VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

VIỆN TOÁN HỌC

NGUYỄN ĐẠI DƯƠNG

ĐỐI NGẪU TANNAKA TRÊN VÀNH DEDEKIND VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: Đại số và Lý thuyết số

Mã số: 9 46 01 04

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - 2017

Luận án được hoàn thành tại:

Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam

Người hướng dẫn khoa học:

GS.TSKH. Phùng Hồ Hải

Phản biện 1: ....

Phản biện 2: ....

Phản biện 3: ....

Luận án sẽ được bảo vệ trước hội đồng chấm Luận án cấp Viện họp tại Viện Toán học - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam vào hồi ....giờ....... ngày........tháng.........năm ......

Có thể tìm luận án tại:

- Thư viện Quốc gia Hà nội
- Thư viện Viện Toán học

Mở đầu

Cho X là một lược đồ trơn trên một vành Dedekind R. Khi đó xét phạm trù các $\mathcal{O}_X$-môđun nhất quán cùng với tác động của bó các toán tử vi phân $\mathcal{D}(X/R)$ trên X/R. Đây là một phạm trù ten xơ và aben. Phạm trù này thường được gọi là phạm trù các bó phân tầng trên X, kí hiệu là $\mathsf{str}(X/R)$. Hơn nữa, mỗi $\mathcal{O}_X$-môđun tự do địa phương đều có một vật đối ngẫu. Phạm trù con đầy gồm các $\mathcal{O}_X$-môđun tự do địa phương của $\mathsf{str}(X/R)$, kí hiệu là $\mathsf{str}(X/R)^{\mathrm{o}}$ và thường được gọi là phạm trù các phân thớ phân tầng. Đây cũng là một phạm trù ten xơ nhưng không còn aben. Mất đi tính aben cũng là một trong những khó khăn khi nghiên cứu phạm trù $\mathsf{str}(X/R)^{\mathrm{o}}$.

Bây giờ ta xét trường hợp R là vành định giá rời rạc đầy đủ đẳng đặc số 0. Cho X là một lược đồ tách trơn với các thớ hình học liên thông trên R và giả sử thêm X có một R-điểm hữu tỉ ξ. Khi đó N. Katz đã xây dựng một hàm tử thớ tại ξ cho phạm trù $\mathsf{str}(X/R)$, $\xi^* : \mathsf{str}(X/R) \longrightarrow \mathsf{Mod}(R)$. Mục đích của việc này là nhằm nghiên cứu hàm tử thớ tại các điểm của R và phạm trù con sinh bởi một vật đơn trong $\mathsf{str}(X_k/k)$ (ở đây k là trường phân thức hoặc trường thặng dư của R và X_k là thớ của X/R). Nghiên cứu của N. Katz dựa theo quan điểm của đối ngẫu Tannaka trên một trường. Tuy nhiên trường hợp lược đồ trên một vành R vẫn chưa được giải quyết vì còn thiếu đối ngẫu Tannaka trên R. Dựa trên ý tưởng của N. Katz, hàm tử thớ cho $\mathsf{str}(\mathfrak{X}/R)$ khi R đầy đủ có đặc số tùy ý được xây dựng bởi dos Santos (ở đây $\mathfrak{X}$ là lược đồ hình thức trơn với các thớ liên thông trên $\mathrm{Spf}(R)$). Khi đó ξ đưa ra hàm tử thớ cho cả hai phạm trù $\mathsf{str}(\mathfrak{X}/R)$ và $\mathsf{str}(\mathfrak{X}/R)^{\mathrm{o}}$. Phạm trù $\mathsf{str}(\mathfrak{X}/R)^{\mathrm{o}}$ cũng được dos Santos nghiên cứu. Tuy nhiên đối ngẫu Tannaka mà dos Santos sử dụng vẫn còn khá phức tạp. Kết quả của dos Santos về hàm tử thớ có thể mở rộng cho một lược đồ X trên một vành Dedekind tùy ý. Như vậy yêu cầu tự nhiên đặt ra là cần mở rộng lí thuyết đối ngẫu Tannaka cho trường hợp R là vành Dedekind.

Gần đây lí thuyết đối ngẫu Tannaka cho các phạm trù ten xơ cộng tính (không nhất thiết aben) trên một vành định giá được nghiên cứu bởi Wedhorn. Đồng thời Wedhorn cũng đưa ra khái niệm mở rộng vô hướng của một phạm trù cộng tính từ R lên trường phân thức K của nó để thu được một phạm trù Tannaka trung tính trên K. Tuy nhiên kết quả của Wedhorn vẫn chưa đầy đủ và rất khó áp dụng để nghiên cứu các phạm trù nêu trên. Một may mắn cho chúng tôi là kết quả của Saavedra vẫn còn rất giá trị mặc dù đã bị lãng quên trong một thời gian dài. Saavedra đưa ra điều kiện để một phạm trù aben (cùng với một hàm tử trung thành khớp) tương đương với một phạm trù các đối môđun trên một đối đại số phẳng. Đối ngẫu này áp dụng cho các phạm trù aben ten xơ chính là đối ngẫu Tannaka cho lược đồ nhóm affine phẳng trên R. Một trong những lí do làm kết quả của Saavedra bị lãng quên là do chứng minh của Saavedra không tầm thường để kiểm tra.

