VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

VIỆN TOÁN HỌC

NGUYỄN ĐẠI DƯƠNG

ĐỐI NGẪU TANNAKA TRÊN VÀNH DEDEKIND VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - 2017

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

VIỆN TOÁN HỌC

NGUYỄN ĐẠI DƯƠNG

ĐỐI NGẪU TANNAKA TRÊN VÀNH DEDEKIND VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: Đại số và Lý thuyết số

Mã số: 9 46 01 04

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn:

GS.TSKH. PHÙNG HỒ HẢI

Hà Nội - 2017

Mục lục

Tóm tắt

Luận án nghiên cứu các lược đồ nhóm affine phẳng và đối ngẫu Tannaka trên một vành Dedekind. Các kết quả nhận được cho phép nghiên cứu đồng cấu giữa các lược đồ nhóm affine phẳng trên một vành Dedekind, cấu trúc của lược đồ nhóm affine phẳng trên một vành định giá rời rạc. Cuối cùng chúng tôi nghiên cứu tính phẳng trung thành, tính xạ ảnh của một đại số Hopf trên một đại số Hopf con của nó trên các vành Dedekind. Nội dung luận án bao gồm 4 chương như sau.

Chương 1 giành cho phần kiến thức chuẩn bị về vành Dedekind, khái niệm đối đại số, song đại số và đại số Hopf trên một vành Dedekind. Các khái niệm về lược đồ nhóm affine và các biểu diễn, khái niệm cho phép nổ Neron, chuyển cơ sở của các phạm trù và một số khái niệm cơ bản về phạm trù ten xơ cộng tính, phạm trù ten xơ aben cũng được giới thiệu. Phần cuối chương trình bày một kết quả mới: *"Tiêu chuẩn cho tính phẳng trung thành"* (Định lí 1.4.4).

Chương 2 đưa ra chứng minh trực tiếp ngắn gọn một kết quả của Saavedra về đối ngẫu Tannaka cho các đối đại số phẳng được phát biểu trong Định lí 2.1.8. Định lí này được mở rộng thành đối ngẫu Tannaka cho các lược đồ nhóm affine phẳng và nó có liên hệ đến công trình của Wedhorn, (tham khảo [31] và Định lí 2.1.12). Đồng thời chúng tôi hoàn thiện kết quả của Wedhorn để đưa ra đối ngẫu cho một dàn Tannaka (Định lí 2.2.8). Ví dụ minh họa cũng được giới thiệu lần lượt cho từng đối ngẫu.

Trong Chương 3, các Mệnh đề 3.1.1, 3.1.3 lần lượt đưa ra các điều kiện sao cho một đồng cấu giữa các đối đại số là đơn ánh, đơn ánh đặc biệt hoặc là toàn ánh. Ứng dụng *"Tiêu chuẩn cho tính phẳng trung thành"* (Định lí 1.4.4) cho các đại số Hopf giao hoán chúng tôi thu được Định lí 3.2.1: *"Một đại số Hopf giao hoán là phẳng trung thành trên đại số Hopf con của nó khi và chỉ khi môđun thương của chúng không có xoắn (do đó phẳng)"*. Các kết quả trên được mở rộng cho lược đồ nhóm affine phẳng (Định lí 3.2.3) và đưa ra tiêu chuẩn để kiểm tra khi nào một dãy đồng cấu giữa

các lược đồ nhóm là khớp theo các phạm trù của các biểu diễn của chúng (Định lí 3.2.8). Tiếp theo chúng tôi nghiên cứu các đối đại số hữu hạn địa phương (xem mục 3.3). Mệnh đề 3.3.7 là một đặc trưng cho một lớp của lược đồ nhóm có vành tọa độ hữu hạn địa phương như một đối đại số. Cuối chương, chúng tôi mô tả cấu trúc của một lược đồ nhóm trong Định lí 3.4.9. Chứng minh định lí này sử dụng phép nổ Neron cho các lược đồ nhóm phẳng trên một vành định giá rời rạc và sử dụng tính phẳng trung thành của một đại số Hopf giao hoán trên một đại số Hopf con bão hòa.

Chương 4 ứng dụng tiêu chuẩn về tính phẳng trung thành để nghiên cứu tính phẳng trung thành của một đại số Hopf trên một đại số Hopf con *hữu hạn* (hữu hạn sinh như R-môđun) (Định lí 4.1.14). Sử dụng kết quả của Định lí 4.1.14 chúng tôi đưa ra điều kiện về tích phân để nhận được kết quả về tính xạ ảnh của một đại số Hopf trên đại số con *hữu hạn* (Định lí 4.2.9).

Abstract

We study Hopf algebras, affine flat group schemes and Tannakian categories all defined over a Dedekind ring R. We first give a criterion for the faithful flatness in the last of Chapter 1 and apply to commutative Hopf algebras in Chapter 3 and any Hopf algebras in Chapter 4.

In Chapter 2, the first aim is to reinterpret the Tannakian duality for group schemes over a Dedekind ring (obtained by Saavedra), and related recent results of Wedhorn. Next, we establish a new duality between affine flat group schemes and rigid tensor categories equipped with a fiber functor (called Tannakian lattice). To illustrate these dualities, applications to the fundamental group schemes of algebraic schemes are introduced. For instance, the category of stratified sheaves on a smooth formal scheme over R will be Tannakian in the sense of Saavedra when R is a complete DVR of equal characterictic. Moreover, the Tannakian lattice will be used to redefine the relative differential Galois group, (introduced by dos Santos).

In Chapter 3, using the above Tannakian dualities, we study morphisms between flat coalgebras as well as morphisms of flat affine group schemes. In particular, we give a criterion for the exactness of sequences of homomorphisms of flat affine group schemes over Dedekind rings. Next, the notions of locally finite coalgebras over Dedekind ring are mentioned. We show that the coordinate ring of a flat group scheme, the generic fiber of which is connected, is locally finite. In addition, we also give a structure of affine flat group schemes over DVRs using techniques: Neron blow-ups and faithful flatness of commutative Hopf algebras.

Finally, the last part of the dissertation is devoted to study the flatness and projectivity of any R-Hopf algebras over their Hopf subalgebras. This is contents of Chapter 4. The faithful flatness for a Hopf algebra over its finite normal Hopf subalgebra follows from the corresponding properties on fibers and for the projectivity we need some conditions in terms of integrals of Hopf algebras.

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi dưới sự hướng dẫn của GS.TSKH. Phùng Hồ Hải. Các kết quả viết chung với các tác giả khác đã được sự nhất trí của đồng tác giả đưa vào luận án. Các kết quả nêu trong luận án là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ một công trình nào khác.

Tác giả
NGUYỄN ĐẠI DƯƠNG

Lời cám ơn

Luận án này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của GS. TSKH. Phùng Hồ Hải. Vì vậy trước hết tôi xin cảm ơn thầy đã giúp đỡ và chỉ bảo tôi trong suốt thời gian qua. Tôi xin gửi lời cảm ơn đến Ban lãnh đạo Viện Toán học, Trung tâm Đào tạo sau đại học, Phòng Đại số-Lý thuyết số đã tạo điều kiện cho tôi học tập nghiên cứu tại đây. Tôi cũng xin chân thành cảm ơn các thầy cô, những người anh, người bạn, những người ít nhiều đã quan tâm động viên giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập nghiên cứu và sinh sống. Cuối cùng, tôi xin cảm ơn em trai và mẹ đã kiên nhẫn chờ đợi tôi hoàn thành luận án.

Tác giả
NGUYỄN ĐẠI DƯƠNG

Một số kí hiệu

Kí hiệu	**Tên gọi**
R	Vành Dedekind
K	Trường phân thức của R
k	Trường thặng dư của R
Spec	Phổ của một vành giao hoán
Alg_R	Phạm trù các đại số giao hoán trên R
$\mathsf{Mod}(R)$	Phạm trù các môđun trên R
$\mathsf{Mod}_{\mathrm{f}}(R)$	Phạm trù các môđun hữu hạn sinh trên R
L	Đối đại số, song đại số, đại số Hopf giao hoán trên R
$\mathsf{Comod}(L)$	Phạm trù các đối môđun phải trên L
$\mathsf{Comod}_{\mathrm{f}}(L)$	Phạm trù các đối môđun phải trên L và hữu hạn sinh như R-môđun
$\mathsf{Comod}^{\mathrm{o}}(L)$	Phạm trù các đối môđun phải trên L hữu hạn sinh và phẳng như R-môđun
$\mathrm{Cf}(M)$	Không gian hệ số của một đối môđun $M \in \mathsf{Comod}^{\mathrm{o}}(L)$
G	Lược đồ nhóm affine trên R
G_K	Thớ tổng quát của lược đồ nhóm affine G trên R
$R[G]$	Vành tọa độ của G
$\mathsf{Rep}(G)$	Phạm trù các G-môđun
$\mathsf{Rep}_{\mathrm{f}}(G)$	Phạm trù các G-môđun hữu hạn sinh trên R
$\mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(G)$	Phạm trù các G-môđun hữu hạn sinh và phẳng trên R
$\mathcal{C}_K$	Mở rộng vô hướng của một phạm trù R-tuyến tính $\mathcal{C}$ lên K
B	Đại số Hopf trên R
A	Đại số Hopf con của B
$\mathcal{M}_A$	Phạm trù các môđun phải trên một đại số Hopf A
$\mathcal{M}^C$	Phạm trù các đối môđun phải trên một đối đại số C
$\mathcal{M}_A^B$	Phạm trù các (B, A)-môđun Hopf

Mở đầu

Cho X là một lược đồ trơn trên một vành Dedekind R. Khi đó xét phạm trù gồm các $\mathcal{O}_X$-môđun nhất quán cùng với tác động của bó các toán tử vi phân $\mathcal{D}(X/R)$ trên X/R. Đây là một phạm trù ten xơ và aben. Phạm trù này được gọi là phạm trù các bó phân tầng trên X, kí hiệu là $\mathsf{str}(X/R)$. Hơn nữa, mỗi $\mathcal{O}_X$-môđun tự do địa phương đều có một vật đối ngẫu. Phạm trù con đầy gồm các $\mathcal{O}_X$-môđun tự do địa phương của $\mathsf{str}(X/R)$, kí hiệu là $\mathsf{str}(X/R)^{\mathrm{o}}$ và thường được gọi là phạm trù các phân thớ phân tầng. Đây cũng là một phạm trù ten xơ nhưng không còn aben. Mất đi tính aben cũng là một trong những khó khăn khi nghiên cứu phạm trù $\mathsf{str}(X/R)^{\mathrm{o}}$.

Bây giờ ta xét trường hợp R là vành định giá rời rạc đầy đủ đẳng đặc số 0. Cho X là một lược đồ tách trơn với các thớ hình học liên thông trên R và giả sử thêm X có một R-điểm hữu tỉ ξ. Khi đó N. Katz ([17, Lemma 2.4.2]) đã xây dựng một hàm tử thớ tại ξ cho phạm trù $\mathsf{str}(X/R)$, $\xi^* : \mathsf{str}(X/R) \longrightarrow \mathsf{Mod}(R)$. Mục đích của việc này là nhằm nghiên cứu hàm tử thớ tại các điểm của R và phạm trù con sinh bởi một vật đơn trong $\mathsf{str}(X_k/k)$ (ở đây k là trường phân thức hoặc trường thặng dư của R và X_k là thớ của X/R). Nghiên cứu của N. Katz dựa theo quan điểm của đối ngẫu Tannaka trên một trường. Tuy nhiên trường hợp lược đồ trên một vành R vẫn chưa được giải quyết vì còn thiếu đối ngẫu Tannaka trên R. Dựa trên ý tưởng của N. Katz, hàm tử thớ cho $\mathsf{str}(\mathfrak{X}/R)$ khi R đầy đủ có đặc số tùy ý được xây dựng bởi dos Santos (ở đây $\mathfrak{X}$ là lược đồ hình thức trơn với các thớ liên thông trên $\mathrm{Spf}(R)$). Khi đó ξ cảm sinh một hàm tử thớ cho cả hai phạm trù $\mathsf{str}(\mathfrak{X}/R)$ và $\mathsf{str}(\mathfrak{X}/R)^{\mathrm{o}}$. Phạm trù $\mathsf{str}(\mathfrak{X}/R)^{\mathrm{o}}$ cũng được dos Santos nghiên cứu trong [8]. Tuy nhiên đối ngẫu Tannaka mà dos Santos sử dụng vẫn còn khá phức tạp. Kết quả của dos Santos về hàm tử thớ có thể mở rộng cho một lược đồ X trên một vành Dedekind tùy ý và kết quả này được giải thích rõ trong [4, Proposition 5.1.1]. Như vậy yêu cầu tự nhiên đặt ra là cần mở rộng lí thuyết đối ngẫu Tannaka cho trường hợp R là vành Dedekind.

Gần đây lí thuyết đối ngẫu Tannaka cho các phạm trù ten xơ cộng tính (không nhất thiết aben) trên một vành định giá được nghiên cứu bởi Wedhorn, (xem [31]). Đồng thời Wedhorn cũng đưa ra khái niệm mở rộng vô hướng của một phạm trù cộng tính từ R lên trường phân thức K của nó và thu được một phạm trù Tannaka trung tính trên K. Tuy nhiên kết quả của Wedhorn vẫn chưa hoàn thiện và rất khó áp dụng để nghiên cứu các phạm trù nêu trên. Một may mắn cho chúng tôi là kết quả của Saavedra vẫn còn rất giá trị mặc dù đã bị lãng quên trong một thời gian dài. Trong [41, II.2], Saavedra đưa ra điều kiện để một phạm trù aben (cùng với một hàm tử trung thành và khớp) tương đương với một phạm trù các đối môđun trên một đối đại số phẳng. Đối ngẫu này áp dụng cho các phạm trù aben ten xơ chính là đối ngẫu Tannaka cho lược đồ nhóm affine phẳng trên R. Một trong những lí do làm kết quả của Saavedra bị lãng quên là do chứng minh của Saavedra không tầm thường để kiểm tra.

Phần đầu trong nội dung chính của luận án chúng tôi giới thiệu một chứng minh ngắn gọn một cách có hệ thống lại kết quả của Saavedra (xem mục 2.1) và liên hệ kết quả này đến công trình của Wedhorn. Kết quả chính thu được là đối ngẫu Tannaka trên vành Dedekind được phát biểu như sau:

Định lí 2.1.12. *Cho $(\mathcal{T}, \omega)$ là một phạm trù Tannaka trên vành Dedekind R. Khi đó*

(i) ω phân tích qua một tương đương phạm trù giữa $\mathcal{T}$ và $\mathsf{Rep}_{\mathrm{f}}(G)$, với $G := \mathsf{Aut}^{\otimes}_R(\omega)$.

(ii) ω cảm sinh một tương đương phạm trù giữa ${\mathcal{T}^{\mathrm{o}}}_K$ và $\mathsf{Rep}_{\mathrm{f}}(G_K)$.

Ví dụ cho đối ngẫu này là phạm trù các bó phân tầng $\mathsf{str}(\mathfrak{X}/R)$ cùng với hàm tử thớ ξ^*, trong đó lược đồ hình thức $\mathfrak{X}/R$ cần được xét như một lược đồ trên một vành định giá rời rạc đầy đủ đẳng đặc trưng (Ví dụ 2.1.13).

Tiếp theo dựa vào kết quả của Wedhorn chúng tôi thiết lập đối ngẫu Tannaka cho một phạm trù ten xơ cộng tính (được gọi là *dàn Tannaka*):

Định lí 2.2.8. *Cho* $(\mathcal{T}, \omega)$ *là một dàn Tannaka trên* R. *Khi đó lược đồ nhóm* $G = \mathsf{Aut}_R^{\otimes}(\omega)$ *là phẳng trung thành trên* R *và hàm tử cảm sinh* $\omega^G : \mathcal{T} \longrightarrow \mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(G)$ *là một tương đương phạm trù.*

Một ví dụ minh họa cho dàn Tannaka là phạm trù các phân thớ phân tầng $\mathsf{str}(\mathfrak{X}/R)^0$ cùng với hàm tử thớ ξ^* như trên (Ví dụ 2.2.9).

Phần tiếp theo của luận án, chúng tôi mở rộng định lí của P. Deligne và J.S. Milne [3, Theorem 2.21] trên một trường sang các vành Dedekind. Cụ thể hơn, đồng cấu giữa các lược đồ nhóm có thể mô tả theo đối ngẫu Tannaka (xem mục 3.2) và mô tả này được bắt đầu từ đồng cấu giữa các đối đại số phẳng trên R (xem mục 3.1). Kết quả thu được như sau:

Định lí 3.2.3. *Cho* $f : G \longrightarrow G'$ *là một đồng cấu của các lược đồ nhóm affine phẳng trên* R *và* $\omega_f : \mathsf{Rep}_{\mathrm{f}}(G') \longrightarrow \mathsf{Rep}_{\mathrm{f}}(G)$ *là hàm tử cảm sinh từ* f. *Khi đó*

(i) f *là phẳng trung thành khi và chỉ khi* ${\omega_f}^{\mathrm{o}} : \mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(G') \longrightarrow \mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(G)$ *là trung thành đầy và ảnh của nó đóng với việc lấy vật con.*

(ii) f *là nhúng đóng khi và chỉ khi mỗi vật của* $\mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(G)$ *là thương con đặc biệt của một vật dạng* ${\omega_f}^{\mathrm{o}}(X')$, $X' \in \mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(G')$.

Trong định lí trên chúng tôi nhấn mạnh rằng kết quả về tính phẳng trung thành của đồng cấu giữa các lược đồ nhóm dựa trên kết quả của Định lí 3.2.1 về tính phẳng trung thành của các đại số Hopf giao hoán. Đồng thời chúng tôi cũng mở rộng kết quả của H. Esnault, P. H. Hai và X. Sun trong [10] từ một trường sang một vành Dedekind:

Định lí 3.2.8. *Cho một dãy các lược đồ nhóm affine phẳng trên* R

$$H \xrightarrow{q} G \xrightarrow{p} A$$

với q là một nhúng đóng và p là phẳng trung thành. Khi đó dãy trên là khớp khi và chỉ khi các điều kiện sau được thỏa mãn:

(a) Với mỗi $V \in \mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(G)$, $q^*(V) \in \mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(H)$ là tầm thường nếu và chỉ nếu tồn tại $U \in \mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(A)$ sao cho $V \cong p^*U$.

(b) Cho W_0 là vật con tầm thường cực đại của $q^*(V)$ trong $\mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(H)$. Khi đó tồn tại $V_0 \subset V \in \mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(G)$ sao cho $q^*(V_0) \cong W_0$.

(c) Mỗi $W \in \mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(H)$ là thương của một vật (tương ứng bởi việc lấy đối ngẫu, là vật con) có dạng $q^*(V)$ với $V \in \mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(G)$.

Khái niệm về *tính hữu hạn địa phương* được chúng tôi giới thiệu trong mục 3.3. Khái niệm này dựa trên tính hữu hạn địa phương của một đối đại số trên một trường. Một đối đại số trên một trường luôn hữu hạn địa phương theo nghĩa: *"mỗi đối đại số đều là hợp của các đối đại số con hữu hạn chiều"*. Điều này cũng đúng cho các đối đại số phẳng trên R (xem [42, I.5, Corrolare.]). Tuy nhiên trong trường hợp tổng quát chúng ta không thể chọn ra các đối đại số con đặc biệt (môđun thương là không có xoắn, do đó phẳng trên R) và hữu hạn sinh như R-môđun. Và như vậy mỗi lược đồ nhóm nói chung không thể viết thành giới hạn ngược của các lược đồ nhóm affine *kiểu hữu hạn* sao cho mỗi đồng cấu chuyển là toàn ánh (phẳng trung thành) như trong trường hợp R là một trường. Vì vậy vấn đề về cấu trúc của một lược đồ nhóm affine phẳng trên R cần được nghiên cứu. Trong mục 3.3 chúng tôi chứng minh được:

Mệnh đề 3.3.7. *Cho G là một lược đồ nhóm phẳng thuộc kiểu hữu hạn trên vành Dedekind R. Giả sử thớ tổng quát G_K là liên thông. Khi đó $R[G]$ là hữu hạn địa phương như một đối đại số trên R.*

Trong mục 3.4 chúng tôi nghiên cứu cấu trúc của một lược đồ nhóm affine trên một vành định giá rời rạc sử dụng kĩ thuật nổ Neron (xem [30, Sect1]). Cụ thể hơn, một cấu xạ giữa hai lược đồ mà nó cảm sinh một đẳng cấu trên thớ tổng quát có thể được mô tả như phép hợp thành của (có thể vô hạn) các phép nổ Neron (Định lí 3.4.6) và mô tả này được sử dụng để đưa ra cấu trúc cho lược đồ nhóm affine phẳng:

Định lí 3.4.9. *Cho G là một lược đồ nhóm phẳng trên một vành định giá rời rạc R. Khi đó G có thể viết như là giới hạn của một hệ xạ ảnh của các lược đồ nhóm phẳng trên R*

$$G := \varprojlim_i G_i,$$

trong đó tất cả các cấu xạ chuyển đều là phẳng trung thành và mỗi thớ tổng quát của G_i đều thuộc kiểu hữu hạn trên K. Hơn nữa, mỗi G_i đều có thể thu được từ một lược đồ nhóm phẳng kiểu hữu hạn bởi hợp thành (có thể vô hạn) của một dãy các phép nổ Neron.

Chú ý rằng tính phẳng trung thành ở mỗi đồng cấu chuyển trong công thức trên đến từ việc thương $R[G]$ trên $R[G_i]$ đều phẳng trên R (sử dụng kết quả của Định lí 3.2.1 cho các đại số Hopf giao hoán). Ở đây Định lí 3.2.1 là một ứng dụng của tiêu chuẩn cho tính phẳng trung thành được trình bày ở cuối Chương 1. Với giả thiết R là vành Dedekind chúng tôi chứng minh được:

Định lí 1.4.4. (Tiêu chuẩn cho tính phẳng trung thành) *Cho A là một R-đại số và B là một A-môđun sao cho A, B đều phẳng trên R. Khi đó B là phẳng trung thành trái trên A khi và chỉ khi B_k là phẳng trung thành trái trên A_k đối với trường phân thức và mọi trường thặng dư của R.*

Định lí 3.2.1 được phát biểu như sau: *"Một đại số Hopf giao hoán phẳng trung thành trên đại số Hopf con của nó khi và chỉ khi môđun thương của chúng phẳng trên R"*. Đây là kết quả mở rộng cho trường hợp cổ điển: *"trên một trường mỗi đại số Hopf giao hoán đều phẳng trung thành trên đại số Hopf con của nó"*. Trên một trường, đối với các đại số Hopf không giao hoán đây vẫn còn là một giả thuyết. Tuy nhiên một phần của câu hỏi đã được trả lời bởi Nichols-Zoeller cho trường hợp các đại số hữu hạn chiều trong [20, Theorem 7]. Trường hợp cho đại số Hopf vô hạn chiều được giải quyết một phần bởi Schneider trong [26, Theorem 2.1 (2)]. Trong tình huống này các đại số Hopf đều tự do (do đó xạ ảnh, phẳng trung thành) trên các đại số Hopf con của nó. Các nghiên cứu trên nhằm trả lời cho giả thuyết của Kaplansky (xem [14]): "liệu rằng mỗi đại số Hopf (trên một trường) là tự do trên đại số Hopf con của nó ". Bài toán tự nhiên đặt ra là khi nào một đại số Hopf (không nhất thiết giao hoán) trên R là tự do hay yếu hơn là xạ ảnh hoặc phẳng trung thành trên một đại số Hopf con của nó. Phần cuối của luận án chúng tôi chứng minh hai định lí sau về tính phẳng trung thành và tính xạ ảnh cho các đại số Hopf trên vành Dedekind R như sau:

Định lí 4.1.14. *Cho B là một đại số Hopf phẳng trên R và A là một đại số Hopf con chuẩn tắc bão hòa của B. Giả sử rằng A là R-hữu hạn. Khi đó B là phẳng trung thành (trái và phải) như A-môđun. Hệ quả là B là đối phẳng trung thành (trái và phải) trên $C := B/A^+B$ và ta có các tương đương phạm trù $\mathcal{M}^C \cong \mathcal{M}_A^B$ và $\mathcal{M}_A \cong \mathcal{M}_B^C$.*

Định lí 4.2.9. *Cho B là một đại số Hopf R-xạ ảnh với tích phân khác không. Gọi A là một đại số Hopf con chuẩn tắc bão hòa và R-hữu hạn của B. Khi đó B là xạ ảnh như một A-môđun phải.*

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Nội dung chương này dành cho phần kiến thức chuẩn bị. Tuy nhiên chúng tôi sẽ giới thiệu một kết quả mới về *"tính phẳng trung thành"* trong [6] ở cuối chương.

1.1 Vành Dedekind

Để định nghĩa vành Dedekind trước tiên ta cần khái niệm của vành định giá rời rạc như sau.

Cho K là một trường. Một định giá rời rạc trên K là một ánh xạ ν từ $K^* := K \setminus \{0\}$ vào $\mathbb{Z}$ sao cho:

(i) $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$;

(ii) $\nu(x + y) \geq min(\nu(x), \nu(y))$.

Tập hợp R chứa 0 và tất cả $x \in K^*$ sao cho $\nu(x) \geq 0$ là một vành, được gọi là vành định giá của ν. Hơn nữa R là vành địa phương với iđêan cực đại duy nhất $m := \{x \in K^* : \nu(x) > 0\}$. Đây là một vành định giá của K. Để thuận tiện ta có thể mở rộng ν lên toàn bộ K bằng cách đặt $\nu(0) = +\infty$.

Định nghĩa 1.1.1. Cho R là một miền nguyên. Khi đó R được gọi là một vành định giá rời rạc nếu nó là vành định giá của một định giá rời rạc trên trường phân thức của nó.

Một vành định giá rời rạc (R, m) có m là một iđêan chính sinh bởi một phần tử π thường được gọi là phần tử đơn trị hóa của R. Ta cũng kí hiệu trường các thương là K và trường thặng dư $k := R/m$.

Ví dụ 1.1.2. (i) Cho p là một số nguyên tố. Có một định giá rời rạc $\nu_p : \mathbb{Q}^* \longrightarrow \mathbb{Z}$ xác định bởi $\nu_p(\frac{a}{b}) := \mathrm{ord}_p(a) - \mathrm{ord}_p(b)$ cho mọi số nguyên khác không a, b; ở đây kí hiệu $\mathrm{ord}(a) := max\{\alpha | \quad p^\alpha \quad \text{là ước của} \quad a\}$. Vành định giá rời rạc của ν_p chỉ là vành địa phương hóa $\mathbb{Z}_{(p)} = \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : a, b \in \mathbb{Z}, p \text{ không là ước của } \quad b\}$. Tương tự vành các số nguyên p-adic $\mathbb{Z}_p$ cũng là một vành định giá rời rạc.

(ii) Gọi $F = \mathbb{C}(t)$ là trường các hàm hữu tỉ một biến. Với $\alpha \in \mathbb{C}$, ta có thể định nghĩa một định giá $\nu_\alpha : \mathbb{C}(t)^* \longrightarrow \mathbb{Z}$ bởi $\nu_\alpha(f(x)) = n$ khi viết $f(t) = (t-\alpha)^n.\frac{g(t)}{h(t)}$ với điều kiện α không là nghiệm của $g(t), h(t)$. Vành định giá rời rạc của ν_α là vành địa phương hóa $\mathbb{C}[t]_{(t-\alpha)}$.

Người ta có thể dễ dàng kiểm tra rằng một vành định giá rời rạc là một miền nguyên Noether địa phương có chiều Krull bằng 1 và là một vành đóng nguyên.

Định lí 1.1.3. ([1, Theorem 9.3]) *Cho R là một miền nguyên Noether có chiều 1. Khi đó các điều sau là tương đương:*

(i) R là đóng nguyên;

(ii) Mỗi iđêan nguyên sơ trong R là một lũy thừa của iđêan nguyên tố;

(iii) Mỗi vành địa phương R_p (địa phương hóa tại một iđêan nguyên tố p khác 0) là một vành định giá rời rạc.

Định nghĩa 1.1.4. Một vành thỏa mãn một trong các điều kiện của Định lí 1.1.3 được gọi là một vành Dedekind.

Ví dụ 1.1.5. Vành đa thức một biến $k[t]$, hay vành các số nguyên $\mathbb{Z}$, hay vành tọa độ của đường cong trơn chiều 1, miền iđêan chính ... đều là các miền nguyên Dedekind.

Một miền nguyên Noether chiều 1 luôn có tính chất mỗi iđêan khác 0 có duy nhất một phân tích thành tích của các iđêan nguyên sơ mà các căn của chúng đều khác nhau [1, Proposition 9.1]. Do đó ta có hệ quả sau:

Hệ quả 1.1.6. ([1, Corollary 9.4]) *Trong một vành Dedekind mỗi iđêan khác* 0 *có duy nhất một phân tích thành tích của các iđêan nguyên tố.*

Mệnh đề 1.1.7. ([11, Proposition B. 86]) *Cho M là một môđun trên một vành Dedekind R. Khi đó:*

(i) M là môđun phẳng trên R khi và chỉ khi M không có xoắn trên R;

(ii) Nếu M là môđun phẳng và hữu hạn sinh trên R thì M là môđun xạ ảnh trên R.

Chú ý 1.1.8. Một môđun xạ ảnh trên vành địa phương là tự do. Do đó một môđun xạ ảnh trên một vành định giá rời rạc cũng một môđun tự do (chẳng hạn tham khảo [23]).

1.2 Đại số Hopf trên các vành Dedekind

Một số khái niệm và tính chất của mục này có thể đúng cho mọi vành giao hoán R ([13, Chapter 3]). Tuy nhiên trong phạm vi của luận án ta luôn giả thiết R là một vành Dedekind ngoài trừ mục 3.4 (R được giả sử là một vành định giá rời rạc). Các tích ten xơ nếu không chỉ ra cụ thể thì luôn được hiểu là tích ten xơ trên R.

