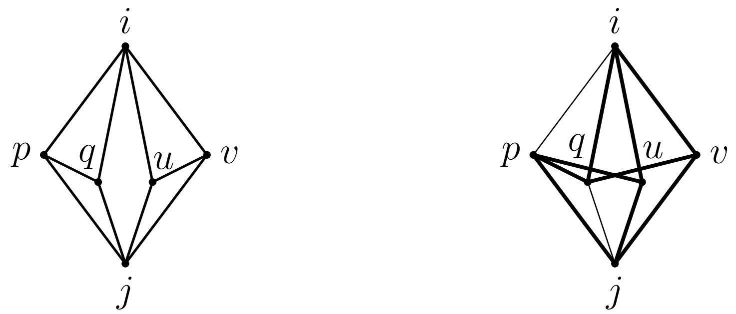
Kết hợp với điều kiện

$$4 - \deg_{\Omega}(p) \leq \nu(\Omega - N_{\Omega}(p))$$

ta nhận được

$$4 - \deg_{\Omega}(p) = 0.$$

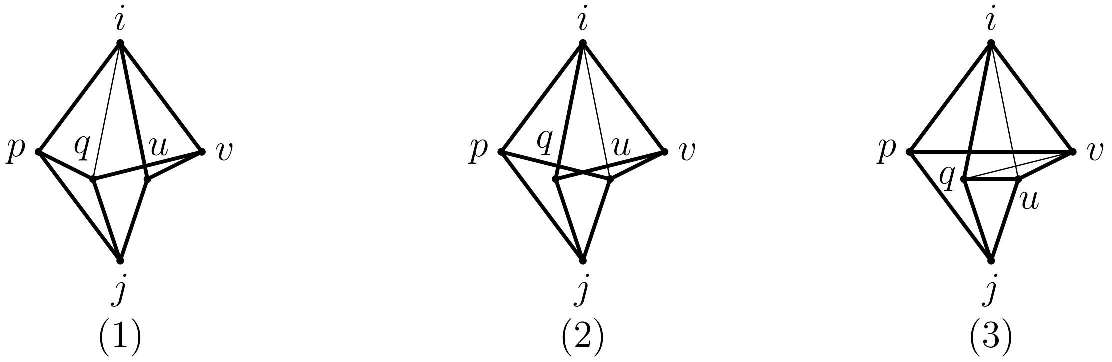
Do vậy, hoặc $\{p, u\}$ hoặc $\{p, v\}$ là một cạnh của Ω. Giả sử đó là $\{p, u\}$. Khi đó $\{p, v\}$ không là cạnh vì $\deg_{\Omega}(p) < 5$. Từ điều kiện $\deg_{\Omega}(v) \geq 3$, ta suy ra $\{q, v\}$ là một cạnh. Vậy ta được Ω chứa hai tam giác $\{i, q, v\}$, $\{p, u, j\}$ và ba cạnh $\{i, u\}$, $\{q, p\}$, $\{v, j\}$, hay Ω có dạng 4.



$\{u, v\} \in \Omega$ $\qquad\qquad$ $\{u, v\} \notin \Omega$

Hình 3.2. $\deg_{\Omega}(i) = \deg_{\Omega}(j) = 4$.

Nếu $\deg_{\Omega}(j) = 3$ thì j không kề với một đỉnh trong tập $\{p, q, u, v\}$. Không mất tổng quát, ta có thể giả sử đỉnh đó là v. Vì $\deg_{\Omega}(v) \geq 3$ nên v kề với ít nhất hai đỉnh trong tập $\{p, q, u\}$. Vì vai trò của các đỉnh p, q, u là như nhau, ta có thể giả sử $\{v, q\}$ và $\{v, u\}$ là các cạnh của Ω. Ta cũng có $\deg_{\Omega}(p) \geq 3$ nên một trong các đỉnh q, u, v phải kề với p. Nếu $\{p, q\}$ là một cạnh của Ω thì Ω chứa hai tam giác $\{i, u, v\}$, $\{p, j, q\}$ và ba cạnh $\{i, p\}$, $\{u, j\}$, $\{v, q\}$ (Hình 3.3(1)). Nếu $\{p, u\}$ là một cạnh của Ω thì Ω chứa hai tam giác $\{i, q, v\}$, $\{p, j, u\}$ và ba cạnh $\{i, p\}$, $\{q, j\}$, $\{v, u\}$ (Hình 3.3 (2)). Nếu $\{p, q\}$ và $\{p, u\}$ đều không là cạnh của Ω thì bằng cách áp dụng điều kiện (ii) cho p, ta nhận được $\{p, v\}$ và $\{q, u\}$ phải là các cạnh của Ω. Khi đó Ω chứa hai tam giác $\{i, p, v\}$,$\{q, j, u\}$ và ba cạnh $\{i, q\}$, $\{p, j\}$, $\{v, u\}$ (Hình 3.3(3)).



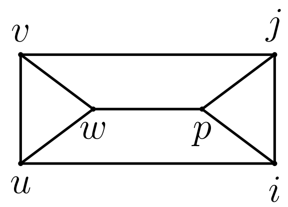
Hình 3.3. $\deg_\Omega(i) = 4$ và $\deg_\Omega(j) = 3$.

Trường hợp 1.3: $\max \deg_\Omega(i) = 3$. Ta suy ra $\deg_\Omega(i) = 3$ với mọi đỉnh $i \in U$. Theo Bổ đề 2.3.12 một đồ thị 4-bão hòa tùy ý luôn chứa một chu trình lẻ độ dài ≤ 7. Do đó, Ω chứa một tam giác hoặc một ngũ giác. Nếu Ω chứa một đồ thị cảm sinh là ngũ giác thì do $\deg_\Omega(i) = 3$ với mọi $i \in U$, nên tất cả các đỉnh của ngũ giác này phải kề với đỉnh còn lại mà không thuộc ngũ giác. Nhưng lúc đó bậc của đỉnh ấy bằng 5, điều này mâu thuẫn với giả thiết $\max \deg_\Omega(i) = 3$. Vậy Ω không có ngũ giác cảm sinh, do đó nó chứa một tam giác.

Giả sử $T_1 := \{u, v, w\}$ là tam giác nói trên. Ta sẽ chứng tỏ rằng ba đỉnh còn lại kề nhau từng đôi. Giả sử ngược lại và gọi i, j là cặp đỉnh không kề nhau. Vì

$$\deg_\Omega(i) = \deg_\Omega(j) = 3$$

nên cả i và j kề với ít nhất hai đỉnh của tam giác $\{u, v, w\}$. Khi đó ít nhất một đỉnh của $\{u, v, w\}$ kề với cả i và j, do đó nó có bậc ≥ 4, điều này mâu thuẫn với giả thiết $\max \deg_\Omega(i) = 3$. Như vậy các đỉnh còn lại tạo thành một tam giác nữa, ta ký hiệu nó là T_2. Hơn nữa, điều kiện $\deg_\Omega(i) = 3$ với mọi i cũng cho ta thấy rằng bất kỳ đỉnh nào của T_1 cũng kề với duy nhất một đỉnh của T_2, hay Ω có dạng 4.



Hình 3.4. $\max \deg_\Omega(i) = 3$.

<u>Trường hợp 2: $n = 7$.</u>

Nếu Ω không liên thông, thì theo Bổ đề 2.3.13 ta có Ω là hợp của một đồ thị 2-bão hòa và một đồ thị 3-bão hòa. Từ đó, Ω là hợp của một tam giác và đồ thị đầy đủ K_4 (tức là dạng 7). Từ đây ta có thể giả sử Ω liên thông. Theo Bổ đề 2.3.12, Ω hoặc chứa một tam giác, một ngũ giác, hoặc chu trình lẻ C_7. Nếu Ω chứa C_7, thì Ω có dạng 8.

Tiếp theo, ta chỉ xét trường hợp Ω không chứa C_7. Gọi M là ghép cặp có số cạnh lớn nhất của Ω. Vì $\nu(\Omega) = 3$ và $n = 7$, tồn tại duy nhất đỉnh i không thuộc M. Theo Bổ đề 2.3.7 tồn tại chu trình lẻ P_i là mở rộng của M, bắt đầu và kết thúc tại i. Vì Ω không chứa C_7 nên P_i là tam giác hoặc ngũ giác. Chúng tôi xem xét các trường hợp sau:

<u>Trường hợp 2.1:</u> *Tồn tại một ngũ giác P_i là mở rộng của M bắt đầu và kết thúc tại i.* Đối với trường hợp này, P_i chứa hai cạnh của ghép cặp M. Giả sử $P_i := \{i, b, c, d, e\}$ và $\{u, v\}$ là cạnh còn lại của M và không nằm trong P_i. Vì $\deg_\Omega(j) \geq 2$ với mọi $j \in U$ nên cả hai đỉnh u, v đều kề với ít nhất một đỉnh của P_i. Điều kiện Ω không chứa C_7 cho ta thấy rằng hoặc cả u và v kề với cùng một đỉnh của P_i, hoặc u và v kề với hai đỉnh không kề nhau của P_i. Do vậy, Ω có dạng 9 hoặc dạng 10.

<u>Trường hợp 2.2:</u> *Không tồn tại ngũ giác mở rộng của M bắt đầu và kết thúc tại i.* Khi đó P_i là một tam giác. Gọi $\{u, v\}$ và $\{p, q\}$ là hai cạnh của M không nằm trong P_i. Nếu không có đỉnh nào của cạnh $\{u, v\}$ kề với một đỉnh của cạnh $\{p, q\}$ thì cả $\{p, q\}$ và $\{u, v\}$ đều có ít nhất một đỉnh kề với một đỉnh của P_i (vì Ω liên thông). Hơn nữa, do không có ngũ giác mở rộng của M bắt đầu và kết thúc tại i, cả hai đỉnh p và q kề với cùng một đỉnh của P_i, tương tự với u và v. Nhưng $\{u, v\}$ và $\{p, q\}$

không kề nhau, nên p, q, u, v kề với cùng một đỉnh của P_i. Ta được Ω có dạng 11.

