VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

VIỆN TOÁN HỌC

ĐẶNG VĂN ĐOẠT

ỨNG DỤNG CỦA ĐA DIỆN NEWTON VÀO VIỆC NGHIÊN CỨU CÁC BẤT ĐẲNG THỨC ŁOJASIEWICZ VÀ MỘT SỐ VẤN ĐỀ CỦA LÝ THUYẾT TỐI ƯU

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - 2018

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

VIỆN TOÁN HỌC

ĐẶNG VĂN ĐOẠT

ỨNG DỤNG CỦA ĐA DIỆN NEWTON VÀO VIỆC NGHIÊN CỨU CÁC BẤT ĐẲNG THỨC ŁOJASIEWICZ VÀ MỘT SỐ VẤN ĐỀ CỦA LÝ THUYẾT TỐI ƯU

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Giải tích

Mã số: 9 46 01 02

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TSKH. Hà Huy Vui

PGS.TS. Phạm Tiến Sơn

Hà Nội - 2018

Tóm tắt

Trong nhiều vấn đề của lý thuyết kỳ dị và hình học đại số, đa diện Newton đóng vai trò rất quan trọng, nó chứa nhiều thông tin hình học, đại số, tổ hợp và giải tích của hệ phương trình đa thức. Vì vậy, với khái niệm đa diện Newton, nhiều kết quả quan trọng của lý thuyết kỳ dị, hình học đại số, lý thuyết phương trình đạo hàm riêng ... đã được thiết lập.

Trong luận án này, chúng tôi áp dụng đa diện Newton để nghiên cứu một số vấn đề của tối ưu và giải tích. Luận án đã nhận được các kết quả sau:

1) Đưa ra một điều kiện đủ để một đa thức không âm là tổng bình phương của các đa thức. Điều kiện này được phát biểu thông qua đa diện Newton của đa thức.

2) Chứng minh rằng tồn tại một tập nửa đại số mở, trù mật trong không gian tất cả các đa thức có cùng một đa diện Newton cho trước, sao cho với mỗi đa thức thuộc tập này và bị chặn dưới, bài toán tìm infimum toàn cục là đặt chỉnh.

3) Đưa ra một tiêu chuẩn của sự tồn tại bất đẳng thức Łojasiewicz toàn cục. Tiêu chuẩn này cung cấp một phương pháp cho trường hợp hai biến, kiểm tra sự tồn tại của bất đẳng thức Łojasiewicz toàn cục.

4) Cho một đánh giá các số mũ Łojasiewicz thông qua bậc của đa thức và các số mũ khác dễ tính toán hơn.

Trong trường hợp hai biến, tính toán một cách tường minh số mũ Łojasiewicz của một đa thức. Đặc biệt, khi đa thức hai biến không suy biến theo phần chính Newton tại vô hạn, chúng tôi cũng tính toán được số mũ Łojasiewicz theo phần chính Newton tại vô hạn của nó. Hơn nữa, đưa ra một dạng tường minh của bất đẳng thức kiểu Hörmander, trong đó các số mũ xuất hiện với những giá trị cụ thể.

Abstract

In many problems of singularity theory and algebraic geometry, Newton polyhedra play a very important role. Newton polyhedra contain many geometric, algebraic, combinatorial and analytic information of polynomial systems. Using Newton polyhedra, many important results of singularity theory, algebraic geometry, and differential equation theory have been established.

In this thesis, we apply Newton polyhedra to study some of problems of optimization and analysis. We obtain the following results:

1) A sufficient condition for a non-negative polynomial to be the sum of squares is given. This condition is expressed in terms of the Newton polyhedron of the polynomial.

2) Well-posedness of almost every uncontrain polynomial optimization problem is proved: exists an open and dense semialgebraic set in the space of all polynomials having the same Newton polyhedron, such that if f is a polynomial from this set and if f is bounded from below, then the problem of finding the global infimum of f is well-posed.

3) A new criterion of the existence of the global Łojasiewicz inequality is given. This criterion provides a method, for the case of two variables, examining the existence of the global Łojasiewicz inequality.

4) It is shown that the Łojasiewicz exponents of a polynomial can be estimated via the degree and some exponents, which are much easier to compute.

In the case of two variables, the Łojasiewicz exponents of an arbitrary polynomial are computed explicitly; the Łojasiewicz exponents of non-degenerate polynomials are expressed in terms of Newton polyhedra; explicite values of some exponients in one of Hörmander inequality are given.

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi dưới sự hướng dẫn của thầy Hà Huy Vui và thầy Phạm Tiến Sơn. Các kết quả viết chung với các tác giả khác đã được sự nhất trí của đồng tác giả đưa vào luận án. Các kết quả nêu trong luận án là trung thực và chưa được ai công bố trong bất kỳ một công trình nào khác.

Tác giả

Đặng Văn Đoạt

Lời cám ơn

Luận án được thực hiện và hoàn thành tại Viện Toán học - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt nam. Trước hết, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến PGS.TSKH. Hà Huy Vui, PGS.TS. Phạm Tiến Sơn, những người thầy đã tận tình hướng dẫn, dìu dắt, chỉ bảo tôi trong suốt thời gian học tập, nghiên cứu để thực hiện luận án.

Tôi xin cảm ơn Ban Giám đốc Viện Toán học, các cán bộ nghiên cứu của Viện Toán học, đặc biệt các cán bộ phòng Hình học và Tô pô, các cán bộ Trung tâm đào tạo sau Đại học - Viện Toán học, đã tạo nhiều điều kiện thuận lợi cho tôi học tập và nghiên cứu. Xin cảm ơn Quỹ Phát triển khoa học và công nghệ Quốc gia đã hỗ trợ một phần kinh phí cho tôi trong quá trình thực hiện đề tài. Tôi xin cảm ơn Viện Nghiên cứu cao cấp về Toán đã động viên, trao giải thưởng công trình của Chương trình trọng điểm quốc gia phát triển toán học giai đoạn 2010-2020 cho hai bài báo.

Tôi xin cảm ơn lãnh đạo Sở Giáo dục và Đào tạo tỉnh Lâm Đồng, lãnh đạo và tập thể giáo viên trường THPT Chuyên Thăng Long Đà Lạt đã tạo điều kiện về thời gian, hỗ trợ một phần kinh phí để tôi hoàn thành nhiệm vụ.

Tôi xin cảm ơn các bạn bè, đồng nghiệp, các bạn nghiên cứu sinh trong Viện Toán học luôn giúp đỡ, cổ vũ, động viên trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Đặc biệt, tôi cảm ơn gia đình, những người thân yêu nhất của tôi luôn luôn động viên, chia sẻ, giúp đỡ mọi mặt về vật chất và tinh thần trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu để tôi thực hiện ước mơ của mình. Quyển luận án này tôi dành tặng cho các bố mẹ, vợ và hai con trai yêu quý.

Tác giả

Đặng Văn Đoạt

Các ký hiệu sử dụng trong luận án

$\mathbb{N}$	Tập các số tự nhiên
$\mathbb{N}^*$	Tập các số tự nhiên khác 0
$\mathbb{Z}$	Tập các số nguyên
$\mathbb{Z}_+$	Tập các số nguyên không âm
$\mathbb{R}$	Tập các số thực
$\mathbb{R}_+$	Tập các số thực không âm
$\mathbb{R}^n$	Không gian Euclide thực n chiều
$\mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$	Tập các đa thức thực n biến
$\inf A$	infimum của tập hợp A
$\sup A$	supermum của tập hợp A
$\min A$	Giá trị nhỏ nhất của tập hợp A
$\max A$	Giá trị lớn nhất của tập hợp A
$\\|x\\|$	Chuẩn của véc tơ x
$dist(x, A)$	Khoảng cách Euclide từ điểm x đến tập hợp A
$\lim_{x \to a} f(x)$	Giới hạn của hàm số $f(x)$ khi x tiến tới a
$\mathrm{rank} A$	Hạng của một ma trận A
$f^d(t)$	Đạo hàm cấp d của hàm số f theo biến t
$\dfrac{\partial^d \varphi}{x_i^d}$	Đạo hàm riêng cấp d của hàm φ theo biến x_i
Γ	Đa diện
$\Gamma(f)$	Đa diện Newton của đa thức f
$\Gamma^\infty(f)$	Đa diện Newton tại vô hạn của đa thức f
$\mathcal{L}_0(V_1)$	Số mũ Łojasiewicz gần tập của hàm f trên tập V_1
$\mathcal{L}_\infty(V_1)$	Số mũ Łojasiewicz xa tập của hàm f trên tập V_1
$\mathcal{L}_0(f)$	Số mũ Łojasiewicz gần tập của hàm f trên $\mathbb{R}^n$
$\mathcal{L}_\infty(f)$	Số mũ Łojasiewicz xa tập của hàm f trên $\mathbb{R}^n$

Mục lục

Mở đầu

Đa diện Newton của một đa thức nhiều biến là bao lồi của tập các số mũ của các đơn thức xuất hiện trong đa thức với hệ số khác không.

Trong nhiều vấn đề của lý thuyết kỳ dị và hình học đại số, đa diện Newton đóng vai trò như một mở rộng của khái niệm bậc của đa thức, và chứa rất nhiều thông tin hình học, đại số, tổ hợp và giải tích của hệ phương trình đa thức. Chính vì vậy, với khái niệm đa diện Newton, nhiều kết quả quan trọng của lý thuyết kỳ dị, hình học đại số, lý thuyết phương trình đạo hàm riêng ... đã được thiết lập (xem [AGV] về các ứng dụng của đa diện Newton trong lý thuyết kỳ dị, [Ko], [Kh] về ứng dụng của đa diện Newton trong hình học đại số và [GV] về ứng dụng của đa diện Newton trong phương trình đạo hàm riêng).

Đa diện Newton được định nghĩa không chỉ cho các đa thức để nghiên cứu các vấn đề mang tính toàn cục, nó còn được xác định cho các mầm hàm giải tích để nghiên cứu các tính chất tô pô của hàm giải tích tại lân cận điểm kỳ dị. Nhiều bất biến tô pô của điểm kỳ dị như số Milnor, số mũ tiệm cận của tích phân dao động ... được tính thông qua đa diện Newton của hàm giải tích (xem [Ko] và [AGV] và danh mục các trích dẫn ở các tài liệu này).

Bản luận án sử dụng khái niệm đa diện Newton để nghiên cứu các vấn đề sau đây:

1) Tìm điều kiện để một đa thức n biến thực không âm trên toàn bộ $\mathbb{R}^n$, biểu diễn được dưới dạng tổng bình phương của các đa thức;

2) Nghiên cứu tính đặt chỉnh của bài toán tối ưu đa thức không ràng buộc;

3) Nghiên cứu điều kiện tồn tại bất đẳng thức Łojasiewicz toàn cục

của một đa thức n biến thực và tính toán các số mũ Łojasiewicz cho trường hợp $n = 2$.

Các vấn đề 1) và 2) đang là những vấn đề thời sự của Tối ưu Đa thức. Các bất đẳng thức Łojasiewicz toàn cục (đối tượng nghiên cứu của vấn đề 3)) được nghiên cứu lần đầu tiên trong công trình của [DHT] và đang được phát triển theo nhiều khía cạnh khác nhau, cả về mặt lý thuyết [HNS], [DKL], [OR], lẫn ứng dụng [Ha2], [DHP2].

Bằng việc sử dụng đa diện Newton, luận án đã đưa ra một cách tiếp cận hữu hiệu để nghiên cứu các vấn đề trên, và đạt được những vấn đề mới mẻ.

Luận án gồm 4 chương. Trong Chương 1, đa diện Newton được sử dụng để cho một điều kiện đủ để một đa thức là tổng bình phương của các đa thức khác. Kết quả này mở rộng một cách đáng kể một kết quả gần đây của J.B.Lasserre.

Trong chương 2, sử dụng đa diện Newton và tính không suy biến của một đa thức đối với đa diện Newton của A.G.Kouchnirenko [Ko], chúng tôi chứng minh được rằng, trong không gian tất cả các đa thức có đa diện Newton là tập con của một đa diện Γ cho trước, tồn tại một tập nửa đại số $\mathcal{U}_\Gamma$, mở và trù mật, sao cho nếu f là một đa thức bị chặn dưới và $f \in \mathcal{U}_\Gamma$ thì bài toán

$$\text{Tính} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

là đặt chỉnh theo nghĩa của Zolezzi.

Các Chương 3 và 4 nghiên cứu bất đẳng thức Łojasiewicz toàn cục của một đa thức.

Trong Chương 3, chúng tôi đưa ra một tiêu chuẩn mới của sự tồn tại bất đẳng thức Łojasiewicz toàn cục. Khác với tiêu chuẩn đã biết [DHT], ở đây, việc kiểm tra trong $\mathbb{R}^n$ sự tồn tại của bất đẳng thức Łojasiewicz toàn cục được đưa về việc kiểm tra sự tồn tại của nó trên một tập con đại số, xác định một cách đơn giản và tự nhiên. Tiêu chuẩn mới này mở đường cho việc ứng dụng các kết quả cổ điển về đa diện Newton (thuật toán tìm khai triển Newton-Puiseux của các đường cong đại số) và các kết quả tương đối gần đây (điều kiện không suy biến đối với đa diện Newton của A.G.Kouchnirenko) để tính toán, đánh giá số mũ Łojasiewicz.

Chương 4 xét trường hợp $n = 2$. Ở đây, các số mũ Łojasiewicz của bất đẳng thức Łojasiewicz toàn cục cũng như các số mũ liên quan, được tính toán bằng thuật toán Newton-Puiseux. Đặc biệt, nếu đa thức hai biến là không suy biến theo lược đồ Newton, thì các số mũ trong bất đẳng thức Łojasiewicz toàn cục được biểu diễn thông qua các tính chất hình học của lược đồ Newton.