Phần đầu trong nội dung chính của luận án chúng tôi giới thiệu một chứng minh nhanh gọn một cách có hệ thống lại kết quả của Saavedra (xem mục 2.1) và liên hệ đến kết quả của Wedhorn. Kết quả chính thu được là đối ngẫu Tannaka trên vành Dedekind được phát biểu như sau:

Định lí 2.1.12. *Cho $(\mathcal{T}, \omega)$ là một phạm trù Tannaka trên vành Dedekind R. Khi đó*

(i) ω phân tích qua một tương đương giữa $\mathcal{T}$ và $\mathsf{Rep}_{\mathrm{f}}(G)$, với $G := \mathsf{Aut}^{\otimes}_{R}(\omega)$.

(ii) ω cảm sinh một tương đương giữa ${\mathcal{T}^{\mathrm{o}}}_{K}$ và $\mathsf{Rep}_{\mathrm{f}}(G_K)$.

Ví dụ cho đối ngẫu này là phạm trù các bó phân tầng $\mathsf{str}(\mathfrak{X}/R)$ cùng với hàm tử thớ ξ^*, trong đó lược đồ hình thức $\mathfrak{X}/R$ cần được xét như một lược đồ trên một vành định giá rời rạc đầy đủ đẳng đặc trưng.

Tiếp theo dựa vào kết quả của Wedhorn trong mục 2.2 chúng tôi thiết lập đối ngẫu Tannaka cho một phạm trù ten xơ cộng tính (được gọi là *dàn Tannaka*):

Định lí 2.2.8. *Cho $(\mathcal{T}, \omega)$ là một dàn Tannaka trên R. Khi đó lược đồ nhóm $G = \mathsf{Aut}_R^{\otimes}(\omega)$ là phẳng trung thành trên R và hàm tử cảm sinh $\omega^G : \mathcal{T} \longrightarrow \mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(G)$ là một tương đương phạm trù.*

Một ví dụ minh họa cho dàn Tannaka là phạm trù các phân thớ phân tầng $\mathsf{str}(\mathfrak{X}/R)^0$ cùng với hàm tử thớ ξ^* như trên.

Phần tiếp theo của luận án, chúng tôi mở rộng định lí của P. Deligne và J.S. Milne trên một trường sang các vành Dedekind. Cụ thể hơn, đồng cấu giữa các lược đồ nhóm có thể mô tả theo đối ngẫu Tannaka (xem mục 3.2) và mô tả này được bắt đầu từ đồng cấu giữa các đối đại số phẳng trên R (xem mục 3.1). Kết quả thu được như sau:

Định lí 3.2.3. *Cho $f : G \longrightarrow G'$ là một đồng cấu của các lược đồ nhóm affine phẳng trên R và $\omega_f : \mathsf{Rep}_{\mathrm{f}}(G') \longrightarrow \mathsf{Rep}_{\mathrm{f}}(G)$ là hàm tử cảm sinh từ f. Khi đó*

(i) f là phẳng trung thành khi và chỉ khi ${\omega_f}^{\mathrm{o}} : \mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(G') \longrightarrow \mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(G)$ là trung thành đầy và ảnh của nó đóng với việc lấy vật con.

(ii) f là nhúng đóng khi và chỉ khi mỗi vật của $\mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(G)$ là thương con đặc biệt của một vật dạng ${\omega_f}^{\mathrm{o}}(X')$, $X' \in \mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(G')$.

Trong định lí trên chúng tôi nhấn mạnh rằng kết quả về tính phẳng trung thành của đồng cấu giữa các lược đồ nhóm dựa trên kết quả của định lí về tính phẳng trung thành của các đại số Hopf giao hoán. Đồng thời chúng tôi cũng mở rộng kết quả của H. Esnault, P. H. Hai và X. Sun về dãy khớp của các lược đồ nhóm affine từ một trường sang một vành Dedekind:

Định lí 3.2.8. *Cho một dãy các lược đồ nhóm affine phẳng trên R*

$$H \xrightarrow{q} G \xrightarrow{p} A$$

với q là một nhúng đóng và p là phẳng trung thành. Khi đó dãy trên là khớp khi và chỉ khi các điều kiện sau được thỏa mãn:

(a) Với mỗi $V \in \mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(G)$, $q^*(V) \in \mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(H)$ là tầm thường nếu và chỉ nếu tồn tại $U \in \mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(A)$ sao cho $V \cong p^*U$.

(b) Cho W_0 là vật con tầm thường cực đại của $q^*(V)$ trong $\mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(H)$. Khi đó tồn tại $V_0 \subset V \in \mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(G)$ sao cho $q^*(V_0) \cong W_0$.

(c) Mỗi $W \in \mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(H)$ là thương của một vật (tương ứng bởi việc lấy đối ngẫu, là vật con) có dạng $q^*(V)$ với $V \in \mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(G)$.

