VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

VIỆN TOÁN HỌC

ĐẶNG VĂN ĐOẠT

ỨNG DỤNG CỦA ĐA DIỆN NEWTON VÀO VIỆC NGHIÊN CỨU CÁC BẤT ĐẲNG THỨC ŁOJASIEWICZ VÀ MỘT SỐ VẤN ĐỀ CỦA LÝ THUYẾT TỐI ƯU

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Toán Giải tích

Mã số: 9 46 01 02

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TSKH. Hà Huy Vui

PGS.TS. Phạm Tiến Sơn

Hà Nội - 2018

Luận án được hoàn thành tại Viện Toán học - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt nam.

Người hướng dẫn khoa học

1. **PGS.TSKH. Hà Huy Vui**

2. **PGS.TS. Phạm Tiến Sơn**

Phản biện 1: . . . .

Phản biện 2: . . . .

Luận án sẽ được bảo vệ trước hội đồng chấm luận án cấp Viện, họp tại Viện Toán học - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt nam vào lúc ..... giờ.....phút, ngày .....tháng.....năm 2018.

Có thể tìm luận án tại:

- Thư viện Quốc gia Hà nội.

- Thư viện Viện Toán học.

Mở đầu

Đa diện Newton của một đa thức nhiều biến là bao lồi của tập các số mũ của các đơn thức xuất hiện trong đa thức với hệ số khác không.

Trong nhiều vấn đề của lý thuyết kỳ dị và hình học đại số, đa diện Newton đóng vai trò như một mở rộng của khái niệm bậc của đa thức, và chứa rất nhiều thông tin hình học, đại số, tổ hợp và giải tích của hệ phương trình đa thức. Chính vì vậy, với khái niệm đa diện Newton, nhiều kết quả quan trọng của lý thuyết kỳ dị, hình học đại số, lý thuyết phương trình đạo hàm riêng ... đã được thiết lập (xem [AGV] về các ứng dụng của đa diện Newton trong lý thuyết kỳ dị, [Ko], [Kh] về ứng dụng của đa diện Newton trong hình học đại số và [GV] về ứng dụng của đa diện Newton trong phương trình đạo hàm riêng).

Đa diện Newton xác định không chỉ cho các đa thức để nghiên cứu các vấn đề mang tính toàn cục, nó còn được xác định cho các mầm hàm giải tích để nghiên cứu các tính chất tô pô của hàm giải tích tại lân cận điểm kỳ dị. Nhiều bất biến tô pô của điểm kỳ dị như số Milnor, số mũ tiệm cận của tích phân dao động ... được tính thông qua đa diện Newton của hàm giải tích (xem [Ko] và [AGV] và danh mục các trích dẫn ở các tài liệu này).

Bản luận án sử dụng khái niệm đa diện Newton để nghiên cứu các vấn đề sau đây:

1) Tìm điều kiện để một đa thức n biến thực không âm trên toàn bộ $\mathbb{R}^n$, biểu diễn được dưới dạng tổng bình phương của các đa thức;

2) Nghiên cứu tính đặt chỉnh của bài toán tối ưu đa thức không ràng buộc;

3) Nghiên cứu điều kiện tồn tại bất đẳng thức Łojasiewicz toàn cục của một đa thức n biến thực và tính toán các số mũ Łojasiewicz cho trường hợp $n = 2$.

Các vấn đề 1) và 2) đang là những vấn đề thời sự của Tối ưu Đa thức. Các bất đẳng thức Łojasiewicz toàn cục (đối tượng nghiên cứu của vấn đề 3)) được nghiên cứu lần đầu tiên trong công trình của [DHT] và đang được phát triển theo nhiều khía cạnh khác nhau, cả về mặt lý thuyết [HNS], [DKL], [OR], lẫn ứng dụng [Ha1], [DHP2].

Bằng việc sử dụng đa diện Newton, luận án đã đưa ra một cách tiếp cận hữu hiệu để nghiên cứu các vấn đề trên, và đạt được những vấn đề mới mẻ.

Luận án gồm 4 chương. Trong Chương 1, đa diện Newton được sử dụng để cho một điều kiện đủ để một đa thức là tổng bình phương của các đa thức khác. Kết quả này mở rộng một cách đáng kể một kết quả gần đây của J.B.Lasserre.

Trong chương 2, sử dụng đa diện Newton và điều kiện của A.G.Kouchnirenko [Ko] về tính không suy biến của một đa thức đối với đa diện Newton của nó, chúng tôi chứng minh được rằng, trong không gian tất cả các đa thức có đa diện Newton là tập con của một đa diện Γ cho trước, tồn tại một tập nửa đại số $\mathcal{U}_\Gamma$, mở và trù mật, sao cho nếu f là một đa thức bị chặn dưới và $f \in \mathcal{U}_\Gamma$ thì bài toán

$$\text{Tính} \inf_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$$

là đặt chỉnh theo nghĩa của Zolezzi.

Các Chương 3 và 4 nghiên cứu bất đẳng thức Łojasiewicz toàn cục của một đa thức.

Trong Chương 3, chúng tôi đưa ra một tiêu chuẩn mới của sự tồn tại bất đẳng thức Łojasiewicz toàn cục. Khác với tiêu chuẩn đã biết [DHT], ở đây, việc kiểm tra trong $\mathbb{R}^n$ sự tồn tại của bất đẳng thức Łojasiewicz toàn cục được đưa về việc kiểm tra sự tồn tại của nó trên một tập con đại số, xác định một cách đơn giản và tự nhiên. Tiêu chuẩn mới này mở đường cho việc ứng dụng các kết quả cổ điển về đa diện Newton (thuật toán tìm khai triển Newton-Puiseux của các đường cong đại số) và các kết quả tương đối gần đây (điều kiện không suy biến đối với đa diện Newton của Kouchnirenko) để tính toán, đánh giá số mũ Łojasiewicz.

Chương 4 xét trường hợp $n = 2$. Ở đây, các số mũ Łojasiewicz của bất đẳng thức Łojasiewicz toàn cục cũng như các số mũ liên quan, được tính toán bằng thuật toán Newton-Puiseux. Đặc biệt, nếu đa thức hai biến là không suy biến theo lược đồ Newton, thì các số mũ trong bất đẳng thức Łojasiewicz toàn cục được biểu diễn thông qua các tính chất hình học của lược đồ Newton.

Chương 1

Điều kiện đủ để một đa thức thực là tổng bình phương của các đa thức

Các đa thức biểu diễn được dưới dạng tổng bình phương của các đa thức khác đóng vai trò quan trọng trong nhiều lĩnh vực khác nhau của toán học nói chung và lý thuyết tối ưu nói riêng. Nó cho phép nới lỏng bài toán tối ưu đa thức (nói chung đều thuộc loại NP-khó) về một bài toán quy hoạch nửa xác định [La], [La1], [La2]. Tuy nhiên, các điều kiện đơn giản để nhận biết một đa thức có là một tổng các bình phương hay không vẫn chưa có nhiều. Trong [La3], J.B.Lasserre đã đưa ra một điều kiện đủ để một đa thức là tổng bình phương của các đa thức khác. Nếu ta phiên dịch điều kiện của J.B.Lasserre sang ngôn từ của đa diện Newton, thì ta thấy rằng, các đa thức mà J.B.Lasserre nghiên cứu có đa diện Newton là những đơn hình cơ bản. Mục đích của chương này là mở rộng kết quả của J.B.Lasserre cho lớp đa thức với đa diện Newton bất kỳ. Chúng tôi sẽ chỉ ra rằng, đối với bài toán biểu diễn tổng bình phương, tập các đỉnh hình học của đa diện Newton là chưa đủ để nghiên cứu bài toán. Do đó chúng tôi đã mở rộng tập các đỉnh hình học thành tập các "đỉnh số học". Nói vắn tắt, kết quả của chúng tôi chỉ ra rằng, nếu viết đa thức f dưới dạng

$$f(x) = \sum_{\alpha \in \mathcal{V}(f)} a_\alpha x^\alpha + g(x),$$

trong đó, tổng $\sum_{\alpha \in \mathcal{V}(f)} a_\alpha x^\alpha$ gồm tất cả các đơn thức ứng với các đỉnh số học $\mathcal{V}(f)$ của đa diện Newton, thì f là tổng bình phương nếu các hệ số của $g(x)$ là đủ nhỏ so với các hệ số $a_\alpha, \alpha \in \mathcal{V}(f)$.

Nội dung chính của Chương này được viết dựa trên công trình của **Van Doat Dang and Thi Thao Nguyen,** *Sufficient Conditions for a real Polynomial to be a Sum of Squares of Polynomials.* Kodai J. Math., **39**(2016), 253 – 275.

Định nghĩa 1.0.1. Đa thức $f \in \mathbb{R}[x]$ theo n biến được gọi là *không âm* (viết tắt PSD) nếu $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Định nghĩa 1.0.2. Đa thức $f \in \mathbb{R}[x]$ theo n biến được gọi là *biểu diễn tổng bình phương* (viết tắt SOS) nếu tồn tại hữu hạn đa thức $p_i \in \mathbb{R}[x], i = 1, 2, \ldots, k$ sao cho $f(x) = \sum_{i=1}^k p_i^2(x), \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Cho $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{\alpha \in \mathbb{N}^n} f_\alpha x^\alpha \in \mathbb{R}[x]$ là đa thức theo n biến, bậc $2d$.

Đặt $\overline{f}(x_0, x_1, \ldots, x_n) := x_0^{2d} f(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0})$.

Định nghĩa 1.0.3. Đa thức $\overline{f}$ được gọi là *đa thức thuần nhất hóa* của f và cũng được gọi là *một dạng bậc* $2d$.

Mệnh đề 1.0.4. *([Ma1]) Cho f là đa thức bậc $2d$. Khi đó, f là PSD nếu và chỉ nếu $\overline{f}$ là PSD; và f là SOS nếu và chỉ nếu $\overline{f}$ là SOS.*

Cho $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{|\alpha|=2d} f_\alpha x^\alpha \in \mathbb{R}[x]$ là đa thức thuần nhất theo n biến, bậc $2d$.

Đặt $\operatorname{supp}(f) := \{\alpha \in \mathbb{N}^n : f_\alpha \neq 0\}$

Định nghĩa 1.0.5. Bao lồi của tập $\operatorname{supp}(f)$ trong $\mathbb{R}^n$ được gọi là *đa diện Newton của* f, ký hiệu $\Gamma(f)$.