Chương 1

Điều kiện đủ để một đa thức thực là tổng bình phương của các đa thức

Các đa thức biểu diễn được dưới dạng tổng bình phương của các đa thức khác đóng vai trò quan trọng trong nhiều lĩnh vực khác nhau của toán học nói chung và lý thuyết tối ưu nói riêng. Nó cho phép nới lỏng bài toán tối ưu đa thức (nói chung đều thuộc loại NP-khó) về một bài toán quy hoạch nửa xác định ([La], [La1], [La2],...). Tuy nhiên, các điều kiện đơn giản để nhận biết một đa thức có là một tổng các bình phương hay không vẫn chưa có nhiều. Trong [La3], J.B.Lasserre đã đưa ra một điều kiện đủ để một đa thức là tổng bình phương của các đa thức khác. Nếu ta phiên dịch điều kiện của J.B.Lasserre sang ngôn từ của đa diện Newton, thì ta thấy rằng, các đa thức mà J.B.Lasserre nghiên cứu có đa diện Newton là những đơn hình cơ bản. Mục đích của chương này là mở rộng kết quả của J.B.Lasserre cho lớp đa thức với đa diện Newton bất kỳ. Chúng tôi sẽ chỉ ra rằng, đối với bài toán biểu diễn tổng bình phương, tập các đỉnh hình học của đa diện Newton là chưa đủ để nghiên cứu bài toán. Do đó chúng tôi đã mở rộng tập các đỉnh hình học thành tập các "đỉnh số học". Nói vắn tắt, kết quả của chúng tôi chỉ ra rằng, nếu viết đa thức f dưới dạng

$$f(x) = \sum_{\alpha \in \mathcal{V}(f)} a_\alpha x^\alpha + g(x),$$

trong đó, tổng $\sum_{\alpha \in \mathcal{V}(f)} a_\alpha x^\alpha$ gồm tất cả các đơn thức ứng với các đỉnh số học $\mathcal{V}(f)$ của đa diện Newton, thì f là tổng bình phương nếu các hệ số của $g(x)$ là đủ nhỏ so với các hệ số $a_\alpha, \alpha \in \mathcal{V}(f)$.

Nội dung chính của Chương này được viết dựa trên công trình của **Van Doat Dang and Thi Thao Nguyen,** *Sufficient Conditions for a real Polynomial to be a Sum of Squares of Polynomials.* Kodai J. Math., **39**(2016), 253 – 275.

1.1 Giới thiệu bài toán

Ký hiệu $\mathbb{N}$ là tập các số tự nhiên và $\mathbb{R}$ là tập các số thực. Ký hiệu $\mathbb{R}[x] := \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ là vành các đa thức thực n biến. Với $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ và $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, ta viết $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ và $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, quy ước $0^0 = 1$. Sử dụng các ký hiệu trên, mọi đa thức $f \in \mathbb{R}[x]$ có thể viết dưới dạng $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} f_\alpha x^\alpha$, trong đó $f_\alpha \in \mathbb{R}$ và chỉ có một số hữu hạn $f_\alpha \neq 0$.

Định nghĩa 1.1.1. Đa thức $f \in \mathbb{R}[x]$ bậc d, theo n biến được gọi là *không âm* (viết tắt PSD) nếu

$$f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Hiển nhiên, nếu đa thức f không âm thì d là số nguyên dương chẵn. Tập các đa thức PSD bậc d, theo n biến ký hiệu là $P_{d,n}$.

Định nghĩa 1.1.2. Đa thức $f \in \mathbb{R}[x]$ theo n biến được gọi là *biểu diễn tổng bình phương* (viết tắt SOS) nếu tồn tại hữu hạn đa thức

$p_i \in \mathbb{R}[x], i = 1, 2, \ldots, k$ sao cho

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} p_i^2(x), \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Tập các đa thức SOS bậc d, theo n biến ký hiệu là $\sum_{d,n}$.

Dễ thấy, nếu f là SOS thì f là PSD, điều ngược lại không đúng.

Năm 1888, D. Hilbert chứng minh được $\sum_{d,n} = P_{d,n}$ khi $n = 1$ hoặc $d = 2$ hoặc $(n, d) = (2, 4)$ [Hi]. Năm 1891, trong [Hu], A. Hurwitz cũng chỉ chứng minh được rằng đa thức

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_{2d}) = x_1^{2d} + x_2^{2d} + \cdots + x_{2d}^{2d} - 2dx_1x_2...x_{2d}$$

là SOS. Mãi đến năm 1967, T. S. Motzkin ([Mo], Mệnh đề 1.2.2) mới đưa ra được ví dụ đầu tiên, đa thức

$$M(x, y) = x^4y^2 + x^2y^4 - 3x^2y^2 + 1$$

là PSD trên $\mathbb{R}^2$ nhưng $M(x, y)$ không là SOS. Sau đó, một số ví dụ khác là PSD nhưng không là SOS cũng được đưa ra, chẳng hạn đến năm 1969 R. M. Robinson [Ro], năm 1977 M. D. Choi and T. Y. Lam [CL2], năm 1979 K. Schmüdgen [Sch], ... Từ đó câu hỏi được đưa ra: *Với đa thức không âm thỏa mãn những điều kiện nào thì nó có thể biểu diễn tổng bình phương?*

Câu hỏi thu hút được sự quan tâm của một số nhà toán học, chẳng hạn như A. Hurwitz [Hu]; B. Reznick [Re1], [Re2]; T. S. Motzkin [Mo]; R. M. Robinson [Ro]; J. B. Lasserre [La3]; M. Marshall [Ma2], [Ma3], [Ma4]; .... Họ tìm các điều kiện trên các hệ số của đa thức không âm để đa thức đó là biểu diễn tổng bình phương.

Giả sử $f(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} f_\alpha x^\alpha \in \mathbb{R}[x]$ là đa thức khác hằng và có bậc $2d$. Đặt $\Omega := \{\alpha \in \mathbb{N}^n \ : \ f_\alpha \neq 0\} \backslash \{0, 2de_1, \ldots, 2de_n\}$, trong đó $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$. Do đó, ta viết lại f dưới dạng

$$f(x) = f_0 + \sum_{\alpha \in \Omega} f_\alpha x^\alpha + \sum_{i=1}^{n} f_{2de_i} x_i^{2d}.$$

Đặt

$$\Delta := \{\alpha \in \Omega \;:\; f_\alpha < 0 \text{ hoặc tồn tại } \alpha_i \text{ lẻ với } i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Năm 2007, trong bài [La3, Định lý 3], J. B. Lasserre đã chứng minh rằng, nếu

$$f_0 \geq \sum_{\alpha \in \Delta} |f_\alpha| \quad \text{và } f_{2de_i} \geq \sum_{\alpha \in \Delta} |f_\alpha| \frac{|\alpha|}{2d}, \; i = 1, \ldots, n,$$

thì f là SOS.

Tuy nhiên, trong các điều kiện đủ trên, một điều dễ thấy, nếu $f_0 = 0$ hoặc $f_{2de_i} = 0$ với i nào đó, thì kéo theo $\Delta = \emptyset$ và như vậy f hiển nhiên là SOS. Vì vậy, kết quả này vẫn còn hạn chế. Kết quả của chúng tôi trong chương này sẽ khắc phục hạn chế trên. Trước hết chúng tôi đưa ra một vài khái niệm và ký hiệu.

Cho đa thức

$$f(x) := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} f_\alpha x^\alpha.$$

Đặt

$$\operatorname{supp}(f) := \{\alpha \in \mathbb{N}^n : f_\alpha \neq 0\}.$$

Định nghĩa 1.1.3. Bao lồi của tập $\operatorname{supp}(f)$ trong $\mathbb{R}^n_+$ được gọi là *đa diện Newton của f*, ký hiệu $\Gamma(f)$.

Ký hiệu $V(f)$ là tập các đỉnh của $\Gamma(f)$. Dễ thấy rằng, nếu f là SOS thì $V(f)$ chứa trong $(2\mathbb{Z})^n$. Hơn nữa, $V(f) = \{0, 2de_1, \ldots, 2de_n\}$ nếu và chỉ nếu $f_0.f_{2de_1} \ldots f_{2de_n} \neq 0$.

Cho $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}[x]$ là đa thức theo n biến, bậc $2d$. Đặt

$$\overline{f}(x_0, x_1, \ldots, x_n) := x_0^{2d} f(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}).$$

Định nghĩa 1.1.4. Đa thức $\overline{f}$ được gọi là *đa thức thuần nhất hóa của f*.

Mệnh đề 1.1.5. *([Ma1],Mệnh đề 1.2.4) Cho f là đa thức bậc 2d. Khi đó, f là PSD nếu và chỉ nếu $\overline{f}$ là PSD; và f là SOS nếu và chỉ nếu $\overline{f}$ là SOS.*

Dựa vào Mệnh đề 1.1.5, từ nay ta chỉ xét trường hợp f là đa thức thuần nhất.

Phiên dịch kết quả của J. B. Lasserre trong ([La3, Định lý 3]) dưới dạng đa thức thuần nhất, ta có thể phát biểu lại một cách vắn tắt như sau: Cho f là đa thức thuần nhất n biến, bậc $2d$ có dạng

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^{2d} + Q(x),$$

trong đó $a_i \neq 0, i = 1, \ldots, n$, và mọi đơn thức $x_i^{2d}, i = 1, \ldots, n$, không xuất hiện trong $Q(x)$ với hệ số khác không. Khi đó, f là SOS nếu các $a_i > 0$ và "đủ lớn" so với các hệ số của $Q(x)$.

Chú ý rằng, trong trường hợp này, $\Gamma(f)$ là một đơn hình với các đỉnh $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0), i = 1, \ldots, n$.

Trong trường hợp tổng quát, đa diện Newton của một đa thức thuần nhất không nhất thiết là một đơn hình. Vì vậy, để thiết lập kết quả tương tự của J.B.Lasserre cho đa thức thuần nhất bất kỳ, chúng tôi thay tập các đỉnh của đa diện bằng tập các "đỉnh số học".

1.2 Kết quả và chứng minh

Cho f là đa thức thuần nhất n biến, bậc $2d$ và đặt $\Gamma(f)$ là đa diện Newton của f. Ký hiệu

- $V(f)$ là tập các đỉnh của đa diện Newton $\Gamma(f)$;
- $\mathcal{C}(f) := \Gamma(f) \cap \mathbb{Z}^n$;
- $\mathcal{A}(f) := \left\{ \dfrac{1}{2}(s+t) : s, t \in \Gamma(f) \cap (2\mathbb{Z})^n \right\}$;

- $\mathcal{V}(f) := \mathcal{A}(f) \setminus \left\{\frac{1}{2}(s+t) : s \neq t, s, t \in \Gamma(f) \cap (2\mathbb{Z})^n\right\}$;
- $\Delta := \{\alpha \in \operatorname{supp}(f) :$ hoặc $f_\alpha < 0$ hoặc tồn tại α_i lẻ với $i \in \{1, \ldots, n\}\}$.

Như vậy, ta luôn có

$$\mathcal{V}(f) \subset \mathcal{A}(f) \subset \mathcal{C}(f).$$

Từ ([HP1], Định lý 3.1) suy ra rằng, nếu f là PSD thì tập $V(f)$ chứa trong $(2\mathbb{Z})^n$, và do vậy $V(f) \subset \mathcal{V}(f)$.

Định nghĩa 1.2.1. ([Re2]) Tập hợp $\mathcal{U} = \{u^1, \ldots, u^m\}$ được gọi là *khuôn (framework)* nếu $u^i = (u^i_1, \ldots, u^i_n) \in (2\mathbb{Z})^n$ với $u^i_j \geq 0$ và $\sum_{j=1}^n u^i_j = 2d$, với mọi $i = 1, ..., m$ và số nguyên dương d.

Định nghĩa 1.2.2. ([Re2]) Cho $\mathcal{U}$ là một khuôn. Tập hữu hạn $\mathcal{L} \subset \mathbb{Z}^n$ được gọi là *$\mathcal{U}$-trung bình* nếu $\mathcal{L}$ chứa $\mathcal{U}$ và với mọi $v \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{U}, v$ là trung bình cộng của hai điểm chẵn phân biệt trong $\mathcal{L}$.

Cho $\mathcal{U}$ là khuôn, ký hiệu $\mathcal{C}(\mathcal{U})$ là tập các điểm nguyên trong bao lồi của $\mathcal{U}$.

Định lý 1.2.3. *([Re2], Định lý 2.2) Cho $\mathcal{U}$ là khuôn, khi đó tồn tại tập $\mathcal{U}^*$ là $\mathcal{U}$-trung bình thỏa mãn $\mathcal{A}(\mathcal{U}) := \{\frac{1}{2}(s+t) : s, t \in \mathcal{U}\} \subset \mathcal{U}^* \subset \mathcal{C}(\mathcal{U})$ và $\mathcal{U}^*$ chứa mọi tập $\mathcal{U}$-trung bình.*

Với các ký hiệu như trên, kết quả dưới đây của chúng tôi cho một điều kiện đủ để một đa thức là biểu diễn tổng bình phương.

Định lý 1.2.4. *Cho $f(x) = \sum_{\alpha \in \mathcal{U}} f_\alpha x^\alpha + \sum_{\alpha \in \Delta} f_\alpha x^\alpha + \sum_{\alpha \notin (\mathcal{U} \cup \Delta)} f_\alpha x^\alpha$ là đa thức thuần nhất n biến thực, bậc 2d, có tập đỉnh $V(f) \subset (2\mathbb{Z})^n$, trong đó $\mathcal{U}$ là một khuôn thỏa mãn $V(f) \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{V}(f)$.*

Giả sử các điều sau thỏa mãn:

(i) $\alpha \in \mathcal{U}^*$, với mọi $\alpha \in \Delta$;

(ii) $\min_{u\in\mathcal{U}} f_u \geq \sum_{\alpha\in\Delta} |f_\alpha|$.