Khái niệm về *tính hữu hạn địa phương* được chúng tôi giới thiệu trong mục 3.3. Khái niệm này dựa trên tính hữu hạn địa phương của một đối đại số trên một trường. Một đối đại số trên một trường luôn hữu hạn địa phương theo nghĩa: *"mỗi đối đại số đều là hợp của các đối đại số con hữu hạn chiều"*. Điều này cũng đúng cho các đối đại số phẳng trên R. Tuy nhiên trong trường hợp tổng quát chúng ta không thể chọn ra các đối đại số con đặc biệt (môđun thương là không có xoắn, do đó phẳng trên R) và hữu hạn sinh như R-môđun. Và như vậy mỗi lược đồ nhóm nói chung không thể viết thành giới hạn ngược của các lược đồ nhóm affine *kiểu hữu hạn* sao cho mỗi đồng cấu chuyển là toàn ánh (phẳng trung thành) như trong trường hợp R là một trường. Vì vậy vấn đề về cấu trúc của một lược đồ nhóm affine phẳng trên R cần được nghiên cứu. Trong mục 3.3 chúng tôi chứng minh được:

Mệnh đề 3.3.7. *Cho G là một lược đồ nhóm phẳng thuộc kiểu hữu hạn trên vành Dedekind R. Giả sử thớ tổng quát G_K liên thông. Khi đó $R[G]$ là hữu hạn địa phương như một đối đại số trên R.*

Trong mục 3.4 chúng tôi nghiên cứu cấu trúc của một lược đồ nhóm affine trên một vành định giá rời rạc sử dụng kĩ thuật nổ Neron. Cụ thể hơn, một cấu xạ giữa hai lược đồ cảm sinh một đẳng cấu trên thớ tổng quát có thể được mô tả như phép hợp thành của (có thể vô hạn) các phép nổ Neron và mô tả này được sử dụng để đưa ra cấu trúc cho lược đồ nhóm affine phẳng:

Định lí 3.4.9. *Cho G là một lược đồ nhóm phẳng trên một vành định giá rời rạc R. Khi đó G có thể viết như là giới hạn của một hệ xạ ảnh của các lược đồ nhóm phẳng trên R*

$$G := \varprojlim_i G_i,$$

trong đó tất cả các cấu xạ chuyển đều là phẳng trung thành và mỗi thớ tổng quát của G_i đều thuộc kiểu hữu hạn trên K. Hơn nữa, mỗi G_i đều có thể thu được từ một lược đồ nhóm phẳng kiểu hữu hạn bởi hợp thành (có thể vô hạn) của một dãy các phép nổ Neron.

Chú ý rằng tính phẳng trung thành ở mỗi đồng cấu chuyển trong công thức trên đến từ việc thương $R[G]$ trên $R[G_i]$ đều phẳng trên R sử dụng kết quả của định lí về tính phẳng trung thành của các đại số Hopf giao hoán. Đây là một ứng dụng của tiêu chuẩn cho tính phẳng trung thành được trình bày ở cuối Chương 1. Chúng tôi chứng minh được:

Định lí 1.4.4. (Tiêu chuẩn cho tính phẳng trung thành) *Cho A là một R-đại số và B là một A-môđun sao cho A, B đều phẳng trên R. Khi đó B là phẳng trung thành trái trên A khi và chỉ khi B_k là phẳng trung thành trái trên A_k đối với trường phân thức và mọi trường thặng dư của R.*

Hơn nữa, định lí về tính phẳng trung thành cho các đại số Hopf giao hoán phát biểu: *"Một đại số Hopf giao hoán phẳng trung thành trên đại số Hopf con của nó khi và chỉ khi môđun thương của chúng phẳng trên R"*. Đây là kết quả mở rộng cho trường hợp cổ điển: *"trên một trường mỗi đại số Hopf giao hoán đều phẳng trung thành trên đại số Hopf con của nó"*. Trên một trường, đối với các đại số Hopf không giao hoán đây vẫn còn là một giả thuyết. Một phần của câu hỏi đã được trả lời bởi Nichols-Zoeller cho trường hợp các đại số hữu hạn chiều. Trường hợp cho đại số Hopf vô hạn chiều được giải quyết một phần bởi Schneider. Trong tình huống này các đại số Hopf đều tự do (do đó xạ ảnh, phẳng trung thành) trên các đại số Hopf con của nó. Các nghiên cứu trên nhằm trả lời cho giả thuyết của Kaplansky: "liệu rằng mỗi đại số Hopf (trên một trường) là tự do trên đại số Hopf con của nó". Bài toán tự nhiên đặt ra là khi nào một đại số Hopf (không nhất thiết giao hoán) trên R là tự do hay yếu hơn là xạ ảnh hoặc phẳng trung thành trên một đại số Hopf con của nó. Phần cuối của luận án chúng tôi chứng minh được hai định lí sau về tính phẳng trung thành và tính xạ ảnh:

Định lí 4.1.14. *Cho B là một đại số Hopf phẳng trên R và A là một đại số Hopf con chuẩn tắc bão hòa của B. Giả sử rằng A là R-hữu hạn. Khi đó B là phẳng trung thành (trái và phải) như A-môđun. Hệ quả là B là đối phẳng trung thành (trái và phải) trên $C := B/A^+B$ và ta có các tương đương phạm trù $\mathcal{M}^C \cong \mathcal{M}_A^B$ và $\mathcal{M}_A \cong \mathcal{M}_B^C$.*

Định lí 4.2.9. *Cho B là một đại số Hopf R-xạ ảnh với tích phân khác không. Gọi A là một đại số Hopf con chuẩn tắc bão hòa và R-hữu hạn của B. Khi đó B là xạ ảnh như một A-môđun phải.*

