VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM
VIỆN TOÁN HỌC

-----oOo-----

Nguyễn Tuấn Long

QUAN HỆ GIỮA HỆ SỐ HILBERT HIỆU CHỈNH VÀ MÔĐUN COHEN-MACAULAY SUY RỘNG DÃY

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HÀNỘI-2016

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM
VIỆN TOÁN HỌC
-----oOo-----

Nguyễn Tuấn Long

QUAN HỆ GIỮA HỆ SỐ HILBERT HIỆU CHỈNH VÀ MÔĐUN COHEN-MACAULAY SUY RỘNG DÃY

Chuyên ngành: Đại số và lý thuyết số
Mã số: 62. 46. 01. 04

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

TẬP THỂ HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
1. GS. TSKH. Nguyễn Tự Cường
2. GS. TS. Lê Thị Thanh Nhàn

HÀNỘI-2016

Tóm tắt

Cho $(R, \mathfrak{m})$ là một vành Noether địa phương và M là một R-môđun hữu hạn sinh chiều d. Cho $\mathcal{D} : M = D_0 \supset D_1 \supset ... \supset D_t = H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ là lọc chiều của M. Một iđêan tham số $\mathfrak{q}$ của M được gọi là *iđêan tham số tách biệt* của M nếu tồn tại một hệ tham số $x_1, .., x_d$ sao cho $\mathfrak{q} = (x_1, ..., x_d)$ và $(x_{\dim D_i+1}, ..., x_d)D_i = 0$ với mọi $i = 1, ..., t$. Môđun M được gọi là *Cohen-Macaulay suy rộng dãy* nếu D_i/D_{i+1} là môđun Cohen-Macaulay suy rộng với mọi $i = 0, ..., t-1$. Chú ý rằng với mỗi iđêan tham số $\mathfrak{q}$ của M, tồn tại các số nguyên $e_i(\mathfrak{q}; M)$ sao cho $\ell(M/\mathfrak{q}^{n+1}M) = \sum_{i=0}^{d}(-1)^i e_i(\mathfrak{q}; M)\binom{n+d-i}{d-i}$ với mọi $n \gg 0$. Các số nguyên $e_i(\mathfrak{q}; M)$ được gọi là *hệ số Hilbert* của M đối với $\mathfrak{q}$. Chúng tôi xét hiệu $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) = \ell(M/\mathfrak{q}^{n+1}M) - \sum_{i=0}^{d} \mathrm{adeg}_i(\mathfrak{q}; M)\binom{n+i}{i}$ như một hàm số biến n, được gọi là *hàm hiệu chỉnh Hilbert-Samuel* của M đối với $\mathfrak{q}$, trong đó $\mathrm{adeg}_i(\mathfrak{q}; M)$ là bậc số học thứ i của M đối với $\mathfrak{q}$. Với $n \gg 0$, hàm $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n)$ là một đa thức $P^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n)$, được gọi là *đa thức hiệu chỉnh Hilbert-Samuel* của M đối với $\mathfrak{q}$. Mục tiêu của luận án là nghiên cứu các hệ số Hilbert của M, từ đó đặc trưng cấu trúc của môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy.

Luận án được chia làm bốn chương. Trong Chương 1, chúng tôi nhắc lại những khái niệm và tính chất cần thiết.

Trong Chương 2, chúng tôi đưa ra một chặn đều cho chỉ số chính quy Castelnouvo-Mumford của môđun phân bậc liên kết đối với các iđêan tham số tách biệt của môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy.

Trong Chương 3, chúng tôi chứng minh rằng nếu $\mathfrak{q}$ là một iđêan tham số tách biệt của M thì tồn tại số nguyên n_0 sao cho $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) \geq 0$ với mọi $n \geq n_0$. Hơn nữa, nếu M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy thì có thể chọn n_0 độc lập với cách chọn $\mathfrak{q}$.

Chương 4 được dành riêng để chứng minh kết quả chính sau đây của luận án: *Giả sử R là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay địa phương. Khi đó, môđun M là Cohen-Macaulay suy rộng dãy khi và chỉ khi tập $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}(M)$ các đa thức $P^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n)$, trong đó $\mathfrak{q}$ chạy trên tập các iđêan tham số tách biệt của M, là hữu hạn.*

Abstract

Let $(R, \mathfrak{m})$ be a Noetherian local ring and M a finitely generated R-module of dimension d. Let $\mathcal{D} : M = D_0 \supset D_1 \supset ... \supset D_t = H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ be the dimension filtration of M. A parameter ideal $\mathfrak{q}$ of M is called a *distinguished parameter ideal* of M if there is a system of parameters $x_1, .., x_d$ such that $\mathfrak{q} = (x_1, ..., x_d)$ and $(x_{\dim D_i+1}, ..., x_d)D_i = 0$ for all $i = 1, ..., t$. The module M is called *sequentially generalized Cohen-Macaulay* if D_i/D_{i+1} is a generalized Cohen-Macaulay module for all $i = 0, ..., t-1$. It is well known that for each parameter ideal $\mathfrak{q}$ of M, there exists integers $e_i(\mathfrak{q}; M)$ such that $\ell(M/\mathfrak{q}^{n+1}M) = \sum_{i=0}^{d}(-1)^i e_i(\mathfrak{q}; M)\binom{n+d-i}{d-i}$ for all $n \gg 0$. These integers $e_i(\mathfrak{q}; M)$ are called *Hilbert coefficients* of M with respect to $\mathfrak{q}$. We consider $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) = \ell(M/\mathfrak{q}^{n+1}M) - \sum_{i=0}^{d} \operatorname{adeg}_i(\mathfrak{q}; M)\binom{n+i}{i}$, a function in n, called an *adjusted Hilbert-Samuel function* of M with respect to $\mathfrak{q}$, where $\operatorname{adeg}_i(\mathfrak{q}; M)$ is the i-th arithmetic degree of M with respect to $\mathfrak{q}$. For $n \gg 0$, the function $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n)$ becomes a polynomial $P^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n)$, called an *adjusted Hilbert-Samuel polynomial* of M with respect to $\mathfrak{q}$. The aim of this thesis is studying the Hilbert coefficients of M, from this we give a characterization of sequentially generalized Cohen-Macaulay modules.

The thesis is divided into four chapters. Chapter 1 presents some preliminary notions and results.

In Chapter 2, we establish an uniform bound for the Castelnouvo-Mumford regularity of the associated graded modules with respect to distinguished parameter ideals of a sequentially generalized Cohen-Macaulay module.

In Chapter 3, we prove that if $\mathfrak{q}$ is a distinguished parameter ideal of M then there exists an integer n_0 such that $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) \geq 0$ for all $n \geq n_0$. Moreover, if M is sequentially generalized Cohen-Macaulay, then n_0 could be choosen to be independent from the choice of $\mathfrak{q}$.

Chapter 4 is devoted to the proof of the following main result of the thesis: *Assume that R is a homomorphic image of a Cohen-Macaulay local ring. Then, the module M is sequentially generalized Cohen-Macaulay if and only if the set $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}(M)$ of polynomials $P^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n)$, where $\mathfrak{q}$ runs over the set of all distinguished parameter ideals of M, is finite.*

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Những kết quả viết chung với các tác giả khác đã được các đồng tác giả cho phép khi đưa vào luận án. Các kết quả của luận án là mới và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Tác giả

Nguyễn Tuấn Long

Lời cảm ơn

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn đến Thầy, GS. TSKH. Nguyễn Tự Cường. Thầy đã dạy tôi những bài học đầu tiên về Đại số giao hoán, hướng dẫn tôi từ khi học thạc sĩ cho tới nghiên cứu sinh. Luận án này không thể hoàn thành nếu không có sự hướng dẫn kiên trì, tận tâm của Thầy. Đối với tôi, Thầy như người cha, luôn kiên trì, mong mỏi đứa con trưởng thành trong khoa học cũng như trong cuộc sống. Một lần nữa, tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn đến Thầy và gia đình.

Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành đến Cô, GS. TS. Lê Thị Thanh Nhàn. Cô là người đã chỉ bảo tôi những kiến thức vỡ lòng từ khi còn là sinh viên đại học cho đến khi học nghiên cứu sinh. Cô là người chỉ đường, dẫn dắt từng bước cho thế hệ trẻ trên con đường nghiên cứu khoa học trong đó có tôi.

Luận án được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của GS. TSKH. Nguyễn Tự Cường và GS. TS. Lê Thị Thanh Nhàn. Một lần nữa, tôi xin gửi lời cảm ơn đến Thầy và Cô.

Tôi xin gửi lời cảm ơn đến GS. TSKH. Lê Tuấn Hoa, đã đưa ra nhiều góp ý để luận án được rõ ràng, chính xác hơn.

Tôi xin gửi lời cảm ơn đến những anh, chị, em đã và đang làm nghiên cứu sinh ở Viện Toán học, đặc biệt là TS. Hoàng Lê Trường và TS. Phạm Hùng Quý, đã có nhiều giúp đỡ, chia sẻ với tôi trong khoa học cũng như trong cuộc sống.

Tôi xin gửi lời cảm ơn đến Viện Toán học, Trung tâm đào tạo sau đại học Viện Toán học, các phòng ban chức năng, đã tạo điều kiện cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu từ khi còn là học viên cao học của viện cho tới hiện tại.

Tôi xin gửi lời cảm ơn đến Khoa Toán, trường Đại học Sư phạm Thái Nguyên và Khoa Toán Kinh tế, trường Đại học Kinh tế Quốc dân Hà Nội đã tạo điều kiện cho tôi trong công tác để tôi có thời gian học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận án này.

Cuối cùng, tôi xin gửi lời cảm ơn đến những người thân trong gia đình, bố, mẹ, vợ và con gái. Họ đã chia sẻ, động viên tôi trong suốt thời gian học tập và nghiên cứu để tôi có thể hoàn thành luận án này. Tôi xin tặng luận án này cho bố, mẹ, vợ và con gái nhỏ 2 tuổi của tôi.

Mục lục

Mở đầu

Cho $(R, \mathfrak{m})$ là một vành giao hoán địa phương Noether với iđêan cực đại duy nhất $\mathfrak{m}$ và M là một R-môđun hữu hạn sinh chiều d. Khi đó, với $\underline{x} = x_1, ..., x_d$ là một hệ tham số của M, luôn có $\ell(M/\underline{x}M) \geq e(\underline{x}; M)$, trong đó $\ell(\bullet)$ là hàm độ dài và $e(\underline{x}; M)$ là số bội của M đối với hệ tham số $\underline{x}$. Nếu với mọi (hoặc tồn tại) hệ tham số $\underline{x}$ sao cho $\ell(M/\underline{x}M) = e(\underline{x}; M)$ thì M được gọi là *môđun Cohen-Macaulay*. Lớp môđun Cohen-Macaulay là đối tượng nghiên cứu trung tâm của Đại số giao hoán. Một trong những mở rộng đầu tiên của lớp môđun Cohen-Macaulay là lớp môđun Buchsbaum do J. Stückrad-W. Vogel [33] đưa ra. Môđun M được gọi là *Buchsbaum* nếu tồn tại một hằng số C sao cho $\ell(M/\underline{x}M) = e(\underline{x}; M) + C$ với mọi hệ tham số $\underline{x}$. Do đó, môđun Cohen-Macaulay là một trường hợp đặc biệt của môđun Buchsbaum với $C = 0$. Tiếp sau đó, N. T. Cường-P. Schenzel-N. V. Trung [43] đã đưa một lớp môđun thỏa mãn tính chất tồn tại hằng số C sao cho $\ell(M/\underline{x}M) \leq e(\underline{x}; M) + C$ với mọi hệ tham số $\underline{x}$, được gọi là *môđun Cohen-Macaulay suy rộng*. Hằng số C nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện trên xác định bởi $C = \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d-1}{i} \ell(H^i_{\mathfrak{m}}(M))$, thường được gọi là *hằng số Buchsbaum* và ký hiệu là $I(M)$, ở đây $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ là môđun đối đồng điều địa phương thứ i của M đối với iđêan cực đại $\mathfrak{m}$. Một hướng mở rộng khác, lớp môđun Cohen-Macaulay dãy và môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy, do N. T. Cường-L. T. Nhàn [12] đưa ra cho trường hợp địa phương. Lưu ý, khái niệm môđun Cohen-Macaulay dãy do R. P. Stanley [32] đưa ra đầu tiên cho trường hợp phân bậc. Trong trường hợp địa phương, một lọc các môđun con $\mathcal{F} : M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_s$ của M được gọi là *lọc Cohen-Macaulay* (tương ứng, *lọc Cohen-Macaulay suy rộng*) nếu $\dim M_{i+1} < \dim M_i$, $\ell(M_s) < \infty$ và M_i/M_{i+1} là môđun Cohen-Macaulay (tương ứng, Cohen-Macaulay suy rộng) với mọi $i = 0, ..., s-1$. Môđun M được gọi là *Cohen-Macaulay dãy* (tương ứng, *Cohen-Macaulay suy rộng dãy*) nếu M có một lọc Cohen-Macaulay (tương ứng, lọc Cohen-Macaulay suy rộng). N. T. Cường-Đ. T. Cường trong [6] và [7] dùng sự sai khác giữa độ dài của môđun $M/\underline{x}M$ và số bội của các môđun trong một lọc các môđun con của M để đặc trưng môđun Cohen-Macaulay dãy và Cohen-Macaulay suy rộng dãy. Một lọc $\mathcal{D} : M = D_0 \supset D_1 \supset ... \supset D_t = H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ của M được gọi là *lọc chiều* nếu D_{i+1} là môđun con lớn nhất của D_i sao cho $\dim D_{i+1} < \dim D_i$ với mọi $i = 0, ..., t-1$. Lọc chiều luôn tồn tại và xác định duy nhất. Ký hiệu $d_i = \dim D_i$ với $i = 0, ..., t$. Một hệ tham số $\underline{x} = x_1, ..., x_d$ được gọi là *hệ tham số tốt* nếu $(x_{d_i+1}, ..., x_d)M \cap D_i = 0$ với mọi $i = 0, ..., t-1$. Khái niệm hệ tham số tốt lần đầu tiên được giới thiệu bởi N. T. Cường-Đ. T. Cường [6]. Khi đó, sự sai khác giữa độ dài và các số bội được xét dưới dạng một hàm số

$$I_{\mathcal{D},M}(\underline{x}) = \ell(M/\underline{x}M) - \sum_{i=0}^{t} e(x_1, ..., x_{d_i}; D_i).$$

Hàm số này không âm với mọi hệ tham số tốt $\underline{x}$. Hơn nữa, M là môđun Cohen-Macaulay dãy khi và chỉ khi $I_{\mathcal{D},M}(\underline{x}) = 0$ với mọi (hoặc với một) hệ tham số tốt $\underline{x}$; và M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy khi và chỉ khi tồn tại hằng số C sao cho $I_{\mathcal{D},M}(\underline{x}) \leq C$ với mọi hệ tham số tốt $\underline{x}$.

Một cách tiếp cận khác tới cấu trúc môđun là thông qua các hệ số Hilbert. Đây cũng là hướng nghiên cứu của luận án. Trước hết, cho I là một iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ của R. Khi đó, với n đủ lớn tồn tại các số nguyên $e_i(I; M)$ sao cho

$$\ell(M/I^{n+1}M) = \sum_{i=0}^{d} (-1)^i e_i(I; M) \binom{n+d-i}{d-i}.$$

Những số nguyên $e_i(I; M)$ được gọi là *hệ số Hilbert* của M đối với iđêan I. Hơn nữa, $e_0(I; M)$ chính là số bội của môđun M đối với iđêan I. Gần đây, L. Ghezzi-S. Goto-J.Y. Hong-K. Ozeki-T. T. Phuong-W. V. Vasconcelos [14] đã đưa ra một đặc trưng cho môđun Cohen-Macaulay qua hệ số Hilbert. Cụ thể, cho M là một môđun không trộn lẫn (unmixed). Khi đó, môđun M là Cohen-Macaulay khi và chỉ khi $e_1(\mathfrak{q}; M) = 0$ với mọi (hoặc với một) iđêan tham số $\mathfrak{q}$ của M. Ngay sau đó, S. Goto-K.Ozeki [16] đã đưa ra một đặc trưng của môđun Cohen-Macaulay suy rộng thông qua các hệ số Hilbert như sau: M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng khi và chỉ khi tập các hệ số Hilbert $\wedge_i(M) = \{e_i(\mathfrak{q}; M)\}$, trong đó $\mathfrak{q}$ chạy trên tập các iđêan tham số của M với mọi $i = 1, ..., d$, là hữu hạn. Ký hiệu $U_M(0)$ là môđun con lớn nhất của M sao cho $\dim U_M(0) < \dim M$. Khi đó, môđun M trong hai kết quả trên thỏa mãn $\dim U_M(0) \leq 0$. Vậy một câu hỏi tự nhiên đặt ra là: Điều gì xảy ra khi $\dim U_M(0) > 0$? Trước khi trả lời cho câu hỏi này chúng ta cần một vài khái niệm sau. Cho I là một iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ của R. *Bậc số học* thứ i của M đối với iđêan I

được định nghĩa như sau (xem [4], [37], [38])

$$\operatorname{adeg}_i(I;M) = \sum_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Ass}(M),\ \dim R/\mathfrak{p}=i} \operatorname{mult}_M(\mathfrak{p}) e_0(I;R/\mathfrak{p}),$$

trong đó $\operatorname{mult}_M(\mathfrak{p})$ là độ dài của $R_\mathfrak{p}$-môđun $H^0_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$ và được gọi là *độ dài bội* của M tại iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$. Cho $\mathcal{D}: M = D_0 \supset D_1 \supset ... \supset D_t = H^0_\mathfrak{m}(M)$ là lọc chiều của M. Theo P. Schenzel [31], một hệ tham số $x_1, ..., x_d$ được gọi là *hệ tham số tách biệt* (distinguished) của M nếu $(x_{d_i+1}, ..., x_d)D_i = 0$ với mọi $i = 1, ..., t$ và iđêan tham số $\mathfrak{q}$ của M được gọi là *iđêan tham số tách biệt* nếu $\mathfrak{q}$ sinh bởi một hệ tham số tách biệt. N. T. Cường-S. Goto-H. L. Trường [9] đã đưa ra đặc trưng cho môđun Cohen-Macaulay dãy thông qua hệ số Hilbert và bậc số học như sau: Giả sử R là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay địa phương. Khi đó, môđun M là một môđun Cohen-Macaulay dãy khi và chỉ khi $(-1)^i e_i(\mathfrak{q}; M) = \operatorname{adeg}_{d-i}(\mathfrak{q}; M)$ với mọi $i = 0, ..., d$ và với mọi (hoặc với một) iđêan tham số tách biệt $\mathfrak{q}$ của M. Kết quả này được xem như một mở rộng cho kết quả của L. Ghezzi-S. Goto-J.Y. Hong-K. Ozeki-T. T. Phuong-W. V. Vasconcelos [14] khi bỏ đi điều kiện $U_M(0) = 0$. Phần trả lời còn lại, cụ thể là đặc trưng môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy qua hệ số Hilbert là mục tiêu chính của luận án.

Với gợi ý từ kết quả của N. T. Cường-S. Goto-H. L. Trường [9], chúng tôi xét hiệu

$$H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) = \ell(M/\mathfrak{q}^{n+1}M) - \sum_{i=0}^{d} \operatorname{adeg}_i(\mathfrak{q}; M)\binom{n+i}{i}$$

như một hàm số với biến n và được gọi là *hàm hiệu chỉnh Hilbert-Samuel* của M đối với iđêan $\mathfrak{q}$. Lưu ý, $\operatorname{adeg}_d(\mathfrak{q}; M) = e_0(\mathfrak{q}; M)$. Do đó, với n đủ lớn hàm số $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n)$ là một đa thức có dạng

$$P^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) = \sum_{i=1}^{d} \Big((-1)^i e_i(\mathfrak{q}; M) - \operatorname{adeg}_{d-i}(\mathfrak{q}; M)\Big)\binom{n+d-i}{d-i}.$$

Ký hiệu $\mathcal{P}_\mathcal{D}(M)$ là tập tất cả các đa thức $P^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n)$ với $\mathfrak{q}$ chạy trên tập các iđêan tham số tách biệt của M. Kết quả chính trong [9] có thể được phát biểu lại như sau: Giả sử R là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay địa phương. Khi đó, môđun M là Cohen-Macaulay dãy khi và chỉ khi $\mathcal{P}_\mathcal{D}(M) = \{0\}$. Định lý quan trọng nhất của luận án là một mở rộng của kết quả trên và được phát biểu như sau.

Định lý chính. *Giả sử R là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay địa phương. Khi đó, M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy khi và chỉ khi tập các đa thức $\mathcal{P}_\mathcal{D}(M)$ là hữu hạn.*

Để chứng minh điều kiện cần của Định lý chính, trước hết chúng tôi xét tập $\vee_i(M) = \{(-1)^i e_i(\mathfrak{q}; M) - \mathrm{adeg}_{d-i}(\mathfrak{q}; M) \mid \mathfrak{q}$ chạy trên tập các hệ tham số tách biệt$\}$ và chú ý rằng $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}(M)$ hữu hạn khi và chỉ khi $\vee_i(M)$ hữu hạn với mọi $i = 1, ..., d$. Cho M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy. Khi đó, bằng quy nạp không quá khó để chỉ ra $\vee_i(M)$ hữu hạn với mọi $i = 1, ..., d-1$. Khó khăn ở đây là chỉ ra $\vee_d(M)$ là hữu hạn. Trước hết, với $\mathfrak{q}$ là iđêan tham số của M, gọi $\rho_{\mathfrak{q}}(M)$ là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $\ell(M/\mathfrak{q}^{n+1}M)$ là đa thức với mọi $n \geq \rho_{\mathfrak{q}}(M)$. Khi đó, với $n \geq \rho_{\mathfrak{q}}(M)$ chúng ta có công thức

$$\begin{aligned} &\mid (-1)^d e_d(\mathfrak{q}; M) - \mathrm{adeg}_0(\mathfrak{q}; M) \mid \\ &\qquad \leq \mid H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) \mid + \sum_{i=1}^{d-1} \mid (-1)^i e_i(\mathfrak{q}; M) - \mathrm{adeg}_{d-i}(\mathfrak{q}; M) \mid \binom{n+d-i}{d-i}. \quad (\dagger) \end{aligned}$$

Vậy, từ công thức (†), để chỉ ra $\vee_d(M)$ là hữu hạn chúng tôi cần giải quyết hai vấn đề sau.

Vấn đề 1: Cho M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy. Xác định chặn đều cho $\rho_{\mathfrak{q}}(M)$ với mọi iđêan tham số tách biệt $\mathfrak{q}$ của M.

Vấn đề 2: Cho M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy. Tìm một hằng số N sao cho $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) \geq 0$ với mọi $n \geq N$ và mọi iđêan tham số tách biệt $\mathfrak{q}$ của M.

Cho M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy. Khi hai vấn đề trên được giải quyết, gọi C là hằng số thỏa mãn $C \geq N$ và $C \geq \rho_{\mathfrak{q}}(M)$ với mọi iđêan tham số tách biệt $\mathfrak{q}$ của M. Lưu ý, do $\vee_i(M)$ là hữu hạn nên luôn tồn tại các hằng số C_i sao cho với mọi iđêan tham số tách biệt $\mathfrak{q}$ của M, ta luôn có $\mid (-1)^i e_i(\mathfrak{q}; M) - \mathrm{adeg}_{d-i}(\mathfrak{q}; M) \mid \leq C_i$ với mọi $i = 1, ..., d-1$. Hơn nữa, không khó để chỉ ra tồn tại một đa thức $g(n)$ có các hệ số không phụ thuộc vào iđêan tham số tách biệt $\mathfrak{q}$ sao cho $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) \leq g(n)$ (Bổ đề 4.2.1). Từ công thức (†), chọn $n = C$ ta có

$$\mid (-1)^d e_d(\mathfrak{q}; M) - \mathrm{adeg}_0(\mathfrak{q}; M) \mid \leq g(C) + \sum_{i=1}^{d-1} C_i \binom{C+d-i}{d-i},$$

với mọi iđêan tham số tách biệt $\mathfrak{q}$ của M. Do đó, $\vee_d(M)$ là hữu hạn.

Để chứng minh điều kiện đủ của Định lý chính, chúng tôi dựa vào kết quả của N. T. Cường - Đ. T. Cường [7] về đặc trưng môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy qua các đối đồng điều địa phương.

Luận án được chia thành bốn chương.

Chương 1 là chương chuẩn bị. Trong chương này chúng tôi nêu lại một số khái niệm và kết quả đã biết liên quan đến luận án như lọc chiều, hệ tham số tốt, hệ tham số tách biệt, môđun Cohen-Macaulay dãy, chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford, phần tử lọc chính quy (trong vành phân bậc), hàm và đa thức Hilbert-Samuel, hệ số Hilbert, phần tử bề mặt. Các khái niệm và kết quả của chương này được trích dẫn từ các công trình nghiên cứu [5], [6], [9], [12], [13], [21], [29], [30], [31], [34].

Các kết quả của luận án được trình bày trong Chương 2, Chương 3 và Chương 4 dựa theo các bài báo [10], [11], [26]. Trước khi giới thiệu các kết quả của Chương 2 chúng tôi cần mở rộng khái niệm hệ tham số tách biệt đối với một lọc bất kỳ. Một hệ tham số $x_1, ..., x_d$ được gọi là *hệ tham số tách biệt* của M đối với lọc $\mathcal{F} : M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_s$ nếu $(x_{\dim M_i+1}, ..., x_d)M_i = 0$ với mọi $i = 1, ..., s$. Trong tiết đầu của Chương 2, chúng tôi chỉ ra rằng nếu M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy với lọc Cohen-Macaulay suy rộng $\mathcal{F} : M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_t$ và J là iđêan sinh bởi một phần hệ tham số tách biệt của M thì các môđun $M_i/(J^n M_i + M_{i+1})$ là Cohen-Macaulay suy rộng. Hơn nữa, chúng tôi đưa ra một liên hệ giữa hằng số Buchsbaum của môđun này với hằng số Buchsbaum của môđun M_i/M_{i+1} với mọi $i = 0, ..., t-1$. Và từ đó chúng tôi có kết quả sau.

Định lý 2.1.10. *Cho M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy với lọc Cohen-Macaulay suy rộng $\mathcal{F}$ và J là iđêan của R sinh bởi một phần hệ tham số tách biệt của M đối với lọc $\mathcal{F}$. Khi đó, $M/J^n M$ là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy với mọi số nguyên dương n.*

Từ Định lý 2.1.10, chúng tôi đưa ra một vài tính chất cơ bản của bất biến $I(\mathcal{F}, M) = \sum_{i=0}^{t-1} I(M_i/M_{i+1}) + \ell(M_t)$. *Chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford* của $G_{\mathfrak{q}}(M)$, gọi ngắn gọn là chỉ số chính quy, được ký hiệu và định nghĩa như sau

$$\operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M)) = \sup\{n + i \mid [H^i_{G_{\mathfrak{q}}(R)_+}(G_{\mathfrak{q}}(M))]_n \neq 0, i \geq 0\},$$

trong đó $G_{\mathfrak{q}}(R)_+ = \bigoplus_{n>0} \mathfrak{q}^n/\mathfrak{q}^{n+1}$. Khi đó, theo công thức Serre (xem Bổ đề 1.3.3) thì $\rho_{\mathfrak{q}}(M) \leq \operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M))$.

Nội dung chính của tiết cuối là đưa ra lời giải cho Vấn đề 1. Cũng giống như các kết quả về môđun Cohen-Macaulay dãy và Cohen-Macaulay suy rộng dãy trong [6], [7] chúng tôi không thể chứng minh trực tiếp trên tập các iđêan tham số tách biệt của M mà cần phải mở rộng cho tập các iđêan tham số tách biệt của M đối với một lọc Cohen-Macaulay suy rộng.

Định lý 2.2.6. *Cho M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy và $\mathcal{F}$ là lọc Cohen-Macaulay suy rộng của M. Khi đó, tồn tại hằng số $C_{\mathcal{F}}$ sao cho*

$$\operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M)) \le C_{\mathcal{F}}$$

với mọi iđêan tham số tách biệt $\mathfrak{q}$ của M đối với $\mathcal{F}$.

Phần cuối của tiết này, chúng tôi chỉ ra Định lý 2.2.6 là mở rộng thực sự kết quả chính của [25] và [41].

Chương 3 được chia làm 3 tiết. Trong tiết đầu tiên, trước hết chúng tôi xét một lọc $\mathcal{F}: M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_t$ có cùng độ dài với lọc chiều $\mathcal{D}: M = D_0 \supset D_1 \supset \ldots \supset D_t = H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ sao cho $\ell(D_i/M_i) < \infty$ với mọi $i = 0, \ldots, t$ và tập tất cả các lọc này ký hiệu là $\mathcal{F}(M)$. Tiếp theo, chúng tôi đưa ra một vài tính chất cơ bản của các lọc trong $\mathcal{F}(M)$ và mối liên hệ với bậc số học. Từ Vấn đề 2, một câu hỏi tự nhiên đặt ra là: Hàm $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) \ge 0$ trong trường hợp tổng quát không? Trong tiết 2, chúng tôi trả lời cho câu hỏi này với kết quả sau.

Định lý 3.2.3. *Giả sử R là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay địa phương. Cho $\mathcal{F}$ là một lọc của $\mathcal{F}(M)$ và $\mathfrak{q}$ là một iđêan tham số tách biệt của M đối với lọc $\mathcal{F}$. Khi đó tồn tại số n_0 đủ lớn sao cho hàm số*

$$H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) = \ell(M/\mathfrak{q}^{n+1}M) - \sum_{i=0}^{d} \operatorname{adeg}_i(\mathfrak{q}; M)\binom{n+i}{i}$$

tăng và nhận giá trị không âm với mọi $n \ge n_0$.

Lưu ý, số $n_0 = n_0(\mathfrak{q})$ trong Định lý 3.2.3 phụ thuộc vào iđêan tham số $\mathfrak{q}$. Vì vậy, kết quả này chưa đủ để giải quyết Vấn đề 2. Trong tiết cuối, kết quả quan trọng đầu tiên là đưa ra mối liên hệ giữa số n để hàm $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n)$ không âm và chỉ số chính quy như sau.