Khi đó f là SOS. Trường hợp $\Delta = \emptyset$, ta đặt $\sum_{\alpha\in\Delta} |f_\alpha| := 0$.

Ký hiệu $\mathbb{R}[x]_{2d}$ là không gian véc tơ các đa thức thực bậc không vượt quá $2d$, với cơ sở chính tắc $(x^\alpha) = \{x^\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq 2d\}$.

Cho dãy số thực $y = (y_\alpha)$ có chỉ số được đánh số theo cơ sở chính tắc (x^α), ta xác định ánh xạ tuyến tính $L_y : \mathbb{R}[x]_{2d} \to \mathbb{R}$

$$f = \sum_\alpha f_\alpha x^\alpha \mapsto L_y(f) = \sum_\alpha f_\alpha y_\alpha,$$

và $M_d(y) = (M_d(y)(\alpha, \beta))$ là *ma trận moment* sinh bởi $y = (y_\alpha)$, xác định

$$M_d(y)(\alpha, \beta) := L_y(x^{\alpha+\beta}) = y_{\alpha+\beta},\ \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n : |\alpha|, |\beta| \leq d.$$

Theo Nhận xét 2.2 [La3], $M_d(y)$ là nửa xác định dương, kí hiệu $M_d(y) \succeq 0$, khi và chỉ khi $L_y(f^2) \geq 0$, với mọi $f \in \mathbb{R}[x]_d$. Hơn nữa, f là SOS khi và chỉ khi $L_y(f) \geq 0$, với mọi y sao cho $M_d(y) \succeq 0$.

Do vậy, chứng minh Định lý 1.2.4 được hoàn thành bằng cách sử dụng Nhận xét 2.2 [La3] và Bổ đề sau

Bổ đề 1.2.5. *Cho $\mathcal{U}$ là một khuôn và $\mathcal{L}$ là tập $\mathcal{U}$-trung bình. Giả sử dãy $y = (y_\alpha)$ sao cho $M_d(y) \succeq 0$. Khi đó*

$$|L_y(x^\alpha)| \leq \max_{u\in\mathcal{U}} L_y(x^u), \quad \textit{với mọi } \alpha \in \mathcal{L}.$$

Chứng minh. Trước hết, ta chứng minh nếu $\alpha \in \mathcal{L}\backslash\mathcal{U}$, thì tồn tại $k \geq 1$ và một dãy

$$\alpha_{i-1} = \frac{1}{2}(\alpha_i + \beta_i),\ \alpha_i \neq \beta_i,\ \alpha_i, \beta_i \in \mathcal{L} \cap (2\mathbb{Z})^n,\ i = 1, \ldots, k,$$

sao cho $\alpha_0 = \alpha$ và $\alpha_k \in \mathcal{U}$.

Thật vậy, xét

$$X = \{\alpha' : \exists k \geq 1 \text{ và } \alpha_{i-1} = \frac{1}{2}(\alpha_i + \beta_i), \alpha_i \neq \beta_i, \alpha_i, \beta_i \in \mathcal{L} \cap (2\mathbb{Z})^n,$$
$$i = 1, \ldots, k, \text{ sao cho } \alpha_0 = \alpha \text{ và } \alpha_k = \alpha'\}.$$

Vì X được chứa trong $\mathcal{L}$, tập X là hữu hạn, và do vậy bao lồi của X có các đỉnh thuộc $\mathcal{U}$.

Đặt $\tau := \max_{\alpha\in\mathcal{L}} |L_y(x^\alpha)|$. Khi đó tồn tại $\gamma \in \mathcal{L}$ sao cho $\tau = |L_y(x^\gamma)|$.

Nếu $\gamma \in \mathcal{U}$ thì $|L_y(x^\alpha)| \le |L_y(x^\gamma)| = \max_{u\in\mathcal{U}} |L_y(x^u)|$, với mọi $\alpha \in \mathcal{L}$.

Nếu không, theo chứng minh trên, tồn tại $k \ge 1$ sao cho

$$\gamma = \frac{1}{2}(\gamma_1 + \beta_1),\ \gamma_1 \ne \beta_1 \in \mathcal{L} \cap (2\mathbb{Z})^n,$$
$$\gamma_1 = \frac{1}{2}(\gamma_2 + \beta_2),\ \gamma_2 \ne \beta_2 \in \mathcal{L} \cap (2\mathbb{Z})^n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\gamma_{k-1} = \frac{1}{2}(\gamma_k + \beta_k),\ \gamma_k \ne \beta_k \in \mathcal{L} \cap (2\mathbb{Z})^n,$$

trong đó $\gamma_k \in \mathcal{U}$. Vì $M_d(y) \succeq 0$, ta có

$$\tau = |L_y(x^\gamma)| = |L_y(x^{\frac{1}{2}(\gamma_1+\beta_1)})| \le \sqrt{L_y(x^{\gamma_1})L_y(x^{\beta_1})} \le \sqrt{L_y(x^{\gamma_1})\tau}.$$

Do đó $\tau \le L_y(x^{\gamma_1})$. Bằng cách lặp lại lý luận như trên, sau một số hữu hạn bước, ta thu được

$$\tau \le L_y(x^{\gamma_k}) \le \max_{u\in\mathcal{U}} L_y(x^u).$$

Điều này hoàn thành chứng minh của Bổ đề. □

Chứng minh Định lý 1.2.4 Theo (2.2 [La3]), ta chỉ cần chứng minh rằng $L_y(f) \ge 0$, với mọi $y = (y_\alpha)$ sao cho $M_d(y) \succeq 0$.

Lấy $y = (y_\alpha)$ sao cho $M_d(y) \succeq 0$. Đặt $\tau := \max\{L_y(x^u) \mid u \in \mathcal{U}\}$. Khi đó, theo Bổ đề 1.2.5, ta có

$$|L_y(x^\alpha)| \le \tau \text{ với mọi } \alpha \in \mathcal{U}^*.$$

Điều này cùng với các điều kiện (i) - (ii) suy ra

$$\begin{aligned}
L_y(f) &= \sum_{u\in\mathcal{U}} f_u L_y(x^u) + \sum_{\alpha\in\Delta} f_\alpha L_y(x^\alpha) + \sum_{\alpha\notin(\mathcal{U}\cup\Delta)} f_\alpha L_y(x^\alpha)\\
&\geq \sum_{u\in\mathcal{U}} f_u L_y(x^u) + \sum_{\alpha\in\Delta} f_\alpha L_y(x^\alpha)\\
&\geq \sum_{u\in\mathcal{U}} f_u L_y(x^u) - \sum_{\alpha\in\Delta} |f_\alpha||L_y(x^\alpha)|\\
&\geq \Big(\min_{u\in\mathcal{U}} f_u - \sum_{\alpha\in\Delta} |f_\alpha|\Big)\tau \geq 0.
\end{aligned}$$

Vậy f là SOS.

Hệ quả 1.2.6. *(Kết quả của J.B.Lasserre [La3]) Cho*

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_{2de_i} x_i^{2d} + \sum_{\alpha\in\Delta} a_\alpha x^\alpha + \sum_{\alpha\notin\Delta,\alpha\neq 2de_i} a_\alpha x^\alpha,$$

là một đa thức thuần nhất n biến thực, bậc 2d.

Nếu

$$\min a_{2de_i} \geq \sum_{\alpha\in\Delta} |f_\alpha|, i = 1, 2, ..., n,$$

thì f là SOS. Trong đó $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, $\dots$, $e_n = (0, ..., 0, 1)$ là các véc tơ đơn vị trong $\mathbb{R}^n$.

Chứng minh. Với giả thiết trên, các điểm $2de_1, \dots, 2de_n$ thuộc supp(f), do vậy $\Gamma(f)$ là đơn hình với tập đỉnh $V(f) = \{2de_1, \dots, 2de_n\}$. Khi đó $\mathcal{A}(f) = \Gamma(f) \cap \mathbb{Z}^n$.

Ta thấy, mọi điểm $\gamma \in \Gamma(f) \setminus \{2de_1, \dots, 2de_n\}$ đều có thể viết dưới dạng $\gamma = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, trong đó $\alpha \neq \beta$ và $\alpha, \beta \in \Gamma(f) \cap (2\mathbb{Z})^n$, nên $\mathcal{V}(f) = \{2de_1, \dots, 2de_n\}$.

Theo giả thiết trong Định lý 1.2.4, $V(f) \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{V}(f) = V(f)$ nên $\mathcal{U} = V(f)$. Từ đó 1.2.6 là Hệ quả của Định lý 1.2.4. □

Chú ý 1.2.7.

- Trong điều kiện (ii) của Định lý 1.2.4, nếu $f_u = 0$ với $u \in \mathcal{U}$ nào đó, suy ra $\Delta = \emptyset$ và $f_u \geq 0$ với mọi $u \in \mathcal{U}$; trong trường hợp này, f hiển nhiên là SOS.

- Các điểm của tập $\mathcal{U} \setminus V(f)$ thỏa mãn điều kiện của Định lý 1.2.4 có thể xem như là các đỉnh số học của $\Gamma(f)$.

Chương 2

Tính đặt chỉnh của bài toán tối ưu đa thức

Tính đặt chỉnh là một trong những tính chất mong muốn nhất khi ta nghiên cứu các bài toán tối ưu. Khái niệm đặt chỉnh lần đầu tiên được đưa ra bởi nhà toán học Hadamard vào những năm đầu của thế kỉ 20. Đến những năm 60 của thế kỷ 20, Tykhonov đưa ra khái niệm đặt chỉnh sau đây.

Định nghĩa 2.0.8. ([Ty]) Cho X là không gian metric, xét $f\colon X \to \mathbb{R}$ là một hàm liên tục. Bài toán

$$\text{Tính} \quad \inf_{x \in X} f(x)$$

được gọi là *đặt chỉnh theo Tykhonov* nếu

- Hàm f đạt cực tiểu tại điểm x_0;
- Điểm cực tiểu x_0 là duy nhất;
- Với mọi dãy $x_n \in X$, thỏa mãn $f(x_n) \to f(x_0)$, ta có $x_n \to x_0$.

Đến năm 1993, Zolezzi đưa ra khái niệm đặt chỉnh, một dạng mạnh hơn của Tykhonov.

Định nghĩa 2.0.9. ([Zo]) Cho $X, \mathcal{A}$ là các không gian metric. Với mỗi $a \in \mathcal{A}$ cố định, $f_a \colon X \to \mathbb{R}$ là một hàm liên tục. Bài toán

$$\text{Tính} \quad \inf_{x\in X} f_a(x)$$

được gọi là *đặt chỉnh theo Zolezzi* nếu

(i) Giá trị $f_a^* \colon = \inf_{x\in X} f_a(x)$ là hữu hạn và đạt tại điểm x_a duy nhất của X;

(ii) Với mỗi dãy $a_n \in \mathcal{A}, a_n \to a$, giá trị $f_{a_n}^* \colon = \inf_{x\in X} f_{a_n}(x)$ là hữu hạn và với mọi dãy $x_n \in X$ thỏa mãn $f_{a_n}(x_n) - f_{a_n}^* \to 0$, ta có $x_n \to x_a$.

Trong các bài báo [IZ, ILR, IL1], các tác giả đã chứng minh được tính đặt chỉnh của nhiều lớp các bài toán tối ưu. Đặc biệt, họ đã chứng minh được rằng, tồn tại một tập trù mật trong không gian các bài toán tối ưu, sao cho mọi bài toán thuộc tập này là đặt chỉnh. Một trong các hệ quả của kết quả này là, hầu hết các bài toán qui hoạch toàn phương đều đặt chỉnh.

Trong chương này, bằng cách sử dụng đa diện Newton và điều kiện không suy biến theo nghĩa Kouchnirenko, chúng tôi chứng minh được rằng, nếu Γ là một đa diện thuận tiện trong $\mathbb{R}^n$, và $\mathcal{A}_\Gamma$ là không gian các đa thức có đa diện Newton là tập con của Γ, luôn tồn tại một tập nửa đại số, mở và trù mật $\mathcal{U}_\Gamma$ trong $\mathcal{A}_\Gamma$, sao cho mọi đa thức f bị chặn dưới và f thuộc $\mathcal{U}_\Gamma$ thì bài toán

$$\text{Tính} \inf_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$$

là đặt chỉnh theo nghĩa Zolezzi. Ở đây, số biến và bậc của đa thức là tùy ý.

Nội dung chính của Chương này được viết dựa trên công trình của **Van Doat Dang, Huy Vui Ha and Tien Son Pham,** *Well-posedness in unconstrained Polynomial Optimization Problems.* SIAM J. Optim., **26**(3)(2016), 1411 – 1428.

2.1 Giới thiệu bài toán

Nhắc lại rằng, $\mathbb{N}$ là tập các số tự nhiên, $\mathbb{R}$ là tập các số thực và $\mathbb{R}_+$ là tập các số thực không âm. Ký hiệu $\mathbb{R}[x] := \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ là vành các đa thức thực n biến. Với $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ và $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, ta viết $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ và $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, quy ước $0^0 = 1$.

Cho đa thức $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ và giả sử $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} f_\alpha x^\alpha$, với $f_\alpha \in \mathbb{R}$ và chỉ có một số hữu hạn $f_\alpha \neq 0$. Ký hiệu $\operatorname{supp}(f)$ là tập tất cả $\alpha \in \mathbb{N}^n$ sao cho $f_\alpha \neq 0$.

