VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

VIỆN TOÁN HỌC

NGÔ THỊ NGOAN

NGUYÊN LÝ HASSE CHO NHÓM ĐẠI SỐ TRÊN TRƯỜNG TOÀN CỤC

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HÀ NỘI 2017

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

VIỆN TOÁN HỌC

NGÔ THỊ NGOAN

NGUYÊN LÝ HASSE CHO NHÓM ĐẠI SỐ TRÊN TRƯỜNG TOÀN CỤC

Chuyên ngành: Đại số và Lý thuyết số

Mã số: 62.46.01.04

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

TẬP THỂ HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

GS. TS. Nguyễn Quốc Thắng

HÀ NỘI 2017

TÓM TẮT

Luận án nghiên cứu số học của nhóm đại số trong mối liên quan đến các tính chất địa phương-toàn cục được xét trong những lớp các đa tạp đặc biệt như nhóm đại số trong mối quan hệ với các nhóm con của chúng hoặc các không gian thuần nhất liên quan. Luận án bao gồm bốn chương.

Trong chương 1, chúng tôi trình bày lại một số kiến thức cơ sở về dạng toàn phương, dạng hecmit và nguyên lý địa phương-toàn cục cho các dạng này. Đồng thời, chúng tôi cũng nêu lại một số khái niệm và một số kết quả đã biết về nhóm đại số trên trường không đóng đại số và sự phân loại nhóm đơn.

Trong chương 2, chúng tôi trình bày những nghiên cứu về nguyên lý địa phương-toàn cục liên quan đến tính chất phân rã của nhóm đại số tuyến tính liên thông trên trường toàn cục. Kết quả chính của chương này là tính đúng đắn của nguyên lý địa phương-toàn cục cho tính chất phân rã của nhóm đại số tuyến tính liên thông trên trường toàn cục.

Trong chương 3, chúng tôi nghiên cứu nguyên lý địa phương-toàn cục cho không gian thuần nhất trên trường toàn cục. Kết quả chính của chương này là nguyên lý Hasse cho không gian thuần nhất xạ ảnh của nhóm reductive liên thông trên trường hàm toàn cục. Như là một áp dụng, ta sẽ nhận được nguyên lý địa phương-toàn cục cho tính chất tựa phân rã của nhóm reductive liên thông trên các trường này.

Trong chương 4, chúng tôi trình bày những nghiên cứu về sự mở rộng một số nguyên lý Hasse kinh điển cho trường hợp mở rộng đại số vô hạn của trường toàn cục. Kết quả chính của chương này là thiết lập nguyên lý Hasse cho các dạng hecmit (phản hecmit) trên các mở rộng đại số vô hạn của trường toàn cục.

ABSTRACT

In this thesis, we study arithmetic properties of algebraic groups in their relation with certain local-global principles originated from some splitting problems for connected linear algebraic groups over global fields. The thesis consists of four chapters.

Chapter 1 presents some background of quardratic forms, hermit forms and some classical local-global principles for such forms. Further, some background of algebraic groups defined over non-algebraicaly closed fields and some related known results are given.

In Chapter 2, we present some local-global principles related with some splitting problems for connected linear algebraic groups over global fields. The main result in this chapter is the validity of some local-global principles related with some splitting problems for connected linear algebraic groups over global fields.

In Chapter 3, we consider local-global principles for homogeneous spaces of connected linear algebraic groups over global fields. The main result in this chapter is the local-global principles for homogeneous spaces of connected redutive groups over global function fields. As an application, we deduce a local-global principle for the property of a reductive group being quasi-split over such fields.

In Chapter 4, we extend some known classical local-global principles for (skew-) hermitian forms to the case of infinite algebraic extensions of global fields. The main result of this chapter is the validity of the Hasse principle for (skew-)hermitian forms defined over such fields.

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi, được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của GS. TS. Nguyễn Quốc Thắng. Các kết quả viết chung với tác giả khác đã được sự nhất trí của đồng tác giả khi đưa vào luận án. Các kết quả nêu trong luận án là những kết quả mới và chưa từng được ai công bố trong các công trình nào khác.

Tác giả

Ngô Thị Ngoan

LỜI CẢM ƠN

Mỗi khi nhìn về chặng đường học tập, nghiên cứu đã qua, trong tôi lại dâng trào thật nhiều tình cảm và cảm xúc khó tả. Trong suốt chặng đường gian nan nhiều thử thách ấy, có người thầy luôn dõi theo tôi, động viên, giám sát, giúp đỡ tôi và không cho phép tôi nản chí; người thầy vô cùng kính yêu của chúng tôi, người đã hướng dẫn tôi thực hiện Luận án này: GS. TS Nguyễn Quốc Thắng.

Thật không lời nào có thể kể hết công lao của thầy tôi đối với tôi. Tôi chỉ có thể nói rằng, sự khó khăn trong công việc nghiên cứu của tôi, được đồng hành với sự vất vả, sự nghiêm khắc và kiên trì của thầy. Thầy đã luôn dành nhiều thời gian và công sức để hướng dẫn tôi. Thầy có thể giảng giải, chỉ dẫn cho tôi cả buổi, cả ngày, nhiều ngày: tận tâm và không mệt mỏi! Sự tận tâm ấy, cộng với niềm tin của thầy dành cho tôi đã trở thành động lực mạnh mẽ, giúp tôi vượt qua mọi khó khăn để có thể trưởng thành. Thời gian trôi qua nhanh, tôi nhận ra mái tóc thầy hôm nay đã thêm nhiều sợi bạc, có lẽ cũng vì tôi...

Luận án đã được hoàn thành dưới sự dày công hướng dẫn của GS. TS Nguyễn Quốc Thắng. Từ sâu thẳm trong trái tim, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc nhất đến thầy! Và tôi sẽ cố gắng phấn đấu thật nhiều để xứng đáng với niềm tin của thầy!

Tôi xin trân trọng cảm ơn Viện Toán học - Viện Hàn lâm Khoa học Việt Nam, các phòng chức năng, Trung tâm Đào tạo sau đại học đã tạo điều kiện tốt nhất giúp tôi học tập, nghiên cứu và tham gia một cách hiệu quả các buổi sinh hoạt khoa học của Viện. Tôi xin chân thành cảm ơn GS. TSKH Nguyễn Đông Yên, TS. Nguyễn Chu Gia Vượng, ThS. Trần Thị Phương Thảo luôn quan tâm sát sao đến các nghiên cứu sinh, học viên của Viện Toán học. Nơi đây, tôi đã nhận thấy được những giá trị cao đẹp của sự say mê nghiên cứu và tinh thần tận tụy hết mình cho công việc.

Bằng sự kính trọng vô bờ bến, tôi xin chân thành cảm ơn các giáo sư, các anh chị thuộc phòng Đại số, phòng Lý thuyết Số của Viện Toán học đã luôn coi trọng việc rèn giũa chúng tôi mọi nơi, mọi lúc. Đặc biệt là GS. TSKH. Phùng Hồ Hải, TS. Nguyễn Chu Gia Vượng, TS. Đoàn Trung Cường đã tổ chức nhiều khóa học thực sự bổ ích cho chúng tôi, TS. Nguyễn Duy Tân, TS. Đào Phương Bắc luôn kiên nhẫn lắng nghe và giải thích cho tôi những điều vướng mắc, PGS. TSKH. Tạ Thị Hoài An luôn có cách giúp tôi bình tâm trở lại trước những khó khăn,...

Tôi xin chân thành cảm ơn GS. TSKH. Phùng Hồ Hải, GS. TSKH. Hà Huy Khoái đã đọc và góp ý tận tình cho bản Luận án. Tôi xin chân thành cảm ơn GS. TSKH. Ngô Việt Trung, GS. TSKH. Nguyễn Tự Cường, GS. TSKH. Lê Tuấn Hoa về sự nghiêm khắc trong khoa học và bao dung trong đời thường. Chính sự nghiêm khắc và bao dung ấy đã tạo thành động lực mạnh mẽ cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu của bản thân.

Tôi xin chân thành cảm ơn Khoa Toán trường Đại học Sư phạm - ĐHTN; Khoa Toán-Cơ-Tin trường Đại học Khoa học Tự nhiên - ĐHQGHN đã trang bị cho tôi những kiến thức cơ bản về Toán học.

Tôi xin trân trọng cảm ơn Ban giám hiệu trường Đại học Khoa học đã luôn khuyến khích đội ngũ giảng viên phấn đấu học tập nghiên cứu; xin trân trọng cảm ơn Ban chủ nhiệm Khoa Toán-Tin đã tạo mọi điều kiện thuận lợi về cả vật chất và tinh thần cho tôi trong quá trình công tác, học tập và nghiên cứu.

Tôi xin cảm ơn Quỹ phát triển Khoa học và Công nghệ Quốc gia đã tài trợ kinh phí cho tôi trong suốt quá trình tôi thực hiện luận án.

Tôi xin cảm ơn các anh chị em đã và đang học tập và nghiên cứu tại Viện toán học, các anh chị em bạn bè đồng nghiệp về những trao đổi, hỗ trợ và chia sẻ trong khoa học cũng như trong cuộc sống.

Cuối cùng, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới bố mẹ, các anh chị em, các cháu trong hai bên gia đình nội ngoại. Đặc biệt xin cảm ơn chồng và con trai yêu quý, những người đã vì tôi mà phải chịu nhiều thiệt thòi vất vả; đã luôn cảm thông và sẻ chia gánh nặng cùng tôi suốt những năm tháng qua để tôi có thể hoàn thành luận án này.

Tác giả

Ngô Thị Ngoan

Mục lục

Trang

Tóm tắt i

Abstract ii

Lời cam đoan iii

Lời cảm ơn v

Mục lục vi

Mở đầu 1

Chương 1 Một số kiến thức chuẩn bị 5

1.1 Dạng toàn phương trên trường có đặc số khác 2 5

1.2 Dạng toàn phương trên trường địa phương và toàn cục 7

1.3 Dạng hecmit trên một thể trên một trường 8

1.4 Dạng hecmit (phản hecmit) trên một thể trên trường địa phương và trường toàn cục 12

1.5 Nhóm đại số trên trường không đóng đại số 14

1.6 Phân loại nhóm đơn 22

1.7 Đối đồng điều Galoa và đối đồng điều phẳng 25

Chương 2 Một số tính chất phân rã và nguyên lý địa phương-toàn cục 30

2.1 Nguyên lý địa phương-toàn cục cho tính chất phân rã của nhóm giải được . . . 30

2.2 Nguyên lý địa phương-toàn cục cho tính chất phân rã của nhóm reductive 32

2.3 Nguyên lý địa phương-toàn cục cho tính chất phân rã của nhóm đại số tuyến tính liên thông . . . 39

2.4 Nguyên lý địa phương-toàn cục cho tính chất tựa phân rã của nhóm đại số tuyến tính liên thông . . . 40

Chương 3 Nguyên lý Hasse cho không gian thuần nhất trên trường toàn cục 44

3.1 Nguyên lý Hasse cho không gian thuần nhất xạ ảnh. Chứng minh thứ nhất . . . 44

3.2 Chứng minh thứ hai của Định lý 3.1.5 . . . 47

3.3 Một số áp dụng của Định lý 3.1.5 . . . 51

3.4 Nguyên lý Hasse cho các không gian thuần nhất chính . . . 59

Chương 4 Nguyên lý Hasse trên trường toàn cục vô hạn cho các dạng 66

4.1 Dạng toàn phương trên trường địa phương hóa và toàn cục vô hạn . . . 66

4.2 Định lý Hasse về chuẩn và Định lý Hasse-Brauer-Noether . . . 70

4.3 Lý thuyết địa phương của các dạng hecmit và phản hecmit . . . 74

4.4 Nguyên lý Hasse và phân loại toàn cục . . . 80

4.5 Nguyên lý Hasse yếu . . . 82

Kết luận của luận án 86

Danh mục các công trình đã công bố liên quan đến luận án 87

Tài liệu tham khảo 88

Một số ký hiệu và quy ước viết tắt

$\mathbb{C}$	trường các số phức
$\mathbb{R}$	trường các số thực
$\mathbb{Q}$	trường các số hữu tỉ
$f \sim f'$	hai dạng toàn phương (hoặc hecmit) tương đương
$\mathbb{F}_q$	trường có q phần tử
$\mathbb{Q}_p$	trường p-adic
$\mathbb{F}_q(t)$	trường hàm hữu tỉ trên $\mathbb{F}_q$
$d(q)$	định thức của dạng toàn phương (hoặc hecmit) q
$(a, b/k)$	đại số quaternion trên trường k
$\mathrm{M}(m, R)$	đại số ma trận trên một vành R
$\mathrm{Nrd}_{A/k}(a)$	chuẩn thu gọn của phần tử a đối với đại số đơn tâm A/k
$\mathrm{Trd}_{A/k}(a)$	vết thu gọn của phần tử a đối với đại số đơn tâm A/k
$\mathrm{disc}(h)$	biệt thức của h
$\mathrm{Br}(k)$	nhóm Brauer của trường k
$\mathrm{R}_u(G)$	căn lũy đơn của nhóm G
$\mathrm{R}(G)$	căn giải được (căn) của nhóm G
Ad	biểu diễn phụ hợp
$\mathbf{G}_a$	nhóm cộng
$\mathbf{G}_m$	nhóm nhân
$\mathbf{T}_n$	nhóm các ma trận tam giác trên khả nghịch
$\mathbf{U}_n$	nhóm các ma trận tam giác trên lũy đơn
$\mathbf{D}_n$	nhóm các ma trận đường chéo khả nghịch
$\mathbf{GL}_n$	nhóm tuyến tính tổng quát
$\mathbf{SL}_n$	nhóm tuyến tính đặc biệt
X(G)	nhóm đặc trưng của G
Z(G)	tâm của nhóm G

Mở đầu

Một trong những kết quả quan trọng của Lý thuyết Số là Định lý Hasse-Minkowski, được phát biểu như sau: "*Cho V là tập tất cả các chốn trên trường số hữu tỉ $\mathbb{Q}$, f là một dạng toàn phương n biến trên $\mathbb{Q}$. Với mỗi $v \in V$, $\mathbb{Q}_v$ ký hiệu cho trường đầy đủ của $\mathbb{Q}$ tại v. Khi đó, f biểu diễn 0 không tầm thường trên $\mathbb{Q}$ khi và chỉ khi f biểu diễn 0 không tầm thường địa phương khắp nơi (trên mọi bao đầy đủ $\mathbb{Q}_v$)*". Định lý này sau có các tên gọi khác là nguyên lý Hasse mạnh hay nguyên lý địa phương-toàn cục mạnh cho dạng toàn phương. Như một hệ quả, người ta chứng minh được rằng, *nếu f, g là hai dạng toàn phương trên $\mathbb{Q}$, tương đương khắp nơi trên mọi bao đầy đủ $\mathbb{Q}_v$ thì chúng cũng tương đương trên $\mathbb{Q}$*. Định lý này còn được gọi là nguyên lý Hasse yếu cho các dạng toàn phương. Nguyên lý Hasse (mạnh, yếu) đã đóng vai trò thực sự quan trọng trong Lý thuyết số, đặc biệt là trong lý thuyết số học của các dạng (toàn phương, dạng hecmit và phản hecmit) (xem các tài liệu kinh điển [28, 33, 18, 36]). Chuyển sang ngôn ngữ hình học, Định lý Hasse-Minkovski nói rằng một siêu mặt xạ ảnh xác định bởi một dạng toàn phương hạng ≥ 2 có điểm hữu tỉ trên $\mathbb{Q}$ khi và chỉ khi nó có điểm hữu tỉ trên tất cả các bao đầy đủ của $\mathbb{Q}$. Nói cách khác, nguyên lý Hasse (nguyên lý địa phương-toàn cục) là đúng cho các siêu mặt xạ ảnh bậc hai trên $\mathbb{Q}$.

Một cách tổng quát, với một đa tạp đại số X xác định trên một trường toàn cục k, ta nói rằng nguyên lý Hasse đúng cho X nếu như ta có khẳng định: *$X(k) \neq \emptyset$ khi và chỉ khi $X(k_v) \neq \emptyset$ với mọi chốn v của k*. Tổng quát hơn, cho đối tượng X xác định trên k và P là một tính chất của X. Ta nói rằng nguyên lý địa phương-toàn cục là đúng trên X đối với tính chất P nếu như *X có tính chất P trên k khi và chỉ khi X có tính chất P trên k_v với mọi chốn v của k*.

Khẳng định tương tự được thiết lập cho nhóm Brauer trong lý thuyết các đại số đơn tâm đã được chứng minh bởi Brauer-Hasse-Noether (xem [33, 22]) và trở thành kết quả quan trọng của Lý thuyết số hiện đại.

Một trong những lý do của tính hiệu quả của nguyên lý địa phương toàn cục là trên các trường địa phương, ta có thể sử dụng nhiều công cụ khác nhau (đại số, hình học, tô pô, giải tích) để nghiên cứu các đối tượng. Đồng thời, trong nhiều trường hợp việc tìm lời giải cho bài toán trên trường địa phương thuận lợi hơn nhiều so với việc tìm lời giải của chúng trên trường toàn cục. Vì thế việc nghiên cứu tính đúng đắn của nguyên lý địa phương-toàn cục trong số học của các đa tạp đại số nói chung và nhóm đại số nói riêng là rất quan trọng.

Việc nghiên cứu các mở rộng đại số vô hạn của trường địa phương hay toàn cục đóng vai trò quan trọng. Chẳng hạn như việc nghiên cứu mở rộng không rẽ nhánh cực đại của một trường địa phương đã cho, hay mở rộng abel cực đại của một trường toàn cục đã cho. Đó là các mở rộng đại số vô hạn của các trường tương ứng. Nói chung, số học của các mở rộng đại số vô hạn của các trường địa phương và toàn cục có những bí hiểm (theo cách nói của Tsfasman và Vladuts) và được quan tâm nghiên cứu. Một trong những nguyên lý địa phương-toàn cục nổi tiếng và là một trong những kết quả quan trọng trong Lý thuyết Số là Định lý Hasse-Minkowski. Việc nghiên cứu kết quả tương tự của Định lý Hasse-Minkowski cho dạng toàn phương trên các mở rộng đại số vô hạn của trường toàn cục đã được đề cập đến lần đầu trong công trình của K. Koziol và M. Kula ([17]).

Luận án đặt ra mục tiêu khảo sát một số nguyên lý địa phương-toàn cục liên quan đến tính chất phân rã của nhóm đại số trên trường toàn cục và liên quan đến không gian thuần nhất xạ ảnh của chúng. Đồng thời, luận án cũng đặt ra mục tiêu khảo sát nguyên lý địa phương-toàn cục cho các dạng (toàn phương, hecmit, phản hecmit) xác định trên các trường toàn cục vô hạn.

Một trong những tính chất quan trọng của nhóm đại số G là tính chất phân rã (hoặc tựa phân rã) của G. Từ lâu, tính chất phân rã đã được định nghĩa cho nhóm đại số tuyến tính giải được. Sau đó, tính chất phân rã và tựa phân rã được định nghĩa cho nhóm liên thông reductive. Trong luận án này, chúng tôi đưa ra khái niệm về tính chất phân rã và tựa phân rã cho nhóm đại số tuyến tính liên thông, chúng kế thừa và kết hợp được các khái niệm về tính chất (tựa-)phân rã của hai lớp nhóm trên.

Tính chất phân rã và tựa phân rã của nhóm đại số thể hiện tính đơn giản nhất có thể về mặt cấu trúc của chúng. Do đó, một vấn đề được đặt ra là khảo sát các tính chất này thông qua cách tiếp cận địa phương-toàn cục. Việc nghiên cứu tính chất (tựa-)phân rã của các nhóm cũng có liên quan mật thiết với việc nghiên cứu tính chất số học và nguyên lý Hasse của một số đối tượng hình học (cụ thể ở đây là các không gian thuần nhất của nhóm đại số).

Trong lý thuyết nhóm đại số, các nhóm kinh điển (nhóm tự đẳng cấu của các dạng toàn phương, hecmit, phản hecmit) đóng vai trò rất quan trọng. Để nghiên cứu số học của các nhóm đó, thì việc nghiên cứu số học của các dạng tương ứng là một điều bắt buộc. Về vấn đề này, chúng ta cũng đã biết những kết quả rất nổi tiếng như Định lý Landherr, Định lý Kneser (xem [33]), chúng là những nguyên lý địa phương-toàn cục cho các dạng hecmit hoặc phản hecmit. Do vậy, tiếp nối việc nghiên cứu về các nguyên lý địa phương-toàn cục cho các nhóm đại số, chúng tôi nghiên cứu các nguyên lý địa phương-toàn cục cho các dạng xác định trên các trường toàn cục vô hạn.

Luận án được chia làm 4 chương. Trong Chương 1, chúng tôi nhắc lại một số kiến thức cơ bản đã biết sẽ được sử dụng trong luận án như: Dạng toàn phương, dạng hecmit trên trường địa phương và trường toàn cục, các kết quả kinh điển về các nguyên lý địa phương-toàn cục, kiến thức cơ sở về nhóm đại số trên một trường và sự phân loại nhóm đơn. Các kết quả mới của chúng tôi được trình bày trong các chương 2, chương 3 và chương 4.

Nội dung của chương 2 dựa trên bài báo [23], chúng tôi chứng minh nguyên lý địa phương-toàn cục cho tính chất phân rã của nhóm đại số cho các trường hợp riêng: xuyến đại số, nhóm giải được, nhóm reductive. Và sau đó chúng tôi chứng minh kết quả tổng quát là nguyên lý địa phương-toàn cục cho tính chất phân rã, tính chất tựa phân rã của nhóm đại số tuyến tính liên thông xác định trên một trường toàn cục k. Cụ thể, chúng tôi đã chứng minh được:

Định lý 2.3.1 *Cho k là trường hàm toàn cục, G là một nhóm đại số tuyến tính liên thông xác định trên k. Khi đó G phân rã trên k nếu và chỉ nếu G phân rã trên k_v, với mọi $v \in V$.*

Định lý 2.4.1 *Cho k là trường toàn cục, G là nhóm đại số tuyến tính liên thông xác định trên k. Nếu G là tựa phân rã trên k_v với mọi v thì G là tựa phân rã trên k.*

Chương 3 nghiên cứu về nguyên lý Hasse mạnh cho không gian thuần nhất của nhóm reductive liên thông trên trường toàn cục và một số ứng dụng; nguyên lý Hasse cho tính chất nâng lớp đối đồng điều. Nội dung của chương này dựa trên các bài báo [23, 25]. Một trong các kết quả chính của chương là định lý sau đây.

Định lý 3.1.4 *Cho X là một không gian thuần nhất xạ ảnh của một nhóm nửa đơn G, X và G cùng xác định trên một trường hàm toàn cục k. Khi đó nguyên lý Hasse là đúng cho X.*

Chương 4 của luận án dựa trên bài báo [24]. Trong chương này chúng tôi mở rộng việc nghiên cứu nguyên lý Hasse kinh điển cho trường hợp các mở rộng đại số tùy ý của các trường toàn cục và thiết lập nguyên lý địa phương-toàn cục cho các dạng hecmit kiểu A, kiểu C, các dạng phản hecmit kiểu D trên các trường đó. Định lý sau là kết quả cho các dạng kiểu A.

Định lý 4.4.1 (Nguyên lý Hasse mạnh) *Cho* k *là một trường toàn cục vô hạn,* V_k *là tập tất cả các chốn của* k*. Gọi* h *là dạng hecmit không suy biến ứng với phép đối hợp* J *loại hai trên một đại số chia được* D *tâm* $K = k(\sqrt{a})$*,* $k = K^J$*. Khi đó,* h *biểu diễn 0 trên* k *nếu và chỉ nếu nó biểu diễn 0 địa phương khắp nơi.*

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, chúng tôi nhắc lại những khái niệm và một số kết quả đã biết về dạng toàn phương trên trường k, Định lý Hasse-Minkowski, dạng hecmit (phản hecmit) liên kết với một phép đối hợp trên một thể trên trường k bất kì có đặc số khác 2 và nguyên lý địa phương-toàn cục cho các dạng hecmit (phản hecmit); nhóm đại số trên trường không đóng đại số và sự phân loại nhóm đơn. Những kiến thức của chương này chủ yếu được tham khảo trong các tài liệu [28, 33, 18, 36, 3, 4, 16].

1.1 Dạng toàn phương trên trường có đặc số khác 2

Cho k là một trường có đặc số khác 2, ký hiệu $k^* = k - \{0\}$, V là k-không gian vectơ hữu hạn chiều với phép nhân vô hướng ở bên phải. Các định nghĩa, các khái niệm và kết quả nhắc đến trong mục này được tham khảo từ tài liệu [36, Ch. IV].

Định nghĩa 1.1.1 Một *dạng toàn phương* trên không gian vectơ V là một ánh xạ $q : V \to k$ thỏa mãn các điều kiện sau:
(1) $q(x\alpha) = q(x)\alpha^2, \forall x \in V, \forall \alpha \in k$;
(2) Ánh xạ $(x, y) \longmapsto q(x+y) - q(x) - q(y)$ là một dạng song tuyến tính (đối xứng).

Cặp (V, q) được gọi là một *không gian toàn phương*. Ta đặt

$$x \cdot y = \frac{1}{2}(q(x + y) - q(x) - q(y)),$$

sẽ được ánh xạ $V \times V \to k,\ (x, y) \mapsto x \cdot y$ là một dạng song tuyến tính đối xứng (hay tích vô hướng) trên V, được gọi là *dạng song tuyến tính liên kết với* q. Với mọi $x \in V$ ta có $q(x) = x \cdot x$, và ta có một tương ứng 1-1 giữa các dạng toàn phương và các dạng song tuyến tính đối xứng.

Cho (V, q) và (V', q') là hai không gian toàn phương trên trường k, một ánh xạ tuyến tính $f : V \to V'$ thỏa mãn $q' \circ f = q$ được gọi là một *ánh xạ đẳng cự* từ

(V,q) vào (V',q'). Khi đó ta có $f(x)\cdot f(y) = x\cdot y$ với mọi $x,y\in V$. Nếu f là đẳng cấu đẳng cự thì ta gọi (V,q) và (V',q') là hai không gian *đẳng cự* và ký hiệu là $(V,q)\cong(V',q')$.

Cố định một cơ sở $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ của V. Ta gọi ma trận đối xứng $A=(a_{ij})$ với $a_{ij}=e_i\cdot e_j, (1\leq i,j\leq n)$ là *ma trận* của q ứng với cơ sở trên. Nếu ta xét một cơ sở khác $(e'_j)_{1\leq j\leq n}$ của V và giả sử $e'_j=\sum_i e_it_{ij}$ $(j=1,\ldots,n)$ thì ma trận của q đối với cơ sở mới là $A'=T^tAT$. Đặc biệt, ta có

$$\det(A')=\det(A)\det(T)^2.$$

Như vậy $\det(A)$ được xác định sai khác một nhân tử thuộc k^{*2}, nó được gọi là *định thức* của q và ký hiệu là $\det(q)$.

Ta đã biết rằng mỗi không gian toàn phương (V,q) đều có một cơ sở trực giao. Đối với cơ sở này, ma trận của q là một ma trận đường chéo, khi đó ta có biểu diễn $q(x)=a_1x_1^2+\cdots+a_nx_n^2$. Trong trường hợp này, ta còn ký hiệu $(V,q)\cong\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$.

Định nghĩa 1.1.2 (i) Một vectơ $x\neq 0$ của không gian toàn phương (V,q) được gọi là *đẳng hướng* nếu $q(x)=0$.

(ii) Nếu không gian (V,q) chứa một véctơ đẳng hướng thì (V,q) được gọi là *đẳng hướng*. Dạng toàn phương q khi đó cũng gọi là *đẳng hướng* hay *biểu diễn không*.

Định nghĩa 1.1.3 Một không gian toàn phương hai chiều có một cơ sở gồm 2 vectơ đẳng hướng x,y mà $x\cdot y\neq 0$ được gọi là một *mặt phẳng hyperbolic*. Nếu không gian (V,q) chứa một mặt phẳng hyperbolic ta gọi dạng toàn phương q là *hyperbolic.*

Trong mặt phẳng hyperbolic ta có thể chọn một cơ sở gồm hai véctơ đẳng hướng x,y sao cho $x\cdot y=1$. Khi đó ma trận của dạng toàn phương ứng với cơ sở này là

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

có định thức là -1 và không suy biến.

Nếu một không gian toàn phương không suy biến (V,q) có chứa một véc tơ đẳng hướng $x\neq 0$ thì tồn tại mặt phẳng hyperbolic U trong V chứa x. Ngoài ra, nếu (V,q) là không suy biến và chứa một vectơ đẳng hướng khác không, thì $q(V)=k$ ([36, Ch. 4, Prop. 3]).

Ta thường xét trường hợp $V=k^n$ và không gian toàn phương (k^n,f) trong đó $f(X)=\sum_{i=1}^n a_{ii}X_{ii}^2+2\sum_{i<j}^n a_{ij}X_iX_j$ gọi là dạng toàn phương n biến trên k. Hai dạng toàn phương f và f' được gọi là *tương đương* nếu các không gian toàn

phương liên kết tương ứng của chúng là đẳng cự. Tập tất cả các phép đẳng cự trên không gian toàn phương (V, f) lập thành một nhóm được gọi là *nhóm trực giao* của (V, f), ta ký hiệu là $O(V, f)$ hay $O(f)$. Nếu f có ma trận A thì ta biết rằng $O(f) \cong \{B |\det(B) \neq 0, B^t AB = A\}$.

Định nghĩa 1.1.4 Ta nói rằng dạng toàn phương $f(X_1, \dots, X_n)$ *biểu diễn một phần tử* $a \in k$ nếu tồn tại một phần tử $x \in k^n, x \neq 0$, sao cho $f(x) = a$.

Ta nhắc lại Định lí về luật giản ước của Witt và chỉ số Witt:

Định lý 1.1.5 ([36, Ch. IV, Th. 4]) *Cho $f = g + h$ và $f = g' + h'$ là hai dạng toàn phương không suy biến. Nếu $f \sim f'$ và $g \sim g'$ thì $h \sim h'$.*

Một hệ quả của định lý trên là, nếu dạng toàn phương f không suy biến thì $f \sim g_1 + \cdots + g_m + h$ trong đó $g_1, \dots, g_m$ là hyperbolic và h không biểu diễn 0. Trong trường hợp đó, ta gọi m là *chỉ số Witt* của f.

1.2 Dạng toàn phương trên trường địa phương và toàn cục

Dạng toàn phương trên trường địa phương. Trong mục này, để cho đơn giản, cho p là số nguyên tố và k là trường p-adic $\mathbb{Q}_p$, mặc dù các kết quả chính vẫn còn đúng cho trường địa phương phi Acsimet. Các không gian toàn phương trên k được giả thiết là không suy biến. Ta nhắc lại hai bất biến sau:

Cho $a, b \in k^*$, ký hiệu Hilbert của a, b được xác định như sau $(a, b) = 1$ nếu $z^2 - ax^2 - by^2 = 0$ có nghiệm không tầm thường và $(a, b) = -1$ trong trường hợp còn lại. Cho $f = a_1X_1^2 + \cdots + a_nX_n^2$ là một dạng toàn phương hạng n trên $k = \mathbb{Q}_p$. Ta có tích $\prod_{i<j}(a_i, a_j) = \pm 1$ không phụ thuộc vào việc chọn cơ sở trực giao của V ([36, Th. 5, Ch. 4]), ta đặt

$$d = d(f) = a_1 \dots a_n \in k^*/k^{*2},$$

$$\varepsilon = \varepsilon(f) = \prod_{i<j}(a_i, a_j) = \pm 1.$$

Ta cần nhắc lại kết quả sau:

Định lý 1.2.1 ([36, Ch. IV, Thm. 6]) *Điều kiện cần và đủ để f biểu diễn 0 là một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:*

(i) $n = 2$ *và* $d = -1$ *(trong k^*/k^{*2});*

(ii) $n = 3$ *và* $(-1, -d) = \varepsilon$;

(iii) $n = 4$ *và hoặc là* $d \neq 1$ *hoặc* ($d = 1$ *và* $\varepsilon = (-1, -1)$);

(iv) $n \geq 5$;

Đặc biệt, mọi dạng toàn phương có từ 5 biến trở lên đều biểu diễn 0.

Hệ quả 1.2.2 ([36, Ch. IV, Corol. 7]) *Có duy nhất (sai khác một tương đương) một dạng toàn phương có hạng 4 không biểu diễn 0. Nếu* $(a, b) = -1$ *thì dạng toàn phương này là* $z^2 - ax^2 - by^2 + abt^2$.

Dạng toàn phương trên trường toàn cục. Ta giả thiết $k = \mathbb{Q}$, mặc dù các kết quả vẫn còn đúng cho trường toàn cục bất kì có đặc số khác 2. Các dạng toàn phương trong mục này có hệ số trên $\mathbb{Q}$ và không suy biến. Ta ký hiệu $\mathcal{V}$ là tập các số nguyên tố và ∞, đặt $\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$. Cho $f = a_1X_1^2 + \cdots + a_nX_n^2$ là một dạng toàn phương hạng n. Định lý sau đây, được gọi là nguyên lý địa phương-toàn cục hay nguyên lý Hasse mạnh cho dạng toàn phương, đã đóng vai trò rất quan trọng trong Lý thuyết số (xem [36, Ch. IV, Sec. 3]).

Định lý 1.2.3 (Hasse-Minkowski). *Điều kiện cần và đủ để dạng toàn phương* f *biểu diễn 0 trên* $\mathbb{Q}$ *là* f_v *biểu diễn 0 với mọi* $v \in \mathcal{V}$.

Cho f là dạng toàn phương hạng n. Giả sử $n = 3$ (hoặc $n = 4$ và $d(f) = 1$). Bằng cách áp dụng công thức tích ta suy được kết quả: nếu f biểu diễn 0 trong mọi $\mathbb{Q}_v$ có thể trừ tại một số nguyên tố v thì f biểu diễn 0.

Từ Định lý Hasse-Minkowski, người ta cũng có được sự phân loại toàn cục (nguyên lý Hasse yếu) cho các dạng toàn phương như sau.

Định lý 1.2.4 ([36, Ch. IV, Th. 9]) *Hai dạng toàn phương* f, f' *là tương đương trên* $\mathbb{Q}$ *nếu và chỉ nếu chúng tương đương trên mọi* $\mathbb{Q}_v$.

1.3 Dạng hecmit trên một thể trên một trường

Trong mục này chúng ta nêu lại một số khái niệm về dạng hecmit (xem [33, Ch. 7; Ch. 8; Ch. 10]). Trước tiên là những khái niệm về phép đối hợp và đại số quaternion.

Định nghĩa 1.3.1 (i) Cho R là một vành kết hợp, có đơn vị. Một phép *đối hợp* trên R là một ánh xạ $J : R \to R, \alpha \mapsto \alpha^J$ thỏa mãn ba điều kiện:

$$(\alpha + \beta)^J = \alpha^J + \beta^J,\ (\alpha\beta)^J = \beta^J\alpha^J, \quad \text{và} \quad (\alpha^J)^J = \alpha$$

với mọi $\alpha, \beta \in R$. Cặp (R, J) được gọi là một *vành với phép đối hợp*.

(ii) Phần tử $\alpha \in (R, J)$ được gọi là phần tử *J-đối xứng* (tương ứng *J-phản đối xứng*) nếu $\alpha^J = \alpha$ (tương ứng $\alpha^J = -\alpha$). Ta ký hiệu R^+(tương ứng R^-) là tập tất cả các phần tử J-đối xứng (tương ứng J-phản đối xứng) của R.

Ta gọi A là một đại số trên trường K có tâm là K và J là một phép đối hợp trên A, khi đó $J|_K$ là một tự đẳng cấu của trường K có cấp ≤ 2. Ta có hai trường hợp:

(i) $J|_K$ là đồng nhất, khi đó J là K-tuyến tính. Trường hợp này ta nói J là *phép đối hợp loại 1.*

(ii) $J|_K$ không là đồng nhất, khi đó $J|_K = \sigma$ là tự đẳng cấu không tầm thường (cấp 2) của K, giả sử k là trường cố định của σ thì K/k là một mở rộng tách được bậc hai. Trường hợp này ta nói J là *phép đối hợp loại 2.*

Định nghĩa 1.3.2 Cho K là một trường và $a, b \in K^*$. Đại số *quaternion* $(a, b/K)$ là một K-đại số 4 chiều có cơ sở $1, e_1, e_2, e_3$ với bảng nhân được cho bởi $e_1^2 = a.1 = a; e_2^2 = b.1 = b; e_1e_2 = e_3; e_2e_1 = -e_1e_2$. Vậy

$$A = (a, b/K) = \{\alpha_0 1 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 | \alpha_i \in K\},$$

Một cơ sở của của $(a, b/K)$ thỏa mãn bảng nhân trên gọi là một cơ sở chuẩn.