1.2.1 Đối đại số và đối môđun trên một đối đại số

Cho L là một R-môđun. Một cấu trúc đối đại số trên L bao gồm hai ánh xạ R-tuyến tính $\Delta : L \longrightarrow L \otimes L$ và $\epsilon : L \longrightarrow R$ thỏa mãn các sơ đồ giao hoán sau:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & L \otimes L \arrow[d, "\Delta\otimes\mathsf{id}"] \\ L \otimes L \arrow[r, "\mathsf{id}\otimes\Delta"'] & L \otimes L \otimes L; \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "\cong"'] \arrow[d, "\Delta"] \arrow[dr, "\cong"] & \\ R \otimes L & L \otimes L \arrow[l, "\epsilon\otimes\mathsf{id}"] \arrow[r, "\mathsf{id}\otimes\epsilon"'] & L \otimes R \end{tikzcd}$$

tức là

$$\begin{cases} (\Delta \otimes \mathsf{id}) \circ \Delta = (\mathsf{id} \otimes \Delta) \circ \Delta; \\ (\epsilon \otimes \mathsf{id}) \circ \Delta = (\mathsf{id} \otimes \epsilon) \circ \Delta = \mathsf{id}. \end{cases}$$

Ánh xạ Δ được gọi là ánh xạ đối tích, ϵ được gọi là ánh xạ đối đơn vị. Chúng ta cũng có thể gọi các ánh xạ này là đối tích, đối đơn vị trên L cho gọn.

Ví dụ 1.2.1. (i) Vành đa thức một biến $R[X]$ là một đối đại số xác định bởi đối tích $\Delta : R[X] \longrightarrow R[X] \otimes R[X]$, $\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X$, đối đơn vị $\epsilon : R[X] \longrightarrow R$ là ánh xạ không $\epsilon(X) = 0$.

(ii) $R[X, X^{-1}]$ là một đối đại số với đối tích là $\Delta(X) = X \otimes X$ và đối đơn vị ϵ gửi X thành 1.

Định nghĩa 1.2.2. Một ánh xạ R-tuyến tính của các đối đại số $f : L' \longrightarrow L$ được gọi là một đồng cấu đối đại số nếu f thỏa mãn sơ đồ sau

$$\begin{tikzcd} L' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta'"'] & L \arrow[d, "\Delta"] \\ L' \otimes L' \arrow[r, "f\otimes f"'] & L \otimes L \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} L' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\epsilon"'] & L \arrow[d, "\epsilon"] \\ R \arrow[r, "\mathsf{id}"'] & R \end{tikzcd}$$

tức là $\Delta \circ f = (f \otimes f)\Delta'$ và $\epsilon \circ f = \mathsf{id} \circ \epsilon$.

Chẳng hạn, xét R như một đối đại số tầm thường trên R cho bởi $\Delta : R \longrightarrow R \otimes R, 1 \mapsto 1 \otimes 1$ và đối tích là ánh xạ đồng nhất trên R. Khi đó ánh xạ $\epsilon : L \longrightarrow R$ trong cấu trúc đối đại số của L là một đồng cấu đối đại số.

Định nghĩa 1.2.3. Cho L là một đối đại số trên R.

(i) Một đối môđun (phải) trên L là R-môđun M tương thích với ánh xạ R-tuyến tính $\rho : M \longrightarrow M \otimes L$ của L sao cho các biểu đồ sau là giao hoán

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & M \otimes L \arrow[d, "\mathsf{id}\otimes\Delta"] \\
M \otimes L \arrow[r, "\rho\otimes\mathsf{id}"'] & M \otimes L \otimes L
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\cong"'] & & M \otimes L \arrow[dl, "\mathsf{id}\otimes\epsilon"] \\
& M \otimes R &
\end{tikzcd}
$$

tức là thỏa mãn điều kiện

$$
\begin{cases}
(\rho \otimes \mathsf{id}) \circ \rho = (\mathsf{id} \otimes \Delta) \circ \rho; \\
(\mathsf{id} \otimes \varepsilon) \circ \rho = \mathsf{id}.
\end{cases}
$$

M Ánh xạ ρ được gọi là đối tác động của M lên L.

(ii) Cho (M, ρ_M) là một đối môđun trên L và N là một môđun con của M. Nếu giả sử L phẳng trên R thì $N \otimes L \subset M \otimes L$. Khi đó ta có thể định nghĩa N là đối môđun con của (M, ρ_M) nếu như $\rho(N) \subset N \otimes L$ đồng thời $\rho_N = (\rho_M)_{|N}$. Hơn nữa N cảm sinh một cấu trúc đối môđun trên L cho môđun thương M/N.

Phạm trù các đối môđun trên L sẽ được kí hiệu là $\mathsf{Comod}(\mathrm{L})$.

Định nghĩa 1.2.4. Cho M là một đối môđun trên đối đại số L. Khi đó M được gọi là L-đối môđun *hữu hạn* nếu nó hữu hạn sinh như R-môđun và *xạ ảnh hữu hạn* nếu nó xạ ảnh và *hữu hạn* trên R. Phạm trù con đầy của các L-đối môđun *hữu hạn* sẽ được kí hiệu là $\mathsf{Comod}_{\mathrm{f}}(L)$ và phạm trù con đầy các L-đối môđun *xạ ảnh hữu hạn* là $\mathsf{Comod}^{o}(L)$.

Nhận xét 1.2.5. (i) Phạm trù $\mathsf{Comod}(L)$ đóng với việc lấy tích ten xơ, lũy thừa ngoài, lũy thừa đối xứng, tổng trực tiếp hay giao của các đối môđun con.

(ii) Nếu $M \in \mathsf{Comod}^{\mathrm{o}}(L)$ thì đối ngẫu của nó $M^{\vee} := \mathsf{Hom}(M, R)$ cũng nằm trong $\mathsf{Comod}^{\mathrm{o}}(L)$.

Định nghĩa 1.2.6. Cho M và N là hai đối môđun trên một đối đại số L. Một ánh xạ R-tuyến tính $f : M \longrightarrow N$ là một đồng cấu L-đối môđun nếu sơ đồ sau giao hoán

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho"'] & N \arrow[d, "\rho'"] \\ M \otimes L \arrow[r, "f\otimes \mathsf{id}"'] & N \otimes L \end{tikzcd}$$

tức là $\rho' f = (f \otimes \mathsf{id})\rho$. Tập các đồng cấu giữa các $L-$đối môđun M, N cũng là một đối môđun trên L thường kí hiệu là $\mathrm{Hom}^L(M, N)$.

Nếu giả sử L là R-phẳng thì phạm trù các L-đối môđun $\mathsf{Comod}(L)$ là một phạm trù aben R-tuyến tính. Đặc biệt với giả thiết này trên L ta có $\mathsf{ker} f$ cũng là một đối môđun con của M (xem [15, 2.9]).

Mệnh đề 1.2.7. ([15, 10.2]) *Cho M là một L-đối môđun. Khi đó,*

(i) Với mỗi $a \in R$, các R-môđun con

$$\ker(a_{|M}) := \{m \in M | am = 0\} \text{ và } \quad aM = \{am| \quad m \in M\}$$

đều là các đối môđun con của M;

(ii) Với mỗi đối môđun M, phần xoắn

$$M_{\mathrm{tor}} = \bigcap\nolimits_{a\in R, a\neq 0} \ker(a_{|M})$$

cũng là một đối môđun con.

Từ điều trên ta thấy ngay thương M/M_{tor} là một đối môđun và không có xoắn. Do đó nó là môđun phẳng trên R và đặc biệt nó là môđun xạ ảnh trên R nếu M *hữu hạn.*

Bổ đề sau chỉ ra mỗi đối môđun M đều là hợp của các đối môđun con *hữu hạn* của nó, đặc biệt mỗi đối đại số là hợp của các đối đại số con *hữu hạn*, tham khảo thêm [42, I.5. Corollare] hoặc [15, Section 2.13].

Bổ đề 1.2.8. (Tính hữu hạn địa phương) *Với mỗi tập con hữu hạn S của một đối môđun M trên L, luôn tồn tại một đối môđun con N hữu hạn của M chứa S.*

1.2.2 Song đại số và đại số Hopf

Các khái niệm sau đây có thể tham khảo trong [13, Section 3.1, 3.2].

Định nghĩa 1.2.9. Cho L là một R-môđun. Cấu trúc đại số trên L là một cặp gồm hai ánh xạ tuyến tính $m : L \otimes L \longrightarrow L$ và $e : R \longrightarrow L$ thỏa mãn các sơ đồ giao hoán sau:

$$
\begin{tikzcd}
L \otimes L \otimes L \arrow[r, "m \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes m"'] & L \otimes L \arrow[d, "m"] \\
L \otimes L \arrow[r, "m"'] & L
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
R \otimes L \arrow[r, "e \otimes \mathrm{id}"] \arrow[dr, "\cong"'] & L \otimes L \arrow[d, "m"] & L \otimes R \arrow[l, "\mathrm{id} \otimes e"'] \arrow[dl, "\cong"] \\
& L &
\end{tikzcd}
$$

Định nghĩa 1.2.10. Cho L là một R-môđun. Một cấu trúc song đại số trên R là một bộ $(L, m, e, \Delta, \epsilon)$ sao cho

a) (L, m, e) là một đại số;

b) (L, Δ, ϵ) là một đối đại số;

c) $\Delta : L \longrightarrow L \otimes L$ và $\epsilon : L \longrightarrow R$ đều là các đồng cấu đại số.

Mệnh đề sau đây chỉ ra định nghĩa trên là tự đối ngẫu và có thể dễ dàng kiểm tra.

Mệnh đề 1.2.11. *Cho $(L, m, e, \Delta, \epsilon)$ là một bộ thỏa mãn hai điều kiện a) và b) của định nghĩa trên. Khi đó các khẳng định sau là tương đương:*

(i) m và e là các đồng cấu đối đại số;

(ii) Δ và ϵ là các đồng cấu đại số.

Ví dụ 1.2.12. (i) R là một song đại số trên chính nó với cấu trúc song đại số được cho bởi $m = e = \Delta = \epsilon = id$.

(ii) Cho Γ là một vị nhóm (nửa nhóm với đơn vị). Khi đó đại số nhóm $R[\Gamma]$ của nó là một song đại số với đối tích và đối đơn vị cho bởi

$$\Delta(g) = g \otimes g, \epsilon(g) = 1, \forall g \in G.$$

(iii) Các đối đại số trong Ví dụ 1.2.1 đều là các song đại số một cách tự nhiên.

(iv) Vành thương $R[X_{11}, X_{12}, ..., X_{nn}, Y]/(det(X_{ij})Y - 1)$là một song đại số. Đối tích của song đại số này được cho bởi $X_{ij} \mapsto \sum_l X_{il} \otimes X_{lj}$, đối đơn vị gửi X_{ij} thành δ_{ij} (kí hiệu Kronecker).

Một đồng cấu của các song đại số là một ánh xạ R-tuyến tính sao cho nó vừa là đồng cấu của các đại số vừa là đồng cấu của các đối đại số.

Định nghĩa 1.2.13. Một phép đối thế cho một song đại số L là một ánh xạ R-tuyến tính $S : L \longrightarrow L$ sao cho biểu đồ sau giao hoán

$$\begin{tikzcd}
 & L \otimes L \arrow[rr, "S\otimes \mathsf{id}_L"] & & L \otimes L \arrow[dr, "m"] & \\
L \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[rr, "\epsilon"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & R \arrow[rr, "e"] & & L \\
 & L \otimes L \arrow[rr, "\mathsf{id}_L\otimes S"'] & & L \otimes L \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}.$$

Một song đại số trên R được trang bị một phép đối thế S gọi là đại số Hopf.

Định nghĩa 1.2.14. Một đối môđun J trên một đại số Hopf L được gọi là tầm thường nếu ánh xạ đối tác động biến m thành $m \otimes 1 \in J \otimes L$ với mọi $m \in J$. Đối môđun con tầm thường cực đại M^{triv} của một đối môđun M gồm các phần tử m sao cho $\rho(m) = m \otimes 1$.

Nhận xét 1.2.15. Đối môđun thương M/M^{triv} là phẳng như R-môđun. Thật vậy, nếu ta có $v = au$, $a \in R$, $u \in M$ thì từ đẳng thức $\rho(au) = au \otimes 1$ và tính phẳng của $M \otimes L$ ta kết luận được $\rho(u) = u \otimes 1$. Vậy M/M^{triv} không có xoắn trên R và do đó phẳng. Hơn nữa, nếu cho M, N là hai đối môđun trên L trong đó M là *hữu hạn* thì áp dụng điều này cho đối môđun $N \otimes M^\vee$ ta được bao hàm thức $(N \otimes M^\vee)^{\text{triv}} \subset N \otimes M^\vee$ cũng bão hòa (môđun thương là phẳng trên R). Điều này suy ra bao hàm thức

$$\mathrm{Hom}^L(M, N) \subset \mathrm{Hom}_R(M, N)$$

cũng bão hòa. Điều này suy ra từ các đẳng cấu sau

$$\mathrm{Hom}^L(M, N) \cong \mathrm{Hom}^L(R, N \otimes M^\vee) = (N \otimes M^\vee)^{\mathrm{triv}}$$

và

$$N \otimes M^\vee \cong \mathrm{Hom}_R(M, N).$$

Chú ý 1.2.16. Một đại số Hopf là giao hoán nếu nó giao hoán như một R-đại số. Vành tọa độ của một lược đồ nhóm affine luôn là một đại số Hopf giao hoán.

Định nghĩa 1.2.17. Một lược đồ nhóm affine G trên R là một hàm tử biểu diễn được đi từ phạm trù các R-đại số giao hoán Alg_R đến phạm trù các tập hợp $Sets$ có ảnh nằm trong phạm trù các nhóm, $G : \mathsf{Alg}_R \longrightarrow \mathcal{G}rs$, tức là tồn tại một $R-$đại số giao hoán, kí hiệu là $R[G]$, sao cho

$$G(A) = \mathsf{Hom}_{R-\mathsf{Alg}}(R[G], A),$$

với mọi R-đại số $A \in \mathsf{Alg}_R$. Khi đó $R[G]$ được gọi là vành tọa độ của G.

Vành tọa độ $L := R[G]$ của lược đồ nhóm affine G có cấu trúc cảm sinh từ các phép toán trên nhóm. Thật vậy, hàm tử $G \times G$ xác định bởi $A \longrightarrow G(A) \times G(A)$ được biểu diễn bởi tích ten xơ $L \otimes L$. Theo Bổ đề Yoneda cấu xạ của các hàm tử $m : G \times G \longrightarrow G$ xác định duy nhất một đồng cấu giữa các R-đại số $\Delta : L \longrightarrow L \otimes L$. Tương tự đối với đơn vị và nghịch đảo ta lần lượt thu được ánh xạ đối đơn vị $\epsilon : L \longrightarrow R$ và phép đối thế $S : L \longrightarrow L$.

Hơn nữa các điều kiện về tính kết hợp, có đơn vị và khả nghịch cho các nhóm tương ứng với các điều kiện đối kết hợp, đối đơn vị và đối thế trên L cho bởi các biểu đồ sau:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"] & L \otimes L \arrow[d, "\Delta\otimes\mathsf{id}"] \\ L \otimes L \arrow[r, "\mathsf{id}\otimes\Delta"'] & L \otimes L \otimes L \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} L \arrow[r, "\Delta"] \arrow[dr, "\mathsf{id}"'] & L \otimes L \arrow[d, "\epsilon\otimes\mathsf{id}"] \\ & L \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} L \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"] \arrow[dr, "S"] & L \otimes L \arrow[d, "m\circ(S\otimes\mathsf{id})"] \\ L \otimes L \arrow[r, "m\circ(\mathsf{id}\otimes S)"'] & L. \end{tikzcd}$$

Từ điều này và từ định nghĩa trên ta có thể thấy vành tọa độ của một lược đồ nhóm affine là một đại số Hopf giao hoán.

Ví dụ 1.2.18. a) Hàm tử $\mathbb{G}_a : A \longmapsto A^+$, (nhóm cộng của A), là lược đồ nhóm affine trên R, và $\mathbb{G}_a$ được biểu diễn bởi đại số $R[X]$. Ánh xạ đối tích xác định bởi $\Delta : R[X] \longrightarrow R[X] \otimes R[X]$, $\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X$, ánh xạ đối đơn vị $\epsilon : R[X] \longrightarrow R$ là ánh xạ không $\epsilon(X) = 0$ và phép đối thế $S : R[X] \longrightarrow R[X]$ được cho bởi $S(X) = -X$.

b) Hàm tử $\mathbb{G}_m$ xác đinh bởi $\mathbb{G}_m(A) = A^*$ (các phần tử khả nghịch của A) là lược đồ nhóm affine trên R, được biểu diễn bởi đại số $R[X, X^{-1}]$. Đối tích trên $R[X, X^{-1}]$ xác định bởi $\Delta(X) = X \otimes X$, đối đơn vị gửi X thành 1, và phép đối thế biến X thành X^{-1}.

c) Tương tự, hàm tử $\mathbb{GL}_n : A \longmapsto \mathbb{GL}_n(A)$ là lược đồ nhóm affine trên R, được biểu diễn bởi đại số $R[X_{11}, X_{12}, ..., X_{nn}, Y]/(det(X_{ij})Y - 1)$. Đối tích được cho bởi $X_{ij} \mapsto \sum_l X_{il} \otimes X_{lj}$, đối đơn vị gửi X_{ij} thành δ_{ij} (kí hiệu Kronecker) và phép đối thế đến từ ma trận khả nghịch.

Một đồng cấu giữa các lược đồ nhóm affine $G \longrightarrow G'$ là một biến đổi tự nhiên của các hàm tử. Hơn nữa, đồng cấu này theo Bổ đề Yoneda sẽ cảm sinh một đồng cấu giữa các đại số Hopf $R[G'] \longrightarrow R[G]$.

Định nghĩa 1.2.19. ([15, Section 2.2]) Cho G là một lược đồ nhóm affine. Một G-môđun là một R-môđun M xét như một hàm tử $M_a : \mathsf{Alg}_R \longrightarrow \mathcal{G}rs$ xác định bởi $M_a(A) = (M \otimes A, +)$ cho mỗi $A \in \mathsf{Alg}_R$ sao cho tác động của $G(A)$ lên $M_a(A)$ là A-tuyến tính.

Dễ dàng kiểm tra được mỗi biểu diễn của G xác định một G-môđun và ngược lại.

Mệnh đề 1.2.20. ([15, Section 2.8]) *Cho G là một lược đồ nhóm trên R. Với mỗi R-môđun M tùy ý, có một tương ứng 1-1 giữa các G-môđun và các cấu trúc đối môđun của M trên $R[G]$.*

Đặt $L := R[G]$ là vành tọa độ của G. Theo định nghĩa các G-môđun là các L-đối môđun, các G-môđun mà hữu hạn sinh và xạ ảnh như các R-môđun được gọi là các biểu diễn của G.

Nhận xét 1.2.21. (i) Phạm trù các G-môđun thường kí hiệu là $\mathsf{Rep}(G)$ và được đồng nhất với phạm trù các đối môđun $\mathsf{Comod}(L)$.

(ii) Tương tự, phạm trù của các G-môđun *hữu hạn* được kí hiệu bởi $\mathsf{Rep}_{\mathrm{f}}(G)$ sẽ được đồng nhất với $\mathsf{Comod}_{\mathrm{f}}(L)$. Một vật trong $\mathsf{Comod}_{\mathrm{f}}(L)$ sẽ có đối ngẫu nếu như nó phẳng như R-môđun (vì trên một vành Dedekind R nó trở thành môđun xạ ảnh trên R). Ta sẽ kí hiệu phạm trù con đầy của $\mathsf{Rep}_{\mathrm{f}}(G)$ bao gồm tất cả các vật có đối ngẫu là $\mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(G)$ và nó được đồng nhất với phạm trù $\mathsf{Comod}^{\mathrm{o}}(L)$.

1.2.3 Không gian hệ số, đối môđun con đặc biệt và thương con đặc biệt

Bây giờ ta sẽ nghiên cứu một lớp đối đại số con của một đối đại số L. Các đối đại số con này được cảm sinh từ các đối môđun như sau. Cho M là L-đối môđun *xạ ảnh hữu hạn*, đối tác động $M \longrightarrow M \otimes L$ cảm sinh một đối tác động lên $M^\vee := \mathrm{Hom}_R(M, R)$ và một ánh xạ

$$M^\vee \otimes M \longrightarrow L, \quad \varphi \otimes m \mapsto \sum \varphi(m_i)m_i', \quad \varphi \in M^\vee, m \in M,$$

ở đây $\Delta(m) = \sum_i m_i \otimes m_i'$. Đây là một đồng cấu giữa các đối đại số và ảnh của nó cũng là một đối đại số trên L và thường được gọi là không gian hệ số của M, kí hiệu là $\mathrm{Cf}(M)$.

Nhận xét 1.2.22. Kí hiệu ε_M là hạn chế của ε lên M, khi đó $\varepsilon_M \otimes m \mapsto \sum_i \varepsilon(m_i)m_i' = m$. Trong trường hợp $M \subset L$ là hữu hạn, $\mathrm{Cf}(M)$ là một đối đại số con của L chứa M. Hệ quả là mỗi đối đại số là hợp của các đối đại số con *hữu hạn*.

Bổ đề 1.2.23. ([8, Lemma 9]) *Cho* $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$ *là một dãy khớp của các L-đối môđun và là xạ ảnh như R-môđun. Khi đó* $\mathrm{Cf}(N)$ *chứa cả hai* $\mathrm{Cf}(M)$ *và* $\mathrm{Cf}(P)$.

Định nghĩa 1.2.24. Cho L là một đối đại số phẳng trên R.

(i) Một đối môđun con N của L-đối môđun M được gọi là *đặc biệt* nếu N bão hòa trong M hay M/N phẳng trên R.

Theo định nghĩa, các đối môđun $M^{triv}, M_{\mathrm{tor}}$ đều là các đối môđun con đặc biệt của M.

(ii) Một *thương con đặc biệt* M của L-đối môđun N là môđun con đặc biệt của thương của N. Khi N xạ ảnh như R-môđun, khái niệm này tương đương với M là thương đặc biệt của một môđun con đặc biệt của N.

Xét một đối đại số phẳng L trên R và V là một đối mô đun R-hữu hạn trên L. Kí hiệu $\langle V\rangle$ cho phạm trù con đầy sinh ra từ V bao gồm các thương con của các tổng trực tiếp của V. Khi V xạ ảnh trên R ta kí hiệu $\langle V\rangle^s$ là phạm trù con đầy của $\langle V\rangle$ bao gồm các *thương con đặc biệt* (hay thương đặc biệt của các vật con đặc biệt). Bổ đề sau đây mô tả cụ thể phạm trù này theo các đối môđun trên đối đại số con $\mathrm{Cf}(V)$.

Bổ đề 1.2.25. ([4, Lemma 1.1.7]) *Cho V là một đối môđun R-hữu hạn và xạ ảnh như R-môđun trên một R-đối đại số phẳng L. Khi đó phạm trù $\langle V\rangle^s$ tương đương với* $\mathsf{Comod}^o(\mathrm{Cf}(V))$.

1.2.4 Chuyển cơ sở lên thớ tổng quát và dàn của các đối môđun

Giả sử L là một đối đại số phẳng (tương ứng đại số Hopf) trên R và đặt $L_K := L\otimes_R K$, ở đây K là trường phân thức của R. Khi đó L_K là một đối đại số (tương ứng đại số Hopf) trên trường K. Nếu $V \in \mathsf{Comod}^{\mathrm{o}}(L)$ thì $V_K := V \otimes_R K$ là một đối môđun trên L_K. Hơn nữa, nếu $V, W \in \mathsf{Comod}^{\mathrm{o}}(L)$, ánh xạ tự nhiên

$$\mathrm{Hom}^L(V, W) \otimes_R K \longrightarrow \mathrm{Hom}^{L_K}(V_K, W_K)$$

là một đẳng cấu. Thật vậy, nếu $f \in \mathrm{Hom}^{L_K}(V_K, W_K)$ thì tồn tại $0 \neq a \in R$ sao cho $af : V \longrightarrow W$. Khi đó ta có được $f = af \otimes a^{-1}$.

Chú ý 1.2.26. Ngược lại, cho X là một đối môđun chiều hữu hạn của L_K. Một *dàn* trong X là một R môđun con M hữu hạn sinh trên R trong X sao cho $M \otimes K \cong X$. Chú ý rằng $X \otimes_K L_K \cong X \otimes_R L$. Do đó X là một L-đối môđun. Gọi (e_i) là một cơ sở cho X. Khi đó bởi tính hữu hạn địa phương, tồn tại một L-đối môđun *hữu hạn* M chứa (e_i). Bây giờ M là xạ ảnh trên R chứa một cơ sở của X, hệ quả là $M_K \cong X$. Nói chung M xác định không duy nhất. Các khái niệm và các tính chất của một *dàn* có thể tìm thấy trong [15, Section 10.4].

Như vậy tích ten xơ trên K cho phép ta định nghĩa phạm trù $\mathsf{Comod}^{\mathrm{o}}(L)_K$ như là mở rộng vô hướng của các phạm trù $\mathsf{Comod}^{\mathrm{o}}(L)$ theo cách như sau: *"các vật trong* $\mathsf{Comod}^{\mathrm{o}}(L)_K$ *là các vật trong* $\mathsf{Comod}^{\mathrm{o}}(L)$ *và các cấu xạ là các cấu xạ trong* $\mathsf{Comod}_{\mathrm{f}}(L_K)$*".*

Nhận xét 1.2.27. Tương tự, với một lược đồ nhóm affine G trên R có thớ tổng quát G_K, phạm trù $\mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(G)$ có thể mở rộng vô hướng lên K thành phạm trù $\mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(G)_K$ và về sau sẽ được đồng nhất với $\mathsf{Rep}_{\mathrm{f}}(G_K)$ (phạm trù của các biểu diễn hữu hạn chiều của G_K).

Một cách tổng quát hơn, chúng ta có thể mở rộng vô hướng cho các phạm trù R-tuyến tính.

Định nghĩa 1.2.28. Cho $\varphi : R \longrightarrow R'$ là một đồng cấu vành và $\mathcal{C}$ là một phạm trù R-tuyến tính, tức là, với mỗi cặp $X, Y \in \mathcal{C}$ tập các cấu xạ $\mathrm{Hom}(X, Y)$ là một R-môđun và các ánh xạ hợp thành $\mathrm{Hom}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X, Z)$ là R-song tuyến tính. Phạm trù $\mathcal{C}_{R'}$ thu được từ $\mathcal{C}$ bởi mở rộng vô hướng φ được định nghĩa như sau: các vật của $\mathcal{C}_{R'}$ cũng giống như của $\mathcal{C}$ và với hai vật X và Y trong $\mathcal{C}_S$ thì tập các cấu xạ là

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_{R'}}(X, Y) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \otimes_R R'.$$

Vậy chúng ta có một phạm trù mới R'-tuyến tính cùng với một hàm tử R-tuyến tính $\varphi_* : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_{R'}$.

Nhận xét 1.2.29. Với giả thiết (C) như trên.

(i) Nếu $\varphi : R \longrightarrow R'$ là phẳng thì φ_* bảo toàn các đơn cấu và toàn cấu (xem [31, 3.6]).

(ii) Giả sử $\mathcal{C}'$ là phạm trù R-tuyến tính khác và $\omega : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ là một hàm tử R-tuyến tính. Khi đó ta có một hàm tử tự nhiên

$$\omega_{R'} : \mathcal{C}_{R'} \longrightarrow \mathcal{C}'_{R'}.$$

(iii) Nếu φ là phẳng và ω là trung thành thì ω_K cũng có tính chất tương tự (xem [31, 3.7]).

Giả sử $\mathcal{C}$ là một phạm trù R-tuyến tính cộng tính. Ta có mối liên hệ giữa các cấu xạ trong $\mathcal{C}$ và trong mở rộng vô hướng lên thớ tổng quát $\mathcal{C}_K$ như sau. Cho phần tử $a \in R$ và các vật X, Y trong $\mathcal{C}$, ta sẽ kí hiệu $[a]$ là cấu xạ $X \longrightarrow Y$ được cảm sinh bằng cách nhân với a. Đồng thời kí hiệu $[a] \circ f = f \circ [a]$ đơn giản chỉ là af. Nếu $f : X_K \longrightarrow Y_K$ là một cấu xạ trong $\mathcal{C}_K$ thì luôn có một $a \in R$ (không duy nhất) sao cho af là một cấu xạ trong $\mathcal{C}$.

Bổ đề 1.2.30. ([4, Lemma 2.2.4]) *Giả sử $g : X \longrightarrow Y$ là cấu xạ sao cho $g : X_K \longrightarrow Y_K$ là một đẳng cấu. Khi đó tồn tại $a \in R$ và $h : Y \longrightarrow X$, sao cho $h \circ g = g \circ h = [a]$. Tổng quát hơn, cho các vật X, Y, Z nằm trong $\mathcal{C}$ và các các cấu xạ $f : X \longrightarrow Z$, $g : Y \longrightarrow Z$. Giả sử tồn tại $h : X_K \longrightarrow Y_K$ sao cho $g \circ h = f$. Khi đó tồn tại $a \in R$ và $h' : X \longrightarrow Y$ sao cho $ah = h'$ và $g \circ h' = af$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "a"] \arrow[d, "h'"'] & X \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Z. \end{tikzcd}$$

Cho L là một đối đại số phẳng và G là một lược đồ nhóm affine phẳng trên R. Ta có kết quả sau của Wedhorn về mở rộng vô hướng cho các phạm trù $\mathsf{Comod}^{\mathrm{o}}(L)$ và $\mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(G)$.

Mệnh đề 1.2.31. (i) (xem [31, 6.4]) *Cho L là một R-đối đại số phẳng. Khi đó $L_K = L \otimes_R K$, đây là một đối đại số trên K. Tích ten xơ trên K định nghĩa một hàm tử từ phạm trù $\mathsf{Comod}^{\mathrm{o}}(L)_K$ vào phạm trù $\mathsf{Comod}_{\mathrm{f}}(L_K)$. Hàm tử này xác định một tương đương phạm trù.*

(ii) (xem [31, 6.21]) *Cho G là một lược đồ nhóm affine phẳng trên R. Hàm tử định nghĩa trong (i) cho ta một tương đương giữa các phạm trù ten xơ $\mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(G)_K$ và $\mathsf{Rep}_{\mathrm{f}}(G_K)$.*

1.3 Một số khái niệm trong phạm trù cộng tính và phạm trù aben; phạm trù và hàm tử ten xơ

1.3.1 Hạch và ảnh của một cấu xạ trong một phạm trù cộng tính

Để định nghĩa cho dàn Tannaka trong chương tiếp theo ta sẽ cần các khái niệm về hạch và ảnh của các cấu xạ trong một phạm trù cộng tính.