Nếu tồn tại một đỉnh của cạnh $\{u, v\}$ kề với một đỉnh của cạnh $\{p, q\}$ thì không mất tổng quát ta có thể giả sử cạnh đó là $\{q, u\}$ (xem Hình 3.5). Khi đó ta có các trường hợp sau:

• *Ít nhất một trong hai đỉnh p hoặc v kề với một đỉnh của tam giác P_i,* giả sử đó là p và thêm nữa giả sử $\{p, x\} \in \Omega$ trong đó $x \in P_i$ (Hình 3.5(1)). Nếu v cũng kề với một đỉnh của tam giác P_i thì hoặc Ω chứa chu trình lẻ C_7 hoặc Ω có dạng 9. Nếu v không kề với đỉnh nào của P_i thì từ điều kiện

$$\nu(\Omega - N_\Omega(v)) \geq 4 - \deg_\Omega(v)$$

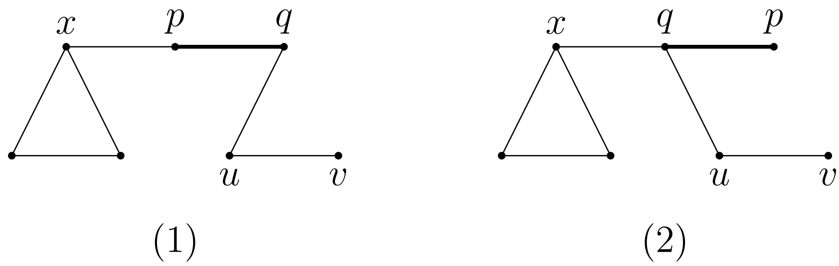
ta suy ra v có ít nhất hai láng giềng và do vậy hoặc $\{v, p\}$ hoặc $\{v, q\}$ là cạnh của Ω. Nếu $\{v, q\} \in \Omega$ thì Ω có dạng 12. Nếu $\{v, q\} \notin \Omega$ thì $\{v, p\} \in \Omega$. Nhưng khi đó điều kiện

$$\nu(\Omega - N_\Omega(q)) \geq 4 - \deg_\Omega(q)$$

lại cho ta thấy

$$\deg_\Omega(q) \geq 4 - \nu(\Omega - N_\Omega(q)) \geq 3$$

nên q kề với ít nhất một đỉnh của P_i. Vì vậy, Ω hoặc chứa C_7 hoặc có dạng 9.



Hình 3.5. $n = 7$ và Ω không có ngũ giác mở rộng của M.

• *Cả hai đỉnh p và v đều không kề với đỉnh nào của P_i.* Vì Ω liên thông nên ít nhất một trong hai đỉnh q hoặc u phải kề với một đỉnh của P_i. Ta giả sử là q (Hình 3.5(2)). Từ điều kiện

$$\nu(\Omega - N_\Omega(p)) \geq 4 - \deg_\Omega(p)$$

ta suy ra p có ít nhất hai láng giềng. Nhưng p không kề với đỉnh nào của P_i nên p kề với u hoặc v. Bằng cách thay đổi vai trò của p và q, ta quay lại trường hợp trên.
Trường hợp 3: $n = 8$. Từ Bổ đề 2.3.12 ta có Ω chứa một tam giác, hoặc một ngũ giác, hoặc một chu trình lẻ C_7. Nếu Ω chứa C_7 thì Ω liên thông và Ω chứa hợp của C_7 với một cạnh. Ta được $\nu(\Omega) = 4$, điều này vô lý. Do vậy, Ω không chứa C_7.

Nếu Ω không liên thông, thì từ Bổ đề 2.3.13 ta suy ra Ω là hợp rời nhau của một đồ thị 2-bão hòa và một đồ thị 3-bão hòa. Theo [28] một đồ thị 2-bão hòa chỉ có thể là một tam giác và theo Hệ quả 3.2.2 một đồ thị 3-bão hòa với 5 đỉnh hoặc là một ngũ giác hoặc là hợp của hai tam giác giao nhau tại một đỉnh. Từ đó ta suy ra Ω có dạng 5 hoặc dạng 6.

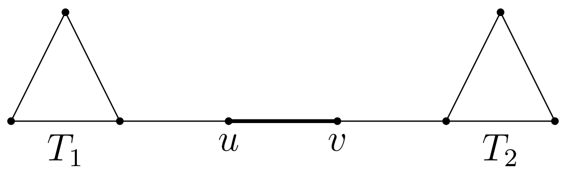
Tiếp theo, giả sử Ω liên thông. Vì $\nu(\Omega) = 3$, ta có thể giả sử

$$M := \{\{m, n\}, \{p, q\}, \{u, v\}\}$$

là một ghép cặp có số cạnh lớn nhất của Ω và i, j là hai đỉnh còn lại không thuộc M. Hiển nhiên $\{i, j\}$ không là cạnh của Ω. Theo Bổ đề 2.3.7, có hai chu trình lẻ rời nhau, đều là mở rộng của M, ký hiệu P_i và P_j, mà tương ứng bắt đầu và kết thúc tại i và j. Vì Ω không chứa C_7 nên P_i và P_j hoặc là tam giác hoặc là ngũ giác. Vì $n = 8$ nên P_i và P_j không thể cùng là ngũ giác. Ta phân biệt hai trường hợp sau:
Trường hợp 3.1: *P_i và P_j là một tam giác và một ngũ giác.* Khi đó đồ thị Ω liên thông gồm 8 đỉnh chứa một tam giác và một ngũ giác được nối với nhau bởi một cạnh. Ta được $\nu(\Omega) \geq 4$, điều này mâu thuẫn với giả thiết Ω là 4-bão hòa.
Trường hợp 3.2: *P_i và P_j là hai tam giác rời nhau.* Không mất tổng quát, ta có thể giả sử hai tam giác đó là $T_1 := \{i, m, n\}$ và $T_2 := \{j, p, q\}$. Nếu T_1 và T_2 được nối bởi một cạnh thì đồ thị cảm sinh của Ω trên tập đỉnh $\{i, m, n, j, p, q\}$ có chỉ số ghép cặp bằng 3. Vì tập đỉnh của đồ thị con này và tập các đỉnh $\{u, v\}$ rời nhau, nên

$$\nu(\Omega) = 3 + 1 = 4,$$

ta cũng nhận được một mâu thuẫn với giả thiết Ω là 4-bão hòa. Do đó, không có cạnh nào nối một đỉnh của T_1 với một đỉnh của T_2. Vì Ω liên thông nên cả T_1 và T_2 đều có ít nhất một đỉnh kề với một đỉnh của cạnh $\{u, v\}$. Hơn nữa, vì $\deg_\Omega(u) \geq 2$ và $\deg_\Omega(v) \geq 2$ nên tồn tại hai cạnh rời nhau mà một cạnh nối T_1 với $\{u, v\}$ và cạnh còn lại nối T_2 với $\{u, v\}$. Do vậy, Ω chứa hai tam giác được liên thông bởi một đường dẫn độ dài 3 (xem Hình 3.6).



Hình 3.6. Hai tam giác nối với nhau bằng một đường dẫn độ dài 3.

Nhưng khi đó, $\nu(\Omega) \geq 4$, mâu thuẫn với giả thiết.

Trường hợp 4: $n = 9$. Khi đó tồn tại một ghép cặp M có số cạnh lớn nhất với ba cạnh rời nhau e_1, e_2, e_3 và ba đỉnh phân biệt u_1, u_2, u_3 không thuộc M. Sử dụng Bổ đề 2.3.7 ta suy ra có ba chu trình lẻ khác nhau từng đôi bắt đầu từ các đỉnh u_1, u_2, u_3. Do đó, các chu trình đó phải là các tam giác. Điều kiện $\nu(\Omega) < 4$ cho thấy rằng không thể có cạnh nào nối một đỉnh của một tam giác này với một đỉnh của một tam khác. Do đó Ω là hợp của ba tam giác rời nhau từng đôi.

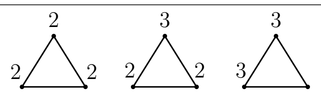
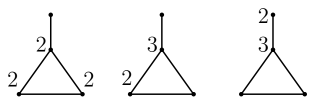
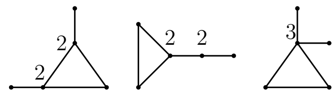
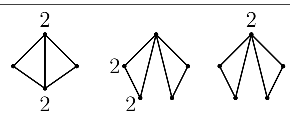
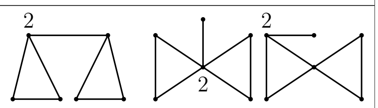
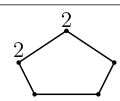
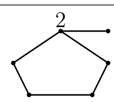
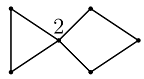
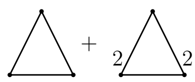
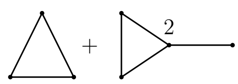
Định lý 3.3.2 đã được chứng minh.

□

Bây giờ ta xét các đồ thị 4-bão hòa với trọng tùy ý. Theo Mệnh đề 2.3.3, ta có phân cực của một đồ thị có trọng 4-bão hòa cũng là một đồ thị 4-bão hòa. Vì vậy ta có thể sử dụng Định lý 3.3.2 và phép gộp đỉnh để phân loại các đồ thị 4-bão hòa có trọng.

Định lý 3.3.3. *Một đồ thị có trọng Ω là 4-bão hòa khi và chỉ khi Ω là một trong các dạng của Bảng 3.2 hoặc Bảng 3.3.*

Chứng minh. Dễ thấy rằng mọi đồ thị ở Bảng 3.3 đều là 4-bão hòa.

Dạng	Miêu tả	Hình
1	Ω là một tam giác với một trong các trọng (2,2,2), (3,2,2) hoặc (3,3,1)	
2	Ω được căng bởi hợp của một tam giác và một cạnh	
3	Ω được căng bởi hợp của một tam giác và hai cạnh	
4	Ω được căng bởi hợp của hai tam giác	
5	Ω được căng bởi hợp của hai tam giác và một cạnh	
6	Ω được căng bởi một ngũ giác với trọng (2,2,1,1,1)	
7	Ω được căng bởi hợp của một ngũ giác và một cạnh giao nhau tại một đỉnh với trọng 2	
8	Ω được căng bởi hợp của một tứ giác và một tam giác giao nhau tại một đỉnh với trọng 2	
9	Ω là hợp rời nhau của hai tam giác trong đó một tam giác có trọng (2,2,1)	
10	Ω là hợp rời nhau của một tam giác và đồ thị được căng bởi một tam giác và một cạnh giao nhau tại một đỉnh với trọng 2	

Bảng 3.3. Đồ thị 4-bão hòa trọng khác (1).

Ngược lại, cho Ω là đồ thị 4-bão hòa. Chúng tôi sẽ chứng tỏ Ω là một trong các dạng thuộc Bảng 3.2 hoặc Bảng 3.3. Nếu Ω là một đồ thị với tất cả các đỉnh đều có trọng 1 thì Định lý 3.3.2 cho ta thấy rằng Ω có một trong các dạng ở Bảng 3.2. Nếu Ω có ít nhất một đỉnh có trọng lớn hơn 1 thì từ Mệnh đề 2.3.3 ta suy ra $\mathrm{p}(\Omega)$ phải có một trong các dạng ở Bảng 3.2. Do đó, Ω có thể thu được từ một đồ thị của Bảng 3.2 bằng cách gộp các đỉnh không kề nhau mà có cùng lân cận mở. Gọi W là tập đỉnh của $\mathrm{p}(\Omega)$. Ta có $|W| \neq 5$ và $|W| \neq 9$, vì trong các trường hợp đó $\mathrm{p}(\Omega)$ hoặc là đồ thị đầy đủ K_5 hoặc là hợp của ba tam giác không kề nhau, do vậy nó không có những đỉnh không kề nhau mà có cùng lân cận mở.

Chúng tôi sẽ xem xét từng trường hợp của $\mathrm{p}(\Omega)$ dựa trên $|W|$.