Định lý 3.3.5. *Cho M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy, $\mathcal{F}$ là lọc Cohen-Macaulay suy rộng của M và $\mathfrak{q}$ là một iđêan tham số tách biệt của M đối với lọc $\mathcal{F}$. Đặt $r = \operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M))$. Khi đó,*

$$H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) = \ell(M/\mathfrak{q}^{n}M) - \sum_{i=0}^{d} \binom{n+i}{i} \operatorname{adeg}_i(\mathfrak{q}; M) \ge 0$$

với mọi $n \ge r + \binom{r+d-1}{d-1} I(\mathcal{F}, M) + d$.

Từ Định lý 3.3.5 và Định lý 2.2.6, chúng ta có lời giải cho Vấn đề 2 như sau.

Định lý 3.3.6. *Cho M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy và $\mathcal{F}$ là một lọc Cohen-Macaulay suy rộng của M. Khi đó, tồn tại hằng số N chỉ phụ thuộc vào $\mathcal{F}$ và M sao cho $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) \geq 0$ với mọi iđêan tham số tách biệt $\mathfrak{q}$ của M đối với lọc $\mathcal{F}$ và mọi số nguyên $n \geq N$.*

Với sự chuẩn bị của Chương 2 và 3, Chương 4 được dành riêng để chứng minh Định lý chính. Tiết đầu tiên, chúng tôi đưa ra khái niệm đa thức hiệu chỉnh Hilbert-Samuel $P^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n)$ và đưa công thức tính bậc cho đa thức này. Tiếp theo, tập tất cả các đa thức $P^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n)$, trong đó $\mathfrak{q}$ chạy trên tập các iđêan tham số tách biệt của M đối với một lọc $\mathcal{F}$, được gọi là tập đa thức hiệu chỉnh của M đối với lọc $\mathcal{F}$. Khi đó, với $\mathcal{F}$ là một lọc bất kỳ của M ta luôn có $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}(M) \subseteq \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(M)$. Vì vậy, phần thuận của Định lý chính được chứng minh nếu tồn một lọc $\mathcal{F}$ sao cho $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(M)$ hữu hạn. Đó cũng là nội dung chính của tiết tiếp theo. Trước hết, với hằng số $C = C_{\mathcal{F}}$ trong Định lý 2.2.6 chúng tôi có kết quả sau.

Định lý 4.2.3. *Cho M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy chiều $d \geq 2$, $\mathcal{F}$ là một lọc Cohen-Macaulay suy rộng của M và $\mathfrak{q}$ là hệ tham số tách biệt của M đối với lọc $\mathcal{F}$. Khi đó,*

(1) $| e_1(\mathfrak{q}; M) + \operatorname{adeg}_{d-1}(\mathfrak{q}; M) | \leq I(M/M_1)$;

(2) $| (-1)^i e_i(\mathfrak{q}; M) - \operatorname{adeg}_{d-i}(\mathfrak{q}; M) |$
$\leq 2^{i-1}\left((C+1)^{d-1} I(\mathcal{F}, M) + d + C + 2\right)^{i-1} I(\mathcal{F}, M)$ *với* $2 \leq i \leq d-1$;

(3) $| e_d(\mathfrak{q}; M) | \leq 2^{d-1}\left((C+1)^{d-1} I(\mathcal{F}, M) + d + C + 2\right)^{d-1} I(\mathcal{F}, M)$.

Lưu ý rằng $| (-1)^d e_d(\mathfrak{q}; M) - \operatorname{adeg}_0(\mathfrak{q}; M) | \leq | e_d(\mathfrak{q}; M)) | + \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(M))$. Khi đó, với giả thiết như trong Định lý 4.2.3 ta có các hệ số của đa thức $P^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n)$ bị chặn đều. Do đó, ta có kết quả sau.

Định lý 4.2.4. *Cho M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy và $\mathcal{F}$ là một lọc Cohen-Macaulay suy rộng của M. Khi đó, tập các đa thức $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(M)$ là hữu hạn.*

Trong tiết cuối, trước hết chúng tôi xét tập các hệ tham số sau.

Ký hiệu 4.3.1. Cho $\underline{x} = x_1, ..., x_d$ là hệ tham số tách biệt của M. Ký hiệu

$$\mathcal{S}(\underline{x}; M) = \{\{x_1^{n_1}, ..., x_d^{n_d}\} \mid n_i > 0 \text{ và } x_i^{n_i}, ..., x_d^{n_d} \text{ là hệ tham số tách biệt của } M/(x_1^{n_1}, ..., x_{i-1}^{n_{i-1}})M \text{ với mọi } i = 1, ..., d\},$$

với quy ước $x_0 = 0$.

Giả sử $d \geq 2$. Khi đó, nếu $\{x_1^{n_1}, ..., x_{d-1}^{n_{d-1}}, x_d^{n_d}\} \in \mathcal{S}(\underline{x}; M)$ thì $\{x_1^{n_1}, ..., x_{d-1}^{n_{d-1}}, x_d^{n_d+k}\} \in \mathcal{S}(\underline{x}; M)$ với mọi số nguyên dương k. Do đó, nếu $\mathcal{S}(\underline{x}; M) \neq \emptyset$ thì $\mathcal{S}(\underline{x}; M)$ là tập có vô hạn phần tử.

Bổ đề 4.3.2. *Giả sử $d = \dim M \geq 2$ và $\underline{x} = x_1, ..., x_d$ là hệ tham số tách biệt của M sao cho $\mathcal{S}(\underline{x}; M) \neq \emptyset$. Lấy $\{y_1, ..., y_d\} \in \mathcal{S}(\underline{x}; M)$. Khi đó, những phát biểu sau là đúng.*

(i) *$y_1, ..., y_d$ là một d-dãy trên M.*

(ii) *Nếu $\{z_2, ..., z_d\} \in \mathcal{S}(y_2, ..., y_d; M/y_1M)$ thì $\{y_1, z_2, ..., z_d\} \in \mathcal{S}(\underline{x}; M)$.*

(iii) *Nếu M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy thì $\mathcal{S}(\underline{x}; M)$ luôn chứa một dd-dãy trên M.*

Cho $\mathcal{F} : M = M_0 \supset M_1 \supset ... \supset M_t$ là một lọc trong $\mathcal{F}(M)$ và $x_1, ..., x_d$ là hệ tham số tách biệt của M đối với lọc $\mathcal{F}$. Với $d_j \leq k < d_{j-1}$, đặt $\overline{M}_i = (M_i + (x_1, ..., x_k)M)/(x_1, ..., x_k)M$ với mọi $i = 0, ..., t$. Ký hiệu

$$\mathcal{F}/(x_1, ..., x_k)M : \overline{M} = \overline{M}_0 \supset \overline{M}_1 \supset ... \supset \overline{M}_s = 0$$

là một lọc các môđun con của $\overline{M}$, trong đó $s = j$ nếu $k = d_j$ và $s = j + 1$ trong các trường hợp còn lại. Hơn nữa, $x_{k+1}, ..., x_d$ là một hệ tham số tách biệt của $\overline{M}$ đối với lọc $\mathcal{F}/(x_1, ..., x_k)M$. Bổ đề sau chỉ ra một hệ tham số $x_1, ..., x_d$ sao cho $\mathcal{F}/(x_1, ..., x_k)M$ là một lọc của $\mathcal{F}(\overline{M})$.

Bổ đề 4.3.3. *Giả sử R là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay địa phương. Khi đó tồn tại một hệ tham số tách biệt $\underline{x} = x_1, ..., x_d$ của M sao cho $\mathcal{F}/(x_1, ..., x_i)M \in \mathcal{F}(M/(x_1, ..., x_i)M)$ với mọi $i = 0, ..., d - 1$ và mọi lọc $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(M)$. Hơn nữa, $\mathcal{S}(\underline{x}; M) \neq \emptyset$.*

Với $\underline{x} = x_1, ..., x_d$ như trong Bổ đề 4.3.3, ta ký hiệu

$$\wedge_{\underline{x}}(M) = \bigcup_{\underline{y} \in \mathcal{S}(\underline{x}; M)} \wedge(\underline{y}; M),$$

trong đó $\wedge(\underline{y}; M) = \{| \ (-1)^i e_i(\underline{y}; M) - \operatorname{adeg}_{d-i}(\underline{y}; M) \ | \ |$ với mọi $i = 1, ..., d-1\}$. Khi đó, nếu $\wedge_{\underline{x}}(M)$ hữu hạn thì kết quả sau chỉ ra các môđun đối đồng điều địa phương $H^j_{\mathfrak{m}}(M/D_{i+1})$ là hữu hạn sinh với mọi $j = 1, ..., d_i - 1, d_i \geq 2$ và $i = 0, ..., t-1$.

Định lý 4.3.6. *Giả sử R là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay địa phương và $d \geq 2$. Cho $\mathcal{D} : M = D_0 \supset D_1 \supset ... \supset D_t = H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ là lọc chiều của M và $\underline{x} = x_1, ..., x_d$ như trong Bổ đề 4.3.3. Khi đó, nếu $\wedge_{\underline{x}}(M)$ là tập hữu hạn thì*

$$\mathfrak{m}^{\ell} H^j_{\mathfrak{m}}(M/D_{i+1}) = 0$$

với mọi $j = 1, ..., d_i - 1, d_i \geq 2$ và $i = 0, ..., t-1$, trong đó $\ell = \max \wedge_{\underline{x}}(M)$.

Từ Định lý 4.3.6, kết hợp với kết quả của N. T. Cường -Đ. T. Cường [7, Proposition 3.5] về đặc trưng môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy qua đối đồng điều địa phương suy ra M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy. Kết quả sau hoàn toàn chứa Định lý chính của luận án.

Định lý 4.3.7. *Giả sử R là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay địa phương. Khi đó, các mệnh đề sau là tương đương:*

(*i*) *M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy.*

(*ii*) *Với mọi $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(M)$, tập các đa thức $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(M)$ là hữu hạn.*

(*iii*) *Tồn tại $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(M)$, tập các đa thức $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(M)$ là hữu hạn.*

(*iv*) *Tập các đa thức $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}(M)$ là hữu hạn.*

Chương 1

Chuẩn bị

Trong chương này, chúng tôi nhắc lại một số khái niệm và kết quả cần thiết cho các chương sau về lọc chiều, hệ tham số tốt, hệ tham số tách biệt, môđun Cohen-Macaulay dãy, chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford, phần tử lọc chính quy trong vành phân bậc, hệ số Hilbert, phần tử bề mặt trong các công trình [5], [6], [12], [22], [25], [29], [34], [31]. Lưu ý, khái niệm môđun Cohen-Macaulay dãy do R. P. Stanley[32] đưa ra trong trường hợp vành phân bậc, trường hợp địa phương do N.T. Cường, L. T. Nhàn và P. Schenzel đưa ra trong các bài báo [12], [31]. Trong toàn bộ luận án luôn xét $(R, \mathfrak{m})$ là một vành giao hoán có đơn vị, địa phương, Noether với iđêan cực đại duy nhất $\mathfrak{m}$ và M là R-môđun hữu hạn sinh chiều d.

1.1 Lọc chiều, hệ tham số tốt và hệ tham số tách biệt

Định nghĩa 1.1.1. ([12], [6]) (*i*) Một lọc hữu hạn các môđun con của M

$$\mathcal{F} : M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_s$$

được gọi là *thỏa mãn điều kiện chiều* nếu $\dim M_i > \dim M_{i+1}$ với mọi $i = 0, ..., s-1$. Khi đó, ta nói rằng lọc $\mathcal{F}$ có độ dài s.
(*ii*) Một lọc hữu hạn các môđun con $\mathcal{D} : M = D_0 \supset D_1 \supset ... \supset D_t = H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ của M được gọi là *lọc chiều* nếu đồng thời thỏa mãn hai điều kiện sau:

(1) $\mathcal{D}$ là lọc thỏa mãn điều kiện chiều,

(2) D_i là môđun con lớn nhất của D_{i-1} với mọi $i = 1, ..., t$.

Chú ý 1.1.2. (*i*) Vì M là môđun hữu hạn sinh trên vành địa phương Noether nên lọc chiều luôn tồn tại và là duy nhất. Hơn nữa, cho $0 = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M} N(\mathfrak{p})$ là một phân tích nguyên sơ tối tiểu của 0 trong M. Đặt $d_i = \dim D_i$. Khi đó, $D_i = \bigcap_{\dim(R/\mathfrak{p}) \geqslant d_{i-1}} N(\mathfrak{p})$ với mọi $i = 1, ..., t$ (xem [12, Lemma 4.4 (*i*)]).
(*ii*) Mọi lọc thỏa mãn điều kiện chiều luôn có độ dài nhỏ hơn hoặc bằng độ dài của lọc chiều.
(*iii*) Trong luận án này, luôn ký hiệu

$$\mathcal{D} : M = D_0 \supset D_1 \supset ... \supset D_t = H^0_{\mathfrak{m}}(M)$$

là lọc chiều, t là độ dài lọc chiều và $d_i = \dim D_i$ với mọi $i = 0, ..., t$. Lọc các môđun con của M luôn được hiểu là lọc các môđun con thỏa mãn điều kiện chiều.

Ví dụ 1.1.3. Cho vành $R = k[[X, Y, Z]]$ các chuỗi lũy thừa hình thức trên trường k. Đặt $I = (X) \cap (Y, Z) \cap (X^2, Y^2, Z^2)$ và xét R-môđun $M = R/I$. Khi đó, $\dim M = 2$ và M có lọc chiều

$$\mathcal{D} : M = D_0 \supset D_1 \supset D_2 = ((X) \cap (Y, Z))/I,$$

trong đó $D_1 = (X)/I$ là môđun chiều 1 và $D_2 = H^0_{\mathfrak{m}}(M)$.

Định nghĩa 1.1.4. ([6],[31]) Cho $x_1, ..., x_d$ là một hệ tham số của M và $\mathcal{F} : M = M_0 \supset M_1 \supset ... \supset M_s$ là một lọc các môđun con của M.
(*i*) Hệ tham số $x_1, ..., x_d$ của M được gọi là một *hệ tham số tốt đối với lọc* $\mathcal{F}$ nếu $(x_{\dim M_i + 1}, ..., x_d)M \cap M_i = 0$ với mọi $i = 1, ..., s$. Một hệ tham số tốt của M đối với lọc chiều đơn giản được gọi là *hệ tham số tốt* của M.
(*ii*) Hệ tham số $x_1, ..., x_d$ của M được gọi là một *hệ tham số tách biệt đối với lọc* $\mathcal{F}$ nếu $(x_{\dim M_i + 1}, ..., x_d)M_i = 0$ với mọi $i = 1, ..., s$. Một hệ tham số tách biệt của M đối với lọc chiều đơn giản được gọi là *hệ tham số tách biệt* của M. Dễ thấy, một hệ tham số tốt luôn là một hệ tham số tách biệt.
(*iii*) Iđêan tham số $\mathfrak{q}$ của M được gọi là *iđêan tham số tốt* (tương ứng, *iđêan tham số tách biệt*) đối với lọc $\mathcal{F}$ nếu nó sinh bởi một hệ tham số tốt (tương ứng, hệ tham số tách biệt) của M đối với lọc $\mathcal{F}$. Iđêan tham số tốt (tương ứng, iđêan tham số tách biệt) của M đối với lọc chiều được gọi đơn giản là *iđêan tham số tốt* (tương ứng, *iđêan tham số tách biệt*) của M.

Ví dụ 1.1.5. Cho vành $k[[X, Y, Z]]$ các chuỗi lũy thừa hình thức trên trường k. Xét vành $R = k[[X, Y, Z]]/[(X, Y) \cap (Z)]$ và gọi x, y, z lần lượt là ảnh của X, Y, Z trong R. Khi đó, R có chiều 2 và lọc chiều là

$$\mathcal{D} : R \supset (z) \supset (0) = H^0_{\mathfrak{m}}(R).$$

Dễ kiểm tra được $\{y - z, x\}$ là hệ tham số của R. Hơn nữa, $(x) \cap (z) = (0)$. Do đó, $\{y - z, x\}$ là hệ tham số tốt và cũng là hệ tham số tách biệt của R.

Lưu ý rằng, khái niệm lọc chiều, hệ tham số tách biệt do P. Schenzel [31] đưa ra. Hệ tham số tốt do N. T. Cường-Đ. T. Cường [6] đưa ra, nhằm mục đích nghiên cứu lớp các môđun Cohen-Macaulay dãy và Cohen-Macaulay suy rộng dãy.

Chú ý 1.1.6. (*i*) Theo [6, Lemma 2.5] luôn tồn tại hệ tham số tốt. Do đó hệ tham số tách biệt là luôn tồn tại. Hơn nữa, nếu $\dim M > 0$ tập các hệ tham số tốt và tập các hệ tham số tách biệt là vô hạn.
(*ii*) Một hệ tham số tốt (tương ứng, hệ tham số tách biệt) của M luôn là hệ tham số tốt (tương ứng, hệ tham số tách biệt) đối với mọi lọc các môđun con của M.

Bổ đề sau chỉ ra rằng lũy thừa đủ lớn các phần tử của một hệ tham số tách biệt đối với một lọc các môđun con của M là một hệ tham số tốt của M đối với lọc đó.

Bổ đề 1.1.7. *Cho $\mathcal{F} : M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_s$ là một lọc các môđun con của M và $x_1, ..., x_d$ là hệ tham số tách biệt của M đối với lọc $\mathcal{F}$. Khi đó, với mọi số nguyên dương $n_1, ..., n_d$ đủ lớn ta đều có $x_1^{n_1}, ..., x_d^{n_d}$ là hệ tham số tốt của M đối với lọc $\mathcal{F}$.*

Chứng minh. Thật vậy, với mọi số nguyên dương $n_1, ..., n_d$, đặt $n = \min\{n_1, ..., n_d\}$ ta luôn có $(x_{d_i+1}^{n_{d_i+1}}, ..., x_d^{n_d})M \cap M_i \subseteq (x_{d_i+1}, ..., x_d)^n M \cap M_i$ với mọi $i = 1, ..., s$. Mặt khác theo Bổ đề Artin-Rees, với n đủ lớn luôn tồn tại số nguyên c sao cho

$$(x_{d_i+1}, ..., x_d)^n M \cap M_i = (x_{d_i+1}, ..., x_d)^{n-c}((x_{d_i+1}, ..., x_d)^c M \cap M_i).$$

Do đó, với n đủ lớn hay với $n_1, ..., n_d$ đủ lớn ta có

$$\begin{aligned}(x_{d_i+1}^{n_{d_i+1}}, ..., x_d^{n_d})M \cap M_i &\subseteq (x_{d_i+1}, ..., x_d)^{n-c}((x_{d_i+1}, ..., x_d)^c M \cap M_i)\\ &\subseteq (x_{d_i+1}, ..., x_d)^{n-c} M_i = 0\end{aligned}$$

với mọi $i = 1, ..., s$. □

1.2 Môđun Cohen-Macaulay dãy

Định nghĩa 1.2.1. ([12]) Một lọc $\mathcal{F} : M = M_0 \supset M_1 \supset ... \supset M_s$ môđun con của M được gọi là *lọc Cohen-Macaulay* nếu $\ell(M_s) < \infty$ và M_i/M_{i+1} môđun Cohen-Macaulay với mọi $i = 0, .., s - 1$. Môđun M được gọi là *Cohen-Macaulay dãy* nếu nó có lọc Cohen-Macaulay.

Chú ý 1.2.2. Cho M là môđun Cohen-Macaulay dãy. Khi đó, M có một lọc Cohen-Macaulay duy nhất chính là lọc chiều (xem [12, Lemma 4.4(ii)]).

Dễ thấy, nếu môđun M là môđun Cohen-Macaulay thì M là môđun Cohen-Macaulay dãy. Ngược lại là không đúng hay nói cách khác lớp môđun Cohen-Macaulay dãy là lớp môđun rộng hơn thực sự lớp môđun Cohen-Macaulay.

Ví dụ 1.2.3. Cho vành $R = k[[x, y]]$ chuỗi các lũy thừa hình thức. Xét R-môđun $M = k[[x, y]] \bigoplus k[[x, y]]/(x^t)$ với t là số nguyên dương. Khi đó, M có chiều 2 và lọc chiều là $M = D_0 \supset D_1 \supset D_2 = 0$, trong đó $D_1 = k[[x, y]]/(x^t)$ là môđun Cohen-Macaulay chiều 1. Do $M/D_1 \cong k[[x, y]]$, nên M/D_1 là Cohen-Macaulay. Do đó, M là một môđun Cohen-Macaulay dãy và hơn nữa nó không là Cohen-Macaulay.

Phần tiếp theo của tiết này, chúng tôi xét hệ tham số tách biệt và hệ tham số tốt khi M là một môđun Cohen-Macaulay dãy. Trước hết, ta cần bổ đề sau.

Bổ đề 1.2.4. *Cho N là môđun con của M mà* $\dim N < d = \dim M$. *Giả sử $x_1, .., x_i$ là một M/N dãy chính quy. Khi đó,*

$$(x_1, ..., x_i)M \cap N = (x_1, ..., x_i)N.$$

Chứng minh. Ta luôn có $(x_1, ..., x_i)N \subseteq (x_1, ..., x_i)M \cap N$. Do đó, ta cần chỉ ra bao hàm thức ngược lại. Chúng ta sẽ chứng minh quy nạp theo i. Nếu $i = 1$ thì

$$(N :_M x_1) = N$$

do x_1 là phần tử chính quy của M/N. Vì vậy, nếu $m \in x_1M \cap N$ thì $m = x_1a \in N$. Cho nên $a \in (N : x_1) = N$. Điều đó khẳng định $x_1M \cap N = x_1N$. Nếu $i > 1$, giả sử $(x_1, ..., x_{i-1})M \cap N = (x_1, ..., x_{i-1})N$. Lấy $a = a_1x_1 + ... + a_{i-1}x_{i-1} + a_ix_i$ là một phần tử của $(x_1, ..., x_i)M \cap N, a_j \in M$ với mọi $j = 1, ...i$. Do đó, $a_i \in ((x_1, ..., x_{i-1})M + N :_M x_i) = (x_1, ..., x_{i-1})M + N$ vì $x_1, ..., x_i$ là dãy chính quy của M/N. Suy ra $a_i = b_1x_1 + ... + b_{i-1}x_{i-1} + c$ trong đó $b_j \in M$ với $j = 1, ..., i-1$ và $c \in N$. Vì vậy, $a - x_ic \in (x_1, .., x_{i-1})M \cap N = (x_1, .., x_{i-1})N$, kéo theo $a \in (x_1, ..., x_i)N$. □

Bổ đề sau chỉ ra hệ tham tốt và hệ tham số tách biệt trùng nhau khi M là môđun Cohen-Macaulay dãy.

Bổ đề 1.2.5. *Cho M là một môđun Cohen-Macaulay dãy và $\underline{x} = x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số của M. Khi đó các mệnh đề sau là tương đương:*

(i) $\underline{x}$ *là hệ tham số tốt của* M.

(ii) $\underline{x}$ *là hệ tham số tách biệt của* M.

Chứng minh. (i) $\Rightarrow$ (ii). Hiển nhiên.
(ii) $\Rightarrow$ (i). Cho $\mathcal{D} : M = D_0 \supset D_1 \supset ... \supset D_t = H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ là lọc chiều của môđun M. Theo Chú ý 1.2.2 thì $\mathcal{D}$ là lọc Cohen-Macaulay của M. Do D_{i-1}/D_i là các môđun Cohen-Macaulay, kéo theo $x_1, ..., x_{d_{i-1}}$ là một D_{i-1}/D_i- dãy chính quy với mọi $i = 0, ..., t-1$. Theo Bổ đề 1.2.4 và chú ý rằng $(x_{d_i+1}, \ldots, x_d)D_i = 0$ ta có

$$
\begin{aligned}
(x_{d_i+1}, \ldots, x_d)M \cap D_i &= (x_{d_i+1}, \ldots, x_d)M \cap D_1 \cap D_i \\
&= (x_{d_i+1}, \ldots, x_{d_1})D_1 \cap D_i \\
&\ldots \\
&= (x_{d_i+1}, \ldots, x_{d_{i-1}})D_{i-1} \cap D_i = (x_{d_i+1}, \ldots, x_{d_{i-1}})D_i = 0
\end{aligned}
$$

với mọi $i = 1, ..., t$. $\square$

Bổ đề 1.2.6. *Cho* M *là một môđun Cohen-Macaulay dãy,* $\underline{x} = x_1, ..., x_d$ *là một hệ tham số tách biệt của* M *và* $J = (x_{i_1}, ..., x_{i_k})$ *là iđêan của* R *sinh bởi một phần hệ tham số của* $\underline{x}$*, với* $1 \leq i_1 < ... < i_k \leq d$*. Khi đó, với mọi số nguyên dương* n *ta có*

$$J^n M \cap D_i = J^n D_i$$

với mọi $i = 1, ..., t$.

Chứng minh. Ta luôn có $J^n D_i \subseteq J^n M \cap D_i$. Do đó, chỉ cần chứng minh bao hàm thức ngược lại. Trước hết, đặt

$$\wedge_{k,n} = \{\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_k) \mid \alpha_i \geq 1 \text{ với mọi } i = 1, ..., k \text{ và } \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = n + k - 1\}$$

và kí hiệu $J^\alpha = (x_{i_1}^{\alpha_1}, ..., x_{i_k}^{\alpha_k})$. Khi đó, theo Bổ đề 1.2.5 và [13, Theorem 1.1] ta có $J^n M = \bigcap_{\alpha \in \wedge_{k,n}} J^\alpha M$. Gọi s là số nguyên dương lớn nhất thỏa mãn $x_{i_s} D_i \neq 0$. Theo Bổ đề 1.2.4 và chú ý rằng $x_{i_j} D_i = 0$ với mọi $i_j > d_i$,

$$
\begin{aligned}
J^n M \cap D_i &= \bigcap_{\alpha \in \wedge_{k,n}} J^\alpha M \cap D_i \\
&= \bigcap_{\alpha \in \wedge_{k,n}} (J^\alpha M \cap D_i) \\
&= \bigcap_{\alpha \in \wedge_{k,n}} J^\alpha D_i \qquad = \bigcap_{\alpha \in \wedge_{k,n}} (x_{i_1}^{\alpha_1}, ..., x_{i_s}^{\alpha_s}) D_i
\end{aligned}
$$

với mọi $i = 1, ..., t$. Mặt khác với $(\beta_1, ..., \beta_s) \in \wedge_{s,n}$ ta có $(\beta_1, ..., \beta_s, 1, ..., 1) \in \wedge_{k,n}$. Do đó

$$\bigcap_{\alpha \in \wedge_{k,n}} (x_{i_1}^{\alpha_1}, ..., x_{i_s}^{\alpha_s}) D_i \subseteq \bigcap_{(\beta_1,...,\beta_s) \in \wedge_{s,n}} (x_{i_1}^{\beta_1}, ..., x_{i_s}^{\beta_s}) D_i.$$

Một lần nữa, áp dụng [13, Theorem 1.1] cho môđun Cohen-Macaulay dãy D_i ta có

$$\bigcap_{(\beta_1,...,\beta_s) \in \wedge_{s,n}} (x_{i_1}^{\beta_1}, ..., x_{i_s}^{\beta_s}) D_i = (x_{i_1}, ..., x_{i_s})^n D_i \subseteq J^n D_i.$$

Do đó, bổ đề được chứng minh. □

1.3 Chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford

Định nghĩa 1.3.1. Cho $\mathcal{S} = \bigoplus_{n \geq 0} S_n$ là vành Noether phân bậc chuẩn và $E = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} E_n$ là $\mathcal{S}$-môđun phân bậc hữu hạn sinh. *Chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford* của E gọi ngắn gọn là *chỉ số chính quy* được ký hiệu và định nghĩa như sau

$$\operatorname{reg}(E) = \sup\{n + i \mid [H^i_{S_+}(E)]_n \neq 0, i \geq 0\},$$

trong đó $S_+ = \bigoplus_{n>0} S_n$. *Chỉ số chính quy hình học* g-reg(E) được xác định bởi

$$\text{g-reg}(E) = \sup\{n + i \mid [H^i_{S_+}(E)]_n \neq 0, i \geq 1\}.$$

Do đó, g-reg$(E) \leq \operatorname{reg}(E)$.

Mệnh đề sau đây đưa ra mối liên hệ về chỉ số chính quy của các môđun phân bậc trong một dãy khớp ngắn.

Mệnh đề 1.3.2. *Cho $\mathcal{S}$ là vành Noether phân bậc chuẩn và $0 \to F \to E \to L \to 0$ là dãy khớp ngắn các $\mathcal{S}$-môđun phân bậc hữu hạn sinh. Khi đó,*

(*i*) $\operatorname{reg}(E) \leq \max\{\operatorname{reg}(F), \operatorname{reg}(L)\}$.

(*ii*) $\operatorname{reg}(F) \leq \max\{\operatorname{reg}(E), \operatorname{reg}(L) + 1\}$.

(*iii*) $\operatorname{reg}(L) \leq \max\{\text{g-reg}(F) - 1, \operatorname{reg}(E)\}$.

Chứng minh. Xem [5, 15.2.15]. □

Cho S là một vành phân bậc Noether với S_0 là vành địa phương Artin và E là S-môđun phân bậc hữu hạn sinh chiều k. Ta có E_n là S_0-môđun có độ dài hữu hạn. Khi đó *hàm Hilbert* được xác định bởi $h_E(n) = \ell_{S_0}(E_n)$. Hơn nữa, khi n đủ lớn tồn tại đa thức $p_E(n)$ bậc $k-1$ với hệ số hữu tỷ được gọi là *đa thức Hilbert* sao cho $\ell_{S_0}(E_n) = p_E(n)$. Bổ đề sau đưa ra một mối liên hệ giữa hàm Hilbert và đa thức Hilbert thông qua đối đồng điều địa phương phân bậc.

Bổ đề 1.3.3. *Với mọi số nguyên n,*

$$h_E(n) - p_E(n) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \ell(H^i_{S_+}(E)_n). \tag{$*$}$$

Chứng minh. Xem [5, Theorem 17.1.6]. □

Lưu ý rằng, công thức $(*)$ trong Bổ đề 1.3.3 được gọi là công thức Serre.

Định nghĩa 1.3.4. Cho S là một vành phân bậc Noether và E là S-môđun phân bậc hữu hạn sinh. Phần tử thuần nhất $z \in S$ được gọi là phần tử *E-lọc chính quy* nếu $(0 :_E z)_n = 0$ với n đủ lớn.