Ta đặt $(a, b/K)_0 = e_1K + e_2K + e_3K$. Khi đó ta có $(a, b/K) = K.1 \oplus (a, b/K)_0$, tức là mọi $x \in (a, b/K)$ có biểu diễn duy nhất $x = x_0 + x_1, x_0 \in K, x_1 \in (a, b/K)_0$. Ánh xạ:

$$\bar{}: (a, b/K) \to (a, b/K);\ x = x_0 + x_1 \longmapsto \overline{x} = \overline{x_0 + x_1} = x_0 - x_1$$

là một phép đối hợp K-tuyến tính, được gọi là *phép đối hợp chính tắc* trên A.

Ánh xạ

$$\mathrm{Nrd}_{A/K} : A \to K,\ x \longmapsto x\bar{x} = \bar{x}x = x_0^2 - x_1^2$$

là một dạng toàn phương chính quy trên A, dạng toàn phương này có một cơ sở trực giao là $\{1, e_1, e_2, e_3\}$ và $\langle A, \mathrm{Nrd}_{A/K} \rangle \cong \langle 1, -a, -b, ab\rangle$. Với $x \in A$, $\mathrm{Nrd}_{A/K}(x) = x\bar{x}$ gọi là *chuẩn* (*thu gọn*) của x và $\mathrm{Trd}_{A/K}(x) = \frac{1}{2}(x + \bar{x}) = x_0$ được gọi là *vết* (*thu gọn*) của x. Dạng toàn phương $\mathrm{Nrd}_{A/K}$ còn được gọi là *dạng chuẩn* của $(a, b/K)$. Chẳng hạn, cho đại số $A = (-1, -1/K)$, với $x = x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, ta có $\mathrm{Nrd}_{A/K}(x) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Bổ đề 1.3.3 (xem [33, Ch. 2, 11.8, 11.14]) (i) *$(a, b/K)$ là một thể nếu và chỉ nếu dạng chuẩn của nó là một dạng toàn phương không đẳng hướng.*

(ii) Nếu $(a, b/K)$ không là một thể thì $(a, b/K) \cong M(2, K)$ đại số các ma trận cấp 2 với hệ tử thuộc K.

Tiếp theo ta nhắc lại khái niệm về đại số đơn tâm và nhóm Brauer. Cho K là một trường và A là một K-đại số. Ta quy ước rằng, các đại số và không gian véctơ được nhắc đến đều có chiều hữu hạn, thuật ngữ "thể trên k" được sử dụng thay cho thuật ngữ "đại số đơn tâm chia được hữu hạn chiều trên k".

Định nghĩa 1.3.4 ([33, Ch. 8]) Một K-đại số A được gọi là *tâm* nếu K chính là tâm của A. Một đại số tâm và không có iđêan hai phía thực sự được gọi là *đại số đơn tâm.*

Cho một đại số đơn tâm A. Theo Định lý Wedderburn, có duy nhất một thể D và số $n > 0$ sao cho $A \simeq M(n, D) \simeq M(n, K) \otimes_K D$. Ta ký hiệu $A \sim B$ nếu $A \simeq M(m, D)$ và $B \simeq M(n, D)$. Quan hệ "$\sim$" là một quan hệ tương đương trên tập các đại số đơn tâm. Ký hiệu $\mathrm{Br}(K)$ là tập các lớp tương đương, mỗi lớp tương đương $[A]$ được gọi là một *lớp Brauer.* Cho A, B là hai đại số đơn tâm trên K, khi đó $A \otimes B$ cũng là một K-đại số đơn tâm; nếu $A \sim A', B \sim B'$ thì $A \otimes B \sim A' \otimes B'$. Tích tenxơ của các đại số cho ta một phép toán hai ngôi giao hoán, kết hợp trên tập $\mathrm{Br}(K)$, lớp Brauer của đại số ma trận $M(n, K)$ là phần tử trung hòa của tích này, mặt khác mọi lớp Brauer đều khả nghịch. Do đó $\mathrm{Br}(K)$ là một nhóm và được gọi là nhóm Brauer của K. A được gọi là *phân rã* nếu $[A]$ là phần tử trung hòa trong $\mathrm{Br}(K)$, tức là $A \simeq M(n, K)$. Cấp của $[A]$ trong nhóm $\mathrm{Br}(K)$ được gọi là *cấp* (hoặc *số mũ*) của đại số đơn tâm A. Số chiều của A trên K luôn có dạng d^2, d được gọi là *bậc* (hay *chỉ số*) của A trên K. Ta cũng ký hiệu các ánh xạ $\mathrm{Nrd}_{A/K} : A \to K$ và $\mathrm{Trd}_{A/K} : A \to K$ là chuẩn thu gọn và vết thu gọn của A/K như thông thường (xem trong [33, Ch.8, 5.8]).

Tiếp đến chúng ta sẽ nhắc lại khái niệm dạng (phản-)hecmit trên một thể D tâm K ứng với phép đối hợp J cùng một số tính chất, khái niệm liên quan.

Định nghĩa 1.3.5 Cho D là một thể với phép đối hợp J, V là một không gian véctơ phải n chiều trên D.

(i) Một *dạng nửa song tuyến tính* trên V là một ánh xạ $s : V \times V \to D, (x, y) \mapsto s(x, y)$ thỏa mãn các điều kiện sau:

$$s(x + y, z) = s(x, z) + s(y, z),\ \ s(x, y + z) = s(x, y) + s(x, z)$$

$$s(x\alpha, y) = \alpha^J s(x, y),\ \ s(x, y\alpha) = s(x, y)\alpha$$

với mọi $x, y, z \in V$ và mọi $\alpha \in D$.

(ii) Một dạng nửa song tuyến tính $h : V \times V \to D$ gọi là *hecmit* (tương ứng *phản hecmit*) nếu nó thỏa mãn $h(x, y) = h(y, x)^J$ (tương ứng $h(x, y) = -h(y, x)^J$) với mọi cặp $x, y \in V$. Ta gọi cặp (V, h) với h là dạng hecmit (tương ứng phản hecmit) là *không gian hecmit* (tương ứng *không gian phản hecmit*).

Ta xét không gian (phản-)hecmit (V, h). Khi cố định một cơ sở $\{e_1, \ldots, e_n\}$ của V trên D, ma trận $M = (h(e_i, e_j))$ được gọi là ma trận của h ứng với cơ sở này. Nếu $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ là một cơ sở khác của V, ta đặt $e'_j = \sum_{i=1}^{n} e_i\alpha_{ij}$ và ký hiệu $T = (\alpha_{ij})$ thì ma trận của B đối với cơ sở mới là $M' = {}^tT^J MT$.

Trong không gian (phản-)hecmit (V, h), hai véctơ $x, y \in V$ được gọi là *trực giao* nếu $h(x, y) = h(y, x) = 0$. Vectơ $x \neq 0$ của V được gọi là *đẳng hướng* nếu $h(x, x) = 0$. Với một tập con X của V, tập $X^\perp = \{x \in V : h(x, y) = 0 \text{ với mọi } y \in V\}$ là một không gian con của V. Ta gọi $V^\perp$ là căn của V. Nếu $V^\perp = 0$ ta sẽ gọi h là chính quy hay không suy biến, với không gian con chính quy N của V, ta có $V = N \oplus N^\perp$. Mỗi không gian hecmit V đều có thể chọn ra một cơ sở trực giao, tức là cơ sở $\{e_1, \ldots, e_n\}$ thỏa mãn $h(e_i, e_j) = 0$ với mọi $i \neq j$.

Cho $(V, h), (V', h')$ là hai không gian (phản-)hecmit trên D. Một đơn cấu D-tuyến tính $\sigma : V \to V'$ được gọi là *đẳng cự* nếu σ thỏa mãn $h'(\sigma x, \sigma y) = h(x, y)$ với mọi $x, y \in V$. Đặc biệt, nếu $V = V'$ tập hợp tất cả các đẳng cấu đẳng cự từ V vào chính nó lập thành một nhóm, gọi là nhóm *unita* của dạng (phản-)hecmit, ký hiệu là $\mathrm{U}(h, D)$.

Định nghĩa 1.3.6 Cho h là một dạng (phản-)hecmit chiều n không suy biến trên V nhận giá trị trong một thể D tâm K ứng với phép đối hợp J loại 1, H là ma trận của h ứng với một cơ sở của V. Đặt $A = M(n, D)$, khi đó A là một đại số đơn tâm tâm K. Ta gọi *định thức* của h là $\det(h) := \mathrm{Nrd}_{A/K}(H)K^{*2} \in K^*/K^{*2}$, và *biệt thức* của h là $\mathrm{disc}(h) = (-1)^n \det(h) \in K^*/K^{*2}$.

Định nghĩa 1.3.7 Cho K/k là một mở rộng bậc hai tách được, D là một thể tâm K với $K/k-$phép đối hợp J (loại hai), $h : V \times V \to D$ là một dạng hecmit chiều n không suy biến trên V nhận giá trị trong D ứng với J. Gọi H là ma trận của h ứng với một cơ sở của V. Đặt $A = M(n, D)$, khi đó *định thức* của h được xác định là $\det(h) := \mathrm{Nrd}_{A/K}(H)N_{K/k}(K^*) \in k^*/N_{K/k}(K^*)$.

Định nghĩa 1.3.8 Dạng (phản-)hecmit h trên D được gọi là *đẳng hướng* nếu tồn tại một cơ sở $\{e_1, \ldots, e_n\}$ của V sao cho $h(e_1, e_1) = 0$.

1.4 Dạng hecmit (phản hecmit) trên một thể trên trường địa phương và trường toàn cục

Trước tiên ta khảo sát các dạng hecmit trên một trường. Cho K/k là một mở rộng bậc hai tách được, J là một tự đẳng cấu không tầm thường của K trên k và V là một K-không gian vectơ. Cho $h : V \times V \to K$ là một dạng hecmit ứng với J. Khi đó $h(x, x) \in k$, với mọi $x \in V$. Đặt

$$q_h : V \to k, x \longmapsto h(x, x), x \in V.$$

Ta có q_h là một dạng toàn phương trên k-không gian vectơ V, ta gọi q_h là *dạng vết* của h. Nếu h là chính quy, q_h cũng là chính quy. Với ký hiệu trên, ta có kết quả sau đây.

Mệnh đề 1.4.1 ([33, Ch. 10, Th. 1.1]) *Một dạng hecmit h trên K/k là đẳng hướng nếu và chỉ nếu q_h là đẳng hướng.*

Bây giờ, cho D là một thể quaternion trên trường K, giả sử K có đặc số khác 2 và J là phép đối hợp chính tắc trên D (khi đó tập các phần tử của D cố định đối với phép đối hợp J là K), V là một D-không gian vectơ. Nếu $h : V \times V \to D$ là một dạng hecmit trên V, thì ta có $h(x, x) \in K$ với mọi $x \in V$. Ta nhận được một dạng toàn phương trên K

$$q_h : V \to K, \qquad q_h(x) = h(x, x).$$

Dạng q_h được gọi là *dạng vết* của h. Tương tự như trên, ta cũng có kết quả sau:

Mệnh đề 1.4.2 ([33, Ch. 10])*Một dạng hecmit h trên (D, J) là đẳng hướng nếu và chỉ nếu q_h là đẳng hướng.*

Để thuận lợi cho việc nghiên cứu các dạng hecmit, ta cần nhắc lại một số kết quả về các đại số đơn và phép đối hợp trên trường địa phương và trường toàn cục.
Nhận xét rằng, trường các số phức $\mathbb{C}$ là một trường đóng đại số, nên không tồn tại một thể không tầm thường trên $\mathbb{C}$. Trên trường các số thực $\mathbb{R}$ có duy nhất một thể không tầm thường là đại số quaternion $(-1, -1/\mathbb{R})$. Cho K là một trường $\mathfrak{p}$-adic, nếu D là một thể tâm K với phép đối hợp loại 1 thì $D = K$ hoặc D là thể quaternion; nếu D là một thể tâm K với K/k-phép đối hợp loại hai thì $D = K$ (xem [33, Ch. 10, Th. 2.2]).

Xét K là một trường toàn cục, với mỗi định giá $\mathfrak{p}$ trên K, ký hiệu $K_{\mathfrak{p}}$ là bao đầy đủ của K tại $\mathfrak{p}$. Với một K-đại số A ta ký hiệu $K_{\mathfrak{p}}$-đại số $A \otimes_K K_{\mathfrak{p}}$ là $A_{\mathfrak{p}}$. Khi đó ta có một đại số đơn tâm A trên K là phân rã hầu khắp nơi, tức là $A_{\mathfrak{p}} \sim M(n, K_{\mathfrak{p}})$ với hầu hết $\mathfrak{p}$ (chỉ trừ ra một số hữu hạn chốn $\mathfrak{p}$). Đồng thời điều kiện cần và đủ để A phân rã trên K là $A_{\mathfrak{p}}$ phân rã trên $K_{\mathfrak{p}}$ với mọi $\mathfrak{p}$. Đặc biệt, mọi đại số đơn tâm cấp 2 trên K đều tương đương với một thể quaternion (xem [33, Ch.10, 2.3]).

Cũng như dạng toàn phương, một trong những kết quả quan trọng nhất trong lý thuyết số học của các dạng (phản-)hecmit là nguyên lý địa phương-toàn cục. Cho K là một trường toàn cục và cho $\mathfrak{p}$ là một định giá trên K, ký hiệu $K_{\mathfrak{p}}$ là đầy đủ của K tại $\mathfrak{p}$. Với một K-không gian vectơ V, đặt $V_{\mathfrak{p}} = V \otimes_K K_{\mathfrak{p}}$. Cho $\varphi = (V, h)$ là không gian (phản-)hecmit trên thể D với phép đối hợp loại một. Ta kí hiệu *đầy đủ hóa* của φ tại $\mathfrak{p}$ là $\varphi_{\mathfrak{p}} = (V_{\mathfrak{p}}, h_{\mathfrak{p}})$ trong đó $h_{\mathfrak{p}} : V_{\mathfrak{p}} \times V_{\mathfrak{p}} \to D_{\mathfrak{p}}, D_{\mathfrak{p}} = D \otimes_K K_{\mathfrak{p}}$. Gọi P là một tính chất của dạng (phản-)hecmit (chẳng hạn, *đẳng hướng* hoặc *hyperbolic*). Ta nói rằng φ là P địa phương khắp nơi nếu đầy đủ $\varphi_{\mathfrak{p}}$ của φ có tính chất P tại mọi $\mathfrak{p}$. Nguyên lý địa phương-toàn cục cho dạng phản hecmit của Kneser được phát biểu như sau:

Định lý 1.4.3 ([33, Ch. 10, Th. 4.1]) *Cho K là một trường toàn cục với đặc số $\neq 2$, cho D là một thể quaternion tâm K và phép đối hợp chính tắc J, gọi $\varphi = (V, h)$ là không gian phản hecmit chính quy trên D. Nếu* $\dim(\varphi) \geq 3$ *và φ là đẳng hướng địa phương khắp nơi thì φ là đẳng hướng.*

Tiếp theo, chúng tôi nhắc lại kết quả về nguyên lý địa phương-toàn cục cho dạng hecmit trên một thể với phép đối hợp loại 2. Gọi k là một trường toàn cục với đặc số $\neq 2$, $K = k(\sqrt{\alpha})$ là một mở rộng bậc hai với tự đẳng cấu không tầm thường $^-$, và D là một K-đại số chia đơn tâm được trang bị một K/k-phép đối hợp ký hiệu là J. Cho V là D-không gian vectơ hữu hạn chiều, và $h : V \times V \to D$ là một dạng hecmit chính quy. Với một định giá $\mathfrak{p}$ của k, đầy đủ hóa $k_{\mathfrak{p}}$ của k là $\mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{C}$ hoặc trường $\mathfrak{p}$-adic,

$$K_{\mathfrak{p}} = K \otimes_k k_{\mathfrak{p}},\ D_{\mathfrak{p}} = D \otimes_k k_{\mathfrak{p}},\ V_{\mathfrak{p}} = V \otimes_k k_{\mathfrak{p}}.$$

Khi đó $K_{\mathfrak{p}} = k_{\mathfrak{p}}[X]/(X^2 - \alpha)$ là một $k_{\mathfrak{p}}$-đại số bậc hai (có thể không là một trường), $D_{\mathfrak{p}}$ là một đại số tâm $K_{\mathfrak{p}}$ và $V_{\mathfrak{p}}$ là một $D_{\mathfrak{p}}$-mô đun tự do hạng bằng $\dim_D V$. Phép đối hợp J có thể mở rộng duy nhất thành phép đối hợp J trên $D_{\mathfrak{p}}$, và h được mở rộng thành dạng hecmit

$$h_{\mathfrak{p}} : V_{\mathfrak{p}} \times V_{\mathfrak{p}} \to D_{\mathfrak{p}}$$

gọi là *đầy đủ hóa* (hoặc *địa phương hóa*) của h tại $\mathfrak{p}$. Ta cần sử dụng kết quả sau đây của W. Landherr (xem [33, Ch. 10]).

Định lý 1.4.4 ([33, Ch. 10, Th. 6.2], Nguyên lý địa phương-toàn cục mạnh) *Một dạng hecmit $\varphi = (V, h)$ trên (D, J) là đẳng hướng nếu và chỉ nếu tại mọi $\mathfrak{p}$ các địa phương hóa $\varphi_{\mathfrak{p}} = (V_{\mathfrak{p}}, h_{\mathfrak{p}})$ là đẳng hướng.*

1.5 Nhóm đại số trên trường không đóng đại số

Trong mục này chúng tôi trình bày lại một số khái niệm cơ bản của nhóm đại số trên một trường theo các tài liệu [3, 4, 29, 40]. Từ đây về sau, ta luôn ký hiệu Ω là một trường đóng đại số với bậc siêu việt đủ lớn, k là một trường con của Ω, $\bar{k}$ là một bao đóng đại số của k, k_s là bao tách được của k trong $\bar{k}$ và không gian afin $\mathbb{A}^n = (\bar{k})^n$.

1. Nhóm đại số afin.

Trước hết, chúng ta nói về *nhóm đại số ma trận*. Ta ký hiệu $M(n, \Omega)$ là tập tất cả các ma trận vuông cấp n với hệ tử trong Ω, và $\mathbf{GL}(n, \Omega)$ là nhóm các ma trận vuông cấp n khả nghịch. Ta biết $\mathbf{GL}(n, \Omega)$ là một đa tạp afin trong Ω^{n^2+1} với vai trò là tập mở chính trong không gian afin Ω^{n^2} ứng với đa thức $f = \det$.

Một nhóm con G của $\mathbf{GL}(n, \Omega)$ được gọi là một *nhóm đại số ma trận* nếu G là một tập con đóng của $\mathbf{GL}(n, \Omega)$, tức là nếu tồn tại họ đa thức $p_\alpha \in \Omega[X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{nn}]$, $(\alpha \in \Lambda)$ sao cho

$$G = \{g = (g_{ij}) \in \mathbf{GL}(n, \Omega) \mid p_\alpha(g_{ij}) = 0, \text{ với mọi } \alpha \in \Lambda\}.$$

Vành tọa độ $\Omega[G]$ của G, tức là vành tất cả các hàm chính quy trên G, là Ω-đại số sinh bởi các hàm tọa độ g_{ij} và $(\det g)^{-1}$. Vành $\Omega[G]$ chính là vành thương $\Omega[X_{ij}, Z]/I$, với I là iđêan các đa thức n^2+1 biến (Z và các $X_{ij} (1 \le i, j \le n)$) triệt tiêu trên G, ở đây G được xem như một tập con trong Ω^{n^2+1}. Cho một vành con B của Ω ta ký hiệu $G(B)$ là giao $G \cap \mathbf{GL}(n, B)$.

Nhóm đại số ma trận G được gọi là *xác định trên k* hay *k-nhóm*, nếu iđêan I các đa thức n^2+1 biến triệt tiêu trên G có một hệ sinh trong $k[X_{11}, \ldots, X_{nn}, Z]$. Ký hiệu I_k là iđêan các đa thức với hệ tử trong k triệt tiêu trên G, vành thương $k[X_{11}, \ldots, X_{nn}, Z]/I_k = k[G]$ gọi là *vành tọa độ của G trên k*.

Định nghĩa 1.5.1 (i) Cho V là một đa tạp đại số afin trong $\mathbb{A}^n$. V được gọi là *xác định trên k* hay *k-đa tạp* nếu iđêan xác định của nó

$$I(V) = \{f \in \bar{k}[T] \mid f(a) = 0, \forall a \in V\}$$

có một hệ sinh gồm các phần tử trong $k[T]$. Ta đặt $I_k(V) = I(V) \cap k[T]$ và $k[V] = k[T]/I_k(V)$, khi đó $k[V]$ được gọi là *vành các hàm chính quy* hay *vành afin của V xác định trên k*.

(ii) Một cấu xạ giữa hai k-đa tạp afin $\varphi : X \to Y$ được gọi là *xác định trên* k hay k-*cấu xạ* nếu đồng cấu đối cấu xạ $\varphi^* : \bar{k}[Y] \to \bar{k}[X]$ đưa $k[Y]$ vào $k[X]$.

Định nghĩa 1.5.2 (i) Cho G là một đa tạp đại số afin. G được gọi là một *nhóm đại số tuyến tính* nếu có các cấu xạ

$$\mu : G \times G \to G,\ \mu(a,b) = ab,$$

$$\rho : G \to G,\ \rho(a) = a^{-1},$$

giữa các tập afin, mà cùng với chúng G là một nhóm.

(ii) Nhóm đại số tuyến tính G được gọi là *xác định trên* k hay k-*nhóm* nếu G, μ và ρ đều xác định trên k.

(iii) Một k-đồng cấu giữa các k-nhóm đại số tuyến tính là một đồng cấu giữa các nhóm và là một k-cấu xạ của các k-đa tạp đại số afin.

Cho G là một nhóm đại số, ta biết rằng chỉ có duy nhất một thành phần bất khả quy của G chứa đơn vị e, ký hiệu là G^o, gọi là *thành phần liên thông* (*của đơn vị*) của G. Nhóm đại số G được gọi là *liên thông* nếu $G = G^o$, điều này xảy ra khi và chỉ khi G là bất khả quy.

Cho G là một nhóm đại số liên thông. Khi đó $\bar{k}[G]$ là một miền nguyên. Trường các thương của nó, $\bar{k}(G)$, gọi là *trường hàm hữu tỷ* của G. Và trường các thương của $k[G]$ là trường con của $\bar{k}(G)$, gồm các hàm hữu tỉ xác định trên k.

Ví dụ. 1) *Nhóm cộng tính*: Tập đường thẳng afin $\mathbb{A}^1$ cùng với phép cộng của trường là một k-nhóm đại số tuyến tính được ký hiệu là $\mathbf{G}_a$.

2) *Nhóm nhân tính*: Tập mở afin $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ cùng với phép nhân của trường là một k-nhóm đại số tuyến tính được ký hiệu là $\mathbf{G}_m$.

3) *Nhóm tuyến tính tổng quát*: Tập $\mathbf{GL}(n, \bar{k})$ các ma trận khả nghịch cấp $n \times n$, cùng với phép nhân ma trận là một k-nhóm đại số tuyến tính được ký hiệu là $\mathbf{GL}_n$.

4) *Nhóm tuyến tính đặc biệt* $\mathbf{SL}_n$: Tập các ma trận vuông cấp n khả nghịch trong $\mathbf{GL}(n, \bar{k})$ có định thức bằng 1, cùng với phép nhân ma trận là một k-nhóm đại số afin. Nhóm này là nhóm con đóng của nhóm $\mathbf{GL}_n$.

5) Mỗi nhóm con đóng của nhóm $\mathbf{GL}_n$ là một nhóm đại số.

(a) Nhóm *đường chéo*

$$\mathbf{D}_n = \{g \in \mathbf{GL}_n \,|g_{ij} = 0 \text{ với mọi } i \neq j\}.$$

(b) Nhóm *các ma trận tam giác trên*

$$\mathbf{T}_n = \{g \in \mathbf{GL}_n \,|g_{ij} = 0 \text{ với mọi } j < i\}.$$

(c) Nhóm *các ma trận tam giác trên lũy đơn*

$$\mathbf{U}_n = \{g \in \mathbf{T}_n | g_{ii} = 1 \text{ với mọi } 1 \leq i \leq n\}.$$

Ta biết rằng (xem [3, Ch. I, Prop. 1.10]) mọi k-nhóm đại số afin G đều đẳng cấu trên k với một k-nhóm con đóng của nhóm tuyến tính tổng quát $\mathbf{GL}_n$.

Định nghĩa 1.5.3 Cho G là một nhóm đại số và V là một đa tạp afin, ta nói rằng *G tác động cấu xạ* trên V nếu có một cấu xạ $\tau : G \times V \to V$ thỏa mãn các tính chất của tác động của một nhóm trên một tập. Nếu τ, G, V cùng xác định trên k ta gọi là *k-tác động cấu xạ*.

Định nghĩa 1.5.4 (i) Cho G là một nhóm đại số, một *biểu diễn hữu tỷ* của G là một cấu xạ $\rho : G \to \mathbf{GL}_m$. Chẳng hạn, nếu G là một nhóm ma trận thì $\bar{k}[G] = \bar{k}[g_{11}, g_{12}, \ldots, g_{nn}, (\det g)^{-1}]$. Khi đó với $g \in G$, mỗi hệ tử của ma trận $\rho(g)$ là một đa thức của các biến $g_{11}, g_{12}, \ldots, g_{nn}, (\det g)^{-1}$.
(ii) Một biểu diễn hữu tỷ bậc 1, $\chi : G \to \mathbf{GL}_1$, được gọi là một *đặc trưng* của G. Tập các đặc trưng của G là một nhóm giao hoán, gọi là *nhóm đặc trưng của G*, ký hiệu là $X(G)$.

Chú ý rằng $X(G)$ là nhóm Abel hữu hạn sinh và là tự do nếu G liên thông (xem [29]).

Với một k-nhóm đại số G, cho H là một nhóm con đóng của G. Nếu H xác định trên k, ta nói rằng H là một k-nhóm con của G. Một cách tự nhiên, G/H là không gian thuần nhất với tác động cấu xạ của G. Nếu H là k-nhóm con chuẩn tắc của G, thì G/H là một nhóm đại số xác định trên k ([3, Th. 6.8, Ch. 3]).

Định nghĩa 1.5.5 Cho G là một nhóm đại số, H là nhóm con và N là nhóm con chuẩn tắc của G sao cho:

(1) G là tích nửa trực tiếp của các nhóm H và N.

(2) Ánh xạ $\mu : H \times N \to G$, với $\mu(h, n) = hn$, là một đẳng cấu của các đa tạp đại số.
Khi đó G được gọi là *tích nửa trực tiếp* của các nhóm đại số H và N.

2. Xuyến đại số.

Định nghĩa 1.5.6 Nhóm đường chéo $\mathbf{D}_n$ là nhóm con đóng của $\mathbf{GL}_n$ nó đẳng cấu với $\mathbf{GL}_1^n$ trên k. Một nhóm đại số đẳng cấu với $\mathbf{D}_n$ (trên $\bar{k}$) được gọi là một *xuyến đại số n chiều*.

Mệnh đề 1.5.7 (Xem [3, Ch. III, Prop. 8.5]) *Cho T là một nhóm đại số. Khi đó các điều kiện sau tương đương:*

(1) *T là một xuyến chiều n.*

(2) *T là nhóm chéo hóa được liên thông chiều n.*

(3) *T là nhóm chéo hóa được và $X(T) = \mathbb{Z}^n$.*

Điều kiện chéo hóa được của định lý trên có thể hiểu là khi ta xét T như một nhóm đại số ma trận, thì luôn tồn tại một cơ sở của $(\bar{k})^n$ mà đối với cơ sở này, mọi phần tử của T đều có dạng chéo. Mỗi phần tử chéo của ma trận, xét như một hàm trên T là một đặc trưng của T.

Định nghĩa 1.5.8 Một xuyến T xác định trên k được gọi là *phân rã trên k* hay *k-phân rã* nếu T đẳng cấu với nhóm đường chéo D_n trên k.

Mệnh đề 1.5.9 (Xem [3, Prop. 8.4'] hoặc [40, Prop. 3.2.12]) *Cho T là một xuyến xác định trên k. Khi đó các điều kiện sau tương đương:*

(1) *T phân rã trên k.*

(2) *Tất cả các đặc trưng của T đều xác định trên k: $X(T) = X(T)_k$.*

(3) *Với mọi biểu diễn $\rho : T \to \mathbf{GL}_m$, xác định trên k, ta có nhóm $\rho(T)$ chéo hóa được trên k.*

Nếu xuyến T phân rã trên k, các xuyến con của T cũng phân rã trên k. Với một xuyến T xác định trên k luôn tồn tại mở rộng Galoa hữu hạn k'/k sao cho T phân rã trên k'. Nhóm $\Gamma = \mathrm{Gal}(k_s/k)$ tác động trên $X(T)$, nhóm $X(T)_k$ là tập các đặc trưng bất biến dưới tác động của Γ, tức là $X(T)_k = X(T)^\Gamma$ (xem [3, Ch. III, 8.11]).

Định nghĩa 1.5.10 Một xuyến T được gọi là *không đẳng hướng* trên trường k nếu $X(T)_k = \{1\}$.

Ví dụ. Cho $k = \mathbb{R}$, nếu $\dim T = 1$ thì có hai khả năng: hoặc là T phân rã trên k và $T(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^*$, hoặc T là không đẳng hướng trên k và khi đó T đẳng cấu trên k với $\mathbf{SO}_2$, và $T(\mathbb{R}) = \mathbf{SO}(2, \mathbb{R})$ là nhóm đường tròn. Trong trường hợp tổng quát $T(\mathbb{R})$ là compact nếu và chỉ nếu T là không đẳng hướng trên $\mathbb{R}$. (Điều này vẫn đúng nếu $\mathbb{R}$ được thay bởi trường p-adic).

Mệnh đề 1.5.11 (xem [3, Ch. III, Prop. 8.15]) *Cho T là một k-xuyến. Khi đó tồn tại duy nhất hai k-xuyến con T_s và T_a, sao cho:*

(1) *T_s là xuyến phân rã trên k,*

(2) T_a *là không đẳng hướng trên* k,

(3) $T_s \cap T_a$ *là hữu hạn và* $T = T_s.T_a$.

Sự phân tích trên tương thích với cấu xạ các nhóm đại số. (Tính chất (3) cho phép ta nói rằng T là tích hầu trực tiếp của T_s và T_a.)

3. Nhóm giải được, nhóm lũy linh và nhóm lũy đơn

Định nghĩa 1.5.12 Một nhóm đại số G được gọi là *lũy đơn* nếu mọi phần tử của G đều là lũy đơn.

Ví dụ. Nếu $\dim G = 1$ và G là nhóm lũy đơn liên thông thì G đẳng cấu với nhóm cộng của một trường;

$$G \cong \mathbf{G}_a = \left\{ g \in \mathbf{GL}_2 \mid g = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Một nhóm đại số tuyến tính liên thông, lũy đơn là liên hợp với một nhóm những ma trận tam giác trên có các phần tử trên đường chéo chính bằng 1, vì vậy mọi nhóm lũy đơn là lũy linh. Ta có kết quả quan trọng sau đây của nhóm lũy đơn.

Định lý 1.5.13 (Xem [3, Thm. 15.4], [4, 4.1]) *Cho G là nhóm lũy đơn xác định trên một trường k. Nếu char. $k = 0$ thì tồn tại một dãy chuẩn tắc*

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots G_i \supset G_{i+1} \supset \ldots \supset G_n = \{e\}$$

những k-nhóm con đại số của G sao cho với mọi i ta có các đẳng cấu trên k $G_i/G_{i+1} \simeq \mathbf{G}_a$. Nói riêng ra, nếu $\dim G > 0$ thì G chứa một nhóm con đại số H trong tâm và $H \simeq \mathbf{G}_a$.

Định nghĩa 1.5.14 Nhóm lũy đơn G xác định trên trường k được gọi là *k-xoắn* nếu nó không chứa k-nhóm con nào đẳng cấu (trên k) với $\mathbf{G}_a$.

Ví dụ. Cho $\mathbb{F}_p$ là trường có p phần tử với p là số nguyên tố lẻ, $k = \mathbb{F}_p(t)$ và G là nhóm con của $\mathbf{G}_a^2$ được cho bởi phương trình

$$G = \{(x, y) \in \mathbf{G}_a^2 \,| y^p = x + tx^p\}.$$

Khi đó G là nhóm lũy đơn liên thông giao hoán chiều 1 nhưng không đẳng cấu với $\mathbf{G}_a$ trên k.

Cho G là một nhóm đại số. Ta xét dãy dẫn xuất $\mathscr{D}^i G, i \geq 0$, và dãy tâm giảm $\mathscr{C}^i G, i \geq 0$ của G như sau:

$$\mathscr{D}^0 G = G, \mathscr{D}^{i+1} G = (\mathscr{D}^i G, \mathscr{D}^i G), i \geq 0,$$

$$\mathscr{C}^0G = G, \mathscr{C}^{i+1}G = (G, \mathscr{C}^iG), i \geq 0.$$

Nếu G là một nhóm đại số, $\mathscr{D}^iG, \mathscr{C}^iG$ đều là các nhóm con đóng chuẩn tắc của G, liên thông nếu G liên thông. Ta định nghĩa:

Định nghĩa 1.5.15 Nhóm đại số G được gọi là nhóm đại số *giải được* (tương ứng *lũy linh*) nếu tồn tại chỉ số $n \geq 0$ sao cho $\mathscr{D}^nG = \{e\}$ (tương ứng $\mathscr{C}^nG = \{e\}$).

Ví dụ. (1) Nhóm $\mathbf{T}_n$ các ma trận tam giác trên khả nghịch là nhóm giải được.
(2) Nhóm $\mathbf{U}_n$ các ma trận tam giác trên lũy đơn là nhóm lũy linh.

Định nghĩa 1.5.16 Cho G là một nhóm đại số tuyến tính liên thông giải được xác định trên k. G được gọi là *phân rã* trên k nếu tồn tại một dãy hợp thành những k-nhóm con liên thông của G:

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots G_i \supset G_{i+1} \supset \ldots \supset G_m = \{e\}$$

thỏa mãn G_i/G_{i+1} đẳng cấu trên k với $\mathbf{G}_a$ hoặc $\mathbf{G}_m$.

Đặc biệt, nếu nhóm giải được G phân rã trên k thì mọi xuyến T của G cũng phân rã trên k ([3, Thm.15.4])

Ta đã biết, với một nhóm đại số G, nếu H, H' là hai nhóm con chuẩn tắc, liên thông, giải được (hoặc lũy đơn) của G thì $H \cdot H'$ cũng là một nhóm con chuẩn tắc, liên thông, giải được (tương ứng lũy đơn) của G.

Định nghĩa 1.5.17 Cho G là một nhóm đại số tuyến tính.

(i) Ta gọi nhóm con chuẩn tắc, liên thông, giải được cực đại của G là *căn giải được* (hay ngắn gọn là *căn*) của G, ký hiệu là $R(G)$; và gọi nhóm con chuẩn tắc, liên thông, lũy đơn cực đại của G là *căn lũy đơn* của G, ký hiệu là $R_u(G)$.

(ii) Nhóm đại số G được gọi là *nửa đơn* nếu $R(G) = \{e\}$, và gọi là *reductive* nếu $R_u(G) = \{e\}$.

Nhận xét rằng, $R(G) = R(G^o)$ và $R_u(G) = R_u(G^o)$. Ngoài ra, nhóm thương $G/R(G)$ là nửa đơn, và $G/R_u(G)$ là reductive. Nếu G là reductive thì $R(G) = Z(G)^o$ là một xuyến gọi là *xuyến tâm* hay *tâm liên thông* của G, có giao hữu hạn với $\mathscr{D}(G) = (G, G)$ ([3, Prop. 11.21]).

Nếu k là trường có đặc số 0, và G xác định trên k thì luôn tồn tại một k-nhóm con reductive cực đại H của G sao cho

$$G = H \cdot R_u(G),$$

ở đây tích được xét là tích nửa trực tiếp của các nhóm đại số. Nếu H' cũng là một nhóm con reductive của G xác định trên k thì H' liên hợp trên k với một nhóm con của H. (Điều này không còn đúng trong trường hợp đặc số $p > 0$.)

Định lý 1.5.18 ([4, 5.2], hoặc xem [3, Prop.14.2]) *Cho G là một nhóm đại số liên thông reductive. Khi đó ta có các khẳng định sau.*

(1) *Nhóm giao hoán tử $\mathscr{D}(G)$ của G là nửa đơn.*

(2) *$G = C \cdot \mathscr{D}(G)$ là một tích hầu trực tiếp với $C = Z(G)^o$ là xuyến tâm của G.*

Định nghĩa 1.5.19 Cho G là một nhóm đại số tuyến tính.