Trường hợp 1: $|W| = 6$. Bằng cách gộp các đỉnh không kề nhau có cùng lân cận mở, ta thu được hoặc một tam giác với véctơ trọng $(2, 2, 2)$, hoặc hai tam giác chung một cạnh với trọng cho hai đỉnh của cạnh đó là $(2, 2)$, hoặc hai tam giác chung một đỉnh với trọng tại đỉnh đó bằng 2.

Trường hợp 2: $|W| = 7$. Tương tự như trên, ta cũng gộp các đỉnh không kề nhau có cùng lân cận mở, ta thu được hoặc một tam giác với một trong hai véctơ trọng $(3, 2, 2)$, $(3, 3, 1)$, hoặc hợp của một tam giác và một cạnh với một trong hai véctơ trọng được liệt kê trong dạng 2 của Bảng 3.3, hoặc hợp của một tam giác và hai cạnh như trong dạng 3 của Bảng 3.3; hoặc hợp của một tam giác có trọng $(1, 1, 1)$ và một tam giác có trọng $(2, 2, 1)$ giao nhau tại đỉnh trọng 1, đó là trường hợp 3 và 4, dạng 4 của Bảng 3.3, hoặc một ngũ giác có hai đỉnh của một cạnh đều có trọng 2, hoặc hợp của một ngũ giác và một cạnh giao nhau tại một đỉnh với trọng bằng 2, đó là dạng 7 của Bảng 3.3, hoặc hợp của hai tam giác và một cạnh như dạng 5 của Bảng 3.3, hoặc hợp của một tam giác và một tứ giác giao nhau tại một đỉnh với trọng bằng 2, đó là dạng 8 của Bảng 3.3.

Trường hợp 3: $|W| = 8$. Khi đó $\mathrm{p}(\Omega)$ phải là hợp rời nhau của một tam giác và một đồ thị 3-bão hòa mà mọi đỉnh đều có trọng 1. Do vậy Ω có dạng 9 hoặc dạng 10 của Bảng 3.3. $\square$

Tương tự như trường hợp $t = 3$, ta cũng miêu tả tất cả các đơn thức $x^{\mathbf{a}} \in \widetilde{I^4} \setminus I^4$.

Định lý 3.3.4. *Cho véctơ* $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$. *Khi đó* $x^{\mathbf{a}} \in \widetilde{I^4} \setminus I^4$ *khi và chỉ khi* $V_{\mathbf{a}}$ *là tập thống trị của* Γ *và một trong các điều kiện dưới đây được thỏa mãn:*

(i) $\Gamma_{\mathbf{a}}$ *là hợp rời nhau của một tam giác và đồ thị đầy đủ* K_4 *(đó là dạng 7 của Bảng 3.2) sao cho mọi đỉnh* $i \in V \setminus V_{\mathbf{a}}$ *kề với tam giác hoặc kề với mọi tam giác của* K_4*,*

(ii) $\Gamma_{\mathbf{a}}$ *được căng bởi hai tam giác rời nhau mà có một đường dẫn độ dài 2 liên kết chúng (tức là dạng 12 của Bảng 3.2) sao cho hoặc các điểm đầu mút của đường dẫn kề nhau trong* $\Gamma_{\mathbf{a}}$ *hoặc mọi đỉnh trong tập* $V \setminus V_{\mathbf{a}}$ *kề với ít nhất một tam giác trong hai tam giác đó,*

(iii) $\Gamma_{\mathbf{a}}$ *có một trong các dạng của Bảng 3.2 trừ dạng 7, dạng 12 hoặc có một trong các dạng của Bảng 3.3 và đối với một đỉnh tùy ý* $i \in V \setminus V_{\mathbf{a}}$ *ta có*

$$\deg_{\mathbf{a}}(i) > 7 - \deg(x^{\mathbf{a}}).$$

Chứng minh. Theo Hệ quả 2.3.2, $x^{\mathbf{a}} \in \widetilde{I^4} \setminus I^4$ khi và chỉ khi $\Gamma_{\mathbf{a}}$ là đồ thị 4-bão hòa và

$$\nu(\Gamma_{\mathbf{a}} - N_{\mathbf{a}}(i)) \geq 4 - \deg_{\mathbf{a}}(i)$$

với mọi $i \in V \setminus V_{\mathbf{a}}$. Điều này kéo theo rằng $\Gamma_{\mathbf{a}}$ là đồ thị 4-bão hòa và $V_{\mathbf{a}}$ là tập thống trị của Γ. Do vậy, $\Gamma_{\mathbf{a}}$ có một trong các dạng của Bảng 3.2 và Bảng 3.3. Ta được, $5 \leq \deg(x^{\mathbf{a}}) \leq 9$.

Chúng tôi phân biệt các trường hợp dưới đây.

<u>Trường hợp 1: $\deg(x^{\mathbf{a}}) = 5$.</u> Khi đó $\Gamma_{\mathbf{a}}$ là đồ thị đầy đủ K_5 và điều kiện

$$\nu(\Gamma_{\mathbf{a}} - N_{\mathbf{a}}(i)) \geq 4 - \deg_{\mathbf{a}}(i)$$

dẫn tới i phải kề với ít nhất 3 đỉnh của $\Gamma_{\mathbf{a}}$ với mọi $i \in V \setminus V_{\mathbf{a}}$. Do đó,

$$\deg_{\mathbf{a}}(i) \geq 3 > 7 - 5 = 7 - \deg(x^{\mathbf{a}})$$

với mọi $i \in V \setminus V_{\mathbf{a}}$.
<u>Trường hợp 2: $\deg(x^{\mathbf{a}}) = 6$.</u> Khi đó điều kiện

$$\nu(\Gamma_{\mathbf{a}} - N_{\mathbf{a}}(i)) \geq 4 - \deg_{\mathbf{a}}(i)$$

kéo theo $\deg_{\mathbf{a}}(i) \geq 2$ với mọi $i \in V \setminus V_{\mathbf{a}}$. Do đó

$$\deg_{\mathbf{a}}(i) \geq 2 > 7 - 6 = 7 - \deg(x^{\mathbf{a}})$$

với mọi $i \in V \setminus V_{\mathbf{a}}$.
<u>Trường hợp 3: $\deg(x^{\mathbf{a}}) \geq 7$.</u> Tương tự như các trường hợp trên, điều kiện

$$\nu(\Gamma_{\mathbf{a}} - N_{\mathbf{a}}(i)) \geq 4 - \deg_{\mathbf{a}}(i)$$

dẫn tới i phải kề với một đỉnh của $\Gamma_{\mathbf{a}}$ với mọi $i \in V \setminus V_{\mathbf{a}}$ hoặc

$$\deg_{\mathbf{a}}(i) \geq 1 > 7 - \deg(x^{\mathbf{a}})$$

với mọi $i \in V \setminus V_{\mathbf{a}}$.

Hơn nữa, trong trường hợp $\Gamma_{\mathbf{a}}$ là hợp rời nhau của một tam giác và đồ thị đầy đủ K_4, nếu có một đỉnh $i \in V \setminus V_{\mathbf{a}}$ mà i không kề với tam giác thì

$$\nu(\Gamma_{\mathbf{a}} - N_{\mathbf{a}}(i)) = \nu(K_4 - N_{K_4}(i)) + 1.$$

Do vậy, điều kiện

$$\nu(\Gamma_{\mathbf{a}} - N_{\mathbf{a}}(i)) \geq 4 - \deg_{\mathbf{a}}(i)$$

kéo theo rằng

$$\deg_{K_4}(i) = \deg_{\mathbf{a}}(i) \geq 3 - \nu(K_4 - N_{K_4}(i)) \geq 2.$$

Ta được, i kề với mọi tam giác của K_4.

Đối với trường hợp $\Gamma_{\mathbf{a}}$ là đồ thị của hai tam giác được liên kết bởi một đường dẫn độ dài 2, ta ký hiệu v là điểm giữa của đường dẫn.

Nếu hai tam giác kề nhau hoặc các điểm đầu mút của đường dẫn kề nhau thì $\Gamma_{\mathbf{a}}$ hoặc là dạng 8 hoặc là dạng 9 của Bảng 3.2.

Nếu hai tam giác không kề nhau thì

$$\nu(\Gamma_{\mathbf{a}} - N_{\mathbf{a}}(v)) = 2.$$

Do vậy, với mọi đỉnh $i \in V \setminus V_{\mathbf{a}}$ mà i kề với v, ta có

$$\deg_{\mathbf{a}}(i) \geq 4 - \nu(\Gamma_{\mathbf{a}} - N_{\mathbf{a}}(i)) \geq 4 - \nu(\Gamma_{\mathbf{a}} - N_{\mathbf{a}}(v)) = 2.$$

Điều này dẫn tới $i \in V \setminus V_{\mathbf{a}}$ phải kề với một trong các tam giác.

Ngược lại, dễ dàng kiểm tra được nếu $\Gamma_{\mathbf{a}}$ là đồ thị thỏa mãn một trong các điều kiện nêu trên của Định lý thì $\Gamma_{\mathbf{a}}$ là đồ thị 4-bão hòa và

$$\nu(\Gamma_{\mathbf{a}} - N_{\mathbf{a}}(i)) \geq 4 - \deg_{\mathbf{a}}(i)$$

với mọi $i \in V \setminus V_{\mathbf{a}}$. Do đó, $x^{\mathbf{a}} \in \widetilde{I^4} \setminus I^4$. □

Sử dụng Định lý 3.3.4 ta có thể đặc trưng iđêan nguyên tố liên kết của I^4 như sau.