Chú ý 1.3.5. Nếu $(S_0, \mathfrak{n}_0)$ là vành địa phương với trường thặng dư $S_0/\mathfrak{n}_0$ vô hạn khi đó luôn tồn tại phần tử E-lọc chính quy $z \in S_1$(xem [34]). Nếu S_0 có trường thặng dư hữu hạn ta xét $S_0[X]_{\mathfrak{n}_0 S_0[X]}$ là địa phương hóa của vành đa thức $S_0[X]$ tại iđêan nguyên tố $\mathfrak{n}_0 S_0[X]$. Khi đó $S'_0 = S_0[X]_{\mathfrak{n}_0 S_0[X]}$ là vành địa phương có trường thặng dư vô hạn. Đặt $S' = S \otimes S'_0$ và $E' = E \otimes S'_0$. Chú ý rằng

$$H^i_{S_+}(E)_n \otimes_{S_0} S'_0 \cong H^i_{S'_+}(E')_n.$$

Do đó $\operatorname{reg}(E) = \operatorname{reg}(E')$. Nói cách khác, không mất tính tổng quát ta luôn có thể giả sử S_0 là vành địa phương có trường thặng dư vô hạn.

Cho I là iđêan của R. Kí hiệu $G_I(R) = \bigoplus_{n\geq 0} I^n/I^{n+1}$ là *vành phân bậc liên kết* của R đối với iđêan I và $G_I(M) = \bigoplus_{n\geq 0} I^n M/I^{n+1}M$ là $G_I(R)$-*môđun phân bậc liên kết* của M đối với I.

Bổ đề 1.3.6. *Cho $\mathfrak{q}$ là iđêan tham số của M. Khi đó,*
(i) Nếu $H^0_{\mathfrak{m}}(M) = 0$ thì $\operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M)) = \text{g-reg}(G_{\mathfrak{q}}(M))$.
(ii) $\operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M/H^0_{\mathfrak{m}}(M))) \leq \operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M)) \leq \operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M/H^0_{\mathfrak{m}}(M))) + \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(M))$.

Chứng minh. (i) Xem [29, Proposition 3.2].
(ii) Theo [29, Proposition 3.1], $\operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M)) \le \operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M/H^0_{\mathfrak{m}}(M))) + \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(M))$. Hạch của toàn cấu chính tắc $G_{\mathfrak{q}}(M) \longrightarrow G_{\mathfrak{q}}(M/H^0_{\mathfrak{m}}(M))$ là một môđun phân bậc có độ dài hữu hạn. Do đó, $\operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M/H^0_{\mathfrak{m}}(M))) \le \operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M))$. □

Cho x là một phần tử trong iđêan tham số $\mathfrak{q}$ của M. Gọi x^* là ảnh của x trong $G_{\mathfrak{q}}(R)$. Kết quả sau đây so sánh chỉ số chính quy của các vành phân bậc liên kết $G_{\mathfrak{q}}(M)$, $G_{\mathfrak{q}}(M/xM)$ và $G_{\mathfrak{q}}(M)/x^*G_{\mathfrak{q}}(M)$ khi x^* là một phần tử $G_{\mathfrak{q}}(M)$-lọc chính quy.

Bổ đề 1.3.7. *Cho $\mathfrak{q}$ là iđêan tham số của M và $x \in \mathfrak{q} \setminus \mathfrak{q}^2$ có ảnh x^* là phần tử $G_{\mathfrak{q}}(M)$-lọc chính quy. Khi đó,*
(i) $\text{g-reg}(G_{\mathfrak{q}}(M)/x^*G_{\mathfrak{q}}(M)) = \text{g-reg}(G_{\mathfrak{q}}(M/xM))$.
(ii) $\operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M/xM)) \le \operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M))$.

Chứng minh. (i) Xem [29, Lemm 2.2].
(ii) Xem [34, Lemma 2.3]. □

1.4 Hệ số Hilbert

Cho I là một iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ của R. Hàm số $H_I(n) = \sum_{i=0}^{n} h_{G_I(M)}(i) = \ell(M/I^nM)$ được gọi là *hàm Hilbert-Samuel* của M đối với iđêan I. P. Samuel đã chỉ ra rằng tồn tại một đa thức $P_I(n)$ bậc $d = \dim M$ với hệ số hữu tỉ, được gọi là *đa thức Hilbert-Samuel* sao cho $\ell(M/I^{n+1}M) = P_I(n)$ với n đủ lớn. Khi đó tồn tại những số nguyên $e_i(I; M)$ sao cho

$$P_I(n) = \sum_{i=0}^{d} (-1)^i e_i(I; M)\binom{n+d-i}{d-i}.$$

Những số nguyên $e_i(I; M)$ được gọi là *hệ số Hilbert* của M đối với iđêan I. Số nguyên dương nhỏ nhất n_0 là để hàm Hilbert-Samuel $H_I(n)$ và đa thức Hilbert-Samuel $P_I(n)$ trùng nhau được gọi là *chỉ số Hilbert* (postulation number) của M ứng với iđêan I và được ký hiệu là $\rho_I(M)$.

Bổ đề 1.4.1. $\rho_I(M) \le \operatorname{reg}(G_I(M))$.

Chứng minh. Xem [2, Bổ đề 1.3.2]. □

Kết quả sau đưa ra liên hệ giữa hệ số Hilbert của môđun M và một môđun con của nó.

Bổ đề 1.4.2. *Cho N là một môđun con của M với* $\dim N = s < d$ *và I là một iđêan* $\mathfrak{m}$*-nguyên sơ của R. Khi đó*

$$e_j(I; M) = \begin{cases} e_j(I; M/N), \ \text{nếu } 0 \leq j \leq d - s - 1, \\ e_{d-s}(I; M/N) + (-1)^{d-s} e_0(I, N) \ \text{if } j = d - s. \end{cases}$$

Chứng minh. Xem [9, Lemma 3.3] □

Định nghĩa 1.4.3. Cho I là iđêan của $\mathfrak{m}$-nguyên sơ của R. Một phần tử $x \in I \setminus I^2$ được gọi là *phần tử bề mặt (superficial)* của M đối với iđêan I nếu tồn tại hằng số không âm c sao cho $(I^{n+1}M : x) \cap I^c M = I^n M$ với mọi $n \geq c$.

Chú ý 1.4.4. (i) Lưu ý rằng, phần tử bề mặt ở Định nghĩa 1.4.3 không phải luôn tồn tại. Tuy nhiên, nếu R có trường thặng dư vô hạn thì nó luôn tồn tại (xem [42, p. 288, Remarks about lemma 5(2)]). Để vượt qua hạn chế này, khi cần thiết, ta dùng mở rộng phẳng trung thành $R[X]_{\mathfrak{m}R[X]}$ ($R[X]$ là vành đa thức). Do đó, ta luôn có thể giả sử R có trường thặng dư vô hạn và khi đó phần tử bề mặt luôn tồn tại.
(ii) Cho I là iđêan của R và $x \in I \setminus I^2$, gọi x^* là ảnh của x trong $G_I(R)$. Khi đó, x là phần tử bề mặt của M đối với iđêan I khi và chỉ khi x^* là phần tử $G_I(M)$-lọc chính quy (xem [36, Lemma 6.2]).
(iii) Nếu x là một phần tử bề mặt của M đối với iđêan I thì x là phần tử lọc chính quy của M.

Kết quả sau đây, được đưa ra bởi M. Nagata [28, 22.6].

Bổ đề 1.4.5. *Giả sử $d \geq 2$. Cho x là phần tử bề mặt của M đối với iđêan tham số $\mathfrak{q}$. Khi đó*

$$e_i(\mathfrak{q}; M) = e_i(\mathfrak{q}; M/xM)$$

với mọi $i = 0, ..., d-2$ và $(-1)^{d-1} e_{d-1}(\mathfrak{q}; M) = (-1)^{d-1} e_{d-1}(\mathfrak{q}; M/xM) - \ell(0 :_M x)$.

Chương 2

Chặn đều chỉ số chính quy cho môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy

Chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford là bất biến quan trọng trong đại số giao hoán và hình học đại số. Nó cung cấp nhiều thông tin về các cấu trúc phân bậc phức tạp, đơn cử như bậc cao nhất không triệt tiêu của một đối đồng điều địa phương của môđun phân bậc.... Ngoài ra, việc đưa ra chặn trên chỉ số chính quy cho chúng ta chặn trên của kiểu quan hệ (relation type), chỉ số Hilbert. Mục tiêu của chương này là mở rộng kết quả của C. H. Linh-N. V. Trung [25] về chặn đều chỉ số chính quy cho môđun Cohen-Macaulay suy rộng. Cụ thể, [25, Theorem 2.3] đã chỉ ra nếu M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng thì luôn tồn tại một hằng số C sao cho $\operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M)) \leq C$ với mọi iđêan tham số $\mathfrak{q}$ của M. Một câu hỏi tự nhiên là: kết quả trên còn đúng khi M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy? Trong [3, Example 2.1], I. M. Aberbach-L.Ghezzi-H. H. Tai đã xây dựng một vành R đầy đủ, đẳng chiều, Noether chiều 3, Cohen-Macaulay suy rộng dãy (xem Chú ý 2.2.10) mà kiểu quan hệ không bị chặn đều. Dẫn đến, không tồn tại chặn đều cho chỉ số chính quy cho mọi iđêan tham số. Do đó, một câu hỏi khác yếu hơn: Cho M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy. Có tồn tại một hằng số C sao cho $\operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M)) \leq C$ với mọi iđêan tham số tách biệt $\mathfrak{q}$ của M?

Câu trả lời đầy đủ cho câu hỏi này sẽ được trình bày ở tiết 2. Lưu ý, khái niệm môđun Cohen-Macaulay suy rộng do N. T. Cường-P. Schenzel-N. V. Trung [43] đưa ra, khái niệm môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy do N. T. Cường-L. T. Nhàn [12] đưa ra. Chương 2 được viết dựa trên bài báo [10].

2.1 Môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy

Với iđêan tham số $\mathfrak{q}$ của M đặt $I(\mathfrak{q}; M) = \ell(M/\mathfrak{q}M) - e(\mathfrak{q}; M)$. Khi đó, M là *Cohen-Macaulay suy rộng*$\Leftrightarrow$ $I(M) = \sup\{I(\mathfrak{q}; M) | \mathfrak{q}$ là iđêan tham số của $M\} < \infty \Leftrightarrow$ Các môđun đối đồng điều địa phương $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ hữu hạn sinh với mọi $i < d$. Hằng số $I(M)$ được gọi là *hằng số Buchsbaum* của M và $I(M) = \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d-1}{i} \ell(H^i_{\mathfrak{m}}(M))$. Hơn nữa, $I(M) = 0$ khi và chỉ khi M là môđun Cohen-Macaulay.

Định nghĩa 2.1.1. ([12]) Một lọc $\mathcal{F} : M = M_0 \supset M_1 \supset ... \supset M_s$ môđun con của M được gọi là *lọc Cohen-Macaulay suy rộng* nếu $\ell(M_s) < \infty$ và M_i/M_{i+1} môđun Cohen-Macaulay suy rộng với mọi $i = 0, .., s-1$. Môđun M được gọi là *Cohen-Macaulay suy rộng dãy* nếu M có lọc Cohen-Macaulay suy rộng.

Chú ý 2.1.2. Cho M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy và $\mathcal{D} : M = D_0 \supset D_1 \supset ... \supset D_t = H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ là lọc chiều của M. Khi đó, $\mathcal{F} : M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_s$ là một lọc Cohen-Macaulay suy rộng khi và chỉ khi $s = t$ và $\ell(D_i/M_i) < \infty$ với mọi $i = 0, ..., t$ (xem [7, Lemma 3.3]).

Rõ ràng, môđun Cohen-Macaulay, Cohen-Macaulay suy rộng, Cohen-Macaulay dãy đều là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy. Ví dụ sau chỉ rõ ngược lại là không đúng.

Ví dụ 2.1.3. Cho $R = k[[X, Y, Z, W]]$ vành các chuỗi lũy thừa hình thức trên trường k. Đặt $I = (X, Y) \cap (W, Z)$ và $J = (X, Y, Z)$ với $n \geq 2$. Xét R-môđun $M = R/I \cap J$. Khi đó, M là môđun chiều 2, có lọc chiều là $M = D_0 \supset D_1 \supset D_2 = 0$ với $D_1 = I/I \cap J$. Dễ thấy, D_1 là môđun Cohen-Macaulay chiều 1 và $M/D_1 \cong R/I$ là môđun Cohen-Macaulay suy rộng (không là Cohen-Macaulay). Do đó, môđun M là Cohen-Macaulay suy rộng dãy nhưng không là Cohen-Macaulay dãy, hơn nữa cũng không là Cohen-Macaulay suy rộng.

Như chúng ta đã biết, địa phương hóa một môđun Cohen-Macaulay suy rộng là một môđun Cohen-Macaulay. N. T. Cường-Đ. T. Cường [7, Proposition 3.7] chỉ ra điều tương tự cho môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy và môđun Cohen-Macaulay dãy.

Bổ đề 2.1.4. *Nếu M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy thì $M_{\mathfrak{p}}$ là môđun Cohen-Macaulay dãy với mọi $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M) \setminus \{\mathfrak{m}\}$. Điều ngược lại cũng đúng khi R là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay địa phương.*

Bổ đề 2.1.5. *Cho M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy với lọc Cohen-Macaulay suy rộng $\mathcal{F} : M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_t$ và J là iđêan của R sinh bởi một phần của một hệ tham số tách biệt của M đối với lọc $\mathcal{F}$. Khi đó*

$$(J^n M)_{\mathfrak{p}} \cap (M_i)_{\mathfrak{p}} = (J^n M_i)_{\mathfrak{p}}$$

với mọi $i = 1, ..., t$ và mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M) \setminus \{\mathfrak{m}\}$.

Chứng minh. Theo Bổ đề 2.1.4 ta có $M_{\mathfrak{p}}$ là môđun Cohen-Macaulay dãy. Hơn nữa, $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}} : M_{\mathfrak{p}} \supset (M_{i_1})_{\mathfrak{p}} \supset \ldots \supset (M_{i_s})_{\mathfrak{p}}$ là lọc Cohen-Macaulay của $M_{\mathfrak{p}}$. Do đó, $JR\mathfrak{p}$ chính là iđêan sinh bởi một phần hệ tham số tách biệt. Bổ đề được suy ra từ Bổ đề 1.2.6. □

Kết quả sau là hệ quả trực tiếp của Bổ đề 2.1.5.

Hệ quả 2.1.6. *Với M, J và lọc $\mathcal{F}$ như Bổ đề 2.1.5, ta có $\ell(J^n M \cap M_i / J^n M) < \infty$ với mọi $i = 1, ..., t$.*

Kết quả sau được chứng minh bởi C. H. Linh - N. V. Trung [25, Themrem 1.2] cho vành Cohen-Macaulay suy rộng. Tuy nhiên dễ dàng mở rộng cho môđun Cohen-Macaulay suy rộng.

Bổ đề 2.1.7. *Cho M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng và $x_1, ..., x_i$ là một phần hệ tham số của M với $0 < i < d$. Đặt $J = (x_1, ..., x_i)$ là iđêan của R. Khi đó $M/J^n M$ cũng là môđun Cohen-Macaulay suy rộng. Hơn nữa*

$$I(M/J^{n+1}M) \leq I(M)\binom{n+i-1}{i-1}.$$

Cho $\underline{i} = (i_1, ..., i_k)$ là một bộ k số nguyên dương thỏa mãn $1 \leq i_1 < ... < i_k \leq d$. Đặt

$$j(\underline{i}) = \sharp\{i_l \mid i_l \leq d_j, l = 1, ..., k\}$$

với mọi $j = 0, ..., t$.

Bổ đề 2.1.8. *Giả sử M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy. Cho $\mathcal{F} : M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_t$ là một lọc Cohen-Macaulay suy rộng của M và $\underline{x} = x_1, ..., x_d$ là một hệ tham số tách biệt của M đối với lọc $\mathcal{F}$. Đặt $J = (x_{i_1}, ..., x_{i_k})$ là một iđêan* *của R với $1 \leq i_1 < .... < i_k \leq d$. Khi đó $M_j/(J^{n+1}M \cap M_j + M_{j+1})$ là môđun Cohen-Macaulay suy rộng với mọi số nguyên dương n và $j = 0, ..., t-1$. Hơn thế, nếu $d_j > j(\underline{i})$ thì*

$$I(M_j/(J^{n+1}M \cap M_j + M_{j+1})) \leq \binom{n + j(\underline{i}) - 1}{j(\underline{i}) - 1} I(M_j/M_{j+1}),$$

với quy ước $\binom{n}{-1} = 1$.

Chứng minh. Trước hết, ta xét các dãy khớp ngắn sau

$$0 \to \frac{J^{n+1}M \cap M_j + M_{j+1}}{J^{n+1}M_j + M_{j+1}} \to \frac{M_j}{J^{n+1}M_j + M_{j+1}} \to \frac{M_j}{J^{n+1}M \cap M_j + M_{j+1}} \to 0,$$

với mọi $j = 0, \ldots, t-1$. Khi đó,

$$A = \frac{J^{n+1}M \cap M_j + M_{j+1}}{J^{n+1}M_j + M_{j+1}} \cong \frac{J^{n+1}M \cap M_j}{J^{n+1}M \cap M_{j+1} + J^{n+1}M_j}.$$

Theo Bổ đề 2.1.5 với mọi $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M) \setminus \{\mathfrak{m}\}$, ta có

$$(J^nM)_{\mathfrak{p}} \cap (M_j)_{\mathfrak{p}} = (J^nM_j)_{\mathfrak{p}}.$$

Lưu ý rằng $\mathrm{Supp}(A) \setminus \{\mathfrak{m}\} \subseteq \mathrm{Supp}(M) \setminus \{\mathfrak{m}\}$. Suy ra $A_{\mathfrak{p}} = 0$ hay $\ell(A) < \infty$. Theo Bổ đề 2.1.7, ta có $M_j/(J^{n+1}M_j + M_{j+1})$ là môđun Cohen-Macaulay suy rộng. Do đó, từ dãy khớp trên ta có $M_j/(J^{n+1}M \cap M_j + M_{j+1})$ cũng là môđun Cohen-Macaulay suy rộng. Mặt khác, do $\underline{x}$ là hệ tham số tách biệt của M đối với lọc $\mathcal{F}$ nên $J^{n+1}M_j = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_{j(\underline{i})}})^{n+1}M_j$. Vì vậy với $d_j > j(\underline{i})$ ta có

$$\begin{aligned}
I(\frac{M_j}{J^{n+1}M \cap M_j + M_{j+1}}) &= I(\frac{M_j}{J^{n+1}M_j + M_{j+1}}) - \ell(A) \\
&\leq I(\frac{M_j}{(J^{n+1}M_j + M_{j+1}}) = I(\frac{M_j}{(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{j(\underline{i})}})^{n+1}M_j + M_{j+1}}) \\
&\leq \binom{n + j(\underline{i}) - 1}{j(\underline{i}) - 1} I(M_j/M_{j+1}).
\end{aligned}$$

Bổ đề được chứng minh. □

Bổ đề 2.1.9. *Cho N là một môđun con của M. Nếu M/N và N đều là các môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy thì M cũng là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy.*

Chứng minh. Trước hết, nếu $\dim N = 0$ thì hiên nhiên ta có điều cần chứng minh. Xét trường hợp $\dim N > 0$. Gọi $\mathcal{F}/N : M/N = M_0/N \supset M_1/N \supset \ldots \supset M_s/N$ và $\mathcal{N} : N = N_0 \supset N_1 \supset ... \supset N_k$ lần lượt là các lọc Cohen-Macaulay suy rộng của M/N và N. Xét lọc

$$\mathcal{F} : M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_s \supset N_1 \supset ... \supset N_k.$$

Do $\mathcal{F}/N$ và $\mathcal{N}$ lần lượt là các lọc Cohen-Macaulay suy rộng của M/N và N, ta có M_i/M_{i+1} và N_j/N_{j+1} với mọi $i = 0, ..., s-1$ và mọi $j = 1, ..., k-1$ là các môđun Cohen-Macaulay suy rộng. Hơn nữa, do $\mathcal{F}/N$ là lọc Cohen-Macaulay suy rộng của M/N nên M_s/N là môđun có độ dài hữu hạn. Do đó $\dim N/N_1 = \dim M_s/N_1$. Mặt khác, từ dãy khớp ngắn

$$0 \longrightarrow N/N_1 \longrightarrow M_s/N_1 \longrightarrow M_s/N \longrightarrow 0,$$

ta có dãy khớp $H^i_{\mathfrak{m}}(N/N_1) \longrightarrow H^i_{\mathfrak{m}}(M_s/N_1) \longrightarrow 0$ với mọi $i > 0$. Vì N/N_1 là môđun Cohen-Macaulay suy rộng, suy ra M_s/N_1 cũng là môđun Cohen-Macaulay suy rộng. Điều đó chứng tỏ rằng $\mathcal{F}$ là một lọc Cohen-Macaulay suy rộng hay M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy. $\square$

Định lý 2.1.10. *Cho M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy với lọc Cohen-Macaulay suy rộng $\mathcal{F}$ và J là iđêan của R sinh bởi một phần hệ tham số tách biệt của M đối với lọc $\mathcal{F}$. Khi đó, M/J^nM là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy với mọi số nguyên dương n.*

Chứng minh. Giả sử $\mathcal{F} : M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_t$. Chúng ta chứng minh quy nạp theo độ dài t của lọc $\mathcal{F}$. Nếu $t = 1$ thì M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng. Nên M/J^nM cũng là môđun Cohen-Macaulay suy rộng theo Bổ đề 2.1.7. Giả sử $t > 1$. Dễ thấy, M/M_{t-1} là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy và có lọc Cohen-Macaulay suy rộng với độ dài bằng $t-1$. Theo quy nạp $M/J^nM + M_{t-1}$ là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy. Mặt khác, do M_{t-1} là môđun Cohen-Macaulay suy rộng nên M_{t-1}/J^nM_{t-1} cũng là môđun Cohen-Macaulay suy rộng. Xét dãy khớp ngắn sau

$$0 \longrightarrow \frac{J^nM \cap M_{t-1}}{J^nM_{t-1}} \longrightarrow \frac{M_{t-1}}{J^nM_{t-1}} \longrightarrow \frac{J^nM + M_{t-1}}{J^nM} \longrightarrow 0$$

và đặt $B = (J^nM \cap M_{t-1})/J^nM_{t-1}$. Theo Hệ quả 2.1.6, ta có $\ell(B) < \infty$. Kéo theo $(J^nM + M_{t-1})/J^nM$ là môđun Cohen-Macaulay suy rộng. Do đó M/J^nM là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy theo Bổ đề 2.1.9. $\square$

Cho M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy với lọc Cohen-Macaulay suy rộng $\mathcal{F} : M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_t$. Khi đó, bất biến $I(\mathcal{F}, M)$ được định nghĩa bởi

$$I(\mathcal{F}, M) = \sum_{i=0}^{t-1} I(M_i/M_{i+1}) + \ell(M_t).$$

Hệ quả 2.1.11. *Cho M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy với lọc Cohen-Macaulay suy rộng $\mathcal{F} : M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_t$ và $x_1, ..., x_d$ là hệ tham số tách biệt của M đối với lọc $\mathcal{F}$. Đặt $x = x_1$. Khi đó, M/xM là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy với lọc Cohen-Macaulay suy rộng*

$$\mathcal{F}/xM : M/xM \supset (xM + M_1)/xM \supset \ldots \supset (xM + M_{s-1})/xM \supset 0,$$

trong đó $s = t - 1$ nếu $d_{t-1} = 1$ và $s = t$ trong các trường hợp còn lại. Hơn nữa, $I(\mathcal{F}/xM, M/xM) \leq I(\mathcal{F}, M)$.

Chứng minh. Theo Định lý 2.1.10 và Bổ đề 2.1.8, môđun M/xM là Cohen-Macaulay suy rộng dãy và $\mathcal{F}/xM$ là lọc Cohen-Macaulay suy rộng của M/xM. Hơn nữa, tiếp tục sử dụng Bổ đề 2.1.8 ta có

$$\begin{aligned} I(\mathcal{F}/xM, M/xM) &= \sum_{i=0}^{s-1} I(M_i/M_{i+1} + xM \cap M_i) \\ &\leq \sum_{i=0}^{s-1} I(M_i/M_{i+1}) \leq I(\mathcal{F}, M). \end{aligned}$$

Hệ quả được chứng minh. □

Bổ đề 2.1.12. *Cho M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy với lọc Cohen-Macaulay suy rộng $\mathcal{F} : M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_t$. Khi đó,*

$$\mathcal{F}/H^0_{\mathfrak{m}}(M) : M/H^0_{\mathfrak{m}}(M) \supset (H^0_{\mathfrak{m}}(M)+M_1)/H^0_{\mathfrak{m}}(M) \supset \ldots \supset (H^0_{\mathfrak{m}}(M)+M_{t-1})/H^0_{\mathfrak{m}}(M) \supset 0$$

là một lọc Cohen-Macaulay suy rộng của $M/H^0_{\mathfrak{m}}(M)$. Hơn nữa,

$$I(\mathcal{F}, M) = I(\mathcal{F}/H^0_{\mathfrak{m}}(M), M/H^0_{\mathfrak{m}}(M)) + \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(M)).$$

Chứng minh. Dễ thấy, $\mathcal{F}/H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ là lọc Cohen-Macaulay suy rộng của $M/H^0_{\mathfrak{m}}(M)$. Do $\ell(\dfrac{H^0_{\mathfrak{m}}(M) \cap M_i}{H^0_{\mathfrak{m}}(M) \cap M_{i+1}}) < \infty$ và các dãy khớp ngắn

$$0 \to \frac{H^0_{\mathfrak{m}}(M) \cap M_i}{H^0_{\mathfrak{m}}(M) \cap M_{i+1}} \to M_i/M_{i+1} \to \frac{M_i}{H^0_{\mathfrak{m}}(M) \cap M_i + M_{i+1}} \to 0$$

với $i = 0, ..., t-1$, ta có

$$\begin{aligned}
I(\mathcal{F}/H^0_{\mathfrak{m}}(M), M/H^0_{\mathfrak{m}}(M)) &= \sum_{i=0}^{t-1} (I(\frac{M_i}{M_{i+1}}) - \ell(\frac{H^0_{\mathfrak{m}}(M) \cap M_i}{H^0_{\mathfrak{m}}(M) \cap M_{i+1}})) \\
&= \sum_{i=0}^{t-1} I(\frac{M_i}{M_{i+1}}) - \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(M)/M_t) \\
&= I(\mathcal{F}, M) - \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(M)).
\end{aligned}$$

Vậy, $I(\mathcal{F}, M) = I(\mathcal{F}/H^0_{\mathfrak{m}}(M), M/H^0_{\mathfrak{m}}(M)) + \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(M))$. □

Bổ đề 2.1.13. *Cho $x_1, ..., x_d$ là một hệ tham số của M. Gọi $\mathfrak{q} = (x_1, ..., x_d)$ và $J = (x_2, ..., x_d)$. Khi đó,*

$$\ell\left(\frac{\mathfrak{q}^{n+m}M : x_1^m}{\mathfrak{q}^n M}\right) \leq \ell\left(\frac{J^{n+1}M : x_1^m}{J^{n+1}M}\right)$$

với mọi số nguyên dương m, n.

Chứng minh. Trước hết, ta có

$$\mathfrak{q}^{n+m}M : x_1^m \subseteq (J^{n+1}M + x_1^m \mathfrak{q}^n M) : x_1^m \subseteq (J^{n+1}M : x_1^m) + \mathfrak{q}^n M$$

với mọi số nguyên dương m, n. Do đó,

$$\begin{aligned}
\ell\left(\frac{\mathfrak{q}^{n+m}M : x_1^m}{\mathfrak{q}^n M}\right) &\leq \ell\left(\frac{(J^{n+1}M : x_1^m) + \mathfrak{q}^n M}{\mathfrak{q}^n M}\right) \\
&\leq \ell\left(\frac{J^{n+1}M : x_1^m}{(J^{n+1}M : x_1^m) \cap \mathfrak{q}^n M}\right) \\
&\leq \ell\left(\frac{J^{n+1}M : x_1^m}{J^{n+1}M}\right).
\end{aligned}$$

Bổ đề được chứng minh. □

Bổ đề 2.1.14. *Cho M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy với lọc Cohen-Macaulay suy rộng $\mathcal{F} : M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_t$ và $\mathfrak{q} = (x_1, \ldots, x_d)$ là iđêan tham số tách biệt của M đối với $\mathcal{F}$. Đặt $x = x_1$. Khi đó, với mọi số nguyên dương m, n, thì*

$$\ell\left(\frac{\mathfrak{q}^{n+m}M : x^m}{\mathfrak{q}^n M}\right) \leq \binom{n+d-2}{d-2} I(\mathcal{F}, M).$$

Chứng minh. Cho n là một số nguyên dương tùy ý. Đặt $J = (x_2, ..., x_d)$. Dễ thấy, $\dim(M/J^{n+1}M) = 1$ nên $M/J^{n+1}M$ là môđun Cohen-Macaulay suy rộng. Mặt khác

$(J^{n+1}M : x^m)/J^{n+1}M \subseteq H^0_{\mathfrak{m}}(M/J^{n+1}M)$ nên

$$\ell((J^{n+1}M : x^m)/J^{n+1}M) \leq \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(M/J^{n+1}M)) = I(M/J^{n+1}M)$$

với mọi số nguyên dương m. Theo Bổ đề 2.1.13,

$$\ell\left(\frac{\mathfrak{q}^{n+m}M : x^m}{\mathfrak{q}^n M}\right) \leq \ell\left(\frac{J^{n+1}M : x^m}{J^{n+1}M}\right) \leq I(M/J^{n+1}M).$$

Do đó, bổ đề được chứng minh nếu

$$I(M/J^{n+1}M) \leq \binom{n+d-2}{d-2} I(\mathcal{F}, M).$$

Thật vậy, trước hết chúng ta chỉ ra $I(M/J^{n+1}M) \leq \sum_{i=0}^{t-1} I(M_i/J^{n+1}M_i + M_{i+1}) + \ell(M_t)$ bằng quy nạp theo độ dài t của lọc $\mathcal{F}$. Nếu $t = 1$ thì M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng và $\ell(M_1) < \infty$. Từ dãy khớp ngắn

$$0 \to \frac{M_1}{J^{n+1}M \cap M_1} \cong \frac{J^{n+1}M + M_1}{J^{n+1}M} \to \frac{M}{J^{n+1}M} \to \frac{M}{J^{n+1}M + M_1} \to 0,$$

ta có

$$I(M/J^nM) = I(M/J^nM + M_1) + \ell(M_1/J^nM \cap M_1) \leq I(M/J^nM + M_1) + \ell(M_1).$$

Giả sử $t > 1$. Xét dãy khớp ngắn

$$0 \to \frac{J^{n+1}M \cap M_1}{J^{n+1}M_1} \to \frac{M_1}{J^{n+1}M_1} \to \frac{M_1}{J^{n+1}M \cap M_1} \to 0$$

và đặt $C = J^{n+1}M \cap M_1/J^{n+1}M_1$. Theo Hệ quả 2.1.6 ta có $\ell(C) < \infty$, kéo theo $M_1/(J^{n+1}M \cap M_1)$, $M_1/J^{n+1}M_1$, $M/(J^{n+1}M + M_1)$, $M_1/(J^{n+1}M \cap M_1)$ là các môđun Cohen-Macaulay suy rộng chiều 1. Do đó, từ hai dãy khớp trên ta có

$$\begin{aligned} I(M/J^{n+1}M) &\leq I(M/J^{n+1}M + M_1) + I(M_1/J^{n+1}M \cap M_1) \\ &= I(M/J^{n+1}M + M_1) + I(M_1/J^{n+1}M_1) - \ell(C). \end{aligned}$$

Theo giả thiết quy nạp

$$I(M/J^{n+1}M) \leq \sum_{i=0}^{t-1} I(M_i/J^{n+1}M_i + M_{i+1}) + \ell(M_t).$$

Chú ý rằng với $\underline{i} = (2, \ldots d)$ thì $j(\underline{i}) = d_j - 1$ với mọi $j = 0, ..., t-1$. Do đó,

$$I(M/J^{n+1}M) \leq \sum_{i=0}^{t} \binom{n+d_i-2}{d_i-2} I(M_i/M_{i+1}) \leq \binom{n+d-2}{d-2} I(\mathcal{F}, M)$$

theo Bổ đề 2.1.8. □

2.2 Chặn đều chỉ số chính quy cho môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy

Theo D. Mumford [22, p. 101, Theorem], chỉ số chính quy hình học của một đại số phân bậc chuẩn có thể ước lượng thông qua hàm Hilbert của nó. Kết quả này có thể mở rộng cho trường hợp môđun phân bậc hữu hạn sinh. Tuy nhiên ở đây, chúng tôi chỉ phát biểu cho trường hợp môđun phân bậc liên kết như sau.