Trong [La3], J.B.Lasserre đưa ra một điều kiện đủ để một đa thức thuần nhất n biến, bậc $2d$ có dạng

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^{2d} + Q(x),$$

là một tổng bình phương của các đa thức, trong đó $a_i \neq 0, i = 1, \ldots, n$, và mọi đơn thức $x_i^{2d}, i = 1, \ldots, n$, không xuất hiện trong $Q(x)$ với hệ số khác không. Khi đó, f là SOS nếu $a_i > 0$ và "đủ lớn" so với các hệ số của $Q(x)$.

Chú ý rằng, trong trường hợp này, $\Gamma(f)$ là một đơn hình với các đỉnh $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0), i = 1, \ldots, n$.

Trong trường hợp tổng quát, đa diện Newton của một đa thức thuần nhất không nhất thiết là một đơn hình. Vì vậy, để thiết lập kết quả tương tự của J.B.Lasserre cho đa thức bất kỳ, chúng tôi thay tập các đỉnh của đa diện bằng tập các "đỉnh số học". Ký hiệu

- $V(f)$ là tập các đỉnh của đa diện Newton $\Gamma(f)$;
- $\mathcal{C}(f) := \Gamma(f) \cap \mathbb{Z}^n$;
- $\mathcal{A}(f) := \left\{ \frac{1}{2}(s+t) : s, t \in \Gamma(f) \cap (2\mathbb{Z})^n \right\}$;
- $\mathcal{V}(f) := \mathcal{A}(f) \setminus \left\{ \frac{1}{2}(s+t) \,|\, s \neq t, s, t \in \Gamma(f) \cap (2\mathbb{Z})^n \right\}$;
- $\Delta := \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \operatorname{supp}(f) :$ hoặc $f_\alpha < 0$ hoặc tồn tại α_i lẻ$\}$.

Định nghĩa 1.0.6. ([Re2]) Tập hợp $\mathcal{U} = \{u^1, \ldots, u^m\}$ được gọi là *khuôn (framework)* nếu $u^i = (u_1^i, \ldots, u_n^i) \in (2\mathbb{Z})^n$, với $u_j^i \geq 0$ và $\sum_{j=1}^n u_j^i = 2d$, với mọi $i = 1, \ldots, m$ và số nguyên dương d.

Định nghĩa 1.0.7. ([Re2]) Cho $\mathcal{U}$ là một khuôn. Tập hữu hạn $\mathcal{L} \subset \mathbb{Z}^n$ được gọi là $\mathcal{U}$*-trung bình* nếu $\mathcal{L}$ chứa $\mathcal{U}$, và với mọi $v \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{U}$, v là trung bình cộng của hai điểm chẵn phân biệt trong $\mathcal{L}$.

Định lý 1.0.8. *([Re2]) Cho $\mathcal{U}$ là khuôn, khi đó tồn tại tập $\mathcal{U}^*$ là $\mathcal{U}$-trung bình thỏa mãn $\mathcal{A}(\mathcal{U}) := \{\frac{1}{2}(s+t) : s, t \in \mathcal{U}\} \subset \mathcal{U}^* \subset \mathcal{C}(\mathcal{U})$ và $\mathcal{U}^*$ chứa mọi tập $\mathcal{U}$-trung bình, với $\mathcal{C}(\mathcal{U})$ là tập các điểm nguyên trong bao lồi của $\mathcal{U}$.*

Định lý 1.0.9. *Cho* $f(x) = \sum_{\alpha\in\mathcal{U}} f_\alpha x^\alpha + \sum_{\alpha\in\Delta} f_\alpha x^\alpha + \sum_{\alpha\notin(\mathcal{U}\cup\Delta)} f_\alpha x^\alpha$ *là đa thức thuần nhất n biến thực, bậc* $2d$*, có tập đỉnh* $V(f) \subset (2\mathbb{Z})^n$*, trong đó* $\mathcal{U}$ *là một khuôn thỏa* $V(f) \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{V}(f)$*. Giả sử các điều sau thỏa mãn:*

(i) $\alpha \in \mathcal{U}^*$ *với mọi* $\alpha \in \Delta$;

(ii) $\min_{u\in\mathcal{U}} f_u \geq \sum_{\alpha\in\Delta} |f_\alpha|$.

Khi đó f là SOS.

Ký hiệu $\mathbb{R}[x]_{2d}$ là không gian véc tơ các đa thức thực, n biến, bậc không vượt quá $2d$, với cơ sở chính tắc $(x^\alpha) = \{x^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq 2d\}$.

Cho dãy số thực $y = (y_\alpha)$ có chỉ số được đánh số theo cơ sở chính tắc (x^α), ta xác định ánh xạ tuyến tính $L_y : \mathbb{R}[x]_{2d} \to \mathbb{R}$

$$f = \sum_\alpha f_\alpha x^\alpha \mapsto L_y(f) = \sum_\alpha f_\alpha y_\alpha,$$

và $M_d(y) = (M_d(y)(\alpha, \beta))$ là *ma trận moment* sinh bởi (y_α), xác định

$$M_d(y)(\alpha, \beta) := L_y(x^{\alpha+\beta}) = y_{\alpha+\beta},\ \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n : |\alpha|, |\beta| \leq d.$$

Theo Nhận xét 2.2 [La3], $M_d(y)$ là nửa xác định dương, kí hiệu $M_d(y) \succeq 0$, khi và chỉ khi $L_y(f^2) \geq 0$, với mọi $f \in \mathbb{R}[x]_d$. Hơn nữa, f là SOS khi và chỉ khi $L_y(f) \geq 0$, với mọi y sao cho $M_d(y) \succeq 0$.

Do vậy, chứng minh Định lý 1.0.9 được hoàn thành bằng cách sử dụng Nhận xét 2.2 [La3] và Bổ đề sau

Bổ đề 1.0.10. *Cho* $\mathcal{U}$ *là một khuôn và* $\mathcal{L}$ *là tập* $\mathcal{U}$*-trung bình. Giả sử dãy* $y = (y_\alpha)$ *sao cho* $M_d(y) \succeq 0$*. Khi đó*

$$|L_y(x^\alpha)| \leq \max_{u\in\mathcal{U}} L_y(x^u), \quad \text{với mọi } \alpha \in \mathcal{L}.$$

Hệ quả 1.0.11. *(Kết quả của Lasserre [La3]) Cho*

$$f = \sum_{i=1}^n a_{2de_i} x_i^{2d} + \sum_{\alpha\in\Delta} a_\alpha x^\alpha + \sum_{\alpha\notin\Delta, \alpha\neq 2de_i} a_\alpha x^\alpha$$

là một đa thức thuần nhất n biến thực, bậc 2d. Trong đó $e_1 = (1, 0, ..., 0), \ldots, e_n = (0, ..., 0, 1)$ *là các véc tơ đơn vị trong* $\mathbb{R}^n$.

Nếu

$$\min a_{2de_i} \geq \sum_{\alpha\in\Delta} |f_\alpha|, i = 1, 2, ..., n$$

thì f là SOS.

Các điểm của tập $\mathcal{U}$ thỏa mãn điều kiện của Định lý 1.0.9 có thể xem như là tập các đỉnh số học của $\Gamma(f)$.

Chương 2

Tính đặt chỉnh của bài toán tối ưu đa thức

Tính đặt chỉnh là một trong những tính chất mong muốn nhất khi ta nghiên cứu các bài toán tối ưu. Với bài toán đặt chỉnh, nghiệm tối ưu luôn tồn tại và duy nhất. Hơn nữa, nếu dãy giá trị của hàm mục tiêu trên một dãy điểm hội tụ đến giá trị tối ưu, thì dãy điểm cũng hội tụ đến điểm mà tại đó hàm đạt giá trị tối ưu. Một cách chính xác, ta có

Định nghĩa 2.0.12. Cho $X, \mathcal{A}$ là các không gian metric. Với mỗi $a \in \mathcal{A}$ cố định, $f_a \colon X \to \mathbb{R}$ là một hàm liên tục. Bài toán

$$\text{Tính} \quad \inf_{x\in X} f_a(x)$$

được gọi là *đặt chỉnh* theo Zolezzi nếu

(i) Giá trị $f_a^* \colon = \inf_{x\in X} f_a(x)$ là hữu hạn và đạt tại điểm x_a duy nhất của X;

(ii) Với mỗi dãy $a_n \in \mathcal{A}, a_n \to a$, giá trị $f_{a_n}^* \colon = \inf_{x\in X} f_{a_n}(x)$ là hữu hạn và với mọi dãy $x_n \in X$ thỏa mãn $f_{a_n}(x_n) - f_{a_n}^* \to 0$, ta có $x_n \to x_a$.

Trong [ILR], các tác giả đã chứng minh được tính đặt chỉnh của nhiều lớp các bài toán tối ưu. Đặc biệt, họ đã chứng minh được rằng, tồn tại một tập trù mật trong không gian các bài toán tối ưu, sao cho mọi bài toán thuộc tập này là đặt chỉnh. Một trong các hệ quả của kết quả này là, hầu hết các bài toán qui hoạch toàn phương đều đặt chỉnh.

Trong chương này, bằng cách sử dụng đa diện Newton và điều kiện không suy biến theo nghĩa Kouchnirenko, chúng tôi chứng minh được rằng, nếu Γ là một đa diện thuận tiện trong $\mathbb{R}^n$, và $\mathcal{A}_\Gamma$ là không gian các đa thức có đa diện Newton là tập con của Γ, luôn tồn tại một tập nửa đại số $\mathcal{U}_\Gamma$, sao cho mọi đa thức f bị chặn dưới và f thuộc $\mathcal{U}_\Gamma$ thì bài toán

$$\text{Tính} \inf_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$$

là một bài toán đặt chỉnh theo Zolezzi. Ở đây, số biến và bậc của đa thức là tùy ý.

Nội dung chính của Chương này được viết dựa trên công trình của **Van Doat Dang, Huy Vui Ha and Tien Son Pham,** *Well-posedness in unconstrained Polynomial Optimization Problems.* SIAM J. Optim., **26**(3)(2016), 1411 – 1428.

Cho $f = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} f_\alpha x^\alpha$ là đa thức n biến. Nhắc lại rằng $\operatorname{supp}(f)$ là tập tất cả $\alpha \in \mathbb{N}^n$ sao cho $f_\alpha \neq 0$.

Bên cạnh khái niệm đa diện Newton của một đa thức f, để nghiên cứu các tính chất hình học và giải tích của đa thức tại vô hạn, ta cần thêm khái niệm sau.

Định nghĩa 2.0.13. Bao lồi của tập $\operatorname{supp}(f) \cup \{0\}$ được gọi là *đa diện Newton tại vô hạn của* f và ký hiệu $\Gamma^\infty(f)$.

$\Gamma^\infty(f)$ gọi là *thuận tiện* nếu nó cắt mọi trục tọa độ tại các điểm khác gốc tọa độ.

Đa thức f gọi là *thuận tiện* nếu $\Gamma^\infty(f)$ thuận tiện.