Bên cạnh khái niệm đa diện Newton của một đa thức f, để nghiên cứu các tính chất hình học và giải tích của đa thức f tại vô hạn, ta cần thêm khái niệm sau.

Định nghĩa 2.1.1. Bao lồi của tập $\operatorname{supp}(f) \cup \{0\}$ được gọi là *đa diện Newton tại vô hạn của* f và ký hiệu $\Gamma^\infty(f)$.

$\Gamma^\infty(f)$ gọi là *thuận tiện* nếu nó giao với tất cả các trục tọa độ tại các điểm khác gốc 0.

Đa thức f gọi là *thuận tiện* nếu $\Gamma^\infty(f)$ thuận tiện. Trường hợp $f \equiv 0$, ta đặt $\Gamma^\infty(f) = \emptyset$.

Ta gọi *biên Newton tại vô hạn của* f, ký hiệu $\Gamma_\infty(f)$, được xác định bởi hợp các mặt của $\Gamma^\infty(f)$ mà không chứa gốc tọa độ 0 trong $\mathbb{R}^n$.

Với mỗi mặt Δ của $\Gamma_\infty(f)$, đặt $f_\Delta = \sum_{\alpha \in \Delta} f_\alpha x^\alpha$.

Khái niệm dưới đây đóng vai trò quan trọng trong chương.

Định nghĩa 2.1.2. [Ko, Kh] Đa thức f được gọi là *không suy biến tại vô hạn theo Kouchnirenko* (nói tắt là *không suy biến tại vô hạn*) nếu và chỉ nếu với mọi mặt Δ của $\Gamma_\infty(f)$, hệ phương trình

$$\frac{\partial f_\Delta}{\partial x_1}(x) = \cdots = \frac{\partial f_\Delta}{\partial x_n}(x) = 0$$

không có nghiệm trong $(\mathbb{R} \setminus \{0\})^n$.

Trong chương này, chúng tôi luôn ký hiệu $\Gamma \subset \mathbb{R}^n_+$ là một đa diện với tập đỉnh là các điểm có tọa độ nguyên trong $\mathbb{Z}^n_+$. Và luôn giả sử Γ là thuận tiện, nghĩa là nó cắt mọi trục tọa độ tại các điểm khác gốc.

Với mỗi đa diện $\Gamma \subset \mathbb{R}^n_+$ thuận tiện, đặt

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_\Gamma &:= \{f \in \mathbb{R}[x] \ : \ \Gamma^\infty(f) \subseteq \Gamma\};\\
V &:= \text{ tập các đỉnh của } \Gamma;\\
\mathcal{C} &:= \Gamma \cap \mathbb{Z}^n_+ \ = \ \text{tập các điểm nguyên trong } \Gamma;\\
N &:= \#\mathcal{C} \ = \ \text{số các điểm nguyên của tập } \mathcal{C}.
\end{aligned}
$$

Bằng cách sử dụng thứ tự từ điển trên tập các đơn thức $x^\alpha, \alpha \in \mathcal{C}$, với mỗi $x \in \mathbb{R}^n$ ta định nghĩa véc tơ tương ứng $vec(x) := (x^\alpha)_{\alpha\in\mathcal{C}} \in \mathbb{R}^N$. Để thuận tiện, ta đồng nhất mỗi đa thức $f(x) = \sum_{\alpha\in\mathcal{C}} f_\alpha x^\alpha \in \mathcal{A}_\Gamma$ ứng với một véc tơ các hệ số của nó $f_\alpha := (f_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{C}} \in \mathbb{R}^N$, như vậy $f(x) = \langle f_\alpha, vec(x)\rangle$. Khi đó, $\mathcal{A}_\Gamma$ được đồng nhất với không gian Euclid $\mathbb{R}^N$.

Kết quả chính của chương này là như sau:

Cho đa diện Γ thuận tiện. Khi đó tồn tại tập nửa đại số, mở và trù mật $\mathcal{U}_\Gamma \subset \mathcal{A}_\Gamma$ $(\equiv \mathbb{R}^N)$ sao cho với mọi $f \in \mathcal{U}_\Gamma$ và f bị chặn dưới trên $\mathbb{R}^n$, bài toán

$$\textit{Tính} \inf_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$$

đặt chỉnh theo nghĩa Zolezzi.

Kết quả của chúng tôi có được từ những quan sát sau:

- Mỗi đa thức $f \in \mathcal{A}_\Gamma$, chỉ có các điểm tới hạn không suy biến với các giá trị tới hạn phân biệt.
- Với đa thức $f \in \mathcal{A}_\Gamma$, nếu f không suy biến tại vô hạn và bị chặn dưới, khi đó tồn tại các hằng số dương c_1, c_2 sao cho

$$c_1 \sum_{\alpha\in\mathcal{C}} |x^\alpha| \leq f(x) \leq c_2 \sum_{\alpha\in\mathcal{C}} |x^\alpha|, \quad \text{với mọi} \quad \|x\| \gg 1. \quad (2.1)$$

Chú ý 2.1.3. Cho đa diện $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ là bao lồi của gốc tọa độ và các điểm $(m, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, m) \in \mathbb{R}^n$, với số nguyên chẵn $m \geq 2$. Theo trên, khi đó $\mathcal{A}_\Gamma = \mathbb{R}[x]_m$-không gian véc tơ của tất cả các đa thức có bậc không vượt quá m. Hơn nữa, ta có:

- Nếu $f \in \mathcal{A}_\Gamma$ là bị chặn dưới, thì thành phần thuần nhất bậc cao nhất của f, ký hiệu bởi f_m, là một đa thức thuần nhất không âm trên $\mathbb{R}^n$.

- Với đa thức $f \in \mathcal{A}_\Gamma$, nếu f không suy biến tại vô hạn và bị chặn dưới thì thành phần thuần nhất bậc cao nhất $f_m(x) > 0$, với mọi $x \in \mathbb{R}^n$.

- Cho $f \in \mathcal{A}_\Gamma$ sao cho thành phần thuần nhất bậc cao nhất $f_m(x) > 0$, với mọi $x \in \mathbb{R}^n$. Khi đó tồn tại hằng số dương c sao cho
$$c\|x\|^m \leq f_m(x) \quad \text{với mọi} \quad \|x\| \gg 1.$$
Khi đó dễ thấy rằng các bất đẳng thức (2.1) là đúng.

2.2 Kết quả và chứng minh

Định lý 2.2.1. *Cho đa diện Γ thuận tiện. Khi đó tồn tại tập nửa đại số, mở và trù mật $\mathcal{U}_\Gamma \subset \mathcal{A}_\Gamma$ $(\equiv \mathbb{R}^N)$ sao cho với mọi $f = \sum_{\alpha \in \mathcal{C}} f_\alpha x^\alpha \in \mathcal{U}_\Gamma$ và f bị chặn dưới trên $\mathbb{R}^n$, các điều sau thỏa mãn:*

(i) f có duy nhất một điểm cực tiểu $x^* \in \mathbb{R}^n$;

(ii) Tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho với mọi $u := (u_\alpha) \in \mathbb{R}^N$, $\|u\| < \epsilon$, các điều kiện sau luôn thỏa mãn:

(ii1) Đa thức $f_u := f + \sum_{\alpha \in \mathcal{C}} u_\alpha x^\alpha \in \mathcal{A}_\Gamma$ có duy nhất điểm cực tiểu $x_u^* \in \mathbb{R}^n$;

(ii2) Đa thức f_u chỉ có các điểm tới hạn không suy biến và các giá trị tới hạn là phân biệt; hơn nữa, Hessian $\nabla^2 f_u(x_u^*)$ của f_u tại x_u^* là xác định dương;

(ii3) Sự tương ứng $\{u \in \mathbb{R}^N \ : \ \|u\| < \epsilon\} \to \mathbb{R}^n, u \mapsto x_u^*$, là ánh xạ giải tích với $\lim_{u\to 0} x_u^* = x^*$;

(ii4) Với mọi $x_u \in \mathbb{R}^n$, nếu $\lim_{u\to 0}[f_u(x_u) - \inf_{x\in\mathbb{R}^n} f_u(x)] = 0$, thì $\lim_{u\to 0} x_u = x^*$.

Nói riêng, bài toán

$$\textit{Tính} \inf_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$$

là đặt chỉnh theo nghĩa Zolezzi.

Nhận xét 2.2.2. Trong kết quả trên, $\mathbf{R}^n$ đóng vai trò tập X và $\mathcal{A}_\Gamma(\simeq \mathbb{R}^N)$ đóng vai trò không gian tham số $\mathcal{A}$ trong Định nghĩa 2.0.9 về tính đặt chỉnh của Zolezzi.

Chứng minh Định lý 2.2.1 sẽ được chia thành các Bổ đề.

Bổ đề 2.2.3. *([HP]) Cho $F\colon X \times P \to Y$ là ánh xạ nửa đại số lớp C^∞ giữa các đa tạp nửa đại số. Nếu $y \in Y$ là giá trị chính quy của F, thì tồn tại tập nửa đại số Σ trong P có chiều lớn nhất bằng* $\dim P - 1$ *sao cho, với mỗi $p \in P \setminus \Sigma$, y là giá trị chính quy của ánh xạ $F_p\colon X \to Y, x \mapsto F(x,p)$.*

Bổ đề 2.2.4. *Giả sử đa diện Γ là thuận tiện. Khi đó tồn tại tập nửa đại số mở và trù mật $\mathcal{B}_\Gamma \subset \mathcal{A}_\Gamma$, sao cho với mọi $f \in \mathcal{B}_\Gamma$, f chỉ có các điểm tới hạn không suy biến.*

Chứng minh. Nhắc lại rằng, ta luôn đồng nhất $\mathcal{A}_\Gamma$ với $\mathbb{R}^N$. Xét ánh xạ nửa đại số

$$\Phi\colon \mathbb{R}^n \times \mathcal{A}_\Gamma \to \mathbb{R}^n, \quad (x, f) \longmapsto \nabla f(x),$$

trong đó ∇f là gradient của f.

Ta viết $f(x) = \sum_{\alpha \in \mathcal{C}} f_\alpha x^\alpha$ với $f := (f_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{C}} \in \mathbb{R}^N$. Ta xét $\alpha \in \mathcal{C}$ với $|\alpha| = 1$ và Γ là thuận tiện, tính toán đơn giản, thấy rằng

$$\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial f_\alpha}\right)_{|\alpha|=1,\, i=1,2,\ldots,n}$$

là ma trận đơn vị cấp n, và $\operatorname{rank} D\Phi(x, f) = n$ với mọi $(x, f) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{A}_\Gamma$. Đặc biệt, $0 \in \mathbb{R}^n$ là giá trị chính quy của Φ. Theo Bổ đề 2.2.3, tồn tại tập nửa đại số Σ trong $\mathcal{A}_\Gamma$ có chiều lớn nhất bằng $\dim \mathcal{A}_\Gamma - 1$ sao cho với mỗi $f \in \mathcal{A}_\Gamma \setminus \Sigma$, 0 là giá trị chính quy của ánh xạ

$$\Phi_f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad x \longmapsto \nabla f(x).$$

Điều này suy ra tập $\mathcal{B}_\Gamma := \mathcal{A}_\Gamma \setminus \overline{\Sigma}$ có tính chất khẳng định như trên. □

Bổ đề 2.2.5. *Giả sử đa diện Γ là thuận tiện. Khi đó tồn tại tập nửa đại số mở và trù mật $\mathcal{C}_\Gamma \subset \mathcal{A}_\Gamma$, sao cho với mọi $f \in \mathcal{C}_\Gamma$, f chỉ có các điểm tới hạn không suy biến và các giá trị tới hạn là phân biệt.*

Chứng minh. Lấy $\mathcal{B}_\Gamma \subset \mathcal{A}_\Gamma \equiv \mathbb{R}^N$ là tập nửa đại số mở và trù mật xác định như trong Bổ đề 2.2.4. Xét ánh xạ nửa đại số

$$\begin{array}{rlcl} \Psi\colon & ((\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \setminus \triangle) \times \mathcal{B}_\Gamma & \to & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \\ & (x, y, f) & \longmapsto & (f(x) - f(y), \nabla f(x), \nabla f(y)), \end{array}$$

trong đó

$$\triangle := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x = y\}.$$

Tính toán trực tiếp ta được

$$D\Psi(x, y, f) = \begin{pmatrix} [\nabla f(x)]^t & -[\nabla f(y)]^t & vec(x) - vec(y) \\ \nabla^2 f(x) & 0 & D_f(\nabla f(x)) \\ 0 & \nabla^2 f(y) & D_f(\nabla f(y)) \end{pmatrix},$$

trong đó $\nabla^2 f(\cdot)$ là Hessian của f và $D_f(\nabla f(\cdot))$ là đạo hàm của ánh xạ $(x, f) \mapsto \nabla f(x)$ tương ứng với f.

Lấy $(x, y) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \setminus \triangle$ và $f \in \mathcal{B}_\Gamma$ sao cho $\nabla f(x) = \nabla f(y) = 0$. Khi đó

$$vec(x) - vec(y) \neq 0 \quad \text{và} \quad \operatorname{rank} \nabla^2 f(x) = \operatorname{rank} \nabla^2 f(y) = n,$$

như vậy $\operatorname{rank} D\Psi(x, y, f) = 2n + 1$. Hệ quả, $0 \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ là giá trị chính quy của Ψ. Theo Bổ đề 2.2.3, tồn tại tập nửa đại số Σ trong $\mathcal{B}_\Gamma$ có chiều lớn nhất bằng $\dim \mathcal{B}_\Gamma - 1$ sao cho, với mỗi $f \in \mathcal{B}_\Gamma \setminus \Sigma$, 0 là giá trị chính quy của ánh xạ

$$\begin{array}{rccc} \Psi_f \colon & (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \setminus \triangle & \to & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \\ & (x, y) & \longmapsto & (f(x) - f(y), \nabla f(x), \nabla f(y)). \end{array}$$

Đặt $\mathcal{C}_\Gamma := \mathcal{B}_\Gamma \setminus \overline{\Sigma}$, khi đó $\mathcal{C}_\Gamma$ là tập nửa đại số, mở và trù mật trong $\mathcal{B}_\Gamma$.