Bổ đề 2.2.1. *Cho I là một iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ của R. Lấy $x \in I \setminus I^2$ sao cho phần tử khởi đầu x^* là phần tử lọc chính quy của $G_I(M)$ và n là số nguyên thỏa mãn* $\text{g-reg}(G_I(M)/x^*G_I(M)) \leq n$. *Khi đó*

$$\text{g-reg}(G_I(M)) \leq n + p_{G_I(M)}(n) - h_{G_I(M)/L}(n),$$

trong đó $p_{G_I(M)}(n)$ là đa thức Hilbert của $G_I(M)$, L là môđun con có độ dài hữu hạn lớn nhất của $G_I(M)$ và $h_{G_I(M)/L}(n)$ là hàm Hilbert của $G_I(M)/L$.

Chứng minh. Xem [2, Định lý 1.2.7]. □

Cho $\mathfrak{q}$ là iđêan tham số của M. Theo Bổ đề 1.3.6(ii), ta có

$$\operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M)) \leq \operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M/H^0_{\mathfrak{m}}(M))) + \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(M)).$$

Để chặn trên cho $\operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M))$ ta cần chặn trên cho $\operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M/H^0_{\mathfrak{m}}(M)))$. Do đó, có thể giả thiết rằng $H^0_{\mathfrak{m}}(M) = 0$. Khi đó,

$$\operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M)) = \text{g-reg}(G_{\mathfrak{q}}(M))$$

theo Bổ đề 1.3.6(i). Chọn $x \in \mathfrak{q} \setminus \mathfrak{q}^2$ sao cho phần tử khởi đầu x^* là phần tử $G_{\mathfrak{q}}(M)$-lọc chính quy. Theo Bổ đề 1.3.7(i), ta có

$$\text{g-reg}(G_{\mathfrak{q}}(M)/x^*G_{\mathfrak{q}}(M)) = \text{g-reg}(G_{\mathfrak{q}}(M/xM)).$$

Theo Bổ đề 2.2.1, với mọi $n \geq \text{g-reg}(G_{\mathfrak{q}}(M/xM)$, ta có

$$\text{g-reg}(G_{\mathfrak{q}}(M)) \leq n + p_{G_{\mathfrak{q}}(M)}(n) - h_{G_{\mathfrak{q}}(M)/L},$$

trong đó L là môđun con có độ dài hữu hạn lớn nhất của $G_{\mathfrak{q}}(M)$. Vậy, trước hết cần ước lượng $p_{G_{\mathfrak{q}}(M)}(n) - h_{G_{\mathfrak{q}}(M)/L}(n)$.

Bổ đề 2.2.2. *Cho $\mathfrak{q}$ là iđêan tham số của M và $x \in \mathfrak{q} \setminus \mathfrak{q}^2$ sao cho phần tử khởi đầu x^* là phần tử lọc chính quy của $G_\mathfrak{q}(M)$. Khi đó, với mọi $n \geq \operatorname{reg}(G_\mathfrak{q}(M/xM))$, tồn tại số nguyên dương m sao cho*

$$p_{G_\mathfrak{q}(M)}(n) - h_{G_\mathfrak{q}(M)/L}(n) \leq \ell(\frac{\mathfrak{q}^{n+1}M : x}{\mathfrak{q}^n M}) + \ell(\frac{\mathfrak{q}^{n+m+1}M : x^m}{\mathfrak{q}^{n+1}M}),$$

với L là môđun con lớn nhất có độ dài hữu hạn của $G_\mathfrak{q}(M)$.

Chứng minh. Xem [2, Bổ đề 1.4.8]. □

Bổ đề 2.2.3. *Cho $\mathfrak{q}$ là iđêan tham số tách biệt của M đối với lọc $\mathcal{F} : M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_s$. Khi đó, luôn tồn tại một hệ tham số tách biệt $x_1, ..., x_d$ của M đối với lọc $\mathcal{F}$ sao cho phần tử khởi đầu x_1^* là phần tử $G_\mathfrak{q}(M)$-lọc chính quy và $\mathfrak{q} = (x_1, ..., x_d)$.*

Chứng minh. Giả sử $y_1, ..., y_d$ là một hệ tham số tách biệt của M đối với lọc $\mathcal{F}$ sao cho $\mathfrak{q} = (y_1, ..., y_d)$. Đặt $k_i = \dim M_i$ với mọi $i = 0, ..., s$. Ta xét hai trường hợp sau.
Trường hợp 1: $k_s \leq 0$ thì $\mathfrak{q}M_s = 0$. Khi đó, theo Định lý tránh nguyên tố, luôn chọn được $x_1 \in \mathfrak{q} \setminus \mathfrak{m}\mathfrak{q}$ và $x_1 \notin \mathfrak{p}$ với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M_{s-1}) \setminus \{\mathfrak{m}\}$ sao cho phần tử khởi đầu x_1^* là $G_\mathfrak{q}(M)$-lọc chính quy. Chú ý rằng,

$$(y_{k_{s-1}+1}, ..., y_d) \subseteq \operatorname{Ann}(M_{s-1}) \subseteq \bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M_{s-1}) \setminus \{\mathfrak{m}\}} \mathfrak{p}.$$

Khi đó, luôn chọn được các phần tử $x_1, ..., x_{k_{s-1}} \in \mathfrak{q} \setminus \mathfrak{m}\mathfrak{q}$ là một phần hệ tham số của M sao cho $x_i \notin \mathfrak{p}$ với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M_{s-1}) \setminus \{\mathfrak{m}\}$ và mọi $i = 1, ..., d_{s-1}$. Đặt $x_j = y_j$ với mọi $j = d_{s-1} + 1, ..., d$ ta có $x_1, ..., x_d$ là hệ tham số tách biệt của M và $\mathfrak{q} = (x_1, ..., x_d)$.
Trường hợp 2: $k_s > 0$, ta xét lọc $\mathcal{F}' : M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_s \supset 0$. Trở lại trường hợp 1, ta luôn chọn được hệ tham số tách biệt $x_1, ..., x_d$ của M đối với lọc $\mathcal{F}'$ sao cho $\mathfrak{q} = (x_1, ..., x_d)$ và x_1^* là phần tử $G_\mathfrak{q}(M)$-lọc chính quy. Chú ý rằng mọi hệ tham số tách biệt của M đối với $\mathcal{F}'$ đều là hệ tham số tách biệt đối với $\mathcal{F}$. □

Do đó, nếu $\mathfrak{q} = (x_1, ..., x_d)$ là iđêan tham số tách biệt của M đối với lọc $\mathcal{F}$, ta luôn có thể giả sử x_1^* là phần tử lọc chính quy của $G_\mathfrak{q}(M)$.

Hệ quả 2.2.4. *Cho M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy, $\mathcal{F} : M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_t$ là lọc Cohen-Macaulay suy rộng của M và $\mathfrak{q} = (x_1, \ldots, x_d)$ là iđêan* *tham số tách biệt của M đối với $\mathcal{F}$. Lấy $x = x_1 \in \mathfrak{q} \setminus \mathfrak{q}^2$ sao cho phần tử khởi đầu x^* là phần tử lọc chính quy của $G_{\mathfrak{q}}(M)$. Khi đó*

$$\text{g-reg}(G_{\mathfrak{q}}(M)) \leq n + \binom{n+d-2}{d-2} I(\mathcal{F}, M) + \binom{n+d-1}{d-2} I(\mathcal{F}, M)$$

với mọi $n \geq \operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M/xM)) + 1$.

Chứng minh. Theo Bổ đề 2.2.1, với L là môđun con lớn nhất có độ dài hữu hạn của $G_{\mathfrak{q}}(M)$ ta có

$$\text{g-reg}(G_{\mathfrak{q}}(M)) \leq n + p_{G_{\mathfrak{q}}(M)}(n) - h_{G_{\mathfrak{q}}(M)/L}$$

với mọi $n \geq \operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M/xM)) + 1 > \text{g-reg}(G_{\mathfrak{q}}(M/xM))$. Theo Bổ đề 2.2.2 và Bổ đề 2.1.14, ta có điều phải chứng minh. □

Trước hết, ta xét chỉ số chính quy trong trường hợp M là môđun Cohen-Macaulay dãy.

Mệnh đề 2.2.5. *Cho M là một môđun Cohen-Macaulay dãy. Khi đó*

$$\operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M)) = 0$$

với mọi iđêan tham số tách biệt $\mathfrak{q}$ của M.

Chứng minh. Cho $\mathcal{D} : M = D_0 \supset D_1 \supset \ldots \supset D_t = H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ là lọc chiều của M. Ta chứng minh quy nạp theo t. Nếu $t = 1$, lọc chiều có dạng

$$\mathcal{D} : M = D_0 \supset D_1 = H^0_{\mathfrak{m}}(M).$$

Với mọi số nguyên $n \geq 0$, từ các dãy khớp ngắn

$$0 \to \frac{\mathfrak{q}^n M \cap H^0_{\mathfrak{m}}(M)}{\mathfrak{q}^{n+1} M \cap H^0_{\mathfrak{m}}(M)} \to \frac{\mathfrak{q}^n M}{\mathfrak{q}^{n+1} M} \to \frac{\mathfrak{q}^n M + H^0_{\mathfrak{m}}(M)}{\mathfrak{q}^{n+1} M + H^0_{\mathfrak{m}}(M)} \to 0,$$

ta có dãy khớp ngắn các môđun phân bậc

$$0 \to K \to G_{\mathfrak{q}}(M) \to G_{\mathfrak{q}}(M/H^0_{\mathfrak{m}}(M)) \to 0,$$

trong đó $K = \bigoplus_{n \geq 0} K_n$ với $K_n = \dfrac{\mathfrak{q}^n M \cap H^0_{\mathfrak{m}}(M)}{\mathfrak{q}^{n+1} M \cap H^0_{\mathfrak{m}}(M)}$. Khi đó, theo Bổ đề 1.2.6 ta có $K_0 = H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ và $K_n = 0$ với $n > 0$. Do đó $\operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M)) = 0$ vì $M/H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ là một môđun Cohen-Macaulay. Giả sử $t > 1$ và đặt $\mathfrak{a} = (x_i | 1 \leq i \leq d_1)$. Do M/D_1 là một môđun Cohen-Macaulay và tiếp tục sử dụng Bổ đề 1.2.6, ta có

$$\mathfrak{q}^n M \cap D_1 = \mathfrak{q}^n D_1 = \mathfrak{a}^n D_1$$

với mọi $n \geq 0$. Dẫn đến có dãy khớp ngắn

$$0 \to G_{\mathfrak{a}}(D_1) \to G_{\mathfrak{q}}(M) \to G_{\mathfrak{q}}(M/D_1) \to 0.$$

Khi đó theo quy nạp và dãy khớp trên ta có

$$\begin{aligned} \operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M)) &\leq \max\{\operatorname{reg}(G_{\mathfrak{a}}(D_1)), \operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M/D_1))\} \\ &= \max\{\operatorname{reg}(G_{\mathfrak{a}}(D_1)), 0\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Sau đây, chúng tôi đưa ra một chặn đều cho chỉ số chính quy của môđun phân bậc liên kết của môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy. Đây cũng là kết quả chính của chương này.

Định lý 2.2.6. *Cho M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy và $\mathcal{F}$ là lọc Cohen-Macaulay suy rộng của M. Khi đó, tồn tại hằng số $C_{\mathcal{F}}$ sao cho*

$$\operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M)) \leq C_{\mathcal{F}}$$

với mọi iđêan tham số tách biệt $\mathfrak{q}$ của M đối với $\mathcal{F}$.

Chứng minh. Giả sử lọc có dạng $\mathcal{F} : M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_t$. Ta chứng minh quy nạp theo $d = \dim M$ rằng hằng số $C_{\mathcal{F}}$ (chỉ phụ thuộc vào lọc $\mathcal{F}$) trong Định lý 2.2.6 có thể xác định bởi

$$C_{\mathcal{F}} = (3I(\mathcal{F}, M))^{d!} - 2I(\mathcal{F}, M).$$

Cho $d = 1$ và $\mathfrak{q} = (x)$ là iđêan tham số tách biệt của M. Đặt $L = H^0_{\mathfrak{m}}(M)$. Khi đó, ta có dãy khớp ngắn

$$0 \longrightarrow K = \bigoplus_{n\geq 0} K_n \longrightarrow G_{\mathfrak{q}}(M) \longrightarrow G_{\mathfrak{q}}(M/L) \longrightarrow 0,$$

trong đó $K_n = x^nM \cap L/x^{n+1}M \cap L \cong x^nL/x^{n+1}L$. Do M/L là môđun Cohen-Macaulay và $K_n = 0$ với mọi $n \geq \ell(L)$, ta có

$$\begin{aligned} \operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M) &\leq \operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M/L)) + \ell(L) = \ell(L) \\ &= I(\mathcal{F}, M) = C_{\mathcal{F}}. \end{aligned}$$

Cho $d \geq 2$. Nếu $I(\mathcal{F}, M) = 0$ thì M là một môđun Cohen-Macaulay dãy. Do đó, $\operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M)) = 0$ theo Mệnh đề 2.2.5. Vậy không mất tính tổng quát, ta giả sử rằng $I(\mathcal{F}, M) \geq 1$. Mặt khác,

$$\operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M)) \leq \operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M/L)) + \ell(L)$$

theo Bổ đề 1.3.6(*ii*). Thêm vào đó,

$$I(\mathcal{F}, M) = I(\mathcal{F}/L, M/L) + \ell(L)$$

theo Bổ đề 2.1.12. Vì vậy, có thể giả thiết thêm rằng $H^0_{\mathfrak{m}}(M) = 0$. Khi đó, ta chỉ cần chỉ ra

$$\text{g-reg}(G_{\mathfrak{q}}(M)) \leq C_{\mathcal{F}}$$

với mọi iđêan tham số tách biệt $\mathfrak{q}$ của M đối với lọc $\mathcal{F}$. Theo Bổ đề 2.2.3, luôn tồn tại hệ tham số tách biệt $x_1, ..., x_d$ của M đối với lọc $\mathcal{F}$ sao cho $\mathfrak{q} = (x_1, \ldots, x_d)$. Hơn nữa, $x = x_1$ có phần tử khởi đầu x^* là một phần tử lọc chính quy của $G_{\mathfrak{q}}(M)$. Theo Hệ quả 2.2.4, với mọi $n \geq \operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M/xM)) + 1$ ta có

$$\begin{aligned}\text{g-reg}(G_{\mathfrak{q}}(M)) &\leq n + \binom{n+d-2}{d-2} I(\mathcal{F}, M) + \binom{n+d-1}{d-2} I(\mathcal{F}, M)\\ &\leq n + (n+1)^{d-2} I(\mathcal{F}, M) + (n+2)^{d-2} I(\mathcal{F}, M),\end{aligned}$$

trong đó đẳng thức cuối có thể dễ dàng kiểm tra. Theo Hệ quả 2.1.11 ta có M/xM là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy với lọc Cohen-Macaulay suy rộng

$$\mathcal{F}/xM : M/xM \supset (xM + M_1)/xM \supset \ldots \supset (xM + M_{s-1})/xM \supset 0,$$

trong đó $s = t - 1$ nếu $d_{t-1} = 1$ và $s = t$ trong các trường hợp còn lại. Theo quy nạp và $I(\mathcal{F}/xM, M/xM)] \leq I(\mathcal{F}, M)$, ta có

$$\begin{aligned}\operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M/xM)) &\leq [(3I(\mathcal{F}/xM, M/xM)]^{(d-1)!} - 2I(\mathcal{F}/xM, M/xM)\\ &\leq [3I(\mathcal{F}, M)]^{(d-1)!} - 2I(\mathcal{F}, M).\end{aligned}$$

Kéo theo, chọn $n = (3I(\mathcal{F}, M))^{(d-1)!} - 2I(\mathcal{F}, M) + 1 \geq 2$ và chú ý rằng

$$n + (n+1)^{d-2} I(\mathcal{F}, M) + (n+2)^{d-2} I(\mathcal{F}, M) \leq (n + 2I(\mathcal{F}, M) - 1)^d - 2I(\mathcal{F}, M).$$

Khi đó,

$$\begin{aligned}\text{g-reg}(G_{\mathfrak{q}}(M)) &\leq (n + 2I(\mathcal{F}, M) - 1)^d - 2I(\mathcal{F}, M)\\ &\leq (3I(\mathcal{F}, M))^{d!} - 2I(\mathcal{F}, M).\end{aligned}$$

□

Cho M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng. Khi đó mọi hệ tham số của M đều là hệ tham số tách biệt đối với lọc Cohen-Macaulay suy rộng $\mathcal{F} : M \supset 0$. Do đó, kết quả chính trong [25] được xem như hệ quả trực tiếp của Định lý 2.2.6.

Hệ quả 2.2.7. *Cho M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng. Khi đó tồn tại hằng số C sao cho* $\operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M)) \le C$ *với mọi iđêan tham số* $\mathfrak{q}$ *của M.*

Tiếp theo, chúng tôi có kết quả về chặn đều cho chỉ số chính quy đối với một vài môđun con của $G_{\mathfrak{q}}(M)$ như sau.

Hệ quả 2.2.8. *Với M và $\mathcal{F}$ như trong Định lý 2.2.6. Đặt $G_i(\mathfrak{q}, M) = \bigoplus_{n\ge 0}(\mathfrak{q}^n M \cap M_i)/(\mathfrak{q}^{n+1}M \cap M_i)$. Khi đó*

$$\operatorname{reg}(G_i(\mathfrak{q}, M)) \le C_{\mathcal{F}} + 1$$

với mọi $i = 0, ..., t$, và mọi iđêan tham số tách biệt $\mathfrak{q}$ *của M đối với lọc $\mathcal{F}$.*

Chứng minh. Từ dãy khớp ngắn sau

$$0 \longrightarrow G_i(\mathfrak{q}, M) \longrightarrow G_{\mathfrak{q}}(M) \longrightarrow G_{\mathfrak{q}}(M/M_i) \longrightarrow 0$$

ta có

$$\operatorname{reg}(G_i(\mathfrak{q}, M)) \le \max\{\operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M)), \operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M/M_i)) + 1\} \le C_{\mathcal{F}} + 1.$$

□

Cho $I = (x_1, .., x_s)$ là một iđêan của R. Đại số Rees $R[It] = \bigoplus_{n\ge 0} I^n t^n$ của I là một vành thương của vành đa thức s biến trên R. Khi đó, tồn tại một toàn cấu $\phi : R[T_1, ..., T_s] \longrightarrow R[It]$ xác định bởi $T_i \mapsto x_i t$. Hạt nhân J của ϕ là một iđêan thuần nhất trong $R[T_1, ..., T_s]$, gọi $f_1, \dots, f_m$ là hệ sinh tối tiểu thuần nhất của J. Khi đó *kiểu quan hệ* của I được định nghĩa và ký hiệu như sau

$$\operatorname{reltype}(I) = \max\{\deg f_1, \dots, \deg f_m\}.$$

Theo N. V. Trung [34, Proposition 4.1] ta có

$$\operatorname{reltype}(I) \le \operatorname{reg}(R[It]) + 1.$$

Bên cạnh đó,

$$\operatorname{reg}(R[It]) = \operatorname{reg}(G_I(R))$$

theo A. Ooishi [27, Lemma 4.8]. Do đó, $\operatorname{reltype}(I) \le \operatorname{reg}(G_I(R)) + 1$. Khi đó kết quả sau được xem như hệ quả trực tiếp của Định lý 2.2.6.

Hệ quả 2.2.9. *Cho R là một vành Cohen-Macaulay suy rộng dãy chiều d và $\mathcal{F}$: $R = I_0 \supset I_1 \supset \ldots \supset I_t$ là một lọc suy rộng của R. Khi đó tồn tại hằng số C sao cho* $\operatorname{reltype}(x_1, ..., x_d) \leq C$ *với mọi hệ tham số tách biệt $x_1, ..., x_d$ của R đối với lọc $\mathcal{F}$.*

Lưu ý, kết quả chính của H. J. Wang trong [41] về chặn đều kiểu quan hệ cho iđêan tham số của một vành Cohen-Macaulay suy rộng được xem như một trường hợp của Hệ quả 2.2.9.

Chú ý 2.2.10. Lưu ý rằng trong trường hợp tổng quát, tập các hệ tham số thực sự lớn hơn tập các hệ tham số tách biệt, ngay cả trong các môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy. Vì vậy, tồn tại các vành Cohen-Macaulay suy rộng dãy mà chỉ số chính quy không bị chặn với mọi hệ tham số như ví dụ sau đây: Xét vành địa phương $R = k[[X, Y, Z, W]]/(W^2, WZ)$ được đưa ra trong [3, Example 2.1], với k là một trường. Khi đó dễ dàng kiểm tra dãy lọc các iđêan

$$R = R_0 \supset (W)/(W^2, Z) \cap (W) = R_1 \supset 0$$

là lọc chiều của R, hơn thế $R/R_1 \cong k[[X, Y, Z]]$ là Cohen-Macaulay và R_1 là một R-môđun Cohen-Macaulay suy rộng chiều 2. Vì vậy R là một vành Cohen-Macaulay suy rộng dãy. Ký hiệu x, y, z, w là các ảnh của X, Y, Z, W trong R và đặt $a_{1,n} = x^{n-1}y + z^n$, $a_{2,n} = x^n$, $a_{3,n} = y^n$. Trong [3, Example 2.1], họ đã chỉ ra rằng $Q_n = (a_{1,n}, a_{2,n}, a_{3,n})$ có kiểu đa thức tối thiểu là n, nói cách khác có chỉ số chính quy tối thiểu là $n - 1$. Lưu ý rằng, với mọi $n \geq 2$ iđêans Q_n không là iđêan tham số tách biệt đối với bất kỳ lọc Cohen-Macaulay suy rộng. Thật vậy giả sử u_1, u_2, u_3 là một hệ tham số tách biệt của R đối với lọc Cohen-Macaulay suy rộng $\mathcal{F} : M = M_0 \supset M_1 \supset 0$ sao cho $Q_n = (u_1, u_2, u_3)$. Khi đó luôn có ma trận $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ để $B \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ a_{3,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ sao cho $\det(B)$ khả nghịch. Không mất tổng quát có thể giả sử $u_1 M = 0$. Do $\ell(R_1/M_1) < \infty$ nên tồn tại số nguyên m đủ lớn sao cho $u_1^m R_1 = 0$. Lưu ý, $R_1 = (W)/(W^2, WZ)$, cho nên $u_1^m \in (W^2, WZ) : W = (W, Z)$. Vì vậy, $u_1 = b_{11}a_{1,n} + b_{12}a_{2,n} + b_{13}a_{3,n} \in (W, Z)$. Dẫn đến $b_{11}(X^{n-1}Y + Z^n) + b_{12}X^n + b_{13}Y^n \in (W, Z)$. Từ đó, ta có $b_{12} \in (Y, Z, W)$, $b_{13} \in (X, Z, W)$ và $b_{11} \in (X^n, Y^n, Z, W) : X^{n-1}Y \subseteq (X, Y, Z, W)$ với mọi $n \geq 2$. Do đó, $\det(B)$ không khả nghịch. Vì vậy, Q_n không là iđêan tham số tách biệt với bất kỳ lọc Cohen-Macaulay suy rộng.

Cho I là một iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ của R. Theo Bổ đề 1.4.1, ta có $\rho_I(M) \leq \operatorname{reg}(G_I(M))$. Do đó, kết quả sau là hệ quả trực tiếp của Định lý 2.2.6.

Hệ quả 2.2.11. *Cho M, $\mathcal{F}$ và hằng số $C_{\mathcal{F}}$ như trong Định lý 2.2.6. Khi đó,*

$$\rho_{\mathfrak{q}}(M) \leq C_{\mathcal{F}}$$

với mọi iđêan tham số tách biệt $\mathfrak{q}$ của M đối với lọc $\mathcal{F}$.

Chương 3

Về một hiệu chỉnh của hàm Hilbert-Samuel

Cho $\mathfrak{q}$ là một iđêan tham số của M. Xét hàm (biến n)

$$H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) = \ell(M/\mathfrak{q}^{n+1}M) - \sum_{i=0}^{d} \operatorname{adeg}_i(\mathfrak{q}; M)\binom{n+i}{i},$$

trong đó $\operatorname{adeg}_i(\mathfrak{q}; M)$ là bậc số học thứ i của M đối với iđêan tham số $\mathfrak{q}$, được gọi là *hàm hiệu chỉnh Hilbert-Samuel* của M đối với iđêan $\mathfrak{q}$. Trong chương này, chúng tôi chỉ ra rằng nếu $\mathfrak{q}$ là một iđêan tham số tách biệt thì luôn tồn tại số nguyên dương n_0 đủ lớn sao cho hàm số $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n)$ tăng và nhận giá trị không âm với $n \geq n_0$. Hơn nữa, nếu M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy, số nguyên n_0 tồn tại độc lập với iđêan hệ tham số tách biệt $\mathfrak{q}$. Chương 3 được viết dựa trên bài báo [26].

3.1 Bậc số học

Trước tiên, chúng tôi cần mở rộng khái niệm lọc chiều như sau.

Ký hiệu 3.1.1. Cho $\mathcal{D} : M = D_0 \supset D_1 \supset ... \supset D_t = H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ là lọc chiều của M. Tập các lọc $\mathcal{F} : M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_t$ các môđun con của M có cùng độ dài với lọc chiều sao cho $\ell(D_i/M_i) < \infty$ với mọi $i = 0, ..., t$ được ký hiệu là $\mathcal{F}(M)$. Dễ thấy, nếu $\mathcal{F} : M = M_0 \supset M_1 \supset ... \supset M_t$ là một lọc của $\mathcal{F}(M)$ thì $\dim M_i = \dim D_i = d_i$ với mọi $i = 0, ..., t-1$.

Chú ý 3.1.2. Nếu M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy thì $\mathcal{F}(M)$ chính là tập tất cả các lọc Cohen-Macaulay suy rộng của M.

Sau đây chúng tôi đưa ra một vài tính chất của các lọc trong $\mathcal{F}(M)$. Nhắc lại, Ass(M) là tập các iđêan nguyên tố liên kết của M và Assh(M) là tập các iđêan nguyên tố liên kết có chiều bằng chiều của M.

Bổ đề 3.1.3. *Cho $\mathcal{F} : M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_s$ là một lọc các môđun con của M. Khi đó, các phát biểu sau là tương đương:*
(i) $s = t$ và $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(M)$.
(ii) $\ell(M_t) < \infty$ và $\mathrm{Ass}(M_i/M_{i+1}) \subseteq Assh(M_i/M_{i+1}) \cup \{\mathfrak{m}\}$ với mọi $i = 0, ..., t-1$.

Chứng minh. Xem [9, Lemma 2.2] □

Cho $\mathcal{F} : M = M_0 \supset M_1 \supset ... \supset M_t$ là một lọc của $\mathcal{F}(M)$ và x là một phần tử lọc chính quy của M. Khi đó, lọc $\mathcal{F}/xM$ có dạng giống như Hệ quả 2.1.11. Cụ thể,

$$\mathcal{F}/xM : M/xM \supset (M_1 + xM)/xM \supset ... \supset (M_{s-1} + xM)/xM \supset 0$$

là một lọc của M/xM (lọc thỏa mãn điều kiện chiều), trong đó $s = t-1$ nếu $d_{t-1} = 1$ và $s = t$ trong các trường hợp còn lại.

Bổ đề 3.1.4. *Cho $\mathcal{F} : M = M_0 \supset M_1 \supset ... \supset M_t$ và $\mathcal{N} : M = N_0 \supset N_1 \supset ... \supset N_t$ là các lọc có cùng độ dài với lọc chiều của M. Khi đó, các phát biểu sau là đúng.*
(i) Nếu $N_i \subseteq M_i$ và $\ell(M_i/N_i) < \infty$ với mọi $i = 0, ..., t$, ta có $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(M)$ khi và chỉ khi $\mathcal{N} \in \mathcal{F}(M)$.
(ii) Cho x là một phần tử lọc chính quy của M và $\mathcal{F}, \mathcal{N} \in \mathcal{F}(M)$. Khi đó, $\mathcal{F}/xM \in \mathcal{F}(M/xM)$ khi và chỉ khi $\mathcal{N}/xM \in \mathcal{F}(M/xM)$.