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Nội dung chương này dành cho phần kiến thức chuẩn bị. Tuy nhiên chúng tôi sẽ giới thiệu một kết quả mới về *"tính phẳng trung thành"* ở cuối chương này.
Mục 1.1 nhắc lại khái niệm vành định giá rời rạc, vành Dedekind.
Mục 1.2 giới thiệu đối đại số, song đại số, đại số Hopf trên các vành Dedekind. Các khái niệm về đối môđun, đối môđun con đặc biệt, thương con đặc biệt, chuyển cơ sở lên thớ tổng quát cũng được đề cập đến trong mục này.
Mục 1.3 trình bày một số khái niệm trong phạm trù cộng tính và phạm trù aben, phạm trù và hàm tử ten xơ. Các khái niệm này được sử dụng để đưa ra đối ngẫu Tannaka trên vành Dedekind ở Chương 2.
Mục 1.4 giới thiệu một kết quả mới: *"Tiêu chuẩn cho tính phẳng trung thành"*.

Cho R là một vành Dedekind, ta có định lí sau:
Định lí 1.4.3. (Tiêu chuẩn cho tính phẳng) *Cho A là một đại số trên R và B là một A-môđun sao cho A, B đều phẳng trên R. Khi đó B là phẳng trên A như A-môđun trái nếu và chỉ nếu B_k là phẳng trái trên A_k đối với trường phân thức và mọi trường thặng dư của R.*

Chứng minh của định lí trên được phát triển dựa trên ý tưởng của J.C. Moore. Sử dụng kết quả này chúng tôi chứng minh được:

Định lí 1.4.4. (Tiêu chuẩn cho tính phẳng trung thành) *Cho A là một R-đại số và B là một A-môđun sao cho A, B đều phẳng trên R. Khi đó B là phẳng trung thành trái trên A khi và chỉ khi B_k là phẳng trung thành trái trên A_k đối với trường phân thức và mọi trường thặng dư của R.*

Chương 2

Đối ngẫu Tannaka trên vành Dedekind

Kết quả của Saavedra chỉ ra một R-đối đại số phẳng có thể được xây dựng từ phạm trù các đối môđun hữu hạn sinh trên R của nó. Saavedra cũng đưa ra một tiêu chuẩn cho một phạm trù aben khi nào thì tương đương với phạm trù $\mathsf{Comod}_{\mathrm{f}}(L)$. Kết quả này được sử dụng để chứng minh đối ngẫu Tannaka cho các lược đồ nhóm phẳng trên các vành Dedekind. Trong chương này chúng tôi đưa ra một chứng minh ngắn gọn cho kết quả của Saavedra, đồng thời liên hệ nó đến kết quả của Wedhorn và hoàn thiện đối ngẫu Tannaka trong trường hợp của phạm trù ten xơ cộng tính.

2.1 Đối ngẫu Tannaka cho các phạm trù Aben

2.1.1 Phạm trù con xác định và đặc trưng cho phạm trù của các đối môđun

Định nghĩa 2.1.1. Cho $\mathcal{C}$ là phạm trù aben R-tuyến tính; $\omega : \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{Mod}_{\mathrm{f}}(R)$ là một hàm tử R-tuyến tính trung thành và khớp. Giả sử rằng

$\mathcal{C}^{\mathrm{o}}$ là một phạm trù con đầy của $\mathcal{C}$ sao cho

(i) với mỗi vật $X \in \mathcal{C}^o$, $\omega(X)$ là xạ ảnh và hữu hạn sinh như R-môđun;

(ii) mỗi vật của $\mathcal{C}$ là thương của một vật trong $\mathcal{C}^{\mathrm{o}}$.

Khi đó $\mathcal{C}^{\mathrm{o}}$ được gọi là phạm trù con xác định của $\mathcal{C}$ tương ứng với ω.
Phạm trù của các đối môđun được đặc trưng trong kết quả sau:

Định lí 2.1.8. (Định lí của Saavedra) *Cho R là vành Dedekind và $\mathcal{C}$ là một phạm trù aben R-tuyến tính. Giả sử tồn tại một hàm tử trung thành R-tuyến tính khớp $\omega : \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{Mod}_{\mathsf{f}}(R)$ và một phạm trù con xác định $\mathcal{C}^{\mathrm{o}}$ tương ứng với ω. Khi đó ω phân tích qua một tương đương $\mathcal{C} \simeq \mathsf{Comod}_{\mathrm{f}}(L)$ và hàm tử quên, với L là một đối đại số trên R .*

2.1.2 Phạm trù Tannaka trên vành Dedekind

Định nghĩa 2.1.10. (iii) Một phạm trù Tannaka trên R là một phạm trù aben ten xơ $\mathcal{T}$ trên R, được xác định bởi các vật có đối ngẫu, cùng với một hàm tử trung thành và khớp $\omega : \mathcal{T} \longrightarrow \mathsf{Mod}_{\mathsf{f}}(R)$.

Gọi $\mathcal{T}^{\mathrm{o}}$ là phạm trù con xác định của $\mathcal{T}$. Kí hiệu ${\mathcal{T}^{\mathrm{o}}}_K$ là mở rộng vô hướng lên K cho phạm trù $\mathcal{T}^{\mathrm{o}}$. Chúng tôi thu được kết quả sau:

Định lí 2.1.12. *Cho $(\mathcal{T}, \omega)$ là một phạm trù Tannaka trên vành Dedekind R. Khi đó*

(i) ω phân tích qua một tương đương giữa $\mathcal{T}$ và $\mathsf{Rep}_{\mathrm{f}}(G)$, với $G := \mathsf{Aut}_R^{\otimes}(\omega)$.