Ta gọi *biên Newton tại vô hạn của* f, ký hiệu $\Gamma_\infty(f)$, được xác định bởi hợp các mặt của $\Gamma^\infty(f)$ mà không chứa gốc tọa độ 0 trong $\mathbb{R}^n$.

Với mỗi mặt Δ của $\Gamma_\infty(f)$, đặt $f_\Delta = \sum_{\alpha\in\Delta} f_\alpha x^\alpha$.

Định nghĩa 2.0.14. [Ko, Kh] Đa thức f được gọi là *không suy biến tại vô hạn theo Kouchnirenko* (nói tắt là *không suy biến tại vô hạn*) nếu và chỉ nếu với mọi mặt Δ của $\Gamma_\infty(f)$, hệ phương trình

$$\frac{\partial f_\Delta}{\partial x_1}(x) = \cdots = \frac{\partial f_\Delta}{\partial x_n}(x) = 0$$

không có nghiệm trong $(\mathbb{R} \setminus \{0\})^n$.

Trong chương này, chúng tôi luôn ký hiệu $\Gamma \subset \mathbb{R}^n_+$ là đa diện với tập đỉnh là các điểm có tọa độ nguyên trong $\mathbb{Z}^n_+$. Và luôn giả sử Γ là thuận tiện, nghĩa là nó cắt mọi trục tọa độ tại các điểm khác gốc.

Với mỗi đa diện Γ thuận tiện, đặt

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_\Gamma &:= \{f \in \mathbb{R}[x] \ : \ \Gamma^\infty(f) \subseteq \Gamma\};\\
V &:= \text{ tập các đỉnh của } \Gamma;\\
\mathcal{C} &:= \Gamma \cap \mathbb{Z}^n_+ \ = \ \text{ tập các điểm nguyên trong } \Gamma;\\
N &:= \#\mathcal{C} \ = \ \text{ số các điểm nguyên của tập } \mathcal{C}.
\end{aligned}$$

Định lý 2.0.15. *Cho đa diện Γ thuận tiện. Khi đó tồn tại tập nửa đại số, mở và trù mật $\mathcal{U}_\Gamma \subset \mathcal{A}_\Gamma$ $(\equiv \mathbb{R}^N)$ sao cho với mọi $f = \sum_{\alpha\in\mathcal{C}} f_\alpha x^\alpha \in \mathcal{U}_\Gamma$ và f bị chặn dưới trên $\mathbb{R}^n$, các điều sau thỏa mãn:*

(i) f có duy nhất một điểm cực tiểu $x^* \in \mathbb{R}^n$;

(ii) Tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho với mọi $u := (u_\alpha) \in \mathbb{R}^N$, $\|u\| < \epsilon$, các điều kiện sau luôn thỏa mãn:

(ii1) Đa thức $f_u := f + \sum_{\alpha\in\mathcal{C}} u_\alpha x^\alpha \in \mathcal{A}_\Gamma$ có duy nhất điểm cực tiểu $x^*_u \in \mathbb{R}^n$;

(ii2) Đa thức f_u chỉ có các điểm tới hạn không suy biến và các giá trị tới hạn là phân biệt; hơn nữa, Hessian $\nabla^2 f_u(x^*_u)$ của f_u tại x^*_u là xác định dương;

(ii3) Sự tương ứng $\{u \in \mathbb{R}^N \ : \ \|u\| < \epsilon\} \to \mathbb{R}^n, u \mapsto x^*_u$, là ánh xạ giải tích với $\lim_{u\to 0} x^*_u = x^*$;

(ii4) Với mọi $x_u \in \mathbb{R}^n$, nếu $\lim_{u\to 0}[f_u(x_u) - \inf_{x\in\mathbb{R}^n} f_u(x)] = 0$, thì $\lim_{u\to 0} x_u = x^*$.

Nói riêng, bài toán

$$\text{Tính} \inf_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$$

là đặt chỉnh theo Zolezzi.

Chứng minh Định lý 2.0.15 được suy ra từ các Bổ đề.

Bổ đề 2.0.16. *([HP]) Cho $F\colon X \times P \to Y$ là ánh xạ nửa đại số lớp C^∞ giữa các đa tạp nửa đại số. Nếu $y \in Y$ là giá trị chính quy của F, thì tồn tại tập nửa đại số Σ trong P có chiều lớn nhất bằng $\dim P - 1$, sao cho với mỗi $p \in P \setminus \Sigma$, y là giá trị chính quy của ánh xạ $F_p\colon X \to Y, x \mapsto F(x,p)$.*

Bổ đề 2.0.17. *Giả sử đa diện Γ là thuận tiện. Khi đó tồn tại tập nửa đại số, mở và trù mật $\mathcal{C}_\Gamma \subset \mathcal{A}_\Gamma$, sao cho với mọi $f \in \mathcal{C}_\Gamma$, f chỉ có các điểm tới hạn không suy biến và các giá trị tới hạn là phân biệt.*

Bổ đề 2.0.18. *Tập $\mathcal{D}_\Gamma := \{f \in \mathcal{A}_\Gamma : \Gamma(f) \subset \Gamma$ và f không suy biến tại vô hạn$\}$ là tập nửa đại số mở và trù mật trong $\mathcal{A}_\Gamma$.*

Bổ đề 2.0.19. *Cho $f \in \mathcal{D}_\Gamma$ là đa thức bị chặn dưới. Khi đó, với mỗi mặt Δ của $\Gamma_\infty(f)$, ta có $f_\Delta \geq 0$ trên $\mathbb{R}^n$ và $f_\Delta > 0$ trên $(\mathbb{R} \setminus 0)^n$.*

Xét hàm nửa đại số $P_\Gamma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ xác định bởi $P_\Gamma(x) := \sum_{\alpha\in V} |x^\alpha|$.

Bổ đề 2.0.20. *Giả sử đa diện Γ là thuận tiện và $f \in \mathcal{D}_\Gamma$ là một đa thức bị chặn dưới. Khi đó tồn tại các hằng số dương c_1, c_2, và r sao cho*

$$c_1 P_\Gamma(x) \leq f(x) \leq c_2 P_\Gamma(x) \quad \text{với mọi} \quad x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| \geq r.$$

Nói riêng, f là coercive trên $\mathbb{R}^n$ (tức là $\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = +\infty$).

Đặt $\mathcal{U}_\Gamma := \mathcal{C}_\Gamma \cap \mathcal{D}_\Gamma$, trong đó $\mathcal{C}_\Gamma$ và $\mathcal{D}_\Gamma$ là các tập nửa đại số, mở và trù mật trong $\mathcal{A}_\Gamma$ được xác định như trong các Bổ đề 2.0.17 và 2.0.18, tương ứng. Khi đó $\mathcal{U}_\Gamma$ là tập nửa đại số, mở và trù mật trong $\mathcal{A}_\Gamma$.

Bổ đề 2.0.21. *Cho Γ là một đa diện thuận tiện, cho f là một đa thức bất kỳ thuộc $\mathcal{U}_\Gamma$. Khi đó, nếu f bị chặn dưới thì f đạt cực tiểu trên $\mathbb{R}^n$ tại điểm duy nhất x^*.*

Bổ đề 2.0.22. *Cho đa diện Γ là thuận tiện và $f \in \mathcal{U}_\Gamma$ là đa thức bị chặn dưới. Với mỗi $u := (u_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{C}} \in \mathbb{R}^N$, đặt $f_u := f + \sum_{\alpha\in\mathcal{C}} u_\alpha x^\alpha \in \mathbb{R}[x]$.*

Khi đó, tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho với mọi $\|u\| < \epsilon$, ta có $f_u \in \mathcal{U}_\Gamma$. Hơn nữa, các khẳng định sau là đúng:

(i) *Tồn tại các hằng số dương c_1, c_2, và r sao cho*

$$c_1 P_\Gamma(x) \leq f_u(x) \leq c_2 P_\Gamma(x), \quad \text{với mọi} \quad x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| \geq r;$$

(ii) *f_u là coercive;*

(iii) *f_u có điểm cực tiểu toàn cục duy nhất $x_u^* \in \mathbb{R}^n$;*

(iv) f_u *chỉ có các điểm tới hạn không suy biến và các giá trị tới hạn phân biệt; hơn nữa, Hessian* $\nabla^2 f_u(x_u^*)$ *của* f_u *tại* x_u^* *xác định dương;*

(v) *Phép tương ứng* $\{u \in \mathbb{R}^N \ : \ \|u\| < \epsilon\} \to \mathbb{R}^n, u \mapsto x_u^*$, *xác định một ánh xạ giải tích với* $\lim_{u\to 0} x_u^* = x^*$, *trong đó* x^* *là điểm cực tiểu toàn cục duy nhất của* f *trên* $\mathbb{R}^n$.

Chương 3

Bất đẳng thức Łojasiewicz toàn cục của hàm đa thức

Cho $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là một hàm giải tích trên tập compact $U \subset \mathbb{R}^n, 0 \in U$, với $f(0) = 0$. Khi đó bất đẳng thức Łojasiewicz cổ điển [Lo] khẳng định rằng, tồn tại hằng số $\alpha > 0$ và $c > 0$ sao cho

$$|f(x)| \geq cdist(x, f^{-1}(0))^{\alpha}, \text{với mọi } x \in U. \tag{3.1}$$

Bất đẳng thức này được thiết lập một cách độc lập bởi Hörmander (1958, trường hợp f là đa thức) và Łojasiewicz (1959, trường hợp f là hàm giải tích) để giải quyết một bài toán quan trọng trong lý thuyết các phương trình đạo hàm riêng, đó là bài toán chia một phân bố cho một đa thức. Như mọi ý tưởng sâu sắc của toán học, bất đẳng thức này tìm được ứng dụng trong nhiều vấn đề của các lĩnh vực khác nhau, từ giải tích toán học, lý thuyết tối ưu, đến hình học đại số và tô pô (xem [BM], [Br], [Ha], [Ha1], [Kur], [KMP], [Te],...).

Trong bất đẳng thức (3.1), nếu thay tập compact U bằng toàn bộ $\mathbb{R}^n$ thì nói chung bất đẳng thức kiểu như trên không phải khi nào cũng tồn tại. Hay nói cách khác, dạng toàn cục của bất đẳng thức Łojasiewicz nói chung là không tồn tại.

Việc nghiên cứu bất đẳng thức Łojasiewicz toàn cục được tiến hành lần đầu tiên trong công trình [DHT], và được tiếp tục phát triển bởi những tác giả khác [DKL], [HNS], [Ha1]...

Trước tiên, ta nhắc lại kết quả sau đây của [Ha1].