Chứng minh. (*i*) Gọi $\mathcal{D} : M = D_0 \supset D_1 \supset ... \supset D_t = H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ là lọc chiều của M. Xét các dãy khớp ngắn

$$0 \longrightarrow M_i/N_i \longrightarrow D_i/N_i \longrightarrow D_i/M_i \longrightarrow 0$$

với mọi $i = 1, ..., t$. Do $\ell(M_i/N_i) < \infty$, dẫn đến $\ell(D_i/M_i) < \infty$ khi và chỉ khi $\ell(D_i/N_i) < \infty$. Do đó, $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(M)$ khi và chỉ khi $\mathcal{N} \in \mathcal{F}(M)$.
(*ii*) Trước hết, ta xét các lọc

$$\mathcal{D}/xM : M/xM \supset (D_1 + xM)/xM \supset ... \supset (D_{s-1} + xM)/xM \supset 0,$$

$$\mathcal{F}/xM : M/xM \supset (M_1 + xM)/xM \supset ... \supset (M_{s-1} + xM)/xM \supset 0,$$

$$\mathcal{N}/xM : M/xM \supset (N_1 + xM)/xM \supset ... \supset (N_{s-1} + xM)/xM \supset 0,$$

trong đó $s = t-1$ nếu $d_{t-1} = 1$ và $s = t$ trong các trường hợp còn lại. Lưu ý rằng $\mathcal{F}, \mathcal{N} \in \mathcal{F}(M)$, kéo theo $\ell(D_i + xM/M_i + xM) < \infty$ và $\ell(D_i + xM/N_i + xM) < \infty$ với mọi $i = 1, ..., s$. Theo (i) của bổ đề này thì $\mathcal{F}/xM \in \mathcal{F}(M/xM)$ khi và chỉ khi $\mathcal{D}/xM \in \mathcal{F}(M/xM)$ và $\mathcal{D}/xM \in \mathcal{F}(M/xM)$ khi và chỉ khi $\mathcal{N}/xM \in \mathcal{F}(M/xM)$. Vì vậy, ta có điều cần chứng minh. □

Định nghĩa 3.1.5. ([4],[37],[38]) Cho I là một iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ của R. *Bậc số học thứ i* của M đối với iđêan I được định nghĩa như sau

$$\operatorname{adeg}_i(I;M) = \sum_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Ass}(M),\, \dim R/\mathfrak{p}=i} \operatorname{mult}_M(\mathfrak{p}) e_0(I; R/\mathfrak{p}),$$

trong đó $\operatorname{mult}_M(\mathfrak{p})$ là độ dài của $R_\mathfrak{p}$-môđun $H^0_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$ và được gọi là *độ dài bội* của M tại iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$.

Kết quả sau đưa ra mối liên hệ giữa bậc số học và bội của các môđun trong lọc chiều.

Bổ đề 3.1.6. *Cho $\mathcal{F} : M = M_0 \supset M_1 \supset ... \supset M_t$ là một lọc của $\mathcal{F}(M)$ và I là một iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ của R. Khi đó,*

$$\operatorname{adeg}_i(I;M) = \begin{cases} \ell(H^0_\mathfrak{m}(M)) \text{ nếu } i = 0, \\ e_0(I; M_j) \text{ nếu } d_j = i \text{ với } j = 0, ..., t-1, \\ 0 \text{ trong các trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

Chứng minh. Theo [9, Proposition 3.2], ta có

$$\operatorname{adeg}_i(I;M) = \begin{cases} \ell(H^0_\mathfrak{m}(M)) \text{ nếu } i = 0, \\ e_0(I; D_j) \text{ nếu } d_j = i \text{ với } j = 0, ..., t-1, \\ 0 \text{ trong các trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

Hơn nữa, do $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(M)$ cho nên $\ell(D_i/M_i) < \infty$. Do đó, $e_0(I; D_i) = e_0(I; M_i)$ với mọi $i = 0, ..., t-1$. □

Sau đây, chúng tôi chỉ ra bậc số học thứ $i > 0$ của M và $M/H^0_\mathfrak{m}(M)$ đối với một iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ là như nhau.

Hệ quả 3.1.7. *Cho I là một iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ của R. Khi đó*

$$\operatorname{adeg}_i(I; M/H^0_\mathfrak{m}(M)) = \operatorname{adeg}_i(I;M)$$

với mọi $i = 1, ..., d$.

Chứng minh. Gọi $\mathcal{D} : M = D_0 \supset D_1 \supset ... \supset D_t = H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ là lọc chiều của M. Dễ thấy,

$$\mathcal{D}/H^0_{\mathfrak{m}}(M) : M/H^0_{\mathfrak{m}}(M) \supset D_1/H^0_{\mathfrak{m}}(M) \supset ... \supset 0$$

là lọc chiều của môđun $M/H^0_{\mathfrak{m}}(M)$. Vậy, theo Bổ đề 3.1.6 và Bổ đề 1.4.2 ta có

$$\begin{aligned}\mathrm{adeg}_{d_i}(I; M/H^0_{\mathfrak{m}}(M)) &= e_0(I; D_i/H^0_{\mathfrak{m}}(M)) \\ &= e_0(I; D_i) = \mathrm{adeg}_{d_i}(I; M)\end{aligned}$$

với mọi $d_i > 0$. Còn lại, nếu $0 < j \neq d_i$ thì $\mathrm{adeg}_j(I; M) = 0 = \mathrm{adeg}_j(I; M/H^0_{\mathfrak{m}}(M))$ với mọi $i = 0, ..., t-1$. □

Kết quả sau so sánh bậc số học của môđun M và môđun M/xM, trong đó x là một phần tử lọc chính quy của M. Đây là một tính chất quan trọng, giúp chúng tôi có thể áp dụng chứng minh quy nạp cho các hàm hiệu chỉnh Hilbert-Samuel.

Bổ đề 3.1.8. *Cho $\mathcal{F}$ là một lọc của $\mathcal{F}(M)$ và $\mathfrak{q}$ là iđêan tham số của M. Giả sử tồn tại phần tử $x \in \mathfrak{q}$ là một phần tử lọc chính quy của M sao cho $\mathcal{F}/xM \in \mathcal{F}(M/xM)$. Khi đó,*

$$\mathrm{adeg}_i(\mathfrak{q}; M/xM) = \mathrm{adeg}_{i+1}(\mathfrak{q}; M),$$

với mọi $i \geq 1$. Hơn nữa, nếu $\mathfrak{q} = (x, x_2, ..., x_d)$ là iđêan tham số tách biệt của M đối với lọc $\mathcal{F}$, thì $\mathrm{adeg}_0(\mathfrak{q}; M/xM) \geq \mathrm{adeg}_1(\mathfrak{q}; M)$.

Chứng minh. Gọi $\mathcal{D} : M = D_0 \supset D_1 \supset ... \supset D_t = H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ là lọc chiều của M. Khi đó, lọc $\mathcal{D}/xM \in \mathcal{F}(M/xM)$ theo Bổ đề 3.1.4(*ii*) và có dạng

$$\mathcal{D}/xM : M/xM \supset (D_1 + xM)/xM \supset ... \supset (D_{s-1} + xM)/xM \supset 0,$$

trong đó $s = t-1$ nếu $d_{t-1} = 1$ và $s = t$ trong các trường hợp còn lại. Do x là phần tử lọc chính quy của M, dẫn đến x là một phần tử chính quy của M/D_i. Ta có $xM \cap D_i = xD_i$ với mọi $i = 1, ..., t$. Do $\mathcal{D}/xM \in \mathcal{F}(M/xM)$ và theo Bổ đề 3.1.6, ta có

$$\begin{aligned}\mathrm{adeg}_{d_i-1}(\mathfrak{q}; M/xM) &= e_0(\mathfrak{q}; (D_i + xM)/xM) \\ &= e_0(\mathfrak{q}; (D_i/xD_i) \\ &= e_0(\mathfrak{q}; D_i) = \mathrm{adeg}_{d_i}(\mathfrak{q}; M)\end{aligned}$$

với mọi $d_i \geq 2$. Nếu $1 \leq i \neq \dim((D_i + xM)/xM) = d_j - 1$ thì $2 \leq i + 1 \neq d_i$ với mọi $j = 0, ..., s-1$. Do đó,

$$\mathrm{adeg}_i(\mathfrak{q}; M/xM) = 0 = \mathrm{adeg}_{i+1}(\mathfrak{q}; M).$$

Cuối cùng, nếu $d_{t-1} > 1$ thì $\operatorname{adeg}_1(\mathfrak{q}; M) = 0 \leq \operatorname{adeg}_0(\mathfrak{q}; M)$. Giả sử $d_{t-1} = 1$ và $\mathcal{F} : M = M_0 \supset M_1 \supset ... \supset M_t$. Vì $\mathfrak{q} = (x, x_2, ..., x_d)$ là iđêan tham số tách biệt của M đối với lọc $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(M)$ và theo Bổ đề 3.1.6, ta có

$$\begin{aligned} \operatorname{adeg}_1(\mathfrak{q}; M) &= e_0(\mathfrak{q}; M_{t-1}) \\ &= e_0(x; M_{t-1}) \\ &= e_0(x; D_1) \leq \ell(D_{t-1}/xD_{t-1}). \end{aligned}$$

Mặt khác, $H^0_m(M/xM) \supseteq (D_{t-1} + xM)/xM \cong D_{t-1}/(D_{t-1} \cap xM) = D_{t-1}/xD_{t-1}$. Điều này dẫn đến $\operatorname{adeg}_1(\mathfrak{q}; M) \leq \ell(D_{t-1}/xD_{t-1}) \leq \operatorname{adeg}_0(\mathfrak{q}; M/xM)$. □

Phần tiếp theo của tiết này, chúng tôi sẽ chỉ ra luôn tồn tại phần tử x thỏa mãn giả thiết của Bổ đề 3.1.8. Kết quả sau đây của S. Goto và Y. Nakamura [15, Lemma 3.2, Proposition 3.3] cho vành địa phương Noether, tuy nhiên có thể dễ dàng mở rộng cho R-môđun hữu hạn sinh như sau.

Bổ đề 3.1.9. *Giả sử R là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay địa phương và* $\operatorname{Ass}(M) \subseteq \operatorname{Assh}(M) \cup \{\mathfrak{m}\}$. *Khi đó, các phát biểu sau là đúng.*
(i) *Tập các iđêan nguyên tố*

$$\mathcal{A} = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \mid \operatorname{ht}_R(\mathfrak{p}) > 1 = \operatorname{depth}(M_\mathfrak{p}), \mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}\}$$

là hữu hạn.
(ii) *Cho $\mathfrak{q}$ là iđêan tham số của M. Luôn tồn tại $x \in \mathfrak{q} \setminus \mathfrak{q}^2$ sao cho* $x \notin \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathcal{A} \cup \operatorname{Ass}(M) \setminus \{\mathfrak{m}\}} \mathfrak{p}$. *Khi đó,* $\operatorname{Ass}(M/xM) \subseteq \operatorname{Assh}(M/xM) \cup \{\mathfrak{m}\}$.

Chú ý 3.1.10. Cho $\mathcal{D} : M = D_0 \supset D_1 \supset \ldots \supset D_t = H^0_\mathfrak{m}(M)$ là lọc chiều của M. Đặt $R_i = R/\operatorname{Ann}_R(D_i/D_{i+1})$. Theo Chú ý 1.1.2($i$), ta có $\operatorname{Ass}_R(R_i) = \operatorname{Assh}_R(R_i)$. Khi đó, nếu R là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay địa phương, theo Bổ đề 3.1.9(i), tập các iđêan nguyên tố

$$\mathcal{A}_i = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R_i) \mid \operatorname{ht}_{R_i}(\mathfrak{p}) > 1 = \operatorname{depth}((D_i/D_{i+1})_\mathfrak{p})\}$$

là hữu hạn với mọi $i = 0, ..., t-1$. Do đó,

$$\mathcal{A}(M) = \left((\bigcup_{i=0}^{t-1} \mathcal{A}_i) \cup \operatorname{Ass}_R(M) \right) \setminus \{\mathfrak{m}\}$$

là tập hữu hạn các iđêan nguyên tố.

Kết quả sau đây chỉ ra giả thiết của Bổ đề 3.1.8 luôn được thỏa mãn.

Bổ đề 3.1.11. *Giả sử R là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay địa phương. Cho $\mathfrak{q}$ là iđêan tham số của M và $\mathcal{F}$ là một lọc của $\mathcal{F}(M)$. Khi đó,*
(i) Luôn tồn tại là phần tử bề mặt x của M đối với iđêan $\mathfrak{q}$ sao cho $x \notin \mathfrak{p}$ với mọi $\mathfrak{p} \in \mathcal{A}(M)$. Hơn nữa, $\mathcal{F}/xM \in \mathcal{F}(M/xM)$.
(ii) Với x như trong mệnh đề (i), nếu $\mathfrak{q}$ là iđêan tham số tách biệt của M đối với lọc $\mathcal{F}$ thì luôn tồn tại hệ tham số tách biệt $x_1, ..., x_d$ của M đối với $\mathcal{F}$ sao cho $x = x_1$ và $\mathfrak{q} = (x_1, ..., x_d)$.

Chứng minh. (i) Theo Chú ý 3.1.10, tập $\mathcal{A}(M)$ là hữu hạn. Vì vậy, luôn tồn tại x theo Định lý tránh nguyên tố. Gọi $\mathcal{D} : M = D_0 \supset D_1 \supset ... \supset D_t = H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ là lọc chiều của M. Theo cách chọn x, dễ thấy nó là phần tử lọc chính quy của M. Lọc $\mathcal{D}/xM$ có dạng

$$\mathcal{D}/xM : M/xM \supset D_1 + xM/xM \supset ... \supset D_{s-1} + xM/xM \supset 0,$$

trong đó $s = t - 1$ nếu $d_{t-1} = 1$ và $s = t$ trong các trường hợp còn lại. Do x là phần tử lọc chính quy của M, cho nên sẽ là phần tử chính quy của M/D_i. Do đó, $xM \cap D_i = xD_i$ với mọi $i = 0, ..., t - 1$. Dẫn đến,

$$\frac{D_i + xM}{D_{i+1} + xM} \cong \frac{D_i}{D_{i+1} + xM \cap D_i} \cong \frac{D_i}{D_{i+1} + xD_i} \cong \frac{D_i/D_{i+1}}{x(D_i/D_{i+1})}.$$

Theo Chú ý 1.1.2(i), $\operatorname{Ass}(D_i/D_{i+1}) = \operatorname{Assh}(D_i/D_{i+1})$. Áp dụng Bổ đề 3.1.9($ii$) cho môđun D_i/D_{i+1} với mọi $i = 0, ..., t-1$ và theo Bổ đề 3.1.3, ta được $\mathcal{D}/xM \in \mathcal{F}(M)$. Do đó, $\mathcal{F}/xM \in \mathcal{F}(M)$ theo Bổ đề 3.1.4(ii).
(ii) Giả sử $\mathcal{F} : M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_t$, luôn có $\mathfrak{q} \subseteq \operatorname{Ann}(M_t)$. Do đó, ta có thể chứng minh tiếp tương tự như Bổ đề 2.2.3. □

Kết quả sau đưa ra sự liên hệ với bậc số học của địa phương hóa.

Bổ đề 3.1.12. *Cho $\mathcal{F}$ là một lọc của $\mathcal{F}(M)$, $\mathfrak{q} = (x_1, ..., x_d)$ là một iđêan tham số tách biệt của M đối với lọc $\mathcal{F}$ và $\mathfrak{a} = (x_{j+1}, ..., x_d)$ là iđêan của R. Khi đó với mọi $i = 0, ..., d - j$, ta có*

$$\operatorname{adeg}_{i+j}(\mathfrak{q}; M) = \sum_{Q \in \operatorname{Assh}_R(M/\mathfrak{a}M)} \operatorname{adeg}_i(\mathfrak{a}R_Q; M_Q) e_0(\mathfrak{q}; R/Q).$$

Chứng minh. Lưu ý rằng

$$\operatorname{adeg}_{i+j}(\mathfrak{q}; M) = \sum_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Ass}(M), \dim R/\mathfrak{p}=i+j} \ell(H^0_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}))e_0(\mathfrak{q}; R/\mathfrak{p}).$$

Nếu $\operatorname{adeg}_{i+j}(\mathfrak{q}; M) = 0$, thì $\dim(R/\mathfrak{p}) \neq i + j$ với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(M)$. Giả sử $\operatorname{adeg}_i(\mathfrak{a}R_Q; M_Q) \neq 0$ với $Q \in \operatorname{Assh}(M/\mathfrak{a}M)$. Suy ra tồn tại iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}R_Q \in \operatorname{Ass}_{R_Q}(M_Q)$ sao cho $\dim R_Q/\mathfrak{p}R_Q = i$. Do đó, $\dim R/\mathfrak{p} = \dim R_Q/\mathfrak{p}R_Q + \dim R/Q = i + j$, mâu thuẫn. Mặt khác, vì $x_1, ..., x_d$ là hệ tham số tách biệt của M đối với lọc $\mathcal{F}$, dễ dàng kiểm tra được $(x_{i+j+1}, ..., x_d) \in \mathfrak{p}$ với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(M)$ sao cho $\dim R/\mathfrak{p} \leq i + j$. Suy ra

$$e_0(\mathfrak{q}; R/\mathfrak{p}) = e_0(x_1, ..., x_{i+j}; R/\mathfrak{p})$$

và $x_1, ..., x_{i+j}$ là hệ tham số của $R/\mathfrak{p}$ với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(M), \dim R/p = i + j$. Theo công thức bội liên kết (xem [23]),

$$e_0(\mathfrak{q}; R/\mathfrak{p}) = \sum_{Q\in \operatorname{Assh}(R/\mathfrak{a}+\mathfrak{p})} e_0(\mathfrak{a}R_Q; (R/\mathfrak{p})_Q)e_0(\mathfrak{q}; R/Q)$$

với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M), \dim R/\mathfrak{p} = i + j$. Do đó,

$$\begin{aligned}
\operatorname{adeg}_{i+j}(\mathfrak{q}; M) &= \sum_{\substack{\mathfrak{p}\in \operatorname{Ass}(M),\\ \dim R/\mathfrak{p}=i+j}} \ell(H^0_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})) \sum_{Q\in \operatorname{Assh}(R/\mathfrak{a}+\mathfrak{p})} e_0(\mathfrak{a}R_Q; (R/\mathfrak{p})_Q)e_0(\mathfrak{q}; R/Q)\\
&= \sum_{\substack{\mathfrak{a}+\operatorname{Ann} M\subset Q,\\ \dim R/Q=j}} \sum_{\substack{\mathfrak{p}\in \operatorname{Ass}(M),\mathfrak{p}\subset Q,\\ \dim R/\mathfrak{p}=i+j}} \ell(H^0_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}))e_0(\mathfrak{a}R_Q; (R/\mathfrak{p})_Q)e_0(\mathfrak{q}; R/Q)\\
&= \sum_{Q\in \operatorname{Assh}_R(M/\mathfrak{a}M)} \Big(\sum_{\substack{\mathfrak{p}\in \operatorname{Ass}(M_Q),\\ \dim R_Q/\mathfrak{p}R_Q=i}} \ell(H^0_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}))e_0(\mathfrak{a}R_Q, R_Q/\mathfrak{p}R_Q))e_0(\mathfrak{q}; R/Q)\\
&= \sum_{Q\in \operatorname{Assh}_R(M/\mathfrak{a}M)} \operatorname{adeg}_i(\mathfrak{a}R_Q; M_Q)e_0(\mathfrak{q}; R/Q)).
\end{aligned}$$

Chú ý, đẳng thức cuối được suy ra từ $H^0_{\mathfrak{p}(R_Q)_\mathfrak{p}}((M_Q)_\mathfrak{p}) = H^0_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$. □

3.2 Hàm hiệu chỉnh Hilbert-Samuel

Mục tiêu của tiết này là xét tính không âm của hàm hiệu chỉnh Hilbert-Samuel. Trước hết, kết quả sau được suy ra từ [9, Theorem 4.5]

Bổ đề 3.2.1. *Cho $\mathcal{F}$ là một lọc của $\mathcal{F}(M)$ và $\mathfrak{q}$ là iđêan tham số tách biệt của M đối với lọc $\mathcal{F}$. Khi đó, các mệnh đề sau là tương đương:*

(*i*) *M là một môđun Cohen-Macaulay dãy;*

(*ii*) $(-1)^i e_i(\mathfrak{q}; M) = \mathrm{adeg}_{d-i}(\mathfrak{q}, M)$ *với mọi* $i = 0, ..., d$.

(*iii*) $(-1)^i e_i(\mathfrak{q}; M) = \mathrm{adeg}_{d-i}(\mathfrak{q}, M)$ *với mọi* $i = 0, ..., d-1$.

Bổ đề 3.2.2. *Cho $\mathfrak{q}$ là iđêan tham số của M và x là phần tử bề mặt của M đối với iđêan $\mathfrak{q}$. Khi đó,*

$$\ell((\mathfrak{q}^{n+1}M : x)/\mathfrak{q}^n M) = \ell(0 :_M x)$$

với mọi $n \geq \mathrm{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M)) + 1$.

Chứng minh. Xét dãy khớp

$$0 \longrightarrow \frac{\mathfrak{q}^{n+1}M : x}{\mathfrak{q}^n M} \longrightarrow \frac{M}{\mathfrak{q}^n M} \xrightarrow{.x} \frac{M}{\mathfrak{q}^{n+1}M} \longrightarrow \frac{M}{\mathfrak{q}^{n+1}M + xM} \longrightarrow 0.$$

Ta có

$$\ell(\mathfrak{q}^{n+1}M : x/\mathfrak{q}^n M) = \ell(M/\mathfrak{q}^{n+1}M + xM) - \ell(\mathfrak{q}^n M/\mathfrak{q}^{n+1}M).$$

Bên cạnh đó, $\ell(\mathfrak{q}^n M/\mathfrak{q}^{n+1}M)$ là đa thức với mọi $n \geq \mathrm{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M)) + 1$ theo Bổ đề 1.3.3 và $\ell(M/\mathfrak{q}^{n+1}M + xM)$ là đa thức với mọi $n \geq \mathrm{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M/xM))$ theo Bổ đề 1.4.1. Lưu ý rằng $\mathrm{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M)) \geq \mathrm{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M/xM))$ theo Bổ đề 1.3.7(*ii*). Do đó, với mọi $n \geq \mathrm{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M)) + 1$, ta có

$$\begin{aligned}\ell((\mathfrak{q}^{n+1}M : x)/\mathfrak{q}^n M) &= \sum_{i=0}^{d-1} \binom{n+d-1-i}{d-1-i}((-1)^i e_i(\mathfrak{q}; M/xM) - (-1)^i e_i(\mathfrak{q}; M)) \\ &= \ell(0 :_M x)\end{aligned}$$

theo Bổ đề 1.4.5. □

Định lý 3.2.3. *Giả sử R là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay địa phương. Cho $\mathcal{F}$ là một lọc của $\mathcal{F}(M)$ và $\mathfrak{q}$ là một iđêan tham số tách biệt của M đối với lọc $\mathcal{F}$. Khi đó tồn tại số n_0 đủ lớn sao cho hàm số*

$$H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) = \ell(M/\mathfrak{q}^{n+1}M) - \sum_{i=0}^{d} \mathrm{adeg}_i(\mathfrak{q}; M)\binom{n+i}{i}$$

tăng và nhận giá trị không âm với mọi $n \geq n_0$.

Chứng minh. Chúng ta sẽ chứng minh quy nạp theo chiều d của môđun M. Nếu $d = 1$ thì $\mathfrak{q} = (x)$, $\mathcal{F} : M = M_0 \supset M_1$ và M là môđun Cohen-Macaulay dãy. Chú ý rằng M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng và x^{n+1} là hệ tham số chuẩn tắc với $n \gg 0$. Khi đó, theo Bổ đề 3.1.6 và Bổ đề 3.2.1 ta có

$$\begin{aligned} H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) &= \ell(M/x^{n+1}M) - \binom{n+1}{1}\mathrm{adeg}_1(\mathfrak{q}; M) - \mathrm{adeg}_0(\mathfrak{q}, M) \\ &= [\ell(M/x^{n+1}M) - e_0(x^{n+1}; M)] - \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(M)) = 0 \end{aligned}$$

với $n \gg 0$. Xét $d > 1$. Theo Hệ quả 3.1.7, ta có

$$\mathrm{adeg}_i(\mathfrak{q}; M/H^0_{\mathfrak{m}}(M)) = \mathrm{adeg}_i(\mathfrak{q}; M)$$

với mọi $i = 1, ..., d$. Hơn thế, do $H^0_{\mathfrak{m}}(M) \cap \mathfrak{q}^{n+1}M = 0$ với $n \gg 0$ (theo Bổ đề Artin-Rees) ta có dãy khớp ngắn

$$0 \longrightarrow H^0_{\mathfrak{m}}(M) \longrightarrow \frac{M}{\mathfrak{q}^{n+1}M} \longrightarrow \frac{M}{\mathfrak{q}^{n+1}M + H^0_{\mathfrak{m}}(M)} \longrightarrow 0.$$

Lưu ý rằng, $e_i(\mathfrak{q}; M) = e_i(\mathfrak{q}; M/H^0_{\mathfrak{m}}(M))$ với mọi $i = 1, ..., d$ và $(-1)^d e_d(\mathfrak{q}; M) = (-1)^d e_d(\mathfrak{q}; M/H^0_{\mathfrak{m}}(M)) + \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(M))$ theo Bổ đề 1.4.2. Do đó, tồn tại số nguyên n_1 sao cho $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) = H^{ad}_{\mathfrak{q},M/H^0_{\mathfrak{m}}(M)}(n)$ với $n \geq n_1$. Vì vậy, ta có thể giả thiết thêm $H^0_{\mathfrak{m}}(M) = 0$. Theo Bổ đề 3.1.11(ii), tồn tại $x_1, ..., x_d$ là hệ tham số tách biệt của M đối với lọc $\mathcal{F}$ và $\mathfrak{q} = (x_1, ..., x_d)$ sao cho $x = x_1$ là phần tử bề mặt của M đối với iđêan $\mathfrak{q}$. Từ dãy khớp

$$0 \longrightarrow \frac{\mathfrak{q}^{n+1}M : x}{\mathfrak{q}^n M} \longrightarrow \frac{M}{\mathfrak{q}^n M} \xrightarrow{.x} \frac{M}{\mathfrak{q}^{n+1}M} \longrightarrow \frac{M}{(x, \mathfrak{q}^{n+1})M} \to 0,$$

suy ra

$$\ell(M/(x, \mathfrak{q}^{n+1}M)) = \ell(M/\mathfrak{q}^{n+1}M) - \ell(M/\mathfrak{q}^n M) + \ell(\frac{\mathfrak{q}^{n+1}M : x}{\mathfrak{q}^n M}).$$

Theo Bổ đề 3.1.11(i), ta có $\mathcal{F}/xM \in \mathcal{F}(M/xM)$. Do dó, $\mathcal{D}/xM \in \mathcal{F}(M)$ theo Bổ đề 3.1.4(*ii*). Vậy, theo Bổ đề 3.1.8 ta có

$$\begin{aligned} H^{ad}_{\mathfrak{q},M/xM}(n) &= \ell(M/(x, \mathfrak{q}^{n+1})M) - \sum_{i=0}^{d-1} \mathrm{adeg}_i(\mathfrak{q}; M/xM)\binom{n+i}{i} \\ &= \ell(M/\mathfrak{q}^{n+1}M) - \ell(M/\mathfrak{q}^n M) + \ell(\frac{\mathfrak{q}^{n+1}M : x}{\mathfrak{q}^n M}) \\ &- \sum_{i=0}^{d} \mathrm{adeg}_i(\mathfrak{q}; M)[\binom{n+i}{i} - \binom{n-1+i}{i}] + \mathrm{adeg}_1(\mathfrak{q}; M) - \mathrm{adeg}_0(\mathfrak{q}, M/xM) \\ &= H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) - H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n-1) + \mathrm{adeg}_1(\mathfrak{q}; M) - \mathrm{adeg}_0(\mathfrak{q}, M/xM) + \ell(\frac{\mathfrak{q}^{n+1}M : x}{\mathfrak{q}^n M}). \end{aligned}$$

Do x là phần tử bề mặt của M đối với iđêan $\mathfrak{q}$ và $H^0_{\mathfrak{m}}(M) = 0$, nên x là phần tử chính quy của M. Theo Bổ đề 3.2.2, tồn tại số nguyên $n_2 = \max\{n_1, \operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M)) + 1\}$ sao cho $\ell((\mathfrak{q}^{n+1}M : x)/\mathfrak{q}^n M) = 0$ với mọi $n \geq n_2$. Do đó,

$$h(n) := H^{ad}_{\mathfrak{q},M/xM}(n) + \operatorname{adeg}_0(\mathfrak{q}, M/xM) - \operatorname{adeg}_1(\mathfrak{q}; M) = H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) - H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n-1)$$

với mọi $n \geq n_2$. Mặt khác, $x_2, ..., x_d$ là hệ tham số tách biệt của M/xM đối với lọc $\mathcal{F}/xM : M/xM \supset (M_1 + xM)/xM \supset ... \supset (M_{s-1} + xM)/xM \supset 0$, trong đó $s = t - 1$ nếu $d_{t-1} = 1$ và $s = t$ trong các trường hợp còn lại. Theo quy nạp $H^{ad}_{\mathfrak{q},M/xM}(n)$ nhận giá trị không âm và tăng với mọi $n \geq n_3$. Lưu ý, $\operatorname{adeg}_0(\mathfrak{q}, M/xM) - \operatorname{adeg}_1(\mathfrak{q}; M) \geq 0$ theo Bổ đề 3.1.8. Do đó, $h(n)$ là hàm tăng và nhận giá trị không âm với n đủ lớn. Chúng ta xét hai trường hợp sau đây.

Trường hợp 1: Nếu $h(n) > 0$ với mọi $n \geq n_4$ thì $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n)$ là hàm tăng chặt. Vì thế tồn tại $n_5 \geq n_4$ sao cho $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n)$ không âm với mọi $n \geq n_5$.

