VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM
VIỆN TOÁN HỌC

ĐỖ DUY HIẾU

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

PHƯƠNG PHÁP PHỔ CỦA ĐỒ THỊ TRONG MỘT SỐ BÀI TOÁN TỔ HỢP CỘNG TÍNH

Chuyên ngành: Cơ sở toán học cho tin học
Mã số: 9.46.01.10

Hà Nội - 2019

Luận án được hoàn thành tại:

Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam

Người hướng dẫn khoa học:

PGS. TS. Lê Anh Vinh

Phản biện 1: ....
....

Phản biện 2: ....
....

Phản biện 3: ....
....

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm Luận án cấp Viện họp tại Viện Toán học - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam vào hồi ... giờ ngày ... tháng ... năm 2019.

Bảng các kí hiệu

1. Cho p là một số nguyên tố lẻ, $r \geq 2$ là một số tự nhiên và $q = p^r$.

$\|A\|$	là lực lượng của tập hợpA.
$\mathbb{Z}_q$	là vành hữu hạn có q phần tử.
$\mathbb{Z}_q^0$	là tập các phần tử không khả nghịch trên $\mathbb{Z}_q$.
$\mathbb{Z}_q^\times$	là tập các phần tử khả nghịch trên $\mathbb{Z}_q$.
$\mathbb{F}_q$	là trường hữu hạn có q phần tử.
$\mathbb{F}_q^*$	là các phần tử khác 0 của trường hữu hạn $\mathbb{F}_q$.

2. Cho f, g là các hàm số theo biến t.

$g \in o(f)$	có nghĩa là $g(t)/f(t) \to 0$ khi $t \to \infty$.
$f \gg g$	có nghĩa là $g \in o(f)$.
$f \gtrsim g$	có nghĩa là tồn tại hằng số $c > 0,$ sao cho $f \geq cg$ khi t đủ lớn.
$f = \Theta(g)$	có nghĩa là tồn tại các hằng số c_1, $c_2 > 0$ sao cho $c_1 f \leq g \leq c_2 f$ khi t đủ lớn.

3. Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị.

(x, y)	là một cạnh có hướng từ x đến y.
$\{x, y\}$	là một cạnh vô hướng giữa x và y của đồ thị G.

Lời mở đầu

Một bài toán mở cổ điển trong hình học tổ hợp là bài toán về khoảng cách của Erdős [11]. Bài toán yêu cầu chúng ta tìm số các khoảng cách khác nhau tối thiểu được xác định bởi một tập N điểm trên mặt phẳng Euclid. Erdős gọi số khoảng cách tối thiểu này là $g(N)$ và giả thuyết rằng $g(N) \gtrsim \frac{N}{\sqrt{LogN}}$. Dựa trên một khẳng định hình học đơn giản trên đường tròn, ông chứng minh được $g(N) \gtrsim N^{1/2}$. Số mũ $1/2$ đã được cải thiện một cách chậm chạp trong vòng hơn 50 năm qua bởi một loạt các lý luận phức tạp sử dụng công cụ từ nhiều lĩnh vực khác nhau của toán học. Tháng 11 năm 2010, Guth và Katz [13] đã chứng minh được khẳng định gần tối ưu của bài toán này: trong tập N điểm bất kỳ trên mặt phẳng sẽ có $g(N) \gtrsim \frac{N}{LogN}$ khoảng cách phân biệt.

Cùng với bài toán đánh giá lực lượng của tập khoảng cách là rất nhiều bài toán đánh giá lực lượng của các tập hợp cũng được nhiều người quan tâm, như đánh giá lực lượng của tập tích vô hướng, đánh giá tổng - tích, đánh giá lực lượng của tập thể tích khối, đi tìm các hàm nở... Trong Luận án này, chúng tôi sử dụng (n, d, λ) - đồ thị và Bổ đề trộn nở để nghiên cứu các bài toán tổ hợp cộng tính. Những kết quả mới của Luận án được trình bày trong Chương 3 và Chương 4.

Trong Chương 3, chúng tôi sử dụng phương pháp phổ của đồ thị dựa vào (n, d, λ) - đồ thị và Bổ đề trộn nở để nghiên cứu một số bài toán như tập khoảng cách, tập tích, tập thể tích khối, tập tổng - tỉ số, hàm nở hai biến.

Trong Chương 4, chúng tôi thay thế Bổ đề trộn nở bằng Bổ đề trộn nở mở rộng và Bổ đề trộn nở mở rộng cho đồ thị có hướng trong phương pháp phổ của đồ thị để nghiên cứu, tổng quát kết quả của tập khoảng cách trên đa tạp chính quy.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1. Ma trận kề

Giả sử $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị vô hướng có tập đỉnh V, tập cạnh E. Đồ thị G có n đỉnh. Không mất tính tổng quát, ta có thể đánh số các đỉnh của đồ thị bằng các số 1, 2, ..., n. Khi đó ta có thể biểu diễn đồ thị bằng một ma trận vuông $A = (a_{ij})_{n\times n}$. Ma trận kề của đồ thị G được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 1.1.1. *([7, Định nghĩa 2.1]) Cho $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị, ma trận kề $A = (a_{ij})_{n\times n}$ của G được xác định như sau:*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ nếu } \{i, j\} \in E, \\ 0 \text{ nếu } \{i, j\} \notin E. \end{cases}$$

Chúng ta lưu ý rằng, nếu $\{i, j\} \in E$ thì $\{j, i\} \in E$ nên $a_{ij} = a_{ji}$. Do đó ma trận kề A là ma trận đối xứng.

1.2. Phổ của đồ thị

Ma trận kề của một đồ thị vô hướng có tính đối xứng, do đó nó có đầy đủ các giá trị riêng thực và có một cơ sở trực giao là các vectơ riêng. Chúng ta có định nghĩa phổ của đồ thị như sau:

Định nghĩa 1.2.1. *([7, Chương 2]) Phổ của đồ thị G là tập các giá trị riêng (tính cả bội) của ma trận kề của đồ thị G.*

Lý thuyết phổ của đồ thị được xuất hiện lần đầu tiên vào những năm 1950. Đối với đồ thị với số đỉnh nhỏ, cách đơn giản nhất để tìm phổ là tìm nghiệm của đa thức đặc trưng $\chi(x) = det(A - xI)$. Đối với các đồ thị có kích thước lớn thì việc tính phổ của đồ thị thông qua tìm nghiệm của đa thức đặc trưng có thể gặp khó khăn.

1.3. (n, d, λ) **- đồ thị và Bổ đề trộn nở**

Cho đồ thị G, gọi $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ là các giá trị riêng của ma trận kề của G. Đại lượng $\lambda(G) = \max\{\lambda_2, |\lambda_n|\}$ được gọi là giá trị riêng thứ hai của G. Đồ thị $G = (V, E)$ được gọi là (n, d, λ) - đồ thị nếu nó là đồ thị d - chính quy, có n đỉnh và giá trị riêng thứ hai của G bị chặn trên bởi λ. Kí hiệu $E(S, T)$ là số các cặp có thứ tự (s, t) sao cho $s \in S$, $t \in T$ và (s, t) là một cạnh của G. Bổ đề trộn nở sau đây là một công cụ rất quan trọng trong phương pháp phổ của đồ thị để nghiên cứu các bài toán tổ hợp cộng tính.

Bổ đề 1.3.1. *(Bổ đề trộn nở, [1]) Giả sử $G = (V, E)$ là một (n, d, λ) - đồ thị với hai tập $S, T \subset V$, ta có:*

$$\left| E(S, T) - \frac{d|S||T|}{n} \right| \leq \lambda \sqrt{|S||T|}.$$

Hanson, Lund và Roche-Newton [14] đã chứng minh kết quả tương tự Bổ đề trộn nở cho số cạnh giữa hai đa tập đỉnh. Cụ thể, ta có bổ đề sau:

Bổ đề 1.3.2. *(Bổ đề trộn nở mở rộng, [14]) Cho $G = (V, E)$ là một (n, d, λ) - đồ thị. Cho B và C là hai đa tập đỉnh của G, khi đó:*

$$\left| E(B, C) - \frac{d|B||C|}{n} \right| \leq \lambda \sqrt{\sum_{b \in B} m_B(b)^2} \sqrt{\sum_{c \in C} m_C(c)^2}$$

với $m_X(x)$ là bội của x trong X.

Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng có n đỉnh thỏa mãn $|N^+(x)| = |N^-(x)| = d$ với mọi $x \in V$, trong đó $N^+(x)$ là tập đỉnh đi ra của đỉnh x, $N^-(x)$ là tập đỉnh đi vào của đỉnh x. Chúng ta định nghĩa ma trận kề của G là A_G như sau:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } (i, j) \in E, \\ 0 & \text{nếu } (i, j) \notin E. \end{cases}$$

Giả sử $\lambda_1 = d, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ là các giá trị riêng của A_G. Các giá trị riêng có thể có giá trị phức nên chúng ta không thể sắp xếp chúng nhưng có thể chứng minh được $|\lambda_i| \leq d$ với mọi $1 \leq i \leq n$. Chúng ta định nghĩa $\lambda(G) = \max_{|\lambda_i| \neq d} |\lambda_i|$.