Định lý 3.0.23. *Cho f là đa thức n biến, $\Gamma^{\infty}(f)$ là đa diện Newton tại vô hạn của f. Giả sử rằng $\Gamma^{\infty}(f)$ là thuận tiện. Khi đó, nếu f là không suy biến theo Kouchnirenko thì tồn tại các hằng số dương α, β, c sao cho*

$$|f(x)|^{\alpha} + |f(x)|^{\beta} \geq cdist(x, f^{-1}(0)),$$

với mọi $x \in \mathbb{R}^n$.

Vì tập các đa thức không suy biến đối với đa diện Newton lập thành một tập mở và trù mật trong không gian tất cả các đa thức có cùng một đa diện Newton, nên từ kết quả trên ta thấy rằng, với hầu hết các đa thức f có đa diện Newton thuận tiện, bất đẳng thức Łojasiewicz toàn cục luôn tồn tại đối với f.

Chương này tập trung nghiên cứu bất đẳng thức Łojasiewicz toàn cục của đa thức không thỏa mãn điều kiện không suy biến.

Trong [DHT], các tác giả đã đưa ra một tiêu chuẩn cho sự tồn tại của bất đẳng thức Łojasiewicz trên $\mathbb{R}^n$ cho trường hợp f là hàm đa thức. Tuy nhiên, việc kiểm tra tiêu chuẩn đó là rất khó.

Trong chương này, chúng tôi đưa ra một tiêu chuẩn khác. Tiêu chuẩn mới này cho phép kiểm tra sự tồn tại bất đẳng thức Łojasiewicz toàn cục của đa thức f một cách hữu hiệu hơn hẳn.

Giả sử $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là đa thức bậc d có dạng

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_0 x_n^d + a_1(x')x_n^{d-1} + \ldots + a_d(x'), \tag{3.2}$$

trong đó $a_i(x')$ là các đa thức theo biến $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, có bậc không vượt quá i. Đặt $V_1 := \{x \in \mathbb{R}^n : \dfrac{\partial f}{\partial x_n} = 0\}$. Chúng tôi sẽ chứng tỏ rằng tập V_1 có thể được xem như là tập kiểm tra (*testing set*) sự tồn tại bất đẳng thức Łojasiewicz của f trên $\mathbb{R}^n$. Ngoài ra các số mũ Łojasiewicz cũng được khảo sát trong chương. Ở đây chúng tôi đánh giá các số mũ Łojasiewicz toàn cục của f thông qua các số mũ Łojasiewicz của f trên V_1 và bậc d của nó.

Nội dung của Chương này được viết dựa theo các Mục 2, 4 và một phần Mục 3 của bài báo **Huy Vui Ha and Van Doat Dang,** *On the Global Łojasiewicz inequality for polynomial functions. (34 pp)*(accepted for publication in Annales Polonici Mathematici.)

3.1 Bất đẳng thức Łojasiewicz trên tập V_1

Trước hết, giả sử V_1 là tập khác rỗng và không chứa trong tập $f^{-1}(0)$.

Định nghĩa 3.1.1. Dãy $\{x^k\} \subset \mathbb{R}^n, x^k \to \infty$ được gọi là

i) Dãy *loại một* của f nếu $f(x^k) \to 0, dist(x^k, f^{-1}(0)) \geq M > 0$.

ii) Dãy *loại hai* của f nếu $|f(x^k)| < M < +\infty, dist(x^k, f^{-1}(0)) \to +\infty$.

iii) Dãy *loại một* của f trên V_1 nếu

$$\{x^k\} \subset V_1, f(x^k) \to 0, dist(x^k, f^{-1}(0)) \geq M > 0.$$

iv) Dãy *loại hai* của f trên V_1 nếu

$$\{x^k\} \subset V_1, |f(x^k)| < M < +\infty, dist(x^k, f^{-1}(0)) \to +\infty.$$

Nhận xét: i) và ii) được định nghĩa trong [DHT].

Mệnh đề 3.1.2. *Các phát biểu sau là tương đương*

(i) Không tồn tại dãy loại một của f trên V_1;

(ii) Tồn tại hằng số dương δ sao cho hoặc tập $\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| < \delta\} \cap V_1$ bằng rỗng hoặc tồn tại hằng số dương c và số hữu tỉ dương α sao cho

$$|f(x)| \geq c\,dist(x, f^{-1}(0))^{\alpha},$$

với mọi $x \in \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \leq \delta\} \cap V_1$.

Đặt $f_*: = \inf_{x\in V_1} |f(x)|$.

Định lý 3.1.3. *(Bất đẳng thức Łojasiewicz của f trên V_1)*
Các phát biểu sau là tương đương

(i) Không tồn tại các dãy loại một và loại hai của f trên V_1;

(ii) Các khẳng định sau là đúng

(a) Nếu $f_* > 0$ và hàm $dist(x, f^{-1}(0))$ bị chặn trên V_1 thì với mọi $\rho > 0$, tồn tại hằng số $c > 0$ sao cho

$$|f(x)| \geq c dist(x, f^{-1}(0))^{\rho}, \text{ với mọi } x \in V_1;$$

(b) Nếu $f_* > 0$ và hàm $dist(x, f^{-1}(0))$ không bị chặn trên V_1 thì tồn tại hằng số $c > 0$ và số hữu tỉ $\beta > 0$ sao cho

$$|f(x)| \geq c dist(x, f^{-1}(0))^{\beta}, \text{ với mọi } x \in V_1;$$

(c) Nếu $f_* = 0$ và hàm $dist(x, f^{-1}(0))$ bị chặn trên V_1 thì tồn tại hằng số $c > 0$ và số hữu tỉ $\alpha > 0$ sao cho

$$|f(x)| \geq c dist(x, f^{-1}(0))^{\alpha}, \text{ với mọi } x \in V_1;$$

(d) Nếu $f_* = 0$ và hàm $dist(x, f^{-1}(0))$ không bị chặn trên tập V_1 thì tồn tại hằng số $c > 0$ và các số hữu tỉ dương α, β sao cho

$$|f(x)| \geq c \min\{dist(x, f^{-1}(0))^{\alpha}, dist(x, f^{-1}(0))^{\beta}\},$$

với mọi $x \in V_1$.

Các số mũ α và β trong bất đẳng thức Łojasiewicz của f trên V_1 xuất hiện từ hai bất đẳng thức:

- Tồn tại $c > 0$ và $\delta > 0$ đủ nhỏ sao cho
$$|f(x)| \geq c dist(x, f^{-1}(0))^{\alpha} \tag{3.3}$$
với mọi $x \in V_1, |f(x)| < \delta$.

- Tồn tại $c > 0$ và $r > 0$ đủ lớn sao cho
$$|f(x)| \geq c dist(x, f^{-1}(0))^{\beta} \tag{3.4}$$
với mọi $x \in V_1, |f(x)| \geq r$.

Ký hiệu

- $\mathcal{L}_0(V_1)$ là inf của tất cả các số $\alpha > 0$ để bất đẳng thức (3.3) đúng.
- $\mathcal{L}_\infty(V_1)$ là sup của tất cả các số $\beta > 0$ để bất đẳng thức (3.4) đúng.

Các số $\mathcal{L}_0(V_1)$ và $\mathcal{L}_\infty(V_1)$ được gọi tương ứng là *số mũ Łojasiewicz gần tập $f^{-1}(0)$* và *số mũ Łojasiewicz xa tập $f^{-1}(0)$* của f trên V_1.

3.2 Bất đẳng thức Łojasiewicz toàn cục

Định lý 3.2.1. *Giả sử V_1 là tập rỗng hoặc $V_1 \subset f^{-1}(0)$. Khi đó, tồn tại hằng số $c > 0$ sao cho*

$$|f(x)| \geq c dist(x, f^{-1}(0))^d, \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}^n.$$

Nhận xét: Định lý trên là hệ quả trực tiếp của Định lý 2.1 trong [HNS].

Bổ đề sau đây là công cụ kỹ thuật chủ yếu của Chương 3 và Chương 4. Chứng minh của nó dựa trên Bổ đề Van der Corput - một kết quả kinh điển trong Lý thuyết số giải tích.

Bổ đề 3.2.2. *Cho $f(x)$ là đa thức dạng (3.2) và điểm $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, $x \notin f^{-1}(0) \cup V_1$. Khi đó, tồn tại điểm $x^* = (x', x_n^*) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện sau*

(i) $x^* \in f^{-1}(0) \cup V_1$;

(ii) $|f(x^*)| \leq |f(x)|$;

(iii) $\| x - x^* \| \leq (2e)[|a_0|d!(d+1)!]^{\frac{1}{d}} |f(x)|^{\frac{1}{d}}$, *trong đó* $e = \lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

Định lý 3.2.3. (Bất đẳng thức Łojasiewicz toàn cục)
Các phát biểu sau là tương đương

(i) Không tồn tại các dãy loại một và loại hai của f trên $\mathbb{R}^n$;

(ii) Tồn tại các hằng số $c > 0, \alpha > 0$ và $\beta > 0$ sao cho

$$|f(x)| \geq c \min\{dist(x, f^{-1}(0))^\alpha, dist(x, f^{-1}(0))^\beta\},$$

với mọi $x \in \mathbb{R}^n$;

(iii) Không tồn tại các dãy loại một và loại hai của f trên V_1;

(iv) Các khẳng định sau là đúng

(a) Nếu $f_* > 0$ và hàm $dist(x, f^{-1}(0))$ bị chặn trên V_1, khi đó tồn tại hằng số $c > 0$ sao cho

$$|f(x)| \geq c dist(x, f^{-1}(0))^d, \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}^n;$$

(b) Nếu $f_* > 0$ và hàm $dist(x, f^{-1}(0))$ không bị chặn trên V_1, khi đó tồn tại hằng số $c > 0$ sao cho

$$|f(x)| \geq c \min\{dist(x, f^{-1}(0))^{\mathcal{L}_\infty(V_1)}, dist(x, f^{-1}(0))^d\},$$

với mọi $x \in \mathbb{R}^n$;

(c) Nếu $f_* = 0$ và hàm $dist(x, f^{-1}(0))$ bị chặn trên V_1, khi đó tồn tại hằng số $c > 0$ sao cho

$$|f(x)| \geq c \min\{dist(x, f^{-1}(0))^{\mathcal{L}_0(V_1)}, dist(x, f^{-1}(0))^d\},$$

với mọi $x \in \mathbb{R}^n$;

(d) *Nếu $f_* = 0$ và hàm $dist(x, f^{-1}(0))$ không bị chặn trên V_1, khi đó tồn tại hằng số $c > 0$ sao cho*

$$|f(x)| \geq c \min\{dist(x, f^{-1}(0))^{\mathcal{L}_0(V_1)}, dist(x, f^{-1}(0))^{\mathcal{L}_\infty(V_1)}, dist(x, f^{-1}(0))^d\},$$

với mọi $x \in \mathbb{R}^n$.