Định lý 3.3.5. *Gọi F là một phủ của Γ. Khi đó P_F là iđêan nguyên tố liên kết của I^4 khi và chỉ khi F là phủ tối tiểu hoặc tối tiểu trong số các phủ của Γ chứa lân cận đóng của một tập đỉnh U mà đồ thị cảm sinh Γ_U của Γ được căng bởi một trong các dạng ở Bảng 3.4.*

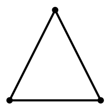
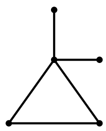
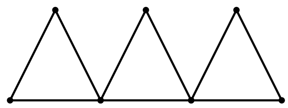
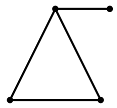
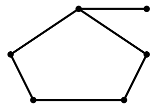
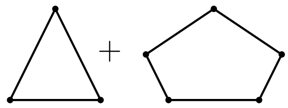
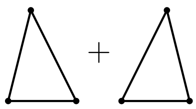
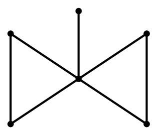
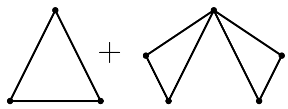
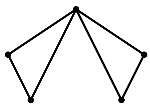
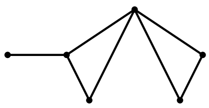
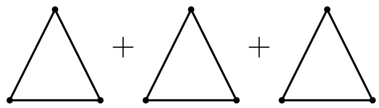
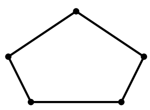
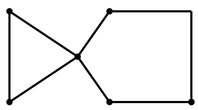
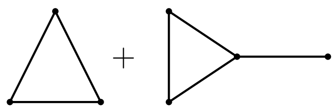
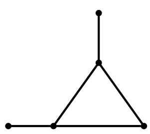
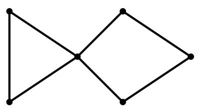
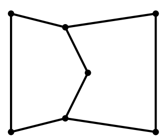
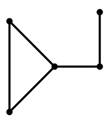
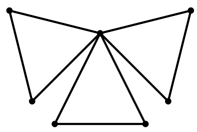
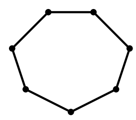
Chứng minh. Nhớ lại rằng P_F là iđêan nguyên tố tối tiểu của I^4 khi và chỉ khi F là phủ tối tiểu của Γ. Do đó, ta chỉ cần xét F không phải là phủ tối tiểu của Γ. Điều này dẫn tới $\mathrm{c}(F) \neq \emptyset$. Đặt

$$S := k[x_i | \ i \in \mathrm{c}(F)] \text{ và } J := I(\Gamma_{\mathrm{c}(F)}).$$

Theo Định lý 2.4.1, P_F là iđêan nguyên tố liên kết của I^4 khi và chỉ khi F là tối tiểu trong số các phủ của Γ chứa $N[V_{\mathbf{a}}]$ với véctơ $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ thỏa mãn $\Gamma_{\mathbf{a}}$ là 4-bão hòa và

$$\nu(\Gamma_{\mathbf{a}} - N_{\mathbf{a}}(i)) \geq 4 - \deg_{\mathbf{a}}(i)$$

với mọi $i \in \mathrm{c}(F) \setminus V_{\mathbf{a}}$. Theo Định lý 2.3.2, điều này xảy ra khi và chỉ khi $\Gamma_{\mathbf{a}}$ thỏa mãn một trong các điều kiện của Định lý đó.

Dạng	Hình	Dạng	Hình	Dạng	Hình
1		8		15	
2		9		16	
3		10		17	
4		11		18	
5		12		19	
6		13		20	
7		14		21	

Bảng 3.4. Các đồ thị con ứng với $\mathrm{Ass}(I^4)$.

Chúng tôi sẽ chứng minh rằng đồ thị đế $\Gamma_{V_{\mathbf{a}}}$ của $\Gamma_{\mathbf{a}}$ là một trong các đồ thị con ở Bảng 3.4 bằng cách xem xét từng trường hợp có thể của $\Gamma_{\mathbf{a}}$.

Nếu $\Gamma_{\mathbf{a}}$ là hợp rời nhau của một tam giác và đồ thị đầy đủ K_4 thì mọi đỉnh $i \in \mathrm{c}(F) \setminus V_{\mathbf{a}}$ hoặc kề với tam giác hoặc kề với mọi tam giác của K_4. Đặt

$$\mathbf{b} := \mathbf{a} - \mathbf{e}_t + \mathbf{e}_u + \mathbf{e}_v$$

trong đó t, u, v là các đỉnh của K_4. Khi đó $\mathbf{b} \in \mathbb{N}^n$ và $\Gamma_{\mathbf{b}}$ là hợp rời nhau của hai tam giác trong đó một tam giác có trọng $(2,2,1)$. Hơn nữa, một đỉnh tùy ý $i \in \mathrm{c}(F) \setminus V_{\mathbf{a}}$ hoặc kề với tam giác hoặc kề với mọi tam giác của K_4, nên i kề với $\Gamma_{\mathbf{b}}$ và do vậy kề với $N[V_{\mathbf{a}}] = N[V_{\mathbf{b}}]$. Điều này kéo theo rằng

$$\nu(\Gamma_{\mathbf{b}} - N_{\mathbf{b}}(i)) \geq 4 - \deg_{\mathbf{b}}(i)$$

với mọi $i \in \mathrm{c}(F) \setminus V_{\mathbf{b}}$. Ngoài ra, từ Định lý 2.3.2, $\Gamma_{\mathbf{b}}$ là 4-bão hòa. Do vậy, F là tối tiểu trong số các phủ của Γ chứa $N[V_{\mathbf{b}}]$ với $\Gamma_{\mathbf{b}}$ là 4-bão hòa và

$$\nu(\Gamma_{\mathbf{b}} - N_{\mathbf{b}}(i)) \geq 4 - \deg_{\mathbf{b}}(i)$$

với mọi $i \in \mathrm{c}(F) \setminus V_{\mathbf{b}}$. Trường hợp này có thể biểu thị qua trường hợp $\Gamma_{V_{\mathbf{a}}}$ là hợp của hai tam giác rời nhau.

Nếu $\Gamma_{\mathbf{a}}$ là hợp của hai tam giác rời nhau được nối bởi một đường dẫn độ dài 2 thì hoặc là các điểm mút của đường dẫn kề với $\Gamma_{\mathbf{a}}$ hoặc mọi đỉnh trong $\mathrm{c}(F) \setminus V_{\mathbf{a}}$ kề với ít nhất một tam giác. Đối với trường hợp đầu tiên thì $\Gamma_{V_{\mathbf{a}}}$ có dạng 15 trong Bảng 3.4. Đối với trường hợp thứ hai thì tương tự như trên, sau khi thay thế $\mathbf{a}$ bởi

$$\mathbf{b} := \mathbf{a} - \mathbf{e}_v + \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j$$

trong đó v biểu thị điểm giữa của đường dẫn và $\{i, j\}$ là một cạnh của một tam giác trong $\Gamma_{\mathbf{a}}$, ta có thể quy nó về trường hợp $\Gamma_{V_{\mathbf{a}}}$ là hợp của hai tam giác rời nhau.

Nếu $\Gamma_{\mathbf{a}}$ là một lăng trụ tam giác thì điều kiện đối với bậc của mọi đỉnh của $\mathrm{c}(F) \setminus V_{\mathbf{a}}$ kéo theo rằng các đỉnh đó kề với mọi ngũ giác của lăng trụ tam giác này. Tương tự như trên, trường hợp này có thể quy về trường hợp $\Gamma_{V_{\mathbf{a}}}$ là một ngũ giác.

Nếu $\Gamma_{\mathbf{a}}$ được căng bởi một hình nón với đáy là chu trình C_5 thì mọi đỉnh của $\mathrm{c}(F) \setminus V_{\mathbf{a}}$ kề với C_5 và trường hợp này cũng được quy về trường hợp $\Gamma_{V_{\mathbf{a}}}$ là một ngũ giác.

Nếu $\Gamma_{\mathbf{a}}$ được căng bởi bốn tam giác như miêu tả trong dạng 3 của Bảng 3.2 thì nó cũng được quy về trường hợp $\Gamma_{V_{\mathbf{a}}}$ là hợp của hai tam giác giao nhau tại một đỉnh.

Nếu $\Gamma_{\mathbf{a}}$ là hợp của hai tam giác có chung một cạnh với hai đỉnh của cạnh đó đều có trọng là 2 thì mọi đỉnh của $\mathrm{c}(F) \setminus V_{\mathbf{a}}$ kề với một trong các tam giác đó, do vậy trường hợp này lại được quy về trường hợp $\Gamma_{V_{\mathbf{a}}}$ là một tam giác.

Nếu $\Gamma_{\mathbf{a}}$ có một trong các dạng khác thì hiển nhiên $\Gamma_{V_{\mathbf{a}}}$ là một trong các đồ thị con được biểu thị ở Bảng 3.4. $\square$

Tương tự như các Hệ quả 3.1.2 và 3.2.4 ta cũng nhận được từ Định lý 3.3.5 tiêu chuẩn sau.

Hệ quả 3.3.6. $\operatorname{depth} R/I^4 > 0$ *khi và chỉ khi* Γ *không có đồ thị con thống trị thuộc một trong các dạng ở Bảng 3.4.*

Chương 4

Về tính giảm của $\operatorname{depth} R/I^t$

Mục đích chính của chương này là ứng dụng các kết quả của các chương trước để nghiên cứu về hàm độ sâu. Cho I là iđêan trong vành Noether R, M. Brodmann [2] đã chỉ ra rằng $\operatorname{depth} R/I^t$ ổn định với t đủ lớn. Giá trị đó được gọi là *độ sâu giới hạn* và được ký hiệu là $\lim_{t\to\infty} \operatorname{depth} R/I^t$. Đối với iđêan cạnh của một đồ thị, người ta đặt ra giả thuyết là

$$\operatorname{depth} R/I^t \geq \operatorname{depth} R/I^{t+1} \text{ với mọi } t \geq 1.$$

Giả thuyết này đến nay vẫn chưa giải quyết được. Khi đồ thị là liên thông và có chứa ít nhất một chu trình lẻ thì $\lim_{t\to\infty} \operatorname{depth} R/I^t = 0$. Khi Γ là đồ thị hai phần thì $\operatorname{depth} R/I^t \geq 1$ với mọi $t \geq 1$. Trong toàn bộ chương này, trừ Định lý 4.3.3, chúng tôi luôn giả thiết Γ không là đồ thị hai phần. Chúng tôi sẽ nghiên cứu tính giảm của hàm depth từ t sang $t+1$. Cụ thể, chúng tôi sẽ trả lời câu hỏi, dưới điều kiện nào của Γ thì $\operatorname{depth} R/I^t = 1$ kéo theo $\operatorname{depth} R/I^{t+1} = 0$.

4.1 Điều kiện để $\operatorname{depth} R/I^t = 1$

Ta biết rằng $\operatorname{depth} R/I^t$ chính là số tự nhiên i nhỏ nhất sao cho $H^i_{\mathfrak{m}}(R/I^t) \neq 0$. Kết quả sau đây của Terai và Trung cho ta một điều kiện tương đương để $H^1_{\mathfrak{m}}(R/I^t) \neq 0$.

Mệnh đề 4.1.1. [28, Proposition 1.6] *Cho I là iđêan đơn thức trong R. Ta ký hiệu $R_j = k[x_i|\ i \neq j]$ và $I_j = IR[x_j^{-1}] \cap R_j$. Khi đó $H^1_{\mathfrak{m}}(R/I) = 0$ khi và chỉ khi $\Delta_{\mathbf{a}}(I)$ liên thông với mọi véctơ $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ và $\operatorname{depth} R_j/I_j > 0$ với mọi $j = 1, \ldots, n$.*

Đối với lũy thừa của một iđêan cạnh, từ chứng minh của Mệnh đề 4.1.1, ta có nhận xét dưới đây.

Nhận xét 4.1.2. Nếu $H^1_{\mathfrak{m}}(R/I^t)_{\mathbf{a}} \neq 0$ thì ta chỉ cần xét véctơ $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ sao cho $|G_{\mathbf{a}}| \leq 1$ và $a_i < t$ với mọi $i = 1, \ldots, n$. Hơn nữa, khi $\mathbf{a}$ có duy nhất một tọa độ âm, giả sử là a_j, ta có $H^1_{\mathfrak{m}}(R/I^t)_{\mathbf{a}} \neq 0$ khi và chỉ khi $\operatorname{depth} R_j/(I^t)_j = 0$.