(ii) ω cảm sinh một tương đương giữa ${\mathcal{T}^{\mathrm{o}}}_K$ và $\mathsf{Rep}_{\mathrm{f}}(G_K)$.

2.2 Đối ngẫu Tannaka cho phạm trù ten xơ cộng tính, dàn Tannaka

2.2.1 Dàn Tannaka và mở rộng vô hướng

Định nghĩa 2.2.2. Một *dàn Tannaka* $\mathcal{T}$ *trên* R là một phạm trù ten xơ gồm các vật có đối ngẫu trên R sao cho mỗi cấu xạ trong $\mathcal{T}$ đều tồn tại tồn tại hạch và ảnh; đồng thời mở rộng vô hướng $\mathcal{T}_K$ là phạm trù aben và $\mathcal{T}$ cùng với một hàm tử $\omega : \mathcal{T} \longrightarrow \mathsf{Mod}_{\mathrm{f}}(R)$ thỏa mãn các điều kiện sau:

(i) ω là trung thành và bảo toàn các hạch và ảnh.

(ii) ω khi hạn chế trên $\mathcal{T}^{\mathrm{triv}}$ là trung thành đầy.

2.2.2 Tương đương phạm trù cho dàn Tannaka

Định lí sau đặc trưng cho một dàn Tannaka theo phạm trù các biểu diễn của một lược đồ nhóm affine.

Định lí 2.2.8. *Cho* $(\mathcal{T}, \omega)$ *là một dàn Tannaka trên* R*. Khi đó lược đồ nhóm* $G = \mathsf{Aut}_R^{\otimes}(\omega)$ *là phẳng trung thành trên* R *và hàm tử cảm sinh* $\omega^G : \mathcal{T} \to \mathsf{Rep}^o(G)$ *là một tương đương phạm trù.*

Chương 3

Đặc trưng Tannaka cho các đồng cấu trên vành Dedekind và định lí cấu trúc cho lược đồ nhóm affine phẳng trên vành định giá rời rạc

Đầu tiên chúng ta sẽ nghiên cứu đồng cấu giữa các đối đại số phẳng trên R, sau đó sẽ áp dụng cho đồng cấu giữa các lược đồ nhóm affine. Tiếp theo ta sẽ nghiên cứu các đối đại số hữu hạn địa phương và đặc trưng cho một lớp các lược đồ nhóm theo các đối đại số này. Cuối cùng là mô tả đồng cấu giữa các lược đồ nhóm cảm sinh một đẳng cấu trên thớ tổng quát để đưa ra cấu trúc cho các lược đồ nhóm affine phẳng.

3.1 Đặc trưng đơn ánh và toàn ánh cho đồng cấu của các đối đại số phẳng

Trong mục này chúng tôi dùng đối ngẫu Tannaka để đặc trưng cho các đồng cấu đơn ánh (đặc biệt) và toàn ánh của các đối đại số phẳng. Chúng ta sẽ dùng kí hiệu ω^o để kí hiệu cho hàm tử hạn chế của hàm tử ω lên phạm trù con đầy gồm các vật có đối ngẫu.

Mệnh đề 3.1.1 *Cho $f : L' \longrightarrow L$ là một đồng cấu của các đối đại số phẳng trên vành Dedekind R và $\omega_f : \mathsf{Comod}_{\mathrm{f}}(L') \longrightarrow \mathsf{Comod}_{\mathrm{f}}(L)$ là hàm tử tự nhiên cảm sinh từ f. Khi đó*

(i) f là đơn ánh khi và chỉ khi hàm tử ${\omega_f}^{\mathrm{o}}$ là trung thành đầy và ảnh của nó trong $\mathsf{Comod}^{\mathrm{o}}(L)$ là đóng với việc lấy các vật con đặc biệt.

(ii) f là đơn ánh và đặc biệt khi và chỉ khi hàm tử ${\omega_f}^{\mathrm{o}}$ là trung thành đầy và ảnh của nó trong $\mathsf{Comod}^{\mathrm{o}}(L)$ đóng với việc lấy các vật con. Trong trường hợp này, hàm tử ω_f là trung thành đầy và ảnh của nó cũng đóng với việc lấy vật con.

Cuối cùng ta đưa ra một điều kiện cho tính toàn ánh của đồng cấu giữa các đối đại số.

Mệnh đề 3.1.3 *Cho $f : L' \longrightarrow L$ là một đồng cấu của đối đại số phẳng trên R. Khi đó f là toàn ánh khi và chỉ khi hàm tử ${\omega_f}^{\mathrm{o}} : \mathsf{Comod}^{\mathrm{o}}(L') \longrightarrow \mathsf{Comod}^{\mathrm{o}}(L)$ thỏa mãn điều kiện sau: mỗi $M \in \mathsf{Comod}^{\mathrm{o}}(L)$ là thương con đặc biệt của một vật dạng ${\omega_f}^{\mathrm{o}}(N)$ với $N \in \mathsf{Comod}^{\mathrm{o}}(L')$.*

3.2 Mô tả Tannaka của các đồng cấu giữa các lược đồ nhóm

Cho R là vành Dedekind với trường phân thức K. Giả sử $f : G \longrightarrow G'$ là một đồng cấu của các lược đồ nhóm affine phẳng trên R. Ta nói f là toàn ánh hoặc đồng cấu thương nếu nó là phẳng trung thành.