Bổ đề 3.2.4. *Giả sử tồn tại các hằng số $c_0 > 0$ và $\rho_1 > 0, \ldots, \rho_s > 0$ sao cho*

$$|f(x)| \geq c_0 \min\{dist(x, f^{-1}(0))^{\rho_i}, i = 1, \ldots, s\}, \tag{3.5}$$

với mọi $x \in V_1$. Khi đó, tồn tại hằng số $c > 0$ sao cho

$$|f(x)| \geq c \min\{dist(x, f^{-1}(0))^{\rho_i}, dist(x, f^{-1}(0))^d, i = 1, \ldots, s\}, \tag{3.6}$$

với mọi $x \in \mathbb{R}^n$.

3.3 Số mũ của bất đẳng thức Łojasiewicz

Ký hiệu

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_0(f) \ &:= \ \inf\{\alpha > 0 : \exists c > 0, \delta > 0 \text{ sao cho} \\
&\quad\ |f(x)| \geq c dist(x, f^{-1}(0))^\alpha, \forall x \in \mathbb{R}^n, |f(x)| < \delta\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\infty(f) \ &:= \ \sup\{\beta > 0 : \exists c > 0, r > 0 \text{ sao cho} \\
&\quad\ |f(x)| \geq c dist(x, f^{-1}(0))^\beta, \forall x \in \mathbb{R}^n, |f(x)| \geq r\}.
\end{aligned}$$

Định nghĩa 3.3.1. ([Ha1]). Các số $\mathcal{L}_0(f)$ và $\mathcal{L}_\infty(f)$ được gọi tương ứng là *số mũ Łojasiewicz gần tập* $f^{-1}(0)$ và *số mũ Łojasiewicz xa tập* $f^{-1}(0)$ của f.

Đặt

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &:= \{x \in \mathbb{R}^n : dist(x, f^{-1}(0)) < 1\}, \\
\Omega_2 &:= \{x \in \mathbb{R}^n : dist(x, f^{-1}(0)) \geq 1\}.
\end{aligned}$$

Đặt

$$\mathcal{L}(f, \Omega_1) := \inf\{\rho > 0 : \exists c > 0, |f(x)| \geq c dist(x, f^{-1}(0))^\rho, \forall x \in \Omega_1\},$$

$$\mathcal{L}(f, \Omega_2) := \sup\{\rho > 0 : \exists c > 0, |f(x)| \geq c dist(x, f^{-1}(0))^\rho, \forall x \in \Omega_2\}.$$

Mệnh đề 3.3.2. *Giả sử f không có các dãy loại một và dãy loại hai. Khi đó*

i) $\mathcal{L}_0(f) = \mathcal{L}(f, \Omega_1)$;

ii) $\mathcal{L}_\infty(f) = \mathcal{L}(f, \Omega_2)$.

Bổ đề 3.3.3. *Ta có*

(i) $\mathcal{L}_\infty(f) \leq \min\{\mathcal{L}_\infty(V_1), d\}$;

(ii) $\mathcal{L}_0(f) \geq \mathcal{L}_0(V_1)$.

Bây giờ xét các trường hợp $(a) - (d)$ như trong (iv) của Định lý 3.2.3.

Mệnh đề 3.3.4. *Giả sử f không có các dãy loại một và loại hai trên V_1, khi đó các khẳng định sau luôn đúng:*
Trường hợp (a): Nếu $f_* > 0$ và hàm $dist(x, f^{-1}(0))$ bị chặn trên V_1 ta có

$$\mathcal{L}_0(V_1) \leq \mathcal{L}_0(f) \leq d \text{ và } \mathcal{L}_\infty(f) = d;$$

Trường hợp (b): Nếu $f_* > 0$ và hàm $dist(x, f^{-1}(0))$ không bị chặn trên V_1 ta có

$$\mathcal{L}_0(V_1) \leq \mathcal{L}_0(f) \leq \max\{\mathcal{L}_\infty(V_1), d\} \text{ và } \mathcal{L}_\infty(f) = \min\{\mathcal{L}_\infty(V_1), d\};$$

Trường hợp (c): Nếu $f_* = 0$ và hàm $dist(x, f^{-1}(0))$ bị chặn trên V_1 ta có

(i) Nếu $\mathcal{L}_0(V_1) \geq d$ thì $\mathcal{L}_\infty(f) = d$ và $\mathcal{L}_0(f) = \mathcal{L}_0(V_1)$.

(ii) Nếu $\mathcal{L}_0(V_1) < d$ thì $\mathcal{L}_0(V_1) \leq \mathcal{L}_0(f) \leq d$ và $\mathcal{L}_0(V_1) \leq \mathcal{L}_\infty(f) \leq d$.

Trường hợp (d):Nếu $f_* = 0$ và hàm $dist(x, f^{-1}(0))$ không bị chặn trên V_1 ta có

(i) Nếu $\mathcal{L}_0(V_1) \leq \min\{\mathcal{L}_\infty(V_1), d\}$ thì

$$\mathcal{L}_0(V_1) \leq \mathcal{L}_0(f) \leq \max\{\mathcal{L}_\infty(V_1), d\} \text{ và } \mathcal{L}_0(V_1) \leq \mathcal{L}_\infty(f) \leq \min\{\mathcal{L}_\infty(V_1), d\}.$$

(ii) Nếu $\min\{\mathcal{L}_\infty(V_1), d\} \leq \mathcal{L}_0(V_1) \leq \max\{\mathcal{L}_\infty(V_1), d\}$ thì

$$\mathcal{L}_0(V_1) \leq \mathcal{L}_0(f) \leq \max\{\mathcal{L}_\infty(V_1), d\} \text{ và } \mathcal{L}_\infty(f) = \min\{\mathcal{L}_\infty(V_1), d\}.$$

(iii) Nếu $\mathcal{L}_0(V_1) \geq \max\{\mathcal{L}_\infty(V_1), d\}$ thì

$$\mathcal{L}_0(f) = \mathcal{L}_0(V_1) \text{ và } \mathcal{L}_\infty(f) = \min\{\mathcal{L}_\infty(V_1), d\}.$$

Chương 4

Bất đẳng thức Łojasiewicz của hàm đa thức trên $\mathbb{R}^2$

Tiếp theo chương 3, trong chương này chúng tôi nghiên cứu bất đẳng thức Łojasiewicz trong trường hợp f là đa thức hai biến. Trước hết, chúng tôi đưa ra một phương pháp để kiểm tra sự tồn tại bất đẳng thức Łojasiewicz, sau đó tính toán số mũ Łojasiewicz thông qua khai triển Puiseux của f và $\frac{\partial f}{\partial y}$. Đặc biệt, chúng tôi nghiên cứu bất đẳng thức Łojasiewicz trong trường hợp f là không suy biến tại vô hạn theo lược đồ Newton của nó. Nội dung còn lại của chương có thể được giới thiệu một cách vắn tắt như sau: Trong [Ho], Hörmander đã chứng minh rằng, nếu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là một đa thức, khi đó tồn tại các hằng số $c > 0$ và $\mu > 0, \mu' > 0, \mu'' > 0$ sao cho

$$|f(x)| \geq c dist(x, f^{-1}(0))^{\mu}, \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}^n, \|x\| < 1;$$

và

$$(1 + \|x\|)^{\mu'} |f(x)| \geq c dist(x, f^{-1}(0))^{\mu''}, \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \geq 1.$$

Rõ ràng, μ chính là số mũ Łojasiewicz của f trong miền $\|x\| < 1$, và nhân tử bên trái $(1 + \|x\|)^{\mu'}$ của bất đẳng thức thứ hai là cần thiết để kiểm soát dáng điệu của hàm khoảng cách $dist(x, f^{-1}(0))$ khi $\|x\|$ đủ lớn. Chúng tôi sẽ đưa ra một kết quả của bất đẳng thức trên, trong đó giá trị số mũ μ' được cho với một giá trị cụ thể khi $n = 2$.

Nội dung của Chương này được viết chủ yếu dựa trên các Mục 5, 6, 7 và một phần của Mục 3 của bài báo **Huy Vui Ha and Van Doat Dang,** *On the Global Łojasiewicz inequality for polynomial functions. (34 pp)*(accepted for publication in Annales Polonici Mathematici.)

4.1 Kiểm tra sự tồn tại bất đẳng thức Łojasiewicz

4.1.1 Khai triển Puiseux

Xét $f(x, y)$ là đa thức hai biến bậc d có dạng

$$f(x, y) = a_0 y^d + a_1(x) y^{d-1} + \cdots + a_d(x). \tag{4.1}$$

Khi đó, theo định lý Puiseux [GV], f được phân tích thành

$$f(x, y) = a_0 \prod_{j=1}^{d} (y - \lambda_j(x)),$$

trong đó

$$\lambda_j(x) = \sum_{-\infty}^{k_j} a_{jk} x^{\frac{k}{p}}, \tag{4.2}$$

khi $|x| \gg 1$, với k_j, p là các số nguyên.

Định nghĩa 4.1.1. Mỗi hàm $\lambda_j(x)$ xác định như trong (4.2) được gọi là *chuỗi Puiseux tại vô hạn của* f hoặc *nghiệm Puiseux tại vô hạn của* f. Nghiệm Puiseux $\lambda_j(x)$ tại vô hạn của f được gọi là *thực* nếu tất cả các hệ số a_{jk} là số thực.

Để xét quỹ tích thực của $f(x,y) = 0$ với $x < 0$, ta lấy nghiệm thực Puiseux tại vô hạn của $\overline{f}(x,y) := f(-x,y)$.

Giả sử $x > 0$, kí hiệu tập các nghiệm Puiseux tại vô hạn của f và của $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ lần lượt là $\mathcal{P}(f) = \{\lambda_1(x), \ldots, \lambda_d(x)\}$ và $\mathcal{P}(\dfrac{\partial f}{\partial y}) = \{\overline{\lambda_1}(x), \ldots, \overline{\lambda_{d-1}}(x)\}$.

Với $g \in \{f, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \overline{f}, \dfrac{\partial \overline{f}}{\partial y}\}$, kí hiệu $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}(g)$ là tập tất cả các nghiệm Puiseux thực tại vô hạn của g.

Xét ψ là chuỗi lũy thừa hữu tỉ và có dạng $\psi(x) = b_0 x^\rho + o(x^\rho), |x| \gg 1$, với $b_0 \neq 0$. Khi đó, số mũ ρ được gọi là *bậc của* ψ *tại vô hạn* và ta kí hiệu bởi $v(\psi(x))$.