Chú ý

$$\dim(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) = 2n + 1 > 2n = \dim((\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \setminus \triangle).$$

Do đó, với mọi $f \in \mathcal{C}_\Gamma$, $\Psi_f^{-1}(0) = \emptyset$.

Chú ý $\Psi_f^{-1}(0) = \emptyset$ nếu và chỉ nếu hệ sau không có nghiệm:

$$x \neq y, \quad f(x) - f(y) = 0, \quad \nabla f(x) = 0, \quad \nabla f(y) = 0.$$

Bổ đề được chứng minh. □

Bổ đề 2.2.6. *Tập*

$$\mathcal{D}_\Gamma := \{f \in \mathcal{A}_\Gamma \ : \ \Gamma(f) \subset \Gamma \ \ \textit{và} \ \ f \ \textit{không suy biến tại vô hạn}\}$$

là tập nửa đại số mở và trù mật trong $\mathcal{A}_\Gamma$.

Chứng minh. Tập $\mathcal{D}_\Gamma$ là mở và trù mật trong $\mathcal{A}_\Gamma$ bởi các kết quả trong [Ko].

Nhắc lại rằng, V là tập các đỉnh của đa diện Γ. Đặt

$$\widetilde{\mathcal{A}}_\Gamma := \left\{ f = \sum_{\alpha \in \mathcal{C}} f_\alpha x^\alpha \in \mathcal{A}_\Gamma \ : \ f_\alpha \neq 0 \ \ \text{với mọi } \alpha \in V \right\}.$$

Khi đó $\widetilde{\mathcal{A}}_\Gamma$ là tập nửa đại số, mở và trù mật trong $\mathcal{A}_\Gamma$.

Nói cách khác, theo định nghĩa, với mỗi mặt $\Delta \in \Gamma_\infty(f)$, tập

$$\left\{(f, x) \in \widetilde{\mathcal{A}}_\Gamma \times \mathbb{R}^n : \frac{\partial f_\Delta}{\partial x_1}(x) = \cdots = \frac{\partial f_\Delta}{\partial x_n}(x) = 0 \text{ và } x_1 \cdots x_n \neq 0\right\}$$

là tập nửa đại số trong $\widetilde{\mathcal{A}}_\Gamma \times \mathbb{R}^n$. Từ Định lý Tarski-Seidenberg (xem [BCR]) suy ra tập

$$\begin{aligned} N_\Delta := \Big\{ f \in \widetilde{\mathcal{A}}_\Gamma \ : \ & \text{tồn tại điểm } x \in \mathbb{R}^n, \text{ sao cho} \\ & \frac{\partial f_\Delta}{\partial x_1}(x) = \cdots = \frac{\partial f_\Delta}{\partial x_n}(x) = 0 \ \text{ và } \ x_1 \cdots x_n \neq 0 \Big\} \end{aligned}$$

là tập nửa đại số trong $\widetilde{\mathcal{A}}_\Gamma$.

Lấy

$$\mathcal{D}_\Gamma = \widetilde{\mathcal{A}}_\Gamma \setminus \bigcup_{\Delta \in \Gamma_\infty(f)} N_\Delta.$$

Khi đó, $\mathcal{D}_\Gamma$ là tập nửa đại số, mở và trù mật trong $\mathcal{A}_\Gamma$. $\square$

Bổ đề 2.2.7. *Cho $f \in \mathcal{D}_\Gamma$ là đa thức bị chặn dưới. Khi đó, với mỗi mặt Δ của $\Gamma_\infty(f)$, ta có $f_\Delta \geq 0$ trên $\mathbb{R}^n$ và $f_\Delta > 0$ trên $(\mathbb{R} \setminus 0)^n$.*

Chứng minh. Lấy Δ là mặt bất kỳ của $\Gamma_\infty(f)$. Trước hết, ta chỉ ra rằng $f_\Delta \geq 0$ trên $\mathbb{R}^n$. Thật vậy, vì f_Δ là liên tục, nên ta chỉ cần chứng minh $f_\Delta \geq 0$ trên $(\mathbb{R} \setminus 0)^n$.

Bằng phản chứng, giả sử rằng tồn tại điểm $x^0 \in (\mathbb{R} \setminus 0)^n$ sao cho $f_\Delta(x^0) < 0$. Lấy J là tập con nhỏ nhất của tập $\{1, \ldots, n\}$ sao cho $\Delta \subset \Gamma_\infty(f) \cap \mathbb{R}^J$. Khi đó, tồn tại véc tơ khác không $a \in \mathbb{R}^n$, với $\min_{j \in J} a_j < 0$, sao cho

$$\Delta = \{\alpha \in \Gamma_\infty(f) \cap \mathbb{R}^J \ : \ \langle a, \alpha \rangle = \min_{\beta \in \Gamma_\infty(f) \cap \mathbb{R}^J} \langle a, \beta \rangle\}.$$

Lấy ϵ là số thực dương đủ nhỏ và xác định đường cong $\phi(t) \colon (0, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n, t \mapsto (\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t))$, trong đó

$$\phi_j(t) = \begin{cases} x_j^0 t^{a_j} & \text{nếu } j \in J, \\ 0 & \text{nếu } j \notin J. \end{cases}$$

Đặt $d := \min_{\alpha \in \Gamma_\infty(f) \cap \mathbb{R}^J} \langle a, \alpha \rangle$, rõ ràng thấy rằng $d < 0$. Hơn nữa, ta có thể viết

$$f(\phi(t)) = f_\Delta(x^0)t^d + \text{ các số hạng có bậc cao hơn theo biến } t.$$

Vì $f_\Delta(x^0) < 0$, suy ra

$$\lim_{t \to 0^+} f(\phi(t)) = -\infty,$$

mâu thuẫn với giả thiết.

Tiếp theo, ta chứng minh $f_\Delta > 0$ trên $(\mathbb{R} \setminus 0)^n$. Thật vậy, giả sử tồn tại điểm $x^0 \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^n$ sao cho $f_\Delta(x^0) = 0$. Từ đó suy ra x^0 là điểm cực tiểu toàn cục của f_Δ trên $\mathbb{R}^n$. Hệ quả, x_0 là điểm tới hạn của f_Δ, tức là, $\dfrac{\partial f_\Delta}{\partial x_j}(x^0) = 0$ với $j = 1, \ldots, n$, điều này mâu thuẫn với giả thiết $f \in \mathcal{D}_\Gamma$ (tức là, f không suy biến tại vô hạn). Vậy, Bổ đề được chứng minh. $\square$

Xét hàm nửa đại số $P_\Gamma \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$P_\Gamma(x) := \sum_{\alpha \in V} |x^\alpha|.$$

Chú ý 2.2.8. Giả sử tồn tại đa thức f bị chặn dưới sao cho $\Gamma = \Gamma(f)$. Khi đó tất cả các đỉnh của Γ có tọa độ là số nguyên chẵn không âm, do đó P_Γ là một hàm đa thức.

Bổ đề 2.2.9. *Với mọi $x \in \mathbb{R}^n$, điều sau luôn đúng*

$$P_\Gamma(x) \le \sum_{\alpha \in \mathcal{C}} |x^\alpha| \le N.P_\Gamma(x).$$

Đặc biệt, nếu đa diện Γ là thuận tiện, thì hàm P_Γ là coercive trên $\mathbb{R}^n$ (tức là $\lim_{\|x\| \to +\infty} P_\Gamma(x) = +\infty$).

Chứng minh. Vì $V \subset \mathcal{C}$, nên với mọi $x \in \mathbb{R}^n$, ta có

$$P_\Gamma(x) = \sum_{\alpha \in V} |x^\alpha| \le \sum_{\alpha \in \mathcal{C}} |x^\alpha|,$$

điều này chứng minh bất đẳng thức vế trái.

Đặt $v^1, \ldots, v^k$ là các đỉnh của đa diện Γ, tức là $V = \{v^1, \ldots, v^k\}$. Lấy $\alpha \in \mathcal{C}$ bất kỳ, khi đó tồn tại các số thực không âm $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, với $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$, sao cho

$$\alpha = \lambda_1 v^1 + \cdots + \lambda_k v^k.$$

Với mọi $x \in \mathbb{R}^n$, ta có

$$\begin{aligned} |x^\alpha| = |x^{\lambda_1 v^1 + \cdots + \lambda_k v^k}| &= (|x^{v^1}|)^{\lambda_1} \cdots (|x^{v^k}|)^{\lambda_k} \\ &\leq \lambda_1 |x^{v^1}| + \cdots + \lambda_k |x^{v^k}| \\ &\leq |x^{v^1}| + \cdots + |x^{v^k}| = P_\Gamma(x). \end{aligned}$$

Do đó $\sum_{\alpha \in \mathcal{C}} |x^\alpha| \leq N P_\Gamma(x)$, điều này chứng minh bất đẳng thức vế phải. Hơn nữa, nếu đa diện Γ là thuận tiện, khi đó $\lim_{\|x\| \to +\infty} P_\Gamma(x) = +\infty$. □

Bổ đề 2.2.10. *Giả sử đa diện Γ là thuận tiện và $f \in \mathcal{D}_\Gamma$ là một đa thức bị chặn dưới. Khi đó tồn tại các hằng số dương c_1, c_2, và r sao cho*

$$c_1 P_\Gamma(x) \leq f(x) \leq c_2 P_\Gamma(x),$$

với mọi $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| \geq r$. Nói riêng, f là coercive trên $\mathbb{R}^n$.

Chứng minh. Bất đẳng thức vế trái được suy ra trực tiếp từ Bổ đề 2.2.7 và [Gi, Định lý 1.5].

Tiếp theo, ta viết $f(x) = \sum_{\alpha \in \mathcal{C}} f_\alpha x^\alpha$. Khi đó

$$f(x) \leq |f(x)| \leq \sum_{\alpha \in \mathcal{C}} |f_\alpha x^\alpha| \leq c \sum_{\alpha \in \mathcal{C}} |x^\alpha|,$$

trong đó $c := \max_{\alpha \in \mathcal{C}} |f_\alpha|$. Từ Bổ đề 2.2.9 suy ra rằng $f(x) \leq cNP_\Gamma(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}^n$, bất đẳng thức vế phải được chứng minh.

Khẳng định sau cùng của Bổ đề là hệ quả trực tiếp của bất đẳng thức trên và Bổ đề 2.2.9. □

Đặt $\mathcal{U}_\Gamma := \mathcal{C}_\Gamma \cap \mathcal{D}_\Gamma$, trong đó $\mathcal{C}_\Gamma$ và $\mathcal{D}_\Gamma$ là các tập nửa đại số, mở và trù mật trong $\mathcal{A}_\Gamma$ được xác định như trong các Bổ đề 2.2.5 và 2.2.6, tương ứng. Khi đó $\mathcal{U}_\Gamma$ là tập nửa đại số, mở và trù mật trong $\mathcal{A}_\Gamma$.

Bổ đề 2.2.11. *Cho Γ là một đa diện thuận tiện, cho f là một đa thức bất kỳ thuộc $\mathcal{U}_\Gamma$. Khi đó, nếu f bị chặn dưới thì f đạt cực tiểu trên $\mathbb{R}^n$ tại điểm duy nhất x^*.*

Chứng minh. Theo Bổ đề 2.2.10, đa thức f là coercive. Đặc biệt, f có cực tiểu toàn cục. Kết hợp điều này cùng với Bổ đề 2.2.5, ta có điều chứng minh. □

Bổ đề 2.2.12. *Cho đa diện Γ là thuận tiện và $f \in \mathcal{U}_\Gamma$ là đa thức bị chặn dưới. Với mỗi $u := (u_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{C}} \in \mathbb{R}^N$, đặt $f_u := f + \sum_{\alpha \in \mathcal{C}} u_\alpha x^\alpha \in \mathbb{R}[x]$.*

Khi đó, tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho với mọi $\|u\| < \epsilon$, ta có $f_u \in \mathcal{U}_\Gamma$. Hơn nữa, các khẳng định sau là đúng:

(i) *Tồn tại các hằng số dương c_1, c_2, và r sao cho*

$$c_1 P_\Gamma(x) \le f_u(x) \le c_2 P_\Gamma(x), \quad \text{với mọi} \quad x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| \ge r;$$

(ii) *f_u là coercive;*

(iii) *f_u có điểm cực tiểu toàn cục duy nhất $x_u^* \in \mathbb{R}^n$;*

(iv) *f_u chỉ có các điểm tới hạn không suy biến và các giá trị tới hạn phân biệt; hơn nữa, Hessian $\nabla^2 f_u(x_u^*)$ của f_u tại x_u^* xác định dương;*

(v) *Phép tương ứng $\{u \in \mathbb{R}^N : \|u\| < \epsilon\} \to \mathbb{R}^n, u \mapsto x_u^*$, xác định một ánh xạ giải tích với $\lim_{u \to 0} x_u^* = x^*$, trong đó x^* là điểm cực tiểu toàn cục duy nhất của f trên $\mathbb{R}^n$.*

Chứng minh. (i) Theo Bổ đề 2.2.10, tồn tại các hằng số dương c_1', c_2', và r sao cho

$$c_1' P_\Gamma(x) \le f(x) \le c_2' P_\Gamma(x) \quad \text{với mọi} \quad x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| \ge r. \tag{2.2}$$

Vì tập $\mathcal{U}_\Gamma$ mở và trù mật, nên tồn tại $\epsilon \in (0, c_1'/N)$ sao cho với mọi $u := (u_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{C}} \in \mathbb{R}^N$, với $\|u\| < \epsilon$, ta luôn có

$$f_u := f + \sum_{\alpha\in\mathcal{C}} u_\alpha x^\alpha \in \mathcal{U}_\Gamma.$$

Đặc biệt, với mọi $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f(x) - \sum_{\alpha\in\mathcal{C}} |u_\alpha x^\alpha| \leq f_u(x) := f(x) + \sum_{\alpha\in\mathcal{C}} u_\alpha x^\alpha \leq f(x) + \sum_{\alpha\in\mathcal{C}} |u_\alpha x^\alpha|.$$

Do đó

$$f(x) - \epsilon \sum_{\alpha\in\mathcal{C}} |x^\alpha| \leq f_u(x) \leq f(x) + \epsilon \sum_{\alpha\in\mathcal{C}} |x^\alpha|.$$

Từ bất đẳng thức (2.2) và Bổ đề 2.2.9 suy ra rằng

$$(c_1' - \epsilon N) P_\Gamma(x) \leq f_u(x) \leq (c_2' + \epsilon N) P_\Gamma(x) \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| \geq r.$$

Rõ ràng, các hằng số dương $c_1 := c_1' - \epsilon N$ và $c_2 := c_2' + \epsilon N$ thỏa mãn yêu cầu bất đẳng thức.