Ma trận A là ma trận chuẩn tắc nếu $A^t A = A A^t$, với A^t là ma trận chuyển vị của A. Ta nói rằng đồ thị có hướng là đồ thị chuẩn tắc nếu ma trận kề của nó là ma trận chuẩn tắc. Cho đồ thị chuẩn tắc G, gọi $N^+(x, y)$ là tập các đỉnh z sao cho $(x, z), (y, z)$ là các cạnh của G và $N^-(x, y)$ là tập các đỉnh z sao cho (z, x), (z, y) là các cạnh của G. Ta có thể chứng minh được đồ thị G là đồ thị chuẩn tắc khi và chỉ khi $|N^+(x, y)| = |N^-(x, y)|$ với mọi cặp đỉnh x, y.

Đồ thị có hướng G được gọi là một (n, d, λ) - đồ thị có hướng nếu G là một đồ thị chuẩn tắc có n đỉnh, d - chính quy (tức là $|N^+(x)| = |N^-(x)| = d$ với mọi đỉnh x) và $\lambda(G) \leq \lambda$. Cho G là một (n, d, λ) - đồ thị có hướng với hai tập đỉnh $B, C \subset V$. Gọi $\mathcal{E}(B, C)$ là số cặp (b, c) sao cho $b \in B$, $c \in C$ và $(b, c) \in E(G)$, trong đó $E(G)$ là tập cạnh của đồ thị G. Vu [29] đã phát triển mở rộng Bổ đề trộn nở cho đồ thị có hướng như sau:

Bổ đề 1.3.3. *(Bổ đề trộn nở cho đồ thị có hướng, [29]) Cho $G = (V, E)$ là một (n, d, λ) - đồ thị có hướng. Với hai tập đỉnh $B, C \subset V$, ta có:*

$$\left|\mathcal{E}(B, C) - \frac{d}{n}|B||C|\right| \leq \lambda\sqrt{|B||C|}.$$

Sử dụng kĩ thuật tương tự trong chứng minh [14, Bổ đề 16] và [29, Bổ đề 3.1], chúng tôi cũng thu được kết quả sau:

Bổ đề 1.3.4. *(Bổ đề trộn nở mở rộng cho đồ thị có hướng) Cho $G = (V, E)$ là một (n, d, λ) - đồ thị có hướng. Cho B và C là hai đa tập đỉnh của đồ thị G, ta có:*

$$\left|\mathcal{E}(B, C) - \frac{d}{n}|B||C|\right| \leq \lambda\sqrt{\sum_{b\in B} m_B(b)^2}\sqrt{\sum_{c\in C} m_C(c)^2}$$

với $m_X(x)$ là bội của x trong X.

Chương 2

Một số (n, d, λ) - đồ thị

(n, d, λ) - đồ thị là công cụ chính của phương pháp phổ của đồ thị mà chúng ta sẽ sử dụng trong các chương tiếp theo. Lưu ý rằng, chúng ta cần xây dựng các đồ thị khác nhau phụ thuộc vào mỗi bài toán. Vì vậy, trong chương này, chúng tôi sẽ xây dựng một số (n, d, λ) - đồ thị được cho bởi các phương trình đại số trên trường và vành hữu hạn. Trong các tham số n, d, λ thì tham số n và d xác định khá đơn giản. Vì vậy, làm thế nào để xác định được λ chính là vấn đề khó khăn nhất. (n, d, λ) - đồ thị G trên không gian R ($R = \mathbb{F}_q$ hoặc $\mathbb{Z}_q$) thường được định nghĩa như sau:

- Tập đỉnh thường là $V = R \times R \times .... \times R$ hoặc $R^{\times} \times R^{\times} \times .... \times R^{\times}$.
- Hai đỉnh $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ của đồ thị được nối với nhau bởi một cạnh khi và chỉ khi $f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = t$, trong đó $t \in R$ và $f : V \times V \to R$ là một hàm số.

Chúng ta đánh giá λ qua các bước sau:

- *Bước 1:* Đếm số nghiệm của hệ phương trình

$$f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = t \text{ và } f(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) = t,$$

  với $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \in V(G)$.

- *Bước 2:* Từ số nghiệm của hệ phương trình trên ta biểu diễn được A^2 thông qua A bằng một phương trình đại số, giả sử phương trình đó là

$$A^2 = h(A),$$

  với h là một hàm số nào đó.

- *Bước 3:* Từ $A^2 = h(A)$, tính chất của ma trận đối xứng và tính chất của đồ thị chính quy để tìm λ.

Chúng ta sử dụng phương pháp trên để đi tìm các tham số n, d, λ của một số (n, d, λ) - đồ thị.

2.1. Đồ thị tổng - bình phương

Đồ thị tổng - bình phương $\mathcal{FS}_q$ trên trường hữu hạn $\mathbb{F}_q$ được định nghĩa như sau: Tập đỉnh của đồ thị tổng - bình phương $\mathcal{FS}_q$ là tập $\mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q$. Hai đỉnh $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ và $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2) \in V(\mathcal{FS}_q)$ được nối với nhau bởi một cạnh $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\} \in E(\mathcal{FS}_q)$ khi và chỉ khi $a_1 + b_1 = (a_2 + b_2)^2$. Ta có định lí sau:

Định lí 2.1.1. *Đồ thị $\mathcal{FS}_q$ là một $\left(q^2, q, \sqrt{2q}\right)$ – đồ thị.*

Tương tự, đồ thị tổng - bình phương RS_q trên vành hữu hạn $\mathbb{Z}_q$ được định nghĩa như sau: Tập đỉnh của đồ thị tổng - bình phương RS_q là tập $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_q^{\times}$. Hai đỉnh $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ và $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2) \in V(RS_q)$ được nối với nhau bởi một cạnh $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\} \in V(RS_q)$ khi và chỉ khi $a_1 + b_1 = (a_2 + b_2)^2$. Ta có định lí sau:

Định lí 2.1.2. *Đồ thị RS_q là một $\left(p^{2r} - p^{2r-1}, p^r - p^{r-1}, \sqrt{(2r-1)p^{2r-1}}\right)$ – đồ thị.*

2.2. Đồ thị tổng - tích

Cho $\lambda \in \mathbb{F}_q$, đồ thị tổng - tích $\mathcal{FP}_q(\lambda)$ được định nghĩa như sau: Tập đỉnh của đồ thị tổng - tích $\mathcal{FP}_q(\lambda)$ là tập $\mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q$. Hai đỉnh $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ và $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2) \in V(\mathcal{FP}_q(\lambda))$ được nối với nhau bởi một cạnh $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\} \in E(\mathcal{FP}_q(\lambda))$ khi và chỉ khi $a_1 + b_1 + a_2 b_2 = \lambda$. Ta có định lí sau:

Định lí 2.2.1. *Đồ thị $\mathcal{FP}_q(\lambda)$ là một $\left(q^2, q, \sqrt{2q}\right)$ – đồ thị.*

Tương tự, với d là một số tự nhiên lớn hơn 1, chúng ta cũng định nghĩa đồ thị tổng - tích $\mathcal{F}_{q,d}$ như sau: Tập đỉnh của đồ thị tổng - tích $\mathcal{F}_{q,d}$ là tập $\mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q^d$. Hai đỉnh $U = (a, \boldsymbol{b})$ và $V = (c, \boldsymbol{d}) \in V(\mathcal{F}_{q,d})$ được nối với nhau bởi một cạnh $\{U, V\} \in E(\mathcal{F}_{q,d})$ khi và chỉ khi $a + c = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}$. Vinh [34] thu được kết quả sau:

Định lí 2.2.2. *([34, Bổ đề 9.1]) Đồ thị tổng - tích $\mathcal{F}_{q,d}$ là một $\left(q^{d+1}, q^d, q^{d/2}\right)$ – đồ thị.*

Đồ thị tổng - tích $\mathcal{RP}_q$ trên vành hữu hạn được định nghĩa như sau: Tập đỉnh của đồ thị tổng - tích $\mathcal{RP}_q$ là tập $\mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_q$. Hai đỉnh $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ và $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2) \in V(\mathcal{RP}_q)$ được nối với nhau bởi một cạnh $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\} \in E(\mathcal{RP}_q)$ khi và chỉ khi $a_1 + b_1 = a_2 b_2$. Vinh [31] thu được kết quả sau:

Định lí 2.2.3. *([31, Định lí 2.3]) Đồ thị $\mathcal{RP}_q$ là một $\left(p^{2r}, p^r, \sqrt{2rp^{2r-1}}\right)$ – đồ thị.*

Cho d là một số tự nhiên lớn hơn 1. Trên vành hữu hạn ta định nghĩa đồ thị tổng - tích $\mathcal{R}_{q,d}$ như sau: Tập đỉnh của đồ thị tổng - tích $\mathcal{R}_{q,d}$ là tập $V(\mathcal{R}_{q,d}) = \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_q^d$. Hai đỉnh $U = (a, \boldsymbol{b})$ và $V = (c, \boldsymbol{d}) \in V(\mathcal{R}_{q,d})$ được nối với nhau bởi một cạnh $\{U, V\} \in E(\mathcal{R}_{q,d})$ khi và chỉ khi $a + c = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}$. Ta có định lí sau:

Định lí 2.2.4. *Đồ thị tổng - tích $\mathcal{R}_{q,d}$ là một $\left(q^{d+1}, q^d, \sqrt{2rp^{(2r-1)d}}\right)$ – đồ thị.*

2.3. Đồ thị tích - tổng

Cho $\lambda \in \mathbb{F}_q^*$ bất kì, đồ thị tích - tổng $\mathcal{PS}_q(\lambda)$ được định nghĩa như sau: Tập đỉnh của đồ thị tích - tổng $\mathcal{PS}_q(\lambda)$ là tập $\mathbb{F}_q^* \times \mathbb{F}_q$. Hai đỉnh $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ và $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2) \in V(\mathcal{PS}_q(\lambda))$ được nối với nhau bởi một cạnh $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\} \in E(\mathcal{PS}_q(\lambda))$ khi và chỉ khi $a_1 b_1 (a_2 + b_2) = \lambda$. Vinh [32] đã thu được kết quả sau:

Định lí 2.3.1. *([32, Định lí 3.6]) Đồ thị $\mathcal{PS}_q(\lambda)$ là một $\left((q-1)q, q-1, \sqrt{3q}\right)$ – đồ thị.*

Trên vành hữu hạn chúng ta cũng định nghĩa đồ thị tích - tổng $\mathcal{PSR}_q$ như sau: Tập đỉnh $V(\mathcal{PSR}_q) = \mathbb{Z}_q^{\times} \times \mathbb{Z}_q$. Hai đỉnh $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ và $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2) \in V(\mathcal{PSR}_q)$ được nối với nhau bởi một cạnh khi và chỉ khi $a_1 b_1 (a_2 + b_2) = 1$. Ta có định lí sau:

Định lí 2.3.2. *Đồ thị $\mathcal{PSR}_q$ là một $\left(p^{2r} - p^{2r-1}, p^r - p^{r-1}, \sqrt{(2r-1)p^{2r-1}}\right)$ – đồ thị.*

2.4. Đồ thị tích

Cho dạng song tuyến tính không suy biến $B(\cdot, \cdot)$ trên $\mathbb{F}_q^d$, với $\lambda \in \mathbb{F}$ bất kì, đồ thị tích $B_{q,d}(\lambda)$ được định nghĩa như sau: Tập đỉnh của đồ thị tích $B_{q,d}(\lambda)$ là tập $V(B_{q,d}(\lambda)) = \mathbb{F}^d \backslash (0, \dots, 0)$. Hai đỉnh $\boldsymbol{a}$ và $\boldsymbol{b} \in V(B_{q,d}(\lambda))$ được nối với nhau bởi một cạnh $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\} \in E(B_{q,d}(\lambda))$ khi và chỉ khi $B(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \lambda$. Khi $\lambda = 0$, đồ thị tích trở thành đồ thị Erdős - Rényi, đồ thị này đã được tính giá trị riêng trong [2]. Với $\lambda \neq 0$, Vinh [34] có định lí sau:

Định lí 2.4.1. *([34, Bổ đề 9.2]) Cho d là một số tự nhiên lớn hơn 1 và $\lambda \in \mathbb{F}^*$, đồ thị $B_{q,d}(\lambda)$ là một $\left(q^d - 1, q^{d-1}, \sqrt{2q^{d-1}}\right)$ – đồ thị.*

Tương tự, trên vành hữu hạn với $\lambda \in \mathbb{Z}_q$ tùy ý, chúng ta cũng định nghĩa đồ thị tích $B_q(d, \lambda)$ như sau: Tập đỉnh của đồ thị $B_q(d, \lambda)$ là tập $\mathbb{Z}_{p^r}^d \backslash (\mathbb{Z}_{p^r}^0)^d$. Hai đỉnh $\boldsymbol{a}$ và $\boldsymbol{b} \in V(B_q(d, \lambda))$ được nối với nhau bởi một cạnh $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\} \in E(B_q(d, \lambda))$ khi và chỉ khi

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \lambda$. Khi $\lambda = 0$, đồ thị tích $B_q(d, \lambda)$ cũng trở thành đồ thị Erdős - Rényi. Với $\lambda \neq 0$, Vinh [31] thu được định lí sau:

Định lí 2.4.2. *([31, Định lí 2.4]) Cho d là một số tự nhiên lớn hơn 1 và $\lambda \in \mathbb{Z}_{p^r}^{\times}$, đồ thị tích $B_q(d, \lambda)$ là một $\left(p^{rd} - p^{(r-1)d}, p^{r(d-1)}, \sqrt{2rp^{(d-1)(2r-1)}}\right) -$ đồ thị.*

2.5. Đồ thị Euclid hữu hạn

Cho Q là một dạng toàn phương không suy biến trên $\mathbb{F}_q^d$. Với $t \in \mathbb{F}_q$ bất kì, đồ thị Euclid hữu hạn $E_q(d, Q, t)$ được định nghĩa như sau: Tập đỉnh là tập $\mathbb{F}_q^d$ và tập cạnh là

$$E = \left\{ \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\} \in \mathbb{F}_q^d \times \mathbb{F}_q^d \mid \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}, Q(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = t \right\}.$$

Bannai và đồng nghiệp [3] và Kwok [24] thu được định lí sau:

Định lí 2.5.1. *([3, 24]) Đồ thị $E_q(d, Q, t)$ là một $\left(q^d, (1 + o(1))q^{d-1}, 2q^{(d-1)/2}\right) -$ đồ thị.*

Chương 3

Đánh giá lực lượng của một số tập hợp trên trường và vành hữu hạn

3.1. Giới thiệu về phương pháp phổ của đồ thị

Đối tượng nghiên cứu đầu tiên chúng tôi quan tâm là bài toán mở cổ điển trong hình học tổ hợp, bài toán về khoảng cách của Erdős [11]. Bài toán yêu cầu chúng ta tìm số các khoảng cách khác nhau tối thiểu được xác định bởi một tập gồm N điểm trên mặt phẳng Euclid. Có nghĩa là chúng ta cần đánh giá lực lượng cho tập khoảng cách được xác định bởi tập điểm này. Có liên quan đến đánh giá lực lượng của các tập hợp cũng được nhiều người quan tâm là đánh giá lực lượng của tập tích vô hướng, đánh giá tổng - tích, đánh giá lực lượng của tập thể tích khối, đi tìm các hàm nở... trên không gian hữu hạn.

Phương pháp sử dụng giải tích Fourier được phát triển rất mạnh mẽ bởi nhóm nghiên cứu của Iosevich. Cách tiếp cận bằng giải tích Fourier kế thừa được những công cụ mạnh từ giải tích và có lợi hơn phương pháp tiếp cận bằng đồ thị là có sử dụng các cấu trúc của bài toán trên một không gian vectơ. Ngoài ra, gần đây xuất hiện phương pháp sử dụng liên thuộc điểm và đường thẳng của Rudnev [27] để nghiên cứu một số bài toán tổ hợp cộng tính cho các tập nhỏ. Năm 2008, Vũ Hà Văn và Lê Anh Vinh đã đồng thời sử dụng (n, d, λ) - đồ thị và Bổ đề trộn nở để nghiên cứu về một số bài toán tổ hợp cộng tính. Cụ thể, Vu [29] nghiên cứu về bài toán đánh giá tổng - tích và Vinh [30] nghiên cứu về bài toán khoảng cách của Erdős. Trong Luận án này chúng tôi sẽ tiếp tục sử dụng (n, d, λ) - đồ thị và Bổ đề trộn nở để nghiên cứu các bài toán nêu trên. Chúng tôi gọi phương pháp này là "phương pháp phổ của đồ thị".

Phương pháp phổ của đồ thị:

- *Bước 1:* Xây dựng một (n, d, λ) - đồ thị trên không gian R chúng ta đang nghiên cứu bài toán ($R = \mathbb{F}_q$ hoặc $\mathbb{Z}_q$).