4.1.2 Phương pháp kiểm tra

Theo định lý 3.2.3, để kiểm tra sự tồn tại của bất đẳng thức Łojasiewicz toàn cục, ta phải kiểm tra rằng các dãy loại một và loại hai của f trên V_1 là không tồn tại.

Mệnh đề 4.1.2. *Hai khẳng định sau là tương đương*

(i) Không tồn tại các dãy loại một (x^k, y^k) *của* f *trên* $V_1 \cap \{x > 0\}$;

(ii) Không tồn tại $\overline{\lambda}(x) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\dfrac{\partial f}{\partial y})$ *sao cho*

$$v(f(x, \overline{\lambda}(x))) < 0 \text{ và } \min_{\lambda \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(f)} v(\overline{\lambda}(x) - \lambda(x)) \geq 0.$$

Mệnh đề 4.1.3. *Hai khẳng định sau là tương đương*

(i) Không tồn tại các dãy loại hai (x^k, y^k) *của* f *trên* $V_1 \cap \{x > 0\}$;

(ii) Không tồn tại $\overline{\lambda}(x) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\dfrac{\partial f}{\partial y})$ *sao cho*

$$v(f(x, \overline{\lambda}(x))) \leq 0 \text{ và } \min_{\lambda \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(f)} v(\overline{\lambda}(x) - \lambda(x)) > 0.$$

Mệnh đề 4.1.4. *Hai khẳng định sau là tương đương*

(i) $f_* = \inf_{(x,y) \in V_1} |f(x,y)| > 0$;

(ii) $f^{-1}(0) \cap \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{-1}(0) = \emptyset$ *và không tồn tại* $\overline{\lambda}(x) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\frac{\partial f}{\partial y}) \cup \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\frac{\partial \overline{f}}{\partial y})$ *sao cho:*

$$v(f(x, \overline{\lambda}(x)) < 0 \text{ nếu } \overline{\lambda}(x) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\frac{\partial f}{\partial y});$$

$$v(\overline{f}(x, \overline{\lambda}(x)) < 0 \text{ nếu } \overline{\lambda}(x) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\frac{\partial \overline{f}}{\partial y}).$$

Mệnh đề 4.1.5. *Hai khẳng định sau là tương đương*

(i) Hàm $dist(x, f^{-1}(0))$ *không bị chặn trên tập* V_1;

(ii) Tồn tại $\overline{\lambda}(x) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\frac{\partial f}{\partial y}) \cup \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\frac{\partial \overline{f}}{\partial y})$ *sao cho*

$$\min_{\lambda(x) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(f)} \{v(\overline{\lambda}(x) - \lambda(x))\} > 0 \text{ nếu } \overline{\lambda}(x) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\frac{\partial f}{\partial y});$$

$$\min_{\lambda(x) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\overline{f})} \{v(\overline{\lambda}(x) - \lambda(x))\} > 0 \text{ nếu } \overline{\lambda}(x) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\frac{\partial \overline{f}}{\partial y}).$$

Tương tự, thay thế $f(x, y), \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(f)$ và $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\frac{\partial f}{\partial y})$ tương ứng bởi $\overline{f}(x, y) = f(-x, y)$, $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\overline{f})$ và $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\frac{\partial \overline{f}}{\partial y})$ trong các Mệnh đề 4.1.2 và 4.1.3, ta thu được tiêu chuẩn cho việc không tồn tại các dãy loại một và loại hai (x^k, y^k) của f trên $V_1 \cap \{x < 0\}$.

Bổ đề 4.1.6. *Cho* $\overline{\lambda}(x) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\frac{\partial f}{\partial y})$ *và* $\lambda(x) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(f)$. *Đặt*

$$V_\lambda \colon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = \lambda(x)\}.$$

Khi đó $dist((x, \overline{\lambda}(x)), V_\lambda) \asymp x^{v(\lambda(x) - \overline{\lambda}(x))}$ *khi* $x \gg 1$.
Tức là, tồn tại các hằng số $c_1 > 0$ *và* $c_2 > 0$ *sao cho các bất đẳng thức sau luôn đúng*

$$c_1 x^{v(\lambda(x) - \overline{\lambda}(x))} \leq dist((x, \overline{\lambda}(x)), V_\lambda) \leq c_2 x^{v(\lambda(x) - \overline{\lambda}(x))}, \quad \text{khi } x \gg 1.$$

4.2 Tính số mũ Łojasiewicz

4.2.1 Tính số mũ $\mathcal{L}_0(V_1)$

Đặt

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{0,\infty}(V_1) \ &: = \ \inf\{\rho > 0 : \exists c, \delta, r > 0 \text{ sao cho} \\
&\qquad |f(x, y)| \geq c dist((x, y), f^{-1}(0))^\rho, \forall (x, y) \in V_1, |x| > r, |f(x, y)| < \delta\}; \\
\mathcal{L}_{0,0}(V_1) \ &: = \ \inf\{\rho > 0 : \exists c, \delta, r > 0 \text{ sao cho} \\
&\qquad |f(x, y)| \geq c dist((x, y), f^{-1}(0))^\rho \forall (x, y) \in V_1, |x| \leq r, |f(x, y)| < \delta\}.
\end{aligned}$$

Khi đó

$$\mathcal{L}_0(V_1) = \max\{\mathcal{L}_{0,\infty}(V_1), \mathcal{L}_{0,0}(V_1)\}.$$

Mệnh đề 4.2.1. *Nếu không có các dãy loại một của f trên V_1 thì các số $\mathcal{L}_{0,\infty}(V_1)$, $\mathcal{L}_{0,0}(V_1)$ được tính toán thông qua khai triển Puiseux của f và $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.*

4.2.2 Tính số mũ $\mathcal{L}_\infty(V_1)$

Đặt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^+_\infty(V_1) &:= \min\{\mathcal{L}^+_\infty(\overline{\lambda}) : \overline{\lambda} \in \mathcal{P}_\mathbb{R}(\frac{\partial f}{\partial y}), v(f(x,\overline{\lambda}(x)) > 0\};\\ \mathcal{L}^-_\infty(V_1) &:= \min\{\mathcal{L}^-_\infty(\overline{\lambda}) : \overline{\lambda} \in \mathcal{P}_\mathbb{R}(\frac{\partial \overline{f}}{\partial y}), v(\overline{f}(x,\overline{\lambda}(x)) > 0\}.\end{aligned}$$

Mệnh đề 4.2.2. *Nếu không có dãy loại hai của f trên V_1 thì $\mathcal{L}_\infty(V_1) > 0$ và*

$$\mathcal{L}_\infty(V_1) = \min\{\mathcal{L}^+_\infty(V_1), \mathcal{L}^-_\infty(V_1)\}.$$

4.2.3 Tính số mũ $\mathcal{L}_0(f)$

Đặt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0(f) &:= \inf\{\rho > 0 : \exists c > 0, \delta > 0 \text{ sao cho}\\ &\quad |f(x,y)| \geq c\,dist((x,y), f^{-1}(0))^\rho, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |f(x,y)| \leq \delta\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{0,\infty}(f) &:= \inf\{\rho > 0 : \exists c > 0, \delta > 0, r > 0 \text{ sao cho}\\ &\quad |f(x,y)| \geq c\,dist((x,y), f^{-1}(0))^\rho, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |x| > r, |f(x,y)| \leq \delta\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{0,0}(f) &:= \inf\{\rho > 0 : \exists c > 0, \delta > 0, r > 0 \text{ sao cho}\\ &\quad |f(x,y)| \geq c\,dist((x,y), f^{-1}(0))^\rho, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |x| \leq r, |f(x,y)| \leq \delta\}.\end{aligned}$$

Khi đó

$$\mathcal{L}_0(f) = \max\{\mathcal{L}_{0,\infty}(f), \mathcal{L}_{0,0}(f)\}.$$

Việc tính số mũ $\mathcal{L}_{0,0}(f)$ được dựa trên công việc của Kuo [Ku] và số mũ $\mathcal{L}_{0,\infty}(f)$ đã tính trong [HD].

4.2.4 Tính số mũ $\mathcal{L}_\infty(f)$

Lấy $\lambda_i(x) \in \mathcal{P}(f) \setminus \mathcal{P}_\mathbb{R}(f)$

$$\lambda_i(x) = a_1 x^{\alpha_1} + \cdots + a_{s-1}x^{\alpha_{s-1}} + a_s x^{\alpha_s} + \cdots$$

trong đó $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots$ và $a_s \in \mathbb{C}$.
Giả sử $a_1, a_2, \ldots, a_{s-1} \in \mathbb{R}$ và $a_s \notin \mathbb{R}$, khi đó các chuỗi

$$\lambda_i^\mathbb{R}(x) := a_1 x^{\alpha_1} + \cdots + a_{s-1}x^{\alpha_{s-1}} + c x^{\alpha_s},$$

trong đó $c \notin \mathbb{R}$ và c là "generic" được gọi là *xấp xỉ thực của* $\lambda_i(x)$.

Lấy $\lambda_i(x), \lambda_j(x) \in \mathcal{P}(f) \setminus \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(f)$ và ký hiệu

$$\rho_{ij} = v(\lambda_i^{\mathbb{R}}(x) - \lambda_j^{\mathbb{R}}(x)).$$

Xét

$$\lambda_i^{\mathbb{R}}(x) = a_1 x^{\alpha_1} + \cdots + a_{t-1} x^{\alpha_{t-1}} + a x^{\rho_{ij}} + o(x^{\rho_{ij}}),$$
$$\lambda_j^{\mathbb{R}}(x) = a_1 x^{\alpha_1} + \cdots + a_{t-1} x^{\alpha_{t-1}} + b x^{\rho_{ij}} + o(x^{\rho_{ij}}).$$

Đặt

$$\lambda_{ij}^{\mathbb{R}}(x) = a_1 x^{\alpha_1} + \cdots + a_{t-1} x^{\alpha_{t-1}} + c x^{\rho_{ij}},$$

trong đó c là "generic". Đặt

$$D(\lambda_{ij}^{\mathbb{R}}) \colon = \begin{cases} 1 \qquad , & \text{nếu } \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(f) = \emptyset \\ \min_{\lambda \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(f)} v(\lambda(x) - \lambda_{ij}^{\mathbb{R}}(x)), & \text{nếu } \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(f) \neq \emptyset \end{cases},$$

và $L(\lambda_{ij}^{\mathbb{R}}) \colon = \dfrac{v(f(x, \lambda_{ij}^{\mathbb{R}}(x)))}{D(\lambda_{ij}^{\mathbb{R}})}.$

Mệnh đề 4.2.3. *Nếu f không có các dãy loại một và loại hai thì*

$$\mathcal{L}_\infty(f) = \min\{L(\lambda_{ij}^{\mathbb{R}}) : D(\lambda_{ij}^{\mathbb{R}}) > 0\},$$

trong đó λ_i và λ_j là các nghiệm Puiseux tại vô hạn của f và $\overline{f}$, và λ_i, $\lambda_j \in \mathcal{P}(f) \setminus \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(f)$ hoặc $\lambda_i, \lambda_j \in \mathcal{P}(\overline{f}) \setminus \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\overline{f})$.