(1) Nhóm con B của G được gọi là nhóm con *Borel* của G nếu B là nhóm con giải được liên thông cực đại của G.

(2) Nhóm con P của G được gọi là nhóm con *parabolic* của G nếu P chứa một nhóm con Borel của G.

Ta đã biết rằng (xem [3, Ch. IV, Sec. 11]) mọi nhóm con Borel của G đều là liên hợp và nhóm con P của G là nhóm con parabolic nếu và chỉ nếu G/P là đa tạp xạ ảnh.

Chú ý 1.5.20 Cho G là một nhóm đại số tuyến tính liên thông, khi đó:

(i) Các xuyến cực đại của G đều liên hợp nên có cùng số chiều và ta gọi số chiều ấy là *hạng* của G (ký hiệu là $\mathrm{rk}(G)$).

(ii) Nếu G xác định trên k thì G có xuyến con cực đại xác định trên k, tâm hóa của mỗi k-xuyến cũng xác định trên k (xem [3, Ch. V, 18.2]).

4. Một số định lý cấu trúc của nhóm reductive.

Cho G là một nhóm reductive, $\mathfrak{g}$ là đại số Lie của G và coi chúng như các tập con của đại số ma trận M_n . Ký hiệu $\mathrm{Ad} : G \to \mathbf{GL}(\mathfrak{g}), \mathrm{Ad}(g) : X \mapsto gXg^{-1}$ là biểu diễn phụ hợp của G. Nếu S là một xuyến con của G thì S tác động trên đại số Lie của G thông qua biểu diễn phụ hợp ở trên. Vì S bao gồm các phần tử nửa đơn, $\mathrm{Ad}\, S$ là chéo hóa được

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^{(S)} \oplus \amalg_\alpha \mathfrak{g}_\alpha^{(S)}$$

trong đó

$$\mathfrak{g}_\alpha^{(S)} = \{X \in \mathfrak{g} |\, \mathrm{Ad}\, s(X) = \alpha(s) \cdot X\} \ (\alpha \in X(S), \alpha \neq 0).$$

Tập các đặc trưng không tầm thường của S xuất hiện trong phân tích trên của biểu diễn phụ hợp được gọi là tập $\Phi(G, S)$ các nghiệm của G ứng với xuyến S. Nếu $T \supset S$, mọi nghiệm của G ứng với T không tầm thường trên S đều xác định một nghiệm của G ứng với S. Nếu T là xuyến cực đại của G thì $\Phi(G, T)$ được gọi là tập các nghiệm của G (ứng với T) và ký hiệu là $\Phi(G)$.

Định nghĩa 1.5.21 Cho G là một k-nhóm liên thông reductive.

(i) G được gọi là *phân rã* trên k nếu G có một xuyến con cực đại xác định và phân rã trên k;

(ii) G được gọi là *đẳng hướng* trên k, nếu G có xuyến con chiều ≥ 1 xác định và phân rã trên k.

Ví dụ. Cho F là một dạng toàn phương không suy biến trên k-không gian véctơ V có các hệ tử thuộc k, gọi $G = \mathrm{O}(F)$ là nhóm trực giao của F. Khi đó, nhóm G không đẳng hướng trên k nếu và chỉ nếu F không biểu diễn 0 trên k, tức là V_k không có véctơ đẳng hướng khác 0. Thật vậy, nếu v là một véctơ đẳng hướng khác 0, thì tồn tại một mặt phẳng hyperbolic chứa v và có thể chọn được cơ sở của V sao cho dạng toàn phương có dạng

$$F(x_1, \ldots, x_n) = x_1x_2 + F'(x_3, \ldots, x_n).$$

Với $\lambda \in (\bar{k})^*$, ta xét phép biến đổi

$$x_1' = \lambda x_1,\ x_2' = \lambda^{-1}x_2,\ x_i' = x_i\ (i \geq 3).$$

Tập các phép biến đổi đó lập thành một xuyến của G phân rã trên k. Ngược lại, nếu có xuyến S của G xác định và phân rã trên k, thì S chéo hóa được trên k, nên tồn tại véctơ $v \in V_k - \{0\}$ và một đặc trưng không tầm thường $\chi \in X(S)$, sao cho $s(v) = \chi(s)v$ với mọi $s \in S$. Khi đó tồn tại s để $\chi(s) \neq \pm 1$, mà $F(v) = F(s(v))$, ta có $F(v) = 0$ và v là đẳng hướng.

Định nghĩa 1.5.22 Cho G là một nhóm liên thông reductive xác định trên k.

(*i*) Ta có các xuyến cực đại k-phân rã của G đều cùng số chiều, nó được gọi là *k-hạng* (hay còn gọi là *hạng tương đối*) của G và ký hiệu là $\mathrm{rk}_k(G)$.

(*ii*) Với S là một xuyến cực đại k-phân rã của G, mỗi phần tử của $\Phi(G, S)$ được gọi là *k-nghiệm*, hoặc là *nghiệm trên k*. Ta ký hiệu $\Phi(G, S)$ là ${}_k\Phi$ hoặc ${}_k\Phi(G)$.

(*iii*) Ký hiệu Z_a là xuyến không đẳng hướng cực đại trong tâm của $Z_G(S)$. Tích $Z_a.\mathscr{D}Z_G(S)$ được gọi là *nhân không đẳng hướng* của G.

Cho G là một nhóm liên thông reductive xác định trên k, ${}_k\Phi$ là một hệ nghiệm trên k của G xác định bởi xuyến S. Ta giả sử P là một k-nhóm con parabolic cực tiểu và đặt $U = R_u(P)$, ${}_k\Phi^+$ là tập các k-nghiệm dương tương ứng với P, ${}_k\Delta$ là tập các k-nghiệm đơn và là một cơ sở của ${}_k\Phi^+$. Nếu Θ là một tập con của ${}_k\Delta$, ký hiệu S_Θ là thành phần liên thông của $\bigcap_{\alpha\in\Theta} \operatorname{Ker}\alpha$. Ta nhắc lại kết quả sau.

Định lý 1.5.23 (Xem [4, 6.5]) (*i*) *Với ký hiệu trên, S_Θ là một xuyến k-phân rã, có số chiều là $\mathrm{rk}_k(G) - \mathrm{Card}(\Theta)$. Ký hiệu P_Θ cho k-nhóm con của G sinh bởi $Z_G(S_\Theta)$ và U (P_Θ còn gọi là k-nhóm con parabolic chuẩn xác định bởi Θ). Nhóm con này được viết thành tích nửa trực tiếp $Z_G(S_\Theta) \cdot U_\Theta$, với $U_\Theta = R_u(P_\Theta)$.*

(*ii*) *Mỗi k-nhóm con parabolic của G đều liên hợp trên k với một và chỉ một k-nhóm con parabolic chuẩn. Đặc biệt, nếu hai k-nhóm con parabolic liên hợp trên $\bar{k}$, chúng cũng liên hợp trên k.*

Chú ý rằng nếu $\Theta = \emptyset$ ta nhận được nhóm con $P_\emptyset$ là nhóm con parabolic cực tiểu; khi $\Theta = {}_k\Delta$ ta nhận được $P_\Theta = G$. Nếu P là k-nhóm con parabolic của G thì ta có phân tích $P = Z_G(S).R_u(P)$, với S là một k-xuyến con phân rã nào đó của G (xem [3, 20.9; 20.4]) và $R_u(P)$ là k-nhóm con lũy đơn của G phân rã trên k (xem [50]).

Định nghĩa 1.5.24 (i) Một k-nhóm đại số tuyến tính liên thông G được gọi là *phân rã trên k* (hay *k-phân rã*), nếu căn lũy đơn $R_u(G)$ xác định và phân rã trên k và nhóm reductive $G/R_u(G)$ xác định và phân rã trên k.
(ii) Một k-nhóm đại số tuyến tính G được gọi là *tựa phân rã trên k* (*k-quasi-split*) nếu $R_u(G)$ xác định trên k và $G/R_u(G)$ có một nhóm con Borel xác định trên k.

5. Hạn chế vô hướng của Weil (xem [31, Ch.2]).

Định nghĩa 1.5.25 Cho k là một trường, L/k là một mở rộng hữu hạn tách được của k, G là một nhóm đại số xác định trên L. Một k-nhóm đại số G' được xác định bởi $G'(A) = G(L \otimes_k A)$ với mỗi k-đại số A, được gọi là *hạn chế vô hướng* (*hạn chế Weil*) *của* G từ L tới k và ta ký hiệu $G' = R_{L/k}(G)$.

Trong trường hợp $G = \mathbf{G}_{m,L}$, ánh xạ chuẩn $\mathrm{N} : L^* \to k^*$ xác định một cấu xạ nhóm đại số $\varphi : R_{L/k}(G) \to \mathbf{G}_{m,k}$. Hạt nhân $\mathrm{Ker}(\varphi)$ được ký hiệu là $R^{(1)}_{L/k}(\mathbf{G}_m)$.

Định nghĩa 1.5.26 Một k-xuyến T được gọi là một *k-xuyến cảm sinh* nếu nó đẳng cấu trên k với một tích trực tiếp các nhóm dạng $R_{L/k}(\mathbf{G}_m)$ với L là mở rộng tách được hữu hạn của k.

1.6 Phân loại nhóm đơn

Sau đây chúng tôi sẽ nhắc lại một cách vắn tắt một số khái niệm về lý thuyết chỉ dẫn của Tits (Tits index) và một số khái niệm liên quan, các kiến thức được trích từ các tài liệu [45]; [40, Ch. 15-17].

Định nghĩa 1.6.1 Cho k là một trường, G là một nhóm reductive liên thông xác định trên k. Ta gọi G là *k-hầu đơn* nếu mọi k-nhóm con đóng chuẩn tắc thực sự của G là hữu hạn (do đó nằm trong tâm). G được gọi là *hầu đơn tuyệt đối* nếu G là $\bar{k}$-hầu đơn.

Người ta biết rằng, mỗi nhóm đại số nửa đơn xác định trên một trường k là tích hầu trực tiếp các k-nhóm đại số k-hầu đơn, và mỗi k-nhóm đại số k-hầu đơn là hạn chế Weil của một nhóm đại số hầu đơn tuyệt đối. Sau này ta sẽ nói nhóm đại số hầu đơn tuyệt đối một cách ngắn gọn là *nhóm hầu đơn*.
Mỗi nhóm hầu đơn tuyệt đối sẽ có một sơ đồ Dynkin liên thông, và một sơ đồ Dynkin là liên thông khi và chỉ khi nó có một trong các dạng $\mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n, \mathrm{C}_n, \mathrm{D}_n, \mathrm{E}_6, \mathrm{E}_7, \mathrm{E}_8, \mathrm{F}_4, \mathrm{G}_2$.

Cho G là một nhóm hầu đơn tuyệt đối xác định trên k. Cho T là một k-xuyến cực đại của G. Giả sử T chứa một k-xuyến k-phân rã cực đại S của G. Ký hiệu $\Phi = \Phi(T, G)$ là hệ nghiệm của G đối với T, Δ là một cơ sở các nghiệm đơn của Φ và Δ_0 là hệ con gồm các nghiệm đơn triệt tiêu trên S. Ký hiệu $\Gamma = \mathrm{Gal}(k_s/k)$ là nhóm Galois tuyệt đối. Với mỗi $\gamma \in \Gamma$, $\gamma(\Delta)$ là một cơ sở khác của Φ, do đó có duy nhất một phần tử $w_\gamma \in W(\Phi)$ (nhóm Weyl của Φ) sao cho $w_\gamma \circ \gamma(\Delta) = \Delta$. Như vậy ta nhận được một tác động gọi là *tác động* * (*-action) của Γ lên Δ. Khi tác động * của Γ lên Δ là tầm thường, G được gọi là *kiểu trong* (*inner type*) và khi tác động là không tầm thường, G được gọi là *kiểu ngoài* (*outer type*).

Định nghĩa 1.6.2 Ta sẽ gọi *k-chỉ dẫn Tits* của nhóm G là sơ đồ bao gồm: Tập Δ với sơ đồ Dynkin của G, tập Δ_0 và tác động * của Γ trên Δ. Tập $\Delta \setminus \Delta_0$ được phân hoạch thành các Γ-quỹ đạo rời nhau, ký hiệu là $\Omega_i, i = 1, \ldots, r$. Trên sơ đồ Dynkin của Δ, người ta khoanh tròn các Γ-quỹ đạo $\Omega_i, i = 1, \ldots, r$ tạo thành các *khuyên*. Tập Δ với tác động * của Γ và cách thể hiện các Γ-quỹ đạo trên $\Delta \setminus \Delta_0$ bởi các khuyên lập thành *chỉ dẫn Tits của G trên k* và ký hiệu là $\Delta(G, k)$.

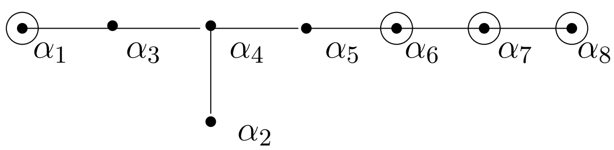
Cũng chú ý thêm rằng, tập Δ_0 chính là hệ nghiệm đơn của $\mathscr{D}Z_G(S)$ (với xuyến cực đại $T \cap \mathscr{D}Z_G(S)$). Đồng thời, $\mathscr{D}Z_G(S)$ được gọi là *nhân không đẳng hướng nửa đơn* của G và sơ đồ Dynkin của nó có được từ chỉ dẫn Tits của G sau khi bỏ đi mọi đỉnh được khuyên. Đồng thời ta còn có kết quả, nhóm hầu đơn tuyệt đối G là tựa phân rã trên k nếu và chỉ nếu trên k-chỉ dẫn Tits của G, tập $\Delta_0 = \emptyset$, và G là phân rã trên k nếu và chỉ nếu $\Delta_0 = \emptyset$ và mỗi đỉnh đều là một khuyên (xem [45, 2.3]).

Chú ý 1.6.3 Sau đây ta sẽ dùng ký hiệu ${}^{g}X^{t}_{n,r}$ để biểu thị một k-chỉ dẫn Tits của G như sau.
(1) X là một trong các chữ cái A, B, C, D, E, F, G.
(2) Số n (tương ứng r) là hạng (tương ứng hạng tương đối) của nhóm G; nói cách khác chúng bằng số tất cả các đỉnh (tương ứng số tất cả các khuyên) trên sơ đồ Dynkin của G.
(3) Ký hiệu Γ_X là nhóm con tất cả các phần tử của Γ tác động (tác động *) tầm thường lên sơ đồ Dynkin. Khi đó Γ_X là nhóm con chuẩn tắc của Γ có chỉ số g hữu hạn, g chính bằng cấp của ảnh của Γ trong nhóm các tự đẳng cấu của sơ đồ Dynkin. Chú ý rằng $g = 1$ trong trường hợp sơ đồ chỉ có tự đẳng cấu tầm thường và ta sẽ không viết g trong trường hợp này.
(4) t là số nguyên dương được xác định như sau:

- Nếu X là một trong các chữ cái A, B, C, D (nhóm tương ứng là dạng kinh điển) thì t là bậc của một đại số chia nào đó (lúc đó sẽ được ký hiệu là (d)) xuất hiện trong định nghĩa của dạng toàn phương, hecmit, phản hecmit tương ứng;

- Nếu X là một trong các chữ cái E, F, G thì t là số chiều của nhân không đẳng hướng của nhóm đã cho.

Ví dụ. Trên $\mathbb{R}$ ta có nhóm đại số G với chỉ dẫn Tits (dạng $\mathrm{E}^{28}_{8,4}$) như sau.



Trong sơ đồ trên, $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_8\}$, $\Delta_0 = \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$. Tác động * của Γ giữ nguyên các phần tử $\alpha_1, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8$. Nhân không đẳng hướng của G trong trường hợp này là nhóm hầu đơn dạng D_4 với hệ nghiệm là $\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$.

Định nghĩa 1.6.4 Mỗi dạng toàn phương, hecmit hoặc phản hecmit h sẽ xác định một nhóm đại số dạng kinh điển. Ta nói h là *dạng kiểu* A (tương ứng B, C, D) nếu nhóm đại số các phép biến đổi tuyến tính với định thức bằng 1 bảo toàn h có sơ đồ Dynkin dạng A (tương ứng $\mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$)

Ví dụ. Cho h là một dạng toàn phương với $2n$ biến, $n \geq 4$. Nhóm đại số các phép biến đổi tuyến tính bảo toàn h với định thức bằng 1 là nhóm $\mathrm{SO}_{2n}(h)$, nó là nhóm đại số dạng D_n. Khi đó h là dạng kiểu D_n.

Ví dụ. Cho D là một thể quaternion trên một trường k, J là phép đối hợp chuẩn tắc của D, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ là các phần tử khác 0 của trường k. Dạng hecmit $h = \lambda_1 x_1 x_1^J + \cdots + \lambda_n x_n x_n^J$ có nhóm các phép biến đổi tuyến tính bảo toàn h là nhóm $\mathrm{U}_n(h)$, nó là nhóm đại số dạng C_n. Như vậy h là dạng kiểu C_n.

1.7 Đối đồng điều Galoa và đối đồng điều phẳng

Chúng tôi muốn trình bày tóm tắt một số khái niệm về đối đồng điều Galoa của một nhóm (không giao hoán) và đối đồng điều phẳng. Các kiến thức được trình bày ở đây được tham khảo từ tài liệu [37], [38] và [31].

Đối đồng điều Galoa. Cho Γ là nhóm hầu hữu hạn (tức là một nhóm tôpô mà là giới hạn xạ ảnh của các nhóm hữu hạn với tô pô rời rạc). Chẳng hạn, chúng ta thường xuyên xét trường hợp Γ là nhóm Galoa $\mathrm{Gal}(E/k)$ của một mở rộng Galoa E/k.

Định nghĩa 1.7.1 1) Một Γ-*tập* E là một không gian tôpô rời rạc E mà trên đó Γ tác động một cách liên tục. Cho E, E' là hai Γ-tập. Ánh xạ $f : E \to E'$ được gọi là một Γ-*cấu xạ* nếu f tương thích với tác động của Γ lên E và E' (tức là $f({}^s x) = {}^s(f(x))$), với mọi $x \in E$, và với mọi $s \in \Gamma$.

Một Γ-*nhóm* A là một nhóm và là Γ-tập với cấu trúc nhóm tương thích với tác động của Γ, tức là, ${}^s(xy) = {}^s x\, {}^s y$ với mọi $x, y \in A$ và mọi $s \in \Gamma$.

Với E là một Γ-tập, ta đặt $\mathrm{H}^0(\Gamma, E) = E^\Gamma = \{x \in E |\ {}^s x = x, \forall s \in G\}$. Khi E là một Γ-nhóm thì $\mathrm{H}^0(\Gamma, E)$ cũng là một Γ-nhóm

Với A là một Γ-nhóm, ta gọi một 1-*đối xích* với giá trị trong A là một ánh xạ liên tục $s \mapsto a_s$ từ Γ vào A thỏa mãn điều kiện

$$a_{st} = a_s\, {}^s a_t \ \forall s, t \in \Gamma.$$

Kí hiệu $Z^1(\Gamma, A)$ là tập các 1-đối xích. Hai 1-đối xích a, a' được gọi là *đối đồng điều với nhau* nếu tồn tại $b \in A$ sao cho $a'_s = b^{-1} a_s\, {}^s b$ với mọi $s \in \Gamma$. Đây là một quan hệ tương đương trong $Z^1(\Gamma, A)$. Tập thương theo quan hệ tương đương này được kí hiệu là $\mathrm{H}^1(\Gamma, A)$ và được gọi là *tập đối đồng điều Galoa bậc 1 của* Γ *trong* A. Tập này có một phần tử *được đánh dấu* (còn gọi là *phần tử không*) chính là lớp tương đương của 1-đối xích đơn vị $s \mapsto 1$.

Chú ý rằng, các tập đối đồng điều $\mathrm{H}^0(\Gamma, A), \mathrm{H}^1(\Gamma, A)$ có tính hàm tử theo A. Khi Γ-nhóm A là giao hoán, ta có thể định nghĩa nhóm đối đồng điều $H^i(\Gamma, A)$, với mọi $i \geq 0$, nhờ vào đối chu trình như sau.

Cho A là một Γ-mođun. Ta ký hiệu $C^n(\Gamma, A)$ là tập các ánh xạ liên tục từ Γ^n vào A và đặt

$$d : C^n(\Gamma, A) \to C^{n+1}(\Gamma, A),$$

xác định bởi công thức:

$$d_f(s_1, \dots, s_{n+1}) =$$

$$s_1 f(s_2, \dots, s_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(s_1, \dots, s_i s_{i+1}, \dots, s_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(s_1, \dots, s_n).$$

Khi đó ta nhận được phức

$$0 \to C^0(\Gamma, A) \to C^1(\Gamma, A) \to C^2(\Gamma, A) \cdots, \text{ (quy ước } C^0(\Gamma, A) = A^\Gamma).$$

Các nhóm đối đồng điều của phức trên, ký hiệu $\mathrm{H}^i(\Gamma, A)$, được gọi là *nhóm đối đồng điều của* Γ *với hệ tử trong* A.

Tiếp theo ta ký hiệu G là một nhóm đại số tuyến tính xác định trên một trường k.

Định nghĩa 1.7.2 Giả sử L/k là một mở rộng Galoa (có thể vô hạn) của k. Khi đó có một tác động tự nhiên, liên tục của $\mathrm{Gal}(L/k)$ lên nhóm các L-điểm hữu tỉ $G(L)$. Khi đó ta có thể định nghĩa $\mathrm{H}^q(\mathrm{Gal}(L/k), G(L))$ (luôn xét $q = 0, 1$ nếu G không giao hoán). Ta ký hiệu $H^q(k, G) = H^q(\mathrm{Gal}(k_s/k), G(k_s))$.

Định nghĩa 1.7.3 (1) Một *G-đa tạp*, hay một *G-không gian* là một đa tạp X trên đó có tác động của G sao cho tác động này là một cấu xạ đa tạp. Ngoài ra, nếu G là một k-nhóm, X là một k-đa tạp thì X được gọi là *G-không gian trên k* nếu như cấu xạ tác động được xác định trên k.
(2) Một *không gian thuần nhất chính* của G trên k là một không gian thuần nhất X của G trên k sao cho tác động cấu xạ của G trên X là tác động truyền dẫn đơn.

Một ví dụ $X = G$ trong đó G tác động lên chính nó bởi dịch chuyển trái là một không gian thuần nhất chính. Ta cũng biết rằng (xem [40, 12.3.1]) một G-không gian thuần nhất chính X trên k là đẳng cấu với G trên k nếu và chỉ nếu $X(k) \neq \emptyset$. Ta ký hiệu Σ là tập tất cả các lớp k-đẳng cấu của các không gian thuần nhất chính của G trên k. Khi đó ta có một song ánh từ tập Σ lên tập $\mathrm{H}^1(k, G)$ sao cho lớp của G ứng với phần tử được đánh dấu của $\mathrm{H}^1(k, G)$ ([40, Prop. 12.3.2]).

Bây giờ, giả sử $\phi : H \to G$ là một đồng cấu các k-nhóm. Khi đó theo định nghĩa ta có ánh xạ cảm sinh $\phi^i : \mathrm{H}^i(k, H) \to \mathrm{H}^i(k, G)$ đưa phần tử không thành phần tử không. Như cách xây dựng trong [37, Prop. 36, Prop. 38], với một dãy khớp ngắn các k-nhóm đại số tuyến tính

$$1 \to G' \to G \to G" \to 1,$$

ta có dãy khớp dài đối đồng điều Galoa liên kết với dãy khớp ngắn đó như sau:

$$1 \to G'(k) \to G(k) \to G"(k) \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^1(k, G') \to \mathrm{H}^1(k, G) \to \mathrm{H}^1(k, G").$$

Nếu ngoài ra $G' \subseteq Z(G)$ thì ta có dãy khớp dài

$$1 \to G'(k) \to G(k) \to G"(k) \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^1(k, G') \to \mathrm{H}^1(k, G) \to \mathrm{H}^1(k, G") \xrightarrow{\Delta} \mathrm{H}^2(k, G').$$

Đối đồng điều phẳng. Trước hết ta nhắc lại khái niệm lược đồ nhóm afin (Xem [49]). Cho k là một trường, một *lược đồ nhóm affine đại số trên k* là một hàm tử biểu diễn được G từ phạm trù các k-đại số giao hoán sang phạm trù các nhóm, tức là tồn tại một k-đại số giao hoán A hữu hạn sinh, và $G(R) = \mathrm{Hom}_k(A, R)$, một cách hàm tử theo k-đại số giao hoán R. Theo Bổ đề Yoneda, nếu G biểu diễn bởi A thì A là duy nhất sai khác đẳng cấu, được ký hiệu là $k[G]$ gọi là *vành tọa độ* của G. Một đồng cấu giữa các lược đồ k-nhóm afin là một phép biến đổi tự nhiên giữa các hàm tử $G \to H$ sao cho với mọi k-đại số R, ta có $G(R) \to H(R)$ là đồng cấu nhóm.

Tiếp theo, giả sử A là một k-đại số hữu hạn chiều và B là một A-đại số đồng thời cũng là một đại số hữu hạn chiều trên k. Cho G là một tiền bó trên k. Ta xét A-đại số

$$B \otimes_A \ldots \otimes_A B = \otimes_A^r B, \qquad r = 1, 2, \cdots$$

Với mỗi $r \geq 1$, ta có $r+1$ đồng cấu A-đại số từ $\otimes_A^r B$ đến $\otimes_A^{r+1} B$, được cho bởi

$$\begin{aligned}
&\delta_0 : b_0 \otimes \ldots \otimes b_{r-1} \to 1 \otimes b_0 \otimes \ldots \otimes b_{r-1}\\
&\delta_j : b_0 \otimes \ldots \otimes b_{r-1} \to b_0 \otimes \ldots \otimes b_{j-1} \otimes 1 \otimes b_j \otimes \ldots \otimes b_{r-1},\\
&\qquad\qquad \text{với } 1 \leq j \leq r-1,\\
&\delta_r : b_0 \otimes \ldots \otimes b_{r-1} \to b_0 \otimes \ldots \otimes b_{r-1} \otimes 1.
\end{aligned}$$

Do đó ta có các ánh xạ cảm sinh

$$G(\delta_i) : G(\otimes_A^r B) \to G(\otimes_A^{r+1} B), \text{ với } i = 0, 1, \cdots, r.$$

Bằng cách đặt $\delta^{r-1}(G) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i G(\delta_i)$ và đặt $C^r(B/A, G) = G(\otimes_A^{r+1} B)$, ta thu được dãy

$$0 \to C^0(B/A, G) \xrightarrow{\delta^0(G)} C^1(B/A, G) \to \ldots$$

là một phức. Các nhóm đối đồng điều của phức này, kí hiệu là $\mathrm{H}^r(B/A, G)$, được gọi là các nhóm *đối đồng điều phẳng* (hay còn gọi là nhóm *đối đồng điều Cech*) của G

đối với B/A. Chú ý rằng nếu G là một bó và B là một A-đại số phẳng trung thành thì $\mathrm{H}^0(B/A, G) = G(A)$.

Trong Luận án, ta chỉ xét trường hợp $A = k$, $B = K$, trong đó K là một mở rộng hữu hạn của k và G là một k-lược đồ nhóm đại số afin. Ta cố định một mở rộng đại số E của k. Với r cho trước, họ các nhóm $G(\otimes_k^r K)$ (được xác định bằng cách cho K chạy trên họ các mở rộng trường hữu hạn được chứa trong E) là một hệ thuận. Giới hạn thuận của nó được xác định chính là $G(\otimes_k^r E)$. Với các định nghĩa như trên ta có thể thành lập phức

$$0 \to C^0(E/k, G) \xrightarrow{\delta^0(G)} C^1(E/k, G) \to \dots$$

và lấy các nhóm đối đồng điều của nó. Chúng được kí hiệu là $\mathrm{H}^r(E/k, G)$, và được gọi là các *nhóm đối đồng điều phẳng bậc r* của G theo E/k. Nếu $K \subseteq L$, các ánh xạ $C^r(K/k, G) \to C^r(L/k, G)$ cảm sinh các ánh xạ $\mathrm{H}^r(K/k, G) \to \mathrm{H}^r(L/k, G)$. Khi $E = \overline{k}$, ta gọi là *nhóm đối đồng điều phẳng bậc r* của G và được ký hiệu là $\mathrm{H}^r_{flat}(k, G)$.

Nếu G là một k-lược đồ nhóm afin trơn ($k[G] \otimes \bar{k}$ là thu gọn, cũng có nghĩa G là k-nhóm đại số), ta có thể định nghĩa và sử dụng khái niệm đối đồng điều Galoa. Tuy nhiên, khi G là không trơn ta phải sử dụng khái niệm đối đồng điều phẳng. Ta có mối quan hệ giữa đối đồng điều Galoa và đối đồng điều phẳng qua kết quả đã biết sau.

Mệnh đề 1.7.4 (Xem [38, Prop. 5; Thm. 1]) *1) Cho G là k-lược đồ nhóm đại số afin, K/k là một mở rộng Galoa. Khi đó*

$$\mathrm{H}^r(K/k, G) \simeq \mathrm{H}^r(\mathrm{Gal}(K/k), G(K)), \ \text{với } r \geq 0.$$

2) Cho G là một k-lược đồ nhóm afin trơn. Khi đó

$$\mathrm{H}^r_{flat}(k, G) \simeq \mathrm{H}^r(k, G), \ \text{với } r \geq 0.$$

Ngoài ra, theo [49, 18.1] ta cũng có: với một dãy khớp ngắn các k-lược đồ nhóm afin

$$1 \to G' \to G \to G" \to 1,$$

ta có dãy khớp dài đối đồng điều phẳng liên kết như sau:

$$1 \to G'(k) \to G(k) \to G"(k) \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^1_{flat}(k, G') \to \mathrm{H}^1_{flat}(k, G) \to \mathrm{H}^1_{flat}(k, G").$$

Nếu $G' \subseteq Z(G)$ thì ta có dãy khớp dài

$$\begin{aligned} 1 \to G'(k) \to G(k) \to G"(k) \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^1_{flat}(k, G') \to \mathrm{H}^1_{flat}(k, G) \\ \to \mathrm{H}^1_{flat}(k, G") \xrightarrow{\Delta} \mathrm{H}^2_{flat}(k, G'). \end{aligned}$$

Định nghĩa 1.7.5 Cho k là một trường toàn cục, G là một nhóm đại số tuyến tính xác định trên k.

(i) Với mỗi chốn v của k, ta có ánh xạ tự nhiên

$$r_v : \mathrm{H}^n(k, G) \longrightarrow \mathrm{H}^n(k_v, G),$$

từ đó ta có ánh xạ tích

$$r_n : \mathrm{H}^n(k, G) \longrightarrow \prod_v \mathrm{H}^n(k_v, G)$$

được gọi là ánh xạ địa phương hóa của G.

(ii) Ta gọi hạt nhân của r_n là *hạt nhân Shafarevich-Tate* của G và ký hiệu là $Ш^n(G)$.

(iii) Nếu $Ш^n(G) = 0$, thì ta nói G thỏa mãn nguyên lý Hasse cho đối đồng điều bậc n.

Mệnh đề 1.7.6 *Cho k là một trường, ta có các khẳng định sau đây.*

(i) (Định lý Hilbert 90 [31, Lem. 2.2]) *Nếu T là một k-xuyến phân rã trên k thì* $\mathrm{H}^1(k, T) = 0$;

(ii) ([31, Lem. 2.7])) *Nếu U là k-một nhóm lũy đơn phân rã trên k thì* $\mathrm{H}^1(k, U) = 0$.

(iii) ([30, Thm. 14.2]) $\mathrm{H}^2(k, \mathbf{G}_m) \cong \mathrm{Br}(k)$.

Bổ đề 1.7.7 (Bổ đề Shapiro [31, Prop. 1.7]). *Cho k là một trường, L/k là một mở rộng tách được hữu hạn và G là nhóm đại số tuyến tính xác định trên L. Khi đó ta có đẳng cấu*

$$\mathrm{H}^n(k, R_{L/k}(G)) \cong \mathrm{H}^n(L, G).$$

Chương 2

Một số tính chất phân rã và nguyên lý địa phương-toàn cục

Trong chương này chúng tôi trình bày những nghiên cứu về nguyên lý địa phương-toàn cục cho tính chất phân rã của nhóm đại số tuyến tính liên thông trên trường toàn cục. Nghiên cứu được bắt đầu từ những trường hợp đặc biệt là: nhóm tuyến tính liên thông giải được (xuyến đại số, nhóm lũy đơn); nhóm reductive liên thông; tổng quát đến tính chất phân rã của nhóm đại số tuyến tính liên thông và mở rộng hơn đến tính chất tựa phân rã.

Trong cả chương này chúng ta luôn ký hiệu k là một trường toàn cục, $V = V_k$ là tập các chốn của k. Các nhóm đại số ta nhắc đến trong chương này đều là các nhóm đại số tuyến tính.

2.1 Nguyên lý địa phương-toàn cục cho tính chất phân rã của nhóm giải được

Lớp nhóm đầu tiên ta xét là nhóm giải được. Theo B. Conrad (trong [10]), với một k-nhóm liên thông giải được G, tồn tại duy nhất một nhóm con chuẩn tắc liên thông cực đại phân rã trên k. Nếu ký hiệu nhóm này là G_{split} thì G là phân rã trên k nếu và chỉ nếu $G = G_{split}$. Chúng tôi có kết quả sau.

Định lý 2.1.1 *Cho k là một trường toàn cục và G là một k-nhóm liên thông giải được. Khi đó G là phân rã trên k nếu và chỉ nếu G phân rã trên k_v với mọi $v \in V$.*

Để chứng minh Định lý 2.1.1, ta cần hai kết quả sau:

Bổ đề 2.1.2 ([10, Thm. 5.4]) *Cho k là một trường bất kỳ, G là một k-nhóm đại số liên thông giải được. Khi đó G/G_{split} là một mở rộng tâm của một nhóm lũy đơn*

k-xoắn U bởi một xuyến T không đẳng hướng trên k.

Bổ đề 2.1.3 ([10, Thm. 5.7]) *Cho k là một trường bất kỳ. Giả sử U là một nhóm lũy đơn k-phân rã, T là một k-nhóm đại số chéo hóa được. Khi đó mỗi dãy khớp*

$$1 \to T \to H \to U \to 1$$

đều là chẻ ra, tức là ta có $H = T \times U$.

Chứng minh Định lý 2.1.1. Trước tiên ta có nhận xét rằng nếu G_1 là một k-nhóm con chuẩn tắc của nhóm G (liên thông giải được) thì G là k-phân rã nếu và chỉ nếu G_1 và G/G_1 là k-phân rã.

Theo giả thiết, G là k_v-phân rã với mọi v, tức là $H = G/G_{split}$ là phân rã trên k_v với mọi v. Áp dụng Bổ đề 2.1.2, H là một mở rộng tâm của một k-nhóm lũy đơn k-xoắn U bởi một k-xuyến T không đẳng hướng trên k. Theo giả thiết, T và U phân rã trên k_v với mọi $v \in V$. Vì thế, áp dụng Bổ đề 2.1.3 ta có $H = T \times U$ là một tích trực tiếp của xuyến cực đại và căn lũy đơn, các nhóm đều xác định trên trường toàn cục k. Để chứng minh G phân rã trên k, theo nhận xét trên, ta chỉ cần chứng minh $H(= G/G_{split})$ phân rã trên k, tức là ta cần chứng minh T, U phân rã trên k (khi đó ta cũng suy ra $T = U = H = 1$). Vậy ta đưa về việc xét hai trường hợp: xuyến và nhóm lũy đơn.

Trường hợp 1: Xuyến.

Cho T là một k-xuyến. Khi đó ta biết rằng $T = T_a.T_s$ (Mệnh đề 1.5.11) trong đó T_a là xuyến con không đẳng hướng trên k và T_s là xuyến con phân rã trên k. Vì thế, với mỗi v, T là phân rã trên k_v tương đương T_a phân rã trên k_v. Không giảm tổng quát, ta có thể giả sử rằng $T = T_a$ là không đẳng hướng trên k. Giả sử $\dim(T) > 0$.