Nhớ lại rằng $\operatorname{depth} R/I^t = 0$ khi và chỉ khi $\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass}(I^t)$. Do vậy, kết hợp với Mệnh đề 4.1.1 ta có $\operatorname{depth} R/I^t = 1$ khi và chỉ khi $\mathfrak{m} \notin \operatorname{Ass}(I^t)$ và tồn tại véctơ $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ sao cho $\Delta_{\mathbf{a}}(I^t)$ không liên thông hoặc tồn tại $j \in \{1, \ldots, n\}$ sao cho $\operatorname{depth} R_j/(I^t)_j = 0$. Điều kiện $\mathfrak{m} \notin \operatorname{Ass}(I^t)$ đã được xét ở chương 2. Bây giờ ta cần xét tính liên thông của $\Delta_{\mathbf{a}}(I^t)$ với véctơ $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ và điều kiện $\operatorname{depth} R_j/(I^t)_j = 0$ với $j \in \{1, \ldots, n\}$. Trước hết ta nghiên cứu tính giảm của hàm độ sâu trong trường hợp $\operatorname{depth} R_j/(I^t)_j = 0$ với $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Ta ký hiệu $\mathfrak{n}$ là iđêan cực đại thuần nhất của R_j.

Bổ đề 4.1.3. *Cho đỉnh $j \in V$ và số nguyên dương $t \geq 1$ sao cho $\operatorname{depth} R_j/(I^t)_j = 0$. Khi đó:*

(i) *Nếu $I_j = \mathfrak{n}$ thì* $1 = \operatorname{depth} R/I > \operatorname{depth} R/I^2 = 0$,

(ii) *Nếu $I_j \neq \mathfrak{n}$ thì*

$$1 \geq \operatorname{depth} R/I^t \geq \operatorname{depth} R/I^{t+1} \geq \operatorname{depth} R/I^{t+2} \geq \operatorname{depth} R/I^{t+3} = 0.$$

Chứng minh. Ta có depth $R_j/(I^t)_j = 0$ khi và chỉ khi $\widetilde{(I^t)}_j \neq (I^t)_j$. Mặt khác từ Nhận xét 4.1.2, tồn tại véctơ $\mathbf{a}$ với $G_{\mathbf{a}} = \{j\}$ sao cho $H^1_{\mathfrak{m}}(R/I^t)_{\mathbf{a}} \neq 0$. Do vậy depth $R/I^t \leq 1$. Vì I là iđêan cạnh của đồ thị đơn không có đỉnh cô lập nên depth $R/I \geq 1$. Ta nhận được depth $R/I = 1$.

(i) Ta chỉ còn chứng tỏ depth $R/I^2 = 0$. Vì $I_j = \mathfrak{n}$ nên tập đỉnh của Γ là $N[j]$. Vì Γ không là đồ thị hai phần nên tồn tại ít nhất một cạnh $\{j_1, j_2\}$ với $j_1, j_2 \in N(j)$. Ta nhận được tam giác thống trị của Γ là $\{j, j_1, j_2\}$. Do đó theo Hệ quả 3.2.4, depth $R/I^2 = 0$.

(ii) Đối với $I_j \neq \mathfrak{n}$ trước hết ta chứng tỏ depth $R/I^{t+3} = 0$. Theo Mệnh đề 1.3.4, $\widetilde{(I^t)}_j \neq (I^t)_j$ khi và chỉ khi $\widetilde{J^s} \neq J^s$ trong đó $J = I(\Gamma_{\mathrm{c}(V\setminus\{j\})})$ và $2 \leq s \leq t$. Rõ ràng

$$\mathrm{c}(V \setminus \{j\}) = V \setminus N[j].$$

Ta gọi $\mathfrak{p}$ là iđêan cực đại thuần nhất của vành $T := k[x_i \mid i \in V \setminus N[j]]$. Khi đó $\widetilde{J^s} \neq J^s$ khi và chỉ khi $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(J^s)$ và điều thứ hai xảy ra khi và chỉ khi

$$(J^s : \mathfrak{p}) \setminus J^s \neq \emptyset.$$

Vì $s \geq 2$ nên theo [18, Proposition 1.4] ta có thể chọn được đơn thức $x^{\mathbf{a}} \in (J^s : \mathfrak{p}) \setminus J^s$ thỏa mãn $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}}) = s - 1$ và $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i}) = \nu(\Gamma_{\mathbf{a}})$ với mọi $i \in V_{\mathbf{a}} \subseteq (V \setminus N[j])$. Hơn nữa, với mọi đỉnh $i \in V \setminus N[j]$ ta có $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}+\mathbf{e}_i}) \geq s > \nu(\Gamma_{\mathbf{a}})$. Từ đây, ta suy ra mọi đỉnh của tập $(V \setminus N[j]) \setminus V_{\mathbf{a}}$ kề với ít nhất một đỉnh của tập $V_{\mathbf{a}}$. Như vậy mọi $i \in V \setminus V_{\mathbf{a}}$ hoặc i kề với một đỉnh của $V_{\mathbf{a}}$ hoặc i kề với j. Ta ký hiệu $\mathrm{d}(j, V_{\mathbf{a}})$ là độ dài đường dẫn ngắn nhất từ j tới một đỉnh của $V_{\mathbf{a}}$. Dễ thấy rằng $\mathrm{d}(j, V_{\mathbf{a}})$ chỉ có hai giá trị là 2 hoặc 3. Bây giờ ta xét đồ thị phân cực $\mathrm{p}(\Gamma_{\mathbf{a}})$ của $\Gamma_{\mathbf{a}}$. Theo Bổ đề 2.1.3, ta có $\nu(\mathrm{p}(\Gamma_{\mathbf{a}})) = \nu(\Gamma_{\mathbf{a}}) < s$. Hơn nữa, với mọi $i \in V$ và $r = 1, \ldots, a_i$ ta có các đồ thị $\mathrm{p}(\Gamma_{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i})$ và $\mathrm{p}(\Gamma_{\mathbf{a}}) - i_r$ đẳng cấu, do đó

$$\nu(\mathrm{p}(\Gamma_{\mathbf{a}}) - i_r) = \nu(\mathrm{p}(\Gamma_{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i})) = \nu(\Gamma_{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i}) = \nu(\Gamma_{\mathbf{a}}) = s - 1.$$

Ta nhận được $\nu(\mathrm{p}(\Gamma_{\mathbf{a}}) - i_r) + 1 = s$. Chú ý rằng mọi đỉnh của $\mathrm{p}(\Gamma_{\mathbf{a}})$ đều có trọng 1. Theo định nghĩa $\mathrm{p}(\Gamma_{\mathbf{a}})$ là s-bão hòa mạnh, do đó $\Gamma_{\mathbf{a}}$ cũng là s-bão hòa mạnh. Ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\mathrm{d}(j, V_{\mathbf{a}}) = 2$. Khi đó tồn tại đỉnh $i \in V \setminus V_{\mathbf{a}}$, i kề với j và với một đỉnh $q \in V_{\mathbf{a}}$. Ta đặt $\mathbf{b} := \mathbf{a} + 2\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_q + \mathbf{e}_j$. Theo Bổ đề 2.5.1, $\Gamma_{\mathbf{b}}$ là $(s+2)$-bão hòa mạnh. Hơn nữa, mọi đỉnh của tập $V \setminus V_{\mathbf{b}}$ kề với ít nhất một đỉnh của tập $V_{\mathbf{b}}$. Vì vậy, theo Định lý 2.4.8, $\mathfrak{m} \in \mathrm{Ass}(I^{s+2})$ hay $\operatorname{depth} R/I^{s+2} = 0$.

Trường hợp 2: $\mathrm{d}(j, V_{\mathbf{a}}) = 3$. Khi đó tồn tại hai đỉnh $i_1, i_2 \in V \setminus V_{\mathbf{a}}$ sao cho i_1 kề với hai đỉnh là i_2 và $q \in V_{\mathbf{a}}$; i_2 kề với j. Ta đặt

$$\mathbf{b} := \mathbf{a} + 2\mathbf{e}_{i_1} + 2\mathbf{e}_{i_2} + \mathbf{e}_q + \mathbf{e}_j.$$

Theo Bổ đề 2.5.1, $\Gamma_{\mathbf{b}}$ là $(s+3)$-bão hòa mạnh và mọi đỉnh của tập $V \setminus V_{\mathbf{b}}$ kề với ít nhất một đỉnh của tập $V_{\mathbf{b}}$. Vì vậy, theo Định lý 2.4.8, $\mathfrak{m} \in \mathrm{Ass}(I^{s+3})$ hay $\operatorname{depth} R/I^{s+3} = 0$. Vì $s \le t$, $\operatorname{depth} R/I^{t+3} = 0$.

Bây giờ ta chứng tỏ $\operatorname{depth} R/I^{t+1}, \operatorname{depth} R/I^{t+2} \le 1$. Theo lập luận ở trên, ta có $\operatorname{depth} R_j/(I^t)_j = 0$ khi và chỉ khi $\operatorname{depth} T/J^s = 0$. Vì J là iđêan cạnh của một đồ thị đơn, không có đỉnh cô lập nên $\operatorname{depth} T/J^{s+1} = 0$. Do đó $\operatorname{depth} R_j/(I^{t+1})_j = 0$. Lại sử dụng Nhận xét 4.1.2, ta suy ra $\operatorname{depth} R/I^{t+1} \le 1$. Tương tự ta cũng có $\operatorname{depth} R/I^{t+2} \le 1$. Nếu $\operatorname{depth} R/I^t = 0$ thì

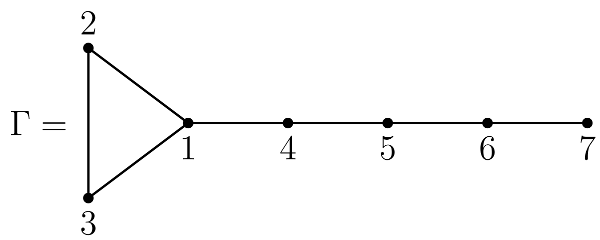
$$\operatorname{depth} R/I^{t+1} = 0 = \operatorname{depth} R/I^{t+2} = 0.$$

Tương tự, nếu $\operatorname{depth} R/I^{t+1} = 0$ thì $\operatorname{depth} R/I^{t+2} = 0$. Vậy

$$1 \ge \operatorname{depth} R/I^t \ge \operatorname{depth} R/I^{t+1} \ge \operatorname{depth} R/I^{t+2} \ge \operatorname{depth} R/I^{t+3} = 0.$$

□

Ví dụ 4.1.4. Đồ thị dưới đây cho ta thấy rằng $q = t + 3$ là giá trị nhỏ nhất mà độ sâu của R/I^q triệt tiêu.



Hình 4.1.