4.3 Đa thức không suy biến tại vô hạn

Xét $f(x, y)$ là đa thức hai biến bậc d có dạng

$$f(x, y) = a_0 y^d + a_1(x) y^{d-1} + \cdots + a_d(x) = \sum_{i+j \le d} c_{ij} x^i y^j.$$

Đặt $\mathrm{supp}(f) \colon = \{(i, j) : c_{ij} \neq 0\}$, và gọi là *giá của f* và $\Gamma(f) = co(\mathrm{supp}(f))$ là *bao lồi của* $\mathrm{supp}(f)$.

Định nghĩa 4.3.1. $\Gamma(f)$ gọi là *đa giác Newton của f.*

Ký hiệu $\partial\Gamma(f)$ là biên của $\Gamma(f)$ và σ_* là cạnh của $\partial\Gamma(f)$ mà gần đường thẳng $L := \{(i, j) \in \mathbb{R}^2 : i + j = d\}$ nhất.

Ký hiệu (a_{**}, b_{**}) là đỉnh của $\Gamma(f)$ sao cho $b_{**} = \min\{b : \exists a \text{ sao cho } (a, b) \in \Gamma(f)\}$.

Xét $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{k-1}, \sigma_k$ là dãy các cạnh của $\partial\Gamma(f)$ sao cho $\sigma_1 = \sigma_*$, $(a_{**}, b_{**}) \in \sigma_k$ và $\sigma_i \cap \sigma_{i+1} \neq \emptyset, \quad i = 1, \ldots, k-1$.

Đặt $\partial_\infty\Gamma(f) = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{k-1}, \sigma_k\}$.

Định nghĩa 4.3.2. Tập $\partial_\infty\Gamma(f)$ được gọi là *phần chính Newton tại vô hạn của f.*

Với mỗi $\sigma \in \partial_\infty\Gamma(f)$, đặt $f_\sigma(x, y) = \sum_{(i,j)\in\sigma} a_{ij} x^i y^j$.

Định nghĩa 4.3.3. Đa thức f gọi là *không suy biến theo phần chính Newton tại vô hạn của f (viết tắt, f không suy biến tại vô hạn)* nếu với mọi $\sigma \in \partial_\infty \Gamma(f)$, hệ $\dfrac{\partial f_\sigma}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f_\sigma}{\partial y}(x,y) = 0$ không có nghiệm trong $(\mathbb{R} \setminus 0)^2$.

Với mỗi $\sigma = [(a_1,b_1),(a_2,b_2)]$, trong đó $b_1 > b_2$, đặt $d(\sigma) = b_1 - b_2$ và $v(\sigma) = \dfrac{a_2 - a_1}{b_1 - b_2}$.

Bổ đề 4.3.4. *Các phát biểu sau luôn đúng*

(i) $d = d(\sigma_1) + \cdots + d(\sigma_k) + b_{**}$;

(ii) $1 \geq v(\sigma_1) > v(\sigma_2) > \cdots > v(\sigma_k)$;

(iii) $y = 0$ *là nghiệm Puiseux tại vô hạn của* f*, với bội* b_{**};

(iv) Với mỗi $i \in \{1,2,\ldots,k\}$*, tồn tại chính xác* $d(\sigma_i)$ *nghiệm Puiseux tại vô hạn (đếm cả bội), mỗi nghiệm có dạng* $y(x) = cx^{v(\sigma_i)} + o(x^{v(\sigma_i)})$*, trong đó* c *là nghiệm khác không của đa thức* $h_{\sigma_i}(u) := f_{\sigma_i}(1,u)$;

(v) Nếu f *là không suy biến tại vô hạn, khi đó đa thức* $h_{\sigma_i}(u)$ *không có nghiệm khác không bội lớn hơn 1.*

Bổ đề 4.3.5. *Giả sử* $\partial_\infty \Gamma(f) = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k\}$*. Nếu*

$$\partial_\infty \Gamma(\frac{\partial f}{\partial y}) = \{\sigma'_1, \sigma'_2, \ldots, \sigma'_{k-1}, \sigma'_k, \sigma'_{k+1}, \cdots, \sigma'_s\},$$

thì với $i \geq k$*, ta có* $v(\sigma'_i) \leq v(\sigma_k)$.

Bổ đề 4.3.6. *Giả sử* f *là đa thức không suy biến tại vô hạn và* $\overline{\lambda}_{i_0}(x) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\dfrac{\partial f}{\partial y})$ *có dạng* $\overline{\lambda}_{i_0}(x) = cx^{v(\sigma'_{i_0})} + o(x^{v(\sigma'_{i_0})})$*. Lấy* σ_i *là cạnh của* $\partial_\infty \Gamma(f)$ *nối các điểm* (a_{i-1}, b_{i-1}) *và* $(a_i, b_i), i = 1,2,\ldots,k$*. Khi đó, các phát biểu sau luôn đúng*

(i) Nếu $i_0 \in \{1,2,\ldots,k-1\}$ *thì*

$$\begin{aligned} v(f(x,\overline{\lambda}_{i_0}(x))) &= \sum_{l=1}^{i_0} d(\sigma_l)v(\sigma_l) + \left[\sum_{m=i_0+1}^{k} d(\sigma_m)\right] v(\sigma_{i_0}) \\ &= a_{i_0} + \left[\sum_{m=i_0+1}^{k} d(\sigma_m)\right] v(\sigma_{i_0}); \end{aligned}$$

(ii) Nếu $i_0 \geq k$ *thì* $v(f(x,\overline{\lambda}_{i_0}(x))) = a_{**} + b_{**}v(\sigma'_{i_0})$.

Định lý 4.3.7. *Cho* f *là đa thức thuận tiện và không suy biến tại vô hạn, khi đó*

(i) $\lim_{(x,y)\in V_1;(x,y)\to\infty} |f(x,y)| = \infty$;

(ii) Tồn tại các hằng số dương α, β, c sao cho

$$|f((x,y))|^\alpha + |f((x,y))|^\beta \geq c\,dist((x,y), f^{-1}(0)),$$

với mọi $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Định lý 4.3.8. *Cho đa thức f là thuận tiện và không suy biến tại vô hạn, khi đó các số $\mathcal{L}_{0,\infty}(V_1), \mathcal{L}_\infty(V_1)$, $\mathcal{L}_{0,\infty}(f)$ và $\mathcal{L}_\infty(f)$ được biểu diễn thông qua phần chính Newton tại vô hạn của f.*

4.4 Một dạng bất đẳng thức Hörmander

Với ký hiệu như các mục 4.1; 4.2; 4.3. Giả sử tập $\mathcal{P}^*$ dưới đây là khác rỗng

$$\mathcal{P}^* := \mathcal{P}_0^*(\frac{\partial f}{\partial y}) \cup \mathcal{P}_\infty^*(\frac{\partial f}{\partial y}) \cup \mathcal{P}_0^*(\frac{\partial \overline{f}}{\partial y}) \cup \mathcal{P}_\infty^*(\frac{\partial \overline{f}}{\partial y}),$$

trong đó $\overline{f}(x,y) = f(-x,y)$;

$$\mathcal{P}_0^*(\frac{\partial f}{\partial y}) := \{\overline{\lambda} \in \mathcal{P}_\mathbb{R}(\frac{\partial f}{\partial y}) : \ v(f(x,\overline{\lambda}(x))) < 0 \text{ và } \min_{\lambda \in \mathcal{P}_\mathbb{R}(f)} v(\overline{\lambda}(x) - \lambda(x)) \geq 0\};$$

$$\mathcal{P}_\infty^*(\frac{\partial f}{\partial y}) := \{\overline{\lambda} \in \mathcal{P}_\mathbb{R}(\frac{\partial f}{\partial y}) : \ v(f(x,\overline{\lambda}(x))) \leq 0 \text{ và } \min_{\lambda \in \mathcal{P}_\mathbb{R}(f)} v(\overline{\lambda}(x) - \lambda(x)) > 0\};$$

$$\mathcal{P}_0^*(\frac{\partial \overline{f}}{\partial y}) := \{\overline{\lambda} \in \mathcal{P}_\mathbb{R}(\frac{\partial \overline{f}}{\partial y}) : \ v(\overline{f}(x,\overline{\lambda}(x))) < 0 \text{ và } \min_{\lambda \in \mathcal{P}_\mathbb{R}(\overline{f})} v(\overline{\lambda}(x) - \lambda(x)) \geq 0\};$$

$$\mathcal{P}_\infty^*(\frac{\partial \overline{f}}{\partial y}) := \{\overline{\lambda} \in \mathcal{P}_\mathbb{R}(\frac{\partial \overline{f}}{\partial y}) : \ v(\overline{f}(x,\overline{\lambda}(x))) \leq 0 \text{ và } \min_{\lambda \in \mathcal{P}_\mathbb{R}(\overline{f})} v(\overline{\lambda}(x) - \lambda(x)) > 0\}.$$

Lấy $\overline{\lambda} \in \mathcal{P}^*$, đặt

$$\theta(\overline{\lambda}) := \begin{cases} v(f(x,\overline{\lambda}(x))) & \text{nếu } \overline{\lambda} \in \mathcal{P}_0^*(\frac{\partial f}{\partial y}) \cup \mathcal{P}_\infty^*(\frac{\partial f}{\partial y}) \\ v(\overline{f}(x,\overline{\lambda}(x))) & \text{nếu } \overline{\lambda} \in \mathcal{P}_0^*(\frac{\partial \overline{f}}{\partial y}) \cup \mathcal{P}_\infty^*(\frac{\partial \overline{f}}{\partial y}), \end{cases}$$

$$D(\overline{\lambda}) := \begin{cases} 1 & \text{nếu } \overline{\lambda} \in \mathcal{P}_\mathbb{R}(\frac{\partial f}{\partial y}) \text{ và } \mathcal{P}_\mathcal{R}(f) = \emptyset \\ \min_{\lambda \in \mathcal{P}_\mathbb{R}(f)} \{v(\overline{\lambda}(x) - \lambda(x))\} & \text{nếu } \overline{\lambda} \in \mathcal{P}_\mathbb{R}(\frac{\partial f}{\partial y}) \text{ và } \mathcal{P}_\mathcal{R}(f) \neq \emptyset \\ 1 & \text{nếu } \overline{\lambda} \in \mathcal{P}_\mathbb{R}(\frac{\partial \overline{f}}{\partial y}) \text{ và } \mathcal{P}_\mathcal{R}(\overline{f}) = \emptyset \\ \min_{\lambda \in \mathcal{P}_\mathbb{R}(\overline{f})} \{v(\overline{\lambda}(x) - \lambda(x))\} & \text{nếu } \overline{\lambda} \in \mathcal{P}_\mathbb{R}(\frac{\partial \overline{f}}{\partial y}) \text{ và } \mathcal{P}_\mathcal{R}(\overline{f}) \neq \emptyset. \end{cases}$$

Đặt

$$\nu(\overline{\lambda}) = D(\overline{\lambda}) - \theta(\overline{\lambda}),$$

và đặt

$$\nu(f) = \max_{\overline{\lambda} \in \mathcal{P}^*} \nu(\overline{\lambda}).$$

Rõ ràng, $\nu(f) > 0$, vì $\mathcal{P}^* \neq \emptyset$.