Cho L/k là mở rộng Galoa tối tiểu trong đó T phân rã trên L, và cho Γ là nhóm Galoa của mở rộng. Tại mỗi chốn v của k, cho w là một mở rộng của v lên L, L_w là bao đầy đủ của L tại w. Gọi Γ_v là nhóm phân rã của v, khi đó $\Gamma_v = \mathrm{Gal}(L_w/k_v) \subset \Gamma$. Ta sẽ sử dụng Định lý về độ trù mật của Chebotarev:

Định lý 2.1.4 (Chebotarev, xem [22, Ch. V]) *Với mỗi phần tử tùy ý $s \in \Gamma$, luôn tồn tại vô hạn các chốn v sao cho s liên hợp với một phần tử $s_v \in \Gamma_v$.*

Vì T là một xuyến không đẳng hướng trên k, nên với mỗi đặc trưng không tầm thường $\chi \in X(T)$ ($\chi \neq 1$) tồn tại $s \in \Gamma$ sao cho ${}^s\chi \neq \chi$. Ta lấy v như trong Định lý 2.1.4, khi đó tồn tại $s_v \in \Gamma_v, t \in \Gamma$ sao cho $s = t^{-1}s_v t$. Ta có $s_v \neq 1$, và ${}^s\chi \neq \chi$ nên nếu đặt $\chi_1 = {}^t\chi \in X(T)$ thì ${}^{s_v}(\chi_1) \neq \chi_1$, suy ra χ_1 không xác định trên k_v, tức là,

T không là k_v-phân rã, điều này là mâu thuẫn với giả thiết rằng $\dim(T) > 0$ và T là k_v-phân rã. Do đó $\dim(T) = 0$, tức là $T = (1)$ và ta có điều cần chứng minh.

Trường hợp 2: Nhóm lũy đơn.

Cho U là một k-nhóm lũy đơn liên thông. Nếu k là một trường có đặc số 0, thì ta đã biết rằng U là k-phân rã (Định lý 1.5.13), như vậy ta có thể giả sử rằng k là một trường hàm toàn cục. Theo lý thuyết của Tits, ta có kết quả sau.

Mệnh đề 2.1.5 ([10, Thm. 3.7]) *Tồn tại một nhóm con k-phân rã chuẩn tắc liên thông lớn nhất của U, ký hiệu là U_d, sao cho $U_w = U/U_d$ không có nhóm con k-phân rã không tầm thường, tức là U_w là nhóm k-xoắn.*

Mặt khác theo J. Oesterlé ta có mệnh đề sau.

Mệnh đề 2.1.6 (Xem [51, Ch. V]) *Nếu H là nhóm k-xoắn thì $H(k_v)$ là compact và H cũng là k_v-xoắn với mọi $v \in V$.*

Áp dụng và ký hiệu như Mệnh đề 2.1.5, ta có nếu $U_w \neq (1)$ thì do U_w là k-xoắn nên theo Mệnh đề 2.1.6, U_w cũng là k_v-xoắn với mọi v. Điều này mâu thuẫn với giả thiết U phân rã trên k_v với mọi v. Vậy $U_w = (1)$, và ta có điều phải chứng minh.

□

2.2 Nguyên lý địa phương-toàn cục cho tính chất phân rã của nhóm reductive

Chúng tôi có nguyên lý địa phương-toàn cục sau đây cho tính phân rã của nhóm liên thông reductive.

Định lý 2.2.1 *Cho k là trường toàn cục và G là k-nhóm reductive liên thông. Khi đó G là phân rã trên k nếu và chỉ nếu G cũng phân rã trên k_v, với mọi $v \in V$.*

Chúng tôi đưa ra hai cách chứng minh cho Định lý này. Chứng minh thứ nhất được trình bày dưới đây bằng cách sử dụng các tính chất về số học và đối đồng điều của trường toàn cục, sự phân loại nhóm đại số nửa đơn của Tits (trong [45]). Chứng minh thứ hai sử dụng kết quả của Prasad - Rapinchuk ([32]) và N.Q.Thắng ([44]) và áp dụng nguyên lý địa phương-toàn cục cho không gian thuần nhất sẽ được trình bày trong Mục 3.3 của Chương 3.

Ta cần sử dụng kết quả sau của Harder:

Định lý 2.2.2 ([54, Korollar 1]) *Nếu G là nhóm hầu đơn tuyệt đối có kiểu khác* A*, xác định trên trường hàm toàn cục k, thì G là đẳng hướng trên k (tức là G có xuyến con chiều ≥ 1 xác định và phân rã trên k).*

Chứng minh thứ nhất của Định lý 2.2.1. Lấy G là một nhóm liên thông reductive xác định trên trường k. Theo Định lý 1.5.18 ta có $G = T.H$ là một tích hầu trực tiếp, trong đó T là xuyến (tâm liên thông) của G và $H = (G, G)$ là nửa đơn. Vì vậy G là phân rã trên một trường K (với $K \supseteq k$) nếu và chỉ nếu T và H là phân rã trên K. Như vậy chứng minh lại được đưa về trường hợp xuyến, mà nó đã được chứng minh ở trên (Mục 2.1), và trường hợp nhóm nửa đơn.

Bây giờ ta giả sử rằng G là k-nhóm đại số nửa đơn. Cho $\tilde{G}$ là phủ đơn liên của G. Khi đó $\tilde{G}$ là một k-nhóm, G là k-phân rã nếu và chỉ nếu $\tilde{G}$ cũng là k-phân rã, nên ta có thể giả sử rằng $G = \tilde{G}$ là k-nhóm đơn liên nửa đơn. Khi đó, $\tilde{G}$ có phân tích duy nhất thành một tích trực tiếp

$$\tilde{G} = \tilde{G}_1 \times \ldots \times \tilde{G}_n$$

với các $\tilde{G}_i$ là các k-nhóm k-hầu đơn. Ta biết rằng có các mở rộng hữu hạn tách được L_i/k sao cho $\tilde{G}_i = R_{L_i/k}(\tilde{Q}_i)$, với mỗi $\tilde{Q}_i$ là các L_i-nhóm hầu đơn tuyệt đối (xem [45, 3.1.2]). Do đó bài toán được đưa về trường hợp nhóm hầu đơn tuyệt đối xác định trên k.

Như vậy, ta giả sử rằng G là nhóm hầu đơn tuyệt đối xác định trên trường toàn cục k và ta sẽ dùng sơ đồ Dynkin của G theo ký hiệu và phân loại của Tits [45]. Các khái niệm về chỉ dẫn Tits và các ký hiệu khác có liên quan của các dạng nhóm sẽ được dùng dưới đây, được sử dụng theo các tài liệu [45], [40, Ch. 15-17]. Nhắc lại rằng $\Delta(G, k)$ là chỉ dẫn Tits của G trên k: Nhóm Γ tác động lên hệ nghiệm đơn Δ bởi tác động *, các *-quỹ đạo trên $\Delta \setminus \Delta_0$ được ký hiệu $\Omega_i, i = 1, \ldots, r$ và $\Delta(G, k)_d$ là tập tất cả các đỉnh thuộc khuyên (tức là đỉnh đã được đánh dấu) của $\Delta(G, k)$.

(1) Chứng minh Định lý 2.2.1 cho các nhóm hầu đơn tuyệt đối dạng kinh điển

Dưới đây, với mỗi trường hợp của nhóm hầu đơn tuyệt đối dạng kinh điển, ta sẽ chọn một đại diện là một lớp đẳng giống thích hợp của G theo Tits ([45]).

(1a) Dạng $^1\mathrm{A}_n$. Theo sự phân loại của Tits, khi nhóm G có dạng $^1\mathrm{A}_n$, ta có $G(k) = \mathrm{SL}_{r+1}(D)$ (với D là đại số đơn tâm chia được bậc d trên k và $d(r+1) = n+1$). Theo giả thiết, G là k_v-phân rã, nghĩa là $D_v := D \otimes_k k_v$ là k_v-phân rã với mọi $v \in V$. Theo Định lý Brauer-Hasse-Noether, D là phân rã trên k, tức là $n = r$ và G là phân rã trên k.

(1b) Dạng ${}^2\mathrm{A}_n$. Giả sử rằng G không là k-phân rã. Khi đó (theo [45]) ta có $G(k) = \mathrm{SU}_{(n+1)/d}(D, f)$, trong đó D là một đại số đơn tâm bậc d trên k' (k' là mở rộng bậc hai tách được của k), f là dạng hecmit không suy biến hạng $(n+1)/d$ đối với k'/k-phép đối hợp loại hai J trên D và f có chỉ số Witt là r. Cũng theo [45], ta có $d|n+1$ và $2rd \leq n+1$. Vì G có kiểu ngoài nên ta có $n \geq 2$. Giả thiết đã cho G là phân rã trên k_v với mọi v nên $D \otimes k'_v$ là phân rã trên k'_v, vì thế D cũng là k'-phân rã, (tức là $d = 1$, $D = k'$). Trong trường hợp này, dạng hecmit f trên k' có thể viết được dưới dạng $f = a_1 x_1^J x'_1 + \cdots + a_{n+1} x_{n+1}^J x'_{n+1}$, ở đó $a_i \in k^*$. Ta gọi dạng toàn phương liên kết với f là $g = a_1(y_1^2 - by_2^2) + \cdots + a_{n+1}(y_{2n+1}^2 - by_{2n+2}^2)$. Vì $\dim(f) = n+1 \geq 3$, nên $\dim(g) = 2(n+1) \geq 6$. Dạng f có chỉ số Witt cực đại trên k_v với mọi v, điều này tương đương với g cũng có chỉ số Witt cực đại trên k_v với mọi v (áp dụng Mệnh đề 1.4.1). Do đó, theo Định lý Hasse-Minkowski (1.2.3), ta có g có chỉ số Witt cực đại trên k, nên f cũng vậy. Do đó G là tựa phân rã trên k, dạng ${}^2\mathrm{A}_{n,r}$, với $r = [(n+1)/2]$. Lấy S là một xuyến k-phân rã cực đại của G. Khi đó G là tựa phân rã trên k nên ta có $T = Z_G(S)$ là một k-xuyến cực đại của G. Vì S cũng là k_v-phân rã, nên với mỗi v ta có thể chọn một k_v-xuyến T_v cực đại phân rã trên k_v của G, chứa S. Vì vậy $T_v = T$ với mọi v, tức là T là k_v-phân rã với mọi v. Theo chứng minh trên, ta có T cũng là k-phân rã, tức là $S = T$ và G là k-phân rã.

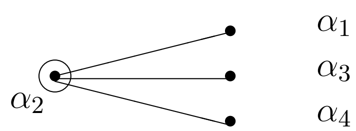
(1c) Dạng B_n. Cho G_0 là nhóm phụ hợp của G. Trong trường hợp này $G_0(k) = \mathrm{SO}_{2n+1}(f)$, với f là dạng toàn phương không suy biến trên k có chỉ số Witt r. Cũng như trên, ta biết rằng f có chỉ số Witt cực đại trên k_v với mọi v nên f cũng có chỉ số Witt cực đại trên k (áp dụng Định lý Hasse-Minkowski), do đó G_0 là k-phân rã, vì thế G là k-phân rã.

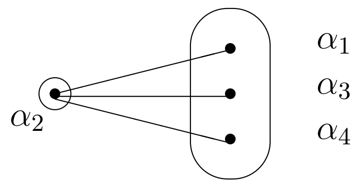
(1d) Dạng C_n. Giả sử rằng G không là k-phân rã. Theo phân loại của Tits, ta có $G(k) = \mathrm{SU}_{2n/d}(D, f)$, trong đó D là một đại số chia trên k có bậc d; f là một dạng hecmit không suy biến có chỉ số Witt r ứng với phép đối hợp loại một sao cho không gian các phần tử J-bất biến có chiều $\dim(D^J) = d(d-1)/2$ (vì G không phân rã nên ta có $d \geq 2$). Hơn nữa, vì G là phân rã trên k_v nên $D \otimes k_v$ cũng phân rã trên k_v với mọi v, áp dụng Định lý Brauer-Hasse-Noether ta có D là k-phân rã và ta có mâu thuẫn. Vậy G là phân rã trên k.

(1e) Dạng ${}^1\mathrm{D}_n$, ${}^2\mathrm{D}_n$. Theo [45], ta có $G(k) = \mathrm{SU}_{2n/d}(D, f)$, trong đó f là dạng hecmit không suy biến trên đại số chia được D bậc d với phép đối hợp J loại 1 sao cho không gian các phần tử J-bất biến D^J có chiều $\dim(D^J) = d(d+1)/2$, f có biệt thức 1 và có chỉ số Witt là r. Bằng lập luận tương tự như trường hợp C_n ta chỉ ra được rằng D là k-phân rã, vì vậy $D = k$ và $d = 1$. Khi đó f (là dạng toàn phương) phải có chỉ số Witt cực đại theo Định lý Hasse-Minkowski. Ta suy ra G phân rã trên k, hoặc G là tựa phân rã trên k và có dạng ${}^2\mathrm{D}_n$. Tiếp theo, ta lập luận tương tự như trường hợp dạng ${}^2\mathrm{A}_{n+1}$ (bằng cách sử dụng một xuyến cực đại k-phân rã S), ta suy ra G là phân rã trên k.

(1g) Dạng ${}^3\mathrm{D}_4$ hoặc ${}^6\mathrm{D}_4$ trong trường hợp k là trường số. Gọi K là mở rộng cực tiểu của k, sao cho G là kiểu trong (inner type) trên K. Khi đó ta đã biết rằng $[K : k] = 3$ hoặc 6 tùy theo giả thiết về dạng của G. Với mỗi chốn v của k, ta ký hiệu S_v là tập tất cả các mở rộng w của v tới K. Vì G phân rã trên k_v, nên nó cũng phân rã trên K_w, với mọi w. Vì G là kiểu trong dạng ${}^1\mathrm{D}_4$ trên K, nên từ trường hợp ${}^1\mathrm{D}_n$ ở trên, ta suy ra rằng G cũng phân rã trên K. Theo [53, Bổ đề 4.1.2.2, p. 420] (cũng có thể xem trong [54, p. 136 - 137]), ta suy ra G là tựa phân rã trên k. Nếu G không phân rã trên k, ta gọi S là xuyến cực đại k-phân rã của G thì $\dim(S) = 2$ và $T = Z_G(S) = S \cdot Z_a$, với Z_a là một xuyến không đẳng hướng trên k có chiều 2. Vì Z_a là phân rã trên k_v với mọi v, ta suy ra rằng Z_a là k-phân rã, điều này mâu thuẫn với giả thiết của ta về S. Do đó G là k-phân rã.

(1h) Dạng ${}^3\mathrm{D}_4$ hoặc ${}^6\mathrm{D}_4$ trong trường hợp k là trường hàm. Theo Định lý 2.2.2 ta có G là đẳng hướng trên k. Vì vậy ta suy ra chỉ dẫn Tits của G là một trong các sơ đồ sau.





Lấy S là xuyến k-phân rã chiều 1 tương ứng với nghiệm α_2, tức là $S = S_{\Delta - \{\alpha_2\}}$. Khi đó theo Tits ([45, 2.3]) $Z_G(S) = SH$, trong đó H là một k-nhóm có sơ đồ Dynkin $\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_1$. Vì H là k_v-phân rã với mọi v, nên ta suy ra rằng H là phân rã trên k, tức là, G là k-phân rã.

Vậy ta hoàn thành chứng minh cho các nhóm có dạng kinh điển.

(2) Chứng minh của Định lý 2.2.1 cho các nhóm hầu đơn tuyệt đối đặc biệt có dạng E_6**,** E_7**,** E_8**,** F_4 **và** G_2.

Trước hết ta cần một số kết quả chuẩn bị dưới đây.

Định lý 2.2.3 (Xem [31, Ch. VI, Thm. 26]) *Cho k là một trường địa phương hoặc một trường số thuần ảo và G là một k-nhóm hầu đơn, đơn liên dạng đặc biệt. Khi đó G là nhóm đẳng hướng trên k.*

Định lý 2.2.4 (Xem [31, Ch. VI, Lem. 31]) *Cho k là một trường số, G là một k-nhóm hầu đơn dạng đặc biệt* E_6, E_7, E_8. *Nếu G là phân rã trên một mở rộng bậc hai L của k thì G là nhóm đẳng hướng trên k.*

Bổ đề 2.2.5 *Cho k là một trường số, G là một k-nhóm hầu đơn dạng đặc biệt* E_6, E_7, E_8. *Nếu G là phân rã trên k_v với mọi v thì G là nhóm đẳng hướng trên k.*

Chứng minh Bổ đề 2.2.5 Nếu k là một trường số thuần ảo, ta có ngay kết luận theo Định lý 2.2.3 Bây giờ ta giả sử $\sqrt{-1} \notin k$, và $L = k(\sqrt{-1})$ thì ta cũng có G là L-đẳng hướng. Vì G phân rã trên k_v với mọi v, nó cũng phân rã trên mọi bao đầy đủ L_w của L, trong đó w là mở rộng v đến L. Vậy G là L-đẳng hướng và L_w-phân rã với mọi $w \in V_L$, (V_L ký hiệu cho tập tất cả các chốn của L). Theo phân loại của Tits ([45]), ta biết rằng trong trường hợp này, nhóm G (đẳng hướng) có các dạng trên L như sau:

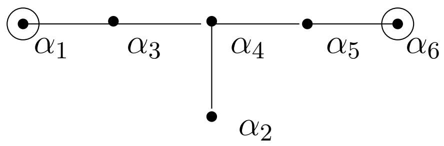
E_6-*series*: ${}^1\mathrm{E}_{6,2}^{28}$, ${}^1\mathrm{E}_{6,2}^{16}$, ${}^1\mathrm{E}_{6,6}^{0}$, ${}^2\mathrm{E}_{6,1}^{35}$, ${}^2\mathrm{E}_{6,1}^{29}$, ${}^2\mathrm{E}_{6,2}^{16'}$, ${}^2\mathrm{E}_{6,2}^{16''}$, ${}^2\mathrm{E}_{6,4}^{2}$.

E_7-*series*: $\mathrm{E}_{7,1}^{78}$, $\mathrm{E}_{7,1}^{66}$, $\mathrm{E}_{7,1}^{48}$, $\mathrm{E}_{7,2}^{31}$, $\mathrm{E}_{7,3}^{28}$, $\mathrm{E}_{7,4}^{9}$, $\mathrm{E}_{7,7}^{0}$.

E_8-*series*: $\mathrm{E}_{8,1}^{133}$, $\mathrm{E}_{8,1}^{91}$, $\mathrm{E}_{8,2}^{78}$, $\mathrm{E}_{8,2}^{66}$, $\mathrm{E}_{8,4}^{28}$, $\mathrm{E}_{8,8}^{0}$.

Ký hiệu S là xuyến cực đại L-phân rã của G. Theo Tits ([45]) ta có $Z_G(S) = S.Z_a.H$, trong đó $Z_a.H$ là nhân không đẳng hướng của G (trên L). Từ đó ta có ba trường hợp sau đây có thể xảy ra.

a) Z_a là một L-nhóm không đẳng hướng chiều 1 trong các trường hợp ${}^2\mathrm{E}_{6,1}^{29}$, ${}^2\mathrm{E}_{6,2}^{16'}$,
b) Z_a có chiều 2 trong trường hợp ${}^2\mathrm{E}_{6,4}^{2}$ và
c) Z_a là tầm thường trong các trường hợp còn lại.
Ta chỉ xét trường hợp sau đây, các trường hợp khác được chứng minh tương tự.
Dạng ${}^1\mathrm{E}_{6,2}^{28}$. Chỉ dẫn Tits của G như sau



Vậy $Z_G(S) = S.H$, ở đó H là nhân không đẳng hướng hầu đơn dạng ${}^1\mathrm{D}_4$. Vì G trở thành phân rã trên L_w, nên H cũng phân rã trên L_w, với mọi w. Do đó theo trường hợp các nhóm dạng kinh điển đã chứng minh ta suy ra H là L-phân rã tức là G là L-phân rã. Trong các trường hợp còn lại, H là L-nhóm nửa đơn, nó là tích của các nhóm dạng kinh điển và H là phân rã trên L_w với mọi w. Theo phần trên, H là L-phân rã, vậy G cũng là L-phân rã. Theo Định lý 2.2.4, G là k-đẳng hướng, vậy bổ đề được chứng minh. $\square$

(2a) Chứng minh của Định lý 2.2.1 cho các nhóm đặc biệt $\mathrm{E}_6, \mathrm{E}_7, \mathrm{E}_8$.

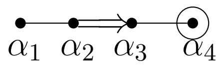
Theo giả thiết G là k-nhóm hầu đơn tuyệt đối. Theo Định lý 2.2.2 và Bổ đề 2.2.5, G là k-đẳng hướng. Hơn nữa, vì G là nhóm đặc biệt dạng E_6, E_7, E_8 nên lập luận như trong chứng minh Bổ đề 2.2.5 (sử dụng nhân không đẳng hướng) ta suy ra rằng G là phân rã trên k.

(2b) Chứng minh của Định lý 2.2.1 cho các nhóm đặc biệt $\mathrm{F}_4, \mathrm{G}_2$ trong trường hợp k là một trường số.

(i) *Các nhóm đặc biệt dạng* G_2: Cho G là một nhóm dạng G_2 trên k. Khi đó ta biết rằng (tham khảo [40, Ch. 17, 17.4]) tồn tại một đại số Caylay $\mathcal{C}$ chiều 8 sao cho $G \simeq \mathrm{Aut}(\mathcal{C})$, nhóm các tự đẳng cấu của $\mathcal{C}$. Gọi f_G là dạng chuẩn liên kết với $\mathcal{C}$, đó là một dạng toàn phương không suy biến có 8 biến, và đó là một dạng Pfister nhân tính (xem [33, p. 72]). Khi đó ta đã biết rằng trên một trường mở rộng L của k, ta có:

$$\begin{aligned} G \text{ là } L\text{-đẳng hướng} &\Leftrightarrow G \text{ là } L\text{-phân rã} \\ &\Leftrightarrow f_G \text{ là } L\text{-đẳng hướng} \\ &\Leftrightarrow f_G \text{ có chỉ số Witt cực đại trên } L. \end{aligned}$$

Do đó theo Định lý Hasse-Minkowski cho dạng toàn phương trên trường toàn cục, f_G có chỉ số Witt cực đại trên k, tức là, G là k-phân rã.
(ii) *Các nhóm đặc biệt dạng* F_4. Nếu G là đẳng hướng trên k, thì ta giả sử rằng G có dạng $\mathrm{F}_{4,1}^{21}$ với chỉ dẫn Tits như sau.



Ta vẫn ký hiệu S là xuyến k-phân rã cực đại của G. Khi đó, theo [45, 2.3] ta có $Z_G(S) = SH$, với H là một k-nhóm nửa đơn không đẳng hướng dạng B_3. Vì G là k_v-phân rã, nên H cũng là k_v-phân rã với mọi v. Như trường hợp kinh điển, ta suy ra rằng H là k-phân rã, tức là G cũng là phân rã trên k.

Bây giờ giả sử rằng G là không đẳng hướng trên k. Như trường hợp G_2, ta cần một mô tả chính xác của G. Ta đã biết rằng (xem [40, Sec. 17.6] và [45]) nếu G là một k-nhóm dạng F_4, thì $G(k) = \mathrm{Aut}(J)$, với J là một đại số Jordan đơn đặc biệt trên k nhận được bằng cách sau đây (xem [40, Sec. 17.6], [20, Thm.6]).

Cố định một đại số (kết hợp) A đơn tâm có bậc 3 trên k và một phần tử $\mu \in k^*$. Ta ký hiệu $\mathrm{Nrd}_{A/k}$ và $\mathrm{Trd}_{A/k}$ cho chuẩn thu gọn và vết thu gọn của A. Ta đặt $V = A_0 \oplus A_1 \oplus A_2$, với mỗi A_i đẳng cấu với A và đặt $c = (1,0,0) \in V$. Với $x = (a_0, a_1, a_2) \in V$, ta xét dạng lập phương sau

$$N(x) = \mathrm{Nrd}_{A/k}(a_0) + \mu\,\mathrm{Nrd}_{A/k}(a_1) + \mu^{-1}\,\mathrm{Nrd}_{A/k}(a_2) - \mathrm{Trd}_{A/k}(a_0a_1a_2).$$

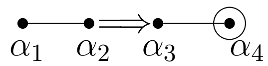
Từ đó, ta xây dựng được một đại số Jordan đặc biệt, ký hiệu là $J(A,\mu)$, chi tiết xem [20, Sec. 5] hoặc [40, Sec. 17.6]. Ta chỉ cần tính chất đặc biệt dưới đây của đại số này.

Bổ đề 2.2.6 (xem [20, Thm.6], [40, Sec. 17.6]) *Nhóm G là không đẳng hướng trên k nếu và chỉ nếu đại số Jordan $J(A,\mu)$ là một đại số chia. Trường hợp sau xảy ra nếu và chỉ nếu A là đại số chia và $\mu \notin \mathrm{Nrd}_{A/k}(A^*)$.*

Vì G là k_v-phân rã, áp dụng bổ đề trên, ta có hoặc $A \otimes k_v$ là k_v-phân rã, tức là, $A \otimes k_v \simeq M_3(k_v)$, hoặc $\mu \in \mathrm{Nrd}_{A\otimes k_v/k_v}((A \otimes k_v)^*)$. Nhưng nếu $A \otimes k_v$ là k_v-phân rã, ta sẽ có $\mu \in \mathrm{Nrd}_{A\otimes k_v/k_v}((A \otimes k_v)^*)$. Vì vậy ta suy ra rằng $\mu \in \mathrm{Nrd}_{A\otimes k_v/k_v}((A \otimes k_v)^*)$ với mọi v. Áp dụng Định lý Hasse - Maass - Schilling (xem [33, p. 377]) ta cũng có $\mu \in \mathrm{Nrd}_{A/k}(A^*)$, nhưng theo bổ đề trên, điều này không xảy ra. Vậy G là k-phân rã, nên có điều phải chứng minh.

(2c) Chứng minh của Định lý 2.2.1 cho các nhóm đặc biệt $\mathrm{F}_4, \mathrm{G}_2$ trong trường hợp k là trường hàm toàn cục.

Theo kết quả của Harder (Định lý 2.2.2), nếu G có dạng G_2, thì G là k-đẳng hướng nên cũng là k-phân rã (theo [40, Prop. 17.4.2]). Nếu G có dạng F_4 và G không là k-phân rã, thì G có dạng $\mathrm{F}_{4,1}^{21}$ với chỉ dẫn Tits dưới đây.



Theo đó G có xuyến k-phân rã cực đại S có chiều 1. Tương tự như trên, nhóm $Z_G(S)$ có sự phân tích là $Z_G(S) = S.H$, trong đó H là nhân không đẳng hướng dạng B_3. Vì H là k_v-phân rã với mọi v, nên từ trường hợp các nhóm kinh điển ở trên, ta biết rằng H là k-phân rã. Do đó G là k-phân rã. Như vậy ta đã hoàn thành chứng minh của Định lý 2.2.1 $\square$

2.3 Nguyên lý địa phương-toàn cục cho tính chất phân rã của nhóm đại số tuyến tính liên thông

Cho G là một nhóm đại số afin liên thông xác định trên một trường toàn cục k. Ta nhắc lại, một k-nhóm đại số tuyến tính liên thông G là phân rã trên k nếu $R_u(G)$ xác định và phân rã trên k và nhóm reductive $G/R_u(G)$ xác định và phân rã trên k. Khái niệm về sự phân rã của G mà chúng tôi đưa ra, được kết hợp từ khái niệm phân rã của nhóm giải được và nhóm reductive. Dựa vào định nghĩa đó, nguyên lý Hasse cho tính chất phân rã cũng đúng trên lớp nhóm này.

Định lý 2.3.1 *Cho k là một trường toàn cục và G là một k-nhóm đại số tuyến tính liên thông. Giả sử G phân rã trên k_v với mọi chốn v của k. Khi đó G cũng phân rã trên k.*

Chứng minh. Trước hết ta sẽ chỉ ra rằng nếu G phân rã trên k_v với mọi v, thì căn lũy đơn $R_u(G)$ của G được xác định trên k. Thật vậy, ta đã biết $R_u(G)$ xác định trên một mở rộng căn (thuần túy không tách) hữu hạn L/k (theo [40, 12.1.7(d)]). Mặt khác, theo giả thiết $R_u(G)$ xác định và phân rã trên k_v với mọi $v \in V$ còn k_v là mở rộng tách được của k (xem chứng minh Prop. 2.1 trong [51, Ch. VI]); Nếu ta gọi k_0 là trường con nhỏ nhất của k_v sao cho iđêan xác định của G có một hệ sinh nằm trong k_0 thì theo [48, Ch. 4, Corl. 3] ta có $k_0 \subseteq L$. Vậy k_0 vừa là mở rộng tách được vừa là mở rộng thuần túy không tách nên $k_0 = k$. Do đó $R_u(G)$ xác định trên k. Nhắc lại rằng, $R_u(G)$ là nhóm lũy đơn, và nhóm thương $G/R_u(G)$ là nhóm reductive. Như vậy, theo những trường hợp nhóm lũy đơn và nhóm reductive đã xét ở Mục 2.1 và Mục 2.2, ta có $R_u(G)$ và $G/R_u(G)$ là k-phân rã, vậy G là phân rã trên k. □

2.4 Nguyên lý địa phương-toàn cục cho tính chất tựa phân rã của nhóm đại số tuyến tính liên thông

Tiếp nối việc nghiên cứu nguyên lý địa phương - toàn cục cho tính phân rã của nhóm đại số tuyến tính liên thông, chúng tôi khảo sát nguyên lý địa phương - toàn cục cho tính chất tựa phân rã. Nhắc lại rằng, một k-nhóm đại số tuyến tính liên thông G là tựa phân rã trên k nếu $R_u(G)$ xác định trên k và nhóm reductive $G/R_u(G)$ có một nhóm con Borel xác định trên k.

Một câu hỏi tự nhiên được đặt ra:

Với nhóm đại số tuyến tính liên thông G là tựa phân rã trên k_v với mọi v, liệu rằng G có tựa phân rã trên k?

Chúng tôi có câu trả lời trong định lý sau đây.

Định lý 2.4.1 *Cho k là trường toàn cục, G là nhóm đại số tuyến tính liên thông xác định trên k. Nếu G là tựa phân rã trên k_v với mọi v thì G là tựa phân rã trên k.*

Chúng tôi đưa ra hai chứng minh cho định lý này. Ngoài chứng minh sẽ được trình bày sau đây, chúng tôi trình bày một chứng minh khác trong Mục 3.3 của Chương 3.

Chứng minh. Trước tiên, áp dụng lập luận như trong chứng minh Định lý 2.3.1 ta suy ra căn lũy đơn $R_u(G)$ được xác định trên k. Như vậy ta có thể giả sử từ đầu G là nhóm reductive. Lập luận tương tự như phần đầu trong chứng minh Định lý 2.2.1, ta có thể đưa về chứng minh cho trường hợp G là nửa đơn trên k và thu gọn hơn nữa về trường hợp G là k-nhóm hầu đơn tuyệt đối. Chú ý rằng khẳng định của Định lý 2.4.1 luôn đúng nếu G là kiểu trong (inner type), bởi vì khi đó, G là phân rã trên k_v với mọi v, áp dụng kết quả của Mục 2.3, ta suy ra G cũng phân rã trên k. Vậy ta giả sử G là kiểu ngoài (và do đó có sơ đồ Dynkin Dạng ${}^2\mathrm{A_n}$, ${}^2\mathrm{D_n}$, ${}^3\mathrm{D}_4$, ${}^6\mathrm{D}_4$ hoặc ${}^2\mathrm{E}_6$ (xem [45])). Lấy G_1 là một k-nhóm tựa phân rã, và là dạng trong của G trên k. Ký hiệu $\mathrm{Ad}(G_1) = G_1/Z(G_1)$ là nhóm phụ hợp của G_1 và gọi $\xi \in \mathrm{H}^1(k, \mathrm{Ad}(G_1))$ là phần tử tương ứng với G. Ta sẽ chứng minh G tựa phân rã trên k bằng cách chứng minh ξ là tầm thường trong $\mathrm{H}^1(k, \mathrm{Ad}(G_1)$. Cho $\tilde{G}_1$ là một phủ đơn liên của G_1, $\pi : \tilde{G}_1 \to \mathrm{Ad}(G_1)$ là k-đẳng giống chính tắc. Ta đặt $\tilde{F}_1 := Z(\tilde{G}_1)$ và $\tilde{T}_1$ là k-xuyến cực đại của $\tilde{G}_1$ chứa một xuyến con cực đại k-phân rã $\tilde{S}_1$ (của $\tilde{G}_1$). Khi đó $T_1 = \pi(\tilde{T}_1)$ là k-xuyến cực đại của $\mathrm{Ad}(G_1)$ và $S_1 = \pi(\tilde{S}_1)$ là k-xuyến cực đại k-phân rã của $\mathrm{Ad}(G_1)$.

Tiếp theo ta cần sử dụng các kết quả sau.

Bổ đề 2.4.2 ([56, p.173]) *Cho G là nhóm hầu đơn tuyệt đối tựa phân rã trên trường toàn cục k, S là xuyến k-phân rã cực đại của G, $T = Z_G(S)$. Khi đó, nếu G hoặc là đơn liên hoặc là phụ hợp thì T là k-đẳng cấu với một tích trực tiếp của các xuyến cảm sinh.*

Bổ đề 2.4.3 ([42, Thm. 2.4]) *Cho k là một trường hàm địa phương hoặc toàn cục, $\tilde{G}$ là một nhóm nửa đơn đơn liên, F là một k-nhóm con nằm trong tâm của $\tilde{G}$, $G = \tilde{G}/F$. Khi đó ta có song ánh*

$$\mathrm{H}^1_{flat}(k, G) \cong \mathrm{H}^2_{flat}(k, F).$$

Bước tiếp theo ta chứng minh bổ đề sau đây.

Bổ đề 2.4.4 *Cho k là trường toàn cục. Nếu G là nhóm nửa đơn phụ hợp thì G thỏa mãn nguyên lý Hasse về đối đồng điều đối với H^1. Hơn nữa, ánh xạ địa phương hóa $r_1 : \mathrm{H}^1(k, G) \longrightarrow \prod_v \mathrm{H}^1(k_v, G)$ là đơn ánh.*

Chứng minh Bổ đề 2.4.4. Nếu k là trường số, khẳng định đã được chứng minh bởi Sansuc ([52, Corol. 5.4]) nên ta giả sử k là trường hàm toàn cục. Ta vẫn kí hiệu $G_1, \tilde{G}_1, \tilde{F}_1, \tilde{T}_1$ và $\tilde{S}_1$ như trên. Theo Bổ đề 2.4.3, ta có

$$\mathrm{H}^1_{flat}(k, \mathrm{Ad}(G_1)) \cong \mathrm{H}^2_{flat}(k, \tilde{F}_1)),$$

và

$$\mathrm{H}^1_{flat}(k_v, \mathrm{Ad}(G_1)) \cong \mathrm{H}^2_{flat}(k_v, \tilde{F}_1))$$

với mọi v. Do đó, ta chỉ cần chứng minh nguyên lý Hasse cho đối đồng điều bậc hai của $\tilde{F}_1$. Theo Bổ đề 2.4.2, Bổ đề Shapiro (1.7.7) và Mệnh đề 1.7.6, ta có

$$\mathrm{H}^1_{flat}(k, T_1) = 0 \text{ và } \mathrm{H}^1_{flat}(k_v, T_1) = 0 \text{ với mọi } v.$$

Khi đó, từ dãy khớp $1 \to \tilde{F}_1 \to \tilde{T}_1 \to T_1 \to 1$ ta có sơ đồ giao hoán với các dòng khớp sau đây (ở đây lưu ý rằng $\tilde{F}_1 = Z(\tilde{G}_1) \subseteq \tilde{T}_1 = Z_{\tilde{G}}(\tilde{S}_1)$).

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \to & \mathrm{H}^2_{flat}(k, \tilde{F}_1) & \xrightarrow{\pi} & \mathrm{H}^2_{flat}(k, \tilde{T}_1) \\
 & & \downarrow \beta & & \downarrow \alpha \\
0 & \to & \prod_v \mathrm{H}^2_{flat}(k_v, \tilde{F}_1) & \xrightarrow{\pi'} & \prod_v \mathrm{H}^2_{flat}(k_v, \tilde{T}_1)
\end{array}$$

Mặt khác ta biết rằng α là đơn ánh (theo bổ đề Shapiro và Định lý Brauer-Hasse-Noether) do đó β cũng là đơn ánh, do đó Bổ đề 2.4.4 được chứng minh.

Quay trở lại với chứng minh Định lý 2.4.1, vì G là tựa phân rã khắp nơi trên k_v, tức là ảnh của ξ qua ánh xạ địa phương hóa $r_v : \mathrm{H}^1_{flat}(k, \mathrm{Ad}(G_1)) \to \mathrm{H}^1_{flat}(k_v, \mathrm{Ad}(G_1))$ là tầm thường với mọi v. Do đó, ξ là tầm thường được suy ra từ nguyên lý Hasse cho đối đồng điều bậc một của $\mathrm{Ad}(G_1)$, tức là được suy ra từ Bổ đề 2.4.4 $\square$

KẾT LUẬN CHƯƠNG 2

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu nguyên lý địa phương toàn cục đối với tính chất phân rã và tựa phân rã của nhóm của nhóm đại số tuyến tính liên thông trên trường toàn cục. Cụ thể, chúng tôi đã chứng minh được các kết quả sau:

- Kết quả chính thứ nhất là nguyên lý địa phương-toàn cục cho tính chất phân rã của nhóm đại số tuyến tính liên thông xác định trên một trường toàn cục k (Định lý 2.1.1; Định lý 2.2.1; Định lý 2.3.1).