Trường hợp 2: Nếu $h(n) = 0$ với mọi $n \geq n_3$ thì $H^{ad}_{\mathfrak{q},M/xM}(n) = 0$ và $\operatorname{adeg}_0(\mathfrak{q}, M/xM) = \operatorname{adeg}_1(\mathfrak{q}; M)$. Thêm vào đó, tồn tại số nguyên $n_6 \geq n_3$ để $H^{ad}_{\mathfrak{q},M/xM}(n)$ là đa thức với mọi $n \geq n_6$ và nó có dạng sau

$$0 = H^{ad}_{\mathfrak{q},M/xM}(n) = \sum_{i=0}^{d-1} \Big((-1)^i e_i(\mathfrak{q}; M/xM) - \operatorname{adeg}_{d-1-i}(\mathfrak{q}; M/xM)\Big)\binom{n+d-1-i}{d-1-i}.$$

Theo Bổ đề 1.4.5 và Bổ đề 3.1.8, ta có

$$\begin{aligned}(-1)^i e_i(\mathfrak{q}; M) &= (-1)^i e_i(\mathfrak{q}; M/xM)\\ &= \operatorname{adeg}_{d-1-i}(\mathfrak{q}; M/xM)\\ &= \operatorname{adeg}_{d-i}(\mathfrak{q}; M),\end{aligned}$$

với mọi $i = 0, ..., d-1$. Dẫn đến M là một môđun Cohen-Macaulay dãy theo Bổ đề 3.2.1. Mặt khác, theo Bổ đề 1.4.1, $\ell(M/q^{n+1}M)$ là đa thức với mọi $n \geq \operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M))$. Do đó, theo Bổ đề 3.2.1 ta có $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) = 0$ với mọi $n \geq \operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M))$. Chọn $n_0 = \max\{n_2, n_5, n_6\}$, ta có điều phải chứng minh. □

Cho $\mathcal{D} : M = D_0 \supset D_1 \supset ... \supset D_t = H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ là lọc chiều của M. Lưu ý, mọi iđêan tham số của M đều là iđêan tham số tách biệt của M/D_1 đối với lọc $M/D_1 \supset 0$. Áp dụng Định lý 3.2.3 cho M/D_1, ta có kết quả sau.

Hệ quả 3.2.4. $e_1(\mathfrak{q}; M) \leq -\operatorname{adeg}_{d-1}(\mathfrak{q}; M)$ *với mọi hệ tham số* $\mathfrak{q}$ *của* M.

Dưới đây, chúng tôi chỉ ra ví dụ trong đó hàm $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n)$ nhận giá trị âm với mọi $n \geq 0$ ngay cả khi M là một môđun Cohen-Macaulay dãy, nếu $\mathfrak{q}$ không là iđêan tách biệt với bất kỳ lọc $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(M)$. Nói cách khác điều kiện $\mathfrak{q}$ là hệ tham số tách biệt của M đối với lọc $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(M)$ trong Định lý 3.2.3 là cần thiết.

Ví dụ 3.2.5. Cho $R = k[[X, Y]]$ là vành các chuỗi lũy thừa hình thức trên trường k. Xét R-môđun

$$M = k[[X, Y]] \oplus (k[[X, Y]]/(Y^2)).$$

Đặt $D_1 = k[[X, Y]]/(Y^2)$. Chúng ta thấy M là một môđun Cohen-Macaulay dãy chiều 2 và $M \supset D_1 \supset 0$ là lọc chiều của nó. Lấy $\mathfrak{q} = (X, Y)$. Dễ thấy, $\mathfrak{q}$ là một iđêan tham số của M. Do M/D_1 là một môđun Cohen-Macaulay, theo Bổ đề 3.1.6 ta có

$$\begin{aligned} H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) &= \ell(M/\mathfrak{q}^{n+1}M) - e_0(\mathfrak{q}; M)\binom{n+2}{2} - e_0(\mathfrak{q}; D_1)\binom{n+1}{1} \\ &= \ell(M/(\mathfrak{q}^{n+1}M + D_1) + \ell(D_1/\mathfrak{q}^{n+1}D_1) - e_0(\mathfrak{q}; M/D_1)\binom{n+2}{2} - e_0(\mathfrak{q}; D_1)(n+1) \\ &= \ell(D_1/\mathfrak{q}^{n+1}D_1) - e_0(\mathfrak{q}; D_1)(n+1). \end{aligned}$$

Hơn nữa, $e_0(\mathfrak{q}; D_1) = 2$ và $\ell(D_1/\mathfrak{q}^{n+1}D_1) = 2n + 1$. Do đó, $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) = -1$ với mọi $n \geq 0$. Mặt khác, nếu $\mathfrak{q} = (u, v)$ với u, v là hệ tham số tách biệt của lọc $\mathcal{F} : M \supset M_1 \supset 0$ sao cho $\ell(D_1/M_1) < \infty$ thì tồn tại ma trận cấp 2 sao cho

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

và $ac - bd$ khả nghịch. Giả sử $uM_1 = 0$. Vì $\ell(D_1/M_1) < \infty$ nên tồn tại số nguyên n sao cho $u^n D_1 = 0$. Kéo theo $u^n \in (Y^2)$ hay $u = aX + bY \in (Y)$. Do đó, $a \in (Y)$ hay $u = kY$ với $k = a_1X + b$. Hơn nữa, vì $u.M_1 \subseteq (Y^2)$ ta có $kYm_1 = hY^2$ với $m_1 \in M_1$. Suy ra $km_1 \in (Y)$. Nếu $k \notin (Y)$ thì $m_1 \in (Y)$. Khi đó, $M_1 \subseteq YR/(Y^2) \subseteq D_1$. Mặt khác $\dim D_1/(YR/(Y^2)) = 1$, mâu thuẫn với $\ell(D_1/M_1) < \infty$. Vì vậy, $k = a_1X + b \in (Y)$. Kéo theo $b \in (X, Y)$. Khi đó $ad - bc \in (X, Y)$ không khả nghịch, vô lí. Vì vậy $\mathfrak{q}$ không là iđêan tham số tách biệt của M đối với bất kỳ lọc $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(M)$.

Chú ý sau chỉ ra rằng điều kiện tồn tại n_0 đủ lớn trong Định lý 3.2.3 là cần thiết.

Chú ý 3.2.6. (*i*) Cho M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng có $\mathfrak{m}H^0_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0$. Lấy x là phần tử tham số sao cho $xH^0_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0$. Gọi n_0 là số nguyên dương lớn nhất sao cho $x^{n_0}H^0_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0$. Khi đó dễ dàng kiểm tra được

$$H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) = [\ell(M/x^{n+1}M) - e_0(x^{n+1}; M)] - \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(M)) = I(x^{n+1}; M) - I(M).$$

Do đó, $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) < 0$ với mọi $n < n_0$ và $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) = 0$ với mọi $n \geq n_0$.
(ii) Theo [6], luôn tồn tại một môđun Cohen-Macaulay dãy M chiều $d > 1$ sao cho lọc chiều có dạng $\mathcal{D} : M = D_0 \supset ... \supset D_{t-1} \supset D_t = H^0_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0$, $\dim D_{t-1} = 1$. Khi đó $\mathcal{F} : D_0 \supset ... \supset D_{t-1} \supset 0$ là một lọc trong $\mathcal{F}(M)$ và có thể chọn iđêan tham số tách biệt $\mathfrak{q} = (x_1, ..., x_d)$ của M đối với lọc $\mathcal{F}$ sao cho $x_1^{n_0} H^0_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0$. Vì M là một môđun Cohen-Macaulay dãy, nên M/D_{t-1} cũng là môđun Cohen-Macaulay dãy. Hơn thế, $\mathfrak{q}$ là iđêan tham số tách biệt của M/D_{t-1}. Vì vậy, $H^{ad}_{\mathfrak{q},M/D_{t-1}}(n) = 0$ với mọi số nguyên không âm n theo [13, Theorem 4.1] (xem Hệ quả 3.3.3). Mặt khác,

$$H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) = H^{ad}_{\mathfrak{q},M/D_{t-1}}(n) + H^{ad}_{\mathfrak{q},D_{t-1}}(n) = H^{ad}_{\mathfrak{q},D_{t-1}}(n).$$

Do đó, $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) < 0$ với $n < n_0$.

3.3 Tính không âm của hàm hiệu chỉnh Hilbert-Samuel trong môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy

Trước tiên, xét hàm hiệu chỉnh Hilbert-Samuel $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n)$ trong trường hợp M là một môđun Cohen-Macaulay dãy.

Bổ đề 3.3.1. *Cho $\mathcal{F} : M = M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_t$ là một lọc của $\mathcal{F}(M)$ và $\mathfrak{q}$ là iđêan sinh bởi hệ tham số tách biệt $x_1, ..., x_d$ của M đối với lọc $\mathcal{F}$. Gọi $\mathcal{D} : M = D_0 \supset D_1 \supset ... \supset D_t = H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ là lọc chiều của M. Khi đó, nếu M là môđun Cohen-Macaulay dãy thì với mọi $i = 0, ..., t$, ta có*

$$\mathfrak{q}^{n+1}M \cap D_i = (x_1, ..., x_{d_i})^{n+1} D_i$$

với mọi $n \geq n_0 = \max_{i=0,...,t} \ell(D_i/M_i)$.

Chứng minh. Lưu ý rằng $\mathcal{D}$ là lọc Cohen-Macaulay của M cho nên D_{i-1}/D_i là Cohen-Macaulay với mọi $i = 1, ..., t$. Với mọi số nguyên $n \geq 0$, ta có

$$\mathfrak{q}^{n+1}D_{i-1} \cap D_i = \mathfrak{q}^{n+1}D_i,$$

với mọi $i = 1, ..., t$. Do đó,

$$\begin{aligned}\mathfrak{q}^{n+1}M \cap D_i &= \mathfrak{q}^{n+1}M \cap D_1 \cap D_i \\ &= \mathfrak{q}^{n+1}D_1 \cap D_i \\ &\dots \\ &= \mathfrak{q}^{n+1}D_{i-1} \cap D_i = \mathfrak{q}^{n+1}D_i,\end{aligned}$$

với mọi $i = 1, ..., t$. Mặt khác, do $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(M)$ nên $\ell(D_i/M_i) < \infty$ với mọi $i = 0, ..., t$. Đặt $n_0 = \max_{i=0,...,t} \ell(D_i/M_i)$, ta có

$$\mathfrak{q}^{n_0+1} D_i = \mathfrak{q}(\mathfrak{q}^{n_0} D_i) \subseteq \mathfrak{q} M_i = 0.$$

Vì vậy, với mọi $n \geq n_0$ ta có

$$\begin{aligned}
\mathfrak{q}^{n+1} M \cap D_i &= \mathfrak{q}^{n+1} D_i \\
&= (x_1, ..., x_{d_i})^{n+1} D_i + (x_{d_i+1}, ..., x_d)\mathfrak{q}^n D_i \\
&\subseteq (x_1, ..., x_{d_i})^{n+1} D_i + (x_{d_i+1}, ..., x_d) M_i \\
&= (x_1, ..., x_{d_i})^{n+1} D_i,
\end{aligned}$$

với mọi $i = 1, ..., t$. □

Mệnh đề 3.3.2. *Giả sử R là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay địa phương. Cho $\mathcal{F} : M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_t$ là một lọc của $\mathcal{F}(M)$ và $\mathfrak{q}$ là iđêan tham số tách biệt của M đối với lọc $\mathcal{F}$. Gọi $\mathcal{D} : M = D_0 \supset D_1 \supset ... \supset D_t = H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ là lọc chiều của M. Khi đó, M là môđun Cohen-Macaulay dãy khi và chỉ khi $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) = 0$ với mọi $n \geq n_0 = \max_{i=0,...,t} \ell(D_i/M_i)$.*

Chứng minh. N. T. Cường-H. L. Trường [13, Theorem 4.1], M là một môđun Cohen-Macaulay dãy khi và chỉ khi $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) = 0$ với mọi $n \gg 0$. Do vậy chỉ cần chứng minh $H^{ad}_{\mathfrak{q};M}(n) = 0$ với mọi $n \geq n_0 = \max_{i=0,...,t} \ell(D_i/M_i)$ nếu M là một môđun Cohen-Macaulay dãy. Ký hiệu $\mathfrak{q}_i = (x_1, ..., x_i)$ với $i = 1, ..., d$. Theo Bổ đề 3.3.1, với mọi $n \geq n_0$ ta có

$$\begin{aligned}
\ell(M/\mathfrak{q}^{n+1}M) &= \ell(M/D_1 + \mathfrak{q}^{n+1}M) + \ell(D_1/\mathfrak{q}^{n+1}M \cap D_1) \\
&= \ell(M/D_1 + \mathfrak{q}^{n+1}M) + \ell(D_1/\mathfrak{q}^{n+1}_{d_1} D_1) \\
&\;\;... \\
&= \sum_{i=0}^{t-1} \ell(D_i/D_{i+1} + \mathfrak{q}^{n+1}_{d_i} D_i) = \sum_{i=0}^{t-1} \ell(\mathcal{D}_i/\mathfrak{q}^{n+1}_{d_i} \mathcal{D}_i),
\end{aligned}$$

trong đó $\mathcal{D}_i = D_i/D_{i+1}$ với mọi $i = 0, ..., t-1$. Mặt khác, theo Bổ đề 3.1.6 ta có

$$\begin{aligned}
\operatorname{adeg}_{d_i}(\mathfrak{q}; M) &= e_0(\mathfrak{q}; M_i) \\
&= e_0(\mathfrak{q}_{d_i}; M_i) \\
&= e_0(\mathfrak{q}_{d_i}; D_i) = e_0(\mathfrak{q}_{d_i}; \mathcal{D}_i),
\end{aligned}$$

trong đó đẳng thức cuối được suy ra bởi Bổ đề 1.4.2, với mọi $i = 0, ..., t-1$. Lưu ý, $\mathcal{D}_i$ là môđun Cohen-Macaulay, nên theo Bổ đề 3.1.6 với mọi $n \geq n_0$ ta có

$$\begin{aligned} H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) &= \ell(M/\mathfrak{q}^{n+1}M) - \sum_{i=0}^{t} \operatorname{adeg}_{d_i}(\mathfrak{q}; M)\binom{n+d_i}{d_i} \\ &= \sum_{i=0}^{t-1} \ell(\mathcal{D}_i/\mathfrak{q}_{d_i}^{n+1}\mathcal{D}_i) - \sum_{i=0}^{t} e_0(\mathfrak{q}_{d_i}; \mathcal{D}_i)\binom{n+d_i}{d_i} \\ &= \sum_{i=0}^{t-1} H^{ad}_{\mathfrak{q}_{d_i},\mathcal{D}_i}(n) = 0. \end{aligned}$$

□

Theo Mệnh đề 3.3.2, chúng ta lần nữa nhận lại được kết quả của N. T. Cường-H. L. Trường [13, Theorem 4.1].

Hệ quả 3.3.3. *Cho $\mathfrak{q}$ là iđêan tham số tách biệt của M. Khi đó các phát biểu sau là tương đương:*
(i) M là một môđun Cohen-Macaulay dãy.
(ii) $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) = 0$ với mọi $n \geq 0$.

Phần tiếp theo của tiết này, chúng tôi quan tâm đến tính không âm của hàm $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n)$ khi M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy. Trước hết, ta cần kết quả sau.

Bổ đề 3.3.4. *Cho $\mathfrak{q}$ là iđêan tham số tách biệt của M đối với một lọc $\mathcal{F}$. Khi đó, luôn tồn tại hệ tham số tách biệt $x_1, x_2, .., x_d$ của M đối với lọc $\mathcal{F}$ sao cho $\mathfrak{q} = (x_1, x_2, ..., x_d)$ và x_1 là phần tử bề mặt của M đối với iđêan $\mathfrak{q}$.*

Chứng minh. Hiển nhiên theo Chú ý 1.4.4(ii) và Bổ đề 2.2.3. □

Khác với Định lý 3.2.3, kết quả sau đây cho ta một giá trị cụ thể của n_0 được xác định theo $r = \operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M))$ và $I(\mathcal{F}, M)$.

Định lý 3.3.5. *Cho M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy, $\mathcal{F}$ là lọc Cohen-Macaulay suy rộng của M và $\mathfrak{q}$ là một iđêan tham số tách biệt của M đối với lọc $\mathcal{F}$. Đặt $r = \operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M))$. Khi đó,*

$$H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) = \ell(M/\mathfrak{q}^n M) - \sum_{i=0}^{d} \binom{n+i}{i} \operatorname{adeg}_i(\mathfrak{q}; M) \geq 0$$

với mọi $n \geq r + \binom{r+d-1}{d-1} I(\mathcal{F}, M) + d.$

Chứng minh. Ta có $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n)$ là một đa thức với mọi $n > r$ và có dạng sau

$$\begin{aligned} H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) &= \sum_{i=0}^{d-1} \binom{n+i}{i} \Big((-1)^{d-i} e_{d-i}(\mathfrak{q}; M) - \operatorname{adeg}_i(\mathfrak{q}; M) \Big) \\ &\quad + (-1)^d e_d(\mathfrak{q}; M) - \operatorname{adeg}_0(\mathfrak{q}; M) \\ &= \sum_{i=0}^{d} \binom{n+i}{i} \Big((-1)^{d-i} e_{d-i}(\mathfrak{q}; M/H^0_{\mathfrak{m}}(M)) - \operatorname{adeg}_i(\mathfrak{q}; M/H^0_{\mathfrak{m}}(M)) \Big). \end{aligned}$$

Đẳng thức cuối có được bởi Bổ đề 1.4.2 và Hệ quả 3.1.7. Do đó, $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) = H^{ad}_{\mathfrak{q},M/H^0_{\mathfrak{m}}(M)}(n)$ với mọi $n > r$. Theo Bổ đề 1.3.6 và Bổ đề 2.1.12, có thể giả thiết thêm rằng $H^0_{\mathfrak{m}}(M) = 0$. Theo Bổ đề 3.3.4, iđêan $\mathfrak{q}$ sinh bởi hệ tham số tách biệt $x_1, ..., x_d$ của M đối với lọc $\mathcal{F}$ sao cho $x = x_1$ là phần tử bề mặt của M đối với iđêan $\mathfrak{q}$. Do đó x là phần tử chính quy của M theo Chú ý 1.4.4(*iii*). Đặt $\mathfrak{a} = (x_2, \ldots, x_d)$. Cố định $Q \in \operatorname{Assh}_R(M/\mathfrak{a}M)$, ta có M_Q là một môđun Cohen-Macaulay dãy chiều $d-1$ do Bổ đề 2.1.4. Thêm vào đó, $\mathfrak{a}R_Q$ là iđêan tham số tách biệt của M_Q. Do đó,

$$\ell(M_Q/(\mathfrak{a}^{n+1}R_Q)M_Q) = \sum_{i=0}^{d-1} \binom{n+i}{i} \operatorname{adeg}_i(\mathfrak{a}R_Q; M_Q)$$

với mọi $n \geq 0$ theo Hệ quả 3.3.3. Khi đó,

$$\begin{aligned} \ell(M/(x, \mathfrak{q}^{n+1})M) &= \ell(M/(x, \mathfrak{a}^{n+1})M) \\ &\geq e_0(x; M/\mathfrak{a}^{n+1}M) \\ &= \sum_{Q \in \operatorname{Assh}_R(M/\mathfrak{a}M)} \ell(M_Q/\mathfrak{a}^{n+1}R_Q M_Q) e_0(x; R/Q) \\ &= \sum_{Q \in \operatorname{Assh}_R(M/\mathfrak{a}M)} \left(\sum_{i=0}^{d-1} \binom{n+i}{i} \operatorname{adeg}_i(\mathfrak{a}R_Q; M_Q) \right) e_0(x; R/Q) \\ &= \sum_{i=0}^{d-1} \binom{n+i}{i} \left(\sum_{Q \in \operatorname{Assh}_R(M/\mathfrak{a}M)} \operatorname{adeg}_i(\mathfrak{a}R_Q; M_Q) e_0(x; R/Q) \right) \end{aligned}$$

Hơn nữa, $\sum_{Q\in \mathrm{Assh}_R(M/\mathfrak{a}M)} \mathrm{adeg}_i(\mathfrak{a}R_Q; M_Q)e_0(x; R/Q)) = \mathrm{adeg}_{i+1}(\mathfrak{q}; M)$ theo Bổ đề 3.1.12. Suy ra

$$\ell(M/(x, \mathfrak{q}^{n+1})M) \geq \sum_{i=0}^{d-1} \binom{n+i}{i} \mathrm{adeg}_{i+1}(\mathfrak{q}; M)$$

với mọi $n \geq 0$. Do đó,

$$g(n) = \ell(M/(x, \mathfrak{q}^{n+1})M) - \sum_{i=0}^{d-1} \binom{n+i}{i} \mathrm{adeg}_{i+1}(\mathfrak{q}; M) \geq 0$$

với mọi $n \geq 0$. Hơn nữa, $g(n)$ là một đa thức với mọi $n \geq \mathrm{reg}\, G_{\mathfrak{q}}(M/xM)$. Theo Bổ đề 1.3.7($ii$), ta có $r \geq \mathrm{reg}\, G_{\mathfrak{q}}(M/xM)$. Vì vậy, $g(n)$ là một đa thức với $n > r$ có dạng

$$g(n) = \sum_{i=0}^{d-1} \binom{n+d-1-i}{d-1-i} \Big((-1)^i e_i(\mathfrak{q}; M/xM) - \mathrm{adeg}_{d-i}(\mathfrak{q}; M)\Big).$$

Chúng ta xét 2 trường hợp sau.

Trường hợp 1: $g(n) = 0$. Do x vừa là một phần tử chính quy vừa là một phần tử bề mặt của M đối với $\mathfrak{q}$, theo Bổ đề 1.4.5, ta có

$$(-1)^i e_i(\mathfrak{q}; M) = (-1)^i e_i(\mathfrak{q}; M/xM) = \mathrm{adeg}_{d-i}(\mathfrak{q}; M)$$

với mọi $i = 0, ..., d-1$. Theo Bổ đề 3.2.1, ta có M là một môđun Cohen-Macaulay dãy. Do đó, $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) = 0$ với mọi $n > r$.

Trường hợp 2: $g(n) \neq 0$. Xét dãy khớp sau

$$0 \to (\mathfrak{q}^{k+1}M : x)/\mathfrak{q}^k M \to M/\mathfrak{q}^k M \xrightarrow{.x} M/\mathfrak{q}^{k+1}M \to M/(x, \mathfrak{q}^{k+1})M \to 0$$

với mọi $k \geq 0$. Chú ý rằng $\ell((\mathfrak{q}^{k+1}M : x)/\mathfrak{q}^k M) = 0$ với mọi $k > r$ theo Bổ đề 3.2.2 và $g(n) \geq 0$ với mọi số nguyên dương n. Ta có

$$\begin{aligned}
\ell(M/\mathfrak{q}^{n+1}M) &= \sum_{k=0}^{n} \ell(\mathfrak{q}^k M/\mathfrak{q}^{k+1}M)\\
&= \sum_{k=0}^{n} \ell(M/(x, \mathfrak{q}^{k+1})M) - \sum_{k=0}^{r} \ell(\mathfrak{q}^{k+1}M : x/\mathfrak{q}^k M)\\
&\geq \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=1}^{d} \binom{k+i-1}{i-1} \mathrm{adeg}_i(\mathfrak{q}; M) \right) - \sum_{k=0}^{r} \ell(\mathfrak{q}^{k+1}M : x/\mathfrak{q}^k M)\\
&= (\sum_{i=1}^{d} \sum_{k=0}^{n} \binom{k+i-1}{i-1} \mathrm{adeg}_i(\mathfrak{q}; M)) - \sum_{k=0}^{r} \ell(\mathfrak{q}^{k+1}M : x/\mathfrak{q}^k M)\\
&= \sum_{i=1}^{d} \binom{n+i}{i} \mathrm{adeg}_i(\mathfrak{q}; M) - \sum_{k=0}^{r} \ell(\mathfrak{q}^{k+1}M : x/\mathfrak{q}^k M),
\end{aligned}$$

với mọi $n > r$. Do đó,

$$H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) \geq -\sum_{k=0}^{r} \ell(\mathfrak{q}^{k+1}M : x/\mathfrak{q}^k M).$$

Mặt khác, $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) - H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n-1) = g(n) - \ell(\mathfrak{q}^{n+1}M : x/\mathfrak{q}^n M)$ với mọi $n \geq 0$. Suy ra $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) - H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n-1) = g(n) \geq 0$ với mọi $n > r$. Dễ thấy, $g(n)$ là đa thức có bậc cao nhất là $d-2$ với mọi $n > r$. Vì vậy có nhiều nhất $d-2$ giá trị của n thỏa mãn $g(n) = 0$. Cho nên $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) \geq H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n-1)$ với mọi $n > r$ và có nhiều nhất $d-2$ giá trị của n sao cho $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) = H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n-1)$. Theo Bổ đề 2.1.14,

$$\sum_{k=0}^{r} \ell(\mathfrak{q}^{k+1}M : x/\mathfrak{q}^k M) \leq \sum_{k=0}^{r} \binom{k+d-2}{d-2} I(\mathcal{F}, M) = \binom{r+d-1}{d-1} I(\mathcal{F}, M).$$

Kéo theo $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) \geq -\binom{r+d-1}{d-1} I(\mathcal{F}, M)$ với mọi $n > r$ và có nhiều nhất $d-2$ giá trị của n sao cho $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) = H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n-1)$. Điều đó có nghĩa là $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n)$ nhận giá trị không âm với mọi $n \geq r + \binom{r+d-1}{d-1} I(\mathcal{F}, M) + d$. □

Định lý sau là kết quả chính của tiết này.

Định lý 3.3.6. *Cho M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy và $\mathcal{F}$ là một lọc Cohen-Macaulay suy rộng của M. Khi đó, tồn tại hằng số N chỉ phụ thuộc vào $\mathcal{F}$ và M sao cho* $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) \geq 0$ *với mọi iđêan tham số tách biệt* $\mathfrak{q}$ *của M đối với lọc $\mathcal{F}$ và mọi số nguyên $n \geq N$.*

Chứng minh. Theo Định lý 3.3.5, ta có $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) \geq 0$ với mọi $n \geq n_0(r)$, trong đó $r = \operatorname{reg}(G_{\,q}(M))$ và $n_0(r) = r + \binom{r+d-1}{d-1} I(\mathcal{F}, M) + d$. Mặt khác, theo Định lý 2.2.6, tồn tại hằng số $C = C(\mathcal{F})$ (độc lập với $\mathfrak{q}$) sao cho $r \leqslant C$. Do đó, $n_0(r) \leqslant n_0(C)$. Cuối cùng, bằng cách chọn $N = n_0(C)$, ta có điều cần chứng minh. □

Chương 4

Hệ số Hilbert và môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy

Chương 4 được chia làm 3 tiết. Tiết đầu tiên, chúng tôi đưa ra khái niệm đa thức hiệu chỉnh Hilbert-Samuel $P^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n)$ và xét tập các đa thức hiệu chỉnh $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(M)$, là tập tất cả các đa thức hiệu chỉnh Hilbert-Samuel, trong đó $\mathfrak{q}$ chạy trên tập các iđêan tham số tách biệt của M đối với một lọc $\mathcal{F}$. Tiếp theo, chúng tôi đưa ra một vài tính chất cơ bản của đa thức hiệu chỉnh Hilbert-Samuel và phát biểu lại các kết quả đã biết, cần thiết cho 2 tiết sau, thông qua đa thức này. Tiết 2 và 3 dành riêng để chứng minh kết quả chính quan trọng nhất sau đây của luận án.

Định lý chính. *Giả sử R là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay địa phương. Khi đó, M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy khi và chỉ khi tập các đa thức $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}(M)$ là hữu hạn.*

Cụ thể, tiết 2 với M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy chúng tôi đưa ra một chặn đều các hệ số của đa thức hiệu chỉnh Hilbert-Samuel $P^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n)$ bằng cách dựa vào kết quả chặn đều chỉ số chính quy đã chứng minh ở Chương 2 và tính không âm của hàm hiệu chỉnh Hilbert-Samuel $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n)$ đã có ở Chương 3. Tiết cuối dành riêng để chứng minh điều kiện đủ của Định lý chính, với việc xây dựng một tập hợp các hệ tham số từ một hệ tham số cho trước. Chương 4 được viết dựa trên bài báo [11]

4.1 Đa thức hiệu chỉnh Hilbert-Samuel

Cho $\mathfrak{q}$ là một iđêan tham số của M. Theo Bổ đề 1.4.1, hàm hiệu chỉnh Hilbert-Samuel $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n)$ là một đa thức với $n \geq \operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M))$. Khi đó, đa thức này được gọi là *đa thức hiệu chỉnh Hilbert-Samuel*, được ký hiệu và xác định như sau.

$$P^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) = \sum_{i=0}^{d}((-1)^i e_i(\mathfrak{q}; M) - \operatorname{adeg}_{d-i}(\mathfrak{q}; M))\binom{n+d-i}{d-i}.$$

Với quy ước bậc của đa thức 0 là -1. Khi đó bậc của đa thức này được xác định như sau.

Mệnh đề 4.1.1. *Cho $\mathcal{F}$ là một lọc của $\mathcal{F}(M)$ và $\mathfrak{q}$ là một iđêan tham số tách biệt của M đối với lọc $\mathcal{F}$. Khi đó*

$$\deg(P^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n)) = \max\{-1, d_{i-1} - 1 \mid D_{i-1}/D_i \textit{ không là môđun Cohen-Macaulay với } i = 1, ..., t\},$$

trong đó $\mathcal{D} : M = D_0 \supset D_1 \supset ... \supset D_t = H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ là lọc chiều của M và $d_i = \dim D_i$ với mọi $i = 0, ..., t$.