Ta có $\operatorname{depth} R_j/(I^2)_j = 0$ với $j = 6$, $\operatorname{depth} R/I^5 = 0$ và

$$\operatorname{depth} R/I^2 = 1 = \operatorname{depth} R/I^3 = \operatorname{depth} R/I^4.$$

Tiếp theo đây ta xét tính liên thông của $\Delta_{\mathbf{a}}(I^t)$ với mọi véctơ $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ có các tọa độ $a_i < t$, $i = 1, \ldots, n$. Nếu $|V_{\mathbf{a}}| \leq 1$ thì $\Delta_{\mathbf{a}}(I^t) = \Delta(I^t)$. Hơn nữa, dễ thấy rằng $\Delta(I^t) = \Delta(I)$ với mọi $t \geq 1$. Do vậy để cho ngắn gọn, kể từ đây ta ký hiệu Δ là phức dấu của iđêan đang xét.

Bây giờ ta miêu tả $\Delta_{\mathbf{a}}(I^t)$ khi $|V_{\mathbf{a}}| = 2$ và xét tính giảm của hàm độ sâu khi $\Delta_{\mathbf{a}}(I^t)$ không liên thông.

Bổ đề 4.1.5. *Cho véctơ* $\mathbf{a} = a_i\mathbf{e}_i + a_j\mathbf{e}_j$ *trong đó* $0 \leq a_i, a_j \leq t - 1$ *(*$t \geq 2$*) và ký hiệu* $\operatorname{st}_\Delta(i) = \{F \in \Delta \mid i \in F\}$. *Khi đó* $\Delta_{\mathbf{a}}(I^t)$ *là* Δ *hoặc* $\operatorname{st}_\Delta(i) \cup \operatorname{st}_\Delta(j)$.

Chứng minh. Theo Bổ đề 1.2.4, F là mặt cực đại của $\Delta_{\mathbf{a}}(I^t)$ khi và chỉ khi $x^{\mathbf{a}_F} \in \widetilde{I_F^t} \setminus I_F^t$. Ta ký hiệu $\mathfrak{q}$ là iđêan cực đại thuần nhất của vành $T := k[x_i \mid i \in V \setminus F]$. Nếu $I_F \neq \mathfrak{q}$ thì mỗi đơn thức của $\widetilde{I_F^t} \setminus I_F^t$ chứa ít nhất ba biến. Do đó từ điều kiện $x^{\mathbf{a}_F} \in \widetilde{I_F^t} \setminus I_F^t$ và $x^{\mathbf{a}_F}$ chứa tối đa hai biến ta suy ra $I_F = \mathfrak{q}$. Từ đó $F \in \mathcal{F}(\Delta)$. Nếu $0 \leq a_i + a_j \leq t - 1$ thì ta luôn có $x^{\mathbf{a}_F} \in \widetilde{I_F^t} \setminus I_F^t$ với mọi $F \in \mathcal{F}(\Delta)$. Do vậy $\Delta_{\mathbf{a}}(I^t) = \Delta$. Nếu $a_i + a_j \geq t$ thì điều kiện $x^{\mathbf{a}_F} \in \widetilde{I_F^t} \setminus I_F^t$ xảy ra khi và chỉ khi F chứa ít nhất một trong hai đỉnh i, j. Khi đó $\Delta_{\mathbf{a}}(I^t) = \operatorname{st}_\Delta(i) \cup \operatorname{st}_\Delta(j)$. □

Nếu i không kề với j thì luôn tồn tại một mặt cực đại của Δ chứa cả hai đỉnh i, j. Từ đó $\operatorname{st}_\Delta(i) \cup \operatorname{st}_\Delta(j)$ liên thông. Do vậy để $\operatorname{st}_\Delta(i) \cup \operatorname{st}_\Delta(j)$ không liên thông ta phải có i kề với j.

Bổ đề 4.1.6. *Nếu tồn tại cạnh* $\{i, j\} \in \Gamma$ *sao cho* $\operatorname{st}_\Delta(i) \cup \operatorname{st}_\Delta(j)$ *không liên thông thì* $\operatorname{depth} R/I^3 = 0$.

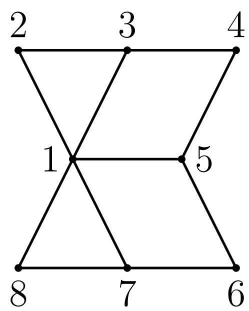
Chứng minh. Gọi u là đỉnh tùy ý của Γ. Dễ thấy rằng $\operatorname{st}_\Delta(u)$ chứa tất cả các đỉnh v của Γ sao cho $\{u, v\}$ là một mặt của Δ. Do đó, với một đỉnh tùy ý $w \notin \operatorname{st}_\Delta(u)$ ta có $\{u, w\} \notin \Delta$ hay $\{u, w\} \in \Gamma$.

Ta ký hiệu $\Delta_{ij} := \mathrm{st}_\Delta(i) \cup \mathrm{st}_\Delta(j)$ và V_i, V_j tương ứng là tập đỉnh của $\mathrm{st}_\Delta(i)$, $\mathrm{st}_\Delta(j)$. Dễ thấy rằng Δ_{ij} không liên thông khi và chỉ khi nó có hai thành phần liên thông là $\mathrm{st}_\Delta(i)$ và $\mathrm{st}_\Delta(j)$. Khi đó $V_i \cap V_j = \emptyset$ và tập đỉnh của Δ_{ij} là $V_i \sqcup V_j$. Hơn nữa, mọi đỉnh của V_i kề với j và mọi đỉnh của V_j kề với i.

<u>Trường hợp 1: $V = V_i \sqcup V_j$.</u> Vì mọi đỉnh của V_i kề với j và mọi đỉnh của V_j kề với i nên $\{i, j\}$ là tập thống trị của Γ. Vì Γ không là đồ thị hai phần nên tồn tại ít nhất một cạnh nối hai đỉnh thuộc cùng một tập V_i hoặc V_j. Không mất tổng quát, ta giả sử $\{u, v\} \in \Gamma$ trong đó $u, v \in V_i$. Vì $\{u, j\}$ và $\{v, j\}$ là hai cạnh của Γ, ta suy ra $\{u, v, j\}$ là một tam giác của Γ. Ta nhận được tập thống trị mới của Γ gồm tam giác đó và cạnh $\{i, j\}$. Theo Hệ quả 3.2.4, ta có $\operatorname{depth} R/I^3 = 0$.

<u>Trường hợp 2: $V \neq V_i \sqcup V_j$.</u> Gọi u là một đỉnh tùy ý của $V \setminus (V_i \sqcup V_j)$. Ta thấy ngay rằng $\{u, i\}$ và $\{u, j\}$ là hai cạnh của Γ. Do đó, tương tự như trường hợp 1, $\{i, j\}$ là tập thống trị của Γ. Ta chọn một đỉnh cố định $q \in V \setminus (V_i \sqcup V_j)$. Khi đó $\{i, j, q\}$ là một tam giác của Γ đồng thời là đồ thị con thống trị của Γ. Theo Hệ quả 3.1.2, ta có $\operatorname{depth} R/I^2 = 0$. Do vậy $\operatorname{depth} R/I^3 = 0$. □

Ví dụ 4.1.7. Đồ thị dưới đây cho ta trường hợp $\mathrm{st}_\Delta(i) \cup \mathrm{st}_\Delta(j)$ không liên thông.



Hình 4.2.

Rõ ràng

$$\operatorname{depth} R/I^2 \neq 0, \operatorname{depth} R/I^3 = 0.$$

$\Delta = \langle \{1,4,6\}, \{2,4,7\}, \{2,5,7\}, \{2,5,8\}, \{2,4,6,8\}, \{3,5,7\}, \{3,5,8\}, \{3,6,8\} \rangle$

$$\mathrm{st}_\Delta(1) = \langle \{1,4,6\} \rangle, \mathrm{st}_\Delta(5) = \langle \{2,5,7\}, \{2,5,8\}, \{3,5,7\}, \{3,5,8\} \rangle$$

Với $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_5$, ta có $\Delta_{\mathbf{a}}(I^2) = \mathrm{st}_\Delta(1) \cup \mathrm{st}_\Delta(5)$ không liên thông, do đó

$$\operatorname{depth} R/I^2 = 1.$$

4.2 Trường hợp $\operatorname{depth} R/I = 1$

Với $t = 1$, Định lý dưới đây cho ta thấy rằng điều kiện đồ thị Γ chứa ít nhất một chu trình lẻ đủ để suy ra $\operatorname{depth} R/I^2 = 0$ nếu $\operatorname{depth} R/I = 1$. Không những thế điều này còn đúng đối với lớp iđêan rộng hơn, đó là iđêan cạnh của một siêu đồ thị. Chúng tôi sẽ sử dụng một số khái niệm trong [28]. Để thuận tiện chúng tôi nêu lại ở đây. Cho $\mathcal{H}$ là một siêu đồ thị. Ký hiệu $\mathcal{H}(i)$ là siêu đồ thị gồm các cạnh $F \setminus \{i\}$ trong đó F là cạnh của $\mathcal{H}$. Tập đỉnh $U \subseteq V$ gọi là 2-bão hòa trong $\mathcal{H}$ nếu U không chứa hai cạnh rời nhau của $\mathcal{H}$ và với mọi $i \in V$ thì $U \setminus \{i\}$ chứa hai cạnh rời nhau của $\mathcal{H}(i)$. Nếu $\mathcal{H}$ là một đồ thị thì ứng với một tập 2-bão hòa ta sẽ có một đồ thị 2-bão hòa và ngược lại.

Định lý 4.2.1. *Cho $\mathcal{H}$ là siêu đồ thị không là đồ thị hai phần, $I := I(\mathcal{H})$ là iđêan cạnh của $\mathcal{H}$. Khi đó nếu* $\operatorname{depth} R/I = 1$ *thì* $\operatorname{depth} R/I^2 = 0$.

Chứng minh. Vì $\operatorname{depth} R/I = 1$ nên $H^1_{\mathfrak{m}}(R/I) \neq 0$. Do vậy tồn tại véctơ $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$ thỏa mãn $H^1_{\mathfrak{m}}(R/I)_{\mathbf{a}} \neq 0$.

Nếu $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ sao cho $H^1_{\mathfrak{m}}(R/I)_{\mathbf{a}} \neq 0$ thì từ Nhận xét 4.1.2 ta có $\mathbf{a} = 0$. Do vậy $H^1_{\mathfrak{m}}(R/I)_0 \neq 0$ nếu và chỉ nếu $\Delta_0(I) = \Delta$ không liên thông. Rõ ràng tập đỉnh của Δ là tập đỉnh của $\mathcal{H}$. Hơn nữa mỗi không mặt tối tiểu của Δ là một cạnh của $\mathcal{H}$ và ngược lại. Do Δ không liên thông nên với mọi cặp đỉnh i, j thuộc hai thành phần liên thông khác nhau ta có $\{i, j\}$ là một không mặt tối tiểu của Δ. Điều này dẫn tới $\mathcal{H}$ luôn có các cạnh hai phần tử nối hai đỉnh của hai thành phần liên thông khác nhau của Δ.

Nếu Δ có ba thành phần liên thông trở lên thì $\mathcal{H}$ chứa một tập 2-bão hòa gồm ba đỉnh của một tam giác trong đó mỗi đỉnh thuộc một thành phần liên thông. Do đó từ [28, Theorem 2.2] ta có $\operatorname{depth} R/I^2 = 0$.