- Kết quả chính thứ hai là nguyên lý địa phương-toàn cục cho tính chất tựa phân rã của nhóm đại số tuyến tính liên thông xác định trên một trường toàn cục k (Định lý 2.4.1).

- Các kết quả của chương này dựa theo bài báo [23, 26].

Chương 3

Nguyên lý Hasse cho không gian thuần nhất trên trường toàn cục

3.1 Nguyên lý Hasse cho không gian thuần nhất xạ ảnh. Chứng minh thứ nhất

Trong mục này, chúng tôi sẽ sử dụng kết quả sau đây của Prasad và Rapinchuk ([32]) và mở rộng của các kết quả đó trong ([44]).

Cho G là nhóm hầu đơn tuyệt đối xác định trên một trường k. Gọi G_0 là một k-dạng trong tựa phân rã của G. Gọi $\Delta(G, k)$ là chỉ dẫn Tits của G trên k và $\Delta(G, k)_d$ là tập tất cả các đỉnh được khuyên của $\Delta(G, k)$. Ta ký hiệu $\Omega_1, ..., \Omega_r$ cho các Γ-quỹ đạo (với tác động *) trên $\Delta(G_0, k)$ (lưu ý rằng r chính là k-hạng của G_0), ngoài ra L ký hiệu cho mở rộng Galoa cực tiểu của k sao cho trên đó G_0 là phân rã.

Định lý 3.1.1 ([32, Thm. 1], [44, Thm. 1]) *Với các ký hiệu như trên, cho k là một trường toàn cục và G_0 là một k-nhóm đơn liên. Cố định một định giá phi Acsimet v_0 của k. Với mỗi $v \in V \setminus \{v_0\}$, giả sử G_v là các k_v-dạng trong (xoắn trong) đã cho của G_0, mà với hầu hết v, G_v là tựa phân rã trên k_v. Khi đó*

(a) Tồn tại một k-dạng trong G của G_0 mà G là k_v-đẳng cấu với G_v với mọi $v \in V \setminus \{v_0\}$.

(b) Nếu G là một k-dạng đẳng hướng thỏa mãn (a) thì tồn tại chỉ số i, $1 \leq i \leq r$, sao cho $\Omega_i \subset \Delta(G_v, k_v)_d$ với mọi $v \in V \setminus \{v_0\}$ và k-hạng của G không lớn hơn số quỹ đạo thỏa mãn bao hàm thức trên với mọi $v \neq v_0$.

(c) Giả sử v_0 không phân rã trên L nếu $[L : k] = 2$. Khi đó, nếu tồn tại quỹ đạo Ω_i như trong (b) thì tồn tại k-dạng G đẳng hướng thỏa mãn (a). Trong trường hợp này, luôn tồn tại k-dạng G mà có k-hạng đúng bằng số các quỹ đạo thỏa mãn (b).

Định lý tiếp theo chỉ ra sự tồn tại dạng toàn cục tương ứng với các dạng địa phương cho trước như trong định lý trên là duy nhất.

Định lý 3.1.2 (Xem [32, Thm. 3], [42, Thm. 4]) *Cho G_0 là một nhóm đơn liên liên thông hầu đơn tuyệt đối xác định và tựa phân rã trên trường toàn cục k, $\bar{G}_0$ là k-nhóm phụ hợp tương ứng với G_0, F_0 là tâm của G_0, và v_0 là một định giá phi Acsimet của k. Giả sử rằng với mọi $v \neq v_0$, G_v là k_v-dạng trong của G_0, G là k dạng của G_0, đẳng cấu với G_v trên k_v với mọi $v \neq v_0$. Khi đó*

(a) *Sự tồn tại k-dạng G của G_0 là duy nhất nếu và chỉ nếu ánh xạ địa phương hóa*

$$\alpha : \mathrm{H}^1_{flat}(k, \bar{G}_0) \to \oplus_{v \neq v_0} \mathrm{H}^1_{flat}(k_v, \bar{G}_0)$$

là đơn ánh.

(b) *α là đơn ánh nếu và chỉ nếu ánh xạ địa phương hóa sau đây*

$$\beta : \mathrm{H}^2_{flat}(k, F_0) \to \oplus_{v \neq v_0} \mathrm{H}^2_{flat}(k_v, F_0)$$

là đơn ánh.

(c) *Gọi L là trường phân rã cực tiểu của G_0, đặt $P = L$ nếu $[L : k] \neq 6$ và P là mở rộng bậc 3 của k chứa trong L nếu $[L : k] = 6$ (trong trường hợp sau G_0 là dạng ${}^6D_4$). Khi đó β là đơn ánh nếu và chỉ nếu v_0 không phân rã trong P.*

Chúng tôi áp dụng hai định lý trên để mở rộng nguyên lý Hasse cho không gian thuần nhất xạ ảnh của nhóm đại số tuyến tính liên thông trên trường hàm. Nguyên lý Hasse cho không gian thuần nhất xạ ảnh sau đây đã được chứng minh bởi Harder cho trường hợp trường số:

Định lý 3.1.3 ([55, Satz 4.3.3]) *Cho X là một không gian thuần nhất xạ ảnh của một nhóm nửa đơn G, X và G cùng xác định trên một trường số k. Khi đó nguyên lý Hasse được thỏa mãn trên X.*

Chứng minh được đưa ra trong [55] dựa vào một số lập luận liên quan tới lớp liên hợp các phần tử nửa đơn chính quy (dựa theo Kneser) trên trường số. Sau đó một số chứng minh khác cũng được đưa ra (xem [6], [7] trong trường hợp char.$k = 0$), với công cụ chính được sử dụng là lý thuyết về đối đồng điều bậc hai H^2 không giao hoán. Tuy vậy, các chứng minh trên (trong [55] và [6], [7]) dường như không có mở rộng cho trường hợp đặc số dương. Trong mục này chúng tôi sẽ có chứng minh khác, mà nó có thể mở rộng tương tự cho trường hợp trường hàm toàn cục. Chúng ta có kết quả sau đây.

Định lý 3.1.4 *Cho X là một không gian thuần nhất xạ ảnh của một nhóm nửa đơn G, X và G cùng xác định trên một trường hàm toàn cục k. Khi đó nguyên lý Hasse là đúng cho X.*

Kết hợp Định lý 3.1.3 và Định lý 3.1.4 trên ta được kết quả sau.

Định lý 3.1.5 *Cho k là một trường toàn cục, G là một nhóm đại số tuyến tính liên thông, giả sử G là reductive nếu char.$k > 0$ và X là một không gian thuần nhất xạ ảnh của G. Khi đó nguyên lý Hasse được thỏa mãn trên X.*

Chứng minh thứ nhất của Định lý 3.1.5. Trước hết, lập luận tương tự như trong chứng minh của Hệ quả 5.7 ([11]) như sau. Ta ký hiệu $R(G)$ là căn giải được của G (nhóm con đóng chuẩn tắc liên thông giải được cực đại của G). Chú ý rằng, nếu *char.* $k = 0$ thì $R(G)$ xác định trên k, còn nếu *char.* $k > 0$, với giả thiết G reductive, ta có $R(G) = Z(G)^o$ cũng xác định trên k. Ta lấy $x \in X$ và ký hiệu $P = G_x$ là nhóm con dừng của x trong G. Khi đó ta có G-đẳng cấu $X \cong G/P$, đồng thời, vì X là xạ ảnh nên P là nhóm con parabolic của G, P liên thông và $R \subseteq P$ (do $R(G) = (\cap_{B\in\mathcal{B}} B)^o$ với $\mathcal{B}$ là đa tạp các nhóm con Borel của G). Vậy ta có $R \subset G_x$ với mọi $x \in X$, do đó tác động của G trên X cảm sinh tác động của nhóm nửa đơn $G/R = G^{ss}$ lên X và X là không gian thuần nhất đối với G^{ss}. Bây giờ, ta gọi $\lambda : G^{sc} \to G^{ss}$ là phủ phổ dụng của G^{ss}. Vì λ là toàn cấu nên X cũng là không gian thuần nhất đối với G^{ss}. Vậy ta có thể giả sử từ đầu rằng G là k-nhóm đơn liên nửa đơn. Tiếp theo, áp dụng lập luận của Harder trong chứng minh Định lý 4.3.3 ([55]) ta có thể đưa chứng minh của Định lý 3.1.5 về trường hợp nhóm hầu đơn tuyệt đối và dựa trên quan hệ với các nhóm con parabolic. Cụ thể, ta có G-đẳng cấu giữa các không gian thuần nhất xạ ảnh $X = G/P$ với không gian thuần nhất $\mathcal{P}_\Theta$ (không gian các nhóm con parabolic của G cùng liên hợp với một nhóm con parabolic P_Θ cho trước). Mỗi điểm của X có tương ứng 1-1 với một nhóm con parabolic của G kiểu Θ, một điểm $x \in X$ là k-điểm hữu tỷ nếu và chỉ nếu P_x xác định trên k (theo [50, p.103]). Như vậy, để chứng minh định lý, ta chứng minh kết quả tương đương sau.

Mệnh đề 3.1.6 *Cho G là một nhóm hầu đơn xác định trên một trường toàn cục k. Nếu G có một k_v-nhóm con parabolic P_v kiểu $\Theta = \Omega_{i_1} \cup \ldots \cup \Omega_{i_s}$ với mọi chốn v của k, thì G cũng có một k-nhóm con parabolic P kiểu $\Theta = \Omega_{i_1} \cup \ldots \cup \Omega_{i_s}$.*

Để chứng minh Mệnh đề 3.1.6, ta vẫn ký hiệu L là trường phân rã Galois cực tiểu của G_0 với nhóm Galois $\mathcal{G}_L$. Ta biết rằng, khi đó $[L : k] = 2, 3$ hoặc 6. Với trường hợp $[L : k] = 2$, áp dụng hệ quả của Định lý về độ trù mật Chebotarev (xem [21, Corol. 8.32]) ta có tập các chốn của k phân rã trong L có độ trù mật bằng $1/[L : k] = 1/2$.

Theo đó, ta có thể chọn được chốn v_0 của k mà v_0 không phân rã trong L. Do đó theo Định lý 3.1.1(c) và Định lý 3.1.2 tồn tại duy nhất k-nhóm hầu đơn G' đẳng hướng trên k, có k-hạng đúng bằng số s các quỹ đạo $\Omega_{i_1}, \ldots, \Omega_{i_s}$. Do tính duy nhất của G' đã nói ở trên ta suy ra G đẳng cấu với G' trên k, đặc biệt là G có một k-nhóm con parabolic kiểu Θ. □

Chú ý 3.1.7

(1) Chứng minh của Định lý 3.1.5 ở trên cho trường hợp trường số là một chứng minh mới của kết quả đã biết của Harder.

(2) Định lý 3.1.5 đã được chứng minh trong [11, Corol. 5.7] cho những trường k có kiểu hình học ([11, Sec.1]).

3.2 Chứng minh thứ hai của Định lý 3.1.5

Cho k là một trường toàn cục, X là một đa tạp xác định trên k. Định lý nổi tiếng của Harder [55, Satz 4.3.3] nói rằng với mỗi không gian thuần nhất xạ ảnh X của một nhóm đại số nửa đơn không có hạng tử dạng E_8 luôn thỏa mãn nguyên lý Hasse. (Chú ý rằng điều kiện liên quan đến E_8 có thể bỏ qua bằng cách sử dụng nguyên lý Hasse về đối đồng điều đối với E_8 (theo Chernousov trong [32]) và "nửa đơn" có thể được thay bởi "liên thông reductive"). Chứng minh đầu tiên của Harder không bao gồm trường hợp trường hàm toàn cục và một số chứng minh sau đó cũng vậy (chẳng hạn của Borovoi [7, Thm. 7.3]). Trong mục này chúng tôi đưa một chứng minh khác, cho trường toàn cục với đặc số bất kỳ. Nó dựa trên các kết quả về luật thuận nghịch đối với đối đồng điều bậc một H^1 và một kết quả của Kottwitz.

Trước hết, chúng ta nhắc lại về luật thuận nghịch. Ký hiệu Br(.) là nhóm Brauer của (.). Định lý nổi tiếng Brauer-Hasse-Noether nói rằng có dãy khớp

$$0 \to \mathrm{Br}(k) \xrightarrow{j} \bigoplus_v \mathrm{Br}(k_v) \xrightarrow{\sum \mathrm{inv}_v} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to 0,$$

trong đó inv_v ký hiệu ánh xạ bất biến Hasse với mỗi v. Tính khớp tại $\mathrm{Br}(k)$ (tức là tính đơn ánh của j) đã được biết như nguyên lý Hasse đối với các nhóm Brauer. Và tính khớp tại $\bigoplus_v \mathrm{Br}(k_v)$ được biết đến như "luật thuận nghịch" đối với đại số đơn tâm trên k. Áp dụng Mệnh đề 1.7.6 ta có thể viết dãy khớp trên thành

$$0 \to \mathrm{H}^2_{flat}(k, \mathbf{G}_m) \to \bigoplus_v \mathrm{H}^2_{flat}(k_v, \mathbf{G}_m) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to 0.$$

Một câu hỏi được đặt ra là có hay không luật thuận nghịch cho H^n đối với nhóm đại số tuyến tính xác định trên trường toàn cục. Chính xác hơn câu hỏi được đặt ra là, nếu G là một nhóm đại số tuyến tính giao hoán xác định trên một trường toàn cục k, với số nguyên n cho trước, có tồn tại hay không một dãy khớp các nhóm giao hoán

$$0 \to Ш^n(G) \to \mathrm{H}^n_{flat}(k, G) \to \prod_v \mathrm{H}^n_{flat}(k_v, G) \to \mathcal{A}_G,$$

với $\mathcal{A}_G$ là một nhóm giao hoán phụ thuộc hàm tử vào G. Trong trường hợp G không giao hoán, câu hỏi đặt ra là có tồn tại hay không một dãy khớp các tập điểm

$$0 \to Ш^1(G) \to \mathrm{H}^1_{flat}(k, G) \to \prod_v \mathrm{H}^1_{flat}(k_v, G) \to \mathcal{A}_G,$$

với tập điểm $\mathcal{A}_G$ phụ thuộc hàm tử vào G.
Kottwitz và N.Q.Thắng đã đưa ra câu trả lời cho câu hỏi trên. Cụ thể, với mỗi nhóm liên thông reductive G xác định trên một trường toàn cục, Kottwitz đã đưa ra một nhóm, được ký hiệu $\mathcal{A}(G)$ và ông đã thiết lập luật thuận nghịch cho $\mathrm{H}^1_{flat}(k, G)$ tương ứng với $\mathcal{A}(G)$ trong trường hợp trường số ([19, Corol. 2.5, Prop. 2.6]), trong trường hợp trường hàm toàn cục kết quả này được thiết lập bởi N.Q. Thắng trong [43]. Đồng thời các tác giả cũng chỉ ra có đẳng cấu chính tắc $\mathcal{A}(G) \cong Pic(G)^D = \mathrm{Hom}(Pic(G), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, (nhóm đối ngẫu theo Pontragin của $Pic(G)$).

Chứng minh thứ hai của Định lý 3.1.5. Lập luận như trong chứng minh thứ nhất ta có thể giả sử G là nửa đơn, đơn liên. Đồng thời, để chứng minh định lý, áp dụng lập luận như trong chứng minh của Định lý 4.3.3 ([55]) ta chỉ cần chứng minh mệnh đề sau.

Mệnh đề 3.2.1 *Cho $\bar{G}^q$ nhóm phụ hợp nửa đơn tựa phân rã xác định trên k, P là một k-nhóm con parabolic của $\bar{G}^q$. Giả sử một phần tử $x \in \mathrm{H}^1_{flat}(k, \bar{G}^q)$ có địa phương hóa tại v thuộc vào ảnh của ánh xạ tự nhiên*

$$\mathrm{H}^1_{flat}(k_v, P) \to \mathrm{H}^1_{flat}(k_v, \bar{G}^q)$$

với mọi $v \in V$. Khi đó x thuộc vào ảnh của $\mathrm{H}^1_{flat}(k, P)$ trong $\mathrm{H}^1_{flat}(k, \bar{G}^q)$.

Để chứng minh Mệnh đề 3.2.1, ta cần các kết quả sau.

Bổ đề 3.2.2 *Cho G là một nhóm nửa đơn xác định trên k, S là một k-xuyến phân rã. Khi đó*

(1) *Nếu P là một k-nhóm con parabolic của G có k-nhóm Levi là $Z_G(S)$, thì* $\mathrm{H}^1_{flat}(k, P) \xrightarrow{\beta} \mathrm{H}^1_{flat}(k, G)$ *là đơn ánh.*

(2) *Nếu k là một trường toàn cục và G thỏa mãn nguyên lý Hasse về đối đồng điều, thì P và $Z_G(S)$ cũng vậy.*

Chứng minh Bổ đề 3.2.2 : (1) Ta xét dãy khớp

$$1 \to P \to G \to G/P \to 1$$

và dãy khớp dài cảm sinh

$$\cdots G(k) \xrightarrow{\pi} (G/P)(k) \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^1(k, P) \xrightarrow{\beta} \mathrm{H}^1(k, G)$$

Theo [50, 4.13] ta có π là toàn ánh. Do đó $\mathrm{Ker}(\beta) = \mathrm{Im}(\delta) = \mathrm{Im}(\delta \circ \pi) = 0$. Ta còn phải chứng minh β là đơn ánh. Thật vậy, giả sử $[a], [a']$ có cùng ảnh trong $\mathrm{H}^1(k, G)$. Ta gọi b là ảnh của a trong $\mathrm{Z}^1(k, G)$. Ký hiệu ${}_aP$ là xoắn của P bởi a, ${}_bG$ là xoắn của G bởi b. Khi đó ta có sơ đồ giao hoán sau (xem [37, Prop. 5.4]):

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \to & \mathrm{H}^1(k, P) & \xrightarrow{\beta} & \mathrm{H}^1(k, G) \\ & & \downarrow \tau_a & & \downarrow \tau_b \\ 0 & \to & \mathrm{H}^1(k, {}_aP) & \xrightarrow{\beta'} & \mathrm{H}^1(k, {}_bG) \end{array}$$

Chú ý rằng τ_a, τ_b là các song ánh, $\tau_a([a]) = 0$ và $\tau_b([b]) = 0$. Từ hình vuông giao hoán, ta có $\beta([a])$ và $\beta([a'])$ có cùng ảnh tầm thường (=0) trong $\mathrm{H}^1(k, {}_bG)$, $\tau_a([a])$ và $\tau_a([a'])$ có cùng ảnh tầm thường trong $\mathrm{H}^1(k, {}_bG)$. Từ đó suy ra $\tau_a([a]) = \tau_a([a']) = 0$ kéo theo $[a] = [a']$ và β là đơn ánh.

(2) Ta đặt $M = Z_G(S)$. Trước hết ta chứng minh $\mathrm{H}^1(k, M) \cong \mathrm{H}^1(k, P)$. Ta xét dãy khớp (chú ý là theo Borel-Tits [50], $R_u(P)$ luôn xác định và phân rã trên k).

$$1 \to R_u(P) \to P \xrightarrow{p} M \to 1.$$

Do $P = R_u(P).M$ (tích nửa trực tiếp) nên dãy khớp trên chẻ ra, tức là ta có $i : M \to P$ sao cho $p \circ i = id_M$. Khi đó ánh xạ hợp thành

$$\mathrm{H}^1(k, M) \xrightarrow{i^*} \mathrm{H}^1(k, P) \xrightarrow{p^*} \mathrm{H}^1(k, M)$$

là đồng nhất, kéo theo p^* là toàn ánh. Mặt khác, cũng từ dãy khớp trên, ta có dãy khớp đối đồng điều

$$\mathrm{H}^1(k, R_u(P)) \to \mathrm{H}^1(k, P) \xrightarrow{p^*} \mathrm{H}^1(k, M)$$

trong đó căn lũy đơn của P là một k-nhóm lũy đơn phân rã trên k (theo [50]) nên có đối đồng điều Galoa tầm thường. Vậy ta có $\mathrm{Ker}(p^*) = 0$. Sử dụng phép xoắn bởi một đối xích như trong chứng minh ý (1) ta suy ra p^* là đơn ánh, vậy p^* là song ánh.

Tiếp theo, ta xét sơ đồ giao hoán với dòng trên khớp:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \to & \mathrm{H}^1(k,P) & \xrightarrow{\beta} & \mathrm{H}^1(k,G) \\ & & \downarrow r_P & & \downarrow r_G \\ & & \prod_v \mathrm{H}^1(k_v,P) & \xrightarrow{\beta'} & \prod_v \mathrm{H}^1(k_v,G) \end{array}$$

Vì G thỏa mãn nguyên lý Hasse cho đối đồng điều Galoa bậc 1 nên $\mathrm{Ker}(r_G) = 0$ kéo theo $\mathrm{Ker}(r_P) = 0$. Vậy P và M cũng thỏa mãn nguyên lý Hasse cho cho đối đồng điều Galoa H^1.

Bổ đề 3.2.3 *Cho G là một k-nhóm nửa đơn, P là một k-nhóm con parabolic của G, $P = M.R_u(P)$ là một phân tích Levi của P xác định trên k. Khi đó các ánh xạ tự nhiên $M \to P$, $P \to G$ và $M \to G$ cảm sinh các đơn ánh $\mathcal{A}(M) \to \mathcal{A}(P)$, $\mathcal{A}(P) \to \mathcal{A}(G)$ và $\mathcal{A}(M) \to \mathcal{A}(G)$.*

Chứng minh Bổ đề 3.2.3: Ta chú ý rằng $\mathcal{A}(M) = Pic(M)^D$, $\mathcal{A}(P) = Pic(P)^D$, $\mathcal{A}(G) = Pic(G)^D$, nên để chứng minh các ánh xạ trên là các đơn ánh ta cần chỉ ra rằng các ánh xạ đối ngẫu $Pic(G) \to Pic(P)$, $Pic(P) \to Pic(M)$, và $Pic(G) \to Pic(M)$ là toàn ánh. Theo [50, Sec. 5], k-phân thớ $G \to G/P$ là tầm thường địa phương trong tôpô Zariski, vậy theo [13, p. 276], hoặc [52, Prop. 6.10], ánh xạ tự nhiên $Pic(G) \to Pic(P)$ là toàn ánh.
Tính chất toàn ánh của $Pic(P) \to Pic(M)$ có từ sự chẻ ra $P = M.R_u(P)$. Cụ thể là ta có ánh xạ chiếu $p : P \to M$, và phép nhúng $i : M \to P$, với $p \circ i = id_M$. Các ánh xạ này cảm sinh các đồng cấu $p' : Pic(M) \to Pic(P)$ và $i' : Pic(P) \to Pic(M)$ với $i' \circ p' = id_{Pic(M)}$. Nói riêng ra, i' là toàn ánh.
Tính chất toàn ánh của ánh xạ thứ ba $Pic(G) \to Pic(M)$ được suy ra từ tính toàn ánh của hai ánh xạ đầu và Bổ đề 3.2.3 được chứng minh.

Tiếp theo, như đã giới thiệu ở phần đầu mục này, chúng tôi sử dụng kết quả sau của R.E.Kottwitz và N.Q.Thắng.

Bổ đề 3.2.4 (xem [19], [43, Thm. 2.6]) *Cho k là một trường toàn cục, G là một nhóm liên thông reductive xác định trên k. Khi đó tồn tại một dãy khớp*

$$0 \to Ш^1(G) \to \mathrm{H}^1_{flat}(k, G) \to \oplus_v \mathrm{H}^1_{flat}(k_v, G) \overset{\Sigma_G}{\to} \mathcal{A}(G),$$

có tính hàm tử theo G.

Chứng minh Mệnh đề 3.2.1. Đặt $G = \bar{G}^q$ là k-nhóm nửa đơn phụ hợp và tựa phân rã. Đặt $P = M.R_u(P)$ như trên ($M = Z_G(S)$ với S là một xuyến con k-phân rã của G, xem 1.5.23). Theo chứng minh của Bổ đề 3.2.2(2) ta có $\mathrm{H}^1(k, M) \cong \mathrm{H}^1(k, P)$. Ta còn có M là k-nhóm reductive liên thông, nên áp dụng Bổ đề 3.2.4, ta có biểu đồ sau giao hoán với các dòng khớp

$$\begin{array}{ccccccc} Ш^1(M) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1(k, M) & \longrightarrow & \bigoplus_v \mathrm{H}^1(k_v, M) & \longrightarrow & \mathcal{A}(M) \\ \downarrow & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ Ш^1(G) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1(k, G) & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_v \mathrm{H}^1(k_v, G) & \longrightarrow & \mathcal{A}(G) \end{array}$$

Mặt khác, theo Bổ đề 2.4.4, các nhóm nửa đơn phụ hợp trên trường toàn cục thỏa mãn nguyên lý Hasse cho đối đồng điều, vì vậy δ có hạt nhân tầm thường (và là đơn ánh). Vì vậy trong biểu đồ trên, nhóm Shafarevich - Tate của G và của M (theo Bổ đề 3.2.2(2)) là tầm thường, tức là $Ш^1(G) = 0$, $Ш^1(M) = 0$. Ta cũng có các ánh xạ α, β là đơn ánh theo Bổ đề 3.2.2(1) và chứng minh của 3.2.2(2), đồng thời, ánh xạ γ là đơn ánh theo Bổ đề 3.2.3. Lấy $x \in \mathrm{H}^1(k, G)$ sao cho ảnh của nó trong $\bigoplus_v \mathrm{H}^1(k_v, G)$ nằm trong ảnh của β. Vì dòng cuối là khớp và γ là đơn ánh, nên ta suy ra rằng có phần tử $y \in \mathrm{H}^1(k, M)$ sao cho $\alpha(y)$ và x có cùng ảnh trong $\bigoplus_v \mathrm{H}^1(k_v, G)$. Vì δ là đơn ánh, nên ta suy ra rằng $x = \alpha(y)$ cho ta điều phải chứng minh. □

3.3 Một số áp dụng của Định lý 3.1.5

A. Chứng minh khác của Định lí 2.2.1 và Định lí 2.4.1. Áp dụng nguyên lý Hasse cho không gian thuần nhất vừa trình bày, chúng tôi đưa ra cách chứng minh khác cho các Định lý 2.2.1 và Định lý 2.4.1 như sau.

Định lý 2.2.1 *Cho k là trường toàn cục, G là k-nhóm reductive liên thông. Khi đó G là phân rã trên k nếu và chỉ nếu G cũng phân rã trên mọi k_v, với $v \in V$.*

Chứng minh thứ hai của Định lý 2.2.1. Ta sẽ sử dụng Định lý 3.1.6 để chứng minh định lý. Lập luận như trong chứng minh thứ nhất ta có thể giả sử rằng G là nhóm hầu đơn tuyệt đối xác định trên trường toàn cục k và ta sử dụng sơ đồ Dynkin của G theo ký hiệu và phân loại của Tits [45].

Với mỗi sơ đồ Dynkin, ta ký hiệu G_0 là nhóm k-phân rã với dạng đã cho. Vì vậy nếu n là số các đỉnh của $\Delta(G_0, k)$, thì mỗi đỉnh đều thuộc khuyên (chứa một đỉnh). Lấy $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ là tập các nghiệm đơn được biểu diễn trong $\Delta(G_0, k)$ bởi n đỉnh ở trên. Với mỗi α_i cố định, theo giả thiết G là phân rã trên k_v với mọi v nên G có k_v-nhóm con parabolic cực đại kiểu $\Delta \setminus \alpha_i$ với mọi v. Áp dụng 3.1.6 ta suy ra G cũng có một nhóm con parabolic cực đại kiểu $\Delta \setminus \alpha_i$ xác định trên k. Đặc biệt, trong chỉ dẫn Tits $\Delta(G, k)$, ta có các đỉnh tương ứng với α_i là khuyên. Điều đó đúng với mọi i, nên tất cả các đỉnh đều thuộc khuyên, tức là G là k-phân rã và có điều phải chứng minh. □

Định lý 2.4.1 *Cho k là trường toàn cục, G là nhóm đại số tuyến tính liên thông xác định trên k. Nếu G là tựa phân rã trên k_v với mọi v thì G là tựa phân rã trên k.*

Chứng minh thứ hai của Định lí 2.4.1. Theo định nghĩa và theo chứng minh của Định lý 2.3.1 ta có thể giả sử rằng G là nhóm reductive. Ký hiệu $\mathcal{B}_G$ là đa tạp các nhóm con Borel của G. Ta biết rằng $\mathcal{B}_G$ là một không gian thần nhất xạ ảnh của G xác định trên k (Xem [50, 5.24]). Đồng thời, G là tựa phân rã trên k_v tức là G có nhóm con Borel xác định trên k_v khi và chỉ khi $\mathcal{B}_G$ có k_v-điểm (xem [50, 5.24]). Áp dụng nguyên lý Hasse cho $\mathcal{B}_G$ (Định lý 3.1.5) suy ra $\mathcal{B}_G$ có k-điểm, tức là G có nhóm con Borel xác định trên k. □

B. Hạng tương đối của nhóm reductive và nguyên lý địa phương-toàn cục.

Tiếp theo là một số áp dụng của nguyên lý địa phương-toàn cục liên quan đến hạng tương đối (chiều của xuyến con phân rã cực đại) của một nhóm liên thông reductive G xác định trên trường toàn cục k.

Gọi T là một k-xuyến cực đại của G, T_s là một xuyến con cực đại k-phân rã của T, khi đó $T = T_a T_s$ là tích hầu trực tiếp của một k-xuyến không đẳng hướng T_a của T với T_s. Đặt $s := \dim(T_s), a := \dim(T_a)$ và $r := \mathrm{rank}_k(G)$ là k-hạng của G, khi đó $n := s + a = \dim(T)$ là hạng của G và ta nói rằng T có dạng (a, s). Rõ ràng là $r \geq s$. Với mỗi chốn v của k, ký hiệu $r_v := \mathrm{rank}_{k_v}(G)$ thì ta có $r_v \geq r$ với mọi v. Ta chú ý thêm rằng, với một k-nhóm G, điều kiện $\mathrm{rank}_k(G) > 0$ tương đương với G là đẳng hướng trên k. Ta có những câu hỏi liên quan đến r_v:

(*a*) *Liệu rằng với số nguyên không âm c và với mọi v, ta có* $r_v = c$*, có suy ra được* $r = c$*?*

(*b*) *Nếu có* $r_v > 0$ *với mọi v có suy ra* $r > 0$*?*

(*c*) *Nếu k là một trường toàn cục và nếu G có* k_v*-xuyến cực đại dạng* (a, s) *tại mọi chốn v của k, G có k-xuyến cực đại dạng* (a, s)*?*

(*d*) *Có thể xảy ra đẳng thức* $min_v\, r_v = r$ *không?*

Nhận xét 3.3.1 1) Có thể nói rằng những câu hỏi này liên quan mật thiết đến những kết quả trong mục trước. Chẳng hạn, nếu G có một xuyến cực đại T dạng $(0, n)$ trên trường k, thì G phân rã trên k. Do đó ta có câu trả lời khẳng định trong trường hợp này.
2) Nếu G có một k_v-xuyến cực đại dạng $(1, n-1)$ tại mọi chốn v, thì điều tốt nhất ta có thể nói là G là đẳng hướng trên k_v với mọi v. Nếu ta có câu trả lời khẳng định cho (b) trên k-nhóm G cũng có nghĩa là nguyên lý địa phương-toàn cục là đúng cho tính chất đẳng hướng của G.
3) Nếu G là nửa đơn và có ít nhất hai thành phần hầu đơn, thì ta có thể xây dựng ví dụ về một nhóm nửa đơn G xác định trên trường toàn cục k sao cho G là đẳng hướng trên k_v tại mọi chốn v nhưng G là không đẳng hướng trên k. Do đó câu hỏi (a) chỉ thực sự có nghĩa khi nhóm G là một k-nhóm hầu đơn tuyệt đối. Chúng tôi có nguyên lý địa phương-toàn cục về tính đẳng hướng của các nhóm đại số hầu đơn trên trường toàn cục sau đây.

Định lý 3.3.2 *Cho k là một trường toàn cục, G là một k-nhóm hầu đơn tuyệt đối, c là một số nguyên không âm.*

(*i*) *Nếu* $r_v = c$ *với mọi v, thì* $r = c$*.*

(*ii*) *Cho G có sơ đồ Dynkin khác với* ${}^1\mathrm{A}_n$*, khác với* ${}^1\mathrm{E}_6$ *trên trường* $k \subset \mathbb{R}$*. Với mỗi chốn v của k, ký hiệu* $r_v := \mathrm{rank}_{k_v}(G)$*. Nếu* $r_v > 0$ *với mọi v thì* $r > 0$*.*

(*iii*) *Tồn tại trường toàn cục k và những k-nhóm hầu đơn dạng* ${}^1\mathrm{A}_n$ *hoặc* ${}^1\mathrm{E}_6$ *mà không thỏa mãn nguyên lý địa phương-toàn cục đối với tính đẳng hướng trên k.*

Chứng minh. (*i*) Ta đã biết rằng (xem chứng minh Prop. 9.3 trong [52]) với hầu hết các chốn v của k, nhóm G là tựa phân rã trên k_v.
Trường hợp 1. Giả sử G là một kiểu trong trên k. Khi đó G cũng là một kiểu trong trên mọi k_v, vậy ta có $c = r_v = \mathrm{rank}(G)$ với mọi v, nghĩa là G là phân rã trên k_v với mọi v. Theo nguyên lý địa phương - toàn cục cho tính chất phân rã của nhóm đại số tuyến tính, ta có G là phân rã trên k, vậy $c = \mathrm{rank}(G)$.

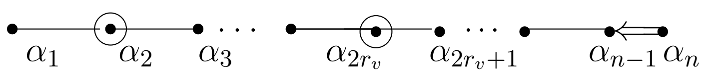
Trường hợp 2. Giả sử G có kiểu ngoài trên k, nếu G là phân rã trên k_v với mọi v thì G cũng phân rã trên k, mâu thuẫn với giả thiết về kiểu ngoài của G. Vì thế G là tựa phân rã và không là phân rã trên k_v với mọi v (vì $r_v = c$ cố định với mọi v). Theo các Định lý 2.2.1 và Định lý 2.4.1 ta suy ra G là tựa phân rã (nhưng không phân rã) trên k, vậy $r = c$.

(ii) Trước tiên ta nhận xét rằng, nếu k là trường hàm toàn cục và G có kiểu khác A thì G là đẳng hướng trên k (Định lý 2.2.2). Như vậy nếu G không có dạng A, thì ta chỉ cần xét trường hợp các trường số. Ta xét từng dạng nhóm như sau.

(1) Dạng ${}^2\mathrm{A}_n$**.** Ta có thể giả sử G là một k-nhóm hầu đơn đơn liên dạng ${}^2\mathrm{A}_n$. Theo phân loại của Tits ([45]), $G(k) = \mathrm{SU}_{(n+1)/d}(D, f)$, trong đó D là đại số chia tâm trên mở rộng bậc hai k' của k với phép đối hợp loại hai J sao cho $k = \{x \in k' | x^J = x\}$ và f là dạng hecmit trên (D, J) không suy biến với chỉ số Witt là r và $d | n+1$, $2rd \leq n+1$. Vì G có kiểu ngoài nên ta có $n \geq 2$. Do G là đẳng hướng trên k_v với mọi v, nên f cũng vậy (với mỗi v, f có chỉ số Witt trên k_v bằng r_v), áp dụng nguyên lý Hasse cho dạng hecmit trên (D, J) (Định lý 1.4.4) ta suy ra f là đẳng hướng trên k.

(2) Dạng B_n**,** $n \geq 2$**.** Gọi $\mathrm{Ad}(G)$ là k-nhóm phụ hợp ứng với G. Khi đó $\mathrm{Ad}(G)(k) = \mathrm{SO}_{2n+1}(f)$, với f là dạng toàn phương không suy biến trên k có chỉ số Witt là r. Theo giả thiết, G là đẳng hướng trên k_v với mọi v, tức là f là đẳng hướng trên k_v với mọi v. Theo Định lý Hasse-Minkowski, f là đẳng hướng trên k, nên G cũng vậy.

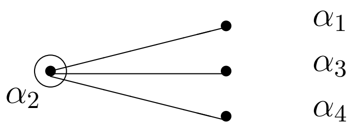
(3) Dạng $\mathrm{C}_n, n \geq 2$**.** Ta có thể giả sử rằng G đơn liên dạng $\mathrm{C}_n, n \geq 2$. Theo phân loại của Tits [45], hoặc G là k_v-phân rã, hoặc G có chỉ dẫn Tits trên k_v như sau.