Hạch của một cấu xạ

Cho $\mathcal{C}$ là một phạm trù cộng tính, tức là, tập các cấu xạ giữa hai vật tùy ý trong đó luôn có một cấu trúc nhóm aben và phép hợp thành giữa các cấu xạ là song cộng tính. Cho một cấu xạ $f : X \longrightarrow Y$ trong $\mathcal{C}$, hạt nhân của f được định nghĩa là vật cuối trong phạm trù các cấu xạ $h : Z \longrightarrow X$ thõa mãn $f \circ h = 0$:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[d, "\exists!\varphi"'] \arrow[dr, "h"] & & \\ \mathsf{ker} f \arrow[r, "i"'] & X \arrow[r, "f"'] & Y. \end{tikzcd}$$

Khi đó theo định nghĩa $i : \mathsf{ker} f \longrightarrow X$ luôn là một đơn cấu.

Ảnh của một cấu xạ và sự phân tích qua ảnh

Ảnh của một cấu xạ $f : X \longrightarrow Y$ là vật khởi đầu trong phạm trù của các phân tích có dạng $f = g \circ h$ với g là một đơn cấu, tức là, nếu $f = g'h'$ là một sự phân tích khác với đơn cấu g':

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "h"] \arrow[rr, bend left, "f"] \arrow[dr, "h'"'] & \mathsf{im}(f) \arrow[r, "g"] \arrow[d, dashed, "m"'] & Y \\
& Z \arrow[ur, "g'"'] &
\end{tikzcd}$$

tồn tại duy nhất một cấu xạ m sao cho $g = g'm$.

Ví dụ 1.3.1. (i) Một phạm trù aben tùy ý luôn có hạch và ảnh. Một hàm tử khớp giữa các phạm trù aben luôn bảo toàn hạch và ảnh.

(ii) Phạm trù $\mathsf{Mod}_{\mathrm{f}}(R)$ và $\mathsf{Mod}^{\mathrm{o}}(R)$ luôn có hạch và ảnh như thông thường, hàm tử quên luôn bảo toàn hạch và ảnh.

(iii) Đối với một lược đồ nhóm G trên R, phạm trù $\mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(G)$ có hạch và ảnh, và hàm tử quên từ $\mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(G)$ vào $\mathsf{Mod}^{\mathrm{o}}(R)$ cũng bảo toàn hạch và ảnh.

1.3.2 Ind-phạm trù của một phạm trù aben

Để đặc trưng phạm trù của các đối môđun trên một đối đại số (xem định lí của Saavedra [41, II, Théorème 2.6.1]) và sau cùng là xây dựng đối ngẫu Tannaka cho các phạm trù aben (xem [41, II, Théorème 4.1.1]), chúng ta cần mở rộng các phạm trù aben theo nghĩa của Ind-phạm trù (xem [38]).

Định nghĩa 1.3.2. Một phạm trù $\mathcal{I}$ được gọi là một phạm trù lọc nếu với mỗi cặp i, j của các vật trong $\mathcal{I}$ tồn tại một vật k sao cho $\mathsf{Hom}(i, k)$ và $\mathsf{Hom}(j, k)$ là khác rỗng và cho mỗi cặp $u, v : i \longrightarrow j$, tồn tại một cấu xạ $w : j \longrightarrow k$ sao cho $wu = wv$.

Định nghĩa 1.3.3. Cho $\mathcal{C}$ là một phạm trù aben. Phạm trù $\mathsf{Ind}(\mathcal{C})$ bao gồm các hàm tử $X : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$, với $\mathcal{I}$ là một phạm trù lọc. Chúng ta thường dùng kí hiệu X_i thay vì $X(i), i \in \mathcal{I}$, và viết

$$X = \varinjlim_{i \in \mathcal{I}} X_i.$$

Với hai vật $X = \varinjlim_{i \in \mathcal{I}} X_i$ và $Y = \varinjlim_{j \in \mathcal{J}} Y_j$, tập các cấu xạ giữa chúng được định nghĩa là

$$\mathsf{Hom}(X, Y) := \varprojlim_{i \in \mathcal{I}} \varinjlim_{j \in \mathcal{J}} \mathsf{Hom}(X_i, Y_j). \qquad \square$$

Nếu $\omega : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ là một hàm tử thì nó có thể mở rộng thành hàm tử

$$\mathsf{Ind}(\omega) : \mathsf{Ind}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{Ind}(\mathcal{D})$$

bằng cách đặt

$$\mathsf{Ind}(\omega)(\varinjlim_{i} X_i) := \varinjlim_{i} \omega(X_i).$$

Nhận xét 1.3.4. (i) Có một mô tả tương đương khác của $\mathsf{Ind}(\mathcal{C})$ như sau. Kí hiệu $\mathsf{Lex}(\mathcal{C}^{op}, \mathcal{S}ets)$ là phạm trù của các hàm tử khớp trái từ $\mathcal{C}^{op}$ đến phạm trù của các tập hợp. Cho $X = \varinjlim_i X_i$ chúng ta định nghĩa hàm tử

$$\varinjlim_{i} h_{X_i}(-) := \varinjlim_{i} \mathsf{Hom}(-, X_i) \in \mathsf{Lex}(\mathcal{C}^{op}, \mathcal{S}ets).$$

Bằng cách này ta thu được một hàm tử $\mathsf{Ind}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{Lex}(\mathcal{C}^{\mathsf{op}}, \mathcal{S}\mathsf{ets})$ cảm sinh một tương đương phạm trù (xem [34], I.8.3.3).

(ii) Giả sử rằng $\mathcal{C}$ là một phạm trù R-tuyến tính aben và Noether. Kí hiệu $\mathsf{Lex}_R(\mathcal{C}^{op}, \mathsf{Mod}(R))$ là phạm trù R-tuyến tính các hàm tử khớp trái từ $\mathcal{C}^{op}$ vào phạm trù các R môđun $\mathsf{Mod}(R)$. Khi đó theo kết quả của Gabriel trong [38, II]), hàm tử tự nhiên

$$\mathsf{Lex}_R(\mathcal{C}^{op}, \mathsf{Mod}(R)) \xrightarrow{\simeq} \mathsf{Lex}(\mathcal{C}^{op}, \mathcal{S}ets)$$

là một tương đương phạm trù (xem Gabriel [38, II]). Tóm lại với một phạm trù R-tuyến tính aben và Noether ta có một tương đương phạm trù

$$\mathsf{Ind}(\mathcal{C}) \simeq \mathsf{Lex}_R(\mathcal{C}^{op}, \mathsf{Mod}(R)), \quad X = \varinjlim_i X_i \longmapsto \varinjlim_i h_{X_i}(-).$$

Hơn nữa phạm trù $\mathsf{Ind}(\mathcal{C})$ là Noether địa phương và bao hàm $\mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{Ind}(\mathcal{C})$ đồng nhất $\mathcal{C}$ với phạm trù con đầy của các vật Noether trong $\mathsf{Ind}(\mathcal{C})$, [38, II,4, Thm.1].

Các ví dụ sau đây minh họa cho các Ind-phạm trù.

Ví dụ 1.3.5. (i) Phạm trù $\mathsf{Mod}_{\mathrm{f}}(R)$ của các R-môđun hữu hạn sinh, với R là một vành Noether, là một phạm trù Noether. Ind-phạm trù của nó rõ ràng là phạm trù $\mathsf{Mod}(R)$ của các R-môđun.

(ii) Giả sử L là đối đại số phẳng trên vành Noether R. Khi đó phạm trù aben $\mathsf{Comod}_{\mathrm{f}}(L)$ gồm các đối môđun mà hữu hạn sinh như R-môđun là Noether. Hơn nữa phạm trù $\mathsf{Comod}(L)$ của các L-đối môđun phải là Ind-phạm trù của phạm trù của $\mathsf{Comod}_{\mathrm{f}}(L)$.

Chú ý 1.3.6. Với giả thiết L phẳng trên R, mỗi L-đối môđun là hợp của các đối môđun con của nó. Hơn nữa các đối môđun con này là hữu hạn sinh trên R. Ngược lại, nếu R là Noether thì $\mathsf{Comod}(L)$ là Noether địa phương và $\mathsf{Comod}_{\mathrm{f}}(L)$ là phạm trù con đầy gồm các vật Noether.

1.3.3 Phạm trù và hàm tử ten xơ

Theo P. Deligne-J. Milne ([3, 2.1]) và Saavedra ([41, Chapitre I]) ta có các định nghĩa sau.

Định nghĩa 1.3.7. Cho $\mathcal{C}$ là một phạm trù. Một phạm trù ten xơ là một bộ $(\mathcal{C}, \otimes, \phi, \psi, (I, \lambda, \mu))$ cùng với hàm tử R-song tuyến tính $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}, (X, Y) \mapsto X \otimes Y$ cùng với các ràng buộc sau:

i) *Ràng buộc kết hợp*, tức là, có một đẳng cấu tự nhiên

$$\phi_{X,Y,Z} : X \otimes (Y \otimes Z) \cong (X \otimes Y) \otimes Z$$

với $X, Y, Z \in \mathcal{C}$. Hơn nữa, ϕ thỏa mãn biểu đồ giao hoán sau

$$\begin{tikzcd}
((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes T \arrow[r, "\phi_{X,Y,Z}\otimes 1_T"] \arrow[d, "\phi_{X\otimes Y,Z,T}"'] & (X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes T \arrow[r, "\phi_{X,Y\otimes Z,T}"] & X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes T) \arrow[d, "1_X\otimes\phi_{Y,Z,T}"] \\
(X \otimes Y) \otimes (Z \otimes T) \arrow[rr, "\phi_{X,Y,Z\otimes T}"'] & & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes T))
\end{tikzcd}$$

ii) *Ràng buộc giao hoán*, tức là, có một đẳng cấu tự nhiên

$$\psi_{X,Y} : X \otimes Y \cong Y \otimes X$$

tương thích với ϕ như sau

$$\begin{tikzcd}
& X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[r, "\phi"] & (Y \otimes Z) \otimes X \arrow[dr, "\phi^{-1}"] & \\
(X \otimes Y) \otimes Z \arrow[ur, "\phi^{-1}"] \arrow[dr, "\psi\otimes 1"'] & & & Y \otimes (Z \otimes X) \\
& (Y \otimes X) \otimes Z \arrow[r, "\phi^{-1}"'] & Y \otimes (X \otimes Z) \arrow[ur, "1\otimes\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

ii) *Tồn tại vật đơn vị* (I, λ, μ) là một trong $\mathcal{C}$ cùng với đẳng cấu tự nhiên (*ràng buộc đơn vị*) $\lambda_X : X \otimes I \cong X$ và $\mu_X : I \otimes X \cong X$

$$\begin{tikzcd}
X \otimes (I \otimes Y) \arrow[rr, "\phi_{X,I,Y}"] \arrow[dr, "1_X\otimes\mu_Y"'] & & (X \otimes I) \otimes Y \arrow[dl, "\lambda_X\otimes 1_Y"] \\
& X \otimes Y. &
\end{tikzcd}$$

Định nghĩa 1.3.8. Một phạm trù ten xơ được gọi là cứng nếu với mỗi vật X trong $\mathcal{C}$ đều tồn tại một vật $X^\vee \in \mathcal{C}$ và các cấu xạ $ev : X \otimes X^\vee \longrightarrow I$, $db : I \longrightarrow X \otimes X^\vee$ sao cho các hợp thành

$$X \xrightarrow{1_X\otimes db} X \otimes X^\vee \otimes X \xrightarrow{ev\otimes 1_X} X$$

$$X^\vee \xrightarrow{db\otimes 1_{X^\vee}} X^\vee \otimes X \otimes X^\vee \xrightarrow{1_{X^\vee}\otimes ev} X^\vee$$

là các cấu xạ đồng nhất.

Định nghĩa 1.3.9. Cho $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ là hai phạm trù ten xơ.

a) Một $\otimes$-hàm tử $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ là một hàm tử cùng với một đẳng cấu tự nhiên $\psi_{F(X),F(Y)} : F(X \otimes Y) \longrightarrow F(X) \otimes F(Y)$ tương thích với các *ràng buộc kết hợp, giao hoán, đơn vị.*

b) Một cấu xạ của các $\otimes$-hàm tử giữa hai phạm trù ten xơ là một phép biến đổi tự nhiên $F \longrightarrow G$ tương thích với đẳng cấu $\psi_{F(X),F(Y)}$.

Ví dụ 1.3.10. (i) Các phạm trù $\mathsf{Mod}(R), \mathsf{Mod}_{\mathrm{f}}(R)$ là các phạm trù ten xơ với tích ten xơ trên R và vật đơn vị cũng là R.

(ii) $\mathsf{Comod}(L)$ là một phạm trù ten xơ tương ứng với tích ten xơ trên R. Vật đơn vị là đối môdun tầm thường R. Phạm trù $\mathsf{Comod}^o(L)$ có tính chất mỗi vật trong nó đều có vật đối ngẫu.

(iii) Hàm tử quên $\omega : \mathsf{Comod}_{\mathrm{f}}(L) \longrightarrow \mathsf{Mod}_{\mathrm{f}}(R)$ là một $\otimes$-hàm tử.

Nhận xét 1.3.11. Cho $\varphi : R \longrightarrow R'$ là một đồng cấu vành và $\mathcal{C}$ là một phạm trù ten xơ R-tuyến tính. Khi đó hàm tử $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}, (X, Y) \mapsto X \otimes Y$ có thể mở rộng thành hàm tử song tuyến tính trên R', $\otimes_{R'} : \mathcal{C}_{R'} \times \mathcal{C}_{R'} \longrightarrow \mathcal{C}_{R'}$. Hơn nữa $\mathcal{C}_{R'}$ là cũng là một phạm trù ten xơ R'-tuyến tính.

Phần cuối chương này ta luôn giả sử R là vành Dedekind với trường phân thức K và với các trường thặng dư được kí hiệu là k. Các tích ten xơ khi không chỉ rõ ra luôn được hiểu là tích ten xơ trên R. Một đối đại số (tương ứng đại số Hopf) trên R được gọi là R-phẳng (tương ứng R-xạ ảnh, R-hữu hạn) nếu nó phẳng (tương ứng xạ ảnh, hữu hạn sinh) như R-môđun. Đầu tiên chúng tôi đưa ra tiêu chuẩn cho tính phẳng (trung thành) sau đó ứng dụng vào Chương 3 và Chương 4 trong luận án. Các kết quả sau đây được trình bày theo [6].

1.4 Tiêu chuẩn về tính phẳng (trung thành)

Trong mục này chúng tôi đưa ra tiêu chuẩn cho tính phẳng trung thành cho các R-đại số không nhất thiết giao hoán theo nghĩa của các thớ. Kết quả này là tổng quát kết quả của Grothendieck [39, Théorème (11.3.10), **28** (1966), 5-255]. Chứng minh được phát triển dựa trên ý tưởng của J.C. Moore [40].

Trước tiên ta cần định nghĩa về tính phẳng (trung thành) theo nghĩa của các môđun. Cho A là một vành kết hợp có đơn vị, kí hiệu ${}_A\mathcal{M}$ (tương ứng $\mathcal{M}_A$) là phạm trù các A-môđun trái (tương ứng phải).

Định nghĩa 1.4.1. Một A-môđun trái (tương ứng phải) B được gọi là phẳng trên A nếu hàm tử $-\otimes_A B$ (tương ứng $B\otimes_A -$) là khớp. B được gọi là phẳng trung thành trái trên A nếu B phẳng trái trên A và nếu với mọi $M \in \mathcal{M}_A$ thỏa mãn $M \otimes_A B = 0$ thì $M = 0$. Tính phẳng trung thành phải được định nghĩa một cách tương tự.

Bổ đề 1.4.2. (Định lí hệ số phổ dụng, [32, Theorem 3.6.1]) *Cho $\mathfrak{R}$ là một vành không nhất thiết giao hoán và $P_* = \{(P_i, d_i : P_i \longrightarrow P_{i-1})\}_i$ là một phức giảm của các $\mathfrak{R}$-môđun phải sao cho mỗi môđun con $d_i(P_i)$ của P_{i-1} cũng phẳng trên $\mathfrak{R}$. Khi đó với mỗi i và mỗi $\mathfrak{R}$-môđun trái Q có một dãy khớp*

$$0 \longrightarrow H_i(P_*) \otimes_{\mathfrak{R}} Q \longrightarrow H_i(P_* \otimes_{\mathfrak{R}} Q) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^{\mathfrak{R}}(H_{i-1}(P_*), Q) \longrightarrow 0.$$

Định lí 1.4.3. ([6, Lemma 3.1]) *Cho A là một đại số trên R và B là một A-môđun sao cho A, B đều phẳng trên R. Khi đó B là phẳng trên A như A-môđun (trái) nếu và chỉ nếu B_k là phẳng (trái) trên A_k đối với trường phân thức và mọi trường thặng dư của R.*

Chứng minh. Chúng ta chứng minh khẳng định ngược lại, tức là giả sử B_k là phẳng trên A_k đối với trường phân thức và mọi trường thặng dư của R. Trước tiên ta chỉ ra rằng B là phẳng trái trên A, tức là chỉ cần chỉ ra $\mathrm{Tor}_1^A(M, B) = 0$ cho mọi A-môđun phải M (xem [32, Exer. 3.2.1, p.69]). Ta luôn có thể chọn một giải xạ ảnh P_* của B trên A theo kết quả của [32, Lemma 2.2.5]. Vì A là R-phẳng nên giải P_* cũng phẳng và vì mỗi môđun con của một môđun R-phẳng cũng lại R-phẳng nên giải $P_* \longrightarrow B$ vẫn còn là một giải sau khi chuyển cơ sở. Hơn nữa, tính xạ ảnh cũng luôn bảo toàn qua việc chuyển cơ sở, vì vậy với mọi trường thặng dư $k := k_p$ ($p \in \operatorname{Spec}(R)$) ta có $P_* \otimes k$ cũng là một giải xạ ảnh của $B \otimes k$ trên $A \otimes k$. Chúng ta có

$$(M \otimes k) \otimes_{(A \otimes k)} (P_* \otimes k) \cong (M \otimes_A P_*) \otimes k.$$

Điều này suy ra

$$H_i((M \otimes_A P_*) \otimes k) \cong \operatorname{Tor}_i^{A \otimes k}(M \otimes k, B \otimes k), \text{ cho mọi } i \geq 0.$$

Trước tiên ta giả sử M là R-phẳng. Vì $M \otimes_A P_*$ cũng phẳng trên R nên ta có thể sử dụng định lí hệ số phổ dụng ở bổ đề trên. Do đó, với mỗi $i \geq 1$, ta có dãy khớp

$$0 \longrightarrow H_i(M \otimes_A P_*) \otimes k \longrightarrow H_i((M \otimes_A P_*) \otimes k) \longrightarrow \operatorname{Tor}_1^R(H_{i-1}(M \otimes_A P_*), k) \longrightarrow 0.$$

Tức là, với mọi $i \geq 1$,

$$0 \longrightarrow \operatorname{Tor}_i^A(M, B) \otimes k \longrightarrow \operatorname{Tor}_i^{A \otimes k}(M \otimes k, B \otimes k) \longrightarrow \operatorname{Tor}_1^R(\operatorname{Tor}_{i-1}^A(M, B), k) \longrightarrow 0.$$

Theo giả thiết $A \otimes k \longrightarrow B \otimes k$ là phẳng. Vậy $\operatorname{Tor}_i^{A \otimes k}(M \otimes k, B \otimes k) = 0$, cho mọi $i \geq 1$. Hệ quả là

$$\operatorname{Tor}_1^R(\operatorname{Tor}_{i-1}^A(M, B), k) = \operatorname{Tor}_i^A(M, B) \otimes k = 0, \text{ với mọi } i \geq 1.$$

Điều này đúng cho mọi trường thặng dư và trường phân thức của R, do đó $\operatorname{Tor}_i^A(M, B)$ là R-phẳng cho mọi $i \geq 0$ và ta kết luận được $\operatorname{Tor}_i^A(M, B) = 0$ cho mọi $i \geq 1$.

Bây giờ ta giả sử M là A-môđun tùy ý. Khi đó môđun con R-xoắn M_{tor} của M cũng là A-môđun con. Môđun thương M/M_{tor} là không xoắn và do đó phẳng trên R. Vì ta có dãy

$$\operatorname{Tor}_1^A(M_{tor}, B) \longrightarrow \operatorname{Tor}_1^A(M, B) \longrightarrow \operatorname{Tor}_1^A(M/M_{tor}, B) \longrightarrow \dots$$

là khớp nên chỉ cần chỉ ra rằng $\text{Tor}_1^A(M, B)$=0 cho M là R-môđun xoắn. Với mỗi iđêan khác không $p \in R$, môđun con M_p của các phần tử mà bị triệt tiêu bởi các phần tử của p cũng là A-môđun con. Vì M xoắn, nó là giới hạn trực tiếp của các M_p. Vì hàm tử Tor giao hoán với giới hạn trực tiếp nên ta có thể thay M bởi M_p. Hơn nữa trong một vành Dedekind, mỗi iđêan khác không p của R là tích của hữu hạn các iđêan nguyên tố, (Hệ quả 1.1.6). Do đó mỗi M_p có một cái lọc phân bậc, và mỗi môđun phân bậc bị triệt tiêu bởi một iđêan nguyên tố khác không. Vậy dùng quy nạp ta có thể quy về trường hợp M bị triệt tiêu bởi một iđêan nguyên tố p. Trong trường hợp này $M = M \otimes k_p$ là một $A \otimes k_p$-môđun, ở đây $k_p := R/p$ và

$$M \otimes_A P_* = M \otimes_{A \otimes k_p} (P_* \otimes k_p).$$

Vì $P_* \otimes_R k_p$ là một $A \otimes_R k_p$-giải xạ ảnh của $B \otimes_R k_p$, ta có

$$\text{Tor}_i^A(M, B) = \text{Tor}_i^{A \otimes k_p}(M, B \otimes k_p) = 0,$$

do $B \otimes k_p$ phẳng trên $A \otimes k_p$. □

Định lí 1.4.4. ([6, Proposition 3.2]) *Cho A là một R-đại số và B là một A-môđun sao cho A, B đều phẳng trên R. Khi đó B là phẳng trung thành trái trên A khi và chỉ khi B_k là phẳng trung thành trái trên A_k đối với trường phân thức và mọi trường thặng dư k của R.*

Chứng minh. Giả sử B là phẳng trên A, nghĩa là với mọi A-môđun phải M ta có $\text{Tor}_1^A(M, B) = 0$. Khẳng định này luôn đúng nếu R là một trường.

Với mọi trường thặng dư hoặc trường phân thức k của R, và với mọi A_k-môđun phải M thỏa mãn $M \otimes_{A_k} B_k = 0$, ta có $M \otimes_{A_k} B_k \cong M \otimes_A B = 0$, do đó $M = 0$. Vậy B_k phẳng trung thành trái trên A_k.

Ngược lại, giả sử B_k phẳng trung thành trái trên A_k. Theo định lí trên B là phẳng trên A như A-môđun trái. Việc còn lại phải chỉ ra tính trung thành của B trên A. Lấy một A-môđun phải tùy ý M sao cho $M \otimes_A B = 0$. Khi đó ta có

$$M_k \otimes_{A_k} B_k \cong (M \otimes_A B) \otimes_R k = 0$$

cho mọi trường thặng dư k. Vì B_k là phẳng trung thành trên A_k, ta có $M_k = 0$. Lập luận tương tự cũng đúng cho trường phân thức K. Điều này có nghĩa M là R-xoắn. Nếu M khác 0 thì M chứa các phần tử khác không bị triệt tiêu bởi một iđêan cực đại m nào đó. Kí hiệu M' là linh hóa tử của m trong M. Rõ ràng $M' \cong M'_k$ với $k = R/m$. Vì B là phẳng trên A nên $M' \otimes_A B \subset M \otimes_A B = 0$. Do đó $M'_k \otimes_A B = M' \otimes_A B = 0$. Tuy nhiên $M'_k = 0$ như đã chỉ ra, tức là, $M' = 0$. Điều này dẫn đến sự mâu thuẫn. Vậy B phẳng trung thành trên A. $\square$

Chương 2

Đối ngẫu Tannaka trên vành Dedekind

Trong [41, II.2.1], Saavedra chỉ ra một R-đối đại số phẳng có thể được xây dựng từ phạm trù các đối môđun hữu hạn sinh trên R của nó. Ông cũng đưa ra điều kiện để một phạm trù aben tương đương với phạm trù $\mathsf{Comod}_{\mathrm{f}}(L)$ ([41, II, Théorème 2.6.1]). Kết quả này được sử dụng để chứng minh đối ngẫu Tannaka cho các lược đồ nhóm phẳng trên các vành Dedekind ([41, II, Théorème 4.1.1]). Trong chương này chúng tôi đưa ra một chứng minh ngắn gọn cho kết quả của Saavedra, đồng thời liên hệ nó đến kết quả của Wedhorn và hoàn thiện đối ngẫu Tannaka trong trường hợp của phạm trù ten xơ cộng tính. Các kết quả trong chương này được trình bày theo các kết quả trong [4].

2.1 Đối ngẫu Tannaka cho các phạm trù aben

2.1.1 Phạm trù con xác định và đặc trưng cho phạm trù của các đối môđun

Cho L là một đối đại số phẳng trên vành định giá rời rạc R. Khi đó, kết quả của Serre (xem [42, Proposition 3]) chỉ ra rằng: với mỗi L-đối môđun E tồn tại một dãy khớp ngắn của các L-đối môđun

$$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

mà F', F phẳng như R-môđun. Lập luận của Serre vẫn còn đúng cho các đối đại số trên một vành Dedekind (tham khảo chứng minh trong [2, Lemma 1.4.1] cho trường hợp R là miền iđêan chính). Từ ý tưởng này (tham khảo thêm [41, II.2.2]) Saavedra đã đề xuất khái niệm sau.

Định nghĩa 2.1.1 (Phạm trù con xác định, xem [41, II.2.2])**.** Cho $\mathcal{C}$ là phạm trù aben R-tuyến tính; $\omega : \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{Mod}_{\mathrm{f}}(R)$ là một hàm tử R-tuyến tính trung thành và khớp. Giả sử rằng $\mathcal{C}^{\mathrm{o}}$ là một phạm trù con đầy của $\mathcal{C}$ sao cho

(i) với mỗi vật $X \in \mathcal{C}^o$, $\omega(X)$ là xạ ảnh và hữu hạn sinh như R-môđun;

(ii) mỗi vật của $\mathcal{C}$ là thương của một vật trong $\mathcal{C}^{\mathrm{o}}$.

Khi đó $\mathcal{C}^{\mathrm{o}}$ được gọi là một phạm trù con xác định của $\mathcal{C}$ tương ứng với ω.

Nhận xét 2.1.2. Từ định nghĩa ta thấy phạm trù $\mathsf{Comod}^{\mathrm{o}}(L)$ của các L-đối môđun mà phẳng và hữu hạn sinh trên R là phạm trù con xác định của $\mathsf{Comod}_{\mathrm{f}}(L)$. Đặc biệt, phạm trù con các môđun xạ ảnh trong $\mathsf{Mod}_{\mathrm{f}}(R)$ là phạm trù con xác định của $\mathsf{Mod}_{\mathrm{f}}(R)$.

Cho $\mathcal{C}$ là một phạm trù aben R-tuyến tính, và $\omega : \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{Mod}_{\mathrm{f}}(R)$ là một hàm tử R-tuyến tính trung thành và khớp. Giả sử rằng tồn tại một phạm trù con đầy $\mathcal{C}^{\mathrm{o}}$ và xác định $\mathcal{C}$. Nhiệm vụ của ta là chỉ ra rằng tồn tại một R-đối đại số L sao cho ω cảm sinh một tương đương phạm trù giữa

$\mathsf{Comod_f}(L)$ và $\mathcal{C}$ nhờ vào việc chỉ ra một sự tương đương giữa hai phạm trù $\mathsf{Comod}(L)$ và $\mathsf{Ind}(\mathcal{C})$.

Chú ý 2.1.3. Hàm tử ω cảm sinh hàm tử $\mathsf{Ind}(\omega) : \mathsf{Ind}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{Mod}(R)$. Để thuận tiện ta cũng kí hiệu nó là ω. Ta có thể đồng nhất $\mathsf{Ind}(\mathcal{C})$ với $\mathsf{Lex}(\mathcal{C}^{op}, \mathsf{Mod}(R))$ (phạm trù của các hàm tử khớp trái trên $\mathcal{C}^{op}$ với giá trị trong $\mathsf{Mod}(R)$, xem mục 1.3.2). Kĩ thuật chính trong chứng minh định lí của Saavedra ([41, II. Théorème 2.6.1]) là sử dụng luân phiên hai mô tả tương đương cho phạm trù $\mathsf{Ind}(\mathcal{C})$. Các cấu xạ cho các vật trong $\mathsf{Lex}(\mathcal{C}^{op}, \mathcal{S}ets)$ được định nghĩa bởi tập các biến đổi tự nhiên. Để đơn giản ta dùng kí hiệu $\mathsf{Hom}(F, G)$ thay vì $\mathsf{Nat}(F, G)$ trong quá trình chứng minh.