Chứng minh. Nếu M là một môđun Cohen-Macaulay dãy thì đa thức $P^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) = 0$ theo Mệnh đề 3.3.2. Do đó, $\deg(P^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n)) = -1$. Giả sử M không là môđun Cohen-Macaulay dãy. Đặt

$$j = \min\{i - 1 \mid D_{i-1}/D_i \text{ không là môđun Cohen-Macaulay}, i = 1, ..., t\}.$$

Ta có M/D_j là một môđun Cohen-Macaulay dãy và M/D_{j+1} không là môđun Cohen-Macaulay dãy. Gọi $x_1, ..., x_d$ là hệ tham số tách biệt của M đối với lọc $\mathcal{F}$ sao cho $\mathfrak{q} = (x_1, ..., x_d)$. Ký hiệu $\mathfrak{q}_{d_j} = (x_1, ..., x_{d_j})$. Lưu ý, M/D_j là một môđun Cohen-Macaulay dãy, cho nên theo Bổ đề 3.3.1 và Mệnh đề 3.3.2 với n đủ lớn ta có

$$\begin{aligned}
P^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) &= \ell(M/\mathfrak{q}^{n+1}M) - \sum_{i=0}^{t} e_0(\mathfrak{q}; D_i)\binom{n+d_i}{d_i} \\
&= P^{ad}_{\mathfrak{q},M/D_j}(n) + \ell(D_j/\mathfrak{q}^{n+1}D_j) - \sum_{i=j}^{t} e_0(\mathfrak{q}; D_i)\binom{n+d_i}{d_i} \\
&= \ell(D_j/\mathfrak{q}^{n+1}_{d_j}D_j) - \sum_{i=j}^{t} e_0(\mathfrak{q}_{d_j}; D_i)\binom{n+d_i}{d_i} \\
&= P^{ad}_{\mathfrak{q}_{d_j},D_j}(n).
\end{aligned}$$

Mặt khác, hệ số bậc cao nhất của $P^{ad}_{\mathfrak{q}_{d_j},D_j}(n)$ là

$$(-1)e_1(\mathfrak{q}_{d_j};D_j) - \mathrm{adeg}_{d_j-1}(\mathfrak{q}_{d_j};D_j) = (-1)e_1(\mathfrak{q};D_j/D_{j+1}).$$

Lưu ý D_j/D_{j+1} không là môđun Cohen-Macaulay. Do đó, $(-1)e_1(\mathfrak{q};D_j/D_{j+1}) \neq 0$ theo [14, Theorem 2.1]. Vậy, $\deg(P^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n)) = \deg(P^{ad}_{\mathfrak{q}_{d_j},D_j}(n)) = d_j - 1$. □

Ký hiệu 4.1.2. Cho $\mathcal{F}$ là một lọc của M. Khi đó, tập tất cả các đa thức hiệu chỉnh Hilbert-Samuel $P^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n)$, trong đó $\mathfrak{q}$ chạy toàn bộ iđêan tham số tách biệt của M đối với lọc $\mathcal{F}$, được ký hiệu là $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(M)$.

Chú ý 4.1.3. (*i*) Cho $\mathcal{D}$ là lọc chiều của M. Khi đó, $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}(M) \subseteq \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(M)$ với mọi lọc $\mathcal{F}$ của M.
(*ii*) Tập các đa thức $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(M)$ hữu hạn khi và chỉ khi các hệ số của đa thức $P^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n)$ bị chặn đều với mọi iđêan tham số tách biệt $\mathfrak{q}$ của M đối với lọc $\mathcal{F}$.

Kết quả sau là hệ quả trực tiếp của Mệnh đề 3.3.2.

Hệ quả 4.1.4. *Giả sử R là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay địa phương. Cho $\mathcal{F}$ là một lọc của $\mathcal{F}(M)$. Khi đó, M là môđun Cohen-Macaulay dãy khi và chỉ khi $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(M) = \{0\}$.*

Nhắc lại, một dãy $\underline{x} = x_1, ..., x_s$ trong $\mathfrak{m}$ được gọi là d-*dãy* trên M

$$(x_1, ..., x_{i-1})M : x_i x_k = (x_1, ..., x_{i-1})M : x_k$$

với mọi $i = 1, ..., s$ và $k \geq i$. Dãy $\underline{x}$ được gọi là dd-*dãy* trên M nếu với mọi số nguyên dương $n_1, ..., n_s$ và mọi $i = 1, ..., s-1$ $x_1^{n_1}, ..., x_s^{n_s}$ là d-dãy trên M, $x_1^{n_1}, ..., x_i^{n_i}$ là một d-dãy trên $M/(x_{i+1}^{n_{i+1}}, ..., x_s^{n_s})M$. Lưu ý, khái niệm d-dãy được giới thiệu bởi C. Huneke [18] và đã trở thành công cụ hữu dụng trong nhiều chủ đề của đại số giao hoán. Khái niệm dd-dãy được giới thiệu bởi N. T. Cường-Đ. T. Cường (xem[8]) và có nhiều ứng dụng trong việc nghiên cứu môđun Cohen-Macaulay dãy và suy rộng dãy.

Theo N. T. Cường-Đ. T. Cường [7, Theorem 6.2], nếu iđêan tham số $\mathfrak{q}$ sinh bởi một dd-dãy thì các hệ số của đa thức Hilbert-Samuel của môđun M đối với $\mathfrak{q}$ có thể tính toán một cách cụ thể. Kết quả này được phát biểu lại như sau.

Bổ đề 4.1.5. *Cho M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy với lọc Cohen-Macaulay suy rộng $\mathcal{F} : M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_t$ và $\mathfrak{q} = (x_1, ..., x_d)$ là iđêan tham số của M. Giả sử $x_1, ..., x_d$ là dd-dãy trên M. Khi đó,*

$$P_M^{ad}(n) = \sum_{i=1}^{d} a_i \binom{n+d-i}{d-i},$$

trong đó $a_d = 0$,

$$a_{d-d_k} = \sum_{j=1}^{d_k} \binom{d_k - 1}{j-1} \ell(H_{\mathfrak{m}}^j(M/M_k))$$

với $k = 1, ..., t$ và

$$a_{d-i} = \sum_{j=1}^{i} \binom{i-1}{j-1} \ell(H_{\mathfrak{m}}^j(M/M_k))$$

với $d_k < i < d_{k-1}$.

Ví dụ dưới đây chỉ ra tập các đa thức hiệu chỉnh $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(M)$ có thể là vô hạn.

Ví dụ 4.1.6. Cho $R = k[[X, Y, Z]]$ là vành các chuỗi lũy thừa hình thức trên trường k. Xét R-môđun

$$M = k[[X, Y, Z]] \oplus (k[[X, Y, Z]]/(Z^2)).$$

Đặt $D_1 = k[[X, Y, Z]]/(Z^2)$, ta có $\dim M = 3, \dim D_1 = 2$ và lọc chiều của M có dạng $M \supset D_1 \supset 0$. Dễ dàng kiểm tra M/D_1 và D_1 là các môđun Cohen-Macaulay. Do đó, M là môđun Cohen-Macaulay dãy. Với m là số nguyên dương, dễ thấy $\mathfrak{q} = (X^m, Y^m, Z)$ là iđêan tham số của M. Do M/D_1 là môđun Cohen-Macaulay cho nên theo Bổ đề 3.1.6 ta có

$$\begin{aligned} P_{\mathfrak{q},M}^{ad}(n) &= \ell(M/\mathfrak{q}^{n+1}M) - e_0(\mathfrak{q}; M)\binom{n+3}{3} - e_0(\mathfrak{q}; D_1)\binom{n+2}{2} \\ &= \ell(M/(\mathfrak{q}^{n+1}M + D_1)) + \ell(D_1/\mathfrak{q}^{n+1}D_1) - e_0(\mathfrak{q}; M/D_1)\binom{n+3}{3} - e_0(\mathfrak{q}; D_1)\binom{n+2}{2} \\ &= \ell(D_1/\mathfrak{q}^{n+1}D_1) - e_0(\mathfrak{q}; D_1)\binom{n+2}{2}. \end{aligned}$$

Thực tế $e_0(\mathfrak{q}; D_1) = 2m^2$ và $\ell(D_1/\mathfrak{q}^{n+1}D_1) = m^2(n+1)^2$. Cho nên $P_{\mathfrak{q},M}^{ad}(n) = -m^2(n+1)$. Thêm vào đó, $0 = e_1(\mathfrak{q}; M/D_1) = (-1)e_1(\mathfrak{q}; M) - e_0(\mathfrak{q}; D_1)$ theo [14, Theorem 2.1]. Từ đó suy ra

$$P_{\mathfrak{q},M}^{ad}(n) = e_2(\mathfrak{q}; M)\binom{n+1}{1} - e_3(\mathfrak{q}; M)$$

với mọi n đủ lớn. Hơn nữa, hệ số $e_2(\mathfrak{q}; M) = -m^2$. Lưu ý, $\mathfrak{q}$ không là hệ tham số tách biệt của M đối với bất kỳ lọc nào trong $\mathcal{F}(M)$ (chứng minh tương như trong Ví dụ 3.2.5). Tuy nhiên, $\mathfrak{q}$ là iđêan tham số tách biệt của M đối với lọc $\mathcal{F} : M = M_0 \supset 0$. Do đó, tập các đa thức $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(M)$ là vô hạn.

4.2 Tính hữu hạn của tập đa thức hiệu chỉnh Hilbert-Samuel trong môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy

Đầu tiên, chúng tôi đưa ra một chặn trên cho hàm $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n)$ trong bổ đề sau.

Bổ đề 4.2.1. *Cho M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy với lọc Cohen-Macaulay suy rộng $\mathcal{F} : M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_t$ và $\mathfrak{q}$ là iđêan tham số tách biệt của M đối với lọc $\mathcal{F}$. Khi đó*

$$H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) \leq \sum_{i=0}^{t-1} \binom{n+d_i-1}{d_i-1} I(M_i/M_{i+1}) + \ell(M_t) - \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(M))$$

với mọi $n \geq 0$.

Chứng minh. Chúng ta chứng minh quy nạp theo t. Nếu $t = 1$ thì M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng và $\mathcal{F} : M = M_0 \supset M_1$. Theo [25, Lemma 1.1], ta có

$$\begin{aligned} \ell(M/\mathfrak{q}^{n+1}M) &\leq \ell(M/\mathfrak{q}^{n+1}M + M_1) + \ell(M_1) \\ &\leq \binom{n+d}{d} e_0(\mathfrak{q}; M) + \binom{n+d-1}{d-1} I(M/M_1) + \ell(M_1), \end{aligned}$$

với mọi $n \geq 0$. Vì vậy, $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) \leq \binom{n+d-1}{d-1} I(M/M_1) + \ell(M_1) - \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(M))$ theo Bổ đề 3.1.6. Giả sử $t > 1$. Từ dãy khớp

$$0 \to \frac{\mathfrak{q}^{n+1}M \cap M_1}{\mathfrak{q}^{n+1}M_1} \longrightarrow \frac{M_1}{\mathfrak{q}^{n+1}M_1} \longrightarrow \frac{M}{\mathfrak{q}^{n+1}M} \longrightarrow \frac{M}{\mathfrak{q}^{n+1}M + M_1} \to 0,$$

theo quy nạp ta có

$$\begin{aligned} \ell(M/\mathfrak{q}^{n+1}M) &\leq \ell(M/\mathfrak{q}^{n+1}M + M_1) + \ell(M_1/\mathfrak{q}^{n+1}M_1) \\ &\leq e_0(\mathfrak{q}; M_0)\binom{n+d}{d} + \binom{n+d-1}{d-1} I(M/M_1) + \ell(M_1/\mathfrak{q}^{n+1}M_1) \\ &\leq \sum_{i=0}^{t-1} \binom{n+d_i}{d_i} e_0(\mathfrak{q}; M_i) + \sum_{i=0}^{t-1} \binom{n+d_i-1}{d_i-1} I(M_i/M_{i+1}) + \ell(M_t). \end{aligned}$$

Do đó, $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) \le \sum_{i=0}^{t-1} \binom{n+d_i-1}{d_i-1} I(M_i/M_{i+1}) + \ell(M_t) - \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(M))$. $\square$

Hệ quả 4.2.2. *Với $M, \mathcal{F}$, $\mathfrak{q}$ như trong Bổ đề 4.2.1, ta có*

$$0 \le (-1)e_1(\mathfrak{q}; M) - \operatorname{adeg}_{d-1}(\mathfrak{q}; M) \le I(M/M_1).$$

Chứng minh. Lưu ý, với n đủ lớn thì $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) = P^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n)$ là một đa thức. Theo Bổ đề 4.2.1, ta có

$$\begin{aligned} P^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) &= \binom{n+d-1}{d-1}((-1)e_1(\mathfrak{q}; M) - \operatorname{adeg}_{d-1}(\mathfrak{q}; M)) + \text{ bậc thấp hơn} \\ &\le \binom{n+d-1}{d-1} I(M/M_1) + \text{ bậc thấp hơn.} \end{aligned}$$

Do đó, $(-1)e_1(\mathfrak{q}; M) - \operatorname{adeg}_{d-1}(\mathfrak{q}; M) \le I(M/M_1)$. Mặt khác theo Định lý 3.3.6 hàm $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) \ge 0$ với n đủ lớn. Vì vậy, $0 \le (-1)e_1(\mathfrak{q}; M) - \operatorname{adeg}_{d-1}(\mathfrak{q}; M)$. $\square$

Nhắc lại, cho M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy với lọc Cohen-Macaulay suy rộng $\mathcal{F}$. Khi đó, tại Định lý 2.2.6 trong Chương 2 của luận án, chúng tôi đã chỉ ra tồn tại hằng số $C_{\mathcal{F}}$ sao cho chỉ số chính quy

$$\operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M)) \le C_{\mathcal{F}} = (3I(\mathcal{F}, M))^{d!} - 2I(\mathcal{F}, M)$$

với mọi iđêan tham số tách biệt $\mathfrak{q}$ của M đối với lọc $\mathcal{F}$. Sau đây, chúng tôi sẽ chỉ ra hệ số đa thức $P^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n)$ là bị chặn đều thông qua hằng số $C = C_{\mathcal{F}}$.

Định lý 4.2.3. *Cho M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy chiều $d \ge 2$, $\mathcal{F}$ là một lọc Cohen-Macaulay suy rộng của M và $\mathfrak{q}$ là hệ tham số tách biệt của M đối với lọc $\mathcal{F}$. Khi đó,*

(1) $| e_1(\mathfrak{q}; M) + \operatorname{adeg}_{d-1}(\mathfrak{q}; M) | \le I(M/M_1)$;

(2) $| (-1)^i e_i(\mathfrak{q}; M) - \operatorname{adeg}_{d-i}(\mathfrak{q}; M) |$
$\le 2^{i-1} \left((C+1)^{d-1} I(\mathcal{F}, M) + d + C + 2\right)^{i-1} I(\mathcal{F}, M)$ *với* $2 \le i \le d-1$;

(3) $| e_d(\mathfrak{q}; M) | \le 2^{d-1} \left((C+1)^{d-1} I(\mathcal{F}, M) + d + C + 2\right)^{d-1} I(\mathcal{F}, M)$.

Chứng minh. Trước hết, (1) là hiển nhiên theo Hệ quả 4.2.2. Chúng ta sẽ chứng minh quy nạp theo d. Đặt $r = \operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(M))$. Nếu $d = 2$ thì theo Bổ đề 1.4.1, ta có

$$\ell(M/\mathfrak{q}^{n+1}M) = e_0(\mathfrak{q}; M)\binom{n+2}{2} + (-1)e_1(\mathfrak{q}; M)(n+1) + e_2(\mathfrak{q}; M),$$

với mọi $n \geq r$. Suy ra

$$e_2(\mathfrak{q}; M) = H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) + \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(M)) + (e_1(\mathfrak{q}; M) + \operatorname{adeg}_1(\mathfrak{q}; M))\binom{n+1}{1}.$$

Khi đó với mọi $n \geq r + \binom{r+1}{1} I(\mathcal{F}, M) + d$, theo Định lý 3.3.5, Bổ đề 4.2.1 và Hệ quả 4.2.2 ta có

$$\begin{aligned} \mid e_2(\mathfrak{q}; M) \mid &\leq \sum_{i=0}^{t} \binom{n+d_i-1}{d_i-1} I(M_i/M_{i+1}) + I(M/M_1)(n+1) \\ &\leq 2(n+1)^{2-1} I(\mathcal{F}, M). \end{aligned}$$

Theo Định lý 2.2.6 ta có $C \geq r$. Do đó, ta có thể chọn

$$n = (C+1)^{2-1} I(\mathcal{F}, M) + d + C + 1 \geq r + \binom{r+1}{1} I(\mathcal{F}, M) + d.$$

Khi đó,

$$\begin{aligned} \mid e_2(\mathfrak{q}; M) \mid &\leq 2^{2-1}\left((C+1)^{2-1} I(\mathcal{F}, M) + d + C + 1 + 1\right) I(\mathcal{F}, M) \\ &= 2^{d-1}\left((C+1)^{d-1} I(\mathcal{F}, M) + d + C + 2\right)^{d-1} I(\mathcal{F}, M). \end{aligned}$$

Giả sử $d > 2$ và các phát biểu đúng cho $d-1$. Theo Bổ đề 1.4.2,

$$(-1)^i e_i(\mathfrak{q}; M) = (-1)^i e_i(\mathfrak{q}; M/H^0_{\mathfrak{m}}(M))$$

với mọi $i = 0, ..., d-1$ và $(-1)^d e_d(\mathfrak{q}; M) = (-1)^d e_d(\mathfrak{q}; M/H^0_{\mathfrak{m}}(M)) + \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(M))$. Hơn nữa, do

$$I(\mathcal{F}/H^0_{\mathfrak{m}}(M), M/H^0_{\mathfrak{m}}(M)) + \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(M)) = I(\mathcal{F}, M)$$

(theo Bổ đề 2.1.12), dẫn đến $C_{\mathcal{F}} \geq C_{\mathcal{F}/H^0_{\mathfrak{m}}(M)}$. Vì vậy, chúng ta có thể giả thiết thêm $H^0_{\mathfrak{m}}(M) = 0$. Khi đó theo Bổ đề 3.3.4, luôn tồn tại hệ tham số tách biệt $\underline{x} = x_1, ..., x_d$ của M đối với lọc $\mathcal{F}$ sao cho $\mathfrak{q} = (\underline{x})$ và $x = x_1$ là phần tử bề mặt của M đối với $\mathfrak{q}$. Theo Hệ quả 2.1.11, M/xM là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy với lọc Cohen-Macaulay suy rộng

$$\mathcal{F}/xM : M/xM \supset (M_1 + xM)/xM \supset ... \supset (M_{s-1} + xM)/xM \supset 0,$$

trong đó $s = t-1$ nếu $d_{t-1} = 1$ và $s = t$ trong các trường hợp còn lại. Đặt $C_x = C_{\mathcal{F}/xM}$. Khi đó, theo quy nạp ta có

$$\begin{aligned} &\mid (-1)^i e_i(\mathfrak{q}; M/xM) - \operatorname{adeg}_{d-1-i}(\mathfrak{q}; M/xM) \mid \\ &\quad \leq 2^{i-1}\left((C_x+1)^{d-2} I(\mathcal{F}/xM, M/xM) + (d-1) + C_x + 2\right)^{i-1} I(\mathcal{F}/xM, M/xM), \end{aligned}$$

với mọi $i = 2, ..., d-2$ và

$$\begin{aligned}&|(-1)^{d-1} e_{d-1}(\mathfrak{q}; M/xM)|\\ &\leq 2^{d-1}\left((C_x+1)^{d-1} I(\mathcal{F}/xM, M/xM) + d - 1 + C_x + 2\right)^{d-1} I(\mathcal{F}/xM, M/xM).\end{aligned}$$

Do $H^0_{\mathfrak{m}}(M) = 0$ nên x là một phần tử chính quy của M theo Chú ý 1.4.4(*iii*). Do đó, theo Bổ đề 1.4.5 ta có

$$e_i(\mathfrak{q}; M) = e_i(\mathfrak{q}; M/xM) \qquad (a)$$

với mọi $i = 0, ..., d-1$. Mặt khác, $\mathcal{D}/xM \in \mathcal{F}(M/xM)$ theo Bổ đề 3.1.4(*ii*). Hơn nữa, theo Bổ đề 3.1.8,

$$\operatorname{adeg}_{d-i}(\mathfrak{q}; M) = \operatorname{adeg}_{d-1-i}(\mathfrak{q}; M/xM) \qquad (b)$$

với mọi $i = 0, ..., d-2$. Tiếp tục sử dụng Hệ quả 2.1.11, ta có

$$I(\mathcal{F}/xM, M/xM) \leq I(\mathcal{F}, M), \qquad (c)$$

Dẫn đến

$$C_x = C_{\mathcal{F}/xM} \leq C_{\mathcal{F}} = C. \qquad (d)$$

Từ (a), (b), (c) và (d), ta có

$$\begin{aligned}&|(-1)^i e_i(\mathfrak{q}; M) - \operatorname{adeg}_{d-i}(\mathfrak{q}; M)| = |(-1)^i e_i(\mathfrak{q}; M/xM) - \operatorname{adeg}_{d-1-i}(\mathfrak{q}; M/xM)|\\ &\leq 2^{i-1}\left((C_x+1)^{d-2} I(\mathcal{F}/xM, M/xM) + (d-1) + C_x + 2\right)^{i-1} I(\mathcal{F}/xM, M/xM)\\ &\leq 2^{i-1}\left((C+1)^{d-1} I(\mathcal{F}, M) + d + C + 2 + I(\mathcal{F}, M)\right)^{i-1} I(\mathcal{F}, M)\end{aligned}$$

với mọi $i = 2, ..., d-2$. Chúng ta xét d_{t-1} trong 2 trường hợp sau đây.

Trường hợp 1: $d_{t-1} > 1$. Ta có ngay $\operatorname{adeg}_1(\mathfrak{q}; M) = 0$ theo Bổ đề 3.1.6. Dẫn đến

$$\begin{aligned}&|(-1)^{d-1} e_{d-1}(\mathfrak{q}; M) - \operatorname{adeg}_1(\mathfrak{q}; M)| = |(-1)^{d-1} e_{d-1}(\mathfrak{q}; M/xM)|\\ &\leq 2^{(d-1)-1}\left((C_x+1)^{d-2} I(\mathcal{F}/xM, M/xM) + (d-1) + C_x + 2\right)^{(d-1)-1} I(\mathcal{F}/xM, M/xM)\\ &\leq 2^{d-1}\left((C+1)^{d-1} I(\mathcal{F}, M) + d + C + 2\right)^{d-1} I(\mathcal{F}, M).\end{aligned}$$

Đẳng thức cuối có được từ (c) và (d).

Trường hợp 2: $d_{t-1} = 1$. Đặt $\overline{M} = M/M_{t-1}$ và $\overline{M}_i = M_i/M_{t-1}$ với mọi $i = 1, ..., t-2$.

Dễ thấy, $\overline{M}$ là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy,

$$\overline{\mathcal{F}} : \overline{M} \supset \overline{M}_1 \supset ... \supset \overline{M}_{t-2} \supset 0$$

là một lọc Cohen-Macaulay suy rộng của $\overline{M}$ và $\mathfrak{q}$ là iđêan tham số tách biệt $\overline{M}$ đối với lọc $\overline{\mathcal{F}}$. Theo Bổ đề 1.4.2 và Bổ đề 3.1.6 thì

$$(-1)^{d-1}e_{d-1}(\mathfrak{q}, M) - \operatorname{adeg}_1(\mathfrak{q}, M) = (-1)^{d-1}e_{d-1}(\mathfrak{q}, \overline{M}).$$

Áp dụng Định lý 2.2.6 cho môđun $\overline{M}$, ta có

$$\operatorname{reg}(G_{\mathfrak{q}}(\overline{M})) \leq \overline{C} = (3I(\overline{\mathcal{F}}, \overline{M}))^{d!} - 2I(\overline{\mathcal{F}}, \overline{M}).$$

Khi đó, do $I(\mathcal{F}; M) = I(\overline{\mathcal{F}}, \overline{M}) + I(M_{t-2}/M_{t-1}) + \ell(M_t)$ cho nên $\overline{C} \leq C$. Chọn $y_1, ..., y_d$ là hệ tham số tách biệt của $\overline{M}$ đối với lọc $\overline{\mathcal{F}}$ sao cho $\mathfrak{q} = (y_1, ..., y_d)$ và $y = y_1$ là một phần tử bề mặt của $\overline{M}$ đối với $\mathfrak{q}$. Vậy, theo quy nạp ta có

$$\begin{aligned}
&| (-1)^{d-1}e_{d-1}(\mathfrak{q}; M) - \operatorname{adeg}_1(\mathfrak{q}; M) | \\
&\qquad =| (-1)^{d-1}e_{d-1}(\mathfrak{q}; \overline{M}) | \\
&\qquad =| (-1)^{d-1}e_{d-1}(\mathfrak{q}; \overline{M}/y\overline{M}) | \\
&\qquad \leq 2^{d-2}\left((\overline{C}_y + 1)^{d-1}I(\overline{\mathcal{F}}/y\overline{M}, \overline{M}/y\overline{M}) + d - 1 + \overline{C}_y + 2\right)^{d-1} I(\overline{\mathcal{F}}/y\overline{M}, \overline{M}/y\overline{M}) \\
&\qquad \leq 2^{d-1}\left((\overline{C} + 1)^{d-1}I(\overline{\mathcal{F}}, \overline{M}) + d + \overline{C} + 2\right)^{d-1} I(\overline{\mathcal{F}}, \overline{M}) \\
&\qquad \leq 2^{d-1}\left((C + 1)^{d-1}I(\mathcal{F}, M) + d + C + 2\right)^{d-1} I(\mathcal{F}, M).
\end{aligned}$$

Do đó, (2) được chứng minh. Tiếp theo, do

$$\ell(M/\mathfrak{q}^{n+1}) = \sum_{i=0}^{d}(-1)^i e_i(\mathfrak{q}; M)\binom{n+d-i}{d-i}$$

với mọi $n \geq r$ (theo Bổ đề 1.4.1), ta có

$$(-1)^d e_d(\mathfrak{q}; M) = H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) - \sum_{i=1}^{d-1}\left((-1)^i e_i(\mathfrak{q}; M) - \operatorname{adeg}_{d-i}(\mathfrak{q}; M)\right)\binom{n+d-i}{d-i}.$$

Với mọi $n \geq r + \binom{r+1}{1} I(\mathcal{F}, M) + d$, một lần nữa sử dụng Định lý 3.3.5 và Bổ đề

4.2.1, ta có

$$\begin{aligned}
|\, e_d(\mathfrak{q}; M) \,| &\leq \sum_{i=0}^{t-1} \binom{n+d_i-1}{d_i-1} I(M_i/M_{i+1}) + \binom{n+d-1}{d-1} I(M/M_1) \\
&+ \sum_{i=2}^{d-1} |\, (-1)^i e_i(\mathfrak{q}; M) - \operatorname{adeg}_{d-i}(\mathfrak{q}; M) \,| \binom{n+d-i}{d-i} \\
&\leq \sum_{i=0}^{t} (n+1)^{d-1} I(M_i/M_{i+1}) + (n+1)^{d-1} I(\mathcal{F}, M) \\
&+ \sum_{i=2}^{d-1} 2^{i-1} \left((C+1)^{d-1} I(\mathcal{F}, M) + d + C + 2\right)^{i-1} I(\mathcal{F}, M)(n+1)^{d-i}.
\end{aligned}$$

Chọn

$$n = (C+1)^{d-1} I(\mathcal{F}, M) + d + C + 1 \geq r + \binom{r+d-1}{d-1} I(\mathcal{F}, M) + d.$$

Cuối cùng,

$$\begin{aligned}
|\, e_d(\mathfrak{q}; M) \,| &\leq 2\left((C+1)^{d-1} I(\mathcal{F}, M) + d + C + 2\right)^{d-1} I(\mathcal{F}, M) \\
&+ \{\sum_{i=2}^{d-1} 2^{i-1} \left((C+1)^{d-1} I(\mathcal{F}, M) + d + C + 2\right)^{d-1} I(\mathcal{F}, M)\} \\
&= 2^{d-1} \left((C+1)^{d-1} I(\mathcal{F}, M) + d + C + 2\right)^{d-1} I(\mathcal{F}, M).
\end{aligned}$$

Phát biểu (3) được chứng minh. □

Định lý 4.2.4. *Cho M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy và $\mathcal{F}$ là một lọc Cohen-Macaulay suy rộng của M. Khi đó tập các đa thức $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(M)$ là hữu hạn.*

Chứng minh. Nếu $d = 1$ thì M là một môđun Cohen-Macaulay dãy. Do đó, tập đa thức hiệu chỉnh $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(M) = \{0\}$ theo Hệ quả 4.1.4. Giả sử $d \geq 2$. Lưu ý, đa thức hiệu chỉnh Hilbert-Samuel $P^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(M)$ có dạng

$$P^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) = \sum_{i=1}^{d} \binom{n+d-i}{d-i} \left((-1)^i e_i(\mathfrak{q}; M) - \operatorname{adeg}_{d-i}(\mathfrak{q}; M)\right).$$

Theo Định lý 4.2.3, tồn tại các hằng số C_i với mọi $i = 1, ..., d$ sao cho

$$|\, (-1)^i e_i(\mathfrak{q}; M) - \operatorname{adeg}_{d-i}(\mathfrak{q}; M) \,| \leq C_i,$$

$$|\, (-1)^d e_d(\mathfrak{q}; M) - \operatorname{adeg}_0(\mathfrak{q}; M) \,| \leq |\, (-1)^d e_d(\mathfrak{q}; M)) \,| + \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(M)) \leq C_d + \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(M)).$$

Do đó, theo Chú ý 4.1.3(ii) ta có điều cần chứng minh. □

4.3 Đặc trưng môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy qua hệ số Hilbert

Trước hết ta xét tập các hệ tham số sau.

Ký hiệu 4.3.1. Cho $\underline{x} = x_1, ..., x_d$ là hệ tham số tách biệt của M. Ký hiệu

$$\mathcal{S}(\underline{x}; M) = \{\{x_1^{n_1}, ..., x_d^{n_d}\} \mid n_i > 0 \text{ và } x_i^{n_i}, ..., x_d^{n_d} \text{ là hệ tham số tách biệt của } M/(x_1^{n_1}, ..., x_{i-1}^{n_{i-1}})M \text{ với mọi } i = 1, ..., d\},$$

với quy ước $x_0 = 0$.

Giả sử $d \geq 2$. Khi đó, nếu $\{x_1^{n_1}, ..., x_{d-1}^{n_{d-1}}, x_d^{n_d}\} \in \mathcal{S}(\underline{x}; M)$ thì $\{x_1^{n_1}, ..., x_{d-1}^{n_{d-1}}, x_d^{n_d+k}\} \in \mathcal{S}(\underline{x}; M)$ với mọi số nguyên dương k. Do đó, nếu $\mathcal{S}(\underline{x}; M) \neq \emptyset$ thì $\mathcal{S}(\underline{x}; M)$ là tập có vô hạn phần tử.