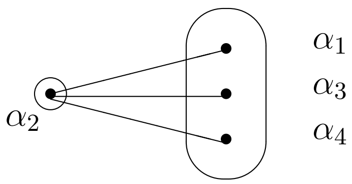
Ở đây $r_v \geq 1$. Trường hợp sau ta có $G(k) = \mathrm{SU}_n(D, f)$, ở đó D là đại số chia quaternion không tầm thường tâm k, f là một dạng hecmit không suy biến có chỉ số Witt r ứng với phép đối hợp chuẩn J trên D. Từ đó suy ra rằng f là đẳng hướng trên k vì $f \otimes k_v$ là đẳng hướng với mọi v, tức là $r > 0$.

(4) Dạng $\mathrm{D}_n, n \geq 4$ **(khác dạng** ${}^3\mathrm{D}_4$, ${}^6\mathrm{D}_4$**).** Ta có thể giả sử rằng $G(k) = \mathrm{SU}_n(D, f)$, với D là k hoặc là một đại số chia quaternion không tầm thường tâm k, f hoặc là một dạng toàn phương không suy biến trên k hoặc là một dạng phản hecmit không suy biến ứng với phép đối hợp chuẩn J trên D với chỉ số Witt r. Theo Định lý Hasse-Minkowski cho dạng toàn phương (hoặc theo Định lý 1.4.3 cho dạng phản hecmit), f là đẳng hướng trên k, tức là $r > 0$.

(5) Dạng ${}^3\mathrm{D}_4$, ${}^6\mathrm{D}_4$**.** Giả sử rằng G là đẳng hướng trên k_v với mọi $v \in V_k$. Khi đó theo [45] chỉ dẫn Tits của G trên k_v có dạng



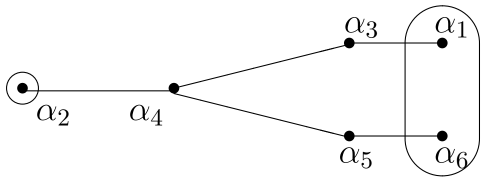
hoặc dạng tựa phân rã



Nhìn vào chỉ dẫn Tits của G, ta chú ý rằng đỉnh ứng với nghiệm α_2 luôn được khuyên. Áp dụng Mệnh đề 3.1.6 ta suy ra G có một k-nhóm con parabolic cực đại dạng P_{α_2}, nói riêng ra, G là k-đẳng hướng.

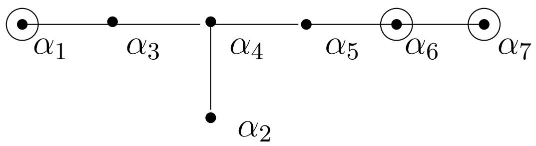
(6) Dạng E_6**.** Giả sử rằng G có dạng ${}^1\mathrm{E}_6$ (trên trường số k thuần ảo), theo giả thiết G là đẳng hướng khắp nơi nên trên mỗi k_v, G có dạng ${}^1E_{6,2}^{16}$ hoặc dạng ${}^1E_{6,6}^{0}$ (phân rã) (G không có dạng ${}^1E_{6,2}^{28}$ vì k là thuần ảo). Vậy trong trường hợp này G cũng đẳng hướng trên k.

Giả sử G có dạng ${}^2E_6$ (trên trường số k bất kì) và G đẳng hướng khắp nơi. Khi đó, trên $\mathbb{R}$ (nếu k có phép nhúng vào $\mathbb{R}$) G là tựa phân rã hoặc G phải có dạng ${}^2\mathrm{E}_{6,2}^{16'}$ với chỉ dẫn Tits

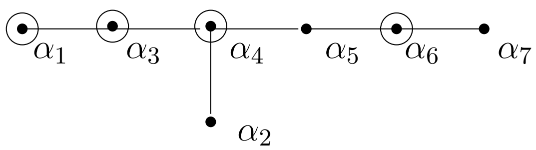


Trong các trường hợp đó, tập một nghiệm $\Theta = \{\alpha_2\}$ luôn được khuyên ([45, pp. 58 - 59]). Còn trên một trường $\mathfrak{p}$-adic k_v, từ giả thiết đối với G ta biết rằng G là k_v-phân rã hoặc k_v-tựa phân rã, vì vậy tập Θ cũng là tập được khuyên. Vì vậy, địa phương khắp nơi, Θ được khuyên, nghĩa là với mỗi chốn v của k, G có một k_v-nhóm con parabolic dạng P_Θ, trong đó P_Θ nhóm con parabolic chuẩn cực đại của G ứng với tập con Θ. Tiếp tục áp dụng Mệnh đề 3.1.6, ta suy ra G có một nhóm con parabolic dạng P_Θ trên k, tức là G là k-đẳng hướng.

(7) Dạng E_7**.** Trên $\mathbb{R}$ (nếu k được nhúng vào $\mathbb{R}$) ta có G là đẳng hướng nên trên $\mathbb{R}$, G có dạng $\mathrm{E}^{28}_{7,3}$ với chỉ dẫn Tits

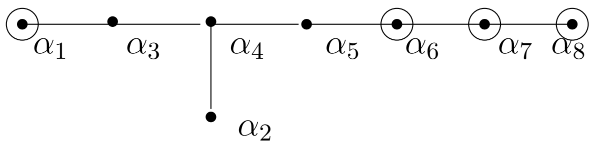


hoặc dạng $\mathrm{E}^{9}_{7,4}$ với chỉ dẫn Tits



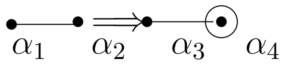
hoặc dạng phân rã (mỗi đỉnh đều được khuyên). Trên mỗi k_v với v phi Acsimet, vì G là đẳng hướng nên G có dạng $\mathrm{E}^{9}_{7,4}$ hoặc dạng $\mathrm{E}^{0}_{7,7}$ (phân rã). Trong mọi trường hợp, tập $\Theta := \{\alpha_1, \alpha_6\}$ là tập được khuyên. Như trên ta cũng suy ra G có một k-nhóm con parabolic chuẩn dạng P_Θ, vì vậy G là đẳng hướng.

(8) Dạng E_8**.** Trên $\mathbb{R}$ (nếu k được nhúng vào $\mathbb{R}$), hoặc G phân rã hoặc G có chỉ dẫn Tits (xem [45]) như sau



Trên các trường $\mathfrak{p}$-adic, ta biết rằng G là phân rã. Những lập luận trên cũng chỉ ra rằng tập con các nghiệm đơn $\Theta := \{\alpha_1, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$ là tập được khuyên, vậy G có một k-nhóm con parabolic dạng P_Θ. Nói riêng ra, G là đẳng hướng trên k.

(9) Dạng F_4**.** Nếu k được nhúng vào $\mathbb{R}$, thì G là đẳng hướng trên $\mathbb{R}$ và G có dạng phân rã $(\mathrm{F}^0_{4,4})$ hoặc dạng $\mathrm{F}^{21}_{4,1}$ với chỉ dẫn Tits sau



Trên trường $\mathfrak{p}$-adic, ta biết rằng G luôn là phân rã (xem [45]). Trên moi k_v, tập con một nghiệm đơn $\{\alpha_4\}$ là tập được khuyên, và như trên ta suy ra rằng G là đẳng hướng trên k.

(10) Dạng G_2**.** Ta thấy G là phân rã địa phương khắp nơi, vậy ta biết G cũng là phân rã trên k.

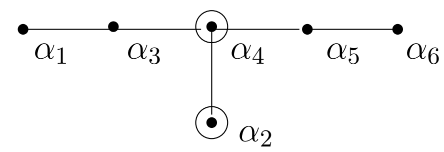
(iii) Mệnh đề liên quan đến câu hỏi (d) ở trên, liệu rằng đẳng thức $\min_v\ r_v = r$ có luôn xảy ra không. Chúng ta sẽ chỉ ra rằng trường hợp tổng quát điều này không đúng. Đặc biệt, nguyên lý địa phương-toàn cục cho tính đẳng hướng không đúng ngay cả trong một số trường hợp các nhóm hầu đơn tuyệt đối.

(11) Dạng ${}^1\mathrm{A}_n$**.** Một ví dụ trong trường hợp này được đưa ra bởi Harder (xem [5, p. 778]). Cụ thể là, cho k là một trường toàn cục với một đại số chia đơn tâm bậc $n = pq$, p, q là hai số nguyên tố khác nhau. Chọn $2p$ (tương ứng $2q$) chốn phi Acsimet phân biệt $\{v_1, \ldots, v_{2p}\}$ (tương ứng $\{w_1, \ldots, w_{2q}\}$) của k. Khi đó theo luật thuận nghịch cho đại số đơn tâm trên trường toàn cục, sẽ tồn tại một đại số chia D tâm k có chỉ số n, thỏa mãn $\mathrm{inv}_{v_i}(D) = 1/p$ với mọi $1 \leq i \leq 2p$ (tương ứng

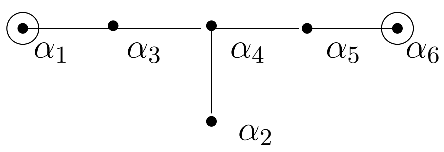
$\mathrm{inv}_{w_j}(D) = 1/q$ với mọi $1 \leq j \leq 2q$) và $\mathrm{inv}_v(D) = 1$ với mọi v khác. Khi đó k-nhóm G được cho bởi $G(k) = \mathrm{SL}_1(D)$ là không đẳng hướng trên k (ở đây áp dụng phân loại của Tits (xem [45]), G có chỉ dẫn Tits không có đỉnh được khuyên). Mặt khác, trên mỗi k_v với $v \in \{v_1, \ldots, v_{2p}\}$ ta có $D \otimes k_v = M(q, D_p)$ là đại số ma trận bậc q trên đại số chia D_p. Khi đó $G(k_v) = \mathbf{SL}_1(D \otimes k_v) = \mathrm{SL}_q(D_p)$ nên G là đẳng hướng trên k_v ($r_v = q - 1 > 0$). Lập luận tương tự ta cũng suy được G đẳng hướng trên mọi k_v.

(12) Dạng $^1\mathrm{E}_6$. Cho $k \subset \mathbb{R}$ là một trường số. Ta sẽ chỉ ra rằng tồn tại một k-nhóm không đẳng hướng kiểu $^1\mathrm{E}^{78}_{6,0}$ mà là đẳng hướng trên $\mathbb{R}$ và trên k_v với mọi chốn phi Acsimet v.

Cố định một chốn phi Acsimet v_0 của k. Gọi S là tập hữu hạn khác rỗng những chốn phi Acsimet trên k, không chứa v_0. Với mỗi $v \in S$, lấy D_v là một k_v-đại số chia đơn tâm bậc 3. Theo cách xây dựng của Tits về đại số Jordan ([41], [45]), mỗi D_v liên kết với một k_v-nhóm $G^{(v)}$ dạng $^1\mathrm{E}^{16}_{6,2}$ có chỉ dẫn Tits là



Với mỗi v thực, ta có thể xây dựng $\mathbb{R}$-nhóm G^∞ kiểu $^1\mathrm{E}^{28}_{6,2}$ với chỉ dẫn Tits



Với mọi chốn phi Acsimet khác $v \notin S \cup \{v_0\}$, ta lấy $G^{(v)}$ là k_v-nhóm phân rã có dạng E_6. Khi đó theo Định lý 3.1.1, tồn tại một k-nhóm G dạng $^1\mathrm{E}_6$, sao cho với mọi $v \neq v_0$, ta có G đẳng cấu với $G^{(v)}$ trên k_v. Theo kết quả đã biết của Kneser (xem [31, Ch. VI, Thm. 5]) thì trên k_{v_0}, G là đẳng hướng, vì vậy G là đẳng hướng địa phương khắp nơi, nhưng G lại là không đẳng hướng trên k.

Định lý 3.3.2 được chứng minh. $\square$

3.4 Nguyên lý Hasse cho các không gian thuần nhất chính

Xét một cấu xạ $G \xrightarrow{\alpha} H$ giữa các k-nhóm đại số. Khi đó ta có ánh xạ $\mathrm{H}^1(k, G) \xrightarrow{\alpha^1} \mathrm{H}^1(k, H)$. Ta nói một lớp đẳng cấu của không gian thuần nhất $[P] \in \mathrm{H}^1(k, H)$ được nâng lên thành lớp đẳng cấu của không gian thuần nhất $[Q] \in \mathrm{H}^1(k, G)$ nếu $[P] = \alpha^1([Q])$. Khi đó ta còn nói lớp đối đồng điều $[P] \in \mathrm{H}^1(k, H)$ được *nâng lên tới* $\mathrm{H}^1(k, G)$. Trong mục này chúng tôi trình bày kết quả về nguyên lý địa phương-toàn cục cho tính chất nâng các không gian thuần nhất chính. Trước hết ta cần giới thiệu một số ký hiệu và kết quả sau đây (theo [8] và [15]).

(a) Cho k là một trường, G là một nhóm reductive xác định trên k, ta ký hiệu $G^{ss} := [G, G]$ là phần nửa đơn của G, $G^{tor} = G/G^{ss}$ là xuyến thương tương ứng. Cho G^{sc} là phủ đơn liên của G^{ss}, $Z^{sc} = Z(G^{sc})$, $Z^{ss} = Z(G^{ss})$, $Z = Z(G)$. Ta xét phức ngắn

$$(1) \qquad 1 \to Z^{sc} \xrightarrow{\rho} Z \to 1.$$

Trong đó ρ là cấu xạ hợp thành $G^{sc} \to G^{ss} \hookrightarrow G$. Ta định nghĩa nhóm đối đồng điều aben bậc i ($i = 1, 2$) của G như trong [9, formular 2.13.3, Exam. 4.14 (ii)] và [8, Sec. 2]), $\mathrm{H}^i_{ab}(k, G) := \mathcal{H}^i(k, Z^{sc} \to Z)$ (siêu đối đồng điều của phức (1)). Với mỗi k-xuyến cực đại $T \subset G$ ta có tạo ảnh $\rho^{-1}(T) = T^{sc}$ là cực đại trong G^{sc} và ta xét phức ngắn

$$(1') \qquad 1 \to T^{sc} \xrightarrow{\rho} T \to 1.$$

Theo ([8, Lemma 3.8.1]; [14]) ta có các tựa đẳng cấu

$$(T^{sc} \xrightarrow{\rho} T) \sim (Z^{sc} \xrightarrow{\rho} Z) \sim (G^{sc} \to G),$$

và chúng sẽ cho ta các đẳng cấu của các siêu đối đồng điều tương ứng. Như vậy định nghĩa trên không phụ thuộc vào việc chọn các xuyến cực đại T. Do đó ta có thể xác định siêu đối đồng điều, và đặc biệt là đối đồng điều aben dựa vào một phức ngắn các xuyến.

Áp dụng kết quả của [8, Prop. 3.11] ta có ánh xạ sau (*ánh xạ aben hóa*) đây giữa các hàm tử

$$ab^i_G : \mathrm{H}^i(k, G) \to \mathrm{H}^i_{ab}(k, G), i = 0, 1.$$

(b) Ta cũng đã biết rằng, với mỗi dãy khớp các k-nhóm liên thông reductive

$$1 \to G_1 \to G_2 \to G_3 \to 1$$

cho ta một dãy khớp các k-xuyến cực đại tương ứng

$$1 \to T_1 \to T_2 \to T_3 \to 1;$$

và một dãy khớp các nhóm nửa đơn, đơn liên tương ứng (theo [15, Prop. 3.12])

$$1 \to G_1^{sc} \to G_2^{sc} \to G_3^{sc} \to 1$$

và dãy khớp các k-xuyến cực đại tương ứng

$$1 \to T_1^{sc} \to T_2^{sc} \to T_3^{sc} \to 1.$$

Khi đó ta có dãy khớp các phức ngắn

$$1 \to (T_1^{sc} \to T_1) \to (T_2^{sc} \to T_2) \to (T_3^{sc} \to T_3) \to 1$$

vì vậy cũng có một dãy khớp của các đối đồng điều aben

$$\cdots \to \mathrm{H}^{i-1}_{ab}(k, G_3) \to \mathrm{H}^i_{ab}(k, G_1) \to \mathrm{H}^i_{ab}(k, G_2) \to \mathrm{H}^i_{ab}(k, G_3) \to \mathrm{H}^{i+1}_{ab}(k, G_1) \to \cdots$$

(c) Tiếp theo, cho G là một nhóm liên thông reductive. Ta xét nhóm phụ hợp $\mathrm{Ad}(G) = G/Z(G)$ và dãy khớp

$$1 \to Z(G) \to G \to \mathrm{Ad}(G) \to 1;$$

khi đó ta có dãy khớp đối đồng điều

$$\mathrm{H}^1_{flat}(k, Z(G)) \to \mathrm{H}^1_{flat}(k, G) \to \mathrm{H}^1_{flat}(k, \mathrm{Ad}(G)) \xrightarrow{\Delta} \mathrm{H}^2_{flat}(k, Z(G)).$$

Với ký hiệu như trên ta phát biểu định nghĩa sau.

Định nghĩa 3.4.1 Nếu với mọi nhóm G đơn liên nửa đơn, Δ luôn là toàn ánh, thì k được gọi (theo [14]) là trường (kiểu) Douai.

Chú ý 3.4.2 (i) Theo [18, Chap. IV, Thm. 2 và Chap. V, Thm. 2]) ta biết rằng mỗi trường $\mathfrak{p}$-adic hoặc trường số đều là một trường kiểu Douai.

(ii) Trong ([12], [42]) các tác giả đã chỉ ra các trường hàm địa phương hay toàn cục cũng là trường kiểu Douai.

Định lý 3.4.3 *Cho k là một trường kiểu Douai có chiều đối đồng điều Galois ≤ 2 thỏa mãn $\mathrm{H}^1_{flat}(k, H) = 0$ với mọi k-nhóm đơn liên nửa đơn liên thông H. Giả sử*

$1 \to G_1 \to G_2 \xrightarrow{\pi} G_3 \to 1$ là một dãy khớp các k-nhóm liên thông reductive. Khi đó một lớp đối đồng điều $p \in \mathrm{H}^1_{flat}(k, G_3)$ có thể nâng lên tới $\mathrm{H}^1_{flat}(k, G_2)$ nếu và chỉ nếu $ab^1_{G_3}(p) \in \mathrm{H}^1_{ab}(k, G_3)$ có thể nâng lên tới $\mathrm{H}^1_{ab}(k, G_2)$. Đặc biệt, ánh xạ $\mathrm{H}^1_{flat}(k, G_2) \to \mathrm{H}^1_{flat}(k, G_3)$ là toàn ánh nếu và chỉ nếu ánh xạ $\mathrm{H}^1_{ab}(k, G_2)) \to \mathrm{H}^1_{ab}(k, G_3))$ là toàn ánh.

Chứng minh. Vì G_i là liên thông reductive nên theo [14, Thm. 5.8(i)], ta có các song ánh sau

$$ab^1_{G_i} : \mathrm{H}^1_{flat}(k, G_i) \simeq \mathrm{H}^1_{ab}(k, G_i).$$

Ta xét sơ đồ sau

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} H^1_{flat}(k,G_2) \arrow[r, "\pi_*"] \arrow[d, "ab^1_{G_2}"'] & H^1_{flat}(k,G_3) \arrow[d, "ab^1_{G_3}"'] \arrow[dr, dotted, "\partial"] & & \\ H^1_{ab}(k,G_2) \arrow[r, "\pi_{ab}"] & H^1_{ab}(k,G_3) \arrow[r, "\Delta"] & H^2_{ab}(k,G_1) \arrow[r] & H^2_{ab}(k,G_2) \end{tikzcd}$$

Theo nhận xét đầu mục ta đã biết, do tính hàm tử, hình vuông trong sơ đồ trên là giao hoán và dòng dưới của sơ đồ là khớp. Vì vậy ta có ánh xạ

$$\partial : \mathrm{H}^1_{flat}(k, G_3) \to \mathrm{H}^2_{ab}(k, G_1).$$

Do đó một lớp đối đồng điều $p \in \mathrm{H}^1_{flat}(k, G_3)$ có thể nâng lên tới $\mathrm{H}^1_{flat}(k, G_2)$ nếu và chỉ nếu $ab^1_{G_3}(p) \in \mathrm{H}^1_{ab}(k, G_3)$ có thể nâng lên tới $\mathrm{H}^1_{ab}(k, G_2)$ và ánh xạ $\mathrm{H}^1_{flat}(k, G_2) \to \mathrm{H}^1_{flat}(k, G_3)$ là toàn ánh nếu và chỉ nếu ánh xạ $\mathrm{H}^1_{ab}(k, G_2)) \to \mathrm{H}^1_{ab}(k, G_3))$ là toàn ánh.

Hệ quả 3.4.4 *Với giả thiết như trong định lý trên, nếu ta giả sử thêm rằng $\mathrm{H}^2_{flat}(k, G_1^{tor}) = 0$ thì ánh xạ $\mathrm{H}^1_{flat}(k, G_2) \to \mathrm{H}^1_{flat}(k, G_3)$ là toàn ánh.*

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh dãy sau là khớp

$$(2) \qquad \mathrm{H}^1_{flat}(k, G_2) \xrightarrow{\pi_*} \mathrm{H}^1_{flat}(k, G_3) \xrightarrow{\partial} \mathrm{H}^2_{ab}(k, G_1) \to \mathrm{H}^2_{ab}(k, G_2).$$

(Trong trường hợp trường số hoặc trường $\mathfrak{p}$-adic, kết quả đã có trong [8, Prop. 5.8, Corol. 5.10]). Với trường k như trong giả thiết định lý đã cho, xét sơ đồ (*) như ở trên với dòng dưới khớp và các ánh xạ $ab^1_{G_i}$, $i = 2, 3$ là các song ánh, ta có

$$\partial \circ \pi_* = \Delta \circ ab^1_{G_3} \circ \pi_* = \Delta \circ \pi_{ab} \circ ab^1_{G_2} = 0,$$

nên $\mathrm{Im}(\pi_*) \subseteq \mathrm{Ker}(\partial)$. Mặt khác, lấy $p_3 \in \mathrm{Ker}(\partial)$ khi đó $\Delta \circ ab^1_{G_3}(p_3) = 0$ nên $ab^1_{G_3}(p_3) \in \mathrm{Ker}(\Delta) = \mathrm{Im}(\pi_{ab})$, tức là tồn tại $q_2 \in \mathrm{H}^1_{ab}(k, G_2)$ để $\pi_{ab}(q_2) = ab^1_{G_3}(p_3)$.

Áp dụng Định lý 3.4.3, ta suy ra $p_3 = \pi_*(p_2) \in \mathrm{Im}(\pi_*)$. Vậy ta có tính khớp tại $\mathrm{H}^1_{flat}(k, G_3)$. Tương tự, ta cũng chứng minh được tính khớp tại $\mathrm{H}^2_{ab}(k, G_1)$.

Tiếp theo, vì kết quả [8, Prop. 2.12] hãy còn đúng trong trường hợp đặc số $p > 0$ (chứng minh tương tự) nên ta có với mỗi k-nhóm liên thông reductive G, với ký hiệu như ở trên, ta có dãy khớp dài sau

$$\cdots \to \mathrm{H}^{i+1}_{flat}(k, \mathrm{Ker}(\rho)) \to \mathrm{H}^i_{ab}(k, G) \to \mathrm{H}^i_{flat}(k, G^{tor}) \to \mathrm{H}^{i+2}_{flat}(k, \mathrm{Ker}(\rho)) \to \cdots$$

Nếu *char.* $k = 0$ thì do $cd(k) \leq 2$ theo giả thiết nên ta có $\mathrm{H}^{i+1}_{flat}(k, \mathrm{Ker}(\rho)) = \mathrm{H}^{i+1}(k, \mathrm{Ker}(\rho)) = 0$. Nếu *char.* $k = p > 0$, ta sử dụng phân tích $\mathrm{Ker}(\rho) = F_1 \times F_2$, trong đó F_1 là lược đồ nhóm hữu hạn đẳng cấu với tích của các nhóm μ_n, với n nguyên tố cùng nhau với p, F_2 lược đồ nhóm hữu hạn đẳng cấu với tích của các nhóm μ_{p^s}. Theo giả thiết $cd(k) \leq 2$, nên $\mathrm{H}^{i+1}_{flat}(k, F_1) = \mathrm{H}^{i+1}(k, F_1) = 0$ ($\forall i \geq 2$), đồng thời, áp dụng [39, Thm. 4] ta cũng có $\mathrm{H}^{i+1}_{flat}(k, F_2) = 0$ ($\forall i \geq 2$). Do đó từ dãy khớp dài ta có các đẳng cấu

$$\mathrm{H}^i_{ab}(k, G) \simeq \mathrm{H}^i_{flat}(k, G^{tor}), \ i \geq 2.$$

Áp dụng điều này vào các nhóm liên thông reductive G_1, G_2 trong dãy (2) ta nhận được dãy khớp

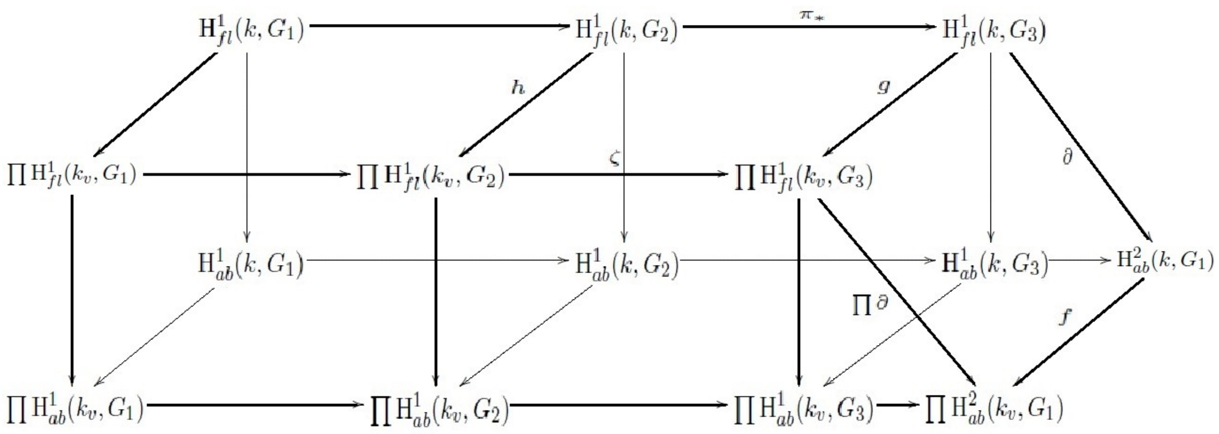
(3) $$\mathrm{H}^1_{flat}(k, G_2) \xrightarrow{\pi_*} \mathrm{H}^1_{flat}(k, G_3) \xrightarrow{\partial} \mathrm{H}^2_{flat}(k, G_1^{tor}) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{H}^2_{flat}(k, G_2^{tor}),$$

và ta có điều phải chứng minh. □

Định lý sau đây là nguyên lý địa phương- toàn cục cho tính chất nâng các lớp đối đồng điều, và đây là một mở rộng của kết quả của Borovoi ([7]) cho trường số sang trường hợp trường hàm toàn cục.

Định lý 3.4.5 *Cho k là một trường hàm toàn cục, V là tập tất cả các chốn của k. Giả sử $1 \to G_1 \to G_2 \xrightarrow{\pi} G_3 \to 1$ là một dãy khớp các k-nhóm liên thông reductive. Giả sử rằng $Ш^2(G_1^{tor}) = 0$. Khi đó mỗi lớp đối đồng điều $p \in \mathrm{H}^1_{flat}(k, G_3)$ nâng địa phương khắp nơi (tức là được nâng tới một lớp thuộc $\mathrm{H}^1_{flat}(k_v, G_2)$) với mọi $v \in V$, cũng được nâng toàn cục.*

Chứng minh. Ta có biểu đồ sau giao hoán với các dòng khớp (tính khớp của các dòng thứ nhất (có ∂) và dòng thứ hai (có $\prod \partial$) là do dãy (2) trong Hệ quả 3.4.4).



Giả sử $p \in \mathrm{H}^1_{flat}(k, G_3)$, sao cho $g(p) \in \mathrm{Im}(\zeta)$. Do dòng thứ hai là khớp, nên

$$(\prod \partial)(g(p)) = 0.$$

Do hình vuông chéo ở sơ đồ trên là giao hoán, ta có

$$0 = \prod \partial(g(p)) = f(\partial(p)),$$

nên ta thấy rằng $\partial(p) \in \mathrm{Ker}(f)$. Chú ý rằng khi k là trường hàm địa phương hoặc toàn cục thì k là trường kiểu Douai và có chiều đối đồng điều Galois ≤ 2, nên theo chứng minh trong Hệ quả 3.4.4 ta có

$$\mathrm{H}^i_{ab}(k, G) \simeq \mathrm{H}^i_{flat}(k, G^{tor}),\ i \geq 2,$$

$$\mathrm{H}^i_{ab}(k_v, G) \simeq \mathrm{H}^i_{flat}(k_v, G^{tor}),\ i \geq 2, \forall v.$$

Do vậy ta có $\mathrm{Ker}(f) = Ш^2(G_1^{tor})$, theo giả thiết $Ш^2(G_1^{tor})$ là tầm thường, nên $p \in \mathrm{Ker}(\partial) = \mathrm{Im}(\pi^*)$ do tính khớp của dòng thứ nhất trong biểu đồ trên. □

Hệ quả 3.4.6 *Cho k là một trường hàm toàn cục, V là tập tất cả các chốn của k. Giả sử $1 \to G_1 \to G_2 \xrightarrow{\pi} G_3 \to 1$ là một dãy khớp các k-nhóm liên thông reductive. Giả sử $\dim(G_1^{tor}) \leq 1$. Khi đó mỗi lớp đối đồng điều $p \in \mathrm{H}^1_{flat}(k, G_3)$ nâng địa phương khắp nơi (tức là được nâng tới một lớp thuộc $\mathrm{H}^1_{flat}(k_v, G_2)$) với mọi $v \in V$, cũng được nâng toàn cục.*

Chứng minh. Đặt $T = G_1^{tor}$, ta chỉ cần chứng minh $Ш^2(T) = 0$ rồi áp dụng Định lý 3.4.5. Ta có thể giả thiết rằng $\dim(T) = 1$. Từ việc phân loại của các k-xuyến đại số chiều 1, ta biết một trong hai trường hợp sau xảy ra:

(1) $T \cong \mathbf{G}_m$. Khi đó $Ш^2(\mathbf{G}_m) = 0$ theo Định lý Brauer-Hasse-Noether.

(2) $T \cong R^{(1)}_{L/k}(\mathbf{G}_m)$ với L/k là mở rộng tách được bậc hai. Theo định nghĩa ta có dãy khớp

$$1 \to T \to R_{L/k}(\mathbf{G}_m) \to \mathbf{G}_m \to 1,$$

và dãy khớp đối đồng điều tương ứng (với chú ý $H^1(k, \mathbf{G}_m) = 0$).

$$0 \to H^2(k, T) \to H^2(k, R_{L/k}(\mathbf{G}_m)) \to H^2(k, \mathbf{G}_m).$$

Và ta có biểu đồ giao hoán với các dòng khớp

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & H^2(k,T) & \longrightarrow & \mathrm{H}^2(k, R_{L/k}(\mathbf{G}_m)) & \longrightarrow & \mathrm{H}^2(k, \mathbf{G}_m) \\
 & & {\scriptstyle\alpha}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\beta} & & \big\downarrow{\scriptstyle\gamma} \\
0 & \longrightarrow & \prod_v H^2(k_v, T) & \xrightarrow{\delta} & \prod_v \mathrm{H}^2(k_v, R_{L/k}(\mathbf{G}_m)) & \longrightarrow & \prod_v \mathrm{H}^2(k_v, \mathbf{G}_m)
\end{array}$$

Trong biểu đồ trên, γ là đơn ánh theo Định lý Brauer-Hasse-Noether. Theo Bổ đề Shapiro ta có $H^2(k, R_{L/k}(\mathbf{G}_m)) = H^2(L, \mathbf{G}_m)$; $\mathrm{H}^2(k_v, R_{L/k}(\mathbf{G}_m) = \prod_{w_i/v} \mathrm{H}^2(L_{w_i}, \mathbf{G}_m)$ và $\prod_v(\mathrm{H}^2(k_v, R_{L/k}(\mathbf{G}_m)) = \prod_w \mathrm{H}^2(L_w, \mathbf{G}_m)$. Như vậy β cũng là đơn ánh theo Định lý Brauer-Hasse-Noether. Từ đó suy ra được α cũng là đơn ánh, tức là ta có $Ш^2(T) = 0$. Hệ quả được suy ra từ Định lý 3.4.5. $\square$

KẾT LUẬN CHƯƠNG 3

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu nguyên lý Hasse mạnh cho không gian thuần nhất của nhóm reductive liên thông trên trường toàn cục và một số ứng dụng. Chúng tôi đã chứng minh được các kết quả chính sau đây.

- Chứng minh được nguyên lý Hasse cho không gian thuần nhất của một nhóm đại số reductive liên thông (Định lý 3.1.5), mở rộng một kết quả đã biết của Harder trong trường hợp trường hàm.

- Chứng minh một số nguyên lý địa phương-toàn cục về hạng tương đối và tính đẳng hướng của nhóm đại số hầu đơn trên trường toàn cục và đưa ra phản ví dụ những nhóm hầu đơn không thỏa mãn nguyên lý địa phương toàn cục đối với tính đẳng hướng (Định lý 3.3.2).

- Áp dụng nguyên lý Hasse vừa chứng minh để đưa ra cách chứng minh mới của các Định lý 2.2.1 và Định lý 2.4.1 của chương 2.

- Chứng minh một nguyên lý địa phương- toàn cục cho tính chất nâng lớp đối đồng điều của một dãy khớp ngắn các nhóm đại số reductive liên thông trên trường hàm toàn cục.

- Các kết quả của chương này dựa theo các bài báo [23], [25].

Chương 4

Nguyên lý Hasse trên trường toàn cục vô hạn cho các dạng

Mục tiêu của chương này là nghiên cứu nguyên lý Hasse (kinh điển) trên các mở rộng đại số vô hạn của trường toàn cục. Cụ thể chúng ta sẽ mở rộng một số nguyên lý Hasse kinh điển cho trường hợp mở rộng đại số vô hạn của trường toàn cục. Ta cần chú ý rằng các kết quả số học nhận được có thể rất khác nhau phụ thuộc vào trường mà ta xét. Chẳng hạn, nếu k là bao đóng đại số của một trường toàn cục thì phần lớn các kết quả về nguyên lý địa phương- toàn cục là đúng.

Chú ý rằng, mối quan hệ *toàn cục* $\leftrightarrow$ *các bao đầy đủ* trong bài toán kinh điển ở đây được thay bởi mối quan hệ *toàn cục* $\leftrightarrow$ *các địa phương hóa*. Ở đây, với một chốn v của một mở rộng đại số vô hạn k của một trường toàn cục L, trường địa phương hóa tương ứng với v là một trường con mà ta ký hiệu là $k(v)$ được chứa trong bao đầy đủ k_v của k tại v (xem định nghĩa ở dưới). Và để phân biệt hai cách tiếp cận, trong chương này, ta sẽ gọi nguyên lý thể hiện bằng mối quan hệ *toàn cục* $\leftrightarrow$ *các bao đầy đủ* là *nguyên lý Hasse kinh điển*, còn nguyên lý thể hiện qua mối quan hệ *toàn cục* $\leftrightarrow$ *các địa phương hóa* ta sẽ gọi đơn giản là *nguyên lý Hasse.*

Kết quả chính của chương này là thiết lập một số nguyên lý địa phương-toàn cục cho các dạng hecmit (phản hecmit) trên các mở rộng đại số vô hạn của trường toàn cục.

4.1 Dạng toàn phương trên trường địa phương hóa và toàn cục vô hạn

Trường địa phương hóa

Cho F là một trường toàn cục. Ta gọi một mở rộng đại số vô hạn k của F là một *trường toàn cục vô hạn.* Với cặp k, F như vậy, cho v là một định giá của k và k_v là bao đầy đủ của k tại v. Có khá nhiều kết quả về số học của trường toàn cục không còn đúng trên các mở rộng đại số vô hạn. Một trong những trở ngại chính là với mở rộng hữu hạn L của F chứa trong k, với một chốn w trên trường L có thể có vô hạn mở rộng tới k.

Các hạn chế của v lên các mở rộng trung gian hữu hạn L của F ($F \subset L \subset k$) sinh ra các bao đầy đủ L_v chứa trong bao đầy đủ k_v và ký hiệu $\mathcal{C}$ là tập tất cả các L_v như vậy. Ta nói rằng (theo [17]) một trường k' là một *địa phương hóa của k tại v*, nếu k' là giới hạn thuận của tất cả các mở rộng thuộc $\mathcal{C}$ và ký hiệu nó bởi $k(v)$. Ta còn gọi các trường như vậy là các *trường địa phương hóa.* Các trường địa phương hóa đã được nghiên cứu lần đầu tiên bởi Moriya ([59, 60]), Moriya và Schilling, Moriya và Nakayama (xem [35, Ch. VI, Sec. 11]).