- Tập đỉnh thường là $V = R \times R \times .... \times R$ hoặc $R^\times \times R^\times \times .... \times R^\times$.
- Hai đỉnh $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ của đồ thị được nối với nhau bởi một cạnh nếu $f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = t$, trong đó $t \in R$ và $f : V \times V \to R$ là một hàm số. Trong mỗi bài toán chúng ta sẽ chọn một hàm f phù hợp.

- *Bước 2:* Tìm các tham số (n, d, λ) của đồ thị trên.
- *Bước 3:* Áp dụng Bổ đề trộn nở:
  - Đếm số nghiệm của phương trình $f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = t$ với $\boldsymbol{a} \in \mathcal{A}$, $\boldsymbol{b} \in \mathcal{B}$.
  - Đồng nhất số nghiệm của phương trình này với số cạnh giữa hai tập đỉnh $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ của đồ thị trên.
  - Sử dụng Bổ đề trộn nở để đưa ra đánh giá về số cạnh của đồ thị, tương ứng với những đánh giá cho tập hợp mà chúng ta quan tâm.

Phương pháp phổ của đồ thị mặc dù khá đơn giản nhưng có thể sử dụng để chứng minh lại và cải thiện được một số kết quả gần đây của nhiều nhà nghiên cứu và đưa ra một số kết quả khá thú vị khác.

3.2. Tập khoảng cách, tập tích

3.2.1. Giới thiệu tổng quan về bài toán tập khoảng cách và tập tích

Không gian Euclid hữu hạn $\mathbb{F}_q^n$ bao gồm các vectơ cột $\boldsymbol{x}$, với $x_j \in \mathbb{F}_q$. Chúng ta nhắc lại định nghĩa khoảng cách giữa các điểm $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{F}_q^n$

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = \sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2.$$

Cho tập điểm $\mathcal{E} \subset \mathbb{F}_q^n$, tập khoảng cách của $\mathcal{E}$ được định nghĩa như sau

$$\Delta(\mathcal{E}) = \{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| : \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{E}\}.$$

Một cách tương tự, tập tích $\Pi(\mathcal{E})$ của $\mathcal{E}$ được định nghĩa như sau

$$\Pi(\mathcal{E}) = \{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} : \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{E}\},$$

trong đó $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ là tích vô hướng của hai vectơ.

Sử dụng giải tích Fourier trên trường hữu hạn, Iosevich và Rudnev [21] chứng minh rằng nếu $|\mathcal{E}| \geq 2q^{(n+1)/2}$ thì $\Delta(\mathcal{E}) = \mathbb{F}_q$. Hart và Iosevich [17] đã tìm điều kiện của tập $\mathcal{E}$ để $|\Delta(\mathcal{E})| \gtrsim q$. Cụ thể, với $\mathcal{E} = E_1 \times \ldots \times E_n$, trong đó $E_1, \ldots, E_n \subset \mathbb{F}_q$ thỏa mãn $|\mathcal{E}| \gtrsim q^{\frac{n^2}{2n-1}}$ thì $|\Delta(\mathcal{E})| \gtrsim q$. Hart, Iosevich, Koh và Rudnev [15] cũng thu được các kết quả tương tự cho tập tích trong không gian vectơ trên trường hữu hạn. Cụ thể, với $\mathcal{E} = E_1 \times \ldots \times E_n$, trong đó $E_1, \ldots, E_n \subset \mathbb{F}_q$ thỏa mãn $|\mathcal{E}| \gtrsim q^{\frac{n^2}{2n-1}}$ thì $|\Pi(\mathcal{E})| \gtrsim q$. Từ đó ta có, nếu $A \subset \mathbb{F}_q$ có lực lượng $|A| \gtrsim q^{\frac{n}{2n-1}}$ thì

$$|\Delta(A^n)|,\ |\Pi(A^n)| \gtrsim q.$$

Sử dụng phương pháp phổ của đồ thị, chúng tôi chỉ ra một cách chứng minh khác ngắn gọn hơn cho các kết quả trên. Cụ thể, chúng tôi [18] đã thu được kết quả sau:

Định lí 3.2.1. *([18, Định lí 2.3 và Định lí 2.4]) Với $A \subset \mathbb{F}_q$ thỏa mãn $|A| \gtrsim q^{1/2}$. Khi đó, ta có:*

$$|\Delta_{\mathbb{F}}(A^n)|,\ |\Pi_{\mathbb{F}}(A^n)| \gtrsim \min\left\{q,\ \frac{|A|^{2n-1}}{q^{n-1}}\right\}.$$

Covert, Iosevich và Pakianathan [8] sử dụng giải tích Fourier cũng đã thu được kết quả tương tự trên vành hữu hạn. Với $\mathcal{E} \subset \mathbb{Z}_q^n$ thỏa mãn $|\mathcal{E}| \gtrsim r(r+1)q^{\frac{(2r-1)n}{2r}+\frac{1}{2r}}$, ta có:

$$\mathbb{Z}_q^\times \subset \Delta_{\mathbb{Z}_q}(\mathcal{E}),\ \Pi_{\mathbb{Z}_q}(\mathcal{E}).$$

Sử dụng phương pháp phổ của đồ thị, chúng tôi [18] đã đưa ra điều kiện của tập $A \subset \mathbb{Z}_q$ để $|\Delta_{\mathbb{Z}_q}(A^n)|$, $|\Pi_{\mathbb{Z}_q}(A^n)| \gtrsim q$.

Định lí 3.2.2. *([18, Định lí 2.7 và Định lí 2.8]) Với $A \subset \mathbb{Z}_q$ thỏa mãn $|A| \gtrsim q^{1-\frac{1}{2r}}$, ta có:*

$$|\Delta_{\mathbb{Z}_q}(A^n)|,\ |\Pi_{\mathbb{Z}_q}(A^n)| \gtrsim \min\left\{q,\ \frac{|A|^{2n-1}}{(rq^{2-1/r})^{n-1}}\right\}.$$

3.2.2. Ý tưởng chứng minh

Trước hết, sử dụng phương pháp phổ của đồ thị cho đồ thị tổng - bình phương, ta có bổ đề sau:

Định lí 3.2.1. *Với $A, B, C \subset \mathbb{F}_q$, ta có:*

$$\left|\left\{a + (b-c)^2 : a \in A,\ b \in B,\ c \in C\right\}\right| \gtrsim \min\left\{q,\ \frac{|A||B||C|}{q}\right\}.$$

Ý tưởng chứng minh Bổ đề 3.2.1:

Giả sử $D = \{a + (b-c)^2 : a \in A, b \in B, c \in C\} \subset \mathbb{F}_q$. Gọi N là số nghiệm của phương trình $-d + a + (b-c)^2 = 0$, $(a, b, c, d) \in A \times B \times C \times D$. Với mỗi $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ ta có duy nhất một giá trị $d \in D$ thỏa mãn phương trình trên nên $N = |A||B||C|$. Mặt khác, N là số cạnh giữa hai tập đỉnh $(-D) \times B$ và $A \times (-C)$ của đồ thị tổng−bình phương $\mathcal{FS}_q$. Từ Bổ đề 1.3.1 và Định lí 2.1.1, suy ra điều phải chứng minh.

Chúng ta chứng minh ý đầu tiên của Định lí 3.2.1 bằng cách sử dụng Bổ đề 3.2.1 và quy nạp theo n.

Tương tự, sử dụng phương pháp phổ của đồ thị và Định lí 2.2.1, Định lí 2.2.3 chúng ta chứng minh được kết quả của tập tích.

3.3. Tập thể tích khối

3.3.1. Giới thiệu tổng quan về tập thể tích khối

Cho $A \subset \mathbb{F}_q$, tập thể tích khối $\mathcal{V}_n(A)$ của tập A được định nghĩa như sau

$$\mathcal{V}_n(A) = \underbrace{(A-A) \cdot (A-A) \cdots (A-A)}_{n}.$$

Sử dụng giải tích Fourier, Hart, Iosevich và Solymosi [16] đã chứng minh được với $A \subset \mathbb{F}_q$ thỏa mãn $|A| \gtrsim q^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}}$ thì $\mathcal{V}_n(A) = \mathbb{F}_q$. Sử dụng bất đẳng thức tam giác Ruzsa, Balog [4] đã cải thiện kết quả trên. Cụ thể, với $A \subset \mathbb{F}_q$ thỏa mãn $|A| \geq q^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^k}}$, trong đó k là số tự nhiên và $k > 1$. Khi A là một nhóm con cộng của $\mathbb{F}_q$ chúng ta cần thêm điều kiện $|A| \geq q^{\frac{1}{2}} + 1$ thì $\mathcal{V}_{2k+1}(A) = \mathbb{F}_q$. Họ cũng thu được kết quả sau:

Định lí 3.3.1. *([4, Hệ quả 1]) Với $A \subset \mathbb{F}_q$ thỏa mãn $|A| \geq q^{\frac{1}{2}}$. Nếu A là một nhóm con cộng của $\mathbb{F}_q$ thỏa mãn $|A| \geq q^{\frac{1}{2}} + 1$. Khi đó, ta có: $|\mathcal{V}_k(A)| \geq q^{1-\frac{1}{2^k}}$.*

Sử dụng phương pháp phổ của đồ thị và Hệ quả 3.3.1, chúng tôi [19] cũng thu được kết quả về tập thể tích khối.