Bổ đề 4.3.2. *Giả sử $d = \dim M \geq 2$ và $\underline{x} = x_1, ..., x_d$ là hệ tham số tách biệt của M sao cho $\mathcal{S}(\underline{x}; M) \neq \emptyset$. Lấy $\{y_1, ..., y_d\} \in \mathcal{S}(\underline{x}; M)$. Khi đó, những phát biểu sau là đúng.*

(*i*) *$y_1, ..., y_d$ là một d-dãy trên M.*

(*ii*) *Nếu $\{z_2, ..., z_d\} \in \mathcal{S}(y_2, ..., y_d; M/y_1M)$ thì $\{y_1, z_2, ..., z_d\} \in \mathcal{S}(\underline{x}; M)$.*

(*iii*) *Nếu M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy thì $\mathcal{S}(\underline{x}; M)$ luôn chứa một dd-dãy trên M.*

Chứng minh. (*i*) Vì $\{y_1, ..., y_d\} \in \mathcal{S}(\underline{x}; M)$ cho nên $y_i, ..., y_d$ là hệ tham số tách biệt của $M/(y_1, ..., y_{i-1})M$. Cho nên $(y_i, ..., y_d)H^0_{\mathfrak{m}}(M/(y_1, ..., y_{i-1})M) = 0$. Do đó,

$$(y_1, ..., y_{i-1})M : y_i = H^0_{\mathfrak{m}}(M/(y_1, ..., y_{i-1})M) = \bigcup_{n=1}^{\infty}((y_1, ..., y_{i-1})M : (y_i, ..., y_d)^n),$$

với mọi $i = 1, ..., d$. Hơn nữa, $y_1, ..., y_d$ là dãy lọc chính quy của M. Vì vậy, $y_1, ..., y_d$ là một d-dãy theo [35, Theorem 1.1(*vii*)].

(*ii*) Ta chỉ cần chứng minh $y_1, z_2, ..., z_d$ là một hệ tham số tách biệt của M. Thật vậy, do $\{y_1, ..., y_d\} \in S(\underline{x}; M)$ nên $y_1, ..., y_d$ là hệ tham số tách biệt của M. Lưu ý, với mọi $d - 1$ số nguyên dương $n_2, ..., n_d$ luôn có $y_1, y_2^{n_2} ..., y_d^{n_d}$ là hệ tham số tách biệt của M. Do đó, $y_1, z_2, ..., z_d$ là hệ tham số tách biệt của M.

(iii) Theo Bổ đề 1.1.7, $\mathcal{S}(\underline{x}; M)$ chứa hệ tham số tốt. Giả sử $\{y_1, ..., y_d\} \in \mathcal{S}(\underline{x}; M)$ và $y_1, ..., y_d$ là một hệ tham số tốt. Khi đó, theo [7, Theorem 3.8, Corollary 3.9] ta có $y_1^{n_1}, ..., y_d^{n_d}$ là một dd-dãy trên M với $n_1, ..., n_d$ đủ lớn. Hơn nữa, do $\{y_1, ..., y_d\} \in \mathcal{S}(\underline{x}; M)$ và $y_1^{n_1}, ..., y_d^{n_d}$ là một dd-dãy trên M nên ta có $\{y_1^{n_1}, ..., y_d^{n_d}\} \in \mathcal{S}(\underline{x}; M)$. □

Cho $\mathcal{F} : M = M_0 \supset M_1 \supset ... \supset M_t$ là một lọc trong $\mathcal{F}(M)$ và $x_1, ..., x_d$ là hệ tham số tách biệt của M đối với lọc $\mathcal{F}$. Với $d_j \leq k < d_{j-1}$, đặt $\overline{M}_i = (M_i + (x_1, ..., x_k)M)/(x_1, ..., x_k)M$ với mọi $i = 0, ..., t$. Khi đó, ký hiệu

$$\mathcal{F}/(x_1, ..., x_k)M : \overline{M} = \overline{M}_0 \supset \overline{M}_1 \supset ... \supset \overline{M}_s = 0$$

là lọc của $\overline{M}$, trong đó $s = j$ nếu $k = d_j$ và $s = j + 1$ trong các trường hợp còn lại. Hơn nữa, $x_{k+1}, ..., x_d$ là một hệ tham số tách biệt của $\overline{M}$ đối với lọc $\mathcal{F}/(x_1, ..., x_k)M$. Bổ đề sau chỉ ra tồn tại một hệ tham số $x_1, ..., x_d$ sao cho $\mathcal{F}/(x_1, ..., x_k)M \in \mathcal{F}(\overline{M})$.

Bổ đề 4.3.3. *Giả sử R là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay địa phương. Khi đó tồn tại một hệ tham số tách biệt $\underline{x} = x_1, ..., x_d$ của M sao cho $\mathcal{F}/(x_1, ..., x_i)M \in \mathcal{F}(M/(x_1, ..., x_i)M)$ với mọi $i = 0, ..., d - 1$ và mọi lọc $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(M)$. Hơn nữa, $\mathcal{S}(\underline{x}; M) \neq \emptyset$.*

Chứng minh. Gọi $\mathcal{D} : M = D_0 \supset D_1 \supset ... \supset D_t = H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ là lọc chiều của M. Khi đó, do R là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay địa phương nên tập các iđêan nguyên tố $\mathcal{A}(M)$ trong Chú ý 3.1.10 là hữu hạn. Theo Định lý tránh nguyên tố, luôn chọn được $x_1 \in \mathrm{Ann}_R(D_t) \setminus \bigcup_{\mathfrak{p}\in\mathcal{A}(M)} \mathfrak{p}$. Hơn nữa, $\mathcal{D}/x_1M \in \mathcal{F}(M/x_1M)$ theo Bổ đề 3.1.11(i). Giả sử đã chọn được $x_1, ..., x_i$ sao cho $\mathcal{D}/(x_1, ..., x_i)M \in \mathcal{F}(M/(x_1, ..., x_i)M)$. Ký hiệu k là số nguyên thỏa mãn $d_k < i + 1 \leq d_{k-1}$. Giả sử $\mathrm{Ann}_R(D_k) \subseteq \mathfrak{p}$ với một vài $\mathfrak{p} \in \mathcal{A}(M/(x_1, ..., x_i)M)$. Kéo theo $\mathrm{Ann}_R(D_k) + x_1 + ... + x_{d_k} \subseteq \mathfrak{p}$. Dẫn đến $0 < \dim R/\mathfrak{p} < \dim R/(\mathrm{Ann}_R(D_k) + x_1 + ... + x_{d_k}) = 0$, vô lý. Vì vậy luôn chọn được $x_{i+1} \in \mathrm{Ann}_R(D_k)\setminus \bigcup_{\mathfrak{p}\in\mathcal{A}(M/(x_1,...,x_i)M)} \mathfrak{p}$. Do đó, chọn được hệ tham tham số tách biệt $\underline{x} = x_1, ..., x_d$ của M. Mặt khác theo Bổ đề 3.1.4(ii), ta có $\mathcal{F}/(x_1, ..., x_i)M \in \mathcal{F}(M/(x_1, ..., x_i)M)$ với mọi $i = 0, ..., d-1$ và mọi lọc $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(M)$. Tiếp theo, chúng ta sẽ chứng minh tồn tại các số nguyên dương $n_1, ..., n_d$ sao cho $\{x_1^{n_1}, ..., x_d^{n_d}\} \in \mathcal{S}(\underline{x}; M)$ bằng quy nạp theo d. Nếu $d = 1$ thì $\{x_1^{n_1}\} \in \mathcal{S}(\underline{x}; M)$ với mọi số nguyên dương n_1. Xét trường hợp $d > 1$. Cố định số nguyên dương n_1. Khi đó, $\mathcal{D}/x_1^{n_1}M \in \mathcal{F}(M/x_1^{n_1}M)$ theo chứng minh trên. Hơn nữa, $x_2, ..., x_d$ là hệ tham số tách biệt của $M/x_1^{n_1}M$ đối với lọc $\mathcal{D}/x_1^{n_1}M$. Vì vậy, theo giả thiết quy nạp tồn tại $d - 1$ số nguyên dương $n_2, ..., n_d$ sao cho $x_{i+1}^{n_{i+1}}, ..., x_d^{n_d}$ là hệ tham số tách biệt của

$M/(x_1^{n_1}, x_2^{n_2}, ..., x_i^{n_i})M$ với mọi $i = 2, ..., d$. Thêm vào đó, $x_1^{n_1}, ..., x_d^{n_d}$ luôn là hệ tham số tách biệt của M. Vì vậy, $\{x_1^{n_1}, ..., x_d^{n_d}\} \in \mathcal{S}(\underline{x}; M)$. □

Bổ đề 4.3.4. *Giả sử R là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay địa phương và $d = \dim M \geq 2$. Cho $\mathcal{F} : M = M_0 \supset M_1 \supset ... \supset M_t$ là một lọc của $\mathcal{F}(M)$. Khi đó, $H^1_{\mathfrak{m}}(M/M_{i+1})$ là các môđun có độ dài hữu hạn với mọi $i = 0, 1, ..., t-1$ và $d_i \geq 2$.*

Chứng minh. Trước hết, ta có $\mathrm{Ass}_R(M_i/M_{i+1}) \subseteq \mathrm{Assh}_R(M_i/M_{i+1}) \cup \{\mathfrak{m}\}$ theo Bổ đề 3.1.3. Vì vậy, theo [15, Lemm 3.1], các môđun $H^1_{\mathfrak{m}}(M_i/M_{i+1})$ có độ dài hữu hạn với mọi $i = 0, ..., t-1$ và $d_i \geq 2$. Ta sẽ chứng minh quy nạp theo i. Nếu $i = 0$ thì ta đã có $H^1_{\mathfrak{m}}(M/M_1)$ là môđun có độ dài hữu hạn. Giả sử $i > 0$, từ dãy khớp ngắn

$$0 \longrightarrow M_i/M_{i+1} \longrightarrow M/M_{i+1} \longrightarrow M/M_i \longrightarrow 0,$$

ta có dãy khớp dài các môđun đối đồng điều địa phương

$$... \longrightarrow H^1_{\mathfrak{m}}(M_i/M_{i+1}) \longrightarrow H^1_{\mathfrak{m}}(M/M_{i+1}) \longrightarrow H^1_{\mathfrak{m}}(M/M_i) \longrightarrow ....$$

Nếu $d_i \geq 2$ thì $d_{i-1} > d_i \geq 2$. Theo giả thiết quy nạp, môđun $H^1_{\mathfrak{m}}(M/M_i)$ có độ dài hữu hạn. Do đó, $H^1_{\mathfrak{m}}(M/M_{i+1})$ có độ dài hữu hạn. □

Cũng giống như môđun Cohen-Macaulay suy rộng, N. T. Cường -Đ. T. Cường [7, Proposition 3.5] đưa ra đặc trưng của môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy qua các đối đồng điều địa phương như sau.

Bổ đề 4.3.5. *M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy khi và chỉ khi tồn tại lọc các môđun con $\mathcal{F} : M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_s$ sao cho $\ell(M_s) < \infty$ và $H^j_{\mathfrak{m}}(M/M_i)$ có độ dài hữu hạn với mọi $i = 1, ..., s$ và $j = 0, ..., \dim M_{i-1} - 1$.*

Với $\underline{x} = x_1, ..., x_d$ như trong Bổ đề 4.3.3, ta ký hiệu

$$\wedge_{\underline{x}}(M) = \bigcup_{\underline{y} \in \mathcal{S}(\underline{x}; M)} \wedge(\underline{y}; M),$$

trong đó $\wedge(\underline{y}; M) = \{| \ (-1)^i e_i(\underline{y}; M) - \mathrm{adeg}_{d-i}(\underline{y}; M) \ | \quad | \ \text{với mọi } i = 1, ..., d-1\}$. Định lý sau chỉ ra khi nào thì $\wedge_{\underline{x}}(M)$ là một tập hữu hạn.

Định lý 4.3.6. *Giả sử R là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay địa phương và $d = \dim M \geq 2$. Cho $\mathcal{D} : M = D_0 \supset D_1 \supset ... \supset D_t = H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ là lọc chiều của M và $\underline{x} = x_1, ..., x_d$ như trong Bổ đề 4.3.3. Khi đó, nếu $\wedge_{\underline{x}}(M)$ là tập hữu hạn thì*

$$\mathfrak{m}^{\ell} H^j_{\mathfrak{m}}(M/D_{i+1}) = 0$$

với mọi $j = 1, ..., d_i - 1, d_i \geq 2$ và $i = 0, ..., t-1$, trong đó $\ell = \max \wedge_{\underline{x}}(M)$.

Chứng minh. Lấy $\underline{y} = \{y_1, ..., y_d\} \in \mathcal{S}(\underline{x}; M)$. Theo Bổ đề 1.4.2 và Hệ quả 3.1.7, ta có

$$e_i(\underline{y}; M) = e_i(\underline{y}; M/H^0_{\mathfrak{m}}(M)),$$

$$\mathrm{adeg}_{d-i}(\underline{y}; M) = \mathrm{adeg}_{d-i}(\underline{y}; M/H^0_{\mathfrak{m}}(M)),$$

với mọi $i = 0, ..., d-1$. Hay $\wedge_{\underline{x}}(M) = \wedge_{\underline{x}}(M/H^0_{\mathfrak{m}}(M))$. Vì vậy, có thể giả thiết thêm là $H^0_{\mathfrak{m}}(M) = 0$. Chúng ta sẽ chứng minh quy nạp theo chiều d của M. Nếu $d = 2$ thì

$$\wedge(\underline{y}; M) = \{|\ (-1)e_1(\underline{y}; M) - \mathrm{adeg}_1(\underline{y}; M)\ |\}.$$

Mặt khác, M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy theo Bổ đề 4.3.4. Khi đó, theo Bổ đề 4.3.2(iii) thì $S(\underline{x}; M)$ chứa z_1, z_2 là một dd-dãy trên M. Theo Bổ đề 4.1.5,

$$(-1)e_1(z_1, z_2; M/D_1) - \mathrm{adeg}_1(z_1, z_2; M) = \ell(H^1_{\mathfrak{m}}(M/D_1)).$$

Do đó, $\ell(H^1_{\mathfrak{m}}(M/D_1)) \in \wedge_{\underline{x}}(M)$. Vì vậy, $\mathfrak{m}^{\ell} H^1_{\mathfrak{m}}(M/D_1) = 0$. Giả sử $d > 2$. Theo Bổ đề 4.3.2(i), ta có $y, \overline{z}$ là một d-dãy. Do đó, y là phần tử bề mặt của M đối với iđêan $(y, \underline{z})$ (theo [35, Theorem 1.1(v)]). Theo Bổ đề 1.4.5 và Bổ đề 3.1.8,

$$e_i(y, \underline{z}; M) = e_i(\underline{z}; M/yM),$$

$$\mathrm{adeg}_{d-i}(y, \underline{z}; M) = \mathrm{adeg}_{d-i-1}(\underline{z}; M/yM)$$

với mọi $i = 0, ..., d-2$. Suy ra $\wedge_{y_2,...,y_d}(M/yM) \subseteq \wedge_{\underline{x}}(M)$. Đặt $\overline{M} = M/yM$ và $\overline{D}_i = (D_i + yM)/yM$ với mọi $i = 0, ..., s-1$, trong đó $s = t$ nếu $d_{t-1} > 1$ và $s = t-1$ trong các trường hợp còn lại. Theo Bổ đề 4.3.3, ta có $\mathcal{D}/yM : \overline{M} = \overline{D}_0 \supset ... \supset \overline{D}_s = 0$ là một lọc của $\mathcal{F}(M/yM)$. Gọi $\mathcal{D}' : \overline{M} = D'_0 \supset ... \supset D'_s$ là lọc chiều của $\overline{M}$. Khi đó, theo giả thiết quy nạp, với mọi $j = 1, ..., \dim D'_i - 1$ và $\dim D'_i = d_i - 1 \geq 2$, ta có

$$\mathfrak{m}^{\ell'} H^j_{\mathfrak{m}}(\overline{M}/D'_{i+1}) = 0,$$

trong đó $\ell' = \max \wedge_{y_2,...,y_d}(\overline{M}) \leq \ell = \max \wedge_{\underline{x}}(M)$. Do $\ell(D'_{i+1}/\overline{D}_{i+1}) < \infty$, ta có $H^j_{\mathfrak{m}}(\overline{M}/D'_{i+1}) \cong H^j_{\mathfrak{m}}(\overline{M}/\overline{D}_{i+1}))$ với mọi $j \geq 1$ và $i = 0, ..., s-1$. Hơn nữa, do $\overline{M}/\overline{D}_{i+1} \cong M/(yM + D_{i+1})$ ta có

$$\mathfrak{m}^{\ell} H^j_{\mathfrak{m}}(M/(yM + D_{i+1})) = 0$$

với mọi $d_i \geq 3$ và $j = 1, ..., d_i - 2$. Theo Bổ đề 4.3.3 thì y là một phần tử lọc chính quy của M nên nó là M/D_{i+1}-chính quy với mọi $i = 0, ..., t-1$. Từ dãy khớp ngắn

$$0 \longrightarrow \frac{M}{D_{i+1}} \xrightarrow{.y^n} \frac{M}{D_{i+1}} \longrightarrow \frac{M}{D_{i+1} + y^n M} \longrightarrow 0,$$

ta có dãy khớp dài

$$\dots \longrightarrow H^{j-1}_{\mathfrak{m}}(\frac{M}{D_{i+1}+y^nM}) \longrightarrow H^j_{\mathfrak{m}}(\frac{M}{D_{i+1}}) \xrightarrow{.y^n} H^j_{\mathfrak{m}}(\frac{M}{D_{i+1}}) \longrightarrow \dots$$

với mọi số nguyên dương n. Do đó,

$$\mathfrak{m}^{\ell}(0 :_{H^j_{\mathfrak{m}}(M/D_{i+1})} y^n) = 0$$

với mọi $j = 2, ...d_i - 1$ và $d_i \geq 3$. Tuy nhiên, do n và ℓ là độc lập cho nên

$$\mathfrak{m}^{\ell} H^j_{\mathfrak{m}}(M/D_{i+1}) = 0$$

với mọi $j = 2, ...d_i - 1$ và $d_i \geq 3$. Mặt khác, theo Bổ đề 4.3.4 $H^1_{\mathfrak{m}}(M/D_{i+1})$ là các môđun có độ dài hữu hạn với mọi i sao cho $d_i \geq 2$. Do đó M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy theo Bổ đề 4.3.5. Do $\mathcal{S}(\underline{x}; M)$ luôn chứa một dd-dãy trên M (theo Bổ đề 4.3.2(*iii*)), nên giả sử $\mathfrak{q}$ là iđêan tham số của M sinh bởi một dd-dãy trong $\mathcal{S}(\underline{x}; M)$. Khi đó, theo Bổ đề 4.1.5 ta có

$$(-1)^{d-d_{i+1}} e_{d-d_{i+1}}(\mathfrak{q}; M) - \operatorname{adeg}_{d_{i+1}}(\mathfrak{q}; M) = a_{d-d_{i+1}} = \sum_{j=1}^{d_{i+1}} \binom{d_{i+1}-1}{j-1} \ell(H^j_{\mathfrak{m}}(M/D_{i+1})).$$

Vì vậy $\ell(H^1_{\mathfrak{m}}(M/D_{i+1})) \leq \ell$ với mọi i sao cho $d_i \geq 2$. Định lý được chứng minh. □

Định lý sau đưa ra một đặc trưng của môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy.

Định lý 4.3.7. *Giả sử R là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay địa phương. Khi đó, các mệnh đề sau là tương đương:*

(*i*) *M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy.*

(*ii*) *Với mọi $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(M)$, tập các đa thức $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(M)$ là hữu hạn.*

(*iii*) *Tồn tại $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(M)$, tập các đa thức $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(M)$ là hữu hạn.*

(*iv*) *Tập các đa thức $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}(M)$ là hữu hạn.*

Chứng minh. (*i*) ⇒ (*ii*) được suy ra từ Định lý 4.2.3.
(*ii*) ⇒ (*iii*) là hiển nhiên.
(*iii*) ⇒ (*iv*) được suy ra từ Chú ý 4.1.3(*i*).
(*iv*) ⇒ (*i*). Lấy $\underline{x} = x_1, ..., x_d$ như Bổ đề 4.3.3. Khi đó, do tập $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}(M)$ hữu hạn nên tập $\wedge_{\underline{x}}(M)$ cũng hữu hạn. Vì vậy, theo Định lý 4.3.6 và Bổ đề 4.3.5 ta có M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy. □

Chứng minh Định lý chính. Với M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy, theo $(i) \Rightarrow (iv)$ của Định lý 4.3.7 thì đa thức hiệu chỉnh Hilbert-Samuel $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}(M)$ là hữu hạn. Ngược lại, với $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}(M)$ hữu hạn thì M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy theo $(iv) \Rightarrow (i)$ của Định lý 4.3.7. $\square$

Kết luận của luận án

Kết quả chính quan trọng nhất của luận án là chứng minh định lý sau.

Định lý chính. *Giả sử R là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay địa phương. Khi đó, M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy khi và chỉ khi tập các đa thức $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}(M)$ là hữu hạn.*

Để chứng minh được kết quả trên chúng tôi cần thực hiện hai bước sau.

1. Với M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy và $\mathcal{F}$ là một lọc Cohen-Macaulay suy rộng của M, đưa ra một chặn đều chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford cho môđun phân bậc liên kết $G_{\mathfrak{q}}(M)$ với mọi iđêan tham số tách biệt của M đối với lọc $\mathcal{F}$.

2. Với $\mathfrak{q}$ là iđêan tham số tách biệt của M thì luôn tồn tại số n_0 sao cho hàm hiệu chỉnh Hilbert-Samuel $H^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n) \geq 0$ với mọi $n \geq n_0$. Hơn nữa, nếu M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy thì số n_0 độc lập với cách chọn hệ tham số $\mathfrak{q}$.

Một số hướng phát triển của luận án

1. Tìm một chặn chặt cho chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford ở Định lý 2.2.6, trước hết là đối với các môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy chiều nhỏ.

2. Tìm các chặn chặt cho hệ số của đa thức hiệu chỉnh Hilbert-Samuel $P^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n)$ khi M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy.

3. Đặc trưng lớp iđêan tham $\mathfrak{q}$ số sao cho hệ số của đa thức $P^{ad}_{\mathfrak{q},M}(n)$ bị chặn đều.

4. Tiếp tục nghiên cứu ứng dụng của tập hệ tham số $\mathcal{S}(\underline{x}; M)$ (xem Ký hiệu 4.3.1) vào các chủ đề khác.

Danh mục công trình của tác giả liên quan đến luận án

1. N. T. Cuong, N. T. Long and H. L. Truong (2015), "Uniform bounds in Sequentially generalized Cohen - Macaulay Modules", Vietnam J. Math. **43**, 343-356.

2. N. T. Long (2015), "On adjusted Hilbert-Samuel function", Acta Math. Vietnamica. **40**, 463-477.

3. N. T. Cuong, N. T. Long and H. L. Truong, "Hilbert coefficients in sequentially generalized Cohen-Macaulay module", preprint, 19 pp.

Các kết quả trong luận án được báo cáo và thảo luận tại

- Xêmina Đại số và Lý thuyết số-Viện Toán học.
- Hội nghị nghiên cứu sinh của Viện Toán học, 10/2009; 10/2010; 10/2011; 10/2012.
- Hội nghị Hình học - Đại số - Tô pô, Thái nguyên, 11/2011.
- Hội thảo liên kết Nhật Bản - Việt Nam lần thứ 7, Quy Nhơn, 12/2011.
- Hội thảo liên kết Nhật Bản - Việt Nam lần thứ 8, Tuần Châu, 3/2016.

Tài liệu tham khảo

Tiếng Việt

[1] Đ.T. Cường, *dd-dãy, đặc trưng Euler-Poincaré và ứng dụng vào nghiên cứu cấu trúc một số lớp mở rộng của môđun Cohen-Macaulay*, Luận án Tiến sĩ, Đại học Quốc gia Hà Nội, 2007.

[2] C. H. Linh *Chặn trên chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của môđun phân bậc liên kết*, Luận án Tiến sĩ, Đại học Huế, 2006.

Tiếng Anh

[3] I. M. Aberbach, L. Ghezzi and Huy Tai Ha, *Homology multipliers and the relation type of parameter ideals*, Pacific Journal of Mathematics. **226** (2006), 1-40.

[4] D. Bayer and D. Mumford, *What can be computed on algebraic geometry?*, Computational Algebraic Geometry and Commutative algebra, Proceedings. Cortona (1991)(D. Eisenbud and L. Robbiano. Eds), Cambridge University Press (1993), 1-48.

[5] M. Brodmann and R. Y. Sharp, *Local cohomology an algebraic introduction with geometric applications*, Cambridge University Press (1998).

[6] N. T. Cuong and D. T. Cuong, *On sequentially Cohen-Macaulay modules*, Kodai Math. J. **30** (2007) 409-428.

[7] N. T. Cuong and D. T. Cuong, *On the structure of sequentially generalized Cohen-Macaulay modules*, J. Algebra **317** (2007), 714-742.

[8] N. T. Cuong and D. T. Cuong, *dd-sequences and partial Euler- Poincaré characteristics of Koszul complex*, J. Algebra Appl. **6** (2007), 207-231.

[9] N. T. Cuong, S. Goto and H. L. Truong, *Hilbert coefficients and sequentially Cohen-Macaulay module*, J. Pure Appl. Algebra, **217** (2013), 470-480.

[10] N. T. Cuong, N. T. Long and H. L. Truong, *Uniform bounds in Sequentially generalized Cohen - Macaulay Modules*, Vietnam J. Math. **43** (2015), 343-356.

[11] N. T. Cuong, N. T. Long and H. L. Truong, *Hilbert coefficients in sequentially generalized Cohen-Macaulay module*, preprint, 19 pp.

[12] N. T. Cuong and L. T. Nhan, *Pseudo Cohen-Macaulay and pseudo generalized Cohen-Macaulay modules*, J. Algebra, **267** (2003), 156-177.

[13] N. T. Cuong and H. L. Truong, *Parametric decomposition of powers of parameter ideals and sequentially Cohen-Macaulay modules*, Proc. Amer. Math. Soc., **137** (2009), 19-26.

[14] L. Ghezzi, S. Goto, J. Y. Hong. K. Ozeki, T. T. Phuong, and W. V. Vasconcelos. *Cohen-Macaulayness versus vanishing of the first Hilbert coefficient of parameter ideals*, J. London Math. Soc., **81** (2010), 679-695.

[15] S. Goto and Y. Nakamura, *Multiplicity and tight closures of parameters*, J. Algebra **244** (2001) 302-311.

[16] S. Goto and K. Ozeki, *Uniform bounds for Hilbert coefficients of parameters*, Commutative algebra and its connections to geometry, Contemp. Math., Am. Math. Soc., Providence, RI, **555** (2011), 97-118.

[17] S. Goto and Y. Shimoda, *Parametric decomposition of powers of ideals versus regularity of sequences*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), 929-933.

[18] C. Huneke, *On the symmetric and Rees algebra of an ideal generated by a d-sequence*, J. Algebra **62** (1980), 268-275.

[19] C. Huneke, *Tight closure and its applications*, CBMS Leture Notes 88, American Mathematical society, Providence (1996).

[20] F. Hayasaka and E. Hyry, *A note on the Buchsbaum-Rim function of a parameter module*, Proc. Amer. Math. Soc. **138** (2010), 545-551.

[21] C. Huneke and I. Swanson, Integral Closure of Ideals, Rings, and Modules, London Mathematical Lecture Note Series, Cambridge University Press, Cambridge **336** (2006).

[22] D. Mumford, Lectures on Curves on an Algebraic Surfaces, Princeton Univ. Press, (1966).

[23] C. Lech, *On the associativity formula for multiplicities*, Ark. Mat. **3** (1957), 301-314.

[24] Y. H. Lai, *On the relation type of systems of parameters*, J. Algebra **175** (1995), 339-358.

[25] C. H. Linh and N. V. Trung, *Uniform bounds in generalized Cohen-Macaulay rings*, J. Algebra **304** (2006), 1147-1159.

[26] N. T. Long, *On adjusted Hilbert-Samuel function*, Acta Math. Vietnamica. **40** (2015), 463-477.

[27] A. Ooishi, *Genera and arithmetic genera of commutative rings*, Hiroshima Math. J., **17** (1987), 47-66.

[28] M. Nagata, *Local Rings*, Interscience, New York, (1962).

[29] M. E. Rossi, N. V. Trung and G. Valla, *Castelnuovo-Mumford regularity and extended degree*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003) 1773-1786.

[30] M. E. Rossi and G. Valla *Hilbert functions of Filtered Module*, Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana (2009).

[31] P. Schenzel, *On the dimension filtration and Cohen-Macaulay filtered modules,* Van Oystaeyen, Freddy (ed.), Commutative algebra and algebraic geometry, New York: Marcel Dekker. Lect. Notes Pure Appl. Math., **206** (1999), 245–264.

[32] R. P. Stanley, Combinatorics and Commutative Algebra, Second edition, Birkhäuser Boston (1996).

[33] J. Stücrad and W. Vogel, *Buchsbaum Rings and Applications*, Springer-Verlag Berlin (1986).

[34] N. V. Trung, *Reduction exponent and degree bound for the defining equations of graded rings*, Proc. Amer. Math. Soc **101**(1987), 223-236.

[35] N. V. Trung, *Absolutely superficial sequence*, Math. Proc. Cambrige Phil. Soc, **93** (1983), 35-47.

[36] N. V. Trung, *The Castelnuovo regularity of the Rees algebra and the associated graded ring*, Trans. Amer. Math. Soc. **35** (1998), 2813-2832.

[37] G. Valla, *On the symmetric and Rees algebra of an ideal*, Manuscripta Math, **30** (1980), 239-255.

[38] W. V. Vasconcelos, *The degrees of graded modules*, Lecture Notes in Summer School on Commutative Algebra, Centre de Recerca Matematica, Bellaterra (Spain),**2** (1996) 141-196.

[39] W. V. Vasconcelos, *Computational Methods in Commutative algebra and Algebraic Geometry*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (1998).

[40] H. J. Wang, *Some uniform properties of 2-dimensional local rings*, J. Algebra **188** (1997), 1-15.

[41] H. J. Wang, *The relation type conjecture holds for rings with finite local cohomology*, Comm. Algebra **25** (1997), 785-801.

[42] O. Zanriski and P. Samuel, *Commutative Algebra*, Vol. II, Van Nostrand, New York (1960).

Tiếng Đức

[43] N. T. Cuong, P. Schenzel, N.V. Trung, *Verallgemeinerte Cohen-Macaulay moduln*, Math. Nachr. **85** (1978), 156-177.