(ii) Điều này là hệ quả trực tiếp của (i) và Bổ đề 2.2.9.

(iii) Điều này được suy trực tiếp từ (ii) và Bổ đề 2.2.11.

(iv) Vì x_u^* là điểm cực tiểu toàn cục của f_u, Hessian $\nabla^2 f_u(x_u^*)$ của f_u tại x_u^* là nửa xác định dương. Điều này cùng với Bổ đề 2.2.5, suy ra điều phải chứng minh.

(v) Trước hết ta chứng minh rằng $\lim_{u\to 0} x_u^* = x^*$. Thật vậy, nếu $\|x_u^*\| \geq r$, thì

$$\begin{aligned} c_1 P_\Gamma(x_u^*) \leq f_u(x_u^*) \leq f_u(x^*) &= f(x^*) + \sum_{\alpha\in L} u_\alpha (x^*)^\alpha \\ &\leq f(x^*) + \epsilon \sum_{\alpha\in L} |(x^*)^\alpha|. \end{aligned}$$

Điều này kết hợp với tính coercivity của đa thức P_Γ (xem Bổ đề 2.2.9), suy ra rằng tập $\{x_u^* \ :\ \|u\| < \epsilon\}$ là bị chặn. Chú ý

$$\begin{aligned} f(x^*) + \sum_{\alpha\in\mathcal{C}} u_\alpha (x_u^*)^\alpha \ &\leq\ f(x_u^*) + \sum_{\alpha\in\mathcal{C}} u_\alpha (x_u^*)^\alpha \ =\ f_u(x_u^*) \\ &\leq\ f_u(x^*) \ =\ f(x^*) + \sum_{\alpha\in\mathcal{C}} u_\alpha (x^*)^\alpha. \end{aligned}$$

Hệ quả, ta có $f(x^*) = \lim_{u\to 0} f_u(x_u^*)$. Bây giờ, kí hiệu y^* là điểm hội tụ khác của dãy $\{x_u^*\}$ khi $u \to 0$. Khi đó

$$\begin{aligned} f(x^*) \;=\; \lim_{u\to 0} f_u(x_u^*) \;=\; \lim_{u\to 0} &\left[f(x_u^*) + \sum_{\alpha\in\mathcal{C}} u_\alpha (x_u^*)^\alpha \right] \\ &= \lim_{u\to 0} f(x_u^*) \;=\; f(y^*), \end{aligned}$$

suy ra $y^* = x^*$, bởi vì x^* là điểm cực tiểu duy nhất của f. Do đó, $\lim_{u\to 0} x_u^* = x^*$.

Tiếp theo, ta định nghĩa ánh xạ đa thức

$$\Phi\colon \mathbb{R}^n \times \mathcal{U}_\Gamma \to \mathbb{R}^n, (x, u) \mapsto \Phi(x, u) := \nabla f_u(x),$$

và xét hệ phương trình $\Phi(x, u) = 0$. Từ định nghĩa suy ra

$$\Phi(x^*, 0) = \nabla f(x^*) = 0$$

và

$$\text{rank} D\Phi(x^*, 0) = \text{rank}\nabla^2 f(x^*) = n.$$

Theo định lý hàm ẩn và cách chọn ϵ nhỏ tùy ý nếu cần, tồn tại duy nhất ánh xạ giải tích

$$s\colon \{u \in \mathbb{R}^N \;:\; \|u\| < \epsilon\} \to \mathbb{R}^n, \quad u \mapsto s(u),$$

sao cho $s(0) = x^*$ và $\Phi(s(u), u) = 0$ với $\|u\| < \epsilon$. Nói cách khác, vì x_u^* là điểm cực tiểu toàn cục của f_u, $\Phi(x_u^*, u) = \nabla f_u(x_u^*) = 0$ với mọi $\|u\| < \epsilon$. Theo tính duy nhất nghiệm s của hệ $\Phi(x, u) = 0$ trong lân cận của điểm $(x^*, 0)$, ta có $s(u) = x_u^*$ với mọi $\|u\| < \epsilon$. □

Bây giờ chúng ta sẽ hoàn thành chứng minh của Định lý 2.2.1.

Chứng minh định lý 2.2.1. Giả sử rằng đa diện Γ là thuận tiện. Theo Bổ đề 2.2.4, 2.2.5, và 2.2.6, $\mathcal{U}_\Gamma := \mathcal{B}_\Gamma \cap \mathcal{C}_\Gamma \cap \mathcal{D}_\Gamma$ là tập nửa đại số, mở và trù mật trong $\mathcal{A}_\Gamma$.

Lấy bất kỳ $f \in \mathcal{U}_\Gamma$ và giả sử rằng f là bị chặn dưới, tức là, $\inf_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) > -\infty$. Theo Bổ đề 2.2.11, f có duy nhất cực tiểu toàn cục $x^* \in \mathbb{R}^n$.

Với mỗi $u := (u_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{C}} \in \mathbb{R}^N$, xác định $f_u := f + \sum_{\alpha\in\mathcal{C}} u_\alpha x^\alpha \in \mathbb{R}[x]$. Lấy $\epsilon > 0$ sao cho kết luận của Bổ đề 2.2.12 thỏa mãn. Điều còn lại ta phải chứng minh (ii4). Để làm điều này, lấy $\{x_u\} \subset \mathbb{R}^n$ là dãy tùy ý với

$$\lim_{u\to 0}[f_u(x_u) - \inf_{x\in\mathbb{R}^n} f_u(x)] = 0.$$

Ta sẽ chỉ ra rằng $\lim_{u\to 0} x_u = x^*$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} |f_u(x_u) - f(x^*)| &\leq |f_u(x_u) - f_u(x_u^*)| + |f_u(x_u^*) - f(x^*)| \\ &= |f_u(x_u) - \inf_{x\in\mathbb{R}^n} f_u(x)| + |f_u(x_u^*) - f(x^*)|. \end{aligned}$$

Hệ quả, $\lim_{u\to 0} f_u(x_u) = f(x^*)$. Từ Bổ đề 2.2.12 suy ra rằng nếu $\|x_u\| \geq r$, thì $c_1 P_\Gamma(x_u) \leq f_u(x_u)$, và do vậy $c_1 P_\Gamma(x_u) \leq f(x^*) + M$ với số thực M nào đó đủ lớn. Chú ý rằng $P_\Gamma(x)$ là coercive do Bổ đề 2.2.9. Do đó, tập $\{x_u \ : \ \|u\| < \epsilon\}$ bị chặn. Cuối cùng, lấy y^* là điểm hội tụ khác của dãy $\{x_u\}$ khi $u \to 0$. Khi đó

$$f(x^*) = \lim_{u\to 0} f_u(x_u) = \lim_{u\to 0}\left[f(x_u) + \sum_{\alpha\in\mathcal{C}} u_\alpha (x_u)^\alpha\right] = \lim_{u\to 0} f(x_u) = f(y^*),$$

suy ra $y^* = x^*$ bởi vì x^* là điểm cực tiểu duy nhất của f. Do đó, $\lim_{u\to 0} x_u = x^*$. Chứng minh định lý được hoàn thành. $\square$

Chương 3

Bất đẳng thức Łojasiewicz toàn cục của hàm đa thức

Cho $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là một hàm giải tích trên tập compact $U \subset \mathbb{R}^n, 0 \in U$, với $f(0) = 0$. Khi đó bất đẳng thức Łojasiewicz cổ điển [Lo] khẳng định rằng, tồn tại hằng số $\alpha > 0$ và $c > 0$ sao cho

$$|f(x)| \geq c dist(x, f^{-1}(0))^{\alpha}, \text{với mọi } x \in U, \tag{3.1}$$

trong đó $dist(x, f^{-1}(0))$ là khoảng cách Euclid thông thường trong $\mathbb{R}^n$ từ điểm x đến tập $f^{-1}(0)$.
Sự tồn tại bất đẳng thức (3.1) chứng tỏ rằng:

- Nếu giá trị $|f(x)|$ gần đến 0 thì khoảng cách từ điểm x đến tập $f^{-1}(0)$ cũng gần đến 0.
- Nếu hàm giải tích f triệt tiêu tại một điểm thì nó triệt tiêu với một "bậc" hữu hạn (số α).

Bất đẳng thức (3.1) được thiết lập một cách độc lập bởi Hörmander (1958, trường hợp f là đa thức) và Łojasiewicz (1959, trường hợp f là hàm giải tích) để giải quyết một bài toán quan trọng trong lý thuyết các phương trình đạo hàm riêng, đó là bài toán chia một phân bố cho một đa thức (xem [Lo], [Ho]). Như mọi ý tưởng sâu sắc của toán học, bất đẳng thức này tìm được ứng dụng trong nhiều vấn đề của các lĩnh vực toán học khác nhau, từ giải tích toán học, lý thuyết tối ưu, đến hình học đại số và tô pô ([BM], [Br], [Ha1], [Ha2],[KMP], [Kur], [Te],...).

Trong bất đẳng thức (3.1), nếu thay tập compact U bằng toàn bộ $\mathbb{R}^n$ thì nói chung bất đẳng thức kiểu như trên không phải khi nào cũng tồn tại. Hay nói cách khác, dạng toàn cục của bất đẳng thức Łojasiewicz nói chung là không tồn tại.

Việc nghiên cứu bất đẳng thức Łojasiewicz toàn cục được tiến hành lần đầu tiên trong công trình [DHT], và được tiếp tục phát triển bởi những tác giả khác ([DKL], [HNS], [Ha2], [OR],...).

Ta nhắc lại kết quả sau đây của [Ha2].

Định lý 3.0.13. *([Ha2]) Cho f là đa thức n biến, $\Gamma^\infty(f)$ là đa diện Newton tại vô hạn của f. Giả sử rằng, $\Gamma^\infty(f)$ là thuận tiện. Khi đó, nếu f là không suy biến theo Kouchnirenko thì tồn tại các hằng số dương α, β, c sao cho*

$$|f(x)|^\alpha + |f(x)|^\beta \geq c dist(x, f^{-1}(0)),$$

với mọi $x \in \mathbb{R}^n$.

Vì tập các đa thức không suy biến đối với đa diện Newton lập thành một tập mở và trù mật trong không gian tất cả các đa thức có cùng một đa diện Newton, nên từ kết quả trên ta thấy rằng, với hầu hết các đa thức f không suy biến theo Kouchnirenko và có đa diện Newton thuận tiện, bất đẳng thức Łojasiewicz toàn cục luôn tồn tại đối với f.

Chương này tập trung nghiên cứu bất đẳng thức Łojasiewicz toàn cục của đa thức không thỏa mãn điều kiện không suy biến.

Trong [DHT], các tác giả đã đưa ra một tiêu chuẩn cho sự tồn tại của bất đẳng thức Łojasiewicz toàn cục cho trường hợp f là hàm đa thức. Tuy nhiên, việc kiểm tra tiêu chuẩn đó là rất khó.

Trong chương này, chúng tôi đưa ra một tiêu chuẩn khác. Tiêu chuẩn mới này cho phép kiểm tra sự tồn tại bất đẳng thức Łojasiewicz toàn cục của đa thức f một cách hữu hiệu hơn hẳn.

Giả sử $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là đa thức bậc d có dạng

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_0 x_n^d + a_1(x')x_n^{d-1} + \ldots + a_d(x'), \tag{3.2}$$

trong đó $a_i(x')$ là các đa thức theo biến $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, có bậc không vượt quá i. Đặt $V_1 : = \{x \in \mathbb{R}^n : \dfrac{\partial f}{\partial x_n} = 0\}$.
Chúng tôi sẽ chứng tỏ rằng tập V_1 có thể được xem như là tập kiểm tra (*testing set*) sự tồn tại bất đẳng thức Łojasiewicz toàn cục của f. Ngoài ra các số mũ Łojasiewicz cũng được khảo sát trong chương. Ở đây chúng tôi đánh giá các số mũ Łojasiewicz toàn cục của f thông qua các số mũ Łojasiewicz của f trên V_1 và bậc d của nó.