Định lí 3.3.2. *([19, Định lí 1.4]) Với $A \subset \mathbb{F}_q$ thỏa mãn $|A| \gtrsim q^{\frac{1}{2}}$, ta có:*

$$|\mathcal{V}_n(A)| \gtrsim \min\left\{q, \frac{|A|^2}{q^{\frac{1}{2^{n-1}}}}\right\}.$$

Trong trường hợp đặc biệt, từ Định lí 3.3.2 dẫn đến nếu $A \subset \mathbb{F}_q$ thỏa mãn $|A| \gtrsim q^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}}$ thì $|\mathcal{V}_n(A)| \gtrsim q$.

Với $A \subset \mathbb{Z}_q$ chúng ta định nghĩa tập thể tích khối tương tự như trên trường hữu hạn. Khi sử dụng phương pháp phổ của đồ thị cho đồ thị tích - tổng trên vành hữu hạn, chúng ta cũng thu được kết quả tương tự cho tập thể tích khối trên vành hữu hạn. Cụ thể, chúng tôi [19] chứng minh được kết quả sau:

Định lí 3.3.3. *([19, Định lí 1.5]) Với $A \subset \mathbb{Z}_q$ thỏa mãn $|A| \gtrsim q^{1-\frac{1}{2r}}$, ta có:*

$$|\mathcal{V}_n(A)| \gtrsim \min\left\{p^r, \frac{|A|^2}{2rp^{r-1+\frac{1}{2^{n-1}}}}\right\}.$$

Sử dụng phương pháp phổ của đồ thị và Định lí 3.3.2, chúng tôi [19] đã cải thiện được kết quả của Balog.

Định lí 3.3.4. *([19, Định lí 1.6]) Với $A \subset \mathbb{F}_q$ thỏa mãn $|A| \gtrsim q^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2^k}}$, trong đó $k > 1$, ta có:*

$$\mathcal{V}_{2k+1}(A) = \mathbb{F}_q.$$

Sử dụng các kĩ thuật tương tự, chúng tôi [19] cũng có kết quả tương tự trên vành hữu hạn.

3.3.2. Ý tưởng chứng minh

Sử dụng phương pháp phổ của đồ thị cho đồ thị tích - tổng $\mathcal{PS}_q(\lambda)$, ta có bổ đề sau:

Định lí 3.3.1. *Cho $A, B \subseteq \mathbb{F}_q^*$ và $C, D \subseteq \mathbb{F}_q$, thỏa mãn $|A||B||C||D| \geq 3q^3$. Khi đó, ta có: $AB(C-D) = \mathbb{F}_q$.*

Ý tưởng chứng minh Định lí 3.3.2: Đặt $D = \{a(b-c) : a \in A, b \in B, c \in C\} \cap \mathbb{F}_q^*$ với $A, B, C \subset \mathbb{F}_q$. Sử dụng phương pháp phổ của đồ thị cho đồ thị tích - tổng $\mathcal{PS}_q$. Ta có:

$$|D| \gtrsim \min\left\{q, \frac{|A||B||C|}{q}\right\}.$$

Từ đó, ta đặt $A = \mathcal{V}_{n-1}(A)$, $B = C = A$ và từ Hệ quả 3.3.1, ta có:

$$|\mathcal{V}_n(A)| \gtrsim \min\left\{q, \frac{|A|^2}{q^{\frac{1}{2^{n-1}}}}\right\}.$$

Điều phải chứng minh.

Ý tưởng chứng minh Định lí 3.3.4: Đặt $A = \mathcal{V}_k(A)$, $B = \mathcal{V}_k(A)$, $C = D = A$, thay vào Bổ đề 3.3.1 và từ Định lí 3.3.2 ta có, nếu $|A| \geq cq^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2^k}}$ thì $\mathcal{V}_{2k+1}(A) = \mathbb{F}_q$. Điều phải chứng minh.

3.4. Tập tổng - tỉ số

3.4.1. Giới thiệu tổng quan về bài toán tổng - tỉ số

Bài toán đánh giá tổng - tích cũng được rất nhiều người quan tâm, khi A là cấp số cộng thì $|A+A| = 2|A|-1$, khi A là cấp số nhân thì $|AA| = 2|A|-1$. Tuy nhiên, cả hai tập $A+A$ và $A \cdot A$ không thể cùng bé. Erdős và Szemerédi giả thiết rằng

$$\max\{|A+A|, |A \cdot A|\} \geq c|A|^{2-\epsilon},$$

với $\epsilon > 0$ nào đó. Cho tới thời điểm hiện tại, kết quả tốt nhất của bài toán này là của Roche - Newton - Rudnev - Shkredov [26] nhóm tác giả chứng minh rằng với $A \subset \mathbb{F}_p$ thỏa mãn $A \leq p^{5/8}$ thì $\max\{|A+A|, |A \cdot A|\} \geq c|A|^{1+\frac{1}{5}}$.

Tập tỉ số được định nghĩa như sau $A : A = \{a/b : \ a, b \in A\}$. Người ta hy vọng rằng sẽ thu được những kết quả tương tự khi thay thế tập tích bằng tập tỉ số. Roche - Newton [25] cũng thu được những kết quả tương tự cho tập tổng - tỉ số. Cụ thể, với $A \subset \mathbb{F}_q$ thỏa mãn $|A \cap cG| \ \leq \max\{|G|^{1/2}, \frac{|A|}{8}\}$ với G là một trường con của $\mathbb{F}_q$ và $c \in \mathbb{F}_q$ thì $\max\{|A+A|, |A:A|\} \gtrsim |A|^{12/11}$.

Balog, Broughan, Shparlinski [5] cũng thu được kết quả cho tập tổng - tỉ số. Giả sử $A \subset \mathbb{F}_q$ thỏa mãn $|A \cap cG| \ \leq \max\{|G|^{1/2}, \frac{|A|}{8}\}$ với G là trường con của $\mathbb{F}_q$ và $c \in \mathbb{F}_q$ thì $\max\{|A+A+A+A|, |A:A|\} \gtrsim |A|^{10/9}$.

Trong chương này của Luận án, sử dụng phương pháp phổ của đồ thị, chúng ta thu được kết quả tổng quát về tập tổng - tỉ số.

Định lí 3.4.1. *Cho $A \subseteq \mathbb{F}_q^*$, ta có:*

$$\max\{|\underbrace{A+\ldots+A}_{d+1}|, |A:A|\} \gtrsim \min\left\{\sqrt[d+1]{q|A|^d}, \frac{|A|^{\frac{3d+1}{d+1}}}{\sqrt[d+1]{q^d}}\right\}.$$

Sử dụng kĩ thuật tương tự, chúng ta cũng thu được kết quả tương tự trên vành hữu hạn.

3.4.2. Ý tưởng chứng minh:

Chúng ta sử dụng phương pháp phổ của đồ thị cho đồ thị tổng - tích $\mathcal{F}_{q,d}$ để chứng minh, lưu ý xét phương trình

$$s_1 \cdot b_1^{-1} + s_2 \cdot b_2^{-1} + \ldots + s_d \cdot b_d^{-1} + c = t, \ (s_i, b_j, c, t) \in S \times B \times C \times T,$$

trong đó $S = A \cdot B$, $T = A + A + \ldots + A + C$.

3.5. Hàm nở hai biến

3.5.1. Giới thiệu tổng quan về hàm nở hai biến

Cho $\mathbb{F}_q$ là một trường hữu hạn với q phần tử, E là một tập con của $\mathbb{F}_q^d$. Với mọi hàm $f : \mathbb{F}_q^d \longrightarrow \mathbb{F}_q$, kí hiệu $f(E) = \{f(x) : \ x \in E\}$ là ảnh của f trên tập E. Chúng ta nói f là hàm nở d biến với chỉ số ϵ nếu $|f(E)| \geq C_\epsilon |E|^{1/d+\epsilon}$ cho mọi tập E. Một vấn đề đang được rất nhiều sự quan tâm là xác định các lớp hàm nở. Ví dụ, bài toán khoảng cách của Erdős [11], với hàm $\Delta : \ \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, trong đó $\Delta(x, y) = \|x - y\|$. Nó được giả thuyết là một hàm nở $2d$ biến với chỉ số $\epsilon = 1/2d$.