Ta có thể mô tả $k(v)$ trong bổ đề sau.

Bổ đề 4.1.1 *Đặt $k = \cup_n L_n$, là hợp của một dãy tăng những mở rộng hữu hạn của F, tất cả đều chứa trong k.*

$$F = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_n \subset \cdots \subset k,$$

và v là một chốn của k. Cố định một phép nhúng $k \hookrightarrow k_v$. và đặt $v_n = v|_{L_n}$ là hạn chế của v đến L_n. Khi đó $k(v)$ là hợp của một dãy tăng các mở rộng con hữu hạn trên F_v

$$F_v = L_{0,v_0} \subset L_{1,v_1} \subset \cdots \subset L_{n,v_n} \subset \cdots \subset k_v.$$

Đặc biệt, nếu v là chốn thực (tương ứng phức), thì $k(v) = k_v \simeq \mathbb{R}$ (tương ứng $k(v) = k_v \simeq \mathbb{C}$).

Chứng minh. Thật vậy, nếu $F = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n \cdots \subset k$ là một dãy tăng các mở rộng hữu hạn khác, đặt w_i là hạn chế của v lên K_i. Khi đó với mỗi i (tương ứng n), tồn tại một chỉ số $m(i)$ (tương ứng $j(n)$) sao cho $K_i \subset L_{m(i)}$ (tương ứng $L_n \subset K_{j(n)}$). Khi đó ta có $K_{i,w_i} \subset L_{m(i),v_{m(i)}}$ (tương ứng $L_{n,v_n} \subset K_{j(n),w_{j(n)}}$) và

$$\cup_n L_{n,v_n} = \cup_i K_{i,w_i}$$

là điều phải chứng minh. □

Nhận xét 4.1.2 Ta biết rằng một mở rộng đại số vô hạn của một trường địa phương có thể không là trường đầy đủ. Vậy, trong trường hợp tổng quát, trường địa phương hóa $k(v)$ được giới thiệu ở trên không trùng với k_v.

Phân loại địa phương của các dạng toàn phương trên các trường địa phương (vô hạn)

Cho k là một mở rộng đại số vô hạn của một trường hữu hạn (hoặc địa phương) F có đặc số khác 2, f là một dạng toàn phương chính quy trên k với chiều n (tức là số biến là n). Ta có kết quả quan trọng sau đây, chúng cho ta mối liên hệ đến sự phân loại các dạng toàn phương trên một trường Hensel với các định giá rời rạc tương tự vấn đề trên trường thặng dư.

Định lý 4.1.3 ([33, Ch. 6, 2.6, Springer Thm.]) *Cho K là một trường đầy đủ với một định giá rời rạc, κ là trường thặng dư của K có đặc số $\neq 2$. Khi đó tồn tại một đẳng cấu của các nhóm Witt*

$$W(K) \simeq W(\kappa) \oplus W(\kappa)$$

với $f \mapsto (f_1, f_2)$, ở đó f_i là dạng thặng dư thứ i của dạng f.

Định lý 4.1.3 được phát biểu cho các trường đầy đủ, nhưng kết quả này vẫn đúng cho các trường Hensel. Hơn nữa, định lý này có thể được mở rộng cho các dạng (phản-)hecmit (xem Định lý 4.3.1).
Như một hệ quả, chúng tôi đưa ra phát biểu sau, mà chứng minh của nó về căn bản cũng tương tự như trong trường hợp trường hữu hạn hay trường địa phương. Ta có thể sử dụng Định lý Springer ở trên cho một trong các chứng minh của nó.

Định lý 4.1.4 (*a*) *Cho F là mở rộng đại số trên một trường hữu hạn có đặc số khác 2. Khi đó, mỗi dạng toàn phương có hạng $n \geq 3$ đều là đẳng hướng trên F. Vì vậy, hai dạng toàn phương trên F là tương đương trên F nếu chúng có cùng chiều và cùng định thức.*
(*b*) *Cho k là một trường địa phương hóa ứng với một định giá phi Acsimet của một trường toàn cục vô hạn, κ là trường thặng dư của k có đặc số $\neq 2$. Khi đó mọi dạng toàn phương có hạng $n \geq 5$ đều là đẳng hướng trên k.*

Chứng minh. (*a*) Nếu f là một dạng toàn phương có hạng $n \geq 3$ thì f xác định trên trường $F_1 \subseteq F$, F_1 là một mở rộng hữu hạn của $\mathbb{F}_q$. Khi đó F_1 cũng là trường hữu hạn, ta đã biết các dạng toàn phương hạng $n \geq 3$ trên trường hữu hạn luôn đẳng hướng (xem [36, Ch. IV, Prop. 4]). Vậy f là đẳng hướng trên F_1 suy ra f cũng là đẳng hướng trên F.
(*b*) Ta có $k = \cup k_n$, trong đó mỗi k_n là một trường địa phương. Giả sử $f = a_1x_1^2 + \cdots + a_nx_n^2$ với $n \geq 5$, với $a_i \in k^*$. Khi đó, tồn tại chỉ số n_0 sao cho $a_i \in k_{n_0}, \forall i = 1, \ldots, n_0$. Như vậy f là dạng toàn phương hạng ≥ 5 xác định trên trường địa phương k_{n_0}. Áp

dụng Định lý 1.2.1 (xem [36, Ch. IV, Thm. 6]) ta có f là đẳng hướng trên $k^*_{n_0}$, suy ra f đẳng hướng trên k.

Ta định nghĩa ký hiệu Hilbert trên k như thông thường (xem [36, Ch. III]) như sau. Với $a, b \in k^*$, $(a, b) = 1$ nếu và chỉ nếu phương trình $z^2 - ax^2 - by^2 = 0$ có một nghiệm không tầm thường trong k^3, $(a, b) = -1$ trong trường hợp còn lại.

Bổ đề 4.1.5 *Cho D là một thể quaternion không tầm thường trên một trường địa phương hóa phi Acsimet k. Khi đó D là duy nhất (với sai khác một đẳng cấu).*

Chứng minh. Ta viết $D = (a, b/k)$. Theo định nghĩa, $k = \cup_n k_n$, ở đó k_n là các trường địa phương. Khi đó tồn tại n sao cho $a, b \in k_n$ và D được xác định trên trường địa phương $L = k_n$. Bằng cách lấy giao của các trường địa phương như vậy, ta có thể giả sử rằng L là nhỏ nhất. Vậy, với cặp (a, b) này D xác định duy nhất sai khác L-đẳng cấu. Giả sử D' là một đại số quaternion chia được (không tầm thường) trên k, $D' = (a', b'/k), a', b' \in k$. Ta có tháp vô hạn các mở rộng hữu hạn của L: $L = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset k$, trong đó $k = \cup_n L_n$, sẽ tồn tại một chỉ số n sao cho $a', b' \in L_n$. Khi đó trên L_n, $D \simeq D'$, theo tính chất duy nhất sai khác đẳng cấu của các đại số quaternion trên trường địa phương (suy từ Bổ đề 1.2.2). Vậy $D \simeq D'$ trên k. □

Phân loại các dạng toàn phương trên các trường toàn cục vô hạn có đặc số $\neq 2$. Nguyên lý Hasse mạnh.

Cho k là một trường toàn cục vô hạn, $\mathcal{C}$ là họ tất cả các trường địa phương hóa của k. Ta nói rằng nguyên lý Hasse được thỏa mãn cho tính chất P nào đó (P xác định trên k và trên mọi trường địa phương hóa của k) nếu như P thỏa mãn trên k mỗi khi P được thỏa mãn trên mọi trường địa phương hóa của k (khi đó ta nói P được thỏa mãn *địa phương khắp nơi*). Ngoài ra, khi ta nói rằng nguyên lý Hasse được thỏa mãn, tức là ta đang xét theo nghĩa mới. Ở đây ta quan tâm đến nguyên lý Hasse cho một dạng toàn phương không suy biến f trên k. Ta có kết quả sau.

Định lý 4.1.6 *Cho k là một trường toàn cục vô hạn có đặc số khác 2.*

(1) ([17, Thm. 4]) *Nếu f là một dạng toàn phương n biến với $n \geq 3$, thì nguyên lý Hasse mạnh thỏa mãn cho f, nghĩa là, nếu f biểu diễn 0 địa phương khắp nơi thì f biểu diễn 0 trên k.*

(2) ([17, Corol. 5]) *Nếu f là một dạng toàn phương n biến với $n \geq 2$ và $a \in k$ thì f biểu diễn a trên k nếu và chỉ nếu f biểu diễn a địa phương khắp nơi.*

(3) ([17, Exam. 11]) *Tồn tại trường toàn cục vô hạn k đặc số 0 và phần tử $d \in k^*$ sao cho địa phương khắp nơi, d là bình phương, nhưng $d \notin (k^*)^2$.*

(4) *Với mỗi số tự nhiên n, tồn tại những dạng toàn phương chiều n tương đương địa phương khắp nơi nhưng không tương đương trên k.*

Chứng minh. (4). Cho k và $d \in k^*$ như trong (3). Dạng toàn phương 2 chiều $f = \langle 1, -d \rangle$ là địa phương đẳng hướng (hoặc địa phương hyperbolic), nhưng không đẳng hướng trên k. Do đó hai dạng toàn phương 1 chiều $g = \langle 1 \rangle$, $h = \langle d \rangle$ là tương đương địa phương, nhưng không tương đương trên k. Gọi q là một dạng toàn phương có chiều $n-1$. Theo định lý giản ước của Witt cho dạng toàn phương (Định lý 1.1.5), các dạng n chiều $g \perp q$ và $h \perp q$ là tương đương địa phương nhưng không tương đương trên k. □

Chú ý 4.1.7 Từ Định lý 4.1.6 ta thấy rằng nguyên lý Hasse yếu (theo nghĩa mới) cho dạng toàn phương có thể không thỏa mãn. Đặc biệt, nguyên lý Hasse về đối đồng điều (theo nghĩa mới) có thể không thỏa mãn cho $\mathrm{H}^1(k, \mu_2)$ hoặc $\mathrm{H}^1(k, \mathrm{O}(f))$. Như vậy, có các dạng toàn phương thỏa mãn nguyên lý Hasse kinh điển (tương ứng nguyên lý Hasse về đối đồng điều) trên trường toàn cục, nhưng nguyên lý Hasse-Minkowski (tương ứng nguyên lý Hasse về đối đồng điều) đối với chúng có thể không thỏa mãn trên các trường toàn cục vô hạn.

4.2 Định lý Hasse về chuẩn và Định lý Hasse-Brauer-Noether

Cho k là một trường toàn cục vô hạn, V_k là tập tất cả các chốn của k. Ở đây chúng tôi khảo sát hai nguyên lý địa phương-toàn cục kinh điển của Lý thuyết Số trên các trường toàn cục, gọi là Định lý Hasse về chuẩn và Định lý Brauer-Hasse-Noether. Chúng tôi có mở rộng sau đây của Định lý Hasse về chuẩn (cho dạng toàn phương).

Mệnh đề 4.2.1 *Cho k là một trường toàn cục vô hạn.*

(1) *Đặt $K = k(\sqrt{a})$ là một mở rộng bậc hai của k. Khi đó một phần tử $b \in k$ là chuẩn của một phần tử thuộc K nếu và chỉ nếu địa phương khắp nơi b cũng vậy.*

(2) *Cho $D = (a, b/k)$ là một đại số quaternion trên k. Khi đó D là tầm thường nếu và chỉ nếu nó là tầm thường địa phương khắp nơi.*

Chứng minh. 1) Ta áp dụng Định lý 4.1.6(1), đối với dạng toàn phương $f = x^2 - ay^2 - bz^2$.

2) Ta biết rằng (Bổ đề 1.3.3) D là tầm thường trên k nếu và chỉ nếu dạng chuẩn $x^2 - ay^2 - bz^2 + abt^2$ của D là đẳng hướng. Nên áp dụng Định lý 4.1.6(1) cho dạng

chuẩn trên ta suy ra điều phải chứng minh. □

Để chuẩn bị cho việc trình bày các kết quả tiếp theo, chúng ta cần một số khái niệm về cây phả hệ và Bổ đề König.

Định nghĩa 4.2.2

(1) Một đồ thị $\Gamma = (V(\Gamma), \leq)$ trong đó $\leq$ là một quan hệ thứ tự giữa các đỉnh được gọi là một *cây*, nếu hai điều kiện sau thỏa mãn

(a) Có duy nhất một đỉnh cực tiểu v_0 được gọi là rễ.

(b) Với mỗi $v \in V(\Gamma)$, tập $A(v) := \{s \in V(\Gamma) \mid s \leq v\}$ (*thế hệ trước của* v) là một tập con hữu hạn sắp thứ tự tuyến tính.

(2) Số các phần tử của tập hữu hạn $A(v)$ gọi là tuổi của v, và được ký hiệu là $a(v)$.

(3) Đặt $G(\Gamma)(n) = \{v \in V(\Gamma) \mid a(v) = n\}$, $G(\Gamma)(n)$ được gọi là *thế hệ thứ n của* Γ. Với $v \in V(\Gamma)$ cho trước, ký hiệu $O(v)$ là tập *kế tiếp của* v, tức là $O(v) = \{u \in V(\Gamma) \mid v \leq u \text{ và } a(u) = a(v) + 1\}$.

(4) Cây Γ được gọi là một cây *phả hệ với hữu hạn cành*, nếu tại mỗi đỉnh v, $O(v)$ là hữu hạn.

(5) Một *nhánh* là một tập con sắp thứ tự tuyến tính liên thông, và một nhánh cực đại được gọi là một *cành*. Ta dễ thấy rằng một cây là hữu hạn cành nếu và chỉ nếu với mọi $n \geq 0$, thế hệ thứ n của Γ là hữu hạn.

Định lý 4.2.3 ([57, Sec. 3, Thm. E], [58, Ch. XIII])(Bổ đề König) *Nếu T là một cây phả hệ vô hạn với hữu hạn cành, thì luôn tồn tại một cành vô hạn.*

Nhận xét 4.2.4 Bổ đề König có nhiều áp dụng. Sau đây, ta sẽ sử dụng Bổ đề König để chứng minh các nguyên lý địa phương-toàn cục.

Nhắc lại rằng, với một đại số đơn tâm A chiều n trên trường k, nếu L là một trường của k thì ta thường ký hiệu $A_L = A \otimes_k L$. Khi đó A_L là một đại số đơn tâm chiều n trên L (xem [33, Ch.8]). Định lý Brauer-Hasse-Noether là một trong những kết quả nổi tiếng của lý thuyết trường các lớp toàn cục, một trong các phát biểu như sau.

Định lý 4.2.5 (Xem [33, Ch.10, 2.3]) *Cho k là một trường toàn cục.*

(1) *Nếu A là một đại số đơn tâm chiều n^2 trên tâm k của nó thì với hầu hết chốn $v \in V_k$, $A_v (= A \otimes_k k_v)$ là tầm thường, tức là $A_v \simeq M_n(k_v)$.*

(2) *Ta có dãy khớp sau*

$$0 \to \mathrm{Br}(k) \to \oplus_v \mathrm{Br}(k_v) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0.$$

Ở đây chúng tôi chứng minh một phần mở rộng của định lý này cho trường hợp trường toàn cục vô hạn.

Định lý 4.2.6 (Nguyên lý Hasse cho nhóm Brauer) *Cho k là một trường toàn cục vô hạn. Khi đó ta có đồng cấu chính tắc $\mathrm{Br}(k) \to \prod_v \mathrm{Br}(k(v))$ là đơn ánh.*

Chứng minh. Giả sử rằng A là một đại số đơn tâm trên k. Khi đó, vì A có chiều hữu hạn trên k nên A xác định trên một trường toàn cục (hữu hạn) $L(L \subseteq k)$ (tức là, $A = B \otimes_L k$, với B là một đại số đơn tâm trên L). Ta áp dụng lập luận tương tự trong chứng minh của Định lý 4 trong [17]. Cụ thể là, giả sử A có chiều n^2 trên tâm k của nó, sao cho với mọi chốn $v \in V_k$, $A_v := A \otimes_k k(v)$ là tầm thường, tức là, $A_v \simeq M_n(k(v))$. Ta sẽ chỉ ra rằng A là tầm thường, tức là, $A \simeq M_n(k)$. Giả sử ngược lại rằng A không tầm thường trên k, khi đó $A \simeq M_m(D)$, trong đó D là một đại số chia không tầm thường tâm k. Ta sẽ chỉ ra rằng tồn tại $v \in V_k$ sao cho A là không tầm thường trên $k(v)$.
Ta lấy một tháp vô hạn các mở rộng

$$L = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_s \subset \cdots \subset k,$$

trong đó mỗi L_s/L là mở rộng hữu hạn, sao cho $k = \cup_s L_s$. Vì A là không tầm thường trên k, nó cũng không tầm thường trên mỗi trường toàn cục L_s. Do đó, theo Định lý Brauer-Hasse-Noether ở trên, A là không tầm thường trên một bao đầy đủ của mỗi trường L_s, ký hiệu là $L_{s,v(s)}$ và A là không tầm thường chỉ trên một số hữu hạn ($n_s > 0$) trong số các bao đầy đủ của L_s. Sau khi đánh số lại, ta có thể giả sử rằng các bao đầy đủ này là $L_{s,v(s)_1}, \ldots, L_{s,v(s)_{n(s)}}$.
Xét đồ thị Γ, với tập các đỉnh là

$$V(\Gamma) := \{\text{bao đầy đủ } L_{s,v(s)_n} \text{của } \ L_s, \mid s = 0, 1, \ldots, 1 \leq n \leq n(s)\},$$

và tập các mũi tên (cạnh có hướng) là

$$A(\Gamma) := \{\text{mũi tên } L_{s,v(s)_n} \hookrightarrow L_{t,w(t)_m} \,|s \leq t, w(t)_m = \text{mở rộng của } v(s)_n \text{ tới } L_t\}.$$

Ta nói rằng $L_{s,v(s)_n} \leq L_{t,w(t)_m}$ nếu $s \leq t$, $L_{s,v(s)_n} \subseteq L_{t,w(t)_m}$, và $w(t)_m$ là một mở rộng của $v(s)_n$. Khi đó $(\Gamma, <)$ thỏa mãn các điều kiện của Bổ đề König, suy ra tồn tại một cành vô hạn của cây. Gọi cành này là cành C bao gồm các đỉnh

$$L_{s,v(s)_{i_s}}, i_s \in [1, n_s], \forall\ s \geq 0.$$

Gọi $L_v = L_{0,v(0)_{i_0}}$, khi đó $v|_L$ là một định giá của L. Ta cũng ký hiệu v là mở rộng của v đến k mà có hạn chế trên mỗi L_s là $v(s)_{i_s}$. Vì hạn chế đến L của mọi $v(s)_{i_s}$ là như nhau, và mỗi mở rộng con (trường trung gian) có bậc hữu hạn của k/L đều chứa trong trường L_s nào đó, nên theo Bổ đề 4.1.1 ta có $k(v) = \cup_s L_{s,v(s)_{i_s}}$. Như vậy, nếu A là tầm thường trên $k(v)$ thì A là tầm thường trên một mở rộng hữu hạn K của $L_{0,v(0)_{i_0}}$, chứa trong $k(v)$. Từ đó suy ra rằng tồn tại chỉ số s_0 sao cho với mọi $s \geq s_0$ thì K chứa trong $L_{s,v(s)_{i_s}}$ và A là tầm thường trên (vô hạn) trường $L_{s,v(s)_{i_s}}$ chứa K. Điều này mâu thuẫn với cách chọn $L_{s,v(s)_{i_s}}$. Do đó A là không tầm thường trên $k(v)$, điều đó mâu thuẫn với giả thiết ban đầu của A. □

Chúng ta có kết quả sau.

Mệnh đề 4.2.7

(1) (Xem [1] cho trường hợp trường số vô hạn) *Cho k là một trường địa phương hoặc toàn cục vô hạn, A là một đại số đơn tâm tâm k. Nếu A là một đại số chia được thì A là xyclic và chỉ số của A trùng với số mũ của nó.*

(2) ([1]) *Tồn tại một đại số đơn tâm trên một trường số vô hạn mà không là xyclic.*

Chứng minh. Định lý được chứng minh bằng cách lặp lại chứng minh của [1]. □

Tiếp theo ta xét các đại số đơn tâm với phép đối hợp trên các trường địa phương hoặc toàn cục vô hạn. Từ Mệnh đề 4.2.7 ta suy ra kết quả sau.

Mệnh đề 4.2.8 *Cho k là một trường địa phương hoặc toàn cục vô hạn. Nếu A là một k-đại số đơn tâm với phép đối hợp không tầm thường loại 1 thì hoặc là $A \simeq M_n(D)$, với D là một đại số quaternion chia được, hoặc A là tầm thường trên k.*

Chứng minh. Ta biết rằng nếu A có phép đối hợp không tầm thường loại 1 cấp của nó ≤ 2 trong $\mathrm{Br}(k)$. Đặt $A = M_n(D)$, D là một đại số chia được trên k. Thì D có cấp đúng bằng 1 hoặc 2, theo Mệnh đề 4.2.7, D là một đại số quaternion trên k hoặc là trùng với k. □

Nhận xét 4.2.9

(1) Sẽ rất thú vị nếu các kết quả tương tự cho đại số đơn tâm trên các trường địa phương và toàn cục vẫn đúng trên các trường địa phương và toàn cục vô hạn. Tuy nhiên, có những kết quả (chẳng hạn trong Mệnh đề 4.2.7) không còn đúng, và có lẽ cần có một nghiên cứu hệ thống về vấn đề này.

(2) Nếu $char.k > 0$, và với một trường toàn cục $L \subset k$ mà mở rộng k/L là thuần túy không tách thì ta biết rằng mỗi chốn $v \in V_L$ có duy nhất một mở rộng tới k, vậy mỗi k-đại số đơn tâm là tầm thường trừ một số hữu hạn các chốn.

Tuy vậy, ta có kết quả sau.

Mệnh đề 4.2.10 *Không phải mọi đại số đơn tâm trên một trường toàn cục vô hạn là hầu hết tầm thường địa phương khắp nơi (nghĩa là tầm thường trừ một số hữu hạn chốn).*

Chứng minh. Trước hết, cho L là một trường số, S là một tập con hữu hạn khác rỗng những chốn của L và D là một đại số quaternion chia được trên L không tầm thường tại đúng các chốn thuộc S (số phần tử của S là chẵn theo 4.2.5). Với mỗi $v \in S$ ta chọn một số dương lẻ n_v. Theo lý thuyết trường các lớp (xem mục 2 chương 10 trong tài liệu [2]), khi đó sẽ tồn tại một mở rộng xyclic K/L có bậc $n = BCNN(n_v \mid v \in S)$ sao cho với mỗi mở rộng w của v tới K ta có bậc $[K_w : L_v] = n_v$. Ta ký hiệu S_L (tương ứng S_K) là tập tất cả các chốn của L (tương ứng của K) mà tại đó D (tương ứng D_K) không tầm thường (vậy $S = S_L$). Chúng ta có ánh xạ hạn chế tự nhiên $\mathrm{res}_{K/L} : V_K \to V_L$ và có $\mathrm{res}_{K/L}(S_K) \subset S$. Mặt khác, vì n_v là lẻ với mọi $v \in S$, áp dụng Định lý của T.A.Springer ([33, Thm.5.3, Ch. 2] ta suy ra rằng với mỗi mở rộng w ở trên, $D \otimes K_w$ không là tầm thường, vì vậy $w \in S_K$, ta có $\mathrm{res}_{K/L}(w) = v$. Vậy $\mathrm{res}_{K/L}(S_K) = S_L = S$. Mặt khác, ta có thể chọn các số lẻ n_v sao cho $\mathrm{Card}(S_K) > \mathrm{Card}(S_L)$. Lặp lại quá trình này, ta nhận được tháp vô hạn các mở rộng của L

$$L = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset \cdots,$$

sao cho $\mathrm{Card}(S_{L_n}) > \mathrm{Card}(S_{L_m})$, nếu $n > m$. Ta đặt $k = \cup_n L_n$. Theo chính cách xây dựng, ta thấy với mỗi $v \in S_L$ cùng với một mở rộng $\tilde{v}$ lên k thì D là không tầm thường trên $k(\tilde{v})$; Thật vậy, nếu ngược lại D là tầm thường trên $k(\tilde{v})$, thì tồn tại n sao cho D cũng tầm thường trên $L_{n,w}$, trong đó w là một mở rộng của $v \in S_L$ đến L_n, do $[L_{n,w} : L_v]$ là lẻ nên lại áp dụng [33, Th. 5.3] ta suy ra D tầm thường trên L_v, mâu thuẫn với giả thiết về $v \in S_L$. Ta cũng có $\mathrm{res}_{k/L_n}(S_k) = S_{L_n}$ với mọi n. Từ đó S_k là vô hạn. □

4.3 Lý thuyết địa phương của các dạng hecmit và phản hecmit

Chúng ta cần nhắc lại một kết quả quan trọng của Scharlau ([34]). Kết quả này mở rộng Định lý Springer (Định lý 4.1.3) trên đây cho trường hợp các đại số chia

được.
Gọi K là một trường Hensel với định giá rời rạc v, R vành nguyên của K (đối với v) với phần tử đơn trị hóa π, ideal cực đại $\mathfrak{p} = (\pi)$ và trường thặng dư $F := R/\mathfrak{p}$. Gọi D là một đại số chia tâm K với phép đối hợp J, V là một không gian vectơ trái hữu hạn chiều trên D. Đặt $D^{\pm} := \{x \in D \mid x^J = \pm x\}$. Ta vẫn ký hiệu v là mở rộng (duy nhất) của định giá v tới D, và ký hiệu R_D (tương ứng $\mathfrak{p}_D$) là vành nguyên (tương ứng iđêan cực đại) của D. Gọi $\bar{D} := R_D/\mathfrak{p}_D$ là đại số thặng dư tương ứng. Cho f là một dạng (phản-) hecmit không suy biến đối với phép đối hợp J trên D. Đặt K_0 là tập các phần tử J-cố định của K. Với mỗi phần tử J-đối xứng (tương ứng J-phản đối xứng) $d \in D^*$, ta đặt $J_d : x \mapsto dx^J d^{-1}$. Khi đó J_d cũng là một phép đối hợp trên D. Nếu J là loại một (hoặc tương ứng loại hai), thì $K = K_0$ (tương ứng K/K_0 là một mở rộng bậc hai tách được) và J cảm sinh một phép đối hợp $\bar{J}$ trên $\bar{D}$. Ta có hai trường hợp ngoại lệ:

1) K/K_0 là một mở rộng bậc hai rẽ nhánh, J là phép đối hợp loại hai và $D = K$;

2) $D = (a, \pi/K)$ là một đại số quaternion với a là đơn vị, $K = K_0$, J là phép đối hợp loại một và $\dim(D^+) = 1$.

Trong mọi trường hợp khác ta có thể chọn phần tử đơn trị hóa đối xứng $t \in D$ thỏa mãn $v(t) > 0$ và là cực tiểu. Với t như vậy, xét phép đối hợp J_t tương ứng như trên.

Định lý 4.3.1 ([34, Prop. 3.3, Thm. 3.6]) *(i) Giả sử char. $F \neq 2$, $a_1, \dots, a_n$ là các phần tử J-(phản) đối xứng của $R_D - \mathfrak{p}_D$. Khi đó dạng (phản) hecmit trên D*

$$h(x, y) := \sum_{1 \le i \le n} x_i^J a_i y_i$$

là đẳng hướng nếu và chỉ nếu dạng phản hecmit thu gọn

$$\bar{h}(\bar{x}, \bar{y}) := \sum_{1 \le i \le n} \bar{x}_i^{\bar{J}} \bar{a}_i \bar{y}_i$$

là đẳng hướng trên $(\bar{D}, \bar{J})$.

(ii) Trừ hai trường hợp đặc biệt 1) và 2) nêu trên, tồn tại đẳng cấu của các nhóm Witt của các dạng hecmit

$$W(D, J) \simeq W(\bar{D}, \bar{J}) \oplus W(\bar{D}, \bar{J}_t),$$

trong đó $h \mapsto (\bar{h}_1, \bar{h}_2)$, $\bar{h}_i$ là dạng thặng dư thứ i của h, và t như đã chọn.

(iii) Trong trường hợp đặc biệt 1) *và* 2) *nêu trên ta có đẳng cấu các nhóm Witt*

$$W(D, J) \simeq W(\bar{D}, \bar{J})$$

trong đó $h \mapsto \bar{h}_1$.

Từ đây ta có hệ quả sau.

Hệ quả 4.3.2 *Với giả thiết như trong 4.3.1, nếu mọi dạng* $\bar{h}$ *chiều* $n+1$ *là đẳng hướng thì mọi dạng* h *chiều* $2n+1$ *cũng đẳng hướng và nếu có một dạng không đẳng hướng* $\bar{h}$ *chiều* n *thì cũng có dạng không đẳng hướng chiều* $2n$.

I. Lý thuyết địa phương cho các dạng kiểu A

Chúng tôi bắt đầu với định lý phân loại cho các dạng kiểu A trên các trường địa phương, trước hết, ta nhắc lại kết quả của M. Kneser.

Định lý 4.3.3 ([33, Th. 1.1, Thm.1.2, Ch.10]) *Cho* k *là một trường địa phương phi Acsimet có đặc số khác* 2, D *là một* k*-đại số chia được với tâm* K *và phép đối hợp* J *loại hai, không tầm thường trên* K $(k = K^J)$ *và* h *là một dạng hecmit không suy biến hạng* n *ứng với* J *và nhận giá trị trong* D. *Khi đó* $D = K$, *vì vậy* h *là tương đương Morita với một dạng toàn phương chiều* $2n$ *trên* k *(nghĩa là hai dạng hecmit* h *và* h' *là đẳng cự nếu và chỉ nếu các dạng vết* q_h *và* $q_{h'}$ *của chúng là đẳng cự).*

Mở rộng kết quả này tới trường hợp các mở rộng vô hạn của các trường địa phương, chúng ta có kết quả sau.

Định lý 4.3.4 *Cho* k *là một trường địa phương hóa phi Acsimet có đặc số khác* 2, D *là một thể tâm* K *và phép đối hợp* J *loại hai không tầm thường trên* K $(k = K^J)$ *và* h *là một dạng hecmit không suy biến hạng* n *ứng với phép đối hợp* J *và giá trị trong* D. *Khi đó* $D = K$, *vì vậy* h *là tương đương Morita với một dạng toàn phương chiều* $2n$ *trên* k.

Chứng minh. Ta đặt $K = k(\sqrt{a})$. Ta biết rằng D được xác định trên một trường địa phương phi Acsimet $L \subset k$, ta có thể chọn L sao cho $\sqrt{a} \in L$. Khi đó $D = D_L \otimes_L K$; $J : D_L \to D_L$ là phép đối hợp loại hai (với $L^J = k \cap L \subsetneq L$). Khi đó, áp dụng Định lý 4.3.3 ta có $D_L = L$ suy ra $D = K$. Phần còn lại áp dụng Định lý ([33, Th. 1.1, Ch.10]). $\square$

Hệ quả 4.3.5 *Với giả thiết như trong Định lý 4.3.4, ta có mọi dạng hecmit* h *chiều* $n \geq 3$ *là đẳng hướng trên* k.

Chứng minh. Dạng hecmit đã cho ứng với dạng toàn phương q_h có chiều ≥ 6, vì vậy biểu diễn 0 trên các trường địa phương phi Acsimet. $\square$

II. Lý thuyết địa phương cho các dạng kiểu C

Ta ký hiệu D là một đại số chia được tâm k với phép đối hợp loại 1, f là một dạng J-hecmit không suy biến nhận giá trị trong D, trong đó J là phép đối hợp loại một của D. Giả sử rằng J có kiểu đối xứng, tức là không gian D^+ các phần tử J-đối xứng của D có chiều $d(d-1)/2$, với $d = \deg(D)$. Bây giờ ta giả sử k là một trường địa phương hóa phi Acsimet của một trường toàn cục vô hạn có đặc số khác 2. Cho f là một dạng hecmit không suy biến chiều n nhận giá trị trong một đại số chia được tâm k. Khi đó, ta biết rằng $f, D, \ldots$ được xác định trên một trường địa phương phi Acsimet (hữu hạn) L. Ký hiệu d là định thức của f, tức là ảnh trong k^*/k^{*2} của định thức của ma trận biểu diễn f đối với một cơ sở cho trước. Chúng ta có kết quả sau.

Mệnh đề 4.3.6 *Cho k là một trường địa phương hóa phi Acsimet của một trường toàn cục vô hạn với trường thặng dư có đặc số khác 2, f là một dạng hecmit không suy biến nhận giá trị trong một đại số quaternion chia được D với phép đối hợp chuẩn J trên k. Khi đó, nếu $\dim(f) \geq 2$, thì f là đẳng hướng.*

Chứng minh. Trước hết, ta giả sử $L \subset k$ là trường địa phương (hữu hạn) phi Acsimet mà D, f xác định trên L. Gọi $f = a_1 x_1^J y_1 + \cdots + a_n x_n^J y_n$, $a_i \in L^*$, $x_i \in D$ $(\forall i = 1, \ldots, n)$, khi đó dạng vết tương ứng của f là $q_f = a_1 x_1^J x_1 + \cdots + a_n x_n^J x_n$. Ta biết rằng q_f là dạng toàn phương trên L có số chiều $\dim(q_f) = 4\dim(f) \geq 8$, nên áp dụng Định lý 1.2.1, ta có q_f là đẳng hướng trên L. Do đó, f đẳng hướng trên L kéo theo f cũng đẳng hướng trên k. $\square$

III. Lý thuyết địa phương cho các dạng kiểu D

Cho k là một trường địa phương hóa phi Acsimet của một trường toàn cục vô hạn có đặc số khác 2. D là một đại số chia được tâm k, f là một dạng phản hecmit không suy biến nhận giá trị trong D ứng với phép đối hợp loại một J của D. Giả sử rằng J là dạng trực giao, (tức là không gian D^+ các phần tử J-đối xứng của D có chiều $d(d-1)/2$, với $d = \deg(D)$). Vì D có phép đối hợp loại một và có cấp 2 trong nhóm Brauer $\mathrm{Br}(k)$ nên theo Mệnh đề 4.2.8 ta có D là một thể quaternion trên k. Giả sử rằng J là phép đối hợp chuẩn của D. Khi đó ta có thể áp dụng Hệ quả 4.3.2 vào trường hợp này và ta có kết quả sau đây tương tự kết quả của Tsukamoto.

Định lý 4.3.7 (Xem [33, p. 363] cho trường hợp trường $\mathfrak{p}$-adic). *Cho k là một trường địa phương hóa phi Acsimet có đặc số khác 2, h là một dạng phản hecmit không suy biến nhận giá trị trong một đại số quaternion chia được $D = (a, b/k)$ với phép đối hợp chuẩn J trên k. Khi đó nếu $\dim(h) \geq 4$, thì h là đẳng hướng.*

Chứng minh. Ta có thể sử dụng phương pháp của Tsukamoto, có trong Scharlau ([33, Ch. X, Thm. 3.6]), bằng cách kết hợp với các kết quả của mục trước. Cụ thể là, tính chất đẳng hướng của các dạng toàn phương có chiều ≥ 5 (Định lý 4.1.4) và tính duy nhất của một đại số quaternion không tầm thường chia được (Bổ đề 4.1.5) là những kết quả ta cần. Phần còn lại như trong [33].

Định lý 4.3.8 (Xem [46],[33, p. 363] cho trường hợp trường $\mathfrak{p}$-adic) *Cho k là một trường địa phương hóa phi Acsimet có đặc số khác 2, D là một đại số quaternion chia được với phép đối hợp chuẩn J trên k, h là một dạng phản hecmit không suy biến chiều n nhận giá trị trong D ứng với J. Giả sử thêm rằng trường thặng dư có đặc số khác 2. Khi đó ta có các khẳng định sau.*

(1) *Với mỗi $d \in k^*, d \not\equiv -1 (mod.\ k^{*2})$ luôn tồn tại một dạng phản hecmit chiều 1 có định thức là d. Nếu $n = \dim(h) > 1$, với mỗi $d \in k^*$ có một dạng chiều n có định thức $d \in k^*$.*

(2) *Nếu $n = 1$, lớp đẳng cự của h được xác định bởi định thức $\det(h)$. Nếu $n = 2$, h là đẳng hướng nếu và chỉ nếu $\det(h) = 1(mod.\ k^{*2})$.*

(3) *Các dạng phản hecmit không suy biến là đẳng cự nếu và chỉ nếu chúng có cùng chiều và cùng định thức.*

(4) *Nếu $n = 3$, h là không đẳng hướng nếu và chỉ nếu $\det(h) = -1(mod.\ k^{*2})$.*

Chứng minh. Ý tưởng chính đã có trong [33], ta đưa thêm chứng minh chi tiết sau.