Cho một R-đại số A, ta định nghĩa hàm tử

$$F^A : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathsf{Mod}(A), \quad X \longmapsto \mathsf{Hom}(\omega(X), A).$$

Khi đó F^A là một vật của $\mathsf{Lex}(\mathcal{C}^{op}, \mathsf{Mod}(A))$. Đặt $F := F^R$. Ta có một biến đổi tự nhiên A-tuyến tính $A \otimes F \longrightarrow F^A$:

$$\theta_X : A \otimes \mathsf{Hom}(\omega(X), R) \longrightarrow \mathsf{Hom}(\omega(X), A), \quad a \otimes f \longmapsto af.$$

Bổ đề 2.1.4. ([4, A.1.6]) *Biến đổi tự nhiên A-tuyến tính $\theta : A \otimes F \longrightarrow F^A$ xác định ở trên là một đẳng cấu.*

Chứng minh. Với mọi $K, G \in \mathsf{Lex}(\mathcal{C}^{op}, \mathsf{Mod}(R))$ ta kí hiệu K°, G° lần lượt là hạn chế của chúng lên $(\mathcal{C}^{\circ})^{op}$. Từ định nghĩa của $\mathcal{C}^{\circ}$ chúng ta có

$$\mathsf{Hom}(K, G) := \mathsf{Nat}(K, G) \simeq \mathsf{Nat}(K^{\circ}, G^{\circ}). \tag{2.1.1}$$

Cho $X \in \mathcal{C}^{\circ}$, $\omega(X)$ là xạ ảnh và hữu hạn sinh trên R, do đó

$$F^A(X) = \mathsf{Hom}(\omega(X), R) \simeq \mathsf{Hom}(\omega(X), R) \otimes A = A \otimes F(X).$$

Vì vậy, với mọi $G \in \mathsf{Lex}(\mathcal{C}^{op}, \mathsf{Mod}(R))$, ta có

$$\mathsf{Hom}((F^A)^{\circ}, G^{\circ}) = \mathsf{Hom}((A \otimes F)^{\circ}, G^{\circ}) \tag{2.1.2}$$

và do đó

$$\mathsf{Hom}(F^A, G) = \mathsf{Hom}(A \otimes F, G). \tag{2.1.3}$$

cho mọi G. Vậy $F^A \simeq A \otimes F$. □

Bổ đề 2.1.5. ([4, A.1.7]) *Với mỗi $X \in \mathsf{Lex}(\mathcal{C}^{op}, \mathsf{Mod}(R))$ và R-đại số A ta có đẳng cấu A-tuyến tính:*

$$\mathsf{Hom}(X, F^A) \simeq \mathsf{Hom}_A(A \otimes \omega(X), A) = \mathsf{Hom}_R(\omega(X), A). \tag{2.1.4}$$

Chứng minh. Với mỗi $X \in \mathsf{Lex}(\mathcal{C}^{op}, \mathsf{Mod}(R))$ có thể viết $X = \varinjlim_i h_{X_i} (X_i \in \mathcal{C})$, ở đây h_{X_i} là một hàm tử trên $\mathcal{C}$ và được định nghĩa bởi $h_{X_i}(-) := \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X_i)$. Do đó

$$\begin{aligned}
\mathsf{Hom}(X, F^A) &= \mathsf{Hom}(\varinjlim h_{X_i}, F^A) \\
&= \varprojlim \mathsf{Hom}(h_{X_i}, F^A) \\
&= \varprojlim F^A(X_i) \\
&= \mathsf{Hom}_R(\varinjlim \omega(X_i), A) \\
&= \mathsf{Hom}_R(\omega(\varinjlim h_{X_i}), A) \\
&= \mathsf{Hom}_R(\omega(X), A).
\end{aligned}$$

Dễ dàng thấy được tất cả các đẳng cấu là A-tuyến tính. □

Đẳng cấu (2.1.4) áp dụng cho $A = R$ và $X = F$ cho ta $\mathsf{Hom}(F, F) \simeq \mathsf{Hom}_R(\omega(F), R)$. Đặt $L := \omega(F)$ và $\varepsilon : L \longrightarrow R$ là ánh xạ bên vế phải tương ứng với biến đổi tự nhiên mà là đồng nhất bên vế trái của đẳng cấu này.

Ta có thể thay thế A trong (2.1.4) bởi một R-môđun M. Lần này chúng ta có một đẳng cấu R-tuyến tính.

Bổ đề 2.1.6. ([4, A.1.8]) *Tồn tại một đẳng cấu R-tuyến tính*

$$\Phi_{X,M} : \mathsf{Hom}(X, M \otimes F) \simeq \mathsf{Hom}_R(\omega(X), M). \tag{2.1.5}$$

xác định bởi

$$\Phi_{X,M}(f) = (\mathsf{id}_M \otimes \varepsilon) \circ \omega(f).$$

Chứng minh. Cho một R-môđun M, ta có thể làm $R \oplus M$ trở thành một R-đại số. Do đó đẳng cấu (2.1.5) là hệ quả trực tiếp của (2.1.4). Từ định nghĩa, $\Phi_{F,R}$ được xác định bởi

$$\Phi_{F,R}(f) = \varepsilon \circ \omega(f).$$

Mỗi đồng cấu $\iota : R \longrightarrow M$ cảm sinh bởi tính hàm tử từ biểu đồ giao hoán sau

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Hom}(F, F) \arrow[r, "\varepsilon\circ\omega(-)"] \arrow[d, "(\iota\otimes\mathsf{id}_F)\circ-"'] & \mathsf{Hom}_R(\omega(F), R) \arrow[d, "\iota\circ-"] \\
\mathsf{Hom}(F, M \otimes F) \arrow[r, "\Phi_{F,M}"'] & \mathsf{Hom}_R(\omega(F), M)
\end{tikzcd}$$

Bây giờ, đồng nhất trên F cho ta đẳng thức:

$$\iota \circ \varepsilon = \Phi_{F,M}(\iota \otimes \mathsf{id}_{\omega(F)}) : \omega(F) \longrightarrow M.$$

Do đó, cho $m = \iota(1)$, ta có $\Phi_{F,M}(l) = \varepsilon(l)m$, $l \in \omega(F)$. Vậy khẳng định đúng cho trường hợp $X = F$. Vì ω và hàm tử Hom theo biến đầu tiên giao hoán với việc lấy giới hạn trực tiếp nên ta có thể kết luận mệnh đề đúng cho $X = N \otimes F$ với mọi R-môđun N. Trường hợp tổng quát được suy ra từ việc áp dụng cho đồng nhất của $M \otimes F$ và biểu đồ sau

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Hom}(M \otimes F, M \otimes F) \arrow[r, "\Phi_{F,M\otimes F}"] \arrow[d, "(-)\circ f"'] & \mathsf{Hom}(M \otimes \omega(F), M) \arrow[d, "(-)\circ\omega(f)"] \\
\mathsf{Hom}(X, M \otimes F) \arrow[r, "\Phi_{X,M}"'] & \mathsf{Hom}(\omega(X), M),
\end{tikzcd}$$

và cuối cùng ta thu được

$$\Phi_{X,M}(f) = \Phi_{F,M}(\mathsf{id}) \circ \omega(f) = (\mathsf{id}_M \otimes \varepsilon) \circ \omega(f).$$

□

Mệnh đề 2.1.7. ([4, A.1.9]) *Đặt $L := \omega(F)$. Khi đó ε trở thành ánh xạ đối đơn vị và ω phân tích qua*

$$\mathsf{Ind}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{Comod}(L).$$

Chứng minh. Chọn $M = \omega(X)$ trong (2.1.5) chúng ta có $\sigma_X : X \longrightarrow \omega(X) \otimes F$ tương ứng với phần tử đồng nhất $\mathsf{id}_{\omega(X)}$ qua đẳng cấu $\Phi_{X,\omega(X)}$ của Bổ đề 2.1.6, do đó ta có

$$(\mathsf{id}_{\omega(X)} \otimes \varepsilon) \circ \omega(\sigma_X) = \mathsf{id}_{\omega(X)}. \tag{2.1.6}$$

Với mọi cấu xạ $\lambda : X \longrightarrow Y$ trong $\mathsf{Ind}(\mathcal{C})$, theo Bổ đề 2.1.6 ta có các đẳng thức sau:

$$\begin{aligned}
&\Phi_{X,\omega(Y)}\left((\omega(\lambda) \otimes \mathsf{id}_F) \circ \sigma_X\right) = \omega(\lambda),\\
&\Phi_{X,\omega(Y)}\left(\sigma_Y \circ \lambda\right) = \omega(\lambda).
\end{aligned}$$

Vậy $(\omega(\lambda) \otimes \mathsf{id}_F) \circ \sigma_X = \sigma_Y \circ \lambda$, hay biểu đồ sau giao hoán:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\sigma_X"'] & Y \arrow[d, "\sigma_Y"] \\
\omega(X) \otimes F \arrow[r, "\omega(\lambda)\otimes\mathsf{id}_F"] & \omega(Y) \otimes F.
\end{tikzcd} \tag{2.1.7}$$

Cho $Y = \omega(X) \otimes F$ và $\lambda = \sigma_X$, chúng ta nhận được

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\sigma_X"] \arrow[d, "\sigma_X"'] & \omega(X) \otimes F \arrow[d, "\mathsf{id}_{\omega(X)}\otimes\sigma_F"] \\
\omega(X) \otimes F \arrow[r, "\omega(\sigma_X)\otimes\mathsf{id_F}"'] & \omega(X) \otimes L \otimes F
\end{tikzcd} \tag{2.1.8}$$

Tác động ω vào biểu đồ trên ta thu được một biểu đồ giao hoán trong $\mathsf{Mod}(R)$:

$$\begin{tikzcd}
\omega(X) \arrow[r, "\omega(\sigma_X)"] \arrow[d, "\omega(\sigma_X)"'] & \omega(X) \otimes L \arrow[d, "\mathsf{id}\otimes\Delta"] \\
\omega(X) \otimes L \arrow[r, "\omega(\sigma_X)\otimes\mathsf{id_L}"'] & \omega(X) \otimes L \otimes L,
\end{tikzcd} \tag{2.1.9}$$

ở đây $\Delta := \omega(\sigma_F)$. Cùng với (2.1.6), biểu đồ này áp dụng với $X = F$ đưa ra một cấu trúc đối đại số trên L với Δ là đối tích; và do đó với mọi X nó đưa ra cấu trúc của L-đối môđun trên $\omega(X)$. $\square$

Định lí 2.1.8. ([41, II, Théorème 2.6.1]) *Cho R là vành Dedekind và $\mathcal{C}$ là một phạm trù aben R-tuyến tính. Giả sử tồn tại một hàm tử trung thành R-tuyến tính khớp $\omega : \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{Mod}_{\mathrm{f}}(R)$ và một phạm trù con xác định $\mathcal{C}^{\mathrm{o}}$ tương ứng với ω. Khi đó ω phân tích qua một tương đương $\mathcal{C} \simeq \mathsf{Comod}_{\mathrm{f}}(L)$ và hàm tử quên, với L là một đối đại số trên R*

Chứng minh. Cho L như trong Mệnh đề 2.1.7. Ta xét ω như một hàm tử $\mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{Comod}_{\mathrm{f}}(L)$. Khi đó hàm tử ω sẽ xác định một tương đương giữa các phạm trù. Thật vậy, theo định nghĩa nó là trung thành. Để chỉ ra nó là hàm tử đầy, ta giả sử $X, Y \in \mathcal{C}'$ và $\alpha : \omega(X) \longrightarrow \omega(Y)$ là một đồng cấu giữa các L-đối môđun, tức là,

$$(\alpha \otimes \mathsf{id}) \circ \omega(\sigma_X) = \omega(\sigma_Y) \circ \alpha : \omega(X) \longrightarrow \omega(Y) \otimes L.$$

Khi đó

$$\omega(X) \xrightarrow{\alpha} \omega(Y) \xrightarrow{\omega(\sigma_Y)} \omega(Y) \otimes L$$

là ảnh dưới ω của cấu xạ

$$X \xrightarrow{\sigma_X} \omega(X) \otimes F \xrightarrow{\alpha \otimes \mathsf{id}_F} \omega(Y) \otimes F.$$

Chú ý rằng (2.1.9) (thay X bởi Y) đưa ra một dãy khớp chẻ ra

$$0 \longrightarrow \omega(Y) \xrightarrow{\omega(\sigma_Y)} \omega(Y) \otimes L \xrightarrow{\delta} \omega(Y) \otimes L \otimes L, \tag{2.1.10}$$

ở đây đồng cấu $\delta = \mathsf{id} \otimes \Delta - \omega(\sigma_X) \otimes \mathsf{id}$, và tính chẻ ra được xác định bởi $\mathsf{id} \otimes \varepsilon : \omega(Y) \otimes L \longrightarrow \omega(Y)$. Tương tự như trên dãy khớp này là ảnh dưới ω của dãy khớp ở (2.1.8) (thay X bởi Y):

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow \omega(Y) \otimes F \longrightarrow \omega(Y) \otimes L \otimes F.$$

Mặt khác, nó suy ra từ tính trung thành rằng ω ánh xạ hợp thành

$$X \xrightarrow{\sigma_X} \omega(X) \otimes F \xrightarrow{\alpha \otimes \mathsf{id}} \omega(Y) \otimes F \longrightarrow \omega(Y) \otimes L \otimes F$$

là đồng cấu không (vì ảnh của nó dưới ω là tầm thường do (2.1.9) và do α là đồng cấu giữa các L-đối môđun). Hệ quả là cấu xạ

$$X \xrightarrow{\sigma_X} \omega(X) \otimes F \xrightarrow{\alpha \otimes \mathsf{id}} \omega(Y) \otimes F$$

được phân tích qua các cấu xạ $f : X \longrightarrow Y$ và σ_Y. Tác động ω lên hợp thành của các cấu xạ này ta có thể kết luận $\omega(f) = \alpha$, vì $\omega(\sigma_Y)$ là đơn cấu. Vậy ω là đầy.

Việc còn lại ta phải chỉ ra φ là toàn ánh cốt yếu. Với mỗi L-đối môđun (E, ρ_E), gọi E^{o} là vật trong $\mathcal{C}$ sao cho dãy sau

$$0 \longrightarrow E^{\mathrm{o}} \longrightarrow E \otimes F \stackrel{\delta}{\longrightarrow} E \otimes L \otimes F.$$

là khớp, với $\delta = \rho_E \otimes \mathsf{id} - \mathsf{id} \otimes \sigma_F$. Tác động ω vào dãy khớp này và so sánh với (2.1.10) ta kết luận $\omega(E^{\mathrm{o}}) = E$.

Vậy $\omega : \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{Comod}_{\mathrm{f}}(L)$ là một tương đương phạm trù. Do đó hàm tử quên $\mathsf{Comod}_{\mathrm{f}}(L) \longrightarrow \mathsf{Mod}(R)$ cũng khớp, vì vậy L phẳng trên R. $\square$

Chú ý 2.1.9. (i) Có một cách khác để xác định L từ hàm tử thớ như sau. Ta chứng minh rằng có một đẳng cấu tự nhiên

$$\mathsf{Nat}(\omega, \omega \otimes M) \simeq \mathsf{Hom}_R(L, M), \tag{2.1.11}$$

với mọi R-môđun M. Thật vậy, ta có các đẳng cấu sau

$$\mathsf{Hom}_R(L, M) \simeq \mathsf{Hom}(F, F \otimes M) \simeq \mathsf{Hom}(\mathsf{Hom}(\omega, R), \mathsf{Hom}(\omega, R) \otimes M).$$

Hơn nữa theo (2.1.1), ta cần phải chỉ ra

$$\mathsf{Nat}(\omega(X), \omega(X) \otimes M) \simeq \mathsf{Hom}(\mathsf{Hom}(\omega(X), R), \mathsf{Hom}(\omega(X), R) \otimes M)$$

cho mọi $X \in \mathcal{C}^{\mathrm{o}}$. Vì với mỗi X như vậy, $\omega(X)$ là xạ ảnh trên R, nên đẳng cấu sau cùng là rõ ràng. Người ta thường đề cập L như là *đối các tự đồng cấu* của ω, kí hiệu là $\mathsf{Coend}(\omega)$.

(ii) Nếu $\mathcal{C} \cong \mathsf{Comod}_{\mathrm{f}}(L)$ và ω là hàm tử quên từ $\mathcal{C}$ vào $\mathsf{Mod}(R)$ thì đẳng cấu (2.1.11) suy ra $\mathsf{Coend}(\omega) \simeq L$. Như vậy một đối đại số trên R luôn có thể xây dựng được từ phạm trù các đối môđun của nó.

$\square$

2.1.2 Phạm trù Tannaka trên vành Dedekind

Sử dụng Định lí 2.1.8, Saavedra đã thiết lập được đối ngẫu Tannaka cho các lược đồ nhóm phẳng trên một vành Dedekind ([41, II, Théorème 4.1.1]). Trong mục con này ta sẽ liên hệ nó đến một kết quả của Wedhorn.

Định nghĩa 2.1.10. (i) Một phạm trù aben ten xơ trên R là một phạm trù R-tuyến tính ten xơ và aben cùng với vành các tự đồng cấu của vật đơn vị đẳng cấu một cách chính tắc với R.

(ii) Cho $\mathcal{T}$ là phạm trù aben ten xơ trên R. Ta nói $\mathcal{T}$ được xác định bởi các vật có đối ngẫu nếu mỗi vật trong nó đều là thương của một vật có đối ngẫu.

(iii) Một phạm trù Tannaka trên R là một phạm trù aben ten xơ $\mathcal{T}$ trên R, được xác định bởi các vật có đối ngẫu, cùng với một hàm tử trung thành và khớp $\omega : \mathcal{T} \longrightarrow \mathsf{Mod}_{\mathrm{f}}(R)$.

Ví dụ minh họa cho định nghĩa này là phạm trù biểu diễn của một lược đồ nhóm affine phẳng trên R. Cho G là một lược đồ nhóm phẳng trên R và $L := R[G]$ là vành tọa độ của G. Vậy L là R-đại số Hopf phẳng trên R. Như thường lệ cho một đại số Hopf chúng ta kí hiệu đối tích trên L là Δ, đối đơn vị là ε và kí hiệu S cho phép đối thế.

Xin nhắc lại một số kí hiệu: phạm trù $\mathsf{Rep}(G)$ kí hiệu cho phạm trù các R-biểu diễn tuyến tính của G (hay các G-môđun) được đồng nhất với phạm trù các L-đối môđun phải. Tương tự, phạm trù của các G-môđun mà *hữu hạn* được kí hiệu bởi $\mathsf{Rep}_{\mathrm{f}}(G)$ sẽ được đồng nhất với $\mathsf{Comod}_{\mathrm{f}}(L)$. Đây đều là các phạm trù aben ten xơ trên R. Một vật trong $\mathsf{Comod}_{\mathrm{f}}(L)$ sẽ có đối ngẫu nếu như nó phẳng như R-môđun (vì trên một vành Dedekind R nó trở thành môđun xạ ảnh trên R). Định lí của Serre (xem [42, Prop.3]) nói rằng phạm trù $\mathsf{Rep}_{\mathrm{f}}(G)$ được xác định bởi các vật có đối ngẫu. Do đó nó là phạm trù Tannaka trên R với hàm tử thớ chính là hàm tử quên. Ta sẽ kí hiệu phạm trù con đầy của $\mathsf{Rep}_{\mathrm{f}}(G)$ bao gồm tất cả các vật có đối ngẫu bởi $\mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(G)$ và có thể đồng nhất với $\mathsf{Comod}^{\mathrm{o}}(L)$.

Chú ý 2.1.11. Cho một phạm trù ten xơ $(\mathcal{T}, \omega)$. Giả sử $\mathcal{T}^{\rm o}$ là một phạm trù con xác định, kí hiệu $\omega^{\rm o}$ là hàm tử hạn chế lên $\mathcal{T}^{\rm o}$. Ta có thể định nghĩa một hàm tử nhóm $\mathsf{Aut}^{\otimes}(\omega^{\rm o}) : \mathsf{Alg}(R) \longrightarrow \mathcal{G}rs$:

$$\mathsf{Aut}^{\otimes}(\omega^{\rm o})(A) := \mathsf{Aut}^{\otimes}_A(\omega^{\rm o} \otimes A).$$

Ở đây $\mathsf{Aut}^{\otimes}_A(\omega^{\rm o} \otimes A)$ là nhóm các tự đẳng cấu A-tuyến tính của hàm tử ten xơ $\omega^{\rm o} \otimes A$. Theo kết quả của Wedhorn ([31, Sect. 5]), đây là hàm tử biểu diễn được bởi đại số Hopf giao hoán $\mathsf{Coend}(\omega^{\rm o})$ và do đó là một lược đồ nhóm affine trên R. Lược đồ nhóm này được gọi là nhóm Tannaka của $(\mathcal{T}, \omega)$.

Dựa vào kết quả của Saavedra ([41, II, Théorème 4.1.1]) và kết quả của Wedhorn ([31, Sect. 5]) ta có định lí sau.

Định lí 2.1.12. *Cho $(\mathcal{T}, \omega)$ là một phạm trù Tannaka trên vành Dedekind R. Khi đó*

(i) ω phân tích qua một tương đương phạm trù $\omega^G : \mathcal{T} \cong \mathsf{Rep}_{\rm f}(G)$ và hàm tử quên, với $G := \mathsf{Aut}^{\otimes}_R(\omega)$.

(ii) ω cảm sinh một tương đương phạm trù giữa $\mathcal{T}^{\rm o}{}_K$ và $\mathsf{Rep}_{\rm f}(G_K)$.

Chứng minh. Theo Định lí 2.1.8, hàm tử tự nhiên $\mathcal{T} \longrightarrow \mathsf{Rep}_{\rm f}(G)$ là một tương đương giữa các phạm trù aben. Hơn nữa, hàm tử này tương thích với tích ten xơ. Do đó nó là tương đương giữa các phạm trù ten xơ. Mệnh đề (ii) được suy ra từ (i) và Mệnh đề 1.2.31. □

Ví dụ 2.1.13. Cho $R = k[[t]]$ với trường phân thức là $K = k((t))$. Gọi $\mathfrak{X}$ là một lược đồ affine hình thức trơn và liên thông trên $\mathrm{Spf}(R)$ (phổ hình thức của vành R). Ký hiệu $\mathcal{D}(\mathfrak{X}/R)$ là bó các toán tử vi phân R-tuyến tính trên $\mathfrak{X}$. Phạm trù các bó phân tầng $\mathsf{str}(\mathfrak{X}/R)$ trên $\mathfrak{X}$ bao gồm:

(Str$_1$) Các vật là (E, ∇), với E là bó $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}-$môđun nhất quán và

$$\nabla : \mathcal{D}(\mathfrak{X}/R) \longrightarrow \mathcal{E}nd_R(E)$$

là một đồng cấu $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}-$đại số.

(Str$_2$) Các cấu xạ là các đồng cấu $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-môđun giao hoán với tác động của $\mathcal{D}(\mathfrak{X}/R)$. Hay các cấu xạ là các đồng cấu $\mathcal{D}(\mathfrak{X}/R)$-môđun với tác động được mô tả như sau

$$D.e := \nabla(D)(e)$$

với $D \in \mathcal{D}_X(U)$ và $e \in E(U)$ với U là một tập con mở của $\mathfrak{X}$. Khi đó cấu xạ $\phi : (E, \nabla) \longrightarrow (E', \nabla')$ là đồng cấu $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}-$môđun thỏa mãn $\phi(\nabla(D)(e)) = \nabla'(D)(\phi(e))$.

Chúng ta kí hiệu $\mathsf{str}(\mathfrak{X}/R)^{\mathrm{o}}$ là phạm trù con đầy của $\mathsf{str}(\mathfrak{X}/R)$ bao gồm các vật có đối ngẫu thường được gọi là phân thớ phân tầng.

Giả sử $\mathfrak{X}$ có một R-điểm hữu tỉ ξ. Theo kết quả của dos Santos [8, Sect 4.2]: một bó phân tầng $\mathsf{str}(\mathfrak{X}/R)$ nằm trong $\mathsf{str}(\mathfrak{X}/R)^{\mathrm{o}}$ khi và chỉ khi nó không có t-xoắn, do đó tự do địa phương. Hệ quả là phạm trù con $\mathsf{str}(\mathfrak{X}/R)^{\mathrm{o}}$ là đóng với việc lấy vật con. Hơn nữa hàm tử thớ tại ξ, $\xi^* : \mathsf{str}(\mathfrak{X}/R) \longrightarrow \mathsf{Mod}(R)$ trung thành và khớp.

Trong [4, Proposition 5.2.2] đã chỉ ra $\mathsf{str}(\mathfrak{X}/R)^{\mathrm{o}}$ là một phạm trù con xác định của $\mathsf{str}(\mathfrak{X}/R)$, tức là, mọi bó phân tầng trong $\mathsf{str}(\mathfrak{X}/R)$ là thương của một phân thớ phân tầng. Vậy $(\mathsf{str}(\mathfrak{X}/R), \xi^*)$ là một phạm trù Tannaka.

2.2 Đối ngẫu Tannaka cho phạm trù ten xơ cộng tính, dàn Tannaka

2.2.1 Dàn Tannaka và mở rộng vô hướng

Trong phạm trù ten xơ cộng tính, vành các tự đồng cấu của vật đơn vị là một vành giao hoán.

Định nghĩa 2.2.1. Một *phạm trù ten xơ $\mathcal{T}$ gồm các vật có đối ngẫu trên* R là một phạm trù ten xơ cộng tính trong đó mỗi vật đều có vật đối ngẫu sao cho vành các tự đồng cấu của vật đơn vị I là $\mathrm{End}(I)$ đẳng cấu với R

(điều này trang bị một cách tự nhiên cho $\mathcal{T}$ một cấu trúc của phạm trù R-tuyến tính).

Cho $\mathcal{T}$ là một phạm trù ten xơ trên R. Một vật J trong $\mathcal{T}$ được gọi là tầm thường nếu có một đơn cấu $J \longrightarrow I^{\oplus n}$, với $I^{\oplus n}$ là tổng trực tiếp của vật đơn vị. Phạm trù con đầy các vật tầm thường của $\mathcal{T}$ sẽ được kí hiệu là $\mathcal{T}^{\mathrm{triv}}$. Với khái niệm này ta định nghĩa được một dàn Tannaka như sau.

Định nghĩa 2.2.2. ([4, Definition 2.2.2]) Một *dàn Tannaka* $\mathcal{T}$ *trên* R là một phạm trù ten xơ gồm các vật có đối ngẫu trên R sao cho mỗi cấu xạ trong $\mathcal{T}$ đều tồn tại tồn tại hạch và ảnh; đồng thời mở rộng vô hướng $\mathcal{T}_K$ là một phạm trù aben và $\mathcal{T}$ cùng với một hàm tử $\omega : \mathcal{T} \longrightarrow \mathsf{Mod}_{\mathrm{f}}(R)$ thỏa mãn các điều kiện sau:

(i) ω là trung thành và bảo toàn các hạch và các ảnh.

(ii) ω khi hạn chế trên $\mathcal{T}^{\mathrm{triv}}$ là một hàm tử trung thành đầy.

Nhận xét 2.2.3. Vì mỗi vật trong $\mathcal{T}$ đều có đối ngẫu nên ảnh của ω đều nằm trong $\mathsf{Mod}^o(R)$. Hơn nữa, với giả thiết về tính trung thành của ω, tập các cấu xạ giữa hai vật bất kì trong $\mathcal{T}$ là hữu hạn trên R, hệ quả là hàm tử $\iota_* : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}_K$ cũng trung thành. Vì vậy, ta sẽ đồng nhất $\mathcal{T}$ với ảnh của nó trong $\mathcal{T}_K$. Đặc biệt, các cấu xạ trong $\mathcal{T}$ được xét như các cấu xạ trong $\mathcal{T}_K$. Một vật X của $\mathcal{T}$, khi xét như một vật của $\mathcal{T}_K$ sẽ được kí hiệu là X_K. Hơn nữa, ảnh của f qua hàm tử ι_* cũng sẽ được kí hiệu là f.

Bổ đề 2.2.4. ([4, Lemma 2.2.5]) *Cho* $f : X \longrightarrow Y$ *là một cấu xạ trong* $\mathcal{T}$. *Nếu tồn tại một ánh xạ* $\varphi : \omega(X) \longrightarrow \omega(Y)$ *sao cho* $a\varphi = \omega(f)$ *với một* $a \in R$ *nào đó, thì khi đó tồn tại* $g : X \longrightarrow Y$ *với* $ag = f$ *và* $\omega(g) = \varphi$. *Hơn nữa,* R*-môđun con* $\omega(\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y))$ *là bão hòa trong* $\mathrm{Hom}_R(\omega(X), \omega(Y))$.

Chứng minh. Trước tiên ta chứng minh cho trường hợp Y là vật đơn vị I. Xét phân tích qua ảnh của $f = hg' : X \longrightarrow J \longrightarrow I$. Qua hàm tử ω ta có biểu đồ giao hoán

$$\begin{tikzcd}
\omega(X) \arrow[r, two heads, "\omega(g')"] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, "\omega(f)"] & \omega(J) \arrow[d, "\omega(h)"] \arrow[dl, dotted] \\
R \arrow[r, "{[a]}"'] & R
\end{tikzcd}$$

Trong biểu đồ trên, $\omega(h)$ là đơn ánh và ảnh của nó nằm trong aR, do đó nó phân tích qua $\omega(h) : \omega(J) \xrightarrow{\psi} R \xrightarrow{[a]} R$. Do ω trung thành đầy trên các vật tầm thường nên ta có $\psi = \omega(h')$, tức là, $\varphi = \omega(h' \circ g')$. Đặt $g := h' \circ g'$, khi đó $f = ag$. Vậy đẳng thức trong bổ đề được chứng minh cho trường hợp $Y = I$.

Theo [41, V.5.1.2.2.] ta có $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X \otimes Y^\vee, I)$. Đẳng cấu trong bổ đề được suy ra từ đẳng cấu này. Thật vậy, ta có $\omega(\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y))$ là môđun bão hòa trong

$$\mathrm{Hom}_R(\omega(X) \otimes \omega(Y^\vee), \omega(I)) \cong \mathrm{Hom}_R(\omega(X) \otimes \omega(Y)^\vee, R).$$

Chứng minh được hoàn thành nhờ đẳng cấu tự nhiên

$$\mathrm{Hom}_R(\omega(X) \otimes \omega(Y)^\vee, R) \cong \mathrm{Hom}_R(\omega(X), \omega(Y)).$$

□

Bổ đề 2.2.5. ([4, Lemma 2.2.6]) Hàm tử $\omega_K : \mathcal{T}_K \longrightarrow \mathsf{Vect}(K)$ là hàm tử khớp và $(\mathcal{T}_K, \omega_K)$ là phạm trù Tannaka trung tính trên K.

Chứng minh. Nhắc lại rằng hàm tử $i_* : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}_K$ bảo toàn cấu xạ toàn ánh và đơn ánh.