Trong phần lớn các trường hợp nếu một hàm số chứa nhiều phép toán và có đầy đủ cả phép cộng và phép nhân thì tập ảnh của hàm số có tính giãn nở mạnh. Vì vậy, việc đi tìm các lớp hàm nở hai biến sẽ khó khăn hơn rất nhiều so với việc đi tìm các hàm nở nhiều biến hơn. Garaev và Shen [12] đã chứng minh $f = x(y+1)$ là một hàm nở hai biến với $x, y \in A$ và tập A có kích thước lớn. Cụ thể, với $A \subseteq \mathbb{F}_p^*$, ta có:

$$|A(A+1)| \gtrsim \min\left\{\sqrt{p|A|}, \frac{|A|^2}{\sqrt{p}}\right\}.$$

Sử dụng bất đẳng thức tam giác Ruzsa, Timothy, Jones và Roche - Newton [28] đã chứng minh được $f = x(y+1)$ là một hàm nở hai biến với $x, y \in A$ và $|A| < p^{1/2}$. Cụ thể, với $A \subseteq \mathbb{F}_q$ thỏa mãn $|A| < p^{1/2}$ thì $|A(A+1)| \geq |A|^{57/56}$.

Trong Luận án này, sử dụng phương pháp phổ của đồ thị chúng tôi cũng thu được kết quả tương tự cho trường hợp tập A có kích thước lớn. Cụ thể, ta có định lí sau:

Định lí 3.5.1. *Với $A \subset \mathbb{F}_q \setminus \{0, q-1\}$, ta có:*

$$|A(A+1)|, |A + A^2| \gtrsim \min\left\{\sqrt{q|A|}, \frac{|A|^2}{\sqrt{q}}\right\},$$

trong đó $A^2 = \{a^2 : \ a \in A\}$.

Chúng ta cũng thu được các kết quả tương tự trên vành hữu hạn $\mathbb{Z}_q$.

3.5.2. Ý tưởng chứng minh hàm nở $f = x(y+1)$

Chúng ta sử dụng phương pháp phổ của đồ thị cho đồ thị Tích $B_{q,2}(1)$ để chứng minh, lưu ý xét phương trình

$$(s \cdot b^{-1} + 1)c = t, \ (s, b, c, t) \in S \times B \times C \times T,$$

trong đó $S = A(D+1)$, $B = D+1$, $T = C(A+1)$.

Chương 4

Tập khoảng cách trên đa tạp chính quy

4.1. Giới thiệu tổng quan về bài toán tập khoảng cách trên đa tạp chính quy

Đặt $D(\mathbf{x}) = x_1^2 + \cdots + x_d^2$ là một đa thức trong $\mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_d]$. Với $\mathcal{E} \subset \mathbb{F}_q^d$, chúng ta định nghĩa tập khoảng cách của tập $\mathcal{E}$ như sau

$$\Delta(\mathcal{E}) = \{D(\mathbf{x} - \mathbf{y})\colon \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}\}.$$

Đã có rất nhiều kết quả nghiên cứu về lực lượng của tập khoảng cách $\Delta(\mathcal{E})$, ví dụ như một số bài báo [6, 9, 10, 21, 22, 23]. Trong chương này của Luận án, chúng ta nghiên cứu bài toán trong trường hợp $\mathcal{E}$ là một tập con của một đa tạp chính quy. Chúng ta bắt đầu bằng định nghĩa sau:

Định nghĩa 4.1.1. *([9, Định nghĩa 2.1]) Với $\mathcal{E} \subset \mathbb{F}_q^d$, kí hiệu $\mathbf{1}_{\mathcal{E}}$ là hàm đặc trưng của tập $\mathcal{E}$. Cho $F(\mathbf{x}) \in \mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_d]$ là một đa thức. Đa tạp $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{F}_q^d\colon F(\mathbf{x}) = 0\}$ được gọi là đa tạp chính quy nếu $|\mathcal{V}| = \Theta(q^{d-1})$ và $\widehat{\mathbf{1}_{\mathcal{V}}(\mathbf{m})} \lesssim q^{-(d+1)/2}$ với mọi $\mathbf{m} \in \mathbb{F}_q^d \setminus \mathbf{0}$, trong đó*

$$\widehat{\mathbf{1}_{\mathcal{V}}(\mathbf{m})} = \frac{1}{q^d} \sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{F}_q^d} \chi(-\mathbf{m} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{1}_{\mathcal{V}}(\mathbf{x}).$$

Chúng ta có một số ví dụ về đa tạp chính quy:

1. Hình cầu với bán kính khác 0:

$$S_j = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{F}_q^d\colon \|\mathbf{x}\| = j\right\},\ j \in \mathbb{F}_q^*.$$

2. Paraboloid:

$$P = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{F}_q^d\colon x_1^2 + \cdots + x_{d-1}^2 = x_d\right\}.$$

3. Hình cầu được định nghĩa "khoảng cách Minkowski" với bán kính khác 0:

$$M_j = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{F}_q^d\colon x_1 \cdot x_2 \cdots x_d = j\right\},\ j \in \mathbb{F}_q^*.$$

Năm 2007, Iosevich và Rudnev [21] sử dụng biến đổi Fourier đã thu được kết quả đầu tiên của tập khoảng cách trên hình cầu đơn vị trên trường hữu hạn $\mathbb{F}_q^d$. Cụ thể, với $\mathcal{E} \subset S_1$ trong $\mathbb{F}_q^d$ với $d \geq 3$.

1. Nếu $|\mathcal{E}| \geq Cq^{\frac{d}{2}}$ với hằng số C đủ lớn, khi đó tồn tại $c > 0$ sao cho $|\Delta(\mathcal{E})| \geq cq$.
2. Nếu d là một số chẵn và $|\mathcal{E}| \geq Cq^{\frac{d}{2}}$ với hằng số C đủ lớn, khi đó $\Delta(\mathcal{E}) = \mathbb{F}_q$.
3. Nếu d là một số chẵn, tồn tại $c > 0$ và $\mathcal{E} \subset S_1$ sao cho $|\mathcal{E}| \geq cq^{\frac{d}{2}}$ và $\Delta(\mathcal{E}) \neq \mathbb{F}_q$.
4. Nếu d là một số lẻ và $|\mathcal{E}| \geq Cq^{\frac{d+1}{2}}$ với hằng số $C > 0$ đủ lớn, khi đó $\Delta(\mathcal{E}) = \mathbb{F}_q$.
5. Nếu d là số lẻ, tồn tại $c > 0$ và $\mathcal{E} \subset S_1$ sao cho $|\mathcal{E}| \geq cq^{\frac{d+1}{2}}$ và $\Delta(\mathcal{E}) \neq \mathbb{F}_q$.

Sử dụng biến đổi Fourier, Covert, Koh và Pi [9] đã cải thiện được kết quả trên. Cụ thể, với $\mathcal{V} \subset \mathbb{F}_q^d$ là một đa tạp chính quy và $k \geq 3$ là một số nguyên và $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V}$ thỏa mãn $|\mathcal{E}| \gtrsim q^{\frac{d-1}{2}+\frac{1}{k-1}}$ thì

$$\Delta_{k,D}(\mathcal{E}) \supseteq \mathbb{F}_q^* \text{ với } d \text{ chẵn, } d \geq 2,$$

và

$$\Delta_{k,D}(\mathcal{E}) = \mathbb{F}_q \text{ với } d \text{ lẻ , } d \geq 3,$$

trong đó $\Delta_{k,D}(\mathcal{E}) = \left\{ D(\mathbf{x}^1 + \cdots + \mathbf{x}^k) \colon \mathbf{x}^i \in \mathcal{E}, 1 \leq i \leq k \right\}$.