Định lí sau đây là tổng quát của định lí phẳng trung thành cho các đại số Hopf trên trường: *"một đại số Hopf (giao hoán) là phẳng trung thành trên một đại số Hopf con"*. Định lí này là hệ quả của tiêu chuẩn tính phẳng trung thành theo các thớ.

Định lí 3.2.1. (Tính phẳng trung thành cho các đại số Hopf giao hoán) *Cho L là một đại số Hopf phẳng trên R và L' là một đại số Hopf con của nó. Khi đó L là phẳng trung thành trên L' khi và chỉ khi L/L' là R-phẳng, tức là, khi L' là một đại số con đặc biệt của L.*

Như là hệ quả của mục 3.1 và định lí trên ta có định lí sau.

Định lí 3.2.3. *Cho $f : G \longrightarrow G'$ là một đồng cấu của các lược đồ nhóm affine phẳng trên R và $\omega_f : \mathsf{Rep}_\mathrm{f}(G') \longrightarrow \mathsf{Rep}_\mathrm{f}(G)$ là hàm tử cảm sinh từ f. Khi đó*

(i) f là phẳng trung thành khi và chỉ khi ${\omega_f}^\mathrm{o} : \mathsf{Rep}^\mathrm{o}(G') \longrightarrow \mathsf{Rep}^\mathrm{o}(G)$ là trung thành đầy và ảnh của nó đóng với việc lấy vật con.

(ii) f là nhúng đóng khi và chỉ khi mỗi vật của $\mathsf{Rep}^\mathrm{o}(G)$ là thương con đặc biệt của một vật dạng ${\omega_f}^\mathrm{o}(X')$, $X' \in \mathsf{Rep}^\mathrm{o}(G')$.

Một dãy đồng cấu giữa các lược đồ nhóm affine phẳng trên R

$$1 \longrightarrow H \xrightarrow{q} G \xrightarrow{p} A \longrightarrow 1$$

được gọi là khớp nếu p là ánh xạ thương với hạt nhân H.

Ta có một tiêu chuẩn cho tính khớp theo các hàm tử

$$\mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(A) \xrightarrow{p^*} \mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(G) \xrightarrow{q^*} \mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(H).$$

Kết quả thu được:

Định lí 3.2.8. *Cho một dãy các lược đồ nhóm affine phẳng trên R*

$$H \xrightarrow{q} G \xrightarrow{p} A$$

với q là một nhúng đóng và p là phẳng trung thành. Khi đó dãy trên là khớp khi và chỉ khi các điều kiện sau được thỏa mãn:

(a) Với mỗi $V \in \mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(G)$, $q^*(V) \in \mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(H)$ là tầm thường nếu và chỉ nếu tồn tại $U \in \mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(A)$ sao cho $V \cong p^*U$.

(b) Cho W_0 là vật con tầm thường cực đại của $q^*(V)$ trong $\mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(H)$. Khi đó tồn tại $V_0 \subset V \in \mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(G)$ sao cho $q^*(V_0) \cong W_0$.

(c) Mỗi $W \in \mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(H)$ là thương (tương ứng bởi việc lấy đối ngẫu, là vật con) của một vật có dạng $q^*(V)$ với $V \in \mathsf{Rep}^{\mathrm{o}}(G)$.

3.3 Đối đại số hữu hạn địa phương

Định nghĩa 3.3.1. Cho L là một đại số phẳng trên R. Khi đó L được gọi là đối đại số *hữu hạn địa phương* nếu với mọi đối môđun con *hữu hạn* C đều có một đối môđun con đặc biệt (thương của các môđun phẳng trên R) *hữu hạn* chứa C.

Mệnh đề 3.3.7. *Cho G là một lược đồ nhóm phẳng thuộc kiểu hữu hạn trên vành Dedekind R. Giả sử thớ tổng quát G_K là liên thông. Khi đó $R[G]$ là hữu hạn địa phương như là một đối đại số trên R.*

3.4 Cấu trúc của lược đồ nhóm affine phẳng trên một vành định giá rời rạc

Cố định một vành định giá rời rạc R với phần tử đơn trị hoá π, trường các thương K và trường thặng dư k.

3.4.1 Lược đồ nhóm affine trên một vành định giá rời rạc sinh ra từ phép nổ Neron

Gọi G^H là lược đồ nhóm trên R thu được từ phép nổ Neron tại nhóm con đóng H của G_k. Khi đó G^H là một lược đồ nhóm affine phẳng trên R và $G^H_K \cong G_K$ và G^H được gọi là mô hình của G. Tổng quát hơn, một đồng cấu $G' \longrightarrow G$ giữa các lược đồ nhóm cảm sinh một đẳng cấu giữa các thớ tổng quát cũng được gọi là ánh xạ mô hình.