Cho $Y_K \xrightarrow{f} Z_K$ là một toàn ánh trong $\mathcal{T}_K$. Nhân f với một phần tử của R nếu cần, ta có thể giả sử f nằm trong $\mathcal{T}$. Xét sự phân tích qua ảnh của f trong $\mathcal{T}$, $f : Y \xrightarrow{h} \mathsf{im}(f) \xrightarrow{g} Z$. Khi đó, trong $\mathcal{T}_K$, g vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh do đó là một đẳng cấu. Điều này dẫn đến $\omega(h)$ là một toàn ánh trong $\mathcal{T}_K$ hay $\omega(h)_K$ là toàn ánh. Vậy ta có thể kết luận được $\omega(f)_K$ cũng là toàn ánh.

Bây giờ cho $g : X_K \longrightarrow Y_K$ là hạch của f trong $\mathcal{T}_K$. Một cách tương tự ta có thể giả sử g nằm trong $\mathcal{T}$. Lại xét sự phân tích qua ảnh của

$X \longrightarrow \mathsf{ker}(f)$ cảm sinh từ g trong $\mathcal{T}$: $X \xrightarrow{p} \mathsf{im}(g) \xrightarrow{q} \mathsf{ker}(f)$. Tương tự như trên ta có q vừa là toàn ánh vừa là đơn ánh trong $\mathcal{T}_K$. Thông qua tác động của ω, ta thu được

$$\omega(X) \xrightarrow{\omega(p)} \omega(\mathsf{im}(g)) \xrightarrow{\omega(q)} \omega(\mathsf{ker}(f)),$$

với $\omega(q)$ là đẳng cấu trong $\mathsf{Vect}(K)$ và $\omega(p)$ trở thành toàn ánh. Hệ quả là $\omega(X)$ là hạch của $\omega(f)$. □

Ví dụ 2.2.6. Cho G là một lược đồ nhóm phẳng trên R, khi đó phạm trù $\mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(G)$ các biểu diễn của G trên các R-môđun xạ ảnh hữu hạn cùng với hàm tử quên từ $\mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(G)$ vào $\mathsf{Mod}^{\mathrm{o}}(R)$ là một dàn Tannaka trên R.

2.2.2 Tương đương phạm trù cho dàn Tannaka

Giả sử $(\mathcal{T}, \omega)$ là một dàn Tannaka trên R. Khi đó, theo Wedhorn [31, (6.21)], $\mathsf{Aut}^{\otimes}_R(\omega)$ là một lược đồ nhóm affine trên R với vành tọa độ L và ω có một phân tích:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{T} \arrow[rr, "\omega"] \arrow[dr, "\omega^L"'] & & \mathsf{Mod}(R) \\ & \mathsf{Comod}^{\mathrm{o}}(L) \arrow[ur, "\nu"'] & \end{tikzcd}$$

với ν là hàm tử quên. Hơn nữa ω^L là một hàm tử ten xơ.

Nhận xét 2.2.7. Với giả thiết ω như trên.

(i) Tương tự như trong Chú ý 2.1.9, 2.1.11, với mọi $S \in \mathsf{Alg}_R$ ta có

$$\mathsf{Aut}^{\otimes}_R(\omega \otimes_R S) \cong \mathsf{End}^{\otimes}_S(\omega \otimes_R S) \cong \mathsf{Nat}^{\otimes}_R(\omega, \omega \otimes_R S).$$

Do đó hàm tử $\mathsf{Aut}^{\otimes}_R(\omega) : S \mapsto \mathsf{Aut}^{\otimes}_S(\omega \otimes_R S)$ được biểu diễn bởi L:

$$\mathsf{Aut}^{\otimes}_R(\omega)(S) \cong \mathrm{Hom}_{R-\mathsf{Alg}}(L, S).$$

Vậy $\mathsf{Aut}^{\otimes}_R(\omega)$ là một lược đồ nhóm affine trên R với vành tọa độ $L = \mathsf{Coend}(\omega)$.

(ii) Theo Bổ đề 2.2.5 $(\mathcal{T}_K, \omega_K)$ là một phạm trù Tannaka trung tính trên K. Đối ngẫu Tannaka cổ điển trên một trường đưa ra một đại số Hopf $\mathcal{L}$ trên K và một tương đương phạm trù

$$\omega_K : \mathcal{T}_K \cong \mathsf{Comod}_{\mathrm{f}}(\mathcal{L}).$$

Với mỗi $X \in \mathcal{T}$, ta có $\omega(X) \otimes_R K = \omega_K(X_K)$. Vậy

$$\omega(X) \otimes_R \mathcal{L} = \omega_K(X_K) \otimes_K \mathcal{L}.$$

Do đó ta có thể xét $\omega(X)$ như là một đối môđun trên một R-đối đại số $\mathcal{L}$. Đặt $\mathcal{L}_R$ là hợp trong $\mathcal{L}$ của tất cả các không gian hệ số $\mathrm{Cf}(\omega(X))$ khi X chạy khắp các vật của $\mathcal{T}$. Khi đó $\mathcal{L}_R$ là một đại số Hopf con của $\mathcal{L}$ trên R và có đối tác động lên tất cả các vật dạng $\omega(X)$. Hơn nữa $\mathcal{L}_R \otimes K = \mathcal{L}$.

Định lí sau đặc trưng cho một dàn Tannaka theo phạm trù các biểu diễn của một lược đồ nhóm affine.

Định lí 2.2.8. ([4, Theorem 2.3.2]) *Cho $(\mathcal{T}, \omega)$ là một dàn Tannaka trên R. Khi đó lược đồ nhóm $G = \mathsf{Aut}^{\otimes}_R(\omega)$ là phẳng trung thành trên R và hàm tử cảm sinh $\omega^G : \mathcal{T} \longrightarrow \mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(G)$ là một tương đương phạm trù.*

Ta sẽ chứng minh định lí này bằng cách chỉ ra phổ của đại số Hopf $\mathcal{L}_R$ thỏa mãn các khẳng định của Định lí 2.2.8 và sau cùng chỉ ra nó thật sự trùng với G.

Chứng minh của Định lí 2.2.8

i) Hàm tử ω là hàm tử trung thành đầy: Theo giả thiết, ω là hàm tử trung thành. Mặt khác, đối ngẫu Tannaka cho $\mathcal{T}_K$ nói rằng

$$\omega(\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y)) \otimes_R K = \mathrm{Hom}^{\mathcal{L}}(\omega(X), \omega(Y)).$$

Lấy tùy ý một cấu xạ $\varphi \in \mathrm{Hom}^{\mathcal{L}_R}(\omega(X), \omega(Y))$. Đẳng thức này đảm bảo việc tồn tại $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y)$ sao cho $\omega(f) = a\varphi$ với một $a \in R$ nào đó.

Bây giờ Bổ đề 2.2.4 suy ra sự tồn tại $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y))$ sao cho $\omega(g) = \varphi$. Điều này có nghĩa là $\omega : \mathcal{T} \longrightarrow \mathsf{Comod}^{\mathrm{o}}(\mathcal{L}_R)$ là hàm tử đầy.

ii) Hàm tử ω là một toàn ánh cốt yếu: Đầu tiên ta nhận xét rằng mỗi $\mathcal{L}_R$-đối môđun xạ ảnh M là một thương con đặc biệt của $\mathcal{L}_R^{\oplus r}$ theo đối tác động:

$$\delta : M \longrightarrow M \otimes_R \mathcal{L}_R,$$

với r là hạng của M. Hệ quả là với mọi đối môđun con tùy ý N trong $\mathcal{L}_R^{\oplus r}$ chứa M, thương N/M đều phẳng trên R. Đặc biệt, ta có thể chọn N là đối môđun con của $\mathrm{Cf}(\omega(X))^{\oplus r}$ với một vật X nào đó trong $\mathcal{T}$. Từ đây ta có thể kết luận được rằng M là thương con đặc biệt của một vật trong ảnh của ω.

Tiếp theo, ta sẽ chỉ ra mỗi vật N trong $\mathsf{Comod}^{\mathrm{o}}(\mathcal{L}_R)$ là đẳng cấu trong phạm trù này với một vật có dạng $\omega(X)$. Trước hết ta giả sử N là thương con của vật có dạng $\omega(Y)$:

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \omega(Y) \longrightarrow N \longrightarrow 0.$$

Theo Mệnh đề 1.2.31 tồn tại Z trong $\mathcal{T}$ sao cho $N \otimes K \cong \omega_K(Z_K)$ trong $\mathsf{Comod}_{\mathrm{f}}(\mathcal{L})$. Đẳng cấu này đưa ra một đơn ánh $N \longrightarrow \omega(Z)$ trong $\mathsf{Comod}^{\mathrm{o}}(\mathcal{L}_R)$. Xét cấu xạ hợp thành $N \longrightarrow \omega(Z)$, do ω là trung thành đầy, cấu xạ này là ảnh của một cấu xạ $f : Y \longrightarrow Z$. Theo giả thiết, f có ảnh trong $\mathcal{T}$ và ω bảo toàn nó, do đó ta khẳng định $\omega(\mathsf{im}(f)) = N$. Đối ngẫu lại với dãy khớp trên ta có dãy khớp sau

$$0 \longrightarrow N^\vee \longrightarrow \omega(Y^\vee) \longrightarrow M^\vee \longrightarrow 0.$$

Lập luận tương tự như trên ta có thể chỉ ra được $M^\vee \cong \omega(\mathsf{im} g)$ cho một cấu xạ g nào đó trong $\mathcal{T}$, vậy $M \cong \omega(T)$ với $T := (\mathsf{im} f)^\vee$. Vậy tất cả các vật con đặc biệt trong $\omega(X)$ cũng nằm trong $\mathsf{im}(\omega)$. Hệ quả là tất cả các thương con đặc biệt của ω đều nằm trong $\mathsf{im}(\omega)$. Điều này hoàn tất việc chứng minh rằng ω là một tương đương phạm trù giữa $\mathcal{T}$ và $\mathsf{Comod}^{\mathrm{o}}(\mathcal{L}_R)$.

iii) Đại số Hopf $\mathcal{L}_R$ là đối các tự đồng cấu của ω: khẳng định này dễ dàng được suy ra chỉ từ thiết lập trên. Thật vậy, do tương đương phạm trù ở trên, $\omega : \mathcal{T} \longrightarrow \mathsf{Mod}^{\mathrm{o}}(R)$ có thể đồng nhất với hàm tử quên $\mathsf{Comod}^{\mathrm{o}}(\mathcal{L}_R) \longrightarrow \mathsf{Mod}^{\mathrm{o}}(R)$. Mặt khác *đối các tự đồng cấu* (kí hiệu của Coend, xem Chú ý 2.1.9) của hàm tử sau cùng không khác gì $\mathcal{L}_R$ theo giải thích ở phần trước của định lí. Điều này hoàn tất chứng minh của Định lí 2.2.8. □

Ví dụ 2.2.9. Đặt $S = \mathsf{Spec}(R)$, với R là một vành Dedekind. Gọi $f : X \longrightarrow S$ là một cấu xạ trơn với các thớ liên thông. Tương tự như Ví dụ 2.1.13, ta có thể định nghĩa phạm trù bó phân tầng trên X kí hiệu là $\mathsf{str}(X/S)$. Giả sử f có một lát cắt $\xi : S \longrightarrow X$ (R-điểm hữu tỉ). Khi đó phép kéo lùi bởi ξ đưa ra hàm tử $\xi^* : \mathsf{str}(X/S) \longrightarrow \mathsf{Mod}(R)$. Tương tự như của dos Santos [8, Sect 4.2], hàm tử $\xi^* : \mathsf{str}(X/S) \longrightarrow \mathsf{Mod}(R)$ trung thành và khớp (xem [4, Proposition 5.1.1 (ii)]). Bây giờ đưa ra một vật $M \in \mathsf{str}(X/S)^{\mathrm{o}}$ ta viết $\mathsf{T}^{a,b}(M) := M^{\otimes a} \otimes M^{\vee \otimes b}$ và định nghĩa $\langle M \rangle_{\otimes}^{s}$ như là phạm trù con đầy gồm tất cả các thương con đặc biệt của các tổng trực tiếp của vật dạng $\mathsf{T}^{a,b}M$, (ở đây chỉ số được đánh theo các số tự nhiên). Mở rộng vô hướng $\langle M \rangle_{\otimes,K}^{s}$ là phạm trù aben cùng với hàm tử $\xi_K^* : \langle M \rangle_{\otimes,K}^{s} \longrightarrow \mathsf{Vect}(K)$ là trở thành phạm trù Tannaka trung tính trên K ([4, Lemma 5.1.2]). Vậy $\langle M \rangle_{\otimes}^{s}$ là một dàn Tannaka trên R. Trong trường hợp của các lược đồ hình thức $\mathfrak{X}$, nhóm Tannaka liên kết của nó là một lược đồ nhóm thuộc kiểu hữu hạn được nghiên cứu và chứng minh đầu tiên bởi dos Santos ([8, Section 2.4, Theorem 4.3.1]). Kết quả sâu sắc hơn về các lược đồ nhóm có dạng này được nghiên cứu chủ yếu trong [5].

Chương 3

Đặc trưng Tannaka cho các đồng cấu trên vành Dedekind và cấu trúc cho lược đồ nhóm affine phẳng trên vành định giá rời rạc

Các kết quả trong chương này được trình bày theo [4] và [5]. Đầu tiên chúng ta sẽ nghiên cứu đồng cấu giữa các đối đại số phẳng trên R, sau đó sẽ áp dụng cho đồng cấu giữa các lược đồ nhóm affine. Tiếp theo ta sẽ nghiên cứu các đối đại số hữu hạn địa phương và đặc trưng cho một lớp các lược đồ nhóm theo các đối đại số này. Cuối cùng là mô tả đồng cấu giữa các lược đồ nhóm cảm sinh một đẳng cấu trên thớ tổng quát để đưa ra cấu trúc cho các lược đồ nhóm affine phẳng.

3.1 Đặc trưng đơn ánh và toàn ánh cho đồng cấu của các đối đại số phẳng

Ta sẽ dùng đối ngẫu Tannaka để đặc trưng cho các đồng cấu đơn ánh (đặc biệt) và toàn ánh của các đối đại số phẳng. Cũng như trong Chương 2, chúng ta sẽ dùng kí hiệu ω^o để kí hiệu cho hàm tử hạn chế của hàm tử ω lên phạm trù con đầy gồm các vật có đối ngẫu (xem Chú ý 2.1.11).

Mệnh đề 3.1.1. ([4, Proposition 3.2.1]) *Cho $f : L' \longrightarrow L$ là một đồng cấu của các đối đại số phẳng trên vành Dedekind R và $\omega_f : \mathsf{Comod}_{\mathrm{f}}(L') \longrightarrow \mathsf{Comod}_{\mathrm{f}}(L)$ là hàm tử tự nhiên cảm sinh từ f. Khi đó*

(i) f là đơn ánh khi và chỉ khi hàm tử ${\omega_f}^{\mathrm{o}}$ là trung thành đầy và ảnh của nó trong $\mathsf{Comod}^{\mathrm{o}}(L)$ là đóng với việc lấy các vật con đặc biệt.

(ii) f là đơn ánh và đặc biệt khi và chỉ khi hàm tử ${\omega_f}^{\mathrm{o}}$ là trung thành đầy và ảnh của nó trong $\mathsf{Comod}^{\mathrm{o}}(L)$ đóng với việc lấy các vật con. Trong trường hợp này, hàm tử ω_f là trung thành đầy và ảnh của nó cũng đóng với việc lấy vật con.

Chứng minh. Phần "chỉ nếu" sẽ được chứng minh cùng một lúc cho cả hai trường hợp. Giả sử rằng f là đơn ánh (đặc biệt).

Hàm tử $\omega_f : \mathsf{Comod}_{\mathrm{f}}(L') \longrightarrow \mathsf{Comod}_{\mathrm{f}}(L)$ có thể được xét như hàm tử đồng nhất trên phạm trù các đối môđun, nó chỉ chuyển các đối tác động (từ tác động của L' đến tác động của L): cho $(M, \rho') \in \mathsf{Comod}_{\mathrm{f}}(L')$ ta có $\omega_f : (M, \rho') \mapsto (M, \rho)$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho'"] \arrow[dr, "\rho"'] & M \otimes L' \arrow[d, "\mathsf{id}\otimes f"] \\ & M \otimes L \end{tikzcd}$$

Vậy ω_f là trung thành và do đó ${\omega_f}^{\mathrm{o}}$ cũng trung thành.

Điều kiện để $\varphi : M \longrightarrow N$ là đồng cấu của các L'-đối môđun là: $\rho'_N\varphi - (\varphi \otimes \mathsf{id})\rho'_M : M \longrightarrow N \otimes L'$ phải là ánh xạ không:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho'_M"] \arrow[d, "\varphi"'] & M \otimes L' \arrow[r, "\mathsf{id}\otimes f"] \arrow[d, "\varphi\otimes\mathsf{id}"'] & M \otimes L \arrow[d, "\varphi\otimes\mathsf{id}"] \\ N \arrow[r, "\rho'_N"'] & N \otimes L' \arrow[r, "\mathsf{id}\otimes f"'] & N \otimes L \end{tikzcd}$$

Nếu N hoặc L/L' phẳng trên R thì ánh xạ $\mathsf{id}\otimes f : N\otimes L' \longrightarrow N\otimes L$ trong biểu đồ trên là đơn ánh. Do đó ánh xạ $\rho'_N\varphi - (\varphi\otimes\mathsf{id})\rho'_M$ là ánh không khi và chỉ khi hợp thành của nó với $\mathsf{id}\otimes f$, tức là ánh xạ $\rho_N\varphi - (\varphi\otimes\mathsf{id})\rho_M : M \longrightarrow N \otimes L$ là xạ không. Vậy hàm tử ω_f là hàm tử đầy.

Chúng ta sẽ chỉ ra tính đóng của các hàm tử đối với việc lấy vật con. Cho $(M, \rho') \in \mathsf{Comod}_{\mathrm{f}}(L')$, ảnh của nó dưới ω_f được kí hiệu là (M, ρ). Giả sử (N, ρ_N) là một L-đối môđun con của (M, ρ). Khi đó ta có biểu đồ giao hoán

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho'"] \arrow[dr, "\rho"'] & M \otimes L' \arrow[d, "\mathsf{id}\otimes f"] \\ N \arrow[u, hook] \arrow[dr, "\rho_N"] & M \otimes L \\ & N \otimes L \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Để chỉ ra ρ_N tác động đến từ một đối tác động của L' lên N ta chỉ cần chỉ ra rằng $\rho_N(N) \subset N \otimes f(L')$. Từ biểu đồ trên ta có $\rho_N(N) \subset N\otimes L \cap M \otimes f(L')$. Nếu $M, N, M/N$ hoặc $L/f(L')$ phẳng trên R thì theo Bổ đề 3.1.2 dưới đây ta nhận được đẳng thức

$$N\otimes L \cap M\otimes f(L') = N\otimes f(L'). \tag{3.1.1}$$

Vậy $\rho_N(N) \subset N \otimes f(L')$ hay ρ' là hạn chế của đối tác động của L' lên N.

Ngược lại, giả sử rằng hàm tử ${\omega_f}^{\mathrm{o}} : \mathsf{Comod}^{\mathrm{o}}(L') \longrightarrow \mathsf{Comod}^{\mathrm{o}}(L)$ là trung thành đầy và ảnh của nó đóng với việc lấy vật con đặc biệt. Từ tính phẳng của K trên R, hàm tử $\mathsf{Comod}^{\mathrm{o}}(L')_K \longrightarrow \mathsf{Comod}^{\mathrm{o}}(L)_K$ là trung thành đầy và bảo toàn các cấu xạ đơn ánh và toàn ánh. Do đó, từ tính tương đương phạm trù trong Mệnh đề 1.2.31, hàm tử $\mathsf{Comod_f}(L' \otimes K) \longrightarrow \mathsf{Comod_f}(L \otimes K)$ thỏa mãn điều kiện của [3, Định lí 2.21], suy ra $L' \otimes K \longrightarrow L \otimes K$ là đơn ánh. Hệ quả là ánh xạ $f : L' \longrightarrow L$ là đơn ánh và (i) được chứng minh.

Bây giờ ta giả sử ảnh của hàm tử ${\omega_f}^{\mathrm{o}}$ đóng với việc lấy vật con. Như chứng minh ở trên ta có f là đơn ánh. Khi đó ta có thể đồng nhất L' với đối đại số con của L. Cho $0 \neq \pi \in R$ là một phần tử không khả nghịch, kí hiệu $C := \pi L \cap L' \supset \pi L'$. Từ Bổ đề 3.1.2 dưới đây ta thấy C cũng là một L-đối môđun con của L'. Vì mỗi L-đối môđun là hợp của các đối môđun hữu hạn của nó nên từ giả thiết trên ${\omega_f}^{\mathrm{o}}$ ta suy ra C thật ra là một L'-đối môđun con của L':

$$\Delta(C) \subset C \otimes L' \subset \pi L \otimes L'.$$

Vậy với mọi $c \in C$ ta có

$$\Delta(c) = \sum \pi a_i \otimes b_i, \quad a_i \in L,\ b_i \in L'.$$

Do đó $c = \sum_i \pi\varepsilon(a_i)b_i \in \pi L'$, suy ra $C \subset \pi L'$ và hệ quả là $\pi L \cap L' = \pi L'$. Đẳng thức này đúng cho mọi $\pi \in R$, suy ra môđun thương L/L' không xoắn trên R, do đó nó phẳng vì R là vành Dedekind. $\square$

Bổ đề 3.1.2. ([35, N. Bourbaki]) *Cho $A \subset B$ là hai R-môđun phẳng và $M, M_1, M_2 \subset N$ là các R-môđun tùy ý. Khi đó*

(i) $M_1 \otimes A \cap M_2 \otimes A = (M_1 \cap M_2) \otimes A$, $M_1 \otimes A + M_2 \otimes A = (M_1 + M_2) \otimes A$, như là các tập con của $N \otimes A$;

(ii) Nếu B/A cũng phẳng thì $N \otimes A \cap M \otimes B = M \otimes A$ như các môđun con trong $N \otimes B$.

Cuối cùng ta đưa ra một điều kiện cho tính toàn ánh của đồng cấu giữa các đối đại số.

Mệnh đề 3.1.3. ([4, Proposition 3.2.5]) *Cho $f : L' \longrightarrow L$ là một đồng cấu của đối đại số phẳng trên R. Khi đó f là toàn ánh khi và chỉ khi hàm tử ${\omega_f}^{\mathrm{o}} : \mathsf{Comod}^{\mathrm{o}}(L') \longrightarrow \mathsf{Comod}^{\mathrm{o}}(L)$ thỏa mãn điều kiện sau: mỗi $M \in \mathsf{Comod}^{\mathrm{o}}(L)$ là thương con đặc biệt của một vật dạng ${\omega_f}^{\mathrm{o}}(N)$ với $N \in \mathsf{Comod}^{\mathrm{o}}(L')$.*

Chứng minh. Giả sử f là toàn ánh. Cho M là một L-đối môđun xạ ảnh hữu hạn. Đối tác động $\delta : M \longrightarrow M \otimes L$ có thể xét như là một đồng cấu giữa các L-đối môđun. Vì hợp thành của δ với ánh xạ $\mathsf{id}_M \otimes \varepsilon$ là đồng nhất trên M, M là hạng tử trực tiếp của $M \otimes L$ như R-môđun. Do đó M là đối môđun con đặc biệt của $M \otimes L$, ở đây L đối tác động lên $M \otimes L$ theo đối tác động trên L. Vì M là hữu hạn và xạ ảnh như R-môđun, ta thấy $M \otimes L$ là một hạng tử trực tiếp của $L^{\oplus r}$ với $r > 0$ nào đó. Vậy M là vật con đặc biệt của $L^{\oplus r}$. Ta đồng nhất M với một đối môđun con của $L^{\oplus r}$ và chọn một tập sinh $\{m_i\}$ của M. Lấy $m_i' \in {L'}^{\oplus r}$ sao cho $f(m_i') = m_i$. Tập hợp $\{m_i'\}$ được chứa trong một môđun con hữu hạn N của ${L'}^{\oplus r}$. Ảnh của N trong $L^{\oplus r}$ kí hiệu N_1 là L-đối môđun con của $L^{\oplus r}$ mà chứa M. Vì M đặc biệt trong $L^{\oplus r}$ nên nó cũng đặc biệt trong N_1.

Ngược lại, giả sử rằng ${\omega_f}^{\mathrm{o}}$ có tính chất như đã phát biểu. Cho C là một đối đại số con hữu hạn của L. Theo giả thiết tồn tại một L'-đối môđun N sao cho C là thương con đặc biệt của N như L-đối môđun. Kí hiệu $\mathrm{Cf}(N)$ là không gian hệ số của N. Đây là một đối đại số con của L. Ta khẳng định rằng $C \subset \mathrm{Cf}(N)$. Thật vậy, điều này được suy ra từ Bổ đề 1.2.23 và do $C = \mathrm{Cf}(C)$. Mặt khác, từ xây dựng ta có $\mathrm{Cf}(N)$ là ảnh của $\mathrm{Cf}_{L'}(N)$ (không gian hệ số của N xét như L'-đối môđun). Vậy ánh xạ $L' \longrightarrow L$ là toàn ánh. $\square$

3.2 Mô tả Tannaka của các đồng cấu giữa các lược đồ nhóm

Cho R là vành Dedekind với trường phân thức K. Giả sử $f : G \longrightarrow G'$ là một đống cấu của các lược đồ nhóm affine phẳng trên R. Ta nói f là toàn ánh hoặc đồng cấu thương nếu nó là phẳng trung thành ($R[G]$ là phẳng trung thành như $R[G']$-môđun thông qua đồng cấu $f : R[G] \longrightarrow R[G']$).

Trong phần đầu tiên của mục này chúng ta đưa ra điều kiện cần và đủ để một để f là phẳng trung thành theo đối ngẫu Tannaka. Sau đó chúng ta đưa ra điều kiện cho f là một nhúng đóng ($R[G]$ là đại số Hopf thương của $R[G']$ hay $f : R[G'] \longrightarrow R[G]$ là một toàn cấu giữa các đại số Hopf). Cuối cùng chúng tôi đưa ra một tiêu chuẩn cho tính khớp của dãy các đồng cấu giữa các lược đồ nhóm.

Định lí sau đây là tổng quát của định lí phẳng trung thành cho các đại số Hopf trên trường: *một đại số Hopf (giao hoán) là phẳng trung thành trên một đại số Hopf con* (tham khảo [29, Thm 14.1]). Định lí này có thể chứng minh một cách trực tiếp (xem [4, Theorem 4.11]). Ở đây định lí này được trình bày như là một ứng dụng của Định lí 1.4.4 (tiêu chuẩn cho tính phẳng trung thành theo các thớ).

Định lí 3.2.1. (Tính phẳng trung thành cho các đại số Hopf giao hoán, [4, Theorem 4.1.1]) *Cho L là một đại số Hopf phẳng trên R và L' là một đại số Hopf con của nó. Khi đó L là phẳng trung thành trên L' khi và chỉ khi L/L' là R-phẳng, tức là, khi L' là một đại số con đặc biệt của L.*

Chứng minh. Giả sử rằng L là phẳng trung thành trên L'. Đặt $L'' := L/L'$ và lấy tích ten xơ của dãy khớp của các R-môđun

$$0 \longrightarrow L' \longrightarrow L \longrightarrow L'' \longrightarrow 0 \qquad (3.2.1)$$

với L trên L' chúng ta nhận được một dãy khớp

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow L \otimes_{L'} L \longrightarrow L \otimes_{L'} L'' \longrightarrow 0 \qquad (3.2.2)$$

Phép nhân $L \otimes_{L'} L \longrightarrow L$ làm cho dãy này là chẻ ra, do đó $L \otimes_{L'} L''$ phẳng trên L'. Vì L là phẳng trung thành trên L', L'' phẳng trên L' và do đó nó phẳng trên R.

Ngược lại, giả sử rằng L/L' là R-phẳng. Khi đó L'_k là đại số Hopf con của L_k cho mọi trường thặng dư và trường phân thức kí hiệu chung là k. Đây là các đại số Hopf giao hoán trên một trường nên L_k luôn phẳng trung thành trên L'_k (xem [29, Chapter 14]). Theo Định lí 1.4.4 ta có điều phải chứng minh.

□

Nhận xét 3.2.2. ([4, Remarks 4.1.3]) Một đồng cấu đơn ánh giữa các đại số Hopf trên một trường tự động là phẳng trung thành. Điều này không đúng cho các đại số Hopf trên vành Dedekind. Chẳng hạn, lấy $R = k[x]$ và $L = R[T] = k[x, T]$ với cấu trúc đối đại số trên R xác định bởi $\Delta(T) = T \otimes 1 + 1 \otimes T$, $\varepsilon(T) = 0$ $S(T) = -T$ (tức là $L = R[\mathbb{G}_a]$). Xét một đồng cấu giữa các R-đại số Hopf

$$f : L \longrightarrow L, \quad T \mapsto xT.$$

Khi đó thương $L/f(L)$ không phẳng trên R, do đó Bổ đề 3.2.1 chỉ ra rằng L là không phẳng trung thành trên $f(L)$.

Như là hệ quả của Định lí 3.2.1 ở trên và Mệnh đề 3.1.1, 3.1.3 ta có định lí sau.

Định lí 3.2.3. ([4, Theorem 4.1.2]) *Cho $f : G \longrightarrow G'$ là một đồng cấu của các lược đồ nhóm affine phẳng trên R và $\omega_f : \mathsf{Rep}_{\mathrm{f}}(G') \longrightarrow \mathsf{Rep}_{\mathrm{f}}(G)$ là hàm tử cảm sinh từ f. Khi đó*

(i) f là phẳng trung thành khi và chỉ khi ${\omega_f}^{\mathrm{o}} : \mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(G') \longrightarrow \mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(G)$ là trung thành đầy và ảnh của nó đóng với việc lấy vật con.

(ii) f là nhúng đóng khi và chỉ khi mỗi vật của $\mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(G)$ là thương con đặc biệt của một vật dạng ${\omega_f}^{\mathrm{o}}(X')$, $X' \in \mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(G')$.

Cuối cùng ta sẽ đưa ra đặc trưng cho dãy khớp của các lược đồ nhóm affine theo đối ngẫu Tannaka.