Sử dụng phương pháp phổ của đồ thị, chúng tôi thu được các kết quả tổng quát sau:

Định lí 4.1.1. *([20, Định lí 1.4]) Cho Q là một dạng toàn phương không suy biến trên $\mathbb{F}_q^d$. Giả sử $\mathcal{V} \subset \mathbb{F}_q^d$ là một đa tạp chính quy và $k \geq 3$ là một số nguyên. Với $\mathcal{E} \subset \mathcal{V}$ thỏa mãn $q^{\frac{d-1}{2}+\frac{1}{k-1}} = o(|\mathcal{E}|)$, khi đó với $t \in \mathbb{F}_q^*$ bất kì, ta có:*

$$\left| \left\{ (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k) \in \mathcal{E}^k \colon Q(\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_k) = t \right\} \right| = (1 - o(1)) \frac{|\mathcal{E}|^k}{q}.$$

Định lí 4.1.1. *([20, Hệ quả 1.5]) Cho Q là một dạng toàn phương không suy biến trên $\mathbb{F}_q^d$. Giả sử $\mathcal{V} \subset \mathbb{F}_q^d$ là một đa tạp chính quy và $k \geq 3$ là một số nguyên. Với $\mathcal{E} \subset \mathcal{V}$ thỏa mãn $q^{\frac{d-1}{2}+\frac{1}{k-1}} = o(|\mathcal{E}|)$, ta có:*

$$\Delta_{k,Q}(\mathcal{E}) \supseteq \mathbb{F}_q^*.$$

Đặt $P(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{d} a_j x_j^s$, trong đó $s \geq 2$ và $a_j \neq 0$ với mọi $j = 1, \ldots, d$ là một đa thức trong $\mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_d]$. Chúng tôi cũng chứng minh được kết quả tổng quát cho tập $\Delta_{k,D}(\mathcal{E})$ khi ta thay hàm D bằng đa thức $P(\boldsymbol{x})$. Cụ thể, ta có kết quả sau:

Định lí 4.1.2. *([20, Định lí 1.6]) Giả sử $\mathcal{V} \subset \mathbb{F}_q^d$ là một đa tạp chính quy và $k \geq 3$ là một số nguyên. Với $\mathcal{E} \subset \mathcal{V}$ và $X \subset \mathbb{F}_q$ thỏa mãn $|X||\mathcal{E}|^{2k-2} \gtrsim q^{(d-1)(k-1)+2}$, ta có:*

$$|X + \Delta_{k,P}(\mathcal{E})| \gtrsim q.$$

Định lí 4.1.2. *([20, Hệ quả 1.7]) Giả sử $\mathcal{V} \subset \mathbb{F}_q^d$ là một đa tạp chính quy và $k \geq 3$ là một số nguyên. Với $\mathcal{E} \subset V$ thỏa mãn $|\mathcal{E}| \gtrsim q^{\frac{d-1}{2}+\frac{1}{k-1}}$, ta có:*

$$|\Delta_{k,P}(\mathcal{E})| \gtrsim q.$$

4.2. Ý tưởng chứng minh

Gọi $\mathcal{V}$ là một đa tạp chính quy định được nghĩa như sau

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{F}_q^d \colon F(\mathbf{x}) = 0\},$$

với $F \in \mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_d]$. Đồ thị Cayley $C_{\mathcal{V}}$ được định nghĩa như sau, tập đỉnh $V = \mathbb{F}_q^d$ và tập cạnh của đồ thị $C_{\mathcal{V}}$ là

$$E(C_{\mathcal{V}}) = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in H \times H \colon \mathbf{y} - \mathbf{x} \in \mathcal{V}\}.$$

Sử dụng tính chất của đồ thị Cayley, ta có định lí sau:

Định lí 4.2.1. *Đồ thị Cayley $C_{\mathcal{V}}$ là một $(q^d, |\mathcal{V}|, cq^{(d-1)/2})$ - đồ thị có hướng, với hằng số $c > 0$ nào đó.*

Với số tự nhiên chẵn $k = 2m \geq 2$ và $\mathcal{E} \subset \mathbb{F}_q^d$, chúng ta định nghĩa $\Lambda_k(\mathcal{E})$ như sau

$$\Lambda_k(\mathcal{E}) = \left|\left\{(\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k) \in \mathcal{E}^k \colon \mathbf{x}^1 + \cdots + \mathbf{x}^m = \mathbf{x}^{m+1} + \cdots + \mathbf{x}^k\right\}\right|.$$

Với $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{F}_q^d$, chúng ta định nghĩa $\nu_k(t)$ như sau

$$\nu_k(t) = \left|\left\{(\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k) \in \mathcal{E}^k \colon Q(\mathbf{x}^1 + \cdots + \mathbf{x}^k) = t\right\}\right|.$$

Trong phương pháp phổ của đồ thị, chúng ta thay Bổ đề trộn nở bằng Bổ đề trộn nở mở rộng và sử dụng đồ thị $E_q(d, Q, t)$ ta có định lí sau:

Định lí 4.2.2. *Cho $\mathcal{E} \subset \mathbb{F}_q^d$. Khi đó, ta có:*

1. *Nếu $q^{\frac{d+1}{2}} \Lambda_k(\mathcal{E}) = o(|\mathcal{E}|^k)$ và k là số chẵn, khi đó*

$$\left|\left\{(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k) \in \mathcal{E}^k \colon Q(\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_k) = t\right\}\right| = (1 + o(1))\frac{|\mathcal{E}|^k}{q}.$$

2. *Nếu* $q^{\frac{d+1}{2}}(\Lambda_{k-1}(\mathcal{E}))^{1/2}(\Lambda_{k+1}(\mathcal{E}))^{1/2} = o(|\mathcal{E}|^k)$ *và* k *là số lẻ, khi đó*

$$\left|\left\{(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k) \in \mathcal{E}^k \colon Q(\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_k) = t\right\}\right| = (1 + o(1))\frac{|\mathcal{E}|^k}{q}.$$

Tương tự, trong phương pháp phổ của đồ thị, chúng ta thay Bổ đề trộn nở bằng Bổ đề trộn nở mở rộng cho đồ thị có hướng và sử dụng đồ thị Cayley $C_{\mathcal{V}}$ ta có định lí sau:

Định lí 4.2.3. *Cho* $\mathcal{E}$ *là một tập con của đa tạp chính quy* $\mathcal{V}$ *trong* $\mathbb{F}_q^d$ *với* $|\mathcal{E}| > q^{(d-1)/2}$.

1. *Nếu* $k \geq 2$ *chẵn, khi đó*

$$\Lambda_k(\mathcal{E}) \lesssim q^{\frac{(d-1)(k-2)}{2}}|\mathcal{E}| + \frac{|\mathcal{E}|^{k-1}}{q}.$$

2. *Nếu* $k \geq 3$ *lẻ, khi đó*

$$\Lambda_{k-1}(\mathcal{E})\Lambda_{k+1}(\mathcal{E}) \lesssim q^{(d-1)(k-2)}|\mathcal{E}|^2 + q^{\frac{(d-1)(k-3)-2}{2}}|\mathcal{E}|^{k+1} + \frac{|\mathcal{E}|^{2k-2}}{q^2}.$$

Từ Định lí 4.2.3 và Định lí 4.2.2, suy ra điều phải chứng minh.

Để chứng minh Định lí 4.1.2 chúng ta sử dụng kĩ thuật tương tự cho đồ thị $C_{P'}(\mathbb{F}_q^{2d+1})$ đã được nghiên cứu trong [33] và chặn của $|X + \Delta_{k,P}(\mathcal{E})|$ từ chứng minh của Định lí 2.6 trong [33].

Kết luận

Trong Luận án này, chúng tôi đã sử dụng phương pháp phổ của đồ thị để thu được một số kết quả mới trong lý thuyết tổ hợp cộng tính. Cụ thể, chúng tôi đã thu được các kết quả sau:

- Trong Chương 3, sử dụng phương pháp phổ của đồ thị để nghiên cứu và cải thiện một số kết quả về tập khoảng cách, tập tích, tập thể tích khối, tập tổng - tỉ số, hàm nở hai biến trên trường và vành hữu hạn.
  - Luận án đã đưa ra chứng minh khác ngắn gọn hơn chứng minh của Hart và Iosevich cho tập khoảng cách và tập tích trên trường hữu hạn, tìm điều kiện để tập khoảng cách và tập tích trên trường hữu hạn có bậc lớn nhất có thể.
  - Đồng thời, chúng tôi cải thiện kết quả của tập thể tích khối trên trường hữu hạn, tìm điều kiện để tập thể tích khối có bậc lớn nhất có thể và mở rộng kết quả của tập thể tích khối trên vành hữu hạn.
  - Bên cạnh đó, chúng tôi đưa ra kết quả tổng quát cho tập tổng - tỉ số trên trường và vành hữu hạn.
  - Ngoài ra, chúng tôi xây dựng các hàm nở hai biến $f = x(y+1)$ và $g = x + y^2$ trên trường và vành hữu hạn.
- Trong Chương 4, sử dụng phương pháp phổ của đồ thị mở rộng để nghiên cứu và đưa ra kết quả tổng quát cho tập khoảng cách trên đa tạp chính quy khi thay hàm khoảng cách bằng dạng toàn phương không suy biến và đa thức chéo.

Các hướng nghiên cứu tiếp theo:

- *Cải thiện các kết quả đã đạt được:* Tuy khó có thể cải thiện được các kết quả đã đạt được trong trường hợp tổng quát, nhưng người ta có thể cải thiện trong các trường hợp đặc biệt về số chiều của không gian hoặc xét các tập trên các mặt đặc biệt như parabol, hyperbol, đường tròn, mặt cầu... Trong Chương 4, chúng tôi cũng đã nghiên cứu bài toán khoảng cách trên đa tạp chính quy. Tuy nhiên, hướng nghiên cứu khi xét các tập trên các mặt đặc biệt đến nay vẫn còn khá mới và có nhiều hướng mở. Trong thời gian tới, chúng tôi hy vọng sẽ có thêm nhiều kết quả tốt khi tiếp tục theo đuổi hướng nghiên cứu này.