Nội dung của Chương này được viết dựa theo các Mục 2, 4 và một phần Mục 3 của bài báo **Huy Vui Ha and Van Doat Dang,** *On the Global Łojasiewicz inequality for polynomial functions. (34 pp)*(accepted for publication in Annales Polonici Mathematici.)

3.1 Giới thiệu bài toán

Bất đẳng thức (3.1) không còn đúng trên toàn bộ $\mathbb{R}^n$ là do hai nguyên nhân dễ thấy:

a) Giá trị của f trên một dãy điểm x^k có thể tiến đến 0, trong khi dãy giá trị khoảng cách $dist(x^k, f^{-1}(0))$ luôn lớn hơn một số dương M nào đó (xem [DHT], ví dụ 3.2);

b) Giá trị của f trên một dãy điểm x^k bị chặn bởi một số dương M nào đó, trong khi dãy giá trị khoảng cách $dist(x^k, f^{-1}(0))$ tiến ra $+\infty$, (xem [DHT], ví dụ 3.3).

Nếu $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là hàm đa thức, trong [DHT] đã đưa ra một tiêu chuẩn cho sự tồn tại của bất đẳng thức Łojasiewicz toàn cục trên $\mathbb{R}^n$ như sau

(i) Tồn tại các hằng số dương c, δ, α_0 sao cho

$$|f(x)| \geq c dist(x, f^{-1}(0))^{\alpha_0}, \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}^n, |f(x)| \leq \delta$$

nếu và chỉ nếu f không có *dãy loại một* x^k trên $\mathbb{R}^n$ theo nghĩa

$$x^k \to \infty, |f(x^k)| \to 0, dist(x^k, f^{-1}(0)) \geq M > 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Số} \quad \mathcal{L}_0(f)\colon = \inf\{\alpha_0 : |f(x)| \geq c dist(x, f^{-1}(0))^{\alpha_0},\\ \forall x \in \mathbb{R}^n, |f(x)| \leq \delta\}, \end{aligned}$$

gọi là *số mũ Łojasiewicz gần tập $f^{-1}(0)$ của f.*

(ii) Tồn tại các hằng số dương c, Δ, α_∞ sao cho

$$|f(x)| \geq c dist(x, f^{-1}(0))^{\alpha_\infty}, \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}^n, |f(x)| \geq \Delta$$

nếu và chỉ nếu f không có *dãy loại hai* x^k trên $\mathbb{R}^n$ theo nghĩa

$$x^k \to \infty, |f(x^k)| < M < +\infty, dist(x^k, f^{-1}(0)) \to +\infty.$$

$$\begin{aligned} \text{Số} \quad \mathcal{L}_\infty(f)\colon = \sup\{\alpha_\infty : |f(x)| \geq c dist(x, f^{-1}(0))^{\alpha_\infty},\\ \forall x \in \mathbb{R}^n, |f(x)| \geq \Delta\}, \end{aligned}$$

gọi là *số mũ Łojasiewicz xa tập $f^{-1}(0)$ của f.*

(iii) Tồn tại các hằng số dương $c, \alpha_0, \alpha_\infty$ sao cho

$$|f(x)| \geq c \min\{dist(x, f^{-1}(0))^{\alpha_0}, dist(x, f^{-1}(0))^{\alpha_\infty}\} \tag{3.3}$$

với mọi $x \in \mathbb{R}^n$ nếu và chỉ nếu f không có các dãy loại một và dãy loại hai trên $\mathbb{R}^n$.

Trong chương này, chúng tôi luôn gọi (3.3) là bất đẳng thức *Łojasiewicz toàn cục của* f.

Từ những vấn đề ở trên, chúng tôi quan tâm hai câu hỏi sau:

Câu hỏi 1: *Làm thế nào để kiểm tra điều kiện (iii) đúng hay không đúng?*

Câu hỏi 2: *Nếu điều kiện (iii) đúng, thì tính các số mũ Łojasiewicz* $\mathcal{L}_0(f), \mathcal{L}_\infty(f)$ *như thế nào?*

Chúng tôi sẽ đưa ra câu trả lời đầy đủ cho các câu hỏi trên trong trường hợp f là đa thức hai biến (xem Chương 4).

Trong toàn bộ chương này, luôn giả sử $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là đa thức bậc d có dạng

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_0 x_n^d + a_1(x')x_n^{d-1} + \cdots + a_d(x'), \qquad (3.4)$$

trong đó mỗi $a_i(x'), i = 0, \ldots, d$ là đa thức bậc không vượt quá i theo biến $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$.

Đặt

$$V_1\colon = \{x \in \mathbb{R}^n : \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0\},$$

ta sẽ chứng tỏ rằng tập V_1 có thể được xem như là tập kiểm tra (*testing set*) sự tồn tại bất đẳng thức Łojasiewicz toàn cục của f. Tức là, bất đẳng thức dạng (3.3) luôn đúng với mọi $x \in \mathbb{R}^n$ nếu và chỉ nếu có bất đẳng thức dạng tương tự (có thể khác nhau về hệ số và số mũ) luôn đúng với mọi x thuộc tập V_1. Sự kiện này rất hữu ích khi chúng ta nghiên cứu bất đẳng thức Łojasiewicz toàn cục của đa thức f trong trường hợp hai biến.

Ngoài Mục 3.1. giới thiệu bài toán, trong chương còn có 3 mục khác. Mục 3.2, trình bày bất đẳng thức Łojasiewicz của f trên tập V_1. Tùy theo dáng điệu của f trên tập V_1, nếu bất đẳng thức tồn tại thì nó sẽ có một trong bốn dạng, trong đó mỗi dạng sẽ được chỉ ra rõ ràng số mũ nào trong các số mũ Łojasiewicz được tham dự. Mục 3.3, nghiên cứu bất đẳng thức Łojasiewicz toàn cục của f. Ở đó, chúng tôi chứng minh bất đẳng thức Łojasiewicz toàn cục của f

tồn tại nếu và chỉ nếu bất đẳng thức Łojasiewicz của f trên V_1 tồn tại. Điều đó chứng tỏ tập V_1 là tập kiểm tra sự tồn tại bất đẳng thức Łojasiewicz toàn cục của f. Hơn nữa, như trong Mục 3.2, bất đẳng thức Łojasiewicz toàn cục của f cũng có bốn dạng, mỗi dạng trong chúng tương ứng với một dạng bất đẳng thức Łojasiewicz của f trên V_1. Các số mũ Łojasiewicz được khảo sát trong Mục 3.4. Ở đây, chúng tôi đánh giá các số mũ Łojasiewicz toàn cục của f thông qua các số mũ Łojasiewicz của f trên V_1 và bậc d của nó. Hơn nữa, chúng tôi cũng chỉ ra một vài trường hợp cụ thể mà số mũ Łojasiewicz toàn cục của f được tính theo số mũ Łojasiewicz của f trên tập V_1 và bậc d của nó.

Vai trò của tập V_1 trong việc nghiên cứu bất đẳng thức Łojasiewicz đã được quan tâm trong [DHT], [DKL] và [HNS]. Tập V_1 là tập kiểm tra cho sự tồn tại bất đẳng thức Łojasiewicz của mầm hàm trơn đã được trình bày trong [Ha3].

3.2 Bất đẳng thức Łojasiewicz trên tập V_1

Nhắc lại rằng, $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là đa thức bậc d có dạng

$$f(x', x_n) = a_0 x_n^d + a_1(x')x_n^{d-1} + \cdots + a_d(x'),$$

trong đó $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ và

$$V_1 \colon = \{x \in \mathbb{R}^n : \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0\}.$$

Trước hết, giả sử V_1 là tập khác rỗng và không chứa trong tập $f^{-1}(0)$.

Định nghĩa 3.2.1. Dãy $\{x^k\} \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là *dãy loại một của f trên $V_1 \subset \mathbb{R}^n$* nếu các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\{x^k\} \subset V_1, \quad x^k \to \infty, \quad f(x^k) \to 0$$

và

$$dist(x^k, f^{-1}(0)) \geq M > 0, \quad \text{với số dương } M \text{ nào đó.}$$

Mệnh đề 3.2.2. *Các phát biểu sau là tương đương*

(i) Không tồn tại dãy loại một của f trên V_1;

(ii) Tồn tại hằng số dương δ sao cho hoặc tập $\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| < \delta\} \cap V_1$ bằng rỗng hoặc tồn tại hằng số dương c và số hữu tỉ dương $\mathcal{L}_0(V_1)$ sao cho

$$|f(x)| \geq c dist(x, f^{-1}(0))^{\mathcal{L}_0(V_1)},$$

với mọi $x \in \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \leq \delta\} \cap V_1$.

Chứng minh. (i)$\Rightarrow$ (ii). Đặt

$$f_* := \inf_{x \in V_1} |f(x)|.$$

Nếu $f_* > 0$ thì với $0 < \delta < f_*$, tập $\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| < \delta\} \cap V_1$ bằng rỗng.

Giả sử $f_* = 0$. Với $t > 0$, đặt

$$\varphi(t) = \sup_{|f(x)|=t, x \in V_1} dist(x, f^{-1}(0)).$$

Vì $f_* = 0$, tập $\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| = t\} \cap V_1$ khác rỗng với mỗi $t > 0$ đủ gần 0. Theo (i), $\varphi(t)$ hoàn toàn xác định trên $[0, \delta)$, với $\delta > 0$ đủ nhỏ. Từ định lý Tarski - Seidenberg, suy ra $\varphi(t)$ là hàm nửa đại số. Hơn nữa, từ điều kiện (i) suy ra $\varphi(t) \to 0$ khi $t \to 0$. Do đó, tồn tại $c_0 \neq 0$ và số hữu tỉ dương $\alpha(V_1)$ sao cho

$$\varphi(t) = c_0 t^{\alpha(V_1)} + o(t^{\alpha(V_1)}), \text{ với } t \to 0.$$

Đặt $\mathcal{L}_0(V_1) := \dfrac{1}{\alpha(V_1)}$, ta có

$$|f(x)| \geq c dist(x, f^{-1}(0))^{\mathcal{L}_0(V_1)},$$

với mọi $x \in \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \leq \delta\} \cap V_1$ và với δ đủ nhỏ.

(ii)$\Rightarrow$(i) chứng minh dễ dàng. □

Nhận xét 3.2.3. Số mũ $\mathcal{L}_0(V_1)$ trong chứng minh trên bằng infimum của $\alpha > 0$ sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng

$$\exists c > 0, \delta > 0, |f(x)| \geq cdist(x, f^{-1}(0))^{\alpha}, \tag{3.5}$$

với mọi $x \in V_1 \cap \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| < \delta\}$.

Định nghĩa 3.2.4. Dãy $\{x^k\} \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là *dãy loại hai của f trên $V_1 \subset \mathbb{R}^n$* nếu các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\{x^k\} \subset V_1, x^k \to \infty, dist(x^k, f^{-1}(0)) \to +\infty,$$

và

$$|f(x^k)| < M < +\infty, \text{ với số dương } M \text{ nào đó.}$$

Đặt

$$f_*: = \inf_{x \in V_1} |f(x)|.$$

Định lý 3.2.5. *(Bất đẳng thức Łojasiewicz của f trên V_1)*
Các phát biểu sau là tương đương

(i) Không tồn tại các dãy loại một và loại hai của f trên V_1;

(ii) Các khẳng định sau là đúng

(a) Nếu $f_* > 0$ và hàm $dist(x, f^{-1}(0))$ bị chặn trên V_1 thì với mọi $\rho > 0$, tồn tại hằng số $c > 0$ sao cho

$$|f(x)| \geq cdist(x, f^{-1}(0))^{\rho},$$

với mọi $x \in V_1$;

(b) Nếu $f_* > 0$ và hàm $dist(x, f^{-1}(0))$ không bị chặn trên V_1 thì tồn tại hằng số $c > 0$ và số hữu tỉ $\mathcal{L}_\infty(V_1) > 0$ sao cho

$$|f(x)| \geq cdist(x, f^{-1}(0))^{\mathcal{L}_\infty(V_1)},$$

với mọi $x \in V_1$;

(c) *Nếu* $f_* = 0$ *và hàm* $dist(x, f^{-1}(0))$ *bị chặn trên* V_1 *thì tồn tại hằng số* $c > 0$ *và số hữu tỉ* $\mathcal{L}_0(V_1) > 0$ *sao cho*

$$|f(x)| \geq c dist(x, f^{-1}(0))^{\mathcal{L}_0(V_1)},$$

với mọi $x \in V_1$;

(d) *Nếu* $f_* = 0$ *và hàm* $dist(x, f^{-1}(0))$ *không bị chặn trên tập* V_1 *thì tồn tại hằng số* $c > 0$ *và các số hữu tỉ dương* $\mathcal{L}_\infty(V_1), \mathcal{L}_0(V_1)$ *sao cho*

$$|f(x)| \geq c \min\{dist(x, f^{-1}(0))^{\mathcal{L}_0(V_1)}, dist(x, f^{-1}(0))^{\mathcal{L}_\infty(V_1)}\},$$

với mọi $x \in V_1$.

Chứng minh. (ii) $\Rightarrow$ (i) là hiển nhiên.

(i) $\Rightarrow$ (ii):

Chứng minh (a): Giả sử $f_* > 0$ và

$$dist(x, f^{-1}(0)) \leq D < +\infty, \text{ với mọi } x \in V_1.$$

Lấy $\rho > 0$, khi đó với mọi $x \in V_1$, ta có

$$|f(x)| \geq f_* \geq \frac{f_*}{D^\rho} dist(x, f^{-1}(0))^\rho,$$

do đó (a) đúng.