Cho $G \longrightarrow A$ là đồng cấu giữa các lược đồ nhóm affine trên R. Kí hiệu I_A là hạt nhân của đối đơn vị $\epsilon : R[A] \longrightarrow R$. Ta nói I_A là iđêan dấu của $R[A]$. Đặt $I_A R[G]$ là iđêan được sinh bởi ảnh của I_A trong $R[G]$. Khi đó hạt nhân của $G \longrightarrow A$ là lược đồ con đóng của G với vành tọa độ $R[G]/I_A R[G]$.

Định nghĩa 3.2.4. Một dãy các đồng cấu giữa các lược đồ nhóm affine phẳng trên R

$$1 \longrightarrow H \xrightarrow{q} G \xrightarrow{p} A \longrightarrow 1$$

được gọi là khớp nếu p là ánh xạ thương với hạt nhân H.

Vành tọa độ $R[G]$ của G là một đại số Hopf (giao hoán) phẳng trên R và các G-môđun cũng giống như các $R[G]$-đối môđun.

Nhận xét 3.2.5. Chúng ta có một số G-môđun quan trọng sau đây. Tác động chính quy phải của G lên $R[G]$, $(g,h) \mapsto gh : (gh)(x) = h(xg)$, $g \in G$, $h \in R[G]$ tương ứng với đối tác động của $R[G]$ lên chính nó bởi đối tích Δ. Tác động chính quy trái của G lên $R[G]$, $(g,h) \mapsto gh : (gh)(x) = h(g^{-1}x)$ tương ứng với đối tác động (phải) của $R[G]$ lên chính nó như sau:

$$a \mapsto \sum_i a_i' \otimes S(a_i), \qquad \text{ở đây } \Delta(a) = \sum_i a_i \otimes a_i'.$$

Ta có bổ đề sau đây:

Bổ đề 3.2.6. ([4, Lemma 4.2.1]) *Giả sử $G \longrightarrow A$ là ánh xạ thương với hạt nhân H.*

(i) Nếu M là một G-môđun thì $M^H := \{m \in M | \rho_M(m) = m \otimes 1_{R[H]}\}$ là một G-môđun con của M.

(ii) Nếu xem $R[G]$ là G-môđun với tác động chính quy trái thì $R[A]$ bằng $R[G]^H$ như các G-môđun.

Định nghĩa 3.2.7. Gọi H là một lược đồ nhóm con của G và M là một G-môđun.

(i) Đồng cấu cảm sinh $R[G] \longrightarrow R[H]$ xác định một H-môđun bởi hợp thành $M \longrightarrow M \otimes R[G] \longrightarrow M \otimes R[H]$, kí hiệu là $\mathcal{R}es(M)$.

(ii) Môđun cảm sinh của M từ $H \longrightarrow G$ được cho bởi tập hợp $\{f \in \mathrm{Hom}(G, M_a) | f(gh) = h^{-1}f(g)$, với mọi $g \in G(A)$, và với mọi $h \in H(A)$, $A \in \mathsf{Alg_R}\}$, kí hiệu là $\mathcal{I}nd(M)$.

(iii) Các hàm tử hạn chế và hàm tử cảm sinh lần lượt được định nghĩa như sau:

$$\mathcal{R}es : \mathsf{Rep}(G) \longrightarrow \mathsf{Rep}(H), M \mapsto \mathcal{R}es(M),$$

$$\mathcal{I}nd : \mathsf{Rep}(H) \longrightarrow \mathsf{Rep}(G), M \mapsto \mathcal{I}nd(M).$$

Ta có một tiêu chuẩn cho tính khớp theo các hàm tử

$$\mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(A) \xrightarrow{p^*} \mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(G) \xrightarrow{q^*} \mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(H). \tag{3.2.3}$$

Định lí 3.2.8. ([4, Theorem 4.2.2]) *Cho một dãy các lược đồ nhóm affine phẳng trên R*

$$H \xrightarrow{q} G \xrightarrow{p} A$$

với q là một nhúng đóng và p là phẳng trung thành. Khi đó dãy trên là khớp khi và chỉ khi các điều kiện sau được thỏa mãn:

(a) Với mỗi $V \in \mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(G)$, $q^*(V) \in \mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(H)$ là tầm thường nếu và chỉ nếu tồn tại $U \in \mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(A)$ sao cho $V \cong p^*U$.

(b) Cho W_0 là vật con tầm thường cực đại của $q^*(V)$ trong $\mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(H)$. Khi đó tồn tại $V_0 \subset V \in \mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(G)$ sao cho $q^*(V_0) \cong W_0$.

(c) Mỗi $W \in \mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(H)$ là thương (tương ứng bởi việc lấy đối ngẫu, là vật con) của một vật có dạng $q^*(V)$ với $V \in \mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(G)$.

Chứng minh. Giả sử $q : H \longrightarrow G$ là hạt nhân của $p : G \longrightarrow A$. Khi đó (a) và (b) được suy ra từ Bổ đề 3.2.6 (i) và (ii). Ta chỉ cần chứng minh (c).

Xét $\mathcal{I}nd : \mathsf{Rep}(H) \longrightarrow \mathsf{Rep}(G)$ là hàm tử biểu diễn cảm sinh. Nó là hàm tử liên hợp phải của hàm tử hạn chế $\mathcal{R}es : \mathsf{Rep}(G) \longrightarrow \mathsf{Rep}(H)$, tức là,

$$\mathsf{Hom}_G(V, \mathcal{I}nd(W)) \xrightarrow{\cong} \mathsf{Hom}_H(\mathcal{R}es(V), W). \tag{3.2.4}$$

Ta có $\mathcal{I}nd(W) \cong (W \otimes_R R[G])^H$, ở đây H tác động lên $R[G]$ bởi tác động chính quy trái, [15, I.3.4]. Chú ý rằng $(W \otimes_R R[G])^H \subset W \otimes_R R[G]$ là bất biến dưới tác động của $R[A]$ hay nó là một $R[A]$-môđun con.

Hơn nữa đẳng cấu

$$R[G] \otimes_{R[A]} R[G] \xrightarrow{\simeq} R[H] \otimes_R R[G]$$

là một ánh xạ của các G-môđun, ở đây G tác động ở vế phải là một tác động chính quy phải. Vì $R[G]$ phẳng trung thành trên đại số con $R[A]$ nên việc lấy tích ten xơ với $R[G]$ trên $R[A]$ là giao hoán với các H-bất biến, do đó

$$\mathcal{I}nd(W) \otimes_{R[A]} R[G] \simeq (W \otimes_R R[G])^H \otimes_{R[A]} R[G] \simeq W \otimes_R R[G].$$

Điều này dẫn đến hàm tử $\mathcal{I}nd(W)$ là trung thành và khớp.

Chọn $V = \mathcal{I}nd(W)$ trong (3.2.4), ta thu được ánh xạ chuẩn tắc $u_W : \mathcal{I}nd(W) \longrightarrow W$ trong $\mathsf{Rep}(H)$ mà đẳng cấu (3.2.4) có thể thu lại được như sau:

$$\mathsf{Hom}_G(V, \mathcal{I}nd(W)) \ni h \mapsto u_W \circ h \in \mathsf{Hom}_H(\mathcal{R}es(V), W).$$

Ánh xạ u_W là không tầm thường nếu như W khác không. Thật vậy, vì $\mathcal{I}nd$ là hàm tử khớp và trung thành nên $\mathcal{I}nd(W)$ khác không nếu như W khác không. Do đó nếu $u_W = 0$ thì (3.2.4) cũng là ánh xạ tầm thường với mọi V. Mặt khác, nếu lấy $V = \mathcal{I}nd(W)$ thì vế phải chứa ánh xạ đồng nhất. Điều này dẫn đến mâu thuẫn, do đó u_W là không tầm thường.

Bây giờ ta chỉ ra u_W luôn là toàn ánh. Đặt $U = \mathsf{im}(u_W)$ và $T = W/U \in \mathsf{Rep}_{\mathrm{f}}(H)$. Ta có các biểu đồ sau

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{I}nd(U) \arrow[r] \arrow[d, "u_U"] & \mathcal{I}nd(W) \arrow[r] \arrow[d, "u_W"] & \mathcal{I}nd(T) \arrow[r] \arrow[d, "u_T"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & U \arrow[r] & W \arrow[r] & T \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Theo giả thiết hợp thành $\mathcal{I}nd(W) \twoheadrightarrow \mathcal{I}nd(T) \longrightarrow T$ là 0, vì $\mathcal{I}nd(T) \longrightarrow T$ là ánh xạ không, suy ra $T = 0$.

Bây giờ ta giả sử W xạ ảnh và hữu hạn sinh trên R. Khi đó $\mathcal{I}nd(W)$ là không xoắn. Do đó $\mathcal{I}nd(W)$ là hợp của các môđun con xạ ảnh hữu hạn sinh của nó, và ta có thể tìm một G-môđun con hữu hạn sinh $W_0(W)$ của $\mathcal{I}nd(W)$ sao cho nó vẫn là toàn ánh trên W. Để thu được phát biểu cho tính nhúng của W, ta lấy ánh xạ đối ngẫu $W_0(W^\vee) \twoheadrightarrow W^\vee$.

Giả sử rằng (a), (b), (c) được thỏa mãn. Khi đó từ (a) ta có với mỗi $U \in \mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(A), q^*p^*(U) \in \mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(H)$ là tầm thường. Do đó $pq : H \longrightarrow A$ là đồng cấu tầm thường. Gọi $\overline{q} : \overline{H} \longrightarrow G$ là hạt nhân của p. Khi đó ta có tương ứng giữa các biểu đồ giao hoán.

$$\begin{tikzcd} H \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "q"'] & & \overline{H} \arrow[dl, "\overline{q}"] \\ & G & \end{tikzcd} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{tikzcd} \mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(H) & & \mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(\overline{H}) \arrow[ll, "i^*"'] \\ & \mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(G). \arrow[ul, "q^*"] \arrow[ur, "\overline{q}^*"'] & \end{tikzcd}$$

Việc còn lại ta chỉ cần chứng minh i là toàn ánh bằng việc sử dụng tiêu chuẩn (i) trong Định lí 3.2.3. Đầu tiên ta chỉ ra i^* là trung thành đầy. Dễ thấy i^* là trung thành. Đặt $\overline{W}_0, \overline{W}_1$ là các vật trong $\mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(\overline{H})$, và $\varphi : W_0 = i^*(\overline{W}_0) \longrightarrow W_1 = i^*(\overline{W}_1)$ là cấu xạ của các H-môđun. Vì $\overline{H}$ là hạt nhân của p, phần đầu tiên trong chứng minh này chỉ ra rằng tồn tại một toàn ánh $\overline{q}^*(V_0) \twoheadrightarrow \overline{W}_0$ và một đơn ánh $\overline{W}_1 \hookrightarrow \overline{q}^*(V_1)$ với V_0, V_1 là các vật của $\mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(G)$. Vậy φ kết hợp với các ánh xạ này đưa ra một ánh xạ $\widehat{\varphi} : q^*(V_0) \longrightarrow q^*(V_1)$. $\widehat{\varphi}$ tương ứng với một phần tử của $(q^*(V_1) \otimes q^*(V_0)^\vee)^H$. Áp dụng điều kiện (a), (b) cho H và đồng thời $\overline{H}$

cũng thỏa mãn (a), (b) nên tồn tại $\psi : \overline{q}^*(V_0) \longrightarrow \overline{q}^*(V_1)$ sao cho

$$\widehat{\varphi} = i^*(\psi) : q^*(V_0) \twoheadrightarrow \overline{W}_0 \xrightarrow{\varphi} \overline{W}_1 \hookrightarrow q^*(V_1).$$

Điều này suy ra $\varphi = i^*(\overline{\varphi})$ với $\overline{\varphi} : \overline{W}_0 \longrightarrow \overline{W}_1$nào đó. Vậy i^* là hàm tử đầy.

Với $W \in \mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(H)$ tùy ý, do (c) nên tồn tại V_0, V_1 trong $\mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(G)$ và $\varphi : q^*(V_0) \longrightarrow q^*(V_1)$ sao cho $W = \mathsf{im}\varphi$. Vì i^* là đầy nên $\varphi = i^*\overline{\varphi}$, do đó $W \cong i^*(\mathsf{im}\overline{\varphi})$. Vậy ta đã chứng minh được rằng mỗi vật trong $\mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(H)$ đẳng cấu với ảnh của i^* của một vật trong $\mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(\overline{H})$. Cùng với thảo luận trên ta suy ra $\overline{H} \cong H$. □

3.3 Đối đại số hữu hạn địa phương

Một tính chất quan trọng của các đối đại số trên một trường là tính hữu hạn địa phương: *một đối đại số luôn là hợp của các đối đại số con hữu hạn chiều*. Bổ đề 1.2.8 khẳng định tính chất này cũng cho các đối đại số phẳng trên vành Dedekind: một đối đại số phẳng L là hợp của các đối đại số con hữu hạn của nó.

Tuy nhiên tính chất hữu hạn địa phương theo nghĩa này là chưa đủ để mô tả theo đối ngẫu Tannaka trên vành Dedekind. Cho một đối đại số con C của L trên trường k, phạm trù $\mathsf{Comod}_{\mathrm{f}}(C)$ có thể đồng nhất với phạm trù con đầy (đóng với việc lấy các vật con) của phạm trù $\mathsf{Comod}_{\mathrm{f}}(L)$. Trên một vành Dedekind R, điều này không cho thêm thông tin gì về các đối đại số phẳng. Lí do là môđun thương L/C có thể không phẳng trên R. Nếu ta cố gắng làm lớn C để môđun thương trở thành phẳng thì vẫn chưa đảm bảo rằng nó vẫn còn hữu hạn trên R. Việc nghiên cứu các đối đại số phẳng và các lược đồ nhóm affine trên vành Dedekind sẽ bị hạn chế bởi điều này. Dưới đây chúng ta sẽ chỉ ra rằng một đối đại số xạ ảnh như một môđun trên vành R là hữu hạn địa phương theo một nghĩa tốt hơn.

Định nghĩa 3.3.1. Cho L là một đối đại số phẳng trên R.

(i) Một đối đại số con C của L được gọi là đặc biệt nếu L/C là phẳng. Một đồng cấu của các đối đại số $f : L' \longrightarrow L$ được gọi là đặc biệt nếu $f(L')$ là đối đại số con đặc biệt của L.

(ii) L được gọi là đối đại số *hữu hạn địa phương* nếu với mọi đối môđun con *hữu hạn* C đều có một đối môđun con đặc biệt *hữu hạn* chứa C.

Cho M là một L-đối môđun. Khi đó R-môđun con xoắn M_{tor} của M cũng là L-đối môđun con. Do đó với mọi L-đối môđun con N, nghịch ảnh của $(M/N)_{\mathrm{tor}}$ trong M (kí hiệu N^{s}) cũng là một L-đối môđun. Vì R là vành Dedekind nên môđun thương M/N^{s} là không xoắn do đó phẳng trên R. Vậy N^{s} là đối môđun con đặc biệt nhỏ nhất của M chứa N và được gọi đối môđun bão hòa của N trong M.

Chứng minh của bổ đề sau dựa theo [4, Lemma 3.1.2]:

Bổ đề 3.3.2. *Một R-đối đại số phẳng L và C là đối đại số con của L. Khi đó R-môđun bão hòa C^{s} của C trong L là một đối đại số con đặc biệt.*

Chứng minh. Thật vậy, ta có một cái lọc $C^{\mathrm{s}} \otimes C^{\mathrm{s}} \subset C^{\mathrm{s}} \otimes L \subset L \otimes L$ mà thương liên tiếp là phẳng, do đó $L \otimes L/C^{\mathrm{s}} \otimes C^{\mathrm{s}}$ cũng phẳng. Vậy

$$(C \otimes C)^{\mathrm{s}} \subset C^{\mathrm{s}} \otimes C^{\mathrm{s}}.$$

Do đó, theo định nghĩa của C^{s} ta có $\Delta(C^{\mathrm{s}}) \subset (C \otimes C)^{\mathrm{s}} \subset C^{\mathrm{s}} \otimes C^{\mathrm{s}}$. □

Nhận xét 3.3.3. Trong trường hợp R là một vành định giá rời rạc với phần tử đơn trị hóa π thì công thức đối tích cho C^{s} có thể viết lại như sau

$$\Delta_{C^{\mathrm{s}}}(c) := \pi^{-m}\Delta_C(\pi^m c), \quad \text{nếu } \pi^m c \in C.$$

Ví dụ sau đây chỉ rằng tồn tại những đối đại số *không* hữu hạn địa phương.

Ví dụ 3.3.4. ([37, Remarque 11.10.1]). Cho R là vành Dedekind, K là trường phân thức của nó và cho $x \in R$ là một phần tử *không* khả nghịch.

G là lược đồ nhóm affine trên R được định nghĩa bởi đại số con của $K[\mathbb{G}_a] = K[T]$:

$$R[G] := \{P \in K[T] | P(0) \in R\}$$

tức là, $R[G]$ chứa các đa thức trong $K[T]$ với hệ số tự do trong R. Đặt C_i là đối đại số con sinh bởi 1 và $x^{-i}T$ trên R. Khi đó ta có

$$C_i \subsetneq C_{i+1}, \quad xC_{i+1} \subsetneq C_i.$$

Khi đó đối môđun bão hòa của C_0 là không hữu hạn.

Chú ý 3.3.5. Giả sử M là một R-môđun phẳng. Khi đó với mọi môđun con N của M, $N^{\mathrm{s}} = (N \otimes K) \cap M \subset M \otimes K$. Đặc biệt, nếu M là xạ ảnh trên R và $N \otimes K$ là không gian véc tơ hữu hạn chiều thì N^{s} là *hữu hạn* ([13, Lemma 3.11.7]).

Một R-môđun xạ ảnh luôn là một môđun phẳng trên R. Điều ngược lại nói chung không đúng. Công trình [22] giới thiệu khái niệm R-môđun Mittag-Leffler với tính chất quan trọng sau: một môđun Mittag-Leffler sẽ là một môđun xạ ảnh nếu nó sinh bởi một tập đếm được trên R ([22, Proposition 1] hoặc tham khảo [13, I.2.2]). Mệnh đề sau chỉ ra mỗi đối đại số xạ ảnh trên R là hữu hạn địa phương. Ngược lại, mỗi đối đại số hữu hạn địa phương sẽ là Mittag-Leffler như R-môđun và do dó nó là xạ ảnh nếu L là sinh bởi một tập đếm được như R-môđun.

Mệnh đề 3.3.6. ([13, I.3.11]) *Cho R là vành Dedekind và L là một R-đối đại số phẳng.*

(i) Nếu L là R-xạ ảnh thì nó là hữu hạn địa phương như R-đối đại số.

(ii) Ngược lại, nếu L hữu hạn địa phương thì L là Mittag-Leffler như là R-môđun. Do đó, nếu L là R-môđun sinh bởi một tập đếm được trên R thì L là R-xạ ảnh.

Chứng minh. i) Bây giờ ta sẽ chỉ ra đối đại số mà xạ ảnh trên R là *hữu hạn địa phương*. Thật vậy, giả sử C là đối đại số con hữu hạn của L. Khi đó $C \otimes K$ là không gian véc tơ hữu hạn chiều và theo chú ý ở trên thì C^{s} là đối môđun bão hòa *hữu hạn* của C trong L.

(ii) Cho $\{C_\alpha\}$ các đối đại số con đặc biệt và hữu hạn. Khi đó, với mọi R-môđun hữu hạn N, hệ $\mathsf{Hom}_R(C_\alpha, N)$ là Mittag-Leffler. Thật vậy, mỗi đơn cấu $C_\alpha \longrightarrow C_\beta$ là đặc biệt nên C_β/C_α là không xoắn và hữu hạn do đó xạ ảnh. Hệ quả là ánh xạ

$$\mathsf{Hom}_R(C_\beta, N) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(C_\alpha, N)$$

là toàn ánh và do đó nó mãn điều kiện Mittag-Leffler ([22, Definition 3]). Vậy L là Mittag-Leffler. $\square$

Mệnh đề sau đây là mở rộng kết quả ([4, Proposition 3.1.7]). Ở đây chúng ta không cần giả thiết thớ tổng quát G_K là rút gọn.

Mệnh đề 3.3.7. *Cho G là một lược đồ nhóm phẳng thuộc kiểu hữu hạn trên vành Dedekind R. Giả sử thớ tổng quát G_K là liên thông. Khi đó $R[G]$ là hữu hạn địa phương như một đối đại số trên R.*

Chứng minh. Gọi I là iđêan dấu của $R[G]$, tức là, $I = \mathsf{ker}(\varepsilon)$ với $\epsilon : R[G] \longrightarrow R$ là ánh xạ đối đơn vị. Vì $R[G]$ là môđun phẳng trên R, ta có đơn ánh $R[G] \longrightarrow R[G] \otimes_R K = K[G_K]$. Khi đó iđêan dấu của $K[G_K]$ là $I_K = I \otimes_R K$. Với giả thiết G_K liên thông, ta luôn có $\bigcap_m (I_K)^m = 0$ theo [29, Chapter 11, Exercise 6].

Bây giờ cho $M \subset R[G]$ là một R-môđun con hữu hạn. Tồn tại m sao cho $M \otimes K \cap (I_K)^m = 0$. Ta lại có $(I_K)^m = I^m \otimes K$, do đó $(M \cap I^m) \otimes K = 0$, suy ra $M \cap I^m = 0$. Ta có thể kết luận được $M^{\mathrm{s}} \cap I^m = 0$. Thật vậy, nếu $0 \neq a \in M^{\mathrm{s}} \cap I^m$ thì tồn tại $0 \neq r \in R$ sao cho $ra \in M \cap I^m$, điều này dẫn đến $ra = 0$, hệ quả là $a = 0$ vì $R[G]$ không có xoắn. Vậy ánh xạ $M^{\mathrm{s}} \longrightarrow R[G]/I^m$ là đơn ánh. Nhưng $R[G]/I^m$ là hữu hạn, do đó M^{s} cũng hữu hạn. $\square$

3.4 Cấu trúc của lược đồ nhóm affine phẳng trên một vành định giá rời rạc

Cố định một vành định giá rời rạc R với phần tử đơn trị hoá π, trường các thương K và trường thặng dư k.

3.4.1 Lược đồ nhóm affine trên một vành định giá rời rạc sinh ra từ phép nổ Neron

Cho G là lược đồ nhóm affine phẳng trên R. Do tính phẳng ta có $R[G] \subset K[G]$. Cho H là nhóm con của thớ đóng G_k của G. Vậy H được định nghĩa bởi một ideal thực sự J chứa π. Phép nổ Neron của G tương ứng với H là lược đồ nhóm G^H có vành tọa độ:

$$R[G^H] := R[G][\pi^{-1}J] \subset K[G].$$

Đây thực sự là một đại số Hopf trên R. Thật vậy, ta có

$$\Delta(J) \subset J \otimes R[G] + R[G] \otimes J \subset K[G] \otimes K[G],$$

suy ra $\Delta(R[G^H]) \subset R[G^H] \otimes R[G^H]$.

Nhận xét 3.4.1. Từ định nghĩa chúng ta có ngay G^H phẳng trên R và đơn cấu $R[G] \longrightarrow R[G^H]$ cảm sinh một đồng cấu giữa các lược đồ nhóm $G^H \longrightarrow G$. Hơn nữa $G^H_K \cong G_K$ (xem [30, Proposition 1.1]). Lược đồ nhóm G^H được gọi là mô hình của G và đồng cấu $G^H \longrightarrow G$ được gọi là ánh xạ mô hình. Tổng quát hơn, một đồng cấu $G' \longrightarrow G$ giữa các lược đồ nhóm cảm sinh một đẳng cấu giữa các thớ tổng quát cũng được gọi là ánh xạ mô hình.

Lược đồ nhóm G^H có tính chất phổ dụng như sau:

Mệnh đề 3.4.2. ([30, Proposition 1.2]) *Nếu ánh xạ cảm sinh $G'_k \longrightarrow G_k$ của ánh xạ mô hình $G' \longrightarrow G$ có ảnh nằm trong $H \subset G_k$ thì đồng cấu*

$G' \longrightarrow G$ có duy nhất một phân tích qua G^H:

$$\begin{tikzcd} G' \arrow[r] \arrow[dr, dashed] & G \\ & G^H. \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Thật vậy, điều trên được suy ra từ dãy các các đồng cấu trong $K[G]$

$$R[G] \longrightarrow R[G^H] \longrightarrow R[G'] \subset K[G]$$

và chú ý rằng đồng cấu $R[G] \longrightarrow R[G^H]$ cảm sinh một đồng cấu giữa các lược đồ nhóm và gửi G_k^H vào trong $H \subset G_k$.

Ánh xạ $G_k^H \longrightarrow H$ nói chung không phải là một toàn ánh. Tuy nhiên, nó sẽ là một toàn ánh nếu G là trơn với các thớ liên thông (xem [30, Theorem 1.7]).

Ví dụ 3.4.3. (i) Cho $G = \mathbb{G}_{a,R}$ và $H = \{e\} \subset G_k$. Vậy $J = \langle \pi, T \rangle \subset R[T]$ và

$$G^{\{e\}} = \mathrm{Spec(R[T][\pi^{-1}T])} \cong \mathrm{Spec(R[T_1])},$$

và ánh xạ $G^{\{e\}} \longrightarrow G$ được xác định bởi

$$R[T] \longrightarrow R[T_1], \quad T \mapsto \pi T_1.$$

(ii) Cho $G = \mathbb{G}_{m,R} = \mathrm{Spec(R[z, 1/z])}$. Đặt $x = z - 1, y = 1/z - 1$ ta có

$$\mathbb{G}_m = \mathrm{Spec(R[x, y]/(x + y + xy))}$$

với cấu trúc đối đại số xác định bởi

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x + x \otimes x$$

và tương tự cho y. Cho $H = \{e\} \subset G_k$, ta có $J = \langle \pi, x, y \rangle$. Do đó $G^{\{e\}}$ là phổ của vành

$$(R[x, y]/(x + y + xy))\,[\pi^{-1}x, \pi^{-1}y] \cong R[x_1, y_1]/(x_1 + y_1 + \pi x_1 y_1).$$

Đây là một đẳng cấu và cả hai vế đều là các đại số con của $K[x,y]/(x+y+xy)$. Xét ánh xạ $R[x_1,y_1] \longrightarrow K[x,y]/(x+y+xy)$, $x_1 \mapsto \pi^{-1}x$, $y_1 \mapsto \pi^{-1}y$ ta thấy rằng hạch của nó được sinh bởi $x_1+y_1+\pi x_1 y_1$. Chú ý thêm đây chính là lược đồ nhóm $\mathbb{G}^{(\lambda)}$ tương ứng với $\lambda = \pi$ trong Ví dụ 3.4.4 sau đây.

Ví dụ 3.4.4. ([2, Section 1]) Lấy tùy ý một phần tử $\lambda \in R$, khi đó hàm tử trên Alg_R:

$$\mathbb{G}^{(\lambda)}(A) = \{(a,b) \in A^* \times A : a - 1 = \lambda b\}$$

là một lược đồ nhóm affine trên R. Cấu trúc nhóm trên $\mathbb{G}^{(\lambda)}$ bao gồm:

1) Luật hợp thành:

$$\begin{aligned} \mathbb{G}^{(\lambda)} \times \mathbb{G}^{(\lambda)} &\longmapsto \mathbb{G}^{(\lambda)} \\ (a,b) \times (a',b) &\longmapsto (aa', b + b' + \lambda bb'); \end{aligned}$$

2) Đơn vị $(1,0)$;

3) Nghịch đảo:

$$\begin{aligned} \mathbb{G}^{(\lambda)} &\longrightarrow \mathbb{G}^{(\lambda)} \\ (a,b) &\longmapsto (a^{-1}, -a^{-1}b). \end{aligned}$$

Khi đó $\mathbb{G}^{(\lambda)}$ là phổ của đại số Hopf

$$R[G] = R[T, 1/1+\lambda T] = R[T, T^{-1}, X]/(T - 1 - \lambda X) = R[X]_{(1+\lambda X)}$$

với

$$\begin{aligned} \Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X + \lambda \otimes X, \quad \epsilon(X) = 0 \\ S(X) = -X/(1+\lambda X). \end{aligned}$$

Vậy $\mathbb{G}^{(\lambda)}$ phẳng trên R và đồng cấu tự nhiên của các đại số Hopf

$$f^{\lambda} : R[T, T^{-1}] \longrightarrow R[X]_{(1+\lambda X)}, T \longmapsto 1 + \lambda X,$$

cảm sinh một đồng cấu giữa các lược đồ nhóm $f^{\lambda^*} : \mathbb{G}^{(\lambda)} \longrightarrow \mathbb{G}_m$. Hơn nữa, $\mathbb{G}^{(0)} = \mathbb{G}_a$ và $\mathbb{G}^{(\lambda)} = \mathbb{G}_m$ nếu như $\lambda \in R^*$. Nếu λ khác không thì ta có một đẳng cấu trên thớ tổng quát ${\mathbb{G}^{(\lambda)}}_K := \mathbb{G}^{(\lambda)} \times_{\mathrm{Spec}(R)} \mathrm{Spec}(K) \cong \mathbb{G}_{m,K}$. Trường hợp λ là một lũy thừa nào đó của π, lược đồ nhóm này sẽ trùng với lược đồ nhóm sinh ra từ một phép nổ Neron của $\mathbb{G}_m$.

Các phép nổ Neron có thể dùng để mô tả các ánh xạ mô hình $G' \longrightarrow G$ của các K-lược đồ nhóm. Cụ thể là, mỗi ánh xạ mô hình của các lược đồ nhóm kiểu hữu hạn là hợp thành của các phép nổ Neron ([30, Theorem 1.4]).

3.4.2 Đồng cấu giữa các lược đồ nhóm cảm sinh một đẳng cấu giữa các thớ tổng quát và cấu trúc cho lược đồ nhóm affine phẳng

Ta tiếp tục nghiên cứu các đồng cấu giữa các lược đồ nhóm, đặc biệt là đồng cấu giữa các lược đồ nhóm mà nó cảm sinh một đẳng cấu giữa các thớ tổng quát (chẳng hạn như đồng cấu cảm sinh từ phép nổ Neron) và ứng dụng nó để nghiên cứu cấu trúc của lược đồ nhóm.