Bây giờ ta xét trường hợp Δ có hai thành phần liên thông và ký hiệu các thành phần đó là Δ_1, Δ_2. Ta gọi hai tập đỉnh của Δ_1, Δ_2 tương ứng là V_1, V_2. Vì $\mathcal{H}$ không là đồ thị hai phần nên ít nhất một tập đỉnh có nhiều hơn một phần tử và ít nhất một thành phần liên thông có hai mặt cực đại trở lên. Giả sử $|V_2| \geq 2$, $|\mathcal{F}(\Delta_2)| \geq 2$ và $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(\Delta_2)$. Ta chọn $i \in V_1, j \in F_1 \setminus F_2$. Vì F_2 là một mặt cực đại của Δ nên $\overline{F_2}$ là một phủ tối tiểu của $\mathcal{H}$. Mặt khác $j \notin F_2$ nên $\overline{F_2 \cup \{j\}}$ không là phủ của $\mathcal{H}$. Do đó tồn tại một cạnh $e \in \mathcal{H}$ sao cho $\overline{F_2 \cup \{j\}} \cap e = \emptyset$. Suy ra, $e \subseteq F_2 \cup \{j\}$. Hơn nữa $|e| \geq 2$ nên $U := \{i\} \cup e$ là một tập 2-bão hòa của $\mathcal{H}$. Áp dụng [28, Theorem 2.2] ta nhận được $\operatorname{depth} R/I^2 = 0$.

Nếu $\mathbf{a} \notin \mathbb{N}^n$ sao cho $H^1_{\mathfrak{m}}(R/I)_{\mathbf{a}} \neq 0$ thì từ Nhận xét 4.1.2 ta chỉ cần xét $G_{\mathbf{a}} = \{i\}$ với $i \in V$. Theo Định lý 1.2.3 ta suy ra $\Delta_{\mathbf{a}}(I) = \{\emptyset\}$. Theo định nghĩa của phức bậc, $\Delta_{\mathbf{a}}(I) = \{\emptyset\}$ khi và chỉ khi:

(i) Với mọi $t \in \mathbb{N} : x^{\mathbf{b}} x_i^t \notin I$ trong đó $\mathbf{b} = \mathbf{a} - a_i \mathbf{e}_i$,

(ii) Với mọi $j \neq i$ tồn tại $t \in \mathbb{N}^*$ sao cho $x^{\mathbf{b}}(x_i x_j)^t \in I$.

Nếu $V_{\mathbf{b}} \neq \emptyset$ thì tồn tại $q \in V_{\mathbf{b}}, q \neq i$. Từ (i) ta có $V_{\mathbf{b}} \cup \{i\} \in \Delta$. Do vậy $x^{\mathbf{b}}(x_i x_q)^t \notin I$ với mọi $t \in \mathbb{N}$. Điều này mâu thuẫn với (ii). Do đó $V_{\mathbf{b}} = \emptyset$ hay $\mathbf{b} = 0$. Khi đó, từ (i) và (ii) ta suy ra với mọi $j \neq i$ thì $\{i, j\}$ là một không mặt tối tiểu của Δ hay là một cạnh của $\mathcal{H}$. Như vậy $V(\mathcal{H}) = N[i]$. Nếu $\mathcal{H}$ không chứa thêm cạnh nào thì $\mathcal{H}$ là đồ thị hai phần, mâu thuẫn với giả thiết. Do đó có ít nhất một cạnh e của $\mathcal{H}$ được chứa trong $N(i)$. Bằng cách lấy $U := \{i\} \cup e$ ta được một tập 2-bão hòa của $\mathcal{H}$. Lại sử dụng [28, Theorem 2.2] ta được $\operatorname{depth} R/I^2 = 0$. □

4.3 Trường hợp $\operatorname{depth} R/I^2 = 1$

Khi $\Delta_{\mathbf{a}}(I^t)$ không liên thông với $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ và $|V_{\mathbf{a}}| \geq 3$, chúng tôi không biết liệu rằng $\operatorname{depth} R/I^{t+3} = 0$ khi $\operatorname{depth} R/I^t = 1$. Chúng tôi trả lời được câu hỏi này với $t = 2$. Cụ thể là sử dụng Bổ đề 4.1.3, Bổ đề 4.1.6, và [28, Lemma 4.6] của Terai, Trung, chúng tôi chứng minh được định lý dưới đây.

Định lý 4.3.1. *Giả sử* $\operatorname{depth} R/I^2 = 1$. *Khi đó:*

$$\operatorname{depth} R/I^2 \geq \operatorname{depth} R/I^3 \geq \operatorname{depth} R/I^4 \geq \operatorname{depth} R/I^5 = 0.$$

Chứng minh. Từ giả thiết $\operatorname{depth} R/I^2 = 1$, theo Mệnh đề 4.1.1, ta có $\operatorname{depth} R_j/(I^2)_j = 0$ với $j \in \{1, \ldots, n\}$ hoặc tồn tại véctơ $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ sao cho $\Delta_{\mathbf{a}}(I^2)$ không liên thông. Với trường hợp đầu tiên theo Bổ đề 4.1.3 (i), ta có $I_j \neq \mathfrak{n}$. Khi đó theo Bổ đề 4.1.3 (ii), ta nhận được

$$\operatorname{depth} R/I^2 \geq \operatorname{depth} R/I^3 \geq \operatorname{depth} R/I^4 \geq \operatorname{depth} R/I^5 = 0.$$

Với trường hợp thứ hai, nếu $|V_{\mathbf{a}}| \leq 1$ thì $\Delta_{\mathbf{a}}(I^t) = \Delta$. Hơn nữa, theo chứng minh của Định lý 4.2.1, $\operatorname{depth} R/I^2 = 0$ nếu Δ không liên thông. Do vậy với trường hợp này, véctơ $\mathbf{a}$ cần thỏa mãn thêm điều kiện $|V_{\mathbf{a}}| \geq 2$. Nếu $|V_{\mathbf{a}}| = 2$ thì theo Bổ đề 4.1.6, ta có $\operatorname{depth} R/I^3 = 0$. Do đó, $\operatorname{depth} R/I^4 = 0 = \operatorname{depth} R/I^5$. Ta có điều cần chứng minh.

Ta chỉ còn xét các véctơ $\mathbf{a}$ sao cho $|V_{\mathbf{a}}| \geq 3$ và $\Delta_{\mathbf{a}}(I^2)$ không liên thông. Theo [28, Lemma 4.6], ta có $\mathbf{a} = \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_k$ và đồ thị cảm sinh $\Gamma_{V_{\mathbf{a}}}$ là một tam giác. Ta ký hiệu tam giác đó là C. Theo [28, Lemma 4.7], ta có $\Delta_{\mathbf{a}}(I^2)$ là phức cảm sinh của Δ trên tập đỉnh $W := \overline{N[C]}$, tức là phức gồm các mặt của Δ được chứa trong W và $\overline{N[C]}$ là phần bù của lân cận đóng $N[C]$ của C. Bây giờ ta xét điều kiện không liên thông của $\Delta_{\mathbf{a}}(I^2)$. Ta khẳng định rằng $\{i, j\}$ là một cạnh của Γ với mọi cặp đỉnh i, j thuộc hai thành phần liên thông khác nhau của $\Delta_{\mathbf{a}}(I^2)$. Thật vậy, vì $\{i, j\}$ là một không mặt của $\Delta_{\mathbf{a}}(I^2)$ nên theo định nghĩa của phức bậc, tồn tại số nguyên dương l sao cho

$$(\prod_{p\in C} x_p)(x_ix_j)^l \in I^2.$$

Do $i, j \notin N[C]$ nên điều đó xảy ra khi và chỉ khi $\{i, j\}$ là một cạnh của Γ. Do đó khẳng định được chứng minh.

Ta gọi m là số thành phần liên thông của $\Delta_{\mathbf{a}}(I^2)$ và xét các trường hợp tùy theo m.

Trường hợp 1: $m \geq 3$. Ta ký hiệu C' là tập gồm ba đỉnh thuộc ba thành phần liên thông khác nhau của $\Delta_{\mathbf{a}}(I^2)$. Từ khẳng định trên ta thấy rằng đồ thị cảm sinh của Γ trên C' là một tam giác. Hơn nữa, từ khẳng định ta cũng có C' là tập thống trị của W. Do đó Γ có tập thống trị là hợp rời nhau của C và C'. Theo Hệ quả 3.2.4, ta có $\operatorname{depth} R/I^3 = 0$. Tương tự như trường hợp $|V_{\mathbf{a}}| = 2$, ta có điều cần chứng minh.

Trường hợp 2: $m = 2$. Giả sử V_1, V_2 là hai tập đỉnh của hai thành phần liên thông của $\Delta_{\mathbf{a}}(I^2)$. Ta có $W = V_1 \sqcup V_2$. Từ khẳng định trên ta có mỗi đỉnh của V_1 kề với mọi đỉnh của V_2 và ngược lại. Vì $W = \overline{N[C]}$ và Γ liên thông nên tồn tại ít nhất một cạnh nối một đỉnh của $N(C) \setminus C$ với một đỉnh của W. Không mất tổng quát, ta giả sử $\{u, v\}$ là cạnh như vậy, trong đó $u \in N(C) \setminus C$ và $v \in V_1$. Vì $u \in N(C) \setminus C$ nên u kề với đỉnh $i \in C$ và $u \notin C$. Giả sử w là một đỉnh tùy ý của V_2, ta có $\{v, w\} \in \Gamma$. Vì $\Gamma_{\mathbf{a}} = C$ là 2-bão hòa mạnh nên theo Bổ đề 2.5.1, hợp của C và các cạnh $\{i, u\}$, $\{u, v\}$, $\{v, w\}$ cho ta đồ thị con là 5-bão hòa mạnh của Γ. Hơn nữa, đó là đồ thị con thống trị của Γ. Do đó theo Định lý 2.4.8, $\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass}(I^5)$. Điều này tương đương với $\operatorname{depth} R/I^5 = 0$.