Theo định nghĩa của phép nổ Neron, bao hàm thức $R[G] \subset R[G^H]$ cảm sinh một đồng cấu giữa các lược đồ nhóm và gửi G^H_k vào trong $H \subset G_k$. Hơn nữa, lược đồ nhóm G^H có tính chất phổ dụng như sau:

Nếu ánh xạ cảm sinh $G'_k \longrightarrow G_k$ của ánh xạ mô hình $f : G' \longrightarrow G$ có ảnh nằm trong $H \subset G_k$ thì f có duy nhất một phân tích qua G^H:

$$\begin{tikzcd} G' \arrow[r] \arrow[dr, dashed] & G \\ & G^H \arrow[u] \end{tikzcd}.$$

3.4.2 Đồng cấu giữa các lược đồ nhóm cảm sinh một đẳng cấu giữa các thớ tổng quát và định lí cấu trúc cho lược đồ nhóm

Mục này nghiên cứu các đồng cấu giữa các lược đồ nhóm, đặc biệt là đồng cấu giữa các lược đồ nhóm cảm sinh một đẳng cấu giữa các thớ tổng quát (chẳng hạn như đồng cấu cảm sinh từ phép nổ Neron). Mục đích là ứng dụng nó để nghiên cứu cấu trúc của một lược đồ nhóm affine phẳng.

Các phép nổ Neron cho phép khai triển một cấu xạ tùy ý giữa các lược đồ nhóm *kiểu hữu hạn* cảm sinh một đẳng cấu trên thớ tổng quát. Đây là kết quả của W. C. Waterhouse và B. Weisfeiler. Mở rộng của kết quả này cho lược đồ nhóm không nhất thiết thuộc *kiểu hữu hạn* và sử dụng khai triển này chúng tôi đưa ra cấu trúc của lược đồ nhóm affine như sau.

Định lí 3.4.9. *Cho G là một lược đồ nhóm phẳng trên R. Khi đó G có thể viết như là giới hạn của một hệ xạ ảnh của các lược đồ nhóm phẳng trên R*

$$G := \varprojlim_i G_i,$$

trong đó tất cả các cấu xạ chuyển đều là phẳng trung thành và mỗi thớ tổng quát của G_i đều thuộc kiểu hữu hạn trên K. Hơn nữa, mỗi G_i đều có thể thu được từ một lược đồ nhóm phẳng kiểu hữu hạn bởi hợp thành (có thể vô hạn) của một dãy các phép nổ Neron.

Chương 4

Tính phẳng của đại số Hopf trên một đại số Hopf con của nó trên vành Dedekind

Trong Chương 3 chúng ta đã chỉ ra mỗi đại số Hopf giao hoán luôn phẳng trung thành trên một đại số Hopf con bão hòa (như một R-môđun) của nó. Trong chương này, chúng tôi vẫn giữ giả thiết R là vành Dedekind và sử dụng tiêu chuẩn phẳng trung thành trên R để nghiên cứu tính phẳng trung thành, sau đó là tính xạ ảnh của một đại số Hopf (không nhất thiết giao hoán) trên một đại số con bão hòa của nó.

4.1 Ứng dụng của tiêu chuẩn phẳng trung thành trong trường hợp đại số Hopf con là hữu hạn

Định nghĩa 4.1.4. Cho A là đại số Hopf con của đại số Hopf phẳng B với phép đối thế S. Khi đó:

(i) Nếu A bão hòa trong B như R-môđun thì A được gọi là đại số Hopf con bão hòa của B.

(ii) A được gọi là chuẩn tắc trong B nếu với mọi $a \in A, b \in B$ ta có

$$\sum b_1 a S(b_2) \in A \quad \text{và} \quad \sum S(b_1) a b_2 \in A.$$

Đại số Hopf con A của B được gọi là *chuẩn tắc bão hòa* nếu A vừa là đại số Hopf con chuẩn tắc vừa là đại số Hopf con bão hòa của B.

Định nghĩa 4.1.9. Cho $f : A \longrightarrow B$ là một đồng cấu giữa các R-đại số Hopf phẳng. Một (B, A)-môđun Hopf là một R-môđun M có một cấu trúc B-đối môđun phải và một cấu trúc A-môđun phải sao cho ánh xạ cấu trúc $\rho_M : M \longrightarrow M \otimes B$ là A-tuyến tính, ở đây A tác động theo đường chéo trên $M \otimes B$. Một cách cụ thể hơn,

$$\rho(ma) = \sum_{m,a} m_0 a_1 \otimes m_1 f(a_2), \quad m \in M, a \in A.$$

Cấu xạ giữa các môđun Hopf là cấu xạ của các R-môđun vừa A-tuyến tính và B-đối tuyến tính. Ta kí hiệu $\mathcal{M}_A^B$ cho phạm trù các (B, A)-môđun Hopf.

Chúng ta sẽ quan tâm hai trường hợp là đồng cấu đơn ánh và đồng cấu thương. Bây giờ cho A là đại số Hopf con chuẩn tắc của đại số Hopf phẳng B. Khi đó đơn cấu $A \longrightarrow B$ sẽ cho ta phạm trù các môđun Hopf $\mathcal{M}_A^B$. Kí hiệu $A^+ := \mathsf{ker}\varepsilon_A$ là iđêan dấu của một đại số Hopf A. Giả sử đại số Hopf thương $C := B/BA^+$ là R-phẳng, (iđêan $A^+B = BA^+$ bão hòa trong B). Khi đó ánh xạ thương $\pi : B \longrightarrow C$ cho phép ta định nghĩa phạm trù $\mathcal{M}_B^C$ của các (C, B)-môđun Hopf.