- *Nghiên cứu các bài toán tổ hợp cộng tính trên các tập bé:* Phương pháp phổ của đồ thị mặc dù cách sử dụng khá đơn giản và nghiên cứu được nhiều bài toán tổ hợp cộng tính. Tuy nhiên, điểm yếu của phương pháp là chỉ nghiên cứu được các kết quả cho các tập lớn. Cụ thể, các kết quả khi sử dụng phương pháp phổ của đồ thị chỉ có ý nghĩa khi tập $A \subset \mathbb{F}_q$ (hoặc $\mathbb{Z}_q$) thỏa mãn điều kiện $|A| \gtrsim q^{1/2}$. Gần đây, có một số tác giả sử dụng liên thuộc điểm - đường thẳng và bất đẳng thức tam giác Ruzsa để nghiên cứu một số bài toán tổ hợp cộng tính trên các tập nhỏ. Trong thời gian tới, chúng tôi sẽ tiến hành nghiên cứu một số bài toán trên các tập bé với hy vọng sẽ thu được nhiều kết quả có ý nghĩa.

- *Sử dụng phương pháp khác:* Ngoài phương pháp đồ thị thì phương pháp sử dụng giải tích Fourier cũng được sử dụng rộng rãi. Chúng tôi cũng đã có những nghiên cứu ban đầu khi sử dụng phương pháp này. Cụ thể, khi sử dụng giải tích Fourier, chúng tôi cũng chứng minh được $f = x + y^{-1}$ là hàm nở hai biến trên trường và vành hữu hạn với $x, y \in A$ và $|A| \gg q^{1/2}$. Trong thời gian tới, chúng tôi sẽ tiếp tục tìm hiểu sâu hơn về giải tích Fourier và sử dụng phương pháp này để nghiên cứu một số bài toán tổ hợp cộng tính.

Công trình liên quan đến Luận án

1. D. D. Hieu and P. V. Thang, Distinct distances on regular varieties over finite fields, *Journal of Number Theory*, **173** (2017), 602–613.
2. D. D. Hieu and L. A. Vinh, On distance sets and product sets in vector spaces over finite rings, *Michigan Mathematical Journal*, **62** (2013), 779–792.
3. D. D. Hieu and L. A. Vinh, On volume set of boxes in finite spaces, *Indiana University Mathematics Journal*, **65** (2016), 2125–2136.

Các kết quả liên quan đến Luận án đã được tác giả báo cáo tại

1. Seminar của Phòng cơ sở toán học cho tin học, Viện Toán học.
2. Hội nghị nghiên cứu sinh hằng năm của Viện Toán học (10/2015, 10/2016, 10/2017).
3. Hội thảo Toán rời rạc NTU- VIASM lần thứ nhất (27 – 30/12/2014, VIASM).
4. Hội nghị Quốc tế về Tổ hợp, Lý thuyết đồ thị và ứng dụng (15 – 17/04/2018, VIASM).

Tài liệu tham khảo

[1] N. Alon and Fan R. K. Chung, *Explicit Constructions of linear sized tolerant networks, Discrete mathematics,* **2**(1988), 15 - 19.

[2] N. Alon and M. Krivelevich, Constructive bounds for a Ramsey-type problem, *Graphs and Combinatorics*, **13** (1997), 217 - 225.

[3] E. Bannai, O. Shimabukuro and H. Tanaka, Finite analogues of non-Euclidean spaces and Ramanujan graphs, *European Journal of Combinatorics,* **25** (2004), 243 - 259.

[4] A. Balog, Another Sum-Product Estimate in Finite Fields, *Sovremennye Problemy Matematiki*, **16** (2012), 31 - 37.

[5] A. Balog, K. A. Broughan, I. E. Shparlinski, *Sum-products estimates with several sets and applications, Integers,* **12** (5) (2010), 895 - 906.

[6] J. Bourgain, N. Katz, and T. Tao, A sum product estimate in finite fields and Applications, *Geometric and Functional Analysis,* **14** (2004), 27 - 57.

[7] N. Biggs, Algebraic Graph Theory, *Cambridge Mathematical Library (2nd ed.), Cambridge University Press*, 1993.

[8] D. Covert, A. Iosevich, and J. Pakianathan, Geometric configurations in the ring of integers modulo p^l, *Indiana University Mathematics Journal,* **61** (2012), 1949 - 1969.

[9] D. Covert, D. Koh, Y. Pi, The k-resultant modulus set problem on algebraic varieties over finite fields, *Finite Fields and Their Applications,* **48** (2017), 68 - 86.

[10] D. Covert, D. Koh, and Y. Pi, On the sums of any k points in finite fields, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **30**(1) (2016), 367 - 382.

[11] P. Erdős, Integral distances, *Bulletin of the AMS - American Mathematical Society* **51** (1945), 996.

[12] M. Z. Garaev and C.-Y. Shen, On the size of the set A(A + 1), *Math. Z.*, **265** (1) (2010), 125-132.

[13] L. Guth and N. Katz, On the Erdős distinct distances problem in the plane, *Annals Of Mathematics*, **181** (2015), 155 - 190.

[14] B. Hanson, B. Lund, and O. Roche-Newton, On distinct perpendicular bisectors and pinned distances in finite fields, *Finite Fields and Their Applications*, **37** (2016), 240 - 264.

[15] D. Hart, A. Iosevich, D. Koh and M. Rudnev, Averages over hyperplanes, sum-product theory in vector spaces over finite fields and the Erdős-Falconer distance conjecture, *Transactions of the AMS*, **363** (2011) 3255 - 3275.

[16] D. Hart, A. Iosevich, J. Solymosi, Sum-product Estimates in Finite Fields via Kloosterman Sums, *International Mathematics Research Notices* (2007) Vol. **2007**, article ID rmn007, 14 pages.

[17] D. Hart and A. Iosevich, Sum and products in finite fields: an integral geometric view - pint, *Contemporary Mathematics*, **464** (2008), 1 - 9.

[18] D. D. Hieu and L. A. Vinh, On distance sets and product sets in vector spaces over finite rings, *Michigan Mathematical Journal*, **62** (2013), 779 - 792.

[19] D. D. Hieu and L. A. Vinh, On volume set of boxes in finite spaces, *Indiana University Mathematics Journal*, **65** (2016), 2125 - 2136.

[20] D. D. Hieu and P. V. Thang, Distinct distances on regular varieties over finite fields, *Journal of Number Theory*, **173** (2017), 602 - 613.

[21] A. Iosevich and M. Rudnev, Erdős distance problem in vector spaces over finite fields, *Transactions of the American Mathematical Society*, **359** (2007), 6127 - 6142.

[22] D. Koh and H. Sun, Distance sets of two subsets of vector spaces over finite fields, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **143**(4) (2015), 1679 - 1692.

[23] D. Koh and C-Y. Shen, The generalized Erdős-Falconer distance problems in vector spaces over finite fields, *Journal of Number Theory,* **132**(11) (2012), 2455 - 2473.

[24] W.M. Kwok, Character tables of association schemes of affine type, *European Journal Combinatorics*, **13** (1992), 167 - 185.

[25] O. Roche-Newton, Sum-ratio estimates over arbitrary finite fields, *arxiv.org/abs*/1407.1654v1.

[26] O. Roche-Newton, M. Rudnev, and Shkredov, New sum-product type estimates over finite fields, *Advances in Mathematics,* **293** (2016), 589 - 605.

[27] M. Rudnev, On the number of incidences between points and planes in three dimensions, *Combinatorica*, **38** (1) (2018), 219 - 254.

[28] Timothy, G. F. Jones and O. Roche-Newton, Improved bounds on the set A(A+1), *Journal of Combinatorial Theory,* **120** (2013), 515 - 526.

[29] V. H. Van, Sum-product estimates via directed expanders, *Mathematical research letters*, **15**(2) (2008), 375 - 388.

[30] L. A. Vinh, Explicit Ramsey graphs and Erdős distance problem over finite Euclidean and non-Euclidean spaces, *Electronic Journal of Combinatorics*, **15** (2008), Article R5.

[31] L. A. Vinh, Sum and shifted-product subsets of product-sets over finite rings, *The Electronic Journal of Combinatorics*, **19**(2) (2012), P33.

[32] L. A. Vinh, Graphs generated by Sidon sets and algebraic equations over finite fields, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **103**(6) (2013), 651 - 794.

[33] L.A.Vinh, On the generalized Erdős–Falconer distance problems over finite fields, *Journal Number Theory,* **133** (2013), 2939 - 2947.

[34] L. A. Vinh, The solvability of norm, bilinear and quadratic equations over finite fields via spectral of graphs, *Forum Mathematicum*, **26** (2014), 141 -175.