Ta đặt $\mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j$. Rõ ràng $V_{\mathbf{b}} = C = V_{\mathbf{a}}$. Với lập luận tương tự như trên, ta suy ra $\Gamma_{\mathbf{b}}$ là 3-bão hòa mạnh. Điều này dẫn tới

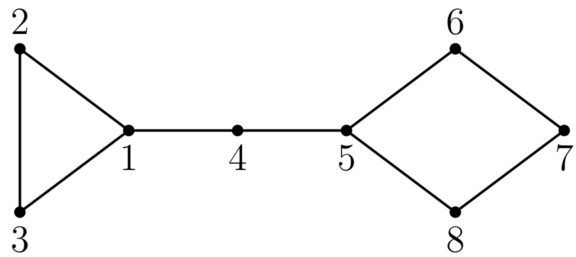
$$x^{\mathbf{b}} := x_i^2x_j^2x_k \in \widetilde{J^3} \setminus J^3,$$

trong đó J là iđêan cạnh của đồ thị cảm sinh $\Gamma_{\overline{N[C]}}$. Với ký hiệu Δ_W là phức cảm sinh của Δ trên tập đỉnh $W(= \overline{N[V_{\mathbf{b}}]})$, ta sẽ chứng tỏ rằng $\Delta_{\mathbf{b}}(I^3) = \Delta_W$. Ta biết rằng mỗi mặt cực đại F của $\Delta_{\mathbf{b}}(I^3)$ là một mặt của Δ nên F chứa nhiều nhất một đỉnh của $V_{\mathbf{b}}$. Hơn nữa theo Bổ đề 1.2.4, ta có $x^{\mathbf{b}_F} \in \widetilde{(I^3)_F} \setminus (I^3)_F$. Nếu F chứa đỉnh $l \in V_{\mathbf{b}}$ thì hai đỉnh còn lại sẽ nằm trong lân cận của F và $\deg x^{\mathbf{b}_F} = \deg(x^{\mathbf{b}} : x_l^{b_l}) \geq 3$. Do đó $x^{\mathbf{b}_F} \in (I^3)_F$, một mâu thuẫn. Nếu F chứa một đỉnh của $N[V_{\mathbf{b}}] \setminus V_{\mathbf{b}}$ thì ta cũng nhận được một mâu thuẫn với $x^{\mathbf{b}_F} \notin (I^3)_F$. Do vậy $F \subseteq W$. Ngược lại, với mỗi mặt cực đại F của Δ_W, ta có $x^{\mathbf{b}_F} = x^{\mathbf{b}}$. Vì $x^{\mathbf{b}} \in \widetilde{J^3} \setminus J^3$ và $N(F) \cap V_{\mathbf{b}} = \emptyset$ nên theo Mệnh đề 1.3.4, $x^{\mathbf{b}_F} \in \widetilde{(I^3)_F} \setminus (I^3)_F$. Do đó F là mặt cực đại của $\Delta_{\mathbf{b}}(I^3)$. Ta nhận được $\mathcal{F}(\Delta_{\mathbf{b}}(I^3)) = \mathcal{F}(\Delta_W)$, từ đó $\Delta_{\mathbf{b}}(I^3) = \Delta_W$. Do Δ_W không liên thông nên $H^1_{\mathfrak{m}}(R/I^3)_{\mathbf{b}} \neq 0$. Vì vậy $\operatorname{depth} R/I^3 \leq 1$. Tương tự với $\mathbf{c} = \mathbf{a} + 2\mathbf{e}_i + 2\mathbf{e}_j$ ta có $H^1_{\mathfrak{m}}(R/I^4)_{\mathbf{c}} \neq 0$ và vì vậy $\operatorname{depth} R/I^4 \leq 1$. Nếu $\operatorname{depth} R/I^3 = 0$ thì $\operatorname{depth} R/I^4 = 0$. Do đó ta có điều cần chứng minh.

□

Ví dụ 4.3.2. Đồ thị dưới đây cho ta thấy giá trị nhỏ nhất trong Định lý 4.3.1 đạt được khi $\Delta_{\mathbf{a}}(I^2)$ không liên thông.

$\Gamma =$



Hình 4.3.

Với mọi đỉnh $j \in \{1, \ldots, 8\}$ ta đều có $\operatorname{depth} R_j/(I^t)_j > 0$. Tuy nhiên với $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, ta có $\Delta_{\mathbf{a}}(I^2) = \langle \{5,7\}, \{6,8\} \rangle$ không liên thông và

$$\operatorname{depth} R/I^2 = 1 = \operatorname{depth} R/I^3 = \operatorname{depth} R/I^4, \operatorname{depth} R/I^5 = 0.$$

Trong phần trên, ta đã xét điều kiện để $\operatorname{depth} R/I^2 = 1$. Thực tế, từ chứng minh của Bổ đề 4.1.6 và chứng minh của Định lý 4.3.1, ta thu được Định lý sau.

Định lý 4.3.3. *Nếu* $\operatorname{depth} R/I^2 = 1$ *và* Γ *không chứa tam giác thì* Γ *là đồ thị hai phần.*

Chứng minh. Như trong chứng minh của Định lý 4.3.1, depth $R/I^2 = 1$ kéo theo hoặc depth $R_j/(I^2)_i = 0$ với $i \in \{1, \ldots, n\}$ hoặc tồn tại véctơ $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ sao cho $|V_{\mathbf{a}}| \geq 2$ và $\Delta_{\mathbf{a}}(I^2)$ không liên thông. Đối với trường hợp đầu tiên, theo Bổ đề 4.1.3, ta có hoặc Γ chứa một tam giác hoặc Γ là đồ thị hai phần. Đối với trường hợp thứ hai vì Γ không chứa tam giác nên từ [28, Lemma 4.6], ta có $|V_{\mathbf{a}}| < 3$. Nhưng khi đó, như trong chứng minh của Bổ đề 4.1.6, hoặc Γ chứa tam giác hoặc Γ là đồ thị hai phần. $\square$

Kết luận

Tóm lại trong luận án này chúng tôi đã thu được những kết quả sau đây:

(1) Đưa ra một số điều kiện cần hoặc đủ (hoàn toàn tổ hợp) để một iđêan nguyên tố sinh bởi tập con của tập các biến là iđêan nguyên tố liên kết của I^t.

(2) Đưa ra phân loại hoàn toàn dạng các iđêan nguyên tố liên kết của I^t với $t = 2, 3, 4$.

(3) Mô tả tường minh tập ổn định $\mathrm{Ass}^{\infty}(I)$ và ước lượng được chỉ số ổn định $\mathrm{astab}(I)$.

(4) Sử dụng các kết quả trên chúng tôi nghiên cứu về tính giảm từ $\operatorname{depth} R/I^t$ sang $\operatorname{depth} R/I^{t+1}$ với $t = 1, 2$.

Các công trình liên quan đến luận án

1. H.T.T. Hien, H.M. Lam and N.V. Trung, *Saturation and associated primes of powers of edge ideals*, J. Algebra **439** (2015), 225–244.
2. H.T.T. Hien, H.M. Lam, *On the associated primes of the fourth power of edge ideals*, Acta Math. Vietnam **40** (2015), no. 3, 511–526.
3. H.T.T. Hien, H.M. Lam and N.V. Trung, *On the decrease of depth function for powers of edge ideals*, preprint.

Các kết quả trong luận án được báo cáo tại

1. Xêmina tại phòng Đại số - Viện Toán học Hà nội, 1/2015, 4/2016.
2. Xêmina tại Viện nghiên cứu cao cấp về Toán, 4/2016.
3. Hội nghị Nghiên cứu sinh của Viện Toán học, 10/2014, 10/2015.
4. Hội nghị Đại số - Hình học - Tôpô, Tuần Châu, 12/2014.

Tài liệu tham khảo

[1] M. Brodmann, *Asymptotic stability of* $\mathrm{Ass}(M/I^nM)$, Proc. Amer. Math. Soc. **74** (1979), 16–18.

[2] M. Brodmann, *The asymptotic nature of the analytic spread*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **86** (1979), 35–39.

[3] M. Brodmann and R.Y. Sharp, Local cohomology: an algebraic introduction with geometric applications, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 60, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[4] W. Bruns and J. Herzog, Cohen-Macaulay rings, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 39, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[5] J. Chen, S. Morey and A. Sung, *The stable set of associated primes of the ideal of a graph*, Rocky Mountain J. Math. **32** (2002), 71–89.

[6] R. Diestel, Graph theory, 2nd. Edition, Springer: Berlin/Heidelberg/New York/Tokyo, 2000.

[7] C. Francisco, H.T. Ha and A. Van Tuyl, *A conjecture on critical graphs and connections to the persistence of associated primes*, Discrete Math **310** (2010), 2176–2182.

[8] C.A. Francisco, H.T. Ha and A. Van Tuyl, *Colorings of hypergraphs, perfect graphs, and associated primes of powers of monomial ideals*, J. Algebra **331** (2011), 224–242.

[9] C.A. Francisco, H.T. Ha and A. Van Tuyl, *Associated primes of monomial ideals and odd holes in graphs*, J. Alg. Comb **32** (2010), 287–301.

[10] H.T. Ha and S. Morey, *Embedded associated primes of powers of squarefree monomial ideals*, J. Pure Appl. Algebra **214** (2010), 301–308.

[11] J. Herzog and T. Hibi, *The depth of powers of an ideal*, J. Algebra **291** (2005), no. 2, 534–550.

[12] J. Herzog and T. Hibi, *Bounding the socles of powers of squarefree monomial ideals*, MSRI Book Series **68** (2015), 223-229.

[13] J. Herzog, T. Hibi and N.V. Trung, *Symbolic power of monomial ideals and vertex cover algebras*, Adv. Math **210** (2007), 304-322.

[14] J. Herzog and A. Qureshi, *Persistence and stability properties of powers of ideals*, J. Pure Appl. Algebra **219** (2015), no. 3, 530-542.

[15] H.T.T. Hien, H.M. Lam, *On the associated primes of the fourth power of edge ideals*, Acta Math. Vietnam **40** (2015), no. 3, 511–526.

[16] H.T.T. Hien, H.M. Lam, N.V. Trung, *Saturation and associated primes of powers of edge ideals*, J. Algebra **439** (2015), 225–244.

[17] H.T.T. Hien, H.M. Lam and N.V. Trung, *On the decrease of depth function for powers of edge ideals*, preprint.

[18] H.M. Lam, N.V. Trung, *Associated primes of powers of edge ideals and ear decompositions of graphs*, preprint, arXiv:1506.01483, 2015.

[19] L. Lovasz, M. D. Plummer, Matching Theory, AMS Chelsea Publishing, 2009.

[20] J. Martinez-Bernal, S. Morey and R. Villarreal, *Associated primes of powers of edge ideals*, Collect. Math. **63** (2012), 361–374.

[21] E. Miller and B. Sturmfels, Combinatorial commutative algebra, Springer, 2005.

[22] N. C. Minh and N. V. Trung, *Cohen-Macaulayness of powers of two-dimensional squarefree monomial ideals*, J. Algebra **322** (2009), 4219-4227.

[23] S. Morey, *Depth of powers of the edge ideal of a tree*, Comm. Algebra **38** (2010) 4042–4055.

[24] G. Rinaldo, N. Terai, and K. Yoshida, *Cohen–Macaulayness for symbolic power ideals of edge ideals*, J. Algebra **347** (2011), 405–430.

[25] A. Simis, W. Vasconcelos and R. Villarreal, *On the ideal theory of graphs*, J. Algebra **167** (1994), no. 2, 389–416.

[26] R. Stanley, Combinatorics and Commutative Algebra, 2. Edition, Birkhäuser, 1996.

[27] Y. Takayama, *Combinatorial characterizations of generalized Cohen-Macaulay monomial ideals*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie (N.S.) **48** (2005), 327–344.

[28] N. Terai and N.V. Trung, *On the associated primes and the depth of the second power of squarefree monomial ideals*, J. Pure Appl. Algebra **218** (2014), 1117–1129.

[29] T.N. Trung, *Stability of depth of power of edge ideals*, J. Algebra **452** (2016), 157–187.