Nếu $A \subset B$ là một đại số Hopf con chuẩn tắc bão hòa và R-hữu hạn thì chúng ta sẽ chỉ ra được B phẳng trung thành trên A. Khi đó đại số Hopf thương $C := B/A^+B$ luôn phẳng trên R, chúng ta còn có thể mô tả cụ thể của các phạm trù $\mathcal{M}_A$ của các A-môđun phải và phạm trù các C-đối môđun phải $\mathcal{M}^C$ theo phạm trù các môđun Hopf.

Định lí 4.1.14. *Cho B là một đại số Hopf phẳng trên R và A là một đại số Hopf con chuẩn tắc bão hòa của B. Giả sử rằng A là R-hữu hạn. Khi đó B là phẳng trung thành (trái và phải) như A-môđun. Hệ quả là B là đối phẳng trung thành (trái và phải) trên $C := B/A^+B$ và ta có các tương đương phạm trù $\mathcal{M}^C \cong \mathcal{M}_A^B$ và $\mathcal{M}_A \cong \mathcal{M}_B^C$.*

4.2 Tính xạ ảnh trên một đại số Hopf con chuẩn tắc hữu hạn

Cho H là một đại số Hopf R-phẳng. Ánh xạ R-tuyến tính $\varphi : H \longrightarrow R$ được gọi là tích phân trái nếu nó thỏa mãn

$$\sum_h h_1\varphi(h_2) = \varphi(h), \quad \text{với mọi } h \in H.$$

Điều kiện tồn tại tích phân không tầm thường trên đại số Hopf cho phép ta nghiên cứu tính xạ ảnh của nó trong phạm trù các đối môđun:

Cho H là một đại số Hopf xạ ảnh trên R. Khi đó H có tích phân khi và chỉ khi H là vật xạ ảnh trong $\mathcal{M}^H$.

Với giả thiết trong Định lí 4.1.14, chúng ta có $\mathcal{M}^C \cong \mathcal{M}_A^B$. Sử dụng tương đương giữa các phạm trù này chúng tôi chỉ ra được sự tồn tại tích phân (không tầm thường) trên B và C là tương đương. Hệ quả là:

Cho A là một đại số Hopf con chuẩn tắc bão hòa và R-hữu hạn của đại số Hopf R-xạ ảnh B. Khi đó B là xạ ảnh trong $\mathcal{M}^B$ nếu và chỉ nếu $C := B/A^+B$ là xạ ảnh trong $\mathcal{M}^C$.

Với kĩ thuật chính trong chứng minh là sử dụng tương đương phạm trù $\mathcal{M}_A \cong \mathcal{M}_B^C$, định lí về tính xạ ảnh được phát biểu:

Định lí 4.2.9. *Cho B là một đại số Hopf R-xạ ảnh với tích phân khác không. Gọi A là một đại số Hopf con chuẩn tắc bão hòa và R-hữu hạn của B. Khi đó B là xạ ảnh như một A-môđun phải.*

Kết luận

Trong luận án này chúng tôi đã thu được những kết quả sau đây:

(1) Mở rộng đối ngẫu Tannaka trên vành Dedekind.

(2) Đưa ra đặc trưng Tannaka của đơn ánh, toàn ánh và điều kiện cho tính khớp của dãy các lược đồ nhóm affine phẳng. Nghiên cứu được một số tính chất của đối đại số *hữu hạn địa phương*.

(3) Mô tả cấu trúc cho lược đồ nhóm affine phẳng trên một vành định giá rời rạc.

(4) Đưa ra tiêu chuẩn cho tính phẳng trung thành, đưa ra điều kiện và khẳng định tính phẳng trung thành cũng như tính xạ ảnh của một đại số Hopf trên một đại số Hopf con của nó trên vành Dedekind.

Các công trình liên quan đến luận án

1. N.D. Duong, P.H. Hai, *Tannakian duality over Dedekind ring and applications*, Mathematische Zeitschrift 288 (2018), 1103–1142.

2. N.D. Duong, P.H. Hai, J.P. dos Santos, *On the structure of affine flat group schemes over discrete valuation rings, I*, Ann. Scient. Ec. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) Vol. XVIII (2018), 1-56.

3. N.D. Duong, P.H. Hai, N.H. Hung, *On the flatness and projectivity over Hopf subalgebras of Hopf algebras over Dedekind ring*, Journal of Algebra 478 (2017), 237-260.

Các kết quả trong luận án được báo cáo tại

(i) Xêmina tại phòng Đại số - Viện Toán học Hà Nội, 10/2012.

(ii) Hội nghị Nghiên cứu sinh của Viện Toán học, 10/2012, 10/2013, 10/2014, 10/2015.

(iii) Hội nghị *A joint congress of the French Mathematical Society (SMF) and the Vietnamese Mathematical Society (VMS)*
Hue, Vietnam, August 20- 24, 2012

(iv) Hội nghị *Toán học Miền trung-Tây Nguyên* lần thứ nhất, 5/2015.

(v) Hội thảo *IMH - VIASM Workshop on Algebraic Geometry*
Tuan Chau, Quang Ninh, Vietnam, March 13 - 16, 2016

(vi) Phòng Đại số - Viện Toán học Hà Nội, *Báo cáo tiểu luận tổng quan*, 5/2017.