Định lý 4.4.1. *Cho đa thức*

$$f(x, y) = a_0 y^d + a_1(x) y^{d-1} + \cdots + a_d(x),$$

trong đó d là bậc của f. Khi đó, tồn tại $\mu > 0$ và $c > 0$ sao cho

$$|f(x, y)|^{\frac{1}{\mu}} + |f(x, y)|^{\frac{1}{d}} + (1 + |x|)^{\nu(f)} |f(x, y)| \geq c dist((x, y), f^{-1}(0)),$$

với mọi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Kết luận

Trong luận án này, chúng tôi đã thu được những kết quả sau:

1) Đưa ra một điều kiện đủ để một đa thức không âm là tổng bình phương của các đa thức (Định lý 1.0.9). Điều kiện này phát biểu thông qua đa diện Newton của đa thức.

2) Chứng minh rằng tồn tại một tập nửa đại số mở, trù mật trong không gian tất cả các đa thức có cùng một đa diện Newton cho trước, sao cho nếu một đa thức thuộc tập này mà bị chặn dưới, thì bài toán tìm infimum toàn cục của đa thức này là đặt chỉnh (Định lý 2.0.17).

3) Đưa ra một tiêu chuẩn mới của sự tồn tại bất đẳng thức Lojasiewicz toàn cục (Định lý 3.2.3). Tiêu chuẩn này cung cấp một thuật toán cho trường hợp hai biến, kiểm tra sự tồn tại của bất đẳng thức Lojasiewicz toàn cục (Mệnh đề 4.1.2, 4.1.3).

4)

- Cho một đánh giá các số mũ Lojasiewicz thông qua bậc của đa thức và các số mũ khác, dễ tính toán hơn (Mệnh đề 3.3.4).

- Trong trường hợp hai biến: tính toán một cách tường minh các số mũ Lojasiewicz (Mệnh đề 4.2.1, 4.2.2, 4.2.3); Chứng minh rằng, các số mũ Lojasiewicz của đa thức không suy biến chỉ phụ thuộc vào đa giác Newton của nó (Định lý 4.3.8); Đưa ra một dạng của một bất đẳng thức của Hormander, trong đó các số mũ xuất hiện với những giá trị cụ thể (Định lý 4.4.1).

Các công trình liên quan đến luận án

1. V. D. Dang and T. T. Nguyen, *Sufficient Conditions for a real Polynomial to be a Sum of Squares of Polynomials.* Kodai J. Math., **39**(2016), pp.253 – 275.

2. V. D. Dang, H. V. Ha and T. S. Pham, *Well-posedness in unconstrained Polynomial Optimization Problems.* SIAM J. Optim., **26**(3)(2016), pp. 1411 – 1428.

3. H. V. Ha and V. D. Dang, *On the Global Łojasiewicz inequality for polynomial functions.* (34pp)(accepted for publication in Annales Polonici Mathematici).

Các kết quả trong luận án được báo cáo

1. Xêmina tại Viện Nghiên cứu cao cấp về Toán.
2. Xêmina phòng Hình học và Tô pô - Viện Toán học.
3. Xêmina khoa Toán - Trường Đại học Đà Lạt.
4. Hội nghị Nghiên cứu sinh của Viện Toán học, 10/2014, 10/2015, 10/2016, 11/2017.
5. Hội nghị Đại số - Hình học - Tôpô, Buôn Ma Thuột, 10/2016.
6. Hội thảo Tối ưu và tính toán khoa học lần thứ 15, Ba Vì, 4/2017.
7. The 5^{th} Franco - Japanese - Vietnamese Symposium on Singularities (FJV 2017), Japan, 26/10-02/11/2017.
8. Hội nghị Toán học miền trung - Tây nguyên lần thứ 2, Đà Lạt, 12/2017.
9. Hội nghị Toán học toàn quốc lần thứ 9, Nha Trang, 14-18/08/2018.
10. The 6^{th} Franco - Japanese - Vietnamese Symposium on Singularities (FJV 2018), Nha Trang, 15-21/09/2018.

Tài liệu tham khảo

[AGV] V. I. Arnold, S. M. Gusein-Zade, A. N. Varchenko, *Singularities of differentiable maps,* Vol I and Vol II. Springer, (1988).

[BM] E. Bierstone and P.D. Milman,*Semianalytic and subanalytic set,* Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci., **67**(1988), 5-42.

[Br] W.D. Brownawell,*Bounds for the degrees in the Nullstellensatz,* Ann. of Math., **126**(1987), 577-591.

[DHT] S. T. Dinh, H. V. Ha, N. T. Thao, *Łojasiewicz inequality for polynomial function on non-compact domains,* Internat.J.Math.**23**(4), (2012), 1-28.

[DHP1] S. T. Dinh, H. V. Ha and T. S. Pham, *A Frank-Wolfe type theorem for nondegenerate polynomial programs,* Math. Program. Ser. A., **147** (1) (2014), 519-538.

[DHP2] S. T. Dinh, H. V. Ha and T. S. Pham, *Hölder-type global error bounds for non-degenerate polynomial systems,* Acta Math. Vietnam, **42**(2017), 563-585.

[DHPT] S. T. Dinh, H. V. Ha, T. S. Pham and N. T. Thao, *Global Łojasiewicz-type inequality for nondegenerate polynomial maps,* J. Math. Anal. Appl., **410** (2) (2014), 541-560.

[DKL] S. T. Dinh, K. Kurdyka, O. Le Gal, *Łojasiewicz inequality on non compact domains and singularities at infinity,* Internat.J.Math. **24**(10) (2013), 1-8.

[FK] C. Fidalgo and A. Kovacec, *Positive semidefinite diagonal minus tail forms are sum of squares,* Math. Z. **269** (2011), 629-645.

[GM1] M. Ghasemi and M. Marshall, *Lower bounds for polynomials in terms of its coefficients,* Arch. Math. **95** (2010), 343-354.

[GM2] M. Ghasemi and M. Marshall, *Lower bounds for polynomials using geometric programming,* SIAM J. Optim. **22**(2) (2012), 460-473.

[GV] S.Gindikin, L.R.Volevich, *Method of Newton's Polyhedron in the Theory of Partial Differential Equations,* Kluwer Academic Publishers (1992).

[Ha] H. V. Ha, *Nombres de Łojasiewicz et singularites à l' infini des polynômes de deux variables complexes,* C. R. Acad. Sci- Paris, Ser I Math. **311** (1990), 429-432.

[Ha1] H. V. Ha, *Global Hölderian error bound for non-degenerate polynomials,* SIAM J. Optim, **23**(2), (2013), 917-933.

[Ha2] H. V. Ha, *Computation of the Łojasiewicz exponent for a germ of a smooth function in two variables,* Studia Math., **240**, (2018), 161-176,

[HD] H. V. Ha and N. H. Duc, *Łojasiewicz inequality at infinity for polynomials in two real variables*, Math.Z., **266**(2) (2010) 243-264.

[HNS] H. V. Ha, H. V. Ngai and T. S. Pham, *A global smooth version of the classical Łojasiewicz inequality.* J. Math. Anal. Appl., **421**, (2015), 1559-1572.

[HP] H. V. Ha and T. S. Pham, *Genericity in Polynomial Optimization, (Series on Optimization and its Applications- Vol.3)*, World Scientific Publishing Europe Ltd., (2017).

[Ho] L. Hörmander, *On the division of distributions by polynomials,* Ark.Mat.,**3**, (1958), 555-568.

[ILR] A. D. Ioffe, R. E. Lucchetti and J. P. Revalski, *Almost every convex or quadratic programming problem is well posed,* Math. Oper. Res., **29**(2), (2004), 369-382.

[Kh] A. G. Khovanskii, *Newton polyhedra and toroidal varieties,* Funct. Anal. Appl., **11**, (1978), 289-296.

[Ko] A. G. Kouchnirenko, *Polyhedres de Newton et nombre de Milnor,* Invent. Math., **32**, (1976), 1-31.

[KMP] K. Kurdyka, T. Mostowski, A. Parusinski, *Proof of the gradient conjecture of R. Thom,* Ann. of Math., **152** (2000), 763-792.

[Ku] C. T. Kuo, *Computation of Łojasiewicz exponent of* $f(x,y)$, Comment. Math. Helv., **49**,(1974), 201-213.

[Kur] K. Kurdyka, *On gradient of function definable in o-minimal structures,* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **48**(1998), 769-783.

[Re1] B. Reznick, *Midpoint polytopes and the map* $x_i \to x_i^k$. In preparation.

[Re2] B. Reznick, *Forms derived from the arithmetic-geometric inequality,* Math. Ann., **383**, (1989), 431-464.

[La] M. Laurent, *Sums of squares, moment matrices and optimization over polynomials,* Springer, (2009), 157-270.

[La1] J. B. Lasserre, *Global optimization with polynomials and the problem of moments,* SIAM J. Optim., **11**, (2001), 796-817.

[La2] J. B. Lasserre, *Moments, positive polynomials and their applications*, Imperial College Press, (2009).

[La3] J. B. Lasserre, *Sufficient conditions for a real polynomial to be a sum of squares,* Arch. Math. (Basel). **89**, (2007), 390-398.

[Lo] S. Łojasiewicz, *Sur le problème de la division,* Studia Math.**18**, (1959), 87-136.

[Ma1] M. Marshall, *Positive polynomials and sums of squares,* Math. Survey Monogr. **146**, AMS, Providence, RI, (2008).

[OR] G. Oleksik and A. Rozycki *The Łojasiewicz exponent at infinity of non-negative and non-degenerate polynomials,* Preprint.

[Te] B. Teissier, *Some resonances of Łojasiewicz inequalities,* Wiad. Mat. **48**(2), (2012), 271-284.