Định lí 3.4.5. ([30, Theorem 1.4]) *Cho G và G' là các lược đồ nhóm affine phẳng kiểu hữu hạn. Giả sử $f : G' \longrightarrow G$ là một đồng cấu giữa chúng. Khi đó, nếu $f_K : G'_K \longrightarrow G_K$ là một đẳng cấu thì f là một hợp thành của các phép nổ Neron.*

Định lí 3.4.5 ở trên cho phép khai triển một cấu xạ tùy ý giữa các lược đồ nhóm *kiểu hữu hạn* mà nó cảm sinh một đẳng cấu trên thớ tổng quát (hay cấu xạ mô hình giữa các lược đồ nhóm affine). Định lí tiếp theo là một mở rộng của kết quả này.

Cho $\rho : \mathcal{G} \longrightarrow G$ là một đồng cấu giữa các lược đồ nhóm affine phẳng, trong đó G thuộc kiểu hữu hạn. Giả sử ρ cảm sinh một đẳng cấu trên thớ tổng quát. Đặt $\rho_0 = \rho$ và $G_0 = G$. Thực hiện phép nổ Neron tại nhóm con đóng $\mathrm{Im}(\rho_0 \otimes k)$ của thớ đặc biệt $G_{0,k}$ ta thu được lược đồ nhóm G_1 và đồng cấu $\rho_1 : \mathcal{G} \longrightarrow G_1$. Giả sử ta xây dựng được G_n và đồng cấu

$\rho_n : \mathcal{G} \longrightarrow G_n$. Đặt G_{n+1} như là nổ Neron tại nhóm con đóng $\mathrm{Im}(\rho_n \otimes k)$. Khi đó ta cũng có một đồng cấu $\rho_{n+1} : \mathcal{G} \longrightarrow G_{n+1}$. Vậy theo quy nạp ta có một dãy đồng cấu giữa các lược đồ nhóm $(G_n, \rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\ldots \longrightarrow G_2 \xrightarrow{\rho_2} G_1 \xrightarrow{\rho_1} G_0 = G. \tag{3.4.1}$$

Đây là một hệ xạ ảnh và nó cảm sinh một đồng cấu $\varprojlim_n \rho_n : \mathcal{G} \longrightarrow \varprojlim G_n$.

Định lí 3.4.6. ([5, Theorem 2.11]) *Đồng cấu $\varprojlim_n \rho_n : \mathcal{G} \longrightarrow \varprojlim G_n$ là một đẳng cấu giữa các lược đồ nhóm affine phẳng trên R.*

Chứng minh. Chúng ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng $\pi^{-n}R[G_0] \cap R[\mathcal{G}] \subset R[G_n]$. Thật vậy, vì iđêan của $R[G_0]$ định nghĩa $\mathrm{Im}(\rho_0 \otimes k)$ là $R[G_0] \cap \pi R[\mathcal{G}]$, trường hợp $n = 1$ được chứng minh. Giả sử $\pi^{-n}R[G_0] \cap R[\mathcal{G}] \subset R[G_n]$. Lấy $f_0 \in R[G_0]$ sao cho $\pi^{-n-1}f_0$ nằm trong $R[\mathcal{G}]$. Khi đó $\pi^{-n}f_0$ nằm trong $\pi R[\mathcal{G}]$. Mặt khác, bao hàm thức $\pi^{-n}R[G_0] \cap R[\mathcal{G}] \subset R[G_n]$ cho ta $\pi^{-n}f_0 \in R[G_n]$ để mà $\pi^{-n}f_0$ nằm trong $R[G_n] \cap \pi R[\mathcal{G}]$. Nhưng $R[G_n] \cap \pi R[\mathcal{G}]$ là iđêan định nghĩa của $\mathrm{Im}(\rho_n \otimes k)$, vì vậy $\pi^{-1}\pi^{-n}f_0$ nằm trong $R[G_{n+1}]$.

Bao hàm thức ở trên dẫn đến $R[\mathcal{G}] \subset \cup R[G_n]$. Vì $R[G_n]$ luôn được chứa trong $R[\mathcal{G}]$ nên chúng ta cũng có bao hàm thức ngược lại. Chứng minh được hoàn thành. □

Ví dụ 3.4.7. ([37, SGA3-IV$_{\mathrm{B}}$, Exemple 13.3]). Xét hệ xạ ảnh

$$\ldots \longrightarrow \mathbb{G}_{a,R} \xrightarrow{\times\pi} \mathbb{G}_{a,R} \xrightarrow{\times\pi} \mathbb{G}_{a,R}, \tag{3.4.2}$$

tương ứng với hệ quy nạp

$$R[x_0] \longrightarrow R[x_1] \longrightarrow \ldots$$

định nghĩa bởi $x_i \mapsto \pi x_{i+1}$. Giới hạn G của (3.4.2) là phẳng và có vành tọa độ $R[G]$ bằng $\{P \in K[T] \mid P(0) \in R\}$. Chú ý rằng R-mô đun $R[G]$ đẳng cấu với $R \oplus K \oplus K \oplus \cdots$ và không xạ ảnh trên R. Đây chính là lược đồ nhóm đã đề cập trong Ví dụ 3.3.4 và thớ tổng quát của nó cũng là $\mathbb{G}_{a,K}$.

Ví dụ 3.4.8. ([33, Section 3, 3.2.1.5]). Cho $G = \mathbb{G}_{m,R}$. Nếu ta đặt

$$G_n = \operatorname{Spec} R[x_n, y_n]/(x_n + y_n + \pi^n x_n y_n),$$

và định nghĩa đối tích xác định bởi

$$\begin{aligned} x_n &\longmapsto x_n \otimes 1 + 1 \otimes x_n + \pi^n x_n \otimes x_n, \\ y_n &\longmapsto y_n \otimes 1 + 1 \otimes y_n + \pi^n y_n \otimes y_n \end{aligned}$$

Khi đó ta có đồng cấu $R[G_{n-1}] \longrightarrow R[G_n]$ xác định bởi

$$\begin{aligned} x_{n-1} &\longmapsto \pi x_n \\ y_{n-1} &\longmapsto \pi y_n. \end{aligned}$$

Đồng cấu này cảm sinh một đẳng cấu $K[G_{n-1}] \cong K[G_n]$. Điều này có nghĩa $R[G_n]$ là vành con của $K[\mathbb{G}_m]$ sinh bởi $\pi^{-n}x$ và $\pi^{-n}y$. Cuối cùng ta thu được hệ xạ ảnh của các lược đồ nhóm affine

$$\ldots \longrightarrow G_{n+1} \longrightarrow G_n \longrightarrow G_{n-1} \longrightarrow \ldots$$

mà giới hạn xạ ảnh là ví dụ của André, (xem [33, 3.2.1.5]). Giới hạn của hệ xạ ảnh này là một lược đồ nhóm có thớ tổng quát đẳng cấu với $\mathbb{G}_{m,K}$. Chú ý rằng như trong Ví dụ 3.4.7 ở trên,

$$R[G] = \{P \in K[\mathbb{G}_{m,R}] \,:\, \varepsilon P \in R\},$$

ở đây ε là ánh xạ đối đơn vị.

Định lí 3.4.9. ([5, Theorem 2.17]) *Cho G là một lược đồ nhóm phẳng trên R. Khi đó G có thể viết như là giới hạn của một hệ xạ ảnh của các lược đồ nhóm phẳng trên R*

$$G := \varprojlim_i G_i,$$

trong đó tất cả các cấu xạ chuyển đều là phẳng trung thành và mỗi thớ tổng quát của G_i đều thuộc kiểu hữu hạn trên K. Hơn nữa, mỗi G_i đều có thể thu được từ một lược đồ nhóm phẳng kiểu hữu hạn bởi hợp thành (có thể vô hạn) của một dãy các phép nổ Neron.

Chứng minh. Xét $R[G]$ như là biểu diễn chính quy (phải) của G (tức là đối môđun theo nghĩa của đối tích). Theo định lí về tính hữu hạn địa phương (xem Bổ đề 1.2.8), $R[G]$ là hợp của các biểu diễn con mà hữu hạn như các R-môđun. Gọi V là một trong các biểu diễn con đó. Khi đó V tự do như R-môđun và V cảm sinh một đồng cấu giữa các đại số Hopf $R[GL(V)] \longrightarrow R[G]$, ảnh của đồng cấu nay trong $R[G]$ sẽ được kí hiệu là $R[G(V)]$. Chú ý rằng V cũng là tập con của $R[G(V)]$. Vậy $R[G]$ là hợp của các đại số Hopf con $R[G(V)]$. Bây giờ các G_i trong định lí sẽ được lấy là phổ của các đại số Hopf $R[G(V)]^{\mathrm{s}}$ khi V chạy khắp các biểu diễn con $R[G]$. Chú ý rằng với mỗi G_i, đồng cấu $R[G_i] \longrightarrow R[G]$ là phẳng trung thành theo Định lí 3.2.1. Bao hàm thức $R[G(V)] \subset R[G(V)]^{\mathrm{s}}$ cảm sinh một đồng cấu giữa các lược đồ nhóm trên R. Hơn nữa lược đồ nhóm cảm sinh từ đại số Hopf $R[G(V)]$ là lược đồ nhóm kiểu hữu hạn. Theo phần xây dựng ở trước Định lí 3.4.6 và theo Định lí 3.4.6, đồng cấu giữa các lược đồ nhóm này được viết như hợp thành (có thể vô hạn) của một dãy các phép nổ Neron. $\square$

Chương 4

Tính phẳng của đại số Hopf trên một đại số Hopf con của nó trên vành Dedekind

Định lí 3.2.1 trong Chương 3 đã chỉ ra mỗi đại số Hopf giao hoán luôn phẳng trung thành trên một đại số Hopf con bão hòa (như một môđun) của nó. Trong chương này chúng tôi sử dụng tiêu chuẩn phẳng trung thành Định lí 1.4.4 để nghiên cứu tính phẳng trung thành, sau đó là tính xạ ảnh của một đại số Hopf (không nhất thiết giao hoán) trên một đại số con bão hòa của nó. Các kết quả trong chương này được trình bày theo [6].

Trong chương này chúng ta vẫn giả thiết R là vành Dedekind với trường phân thức K và kí hiệu k cho các trường thặng dư của nó.

4.1 Ứng dụng của tiêu chuẩn phẳng trung thành trong trường hợp đại số Hopf con là hữu hạn

Bắt đầu mục này ta sẽ áp dụng Định lí 1.4.4 cho các đại số Hopf để thu được kết quả về tính trung thành của một đại số Hopf hữu hạn trên một đại số Hopf con (hữu hạn sinh như R-môđun) của nó. Như một hệ quả của Định lí 1.4.4 và Định lí Nichols-Zoeller trong [20, Theorem 7] ta có mệnh đề sau.

Mệnh đề 4.1.1. ([6, Proposition 3.3]) *Cho B là một số Hopf R-hữu hạn và A là đại số Hopf con bão hòa như R-môđun trong B. Khi đó B là phẳng trung thành theo cả hai phía trái và phải trên A.*

Chứng minh. Vì B/A là R-phẳng nên $A_k \subset B_k$ cho mọi trường thặng dư và trường phân thức K. Hơn nữa B_k là tự do, đặc biệt hơn là phẳng trung thành trên A_k, Định lí 1.4.4 đảm bảo B là phẳng trung thành trên A. $\square$

Vì mỗi A-môđun phẳng có biểu diễn hữu hạn là xạ ảnh trên A (xem [32, Weibel, Theorem 3.2.7]) nên chúng ta có:

Hệ quả 4.1.2. ([6, Corollary 3.4]) *Giả sử B là hữu hạn trên R. Khi đó, với mọi đại số Hopf con A bão hòa trong B, B là xạ ảnh (trái và phải) như A-môđun.*

Chú ý 4.1.3. Nếu R là vành địa phương và B là R-hữu hạn thì B là tự do trên một R-đại số Hopf con tùy ý của nó, chứng minh có thể tìm thấy trong [25, Remark 2.1].

Trong trường hợp B không nhất thiết hữu hạn, ta cần điều kiện A chuẩn tắc trong B và điều kiện A là *hữu hạn*. Sử dụng kết quả của Schneider [26, Theorem 2.1 (2)] và ứng dụng Định lí 1.4.4 chúng ta sẽ nhận được tính phẳng trung thành của B trên A. Trước tiên ta bắt đầu bằng định nghĩa sau.

Định nghĩa 4.1.4. Cho A là đại số Hopf con của đại số Hopf phẳng B với phép đối thế S. Khi đó:

(i) Nếu A bão hòa trong B như R-môđun thì A được gọi là đại số Hopf con bão hòa của B.

(ii) A được gọi là chuẩn tắc trong B nếu với mọi $a \in A, b \in B$ ta có

$$\sum b_1 a S(b_2) \in A \quad \text{và} \quad \sum S(b_1) a b_2 \in A.$$

Đại số Hopf con A của B được gọi là *chuẩn tắc bão hòa* nếu A vừa là đại số Hopf con chuẩn tắc vừa là đại số Hopf con bão hòa của B.

Kí hiệu $A^+ := \mathsf{ker}\varepsilon_A$ là iđêan dấu của A.

Nhận xét 4.1.5. (i) Nếu A là đại số Hopf con chuẩn tắc bão hào trong B thì $I := BA^+B = BA^+ = A^+B$ là các iđêan Hopf bão hòa trong B, [6, Lemma 2.3].

(ii) Nói chung iđêan BA^+ không nhất thiết bão hòa trong B hay $C := B/BA^+$ không nhất thiết phẳng trên R. Tuy nhiên chúng sẽ bão hòa trong B nếu B là phẳng trung thành (trái hoặc phải) như A-môđun.

Chứng minh của bổ đề sau có thể tham khảo trong [6, Proposition 2.5].

Bổ đề 4.1.6. *Cho A là một đại số Hopf con chuẩn tắc của đại số Hopf R-phẳng B. Giả sử B phẳng trung thành như A-môđun trái, $C := B/BA^+$. Khi đó A là bão hòa trong B và C là R-phẳng.*

Chứng minh. Lấy tích ten xơ dãy khớp

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow B/A \longrightarrow 0$$

với môđun B trên A chúng ta thu được một dãy khớp chẻ ra

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow B \otimes_A B \longrightarrow B/A \otimes_A B \longrightarrow 0$$

với ánh xạ chẻ ra xác định bởi $B \otimes_A B \longrightarrow B, m \otimes n \mapsto mn$. Theo giả thiết B phẳng trên R do đó $B \otimes_A B$ cũng phẳng trên R. Hệ quả là $B/A \otimes_A B$

phẳng trên R. Điều này dẫn đến B/A phẳng trên R do tính phẳng trung thành của B trên A.

Bây ta sẽ chỉ ra C phẳng trên R. Thật vậy, ánh xạ chuẩn tắc

$$B \otimes_A B \longrightarrow C \otimes B, b \otimes b' \mapsto \sum \overline{b'_2} \otimes bb'_1 \tag{4.1.1}$$

là một đẳng cấu với nghịch đảo $\overline{b'} \otimes b \mapsto \sum b'_2 \otimes bS(b'_1)$. Tính phẳng của C được kết luận từ tính phẳng trên R của vế trái và tính phẳng trung thành của B trên A ở vế phải của đẳng thức. $\square$

Nếu $A \subset B$ là một đại số Hopf con chuẩn tắc bão hòa và R-hữu hạn thì chúng ta sẽ chỉ ra được B phẳng trung thành trên A. Hơn nữa, chúng ta còn có thể mô tả cụ thể của các phạm trù $\mathcal{M}_A$ của các A-môđun phải và phạm trù các C-đối môđun phải $\mathcal{M}^C$ theo nghĩa của phạm trù các môđun Hopf. Các mô tả này dựa trên kết quả của Takeuchi [28] cho các đại số Hopf trên một trường. Chúng ta cần định nghĩa sau đây:

Định nghĩa 4.1.7. Cho C là một R-đối đại số phẳng. Phạm trù $\mathcal{M}^C$ của các C-đối môđun phải luôn là phạm trù aben. Tương tự, phạm trù ${}^C\mathcal{M}$ của các C-đối môđun trái cũng là phạm trù aben.

(i) Cho $M \in \mathcal{M}^C$ và $N \in {}^C\mathcal{M}$. Một đối tích ten xơ $M\square_C N$ được định nghĩa là:

$$0 \longrightarrow M\square_C N \longrightarrow M \otimes N \xrightarrow{\rho_M \otimes N - M \otimes \rho_N} M \otimes C \otimes N, \tag{4.1.2}$$

ở đây ρ_M, ρ_N là các đối tác động của C lần lượt lên M và N. Ta nói N là đối phẳng (trái) trên C nếu hàm tử $-\square N : \mathcal{M}^C \longrightarrow \mathcal{M}_R$ là khớp (hàm tử này khớp trái khi N là R-phẳng); N là đối phẳng trung thành (trái) trên C nếu hàm tử này là khớp và trung thành.

(ii) Cho A là một R-đại số và C là đối đại số sao cho cả hai đều phẳng trên R. Một (C, A)-song môđun phải là một R-môđun M với một tác động trái của A và một đối tác động phải ρ của C sao cho

$$\rho(am) = a\rho(m), \text{ với } a \in A, m \in M.$$

Tương tự ta có thể định nghĩa một (C, A)-song môđun trái bằng cách chuyển tác động trái thành phải và đối tác động phải thành trái sao cho đối tác động trái λ của C thỏa mãn $\lambda(ma) = \lambda(m)a$, với $a \in A, m \in M$.

Nhận xét 4.1.8. (i) Một trường hợp quan trọng là xét một R-đối đại số phẳng B như là một C-đối môđun theo cả hai phía thông qua đồng cấu $B \longrightarrow C$ giữa các đối đại số. Khi đó với mọi $M \in \mathcal{M}^C$, theo một cách tự nhiên $M \square_C B$ sẽ là một B-đối môđun phải. Thật vậy từ tính R-phẳng của B ta có biểu đồ giao hoán sau:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M\square_C B \arrow[r] \arrow[d] & M \otimes B \arrow[r, "\rho_M\otimes B - M\otimes\rho_B"] \arrow[d, "M\otimes\Delta"'] & M \otimes C \otimes B \arrow[d, "M\otimes C\otimes\Delta"] \\
0 \arrow[r] & (M\square_C B)\otimes B \arrow[r] & M \otimes B \otimes B \arrow[r] & M \otimes C \otimes B \otimes B,
\end{tikzcd}$$

ở đây ρ_M là đối tác động của C lên M và ρ_B là đối tác động trái của C lên B được xác định bởi

$$\rho_B : B \xrightarrow{\Delta} B \otimes B \longrightarrow C \otimes B.$$

(ii) Hàm tử $-\square B : \mathcal{M}^C \longrightarrow \mathcal{M}^B$ là một hàm tử khớp trái. Hàm tử này liên hợp phải với hàm tử hạn chế $\mathcal{M}^B \longrightarrow \mathcal{M}^C$:

$$\mathsf{Hom}^C(M, N) \cong \mathsf{Hom}^B(M, N\square_C B), \quad \text{với } M \in \mathcal{M}^B,\ N \in \mathcal{M}^C. \tag{4.1.3}$$

Đẳng cấu này thu được từ phép hợp thành một cấu xạ bên vế trái với ánh xạ $\rho_M : M \longrightarrow M\square_C B \subset M \otimes B$:

$$f \mapsto g := (f \otimes \mathsf{id})\rho_M.$$

(iii) Giả sử M là một (C, A)-song môđun phải. Khi đó với mọi C-đối môđun trái N luôn tồn tại một tác động tự nhiên của A lên $M\square_C N \in \mathcal{M}^C$ được xác định từ tác động của A lên M. Một cách đối ngẫu, với mọi A-môđun P, C đối tác động lên $P \otimes_A M$ thông qua đối tác động phải của nó lên M.

(iv) Giả sử P phẳng trên A như một A-môđun phải. Khi đó lấy tích ten xơ dãy khớp (4.1.2) với P trên A ta có một đẳng cấu

$$P \otimes_A (M \square_C N) \xrightarrow{\sim} (P \otimes_A M) \square_C N. \qquad (4.1.4)$$

Hơn nữa, nếu N đối phẳng trái trên C thì có thể dễ dàng kiểm tra được (4.1.4) đúng cho mọi A-môđun P bằng cách dùng một giải tự do của A-môđun P.

(v) Tương tự như ở trên, nếu P phẳng như một A-môđun trái hoặc N đối phẳng phải như C-đối môđun thì

$$(N \square_C M) \otimes_A P \xrightarrow{\sim} N \square_C (M \otimes_A P). \qquad (4.1.5)$$

Tiếp theo ta định nghĩa phạm trù các môđun Hopf cảm sinh từ một đồng cấu giữa các đại số Hopf.

Định nghĩa 4.1.9. Cho $f : A \longrightarrow B$ là một đồng cấu giữa các R-đại số Hopf phẳng. Một (B, A)-môđun Hopf là một R-môđun M với một cấu trúc B-đối môđun phải và một cấu trúc A-môđun phải sao cho ánh xạ cấu trúc $\rho_M : M \longrightarrow M \otimes B$ là A-tuyến tính, ở đây A tác động theo đường chéo trên $M \otimes B$. Một cách cụ thể hơn ta có

$$\rho(ma) = \sum_{m,a} m_0 a_1 \otimes m_1 f(a_2), \quad m \in M, a \in A.$$

Cấu xạ giữa các môđun Hopf là cấu xạ của các R-môđun A-tuyến tính và B-đối tuyến tính. Ta kí hiệu $\mathcal{M}_A^B$ cho phạm trù các (B, A)-môđun Hopf.

Chúng ta sẽ quan tâm hai trường hợp là đồng cấu đơn ánh và đồng cấu thương. Bây giờ cho A là đại số Hopf con chuẩn tắc của đại số Hopf phẳng B. Khi đó đơn cấu $A \longrightarrow B$ sẽ cho ta phạm trù các môđun Hopf $\mathcal{M}_A^B$. Giả sử đại số Hopf thương $C := B/BA^+$ là R-phẳng, (iđêan $A^+B = BA^+$ bão hòa trong B). Khi đó ánh xạ thương $\pi : B \longrightarrow C$ cho phép ta định nghĩa phạm trù $\mathcal{M}_B^C$ của các (C, B)-môđun Hopf.

Với cái khái niệm ở trên, đầu tiên chúng ta có hàm tử

$$\Psi : \mathcal{M}^C \longrightarrow \mathcal{M}_A^B, \quad \Psi(N) = N\square_C B.$$

Xem R như A-môđun trái theo nghĩa của ánh xạ đối đơn vị $\varepsilon_A : A \longrightarrow R$, ta có hàm tử:

$$\Phi : \mathcal{M}_A^B \longrightarrow \mathcal{M}^C, \quad M \longmapsto M \otimes_A R.$$

Bổ đề 4.1.10. ([6, Lemma 2.4]) *Giả sử $C := B/BA^+$ phẳng trên R. Khi đó hàm tử Ψ liên hợp phải với hàm tử Φ:*

$$\mathsf{Hom}^C(M \otimes_A R, N) \cong \mathsf{Hom}_A^B(M, N\square_C B).$$

Các liên hợp được cảm sinh từ các ánh xạ $\rho_M : M \longrightarrow M\square_C B$ và $\varepsilon_B : N\square_C B \longrightarrow N$.

Chứng minh. Với $M \in \mathcal{M}^B, N \in \mathcal{M}^C$ theo Nhận xét 4.1.8(ii) ta có một đẳng cấu

$$\mathsf{Hom}^C(M, N) \cong \mathsf{Hom}^B(M, N\square_C B),$$

cho bởi hợp thành của $f \in \mathsf{Hom}^C(M, N)$ với ánh xạ $\rho_M : M \longrightarrow M\square_C B$: $f \mapsto g := (f \otimes B)\rho_M$. Nếu g là A-tuyến tính hay với mọi $a \in A$, $m \in M$,

$$\sum f(m_0 a_1) \otimes m_1 a_2 = \sum f(m_0) \otimes m_1 a,$$

thì bằng cách tác động ε lên thành phần ten xơ thứ hai ta được

$$f(ma) = \varepsilon(a) f(m).$$

Điều này có nghĩa là $f : M \longrightarrow N$ có thể phân tích qua $\overline{f} : M \otimes_A R \longrightarrow N$ và ánh xạ thương $q_M : M \longrightarrow M \otimes_A R$. Ngược lại, cho $g \in \mathsf{Hom}^B(M, N\square_C B)$ hợp thành với $\epsilon_B : N\square_C B \longrightarrow N$ ta được một cấu xạ $f \in \mathsf{Hom}^C(M, N)$. Nếu f phân tích qua $\overline{f} : M \otimes_A R \longrightarrow N$ và ánh xạ thương $q_M : M \longrightarrow M \otimes_A R$ thì g là A-tuyến tính. Tóm lại, g và $\overline{f}$ liên hệ với nhau qua biểu đồ giao hoán sau

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "q_M"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "f"] & M \otimes_A R \arrow[d, "\overline{f}"] \\ N\square_C B \arrow[r, "\varepsilon_B"'] & N. \end{tikzcd} \tag{4.1.6}$$

Thay f bởi $q_M : M \longrightarrow M \otimes_A R$, $M \in \mathcal{M}_A^B$ và $\epsilon_B : N\square_C B \longrightarrow N$, $N \in \mathcal{M}^C$ ta nhận được đẳng cấu của các hàm tử liên hợp. $\square$

Mệnh đề 4.1.11. ([6, Proposition 2.5]) *Cho A là một đại số Hopf con chuẩn tắc của đai số Hopf R-phẳng B. Giả sử B phẳng trung thành như A-môđun trái, $C := B/BA^+$. Khi đó C là R-phẳng và các hàm tử Φ và Ψ thiết lập một tương đương phạm trù giữa $\mathcal{M}_A^B$ và $\mathcal{M}^C$. Hơn nữa, B là đối phẳng trung thành trên C.*

Chứng minh. Tính phẳng của C là hệ quả của tính phẳng trung thành của B trên A (theo Bổ đề 4.1.6). Hệ quả là phạm trù $\mathcal{M}^C$ là một phạm trù aben.

Với mỗi $M \in \mathcal{M}^B$ ta có đẳng cấu

$$\gamma_M : M \otimes B \cong M \otimes B, \quad \gamma_M(m \otimes b) = \sum m_{(0)} \otimes m_{(1)} b,$$

với ánh xạ nghịch đảo $m \otimes b \longmapsto \sum m_{(0)} \otimes S(m_{(1)})b$. Cho $M \in \mathcal{M}_A^B$ ta xét $M \otimes A$ như là một đối môđun trên B theo đối tác động đường chéo và nhận được biểu đồ giao hoán sau:

$$\begin{tikzcd} M \otimes A \otimes B \arrow[r, "r_M\otimes B - M\otimes l_B"] \arrow[d, "\gamma_{M\otimes A}"'] & M \otimes B \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_M"'] & M \otimes_A B \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_{A,M}"] & 0 \\ (M \otimes A) \otimes B \arrow[r, "r_M\otimes B - M\otimes\varepsilon_A\otimes B"'] & M \otimes B \arrow[r, "q_M\otimes B"'] & (M \otimes_A R) \otimes B \arrow[r] & 0, \end{tikzcd} \tag{4.1.7}$$

trong đó r_M, l_B kí hiệu cho các tác động trên A. Hệ quả là

$$\gamma_{A,M} : M \otimes_A B \xrightarrow{\sim} (M \otimes_A R) \otimes B = \Phi(M) \otimes B.$$

Nếu thay M bởi B ta nhận được lại đẳng cấu (4.1.1):

$$\gamma_{A,B} : B \otimes_A B \xrightarrow{\sim} C \otimes B.$$

Hơn nữa với $M \in \mathcal{M}_A^B$, $N \in \mathcal{M}^C$ và sử dụng (4.1.4) ta có các đẳng cấu:

$$\Psi(N)\otimes_A B = (N\square_C B)\otimes_A B \overset{(4.1.4)}{=} N\square_C(B\otimes_A B) \overset{\gamma_{A,B}}{\cong} N\square_C(C\otimes B) \cong N\otimes B, \tag{4.1.8}$$

$$\sum_i n_i \otimes b_i \otimes b \longmapsto \sum_i n_i \otimes b_{i(1)} \otimes b_{i(2)} b \longmapsto \sum_i n_i \otimes b_i b.$$

Bây giờ giả sử $\overline{f} : M \otimes_A R \longrightarrow N$ trong $\mathcal{M}^C$ tương ứng với $g : M \longrightarrow N \square_C B$ trong $\mathcal{M}_A^B$ như đã chỉ ra ở Bổ đề 4.1.10. Khi đó lấy tích ten xơ của biểu đồ (4.1.6) với B trên R ta nhận được biểu đồ giao hoán sau:

$$\begin{tikzcd} M \otimes B \arrow[r, "\gamma_M"] \arrow[d, "g \otimes \mathrm{id}_B"'] & M \otimes B \arrow[r, "q_M \otimes b"] \arrow[d, "g \otimes \mathrm{id}_B"] & (M \otimes_A R) \otimes B \arrow[d, "\overline{f} \otimes \mathrm{id}_B"] \\ (N \square_C B) \otimes B \arrow[r, "\gamma_{N \square_C B}"'] & (N \square_C B) \otimes B \arrow[r, "N \otimes \varepsilon_B \otimes B"'] & N \otimes B. \end{tikzcd}$$

Lại theo biểu đồ giao hoán (4.1.7) chúng ta thu được biểu đồ giao hoán:

$$\begin{tikzcd} M \otimes_A B \arrow[r, "\gamma_A"] \arrow[d, "g \otimes \mathrm{id}_B"] & (M \otimes_A R) \otimes B \arrow[d, "\overline{f} \otimes \mathrm{id}_B"] \\ (N \square_C B) \otimes_A B \arrow[r, "\simeq"] & N \otimes B, \end{tikzcd}$$

với mũi tên nằm ngang ở dưới là đẳng cấu (4.1.8). Từ điều này và sử dụng tính phẳng trung thành của B trên A và R ta kết luận: $\overline{f}$ là một đẳng cấu khi và chỉ khi g là một đẳng cấu. Hệ quả là các liên hợp $M \longrightarrow \Psi\Phi(M) = (M \otimes_A R) \square_C B$ và $\Phi\Psi(N) = (N \square_C B) \otimes_A R \longrightarrow N$ là các đẳng cấu. Vậy Φ và Ψ thiết lập một tương đương phạm trù.