(1) Cho $D = (a, b/k)$. Nếu cho trước $d \in k^*$, có một trường con địa phương $L \subset k$, sao cho D, h được xác định trên L và $d \in L^*$. Vì $d \not\in (-1) \times k^{*2}$, ta cũng có $d \not\in (-1) \times L^{*2}$. Khi đó theo [33, pp. 363 - 364], thì phương trình $\mathrm{Nrd}(X) = d$ có nghiệm $X \in D^-$. (Đặt $X = xi + yj + z(ij), x, y, z \in k$, ta chỉ ra rằng phương trình $\mathrm{Nrd}(X) = -ax^2 - by^2 + abz^2 = d$ có một nghiệm, hoặc tương đương, dạng toàn phương $-ax^2 - by^2 + abz^2 - dt^2$ là đẳng hướng. Thật vậy, nếu dạng toàn phương $-ax^2 - by^2 + abz^2 - dt^2$ là không đẳng hướng, thì ta biết nó sẽ tương đương với một dạng chuẩn không đẳng hướng của D, vì D là đại số quaternion chia được duy nhất (sai khác một đẳng cấu) trên L. Vậy ta có các dạng toàn phương tương đương $\langle -d, -a, -b, ab\rangle \simeq \langle 1, -a, -b, ab\rangle$ và theo luật giản ước Witt, ta có $\langle -d\rangle \simeq \langle 1\rangle$, điều này mâu thuẫn. Chú ý rằng trong [33, Thm. 3.6, iii), p. 363], điều kiện $\neq 1$ cần

được đổi thành $\neq -1$, hoặc "định thức" cần được đổi thành "biệt thức", trong đó biệt thức là (như trong [46]) $\mathrm{disc}(h) := (-1)^{\dim(h)}\det(h)$. Rõ ràng khi $n > 1$, thì với mỗi $d \in k^*$, tồn tại một dạng có định thức d.

(2) *Xét trường hợp* $n = 1$. Giả sử rằng $\det(\alpha) = \det(\beta)(mod.\ k^{*2})$, trong đó $\alpha, \beta \in D^- \setminus \{0\}$ thì $\mathrm{Nrd}(\alpha) = \mathrm{Nrd}(\beta)\gamma^2, \gamma \in k^*$. Theo Định lý 4.1.4, có một $\delta \in D^*$ sao cho $\mathrm{Nrd}(\delta) = \gamma$, vậy $\mathrm{Nrd}(\alpha) = \mathrm{Nrd}(\beta)\gamma^2 = \mathrm{Nrd}(\delta^J)\mathrm{Nrd}(\beta)\mathrm{Nrd}(\delta) = \mathrm{Nrd}(\delta^J\beta\delta)$. Vì vậy, bằng cách thay β bởi $\delta^J\beta\delta$, ta có thể giả sử từ đầu rằng $\mathrm{Nrd}(\alpha) = \mathrm{Nrd}(\beta)$ khi đó $\alpha^2 = \beta^2 (\in k^*)$. Từ đó ta suy ra rằng $k(\alpha) \simeq k(\beta)$. Theo Định lý Skolem - Noether, ta tìm được $x \in D^*$ sao cho $x\alpha x^{-1} = \beta$, vậy $x\alpha x^J = \beta x x^J = \mathrm{Nrd}(x)\beta$. Tiếp theo, ta cần bổ đề sau.

Bổ đề 4.3.9 ([33, p. 361]) *Gọi $D = (a, b/k)$ là một đại số quaternion chia được trên một trường k có đặc số khác 2. Gọi $\beta \in D^- \setminus \{0\}$. Khi đó $\langle\beta\rangle \simeq \langle\gamma\beta\rangle$ với $\gamma \in k^*$ nếu và chỉ nếu γ được biểu diễn trên k bởi dạng toàn phương $\langle 1, -a\rangle$ hoặc $\langle b, -ab\rangle$.*

Theo bổ đề này, ta phải chỉ ra rằng $d = \mathrm{Nrd}(x)$ được biểu diễn bởi $\langle 1, -a\rangle$ hoặc $\langle b, -ab\rangle$. Nếu không xảy ra cả hai trường hợp đó thì ta có $\langle 1, -a\rangle \not\simeq \langle d, -ad\rangle$ và $\langle b, -ab\rangle \not\simeq \langle d, -ad\rangle$. Những quan hệ này chỉ ra rằng:
a) đại số quaternion $(a, d/k)$ là không tầm thường và
b) các đại số quaternion $(a, b/k)$ và $(a, d/k)$ là không tương đương. Do sự tồn tại của đại số quaternion chia được trên k là duy nhất (Bổ đề 4.1.5) cho ta điều mâu thuẫn. Do đó $\langle\alpha\rangle \simeq \langle\beta\rangle$.

Xét trường hợp $n = 2$. Gọi $h = \langle\alpha, \beta\rangle$. Nếu h là đẳng hướng, ta viết $x^J\alpha x + y^J\beta y = 0$, với $x \neq 0$, đặt $z = yx^{-1}$, ta có $\alpha = -z^J\beta z$, vậy $\det(h) = \mathrm{Nrd}(\alpha)\mathrm{Nrd}(\beta) = 1(mod.\ k^{*2})$. Ngược lại, nếu $\det(h) = 1(mod.\ k^{*2})$, thì $\mathrm{Nrd}(\alpha) = \mathrm{Nrd}(\beta)(mod.\ k^{*2})$, vậy các dạng $\langle\alpha\rangle$ và $\langle\beta\rangle$ có cùng định thức. Theo trên ta biết rằng $\langle\alpha\rangle \sim \langle\beta\rangle$, cũng vậy $\langle\beta\rangle \sim \langle -\beta\rangle$ (chúng có chiều 1 và cùng định thức), vậy $\langle\alpha, \beta\rangle \sim \langle\beta, -\beta\rangle$ và h là đẳng hướng.

(3) Cho f và g là hai dạng phản hecmit không suy biến có cùng chiều và cùng định thức. Ta xét dạng $\phi = f \perp (-g)$. Khi đó ϕ là không suy biến và có chiều $2n$.Theo Định lý của Witt (xem [33, Corol. 9.2, Ch. 7]) ta có $\phi = rH \perp h$ với H là hypecbolic và h là không đẳng hướng. Vì các dạng có số chiều 4 là đẳng hướng và số chiều của h là chẵn, nên số chiều của h không vượt quá 2. Nếu h có số chiều 2 thì vì h không đẳng hướng nên $\det(h) \neq 1$, điều này mâu thuẫn. Vậy ta có $f \perp (-g) = rH$. Lại áp dụng định lý của Witt ta suy ra f và g là hai dạng tương đương.

(4) Nếu $n = 3$, một dạng h có định thức -1 là không đẳng hướng, vì nếu h là đẳng

hướng thì nó có dạng chéo $h \simeq \langle \alpha, -\alpha, \beta \rangle$, trong đó $\mathrm{Nrd}(\beta) = -1$, điều này vô lý. Ngược lại, giả sử dạng phản hecmit $\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ có định thức $d \neq -1$, theo chứng minh trong ý (1), luôn tồn tại $\delta \in D^-$ sao cho $\mathrm{Nrd}(\delta) = d$. Khi đó hai dạng $\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ và $\langle \alpha, -\alpha, \delta \rangle$ có cùng chiều và định thức nên chúng tương đương. Vậy $\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ là đẳng hướng. $\square$

4.4 Nguyên lý Hasse và phân loại toàn cục

Trong mục này chúng tôi chứng minh một số nguyên lý Hasse mạnh cho các dạng trên trường toàn cục vô hạn.

Dạng kiểu A

Nguyên lý Hasse nổi tiếng cho các dạng kiểu A (Định lý 1.4.4) được chứng minh bởi W. Landherr năm 1938 (xem [33, Th. 6.2, Ch.10]). Chúng ta có kết quả tương tự cho trường hợp trường toàn cục vô hạn.

Định lý 4.4.1 (Nguyên lý Hasse mạnh). *Cho k là một trường toàn cục vô hạn có đặc số khác 2, V_k là tập tất cả các chốn của k. Gọi h là dạng hecmit không suy biến ứng với phép đối hợp J loại hai trên một đại số chia được D tâm $K = k(\sqrt{a})$, $k = K^J$. Khi đó, h biểu diễn 0 trên k nếu và chỉ nếu nó biểu diễn 0 địa phương khắp nơi.*

Trước hết ta cần chứng minh kết quả sau đây.

Bổ đề 4.4.2 *Cho k là một trường toàn cục có đặc số khác 2, D là một đại số chia được tâm $K = k(\sqrt{a})$ và một phép đối hợp J loại 2, trong đó $k = K^J$. Cho h là dạng J-hecmit không suy biến nhận giá trị trong D. Nếu $\dim(h) \geq 2$, thì tồn tại một tập hữu hạn S những chốn của k, sao cho h là đẳng hướng trên k_v với mọi $v \notin S$.*

Chứng minh Bổ đề 4.4.2. Vì $\dim(h) \geq 2$ nên theo phân loại của Tits (xem[45, p.34]), nhóm unita đặc biệt $G = SU_{n+1/d}(h, D)$ liên kết với h là nhóm hầu đơn xác định trên k. Ta đã biết rằng (xem chứng minh Prop. 9.3 trong [52]) có một tập S hữu hạn (có thể rỗng) các chốn của k, sao cho với mọi $v \notin S$, G trở thành tựa phân rã trên k_v. Do đó, h_v có chỉ số Witt cực đại, nói riêng ra, khi đó h_v là đẳng hướng với mọi $v \notin S$.

Chứng minh Định lý 4.4.1. Định lý được chứng minh tương tự như trong trường hợp các dạng toàn phương, ở đây ta sử dụng Bổ đề König và nguyên lý Hasse cho các dạng hecmit trên các trường toàn cục (Định lý 1.4.4 và Bổ đề 4.4.2). $\square$

Dạng kiểu C

Định lý 4.4.3 (Nguyên lý Hasse mạnh). *Cho k là một trường toàn cục vô hạn có đặc số khác 2, D là một đại số chia được trên k ứng với phép đối hợp J loại 1. Giả sử f là một dạng hecmit kiểu* C *không suy biến chiều n nhận giá trị trong D. Nếu f biểu diễn 0 địa phương khắp nơi thì f cũng biểu diễn 0 trên k.*

Chứng minh. Vì f, D, J được cho bởi một số hữu hạn các dữ kiện, chúng được xác định trên một trường toàn cục (hữu hạn) L. Vì vậy, ta có thể giả sử ngay từ đầu rằng f, D, J là xác định trên L. Do đó, theo Mệnh đề 4.2.8, ta có thể giả sử rằng D là một đại số quaternion chia được với phép đối hợp chuẩn J của nó, mà tập các phần tử J-bất biến là L. Ta cũng có thể giả sử rằng f có dạng chéo

$$f = a_1 x_1^J x_1 + \ldots + a_n x_n^J x_n,\ n \geq 2,$$

trong đó $a_i \in L, x_j \in D$. Cho $D = (a, b/L)$ có cơ sở $\{1, i, j, ij\}$ với $i^2 = a, j^2 = b, ij = -ji$, với $a, b \in L$. Dạng chuẩn của D là $N(x) = x_1^2 - ax_2^2 - bx_3^2 + abx_4^2$, với $x = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 ij, x_i \in k$. Dạng vết liên kết với f được cho bởi

$$q_f = a_1 N(x_1) + \ldots + a_n N(x_n).$$

Với mỗi mở rộng trường K/L, ta có $f \otimes K$ là đẳng hướng nếu và chỉ nếu $q_f \otimes K$ là đẳng hướng trên K (theo Mệnh đề 1.4.2). Vì vậy dạng toàn phương q_f (có hạng $n \geq 4$) biểu diễn 0 không tầm thường địa phương trên tất cả các trường đầy đủ hóa của L. Theo kết quả từ Định lý 4.1.6, ta suy ra q_f là đẳng hướng trên L, do đó f cũng là đẳng hướng trên L do vậy f đẳng hướng trên k. □

Các dạng kiểu D

Cho k là một trường toàn cục vô hạn có đặc số khác 2, h là một dạng J-phản hecmit không suy biến có kiểu D nhận giá trị trong một đại số chia được D. Ta biết rằng D là một đại số quaternion chia được tâm k và phép đối hợp chuẩn J. Trên các trường toàn cục, Kneser đã chứng minh nguyên lý Hasse mạnh cho dạng h với số chiều ≥ 3 (Định lý 1.4.3). Ta có kết quả tương tự khi k là trường toàn cục vô hạn.

Định lý 4.4.4 (Nguyên lý Hasse mạnh cho dạng phản hecmit). *Cho k là một trường toàn cục vô hạn có đặc số khác 2, D là một đại số quaternion chia được tâm k và phép đối hợp chuẩn J, h là một dạng J-phản hecmit không suy biến có kiểu* D *nhận giá trị trong D. Khi đó, nếu $\dim(h) \geq 3$ thì h thỏa mãn nguyên lý Hasse mạnh.*

Có hai chứng minh của nguyên lý Hasse mạnh (theo nghĩa kinh điển) cho dạng phản hecmit (Định lý 1.4.3) của M.Kneser trong trường hợp trường toàn cục (hữu hạn).

Một chứng minh do Kneser và chứng minh khác do T.A.Springer đưa ra. Cả hai chứng minh này đều dài và phức tạp. Theo định nghĩa về nguyên lý địa phương-toàn cục mới, chúng tôi đưa ra chứng minh bằng cách sử dụng các lập luận đã có trong trường hợp các dạng toàn phương (xem chứng minh của Định lý 4.2.6) và một số lập luận đã được sử dụng trong chứng minh của Springer (xem [33, Ch. 10, Sec. 4]). Trước hết, ta cần bổ đề sau.

Bổ đề 4.4.5 *Giả sử k là một trường toàn cục có đặc số khác 2, D là một đại số quaternion chia được tâm k và phép đối hợp chuẩn J. Cho h là một dạng J-phản hecmit không suy biến nhận giá trị trong D. Nếu* $\dim(h) \geq 2$, *thì tồn tại tập hữu hạn S các chốn của k, để h là đẳng hướng trên k_v với mọi $v \notin S$.*

Chứng minh Bổ đề 4.4.5. Ta cần kết quả tổng quát sau đây (xem chứng minh của Prop. 9.3 trong [52]):
Cho G là một nhóm đại số nửa đơn xác định trên một trường toàn cục k. Khi đó, có một tập S hữu hạn (có thể rỗng) các chốn của k, sao cho với mọi $v \notin S$, G trở thành tựa phân rã trên k_v.

Do đó, với dạng phản hecmit h như trong giả thiết, ta gọi G là nhóm đại số liên kết với h thì có tập S hữu hạn các chốn của k sao cho với mỗi $v \in S$, G là tựa phân rã trên k_v. Khi đó h có chỉ số Witt cực đại trên k_v, với mọi $v \notin S$, vì vậy h là đẳng hướng. Do đó S chính là tập cần tìm và bổ đề được chứng minh.

Chứng minh Định lý 4.4.4. Để chứng minh định lý, ta áp dụng Bổ đề 4.4.5 và lập luận tương tự như trong chứng minh của [17, Thm. 4] (hoặc như trong chứng minh của Định lý 4.2.6).

□

4.5 Nguyên lý Hasse yếu

Cũng giống như trong trường hợp trường toàn cục, nguyên lý Hasse yếu vẫn còn đúng cho các dạng hecmit kiểu A và C trên trường toàn cục vô hạn, cụ thể ta có kết quả sau đây:

Định lý 4.5.1 ([24, Thm. 4.1.1]) *Cho k là một trường toàn cục vô hạn có đặc số khác 2, V_k là tập các chốn của k và cho g, h là các dạng hecmit không suy biến chiều n và có cùng kiểu khác với kiểu* B, D *trên một đại số chia được D ứng với phép đối hợp J (tâm K, $k = K^J$, nếu các dạng có kiểu* A). *Khi đó g và h tương đương trên* *k nếu và chỉ nếu chúng tương đương địa phương khắp nơi.*

Ta biết rằng trong trường hợp $n = 2$, nguyên lý Hasse mạnh (và yếu) có thể không đúng cho các dạng phản hecmit trên các trường toàn cục. Cụ thể là, nếu D là một đại số quaternion chia được trên trường toàn cục k, J là phép đối hợp chuẩn và D không phân rã tại đúng $s \geq 2$ chốn của k, thì với mỗi phần tử J-chéo (phản xứng) $\lambda \in D^*$, tồn tại đúng 2^{s-2} phần tử $\alpha \in k^*/k^{*2}$ sao cho $x^J\lambda x - \alpha y^J\lambda y$ biểu diễn 0 trên k_v địa phương khắp nơi, nhưng không biểu diễn 0 trên k (xem [33, Ch. 10, 4.5, 4.6]). Tương tự, nguyên lý Hasse mạnh (hoặc yếu) cũng có thể không đúng cho dạng phản hecmit kiểu D trong trường hợp trường toàn cục vô hạn. Cụ thể là ta có mệnh đề sau.

Mệnh đề 4.5.2 (1) *Tồn tại một trường toàn cục vô hạn k có đặc số khác 2, một đại số quaternion chia được $D = (a, b/k)$ với phép đối hợp chuẩn J trên k sao cho D được xác định trên một trường toàn cục L (tức là $a, b \in L$), trong đó $D \otimes K_v$ không tầm thường tại s ($s \geq 4$) chốn v của K với mọi mở rộng con hữu hạn $L \subset K \subset k$.*

(2) *Với mỗi trường k và đại số quaternion chia được D như trong* (1)*, với mỗi số tự nhiên n, có các dạng phản hecmit g và h chiều n nhận giá trị trong D ứng với J, chúng tương đương địa phương khắp nơi nhưng không tương đương toàn cục.*

Chứng minh. (1) Trước tiên ta chọn một trường toàn cục L có đặc số khác 2 và một đại số quaternion chia được $D = (a, b/L)$. Gọi S là một tập hữu hạn tất cả các chốn v của L, sao cho $D \otimes L_v$ là không tầm thường. Ta có thể chọn D sao cho $\mathrm{Card}(S) \geq 4$. Với mỗi $v \in S$, ta chọn một số lẻ $n_v > 1$. Khi đó bội chung nhỏ nhất n của các n_v cũng là số lẻ. Theo lý thuyết trường các lớp (xem mục 2 chương 10 trong tài liệu [2]), ta có thể chọn một mở rộng xyclic hữu hạn L_1/L có bậc n, sao cho với mọi $v \in S$, và mỗi mở rộng v_1 của v đến L_1, bậc địa phương $[L_{1,v_1} : L_v]$ đúng bằng n_v. Rõ ràng n_v là lẻ, và D là không tầm thường trên L_v, nên D cũng không tầm thường trên L_{1,v_1} (bởi vì theo Định lý 5.3 của Chương 2 trong [33], dạng chuẩn của D, là không đẳng hướng trên L_v, cũng như vậy trên L_{1,v_1}). Vì vậy tập hữu hạn S_1 tất cả các chốn của L_1 sao cho $D \otimes L_1$ là không tầm thường có ít nhất 4 phần tử. Lặp lại quá trình này, ta nhận được tháp vô hạn các mở rộng trường hữu hạn $L = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset \bar{L}$. Ta đặt $k = \cup_n L_n$. Theo cách xây dựng của ta, mỗi L_n có ít nhất 4 chốn mà tại đó $D \otimes L_n$ không phân rã. Đồng thời, với mỗi $v \in S$ và mở rộng $\tilde{v}$ của nó lên k thì D là không tầm thường trên $k(\tilde{v}) = \cup_n L_{n,v_n}$ (nếu $D \otimes k(\tilde{v})$ là tầm thường thì có một trường phân rã của D nằm trong $k(\tilde{v})$ có bậc hữu hạn trên L_v, điều này không thể xảy ra. Vậy $D \otimes k(\tilde{v})$ là không tầm thường và vì vậy có ít nhất 4 chốn của k thỏa mãn điều này.

Nếu K là một mở rộng hữu hạn của L, $L \subset K \subset k$ thì theo trên ta có thể chọn n sao cho $L \subset K \subset L_n$, $L_v \subset K_w \subset L_{n,v_n}$. Vì $D \otimes L_{n,v_n}$ là không tầm thường, nên $D \otimes K_w$ cũng vậy. Do đó (1) được chứng minh.

2) Giả sử $D = (a, b/k)$. Ta có thể chọn một phần tử J-phản đối xứng $\lambda \in D^*$ sao cho $\lambda^2 = a$. Để xây dựng phản ví dụ, ta chỉ cần xét dạng 2 chiều $h = x^J \lambda x - \alpha y^J \lambda y$ sao cho nguyên lý Hasse mạnh (theo nghĩa kinh điển) không thỏa mãn đối với h trên L. Theo chứng minh của Bổ đề 3.4 (Chương 10 trong [33]), Với một $\alpha \in L^*$ đã cho, phương trình $h = 0$ có một nghiệm tương đương với khẳng định các dạng phản hecmit $\langle \lambda \rangle$ và $\langle \alpha\lambda \rangle$ là đẳng cự, tương đương với điều kiện α được biểu diễn (toàn cục) bởi dạng $\langle 1, -a \rangle$ hoặc dạng $\langle b, -ab \rangle$. Do đó nguyên lý Hasse mạnh không thỏa mãn đối với h khi và chỉ khi phần tử $\alpha \in L^*$ thỏa mãn điều kiện:

$(*)$ *Với mọi chốn v của S, hoặc là $(a, \alpha)_v = 1$ hoặc $(a, \alpha)_v = (a, b)_v = -1$, nhưng không có đẳng thức nào được thỏa mãn toàn cục trên k.*

Bây giờ, ta lấy D, S như trong (1). Ký hiệu S_k là tập tất cả các chốn của k có hạn chế lên L thuộc vào S. Ta gọi S_1 là tập con của S có số chẵn (ít nhất là 4) phần tử. Ta chọn $\alpha \in L^*$ sao cho $(*)$ được thỏa mãn. Cụ thể là ta chọn α sao cho $(a, \alpha)_v = 1$ với mọi $v \notin S$, $(a, \alpha)_v = -1$ với mọi $v \in S_1$, và $(a, \alpha)_v = 1$ với mọi $v \in S \setminus S_1$. Khi đó với mỗi chốn w của k, nếu $w \in S_{1,k}$, thì $(a, \alpha)_w = -1$, và $(a, \alpha)_w = 1$ trong trường hợp còn lại. Khi đó, phần tử $\alpha \in k^*$ thỏa mãn điều kiện $(*)$ và các dạng λ và $\alpha\lambda$ là đẳng cấu (tương đương) trên k_v với mọi v, nhưng không tương đương trên k. Số các dạng một chiều tương đương địa phương khắp nơi nhưng không tương đương toàn cục là hữu hạn (tương ứng vô hạn) nếu S_k là hữu hạn (tương ứng vô hạn). Trường hợp số chiều tùy ý được suy từ đây. Cụ thể, cho f là một dạng phản hecmit có số chiều $n - 1$, $\lambda, \alpha\lambda$ như ở trên. Khi đó ta xét các dạng sau

$$g := f \perp \langle \lambda \rangle, \; h := f \perp \langle \alpha\lambda \rangle.$$

Các dạng này có số chiều n và tương đương địa phương khắp nơi nhưng không tương đương toàn cục. $\square$

KẾT LUẬN CHƯƠNG 4

Trong chương này, chúng tôi khảo sát nguyên lý Hasse mạnh cho các dạng hecmit và phản hecmit trên trường toàn cục vô hạn và xây dựng phản ví dụ cho nguyên lý Hasse yếu đối với dạng phản hecmit. Chúng tôi đã chứng minh được các kết quả chính sau đây.

- Mở rộng một phần của Định lý Hasse-Brauer-Noether, cụ thể chứng minh nguyên lý Hasse (theo nghĩa mới) cho nhóm Brauer của trường toàn cục vô hạn (Định lý 4.2.6).

- Xây dựng lý thuyết địa phương cho dạng hecmit và phản hecmit (Định lý 4.3.4; Mệnh đề 4.3.6; Định lý 4.3.7; Định lý 4.3.8).

- Chứng minh một số nguyên lý Hasse mạnh cho các dạng kiểu A, C, D (Định lý 4.4.1; Định lý 4.4.3; Định lý 4.4.4).

- Chúng tôi đã xây dựng phản ví dụ cho nguyên lý Hasse yếu đối với dạng phản hecmit kiểu D (Mệnh đề 4.5.2).

- Các kết quả của chương này dựa theo các bài báo [24], [27].

KẾT LUẬN CỦA LUẬN ÁN

Luận án nghiên cứu nguyên lý Hasse cho nhóm đại số và các dạng toàn phương, hecmit và phản hecmit trên trường toàn cục và các mở rộng đại số vô hạn của chúng. Các kết quả chính là:

- Chứng minh nguyên lý địa phương-toàn cục cho tính chất phân rã của nhóm đại số tuyến tính liên thông trên trường toàn cục.
- Chứng minh nguyên lý địa phương-toàn cục cho tính chất tựa phân rã của nhóm đại số tuyến tính liên thông trên trường toàn cục.
- Chứng minh nguyên lý Hasse mạnh cho không gian thuần nhất của nhóm reductive liên thông trên trường hàm toàn cục, (mở rộng một kết quả đã biết của Harder).
- Chứng minh nguyên lý Hasse cho tính đẳng hướng cho một lớp rộng các nhóm hầu đơn và đưa ra phản ví dụ cho lớp nhóm hầu đơn còn lại.
- Chứng minh một số nguyên lý Hasse mạnh (theo nghĩa mới) cho các dạng (phản) hecmit trên trường toàn cục vô hạn đặc số khác 2 và đưa ra phản ví dụ đối với một số dạng hecmit.

DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

1. N.T. Ngoan and N. Q. Thang(2014), *On some Hasse principle for algebraic groups over global fields*, Proc. Jap. Acad. Ser. A, v. 90, No.5, 73 - 78.
2. N.T. Ngoan and N. Q. Thang(2014), *On some Hasse principle for algebraic groups over global fields*, II, Proc. Jap. Acad. Ser. A, v. 90, No.8, 107 - 112.
3. N.T. Ngoan and N. Q. Thang(2016), *On some Hasse principle for Homogeneous Space of Algebraic Groups over Global Fields of Positive Characteristic*, Proc. of the Steklov Ins. Math, v. 292, 171 - 184.
4. N.T. Ngoan and N. Q. Thang(2016), On some Hasse principles for algebraic groups over global fields, preprint.
5. N.T. Ngoan and N. Q. Thang(2016), On some Hasse principle for algebraic groups over infinite algebraic extensions of global fields, preprint.

CÁC KẾT QUẢ CỦA LUẬN ÁN ĐÃ ĐƯỢC BÁO CÁO, THẢO LUẬN TẠI CÁC HỘI NGHỊ, HỘI THẢO KHOA HỌC, SERMINAR SAU:

- Hội nghị Đại số-Hình học-Tô pô Toàn quốc tháng 12/2014.
- Hội nghị khoa học các thế hệ nghiên cứu sinh Viện Toán học tháng 10/2015.
- Xê mi na liên phòng Đại số và Lý thuyết Số tại Viện Toán học.
- Các hội nghị đánh giá Nghiên cứu sinh của Viện Toán học, tháng 10/2011, tháng 10/2012, tháng 10/2013, tháng 10/2014, tháng 10/2015.
- Hội nghị Đại số-Hình học-Tô pô Toàn quốc tháng 11/2016.
- Xê mi na tại khoa Toán-Tin, trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.

Tài liệu tham khảo

Tiếng Anh

[1] A. Albert(1933), "On normal division algebras over algebraic number fields not of finite degree", *Bull. Amer. Math. Soc.*, v. 39, 746 - 749.

[2] E. Artin and J. Tate(1961), *Class Field Theory*, W. A. Benjamin, Inc., USA.

[3] A. Borel(1991), *Linear Algebraic Groups*, Springer - Verlag.

[4] A. Borel(1965), "Linear Algebraic Groups" in: "Algebraic groups and Discontinuous subgroups", *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. A.M.S.*, v. 9, 3 - 19.

[5] A. Borel(1983), *Oeuvres : Collected papers, vol. II*, Springer -Verlag.

[6] M. Borovoi(1992), "The Hasse principle for homogeneous spaces", *J. Reine. Angew. Math.*, Bd. 426, 179 - 192.

[7] M. Borovoi(1993), "Abelianization of the second non-abelian Galois cohomology", *Duke Math. J.*, v. 72, 217 - 239.

[8] M. Borovoi(1998), "Abelian Galois Cohomology of Reductive Groups", *Memoirs of Amer. Math. Soc.*, v. 162, 1 - 50.

[9] L. Breen(1994), *Classification of 2-stacks and 2-gerbes*, Astérisque No. 225, Société Mathématique de France.

[10] B. Conrad(2015), "The structure of solvable groups over general fields", *Panoramas et Synthèses*, v. 46, 159 - 192

[11] J. L. Colliot-Thélène, P. Gille and R. Parimala(2004), "Arithmetic of linear algeberaic groups over two-dimensional geometric fields", *Duke Math. J.*, v.121, 285 - 341.

[12] J. C. Douai(1976), "2-cohomologie galoisienne des groupes semisimples: Application de la cohomologie non-abelienne", Thèse d'Etat, Univ. Lille I (= Éditions universitaires européennes, Südwestdeutscher-Verlag, Saabrucken, Germany, 2010.)

[13] R. Fossum and B. Iversen(1973), "On Picard groups of algebraic fiber spaces", *J. Pure and Appl. Algebra 3*, 269 - 280.

[14] C. D. González-Avilés(2012), "Quasi-abelian crossed modules and non-abelian cohomology", *J. Algebra*, v. 369, 235 - 255.

[15] C. D. González-Avilés(2013), "Flasque resolutions of reductive group schemes", *Cent. Eur. J. Math.*, 11, 1159 - 1176.

[16] J. E. Humphreys(1981), *Linear algebraic groups*, Springer-Verlag, New York.

[17] K. Koziol and M. Kula(1998), "Witt rings of infinite algebraic extensions of global fields", *Annales Math. Silesianae*, 12, 131 - 139.

[18] M. Kneser(1969), *Lectures On Galois Cohomology of Classical Groups*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay.

[19] R. E. Kottwitz(1986), "Stable trace formula : elliptic singular terms", *Math. Annalen*, Bd. 275, 365 - 399.

[20] K. McCrimmon(1969), "The Freudenthal-Springer-Tits constructions of exceptional Jordan algebras", *Trans. Amer. Math. Soc.*, v.139, 495 - 510.

[21] JS Milne(2014), *Algebraic Number Theory*, www.jmilne.org/math/.

[22] J. Neukirch(1986), *Class field theory*, Springer - Verlag.

[23] N.T. Ngoan and N. Q. Thang(2014), "On some Hasse principle for algebraic groups over global fields", *Proc. Jap. Acad. Ser. A*, v. 90(No.5), 73 - 78.

[24] N.T. Ngoan and N. Q. Thang(2014), "On some Hasse principle for algebraic groups over global fields, II", *Proc. Jap. Acad. Ser. A*, v. 90(No.8), 107 - 112.

[25] N.T. Ngoan and N. Q. Thang(2016), "On some Hasse principle for Homogeneous Space of Algebraic Groups over Global Fields of Positive Characteristic", *Proc. of the Steklov Ins. Math.*, v. 292, 171 - 184.

[26] N.T. Ngoan and N. Q. Thang(2016), "On some Hasse principle for algebraic groups over global fields", preprint

[27] N.T. Ngoan and N. Q. Thang(2016), "On some Hasse principle for algebraic groups over infinite algebraic extensions of global fields", preprint.

[28] O.T. O'Meara(1973), *Introduction to Quadratic Forms*, Springer-Verlag.

[29] T. Ono(1959), "On some arithmetic properties of linear algebraic groups", *Annals of Mathematics*, v. 70(No.2), 266 - 290.

[30] R. Pierce(1982), *Associative algebras*, Springer - Verlag, New York.

[31] V. Platonov and A. Rapinchuk(1994), *Algebraic Groups and Number Theory*, Academic Press, London.

[32] G. Prasad, A.S. Rapinchuk(2006), "On the existence of isotropic forms of semi-simple algebraic groups over number fields with prescribed local behavior", *Adv. Math.* v. 207(no. 2), 646 - 660.

[33] W. Scharlau(1985), *Quadratic and Hermitian forms*, Springer - Verlag.

[34] W. Scharlau(1970), "Klassifikation hermitescher Formen über lokalen Körpern", *Math. Ann.*, 186, 201 - 208.

[35] O. F. G. Schilling(1950), *The theory of valuations*, Math. Surveys ser. no. 4, A. M. S.

[36] J.P.Serre(1980), *A Course in Arithmetic*, Springer.

[37] J.P.Serre(1994), *Galois cohomology*, Springer.

[38] Stepen S. Shatz(1964), "Cohomology of artinian group schemes over local fields", *Annals of Mathematics*, v. 79(3), 411-449.

[39] Stepen S. Shatz(1966), "The cohomology dimension of certain Grothendieck topologies", *Annals of Mathematics*, v. 83(3), 572-595.

[40] T. A. Springer(1998), *Linear Algebraic Groups*, Birkhäuser. S. Shatz

[41] T. A. Springer(1965), "Non-abelian H^2 in Galois cohomology" in "Algebraic and discontinuous subgroups", *Proc. Symp. Pure Math. A. M. S.*, v. 9, 164 - 182.

[42] N. Q. Thang(2008), "On Galois cohomology of semisimple groups over local and global fields of positive characteristic", *Math. Z.*, Bd. 259(no. 2), 457 - 470.

[43] N. Q. Thang(2011), "On Galois cohomology and weak approximation in connected reductive groups over fields of positive characteristics", *Proc. Japan Acad. ser. A*, v. 87 (No. 10), 203 - 208.

[44] N. Q. Thang(2012), "On Galois cohomology of semisimple algebraic groups over local and global fields of positive characteristic, II", *Math. Z.*, Bd. 270, 1057 - 1065.

[45] J. Tits(1966), "Classification of algebraic semisimple groups" in "Algebraic groups and discontinuous subgroups", *Proc. Symp. Pure Math., A. M. S.*, v. 9 , 33 - 62.

[46] T. Tsukamoto(1961), "On the local theory of quaternionnic anti-hermitian forms", *J. Math. Soc. Jap.*, v. 13, 387 - 400.

[47] M. Tsfasman and V. Vladuts(2002), "Infinite global fields and the generalized Brauer-Siegel theorem", *Mosc. Math. J.*, 2(no. 2), 329 - 402.

[48] A. Weil(1946), *Foundations of algebraic geometry*, A.M.S. Colloquium, New York.

[49] William C. Waterhouse(1979), *Introdution to Affine Group Schemes*, Springer-Verlag New York.

Tiếng Pháp

[50] A. Borel et J. Tits(1967), "Groupes réductifs", *Publications Math. l'IHÉS*, 27, 55 - 151.

[51] J. Oesterlé(1984), "Nombre de Tamagawa et groupes unipotents en caractéristique p", *Invent. Math.*, v. 78, 13 - 88.

[52] J. J. Sansuc(1981), "Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques sur un corps de nombres", *J. Reine. Angew. Math.*, Bd. 327, 12 - 80.

Tiếng Đức

[53] G. Harder(1965), "Über die Galoiskohomologie halbeinfacher Matrizengruppen", *Math. Z.*, 90, 404 - 428.

[54] G. Harder(1975), "Über die Galoiskohomologie halbeinfacher algebraischer Gruppen, III", *J. reine und angew. Math.* Bd. 274/275, 125 - 138.

[55] G. Harder(1968), "Bericht über neuere Resultate der Galoiskohomologie halbeinfacher Gruppen". *Jahresbericht der D. M.V.*, Bd. 70, 182 - 216.

[56] G. Harder(1967), "Halbeinfache Gruppenschemata über Dedekindringen", *Invent. Math.*, v. 4, 165 - 191.

[57] D. König(1926), "Sur les correspondances multivoques des ensembles", *Fund. Math.*, v.8, 114 - 134.

[58] D. König(1986), *Theorie der endlichen und unendlichen Grapphen, Teibner - Archiv zur Mathematik*, No. 6, Leipzig.

[59] M. Moriya(1935), "Theorie der algebraischen Zahlkörper unendlichen Grades", *J. Fac Sci. Hokkaido Imper. Univ. Ser. 1*, v. 3, 107 - 190.

[60] M. Moriya(1936), "Divisionsalgebren über einem $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper eines unendlichen algebraischen Zahlkörpers", *Proc. Imper. Acad.*, v. 12(No. 7), 183 - 184.