Đẳng cấu (4.1.8) chỉ ra hàm tử $(- \square_C B) \otimes_A B$ là hàm tử trung thành đầy. Do B là phẳng trung thành trên A ta kết luận được B là đối phẳng trung thành trên C. $\square$

Một cách đối ngẫu, trở lại với ánh xạ thương $\pi : B \longrightarrow C = B/BA^+$, $b \mapsto \overline{b}$, khi đó $B^{\mathrm{co}(C)} := B \square_C R \cong A$. Lấy $T \in \mathcal{M}_A$ khi đó $T \otimes_A B$ rõ ràng nằm trong $\mathcal{M}_B^C$ với cấu trúc C-đối môđun trên B:

$$t \otimes b \mapsto \sum_b t \otimes b_1 \otimes \overline{b}_2, \quad \text{với } b \in B, t \in T.$$

Điều này đưa ra hàm tử $- \otimes_A B : \mathcal{M}_A \longrightarrow \mathcal{M}_B^C$. Bây giờ lấy $Q \in \mathcal{M}_B^C$, ta định nghĩa $Q^{co(C)} := Q \square_C R$ (xét R như là một C-đối môđun trái thông qua ánh xạ đối nhân ϵ_C), ta thu được hàm tử

$$(-)^{co(C)} : \mathcal{M}_B^C \longrightarrow \mathcal{M}_A, Q \longmapsto Q^{co(C)}$$

Bổ đề 4.1.12. ([6, Lemma 2.7]) *Hàm tử $(-)^{co(C)} : \mathcal{M}_B^C \longrightarrow \mathcal{M}_A, Q \longmapsto Q^{co(C)}$ liên hợp phải với hàm tử $- \otimes_A B$:*

$$\mathsf{Hom}_B^C(T \otimes_A B, Q) \cong \mathsf{Hom}_A(T, Q^{co(C)}).$$

Đẳng cấu này xác định bởi các ánh xạ

$$\eta : T \longrightarrow (T \otimes_A B)^{co(C)}, \quad t \mapsto t \otimes 1,$$

$$\zeta : Q^{co(C)} \otimes_A B \longrightarrow Q, \quad q \otimes b \mapsto qb.$$

Chứng minh. Cho $T \in \mathcal{M}_A$ và $Q \in \mathcal{M}_B^C$. Khi đó $f : T \longrightarrow Q^{\mathrm{co}(C)}$ nằm trong $\mathcal{M}_A$ tương ứng với $g : T \otimes_A B \longrightarrow Q$ nằm trong $\mathcal{M}_A^B$ theo biểu đồ giao hoán sau:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "t \mapsto t\otimes 1"] \arrow[d, "f"'] & T \otimes_A B \arrow[d, "g"] \\ Q^{\mathrm{co}(C)} \arrow[r, hook] & Q. \end{tikzcd} \tag{4.1.9}$$

Ánh xạ g là C-đối tuyến tính khi và chỉ khi ảnh của f nằm trong $Q^{\mathrm{co}(C)}$. □

Mệnh đề 4.1.13. ([6, Proposition 2.8]) *Giả sử B là đối phẳng trung thành trái trên C. Khi đó các hàm tử ở trên thiết lập một tương đương phạm trù giữa $\mathcal{M}_A$ và $\mathcal{M}_B^C$. Hơn nữa B là phẳng trung thành trên A.*

Chứng minh. Cho $P \in \mathcal{M}_B^C$. Ta có đẳng cấu

$$\theta_P : P \otimes B \xrightarrow{\sim} P \otimes B, \quad p \otimes b \mapsto \sum_b pb_1 \otimes b_2,$$

với ánh xạ ngược xác định bởi $p \otimes b \mapsto \sum_b pS(b_1) \otimes b_2$. Vì B là R-phẳng các dòng trong biểu đồ giao hoán sau là khớp:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Q^{\mathrm{co}(C)} \otimes B \arrow[r] \arrow[d, "\theta_{C,Q}"'] & Q \otimes B \arrow[r, "(\rho_Q - Q\otimes u)\otimes B"] \arrow[d, "\theta_Q"] & (Q \otimes C) \otimes B \arrow[d, "\theta_{Q\otimes C}"] \\ 0 \arrow[r] & Q\Box_C B \arrow[r] & Q \otimes B \arrow[r, "\rho_Q - \rho_B"'] & Q \otimes C \otimes B, \end{tikzcd}$$

ở đây $u : R \longrightarrow C$ là ánh đơn vị trên C; ánh xạ $\theta_{Q\otimes C}$ cho bởi tác động của B lên $Q \otimes C$ theo đường chéo và do đó nó là một đẳng cấu. Vậy ta có đẳng cấu

$$\theta_{C,Q} : Q^{\mathrm{co}(C)} \otimes B \xrightarrow{\sim} Q\square_C B, \quad q \otimes b \mapsto \sum_b qb_1 \otimes b_2,$$

với mọi đối môđun Q trên C. Đặc biệt hơn ta có

$$\theta_{C,B} : A \otimes B \xrightarrow{\sim} B\square_C B, \quad a \otimes b \mapsto \sum_b ab_1 \otimes b_2,$$

với ánh xạ ngược cho bởi $b \otimes b' \mapsto \sum_{b'} bS(b'_1) \otimes b'_2$.

Lấy tích ten xơ (4.1.9) với B trên R và qua các ánh xạ θ ở trên ta nhận được biểu đồ giao hoán hoán sau:

$$\begin{tikzcd}
T \otimes B \arrow[r] \arrow[d, "f\otimes B"'] & (T \otimes_A B) \otimes B \arrow[d, "g\otimes B"] \\
Q^{\mathrm{co}(C)} \otimes B \arrow[r, hook] & Q \otimes B,
\end{tikzcd}$$

trong đó ánh xạ nằm ngang ở trên và dưới lần lượt được cho bởi $t \otimes b \mapsto \sum_b (t \otimes b_1) \otimes b_2$ và $q \otimes b \mapsto \sum_b qb_1 \otimes b_2$. Theo đẳng thức (4.1.4) ta có

$$T\otimes B = T\otimes_A (A\otimes B) \cong T\otimes_A (B\square_C B) = (T\otimes_A B)\square_C B \subset (T\otimes_A B)\otimes B, \tag{4.1.10}$$

với ánh xạ hợp thành cho bởi $t \otimes b \mapsto \sum_b t \otimes b_1 \otimes b_2$. Cuối cùng ta thu được sơ đồ giao hoán sau với các đồng cấu nằm ngang đều là đẳng cấu:

$$\begin{tikzcd}
T \otimes B \arrow[r] \arrow[d, "f\otimes B"'] & (T \otimes_A B)\square_C B \arrow[d, "g\square_C B"] \\
Q^{\mathrm{co}(C)} \otimes B \arrow[r, "\theta_{C,Q}"'] & Q\square_C B.
\end{tikzcd}$$

Từ tính đối phẳng trung thành trái của B trên C ta có f là đẳng cấu khi và chỉ khi g là đẳng cấu. Điều này suy ra các liên hợp $T \longrightarrow (T \otimes_A B)^{coC}$, $t \mapsto t \otimes 1$; và $Q^{\mathrm{co}(C)} \otimes_A B \longrightarrow Q$, $q \otimes b \mapsto qb$ $t \in T, q \in Q$, $b \in B$ đều là các đẳng cấu. Vậy ta có hai phạm trù trong mệnh đề là tương đương.

Tính phẳng trung thành của B trên A được suy ra từ đẳng cấu (4.1.10) vì hàm tử $(- \otimes_A B)\square_C B$ là trung thành đầy và B là đối phẳng trung thành trên C. $\square$

Định lí 4.1.14. ([6, Theorem 3.5]) *Cho B là một đại số Hopf phẳng trên R và A là một đại số Hopf con chuẩn tắc bão hòa của B. Giả sử rằng A là R-hữu hạn. Khi đó B là phẳng trung thành (trái và phải) như A-môđun. Hệ quả là B đối phẳng trung thành (trái và phải) trên $C := B/A^+B$ và ta có các tương đương phạm trù $\mathcal{M}^C \cong \mathcal{M}_A^B$ và $\mathcal{M}_A \cong \mathcal{M}_B^C$.*

Chứng minh. Vì B/A là phẳng trên R nên ta có A_k là đại số Hopf con chuẩn tắc và hữu hạn của B_k cho mọi trường thặng dư k cũng như cho trường phân thức K. Theo [26, Theorem 2.1 (2)], B_k là tự do trên A_k do đó cũng phẳng trung thành. Khẳng định được suy ra từ Định lí 1.4.4 và các mệnh đề trên. $\square$

4.2 Tính xạ ảnh trên một đại số Hopf con chuẩn tắc hữu hạn

Trước tiên ta giới thiệu định nghĩa tích phân trên một đại số Hopf và sau đó liên hệ nó với tính xạ ảnh của một đại số Hopf trong phạm trù các đối môđun.

Định nghĩa 4.2.1. Cho H là một đại số Hopf R-phẳng. Ánh xạ R-tuyến tính $\varphi : H \longrightarrow R$ được gọi là tích phân trái nếu nó thỏa mãn

$$\sum_h h_1\varphi(h_2) = \varphi(h), \quad \text{với mọi } h \in H.$$

Khái niệm của một tích phân phải được định nghĩa một cách tương tự. Chú ý rằng φ là một tích phân trái (tương ứng phải) trên H nếu nó là đồng cấu trong phạm trù của các H-đối môđun phải $\mathcal{M}^H$ (tương ứng trong phạm trù của các H-đối môđun trái ${}^H\mathcal{M}$).

Với giả thiết trong Định lí 4.1.14, dựa vào tương đương phạm trù $\mathcal{M}^C \cong \mathcal{M}_A^B$ chúng ta có mệnh đề liên hệ giữa các tích phân trên B và trên C như sau:

Bổ đề 4.2.2. ([6, Theorem 4.4]) *Giả sử A là đại số Hopf con chuẩn tắc bão hòa và R-hữu hạn của đại số Hopf R-xạ ảnh B. Đặt $C := B/BA^+$ là đại số Hopf thương. Khi đó B có tích phân trái (tương ứng phải) khi và chỉ khi C cũng có tích phân trái (tương ứng phải).*

Chứng minh. Đặt $A_\varepsilon := \{t \in A | ta = \varepsilon(a)t, \forall a \in A\}$. Khi đó A_ε là một môđun con bão hòa trong A. Theo giả thiết A là môđun hữu hạn sinh trên R. Do đó theo [21] A_ε là môđun xạ ảnh có hạng 1 như R-môđun. Hơn nữa phép đối thế của A là một song ánh.

Bây giờ ta giả sử B có một tích phân khác không. Chúng ta sẽ chỉ ra C cũng có một tích phân khác không. Thật vậy, ta có một đẳng cấu

$$A \otimes \mathsf{Hom}^B(B, R) \cong \mathsf{Hom}^B(B, A), \quad a \otimes \varphi \mapsto \varphi_a : b \mapsto \sum_a a_1 \varphi(S(a_2)b).$$

Chú ý rằng nếu φ là một tích phân (tức là $\varphi \in \mathsf{Hom}^B(B, R)$) thì φ thỏa mãn

$$\sum_a a_1 \varphi(S(a_2)b) = \sum_b \varphi(S(a)b_1)b_2.$$

Chọn $t \in A$ sao cho $S(t) \in A_\varepsilon$ và chọn một phần tử khác không $\varphi \in \mathsf{Hom}^B(B, R)$. Từ định nghĩa của t, φ và tính chuẩn tắc của A trong B có thể kiểm tra được $\varphi_t : B \longrightarrow A$ là một ánh xạ A-tuyến tính, tức là, φ_t thỏa mãn $\varphi_t(ba) = \varphi_t(b)a$. Thật vậy, theo định nghĩa của tính chuẩn tắc của A trong B ta có $\sum_b b_1 a S(b_2) \in A$. Do đó từ định nghĩa của t:

$$\begin{aligned}
\varphi_t(ba) &= \sum_{t,a,b} \varphi(S(t)b_1a_1)b_2a_2 \\
&= \sum_{t,a,b} \varphi(S(t)[b_1a_1S(b_2)]b_3)b_4a_2 \\
&= \sum_{t,b} \varphi(S(t)b_1)b_2a = \varphi_t(b)a.
\end{aligned}$$

Điều này có nghĩa là $\varphi_t \in \mathsf{Hom}_A^B(B, A)$. Từ tương đương phạm trù $\mathcal{M}^C \cong \mathcal{M}_A^B$, đồng cấu φ_t cảm sinh một đồng cấu đối môđun trên C là $\psi : C \longrightarrow R$ trong $\mathcal{M}^C$ sao cho

$$\psi(\overline{b}) := \varepsilon(\varphi_t(b)) = \varphi(S(t)b),$$

với $\overline{b} \in C$ là lớp kề của $b \in B$. Khẳng định ngược lại có thể suy ngược từ lập luận trên. □

Điều kiện tồn tại tích phân không tầm thường trên đại số Hopf cho phép ta nghiên cứu tính xạ ảnh của nó trong phạm trù các đối môđun. Dựa trên kết quả về môđun của các tích phân [6, Corollary 4.7], [6, Corollary 4.8] và nhận xét của Schneider-Schauenburg [24, Rmk 3.2 (4)] ta có bổ đề sau:

Bổ đề 4.2.3. (i) ([6, Corollary 4.7]) *Nếu một đại số Hopf R-xạ ảnh H có một tích phân khác không thì phép đối thế S của H phải là song ánh.*

(ii) ([6, Proposition 4.9]) *Cho H là một đại số Hopf R-xạ ảnh. Khi đó H có tích phân khi và chỉ khi H là xạ ảnh trong $\mathcal{M}^H$.*

Cho một R-đại số Hopf phẳng B và A là Hopf con chuẩn tắc bão hòa của B. Giả sử A là R-hữu hạn. Khi đó theo Định lí 4.1.14 ta có B là phẳng trung thành trên A và cũng là đối phẳng trung thành trên $C := B \otimes_A R = B/A^+B$ (với $A^+B = BA^+$), trong trường hợp này C luôn là R-phẳng.

Chú ý 4.2.4. Lấy $b \in B$ kí hiệu $\overline{b}$ là lớp kề của nó C. Ánh xạ

$$f_B : A_\varepsilon \otimes C \longrightarrow B, \quad f(t \otimes \overline{b}) := tb$$

được định nghĩa tốt. Tổng quát kết quả của [18, Lemma 3.2] ta thu được: ánh xạ f_B là B-tuyến tính phải, C-đối tuyến tính phải và $A_\varepsilon \otimes C \cong A_\varepsilon B$ như các B-môđun (xem [6, Proposition 5.1]). Đặc biệt nếu B là R-xạ ảnh thì $C = B/BA^+$ cũng R-xạ ảnh.

Điều này cùng với khẳng định của Bổ đề 4.2.3(ii) và Bổ đề 4.2.2 ta có được hệ quả quan trọng sau.

Hệ quả 4.2.5. ([6, Corollary 5.3]) *Cho A là một đại số Hopf con chuẩn tắc bão hòa và R-hữu hạn của đại số Hopf R-xạ ảnh B. Giả sử B có tích phân khác không. Khi đó $C := B/A^+B$ là xạ ảnh trong $\mathcal{M}^C$.*

Mục tiêu cuối cùng trong chương này là cần chỉ ra B là xạ ảnh như A-môđun phải. Với giả thiết trong Định lí 4.1.14, kĩ thuật chính trong chứng minh là sử dụng tương đương phạm trù $\mathcal{M}_A \cong \mathcal{M}_B^C$. Trước tiên ta cần một vài (C, B)-môđun Hopf sau đây.

Nhận xét 4.2.6. (i) Với mọi B-môđun phải M, $M \otimes C$ là vật trong $\mathcal{M}_B^C$ bằng cách cho C đối tác động lên chính nó và B tác động theo đường chéo:

$$\rho : M \otimes C \longrightarrow (M \otimes C) \otimes C, \quad m \otimes c \mapsto \sum_c m \otimes c_1 \otimes c_2,$$

$$\mu : (M \otimes C) \otimes B \longrightarrow M \otimes C, \quad (m \otimes c) \otimes b \mapsto \sum_b mb_1 \otimes cb_2.$$

(ii) Môđun $C \otimes B$ là vật nằm trong $\mathcal{M}_B^C$ với B tác động lên chính nó và C đối tác động theo đường chéo:

$$\mu : (C \otimes B) \otimes B \longrightarrow C \otimes B, \quad c \otimes b \otimes b' \mapsto c \otimes bb';$$

$$\rho : (C \otimes B) \longrightarrow (C \otimes B) \otimes C, \quad c \otimes b \mapsto \sum_{c,b} c_1 \otimes b_1 \otimes c_2 b_2.$$

(iii) Đặc biệt nếu phép đối thế S của B có nghịch đảo thì

$$C \otimes B \longrightarrow B \otimes C, \quad c \otimes b \mapsto \sum_b b_1 \otimes cb_2$$

là một đẳng cấu trong $\mathcal{M}_B^C$ với ánh xạ nghịch đảo

$$B \otimes C \longrightarrow C \otimes B, \quad b \otimes c \mapsto \sum_b cS^{-1}(b_2) \otimes b_1.$$

Bổ đề 4.2.7. ([6, Lemma 5.5]) *Giả sử phép đối thế của B là song ánh và C là xạ ảnh trong $\mathcal{M}^C$. Khi đó $B \otimes C$ với cấu trúc ở 4.2.6(i) là một vật xạ ảnh trong $\mathcal{M}_B^C$.*

Chứng minh. Xét vật $C \otimes B$ trong $\mathcal{M}_B^C$ với cấu trúc như ở Nhận xét 4.2.6(ii), ta có đẳng cấu

$$\mathsf{Hom}_B^C(C \otimes B, M) \longrightarrow \mathsf{Hom}^C(C, M), \quad g \mapsto g(- \otimes B)$$

với ánh xạ ngược được xác định bởi $f \mapsto r_M \circ (f \otimes B)$. Đẳng cấu trong Nhận xét 4.2.6(iii) cho ta các đẳng cấu sau:

$$\mathsf{Hom}_B^C(B \otimes C, M) \cong \mathsf{Hom}_B^C(C \otimes B, M) \cong \mathsf{Hom}^C(C, M),$$

với mọi $M \in \mathcal{M}_B^C$. □

Bổ đề 4.2.8. ([6, Lemma 5.6]) *Giả sử $B \otimes C$ là vật xạ ảnh trong $\mathcal{M}_B^C$. Khi đó B là xạ ảnh như A-môđun phải.*

Chứng minh. Xem B như một B-môđun phải ta có thể xét $B \otimes B$ như là một vật trong $\mathcal{M}_B^C$ (xem 4.2.6(ii)). Khi đó ánh xạ thương $B \otimes B \longrightarrow B \otimes C$ là nằm trong $\mathcal{M}_B^C$, do đó nó chẻ ra nếu $B \otimes C$ là vật xạ ảnh trong $\mathcal{M}_B^C$. Sử dụng tương đương phạm trù $\mathcal{M}_B^C \cong \mathcal{M}_A$ theo hàm tử $(-)^{\mathrm{co}(C)} : \mathcal{M}_B^C \longrightarrow \mathcal{M}_A$, chúng ta thu được toàn ánh chẻ ra:

$$(B \otimes B)^{\mathrm{co}(C)} \longrightarrow (B \otimes C)^{\mathrm{co}(C)}$$

của các A-môđun phải. Mặt khác, ta có

$$(B \otimes B)^{\mathrm{co}(C)} \cong (B \otimes B)\square_C R \cong B \otimes (B \square_C R) \cong B \otimes B^{\mathrm{co}(C)} \cong B \otimes A,$$

ở đây tác động của A lên $B \otimes A$ là tác động theo đường chéo. Hơn nữa,

$$(B \otimes C)^{\mathrm{co}(C)} \cong (B \otimes C)\square_C R \cong B \otimes (C \square_C R) \cong B,$$

với A tác động lên B nằm ở vế phải là tác động theo bên phải. Do đó toàn ánh chẻ ra ở trên cảm sinh một đồng cấu:

$$B \otimes A \longrightarrow B$$

được xác định bởi $b \otimes a \mapsto \varepsilon(a)b$. Bây giờ chúng ta có đẳng cấu trong $\mathcal{M}_A$:

$$B \otimes A \cong B \otimes A, \quad b \otimes a \mapsto \sum_a ba_1 \otimes a_2.$$

Kết hợp ánh xạ này với ánh xạ ở trên ta thu được ánh xạ $B \otimes A \longrightarrow B$, $b \otimes a \mapsto ba$. Ánh xạ này chẻ ra trong $\mathcal{M}_A$, ta kết luận được B là hạng tử trực tiếp của A-môđun tự do $B \otimes A$, do đó B xạ ảnh như một A-môđun phải. $\square$

Kết hợp các bổ đề trên ta thu được kết quả sau:

Định lí 4.2.9. ([6, Theorem 5.7]) *Cho B là một đại số Hopf R-xạ ảnh với tích phân khác không. Gọi A là một đại số Hopf con chuẩn tắc bão hòa và R-hữu hạn của B. Khi đó B là xạ ảnh như một A-môđun phải.*

Chứng minh. Theo các Bổ đề 4.2.3 và Bổ đề 4.2.5, C là xạ ảnh trong $\mathcal{M}^C$. Từ Bổ đề 4.2.3(ii) ta có phép đối thế của B phải là song ánh. Do đó ta có thể áp dụng các Bổ đề 4.2.7 và Bổ đề 4.2.8 để kết luận được rằng B là xạ ảnh trên A. $\square$

Tài liệu tham khảo

Tiếng Anh

[1] M.F. Atiyah, I.G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, University Press of Oxford (1969).

[2] N.E. Csima, R.E. Kottwitz, *Comodules for some simple $\mathcal{O}$-forms of G_m*, Michigan Math. J. 59 (2010), p. 179-188.

[3] P. Deligne, J. Milne, *Tannakian Categories*, Lecture Notes in Mathematics 900, p. 101-228, Springer Verlag (1982).

[4] N.D. Duong, P.H. Hai, *Tannakian duality over Dedekind ring and applications*, Mathematische Zeitschrift (2017), Doi: 10.1007/s00209-017-1928-6.

[5] N.D. Duong, P.H. Hai, J.P. dos Santos, *On the structure of affine flat group schemes over discrete valuation rings*, Ann. Scient. Ec. Norm. Super. Pisa Cl. Sci., (2017) Doi: 10.2422/2036-2145.201509-004.

[6] N.D. Duong, P.H. Hai, N.H. Hung, *On the flatness ring and projectivity over Hopf subalgebras of Hopf algebras over Dedekind ring*, Journal of Algebra 478 (2017) p. 237-260.

[7] J. P. dos Santos, *Fundamental group schemes for stratified sheaves*, J. Algebra, 317, p. 691-713 (2007).

[8] J. P. dos Santos, *The behaviour of the differential Galois group on the generic and special fibres: A Tannakian approach*, J. reine angew. Math. 637, pp. 63–98 (2009).

[9] H. Esnault and P. H. Hai, *The Gauß-Manin connection and Tannaka duality*, IMRN, vol. 2006, Article ID. 93978, p. 1-35 (2006).

[10] H. Esnault, P. H. Hai and X. Sun, *On Nori's fundamental group scheme*, Geometry and dynamics of groups and spaces, 377–398, Progr. Math., 265, Birkhäuser, Basel (2008).

[11] U. Görtz and T. Wedhorn, *Algebraic geometry I*, Advanced Lectures in Mathematics, Vieweg + Teubner, Wiesbaden (2010), (Schemes with examples and exercise.)

[12] P.H. Hai, *Gauss-Manin stratification and stratified fundamental group schemes*, Ann. Inst. Fourier, **63**, 6 (2013), p. 2267-2285.

[13] M. Hashimoto, *Auslander-Buchweitz approximations of equivariant modules*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 282. Cambridge University Press, Cambridge (2000), xvi+281 pp.

[14] I. Kaplansky, *Bialgebras*, University of Chicago Lecture Notes in Mathematics, Chicago (1975).

[15] J. C. Jantzen, *Representations of Algebraic Groups*, Pure Appl. Math., vol. 131, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1987.

[16] N. Katz, *Nilpotent connections and the monodromy theorem: applications of a result of Turrittin*, Publ. Math. IHES, 39 (1970), p.175-232.

[17] N. Katz, *Exponential sums and differential equations*, Princeton University Press, 1990.

[18] L. Kadison, *Hopf subalgebras and tensor powers of generalized permutation modules*, J. Pure Appl. Algebra 218 (2014), 367–380.

[19] C. Menini, A. Seidel, B. Torrecillas, R. Wisbauer, *A-H-bimodule and equivalences*, Communications in Algebra, 29 (10): 4619-4640, 2001.

[20] W.D. Nichols and M.B. Zoeller, *A Hopf algebra freeness theorem*, Amer. J. Math. 111 (1989) 381-385.

[21] B. Pareigis, *When Hopf algebras are Frobenius algebras*, J. Algebra (1971), no.18, 588-596.

[22] M. Raynaud, *Flat modules in algebraic geometry*, Compositio Mathematica, vol. 24 (1970), 11-31.

[23] J. J. Rotman, *Advanced Modern Algebra*, Prentice Hall (2002).

[24] P. Schauenburg, H. J. Schneider, *On generalized Hopf galois extensions*, Journal of Pure and Applied Algebra 202 (1), 168-194.

[25] H.J. Schneider, *Normal Basis and Transitivity of Crossed Products for Hopf Algebras*, Journal of Algebra 152 (1992), 289-312.

[26] H.J. Schneider, *Some remarks on exact sequences of quantum groups*, Comm. Algebra, 21(9): 3337-3357, 1993.

[27] T. Szamuely, *Galois groups and fundamental groups.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 117 (2009).

[28] M. Takeuchi, *Relative Hopf modules-equivalences and freeness criteria*, J. Algebra 60 (1979), 452-471.

[29] W. C. Waterhouse, *Introduction to affine group schemes*, Springer-Verlag New York (1979).

[30] W. C. Waterhouse and B. Weisfeiler, *One-dimensional affine group schemes*, J. Algebra 66, 550-568 (1980).

[31] T. Wedhorn, *On Tannakian duality over valuation rings*, J. Algebra 282 (2004), 575-609.

[32] C. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge studies in advanced mathematics, vol. 38. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

Tiếng Pháp

[33] Y. André, *Différentielles non commutatives et Théorie de Galois différentielle ou aux différences*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4 serie, t. 34, (2001), p. 685-739.

[34] M. Artin, A. Grothendieck and J. L. Verdier, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Lecture Note in Math., 269, 270, 305, Springer-Verlag, 1972.

[35] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, Chapt. 1-4, Springer 2006.

[36] P. Deligne, *Catégories tannakiennes*, The Grothendieck Festschrift, Vol. II, p. 111-195, Progr. Math. 87, Birkhäuser (1990).

[37] M. Demazure and A. Grothendieck, *Propriétés Generales des Schemas en Groupes* (SGA III), Expose $\mathrm{VI_B}$, Lecture Notes in Mathematics, 151, Springer-Verlag (1970).

[38] P. Gabriel, *Des catégories abéliennes*, Bulletin de la S.M.F., 90 (1962), p. 323-448.

[39] A. Grothendieck (avec la collaboration de J. Dieudonné), *Éléments de Géométrie Algébrique*, Publ. Math. IHÉS **8** (1961), 5-222 ; **11** (1961), 5-167; **17** (1963), 5-59; **20** (1964), 5-529; **24** (1965), 5-231 ; **28** (1966), 5-255; **32** (1967), 5-361.

[40] J. C. Moore, *Compléments sur les algébres de Hopf*, Séminaire H. Cartan, 12, No. 1 (1959-1960), exp. 4, p. 1-12.

[41] N. Saavedra Rivano, *Catégories Tannakiennes*, Lecture Notes in Mathematics, 265, Springer-Verlag, Berlin, (1972).

[42] J-P. Serre, *Groupe de Grothendieck des schémas en groupes réductifs déployés*, Publ. Math. 34 (1968), p. 37-52.

Kết luận

Trong luận án này chúng tôi đã thu được những kết quả sau đây:

(1) Mở rộng đối ngẫu Tannaka trên vành Dedekind.

(2) Đưa ra đặc trưng Tannaka của đơn ánh, toàn ánh và điều kiện cho tính khớp của dãy các lược đồ nhóm affine phẳng. Nghiên cứu được một số tính chất của đối đại số *hữu hạn địa phương*.

(3) Mô tả cấu trúc cho lược đồ nhóm affine phẳng trên một vành định giá rời rạc.

(4) Đưa ra tiêu chuẩn cho tính phẳng trung thành, đưa ra điều kiện và khẳng định tính phẳng trung thành cũng như tính xạ ảnh của một đại số Hopf trên một đại số Hopf con của nó trên vành Dedekind.

Các công trình liên quan đến luận án

1. N.D. Duong, P.H. Hai, *Tannakian duality over Dedekind ring and applications*, Mathematische Zeitschrift 288 (2018), 1103–1142.

2. N.D. Duong, P.H. Hai, J.P. dos Santos, *On the structure of affine flat group schemes over discrete valuation rings, I*, Ann. Scient. Ec. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) Vol. XVIII (2018), 1-56.

3. N.D. Duong, P.H. Hai, N.H. Hung, *On the flatness and projectivity over Hopf subalgebras of Hopf algebras over Dedekind ring*, Journal of Algebra 478 (2017), 237-260.

Các kết quả trong luận án được báo cáo tại

(i) Xêmina tại phòng Đại số - Viện Toán học Hà Nội, 10/2012.

(ii) Hội nghị Nghiên cứu sinh của Viện Toán học, 10/2012, 10/2013, 10/2014, 10/2015.

(iii) Hội nghị *A joint congress of the French Mathematical Society (SMF) and the Vietnamese Mathematical Society (VMS) Hue, Vietnam, August 20- 24, 2012*

(iv) Hội nghị *Toán học Miền trung-Tây Nguyên* lần thứ nhất, 5/2015.

(v) Hội thảo *IMH - VIASM Workshop on Algebraic Geometry Tuan Chau, Quang Ninh, Vietnam, March 13 - 16, 2016*

(vi) Phòng Đại số - Viện Toán học Hà Nội, *Báo cáo tiểu luận tổng quan*, 5/2017.