Chứng minh (b): Giả sử $f_* > 0$ và hàm $dist(x, f^{-1}(0))$ không bị chặn trên V_1. Vì f không có dãy loại hai trên V_1, nên dễ dàng thấy

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| = t\} \cap V_1 \neq \emptyset,$$

với mọi $t > 0$ và t đủ lớn.

Đặt

$$\varphi(t) := \sup_{|f(x)|=t, x \in V_1} dist(x, f^{-1}(0)).$$

Từ (i), suy ra $\varphi(t)$ là hàm nửa đại số trên $[\Delta, +\infty)$. Do đó, tồn tại số hữu tỉ $\beta(V_1)$ và hằng số dương c_0 sao cho

$$\varphi(t) = c_0 t^{\beta(V_1)} + o(t^{\beta(V_1)}), \quad \text{khi } t \to \infty.$$

Hơn nữa, vì hàm $dist(x, f^{-1}(0))$ không bị chặn trên V_1 và hàm $\varphi(t) \to \infty$ khi $t \to \infty$, do đó $\beta(V_1) > 0$.
Đặt $\mathcal{L}_\infty(V_1) = \dfrac{1}{\beta(V_1)}$, bất đẳng thức trên suy ra

$$|f(x)| \geq cdist(x, f^{-1}(0))^{\mathcal{L}_\infty(V_1)},$$

với mọi $x \in \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \geq \Delta\} \cap V_1$, với $\Delta > 0$ đủ lớn.
Vì f không có dãy loại hai trên V_1, nên hàm $dist(x, f^{-1}(0))$ phải bị chặn trên tập

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f_* \leq |f(x)| \leq \Delta\} \cap V_1.$$

Vì vậy, ta có bất đẳng thức

$$|f(x)| \geq c' dist(x, f^{-1}(0))^{\mathcal{L}_\infty(V_1)}, \text{ với mọi } x \in V_1,$$

trong đó c' là hằng số dương.
Chứng minh (c): Giả sử $f_* = 0$ và hàm $dist(x, f^{-1}(0))$ bị chặn trên V_1. Vì f không có dãy loại một trên V_1, nên theo Mệnh đề 3.2.2, tồn tại các hằng số $c > 0$ và $\delta > 0$ sao cho

$$|f(x)| \geq cdist(x, f^{-1}(0))^{\mathcal{L}_0(V_1)},$$

với mọi $x \in \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \leq \delta\} \cap V_1$.
Vì $dist(x, f^{-1}(0)) \leq D$ trên tập $\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \geq \delta\} \cap V_1$. Chọn $c' = \dfrac{\delta}{D^{\mathcal{L}_0(V_1)}}$, ta có

$$|f(x)| \geq c' dist(x, f^{-1}(0))^{\mathcal{L}_0(V_1)},$$

với mọi $x \in \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \geq \delta\} \cap V_1$.
Vì vậy, ta có

$$|f(x)| \geq \min(c, c') dist(x, f^{-1}(0))^{\mathcal{L}_0(V_1)}, \text{ với mọi } x \in V_1.$$

Chứng minh (d): Giả sử $f_* = 0$ và hàm $dist(x, f^{-1}(0))$ không bị chặn trên V_1.
Đặt

$$\varphi(t) := \sup_{|f(x)|=t, x \in V_1} dist(x, f^{-1}(0)).$$

Vì (i) luôn đúng, nên φ là hàm nửa đại số xác định trên $(0, \delta)$ và $[\Delta; +\infty)$, trong đó $\delta > 0$ đủ nhỏ và $\Delta > 0$ đủ lớn. Khi đó ta có

$$\varphi(t) = c_0 t^{\alpha(V_1)} + o(t^{\alpha(V_1)}), \text{ khi } t \to 0$$

và

$$\varphi(t) = c_0' t^{\beta(V_1)} + o(t^{\beta(V_1)}), \text{ khi } t \to +\infty.$$

Do đó, tồn tại $\delta > 0$ đủ nhỏ, $\Delta > 0$ đủ lớn và $c' > 0$ sao cho

$$|f(x)| \geq c' dist(x, f^{-1}(0))^{\mathcal{L}_0(V_1)},$$

với mọi $x \in \{x \in \mathbb{R}^n || f(x)| < \delta\} \cap V_1$ và

$$|f(x)| \geq c' dist(x, f^{-1}(0))^{\mathcal{L}_\infty(V_1)},$$

với mọi $x \in \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \Delta\} \cap V_1$.

Vì không tồn tại dãy loại hai của f trên V_1, hàm $dist(x, f^{-1}(0))$ bị chặn trên $\{x \in \mathbb{R}^n : \delta \leq |f(x)| \leq \Delta\} \cap V_1$. Vì vậy, dễ dàng thấy rằng tồn tại $c > 0$ sao cho

$$|f(x)| \geq c \min\{dist(x, f^{-1}(0))^{\mathcal{L}_0(V_1)}, dist(x, f^{-1}(0))^{\mathcal{L}_\infty(V_1)}\},$$

với mọi $x \in V_1$. Định lý 3.2.5 được chứng minh. □

Nhận xét 3.2.6. Số mũ $\mathcal{L}_\infty(V_1)$ trong chứng minh trên bằng supermum của $\beta > 0$ sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng

$$\exists c > 0, \exists \Delta > 0, |f(x)| \geq c dist(x, f^{-1}(0))^{\beta}, \tag{3.6}$$

với mọi $x \in V_1, |f(x)| \geq \Delta$.

Định nghĩa 3.2.7. Số mũ $\mathcal{L}_0(V_1)$ và $\mathcal{L}_\infty(V_1)$ được gọi là *số mũ Łojasiewicz gần tập $f^{-1}(0)$* và *xa tập $f^{-1}(0)$ của f trên V_1*, tương ứng.

3.3 Bất đẳng thức Łojasiewicz toàn cục

Trong phần này, chúng tôi chứng minh bất đẳng thức Łojasiewicz toàn cục của f tồn tại nếu và chỉ nếu bất đẳng thức Łojasiewicz của f trên V_1 tồn tại. Hơn nữa, các dạng của bất đẳng thức Łojasiewicz toàn cục của f được đưa ra tương ứng với các dạng của bất đẳng thức Łojasiewicz của f trên V_1.

Trước hết, chúng tôi xét trường hợp V_1 là tập rỗng hoặc $V_1 \subset f^{-1}(0)$.

Định lý 3.3.1. *Giả sử V_1 là tập rỗng hoặc $V_1 \subset f^{-1}(0)$. Khi đó, tồn tại hằng số $c > 0$ sao cho*

$$|f(x)| \geq c dist(x, f^{-1}(0))^d,$$

với mọi $x \in \mathbb{R}^n$.

Chứng minh. Kết quả này là hệ quả trực tiếp của Định lý 2.1 trong [HNS], nói rằng nếu $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là hàm lớp $C^{(d)}$ sao cho

$$\left|\frac{\partial^d f}{\partial x_n^d}(x)\right| \geq \rho > 0, \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}^n,$$

khi đó

$$|f(x)| \geq \frac{\rho}{d!2^{2d-1}} dist(x, V_1 \cup f^{-1}(0))^d, \quad \text{với mọi } x \in \mathbb{R}^n.$$

□

Kết quả ngay dưới đây đóng vai trò then chốt cho việc nghiên cứu bất đẳng thức Łojasiewicz.

Bổ đề 3.3.2. *Cho $f(x)$ là đa thức dạng (3.4) và điểm $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, $x \notin f^{-1}(0) \cup V_1$. Khi đó, tồn tại điểm $x^* = (x', x_n^*) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện sau*

(i) $x^* \in f^{-1}(0) \cup V_1$;

(ii) $|f(x^*)| \leq |f(x)|$;

(iii) $\|x - x^*\| \leq (2e)[|a_0|d!(d+1)!]^{\frac{1}{d}}|f(x)|^{\frac{1}{d}}$, $e = \lim \left(1 + \dfrac{1}{k}\right)^k$.

Chứng minh. Lấy bất kỳ $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ sao cho $x \notin f^{-1}(0) \cup V_1$. Đặt $\varphi(t) \colon = f(x', t)$ và $\Omega(x') \colon = \{t \in \mathbb{R} : |\varphi(t)| \leq |f(x)|\}$.
Vì $|\varphi^{(d)}(t)| = |a_0|d!$ với mọi $t \in \mathbb{R}$, theo Bổ đề Van der Corput (xem [Gr], 2.6.2) ta có

$$mes\Omega(x') \leq (2e)[|a_0|d!(d+1)!]^{\frac{1}{d}}|f(x)|^{\frac{1}{d}} \tag{3.7}$$

Do $\Omega(x')$ là tập nửa đại số trong $\mathbb{R}$, nên

$$\Omega(x') = \cup_{i=1}^{k}[a_i, b_i] \cup \{y_1, \ldots, y_s\},$$

trong đó $a_i < b_i$ và

$$|f(x', a_i)| = |f(x', b_i)| = |f(x', y_j)| = |f(x)|,$$

với $i = 1, \ldots, k; j = 1, \ldots, s$.
Hiển nhiên, $x_n \in \{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k, y_1, \ldots, y_s\}$.
Ta cần chứng minh $x_n \in \{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k\}$.
Bằng phản chứng, giả sử không có trường hợp nào, tức là $x_n = y_j$ với $j \in \{1, \ldots, s\}$ nào đó. Vì y_j là điểm cô lập của $\Omega(x')$, khi đó hàm $\varphi(t)$ đạt cực trị địa phương tại điểm $x_n = y_j$. Suy ra

$$\frac{d\varphi}{dt}(x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = 0,$$

nghĩa là $x \in V_1$, mâu thuẫn. Vì vậy, không mất tính tổng quát, giả sử rằng $x_n = a_1$. Khi đó, vì

$$|f(x', a_1)| = |f(x', b_1)| = |f(x)| \neq 0,$$

nên $f(x', a_1)f(x', b_1) < 0$ hoặc $f(x', a_1)f(x', b_1) > 0$.
Trước hết, giả sử $f(x', a_1)f(x', b_1) < 0$. Khi đó, tồn tại $t_1 \in (a_1, b_1)$

sao cho $f(x', t_1) = 0$. Do đó, điểm $x^* = (x', t_1)$ thuộc vào tập $f^{-1}(0)$. Theo (3.7), ta có

$$\|x - x^*\| = |a_1 - t_1| \leq mes\Omega(x') \leq (2e)[|a_0|d!(d+1)!]^{\frac{1}{d}}|f(x)|^{\frac{1}{d}}$$

và x^* thỏa mãn (i) - (iii).

Bây giờ, giả sử $f(x', a_1)f(x', b_1) > 0$. Khi đó, ta có $f(x', a_1) = f(x', b_1) \in \{\pm|f(x)|\}$. Theo định lý Rolle, tồn tại điểm $t_0 \in (a_1, b_1)$ sao cho $\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x', t_0) = 0$.

Đặt $x^* := (x', t_0)$, khi đó $x^* \in V_1$. Vì $t_0 \in (a_1, b_1) \subset \Omega(x')$, $|f(x^*)| \leq |f(x)|$ và

$$\|x - x^*\| \leq (2e)[|a_0|d!(d+1)!]^{\frac{1}{d}}|f(x)|^{\frac{1}{d}}.$$

Bổ đề 3.3.2 được chứng minh. □

Định lý 3.3.3. (Bất đẳng thức Łojasiewicz toàn cục)
Các phát biểu sau là tương đương

(i) Không tồn tại các dãy loại một và loại hai của f trên $\mathbb{R}^n$;

(ii) Tồn tại các hằng số $c > 0, \alpha > 0$ và $\beta > 0$ sao cho

$$|f(x)| \geq c\min\{dist(x, f^{-1}(0))^{\alpha}, dist(x, f^{-1}(0))^{\beta}\},$$

với mọi $x \in \mathbb{R}^n$;

(iii) Không tồn tại các dãy loại một và loại hai của f trên V_1;

(iv) Các khẳng định sau là đúng

(a) Nếu $f_* > 0$ và hàm $dist(x, f^{-1}(0))$ bị chặn trên V_1, khi đó tồn tại hằng số $c > 0$ sao cho

$$|f(x)| \geq c dist(x, f^{-1}(0))^d,$$

với mọi $x \in \mathbb{R}^n$;

(b) *Nếu* $f_* > 0$ *và hàm* $dist(x, f^{-1}(0))$ *không bị chặn trên* V_1, *khi đó tồn tại hằng số* $c > 0$ *sao cho*

$$|f(x)| \geq c \min\{dist(x, f^{-1}(0))^{\mathcal{L}_\infty(V_1)}, dist(x, f^{-1}(0))^d\},$$

với mọi $x \in \mathbb{R}^n$;

(c) *Nếu* $f_* = 0$ *và hàm* $dist(x, f^{-1}(0))$ *bị chặn trên* V_1, *khi đó tồn tại hằng số* $c > 0$ *sao cho*

$$|f(x)| \geq c \min\{dist(x, f^{-1}(0))^{\mathcal{L}_0(V_1)}, dist(x, f^{-1}(0))^d\},$$

với mọi $x \in \mathbb{R}^n$;

(d) *Nếu* $f_* = 0$ *và hàm* $dist(x, f^{-1}(0))$ *không bị chặn trên* V_1, *khi đó tồn tại hằng số* $c > 0$ *sao cho*

$$|f(x)| \geq c \min\{dist(x, f^{-1}(0))^{\mathcal{L}_0(V_1)}, dist(x, f^{-1}(0))^{\mathcal{L}_\infty(V_1)}, dist(x, f^{-1}(0))^d\},$$

với mọi $x \in \mathbb{R}^n$.

Chứng minh. (i)$\Leftrightarrow$ (ii) đã được chứng minh trong ([DHT], Mệnh đề 3.10).
Dễ dàng chứng minh được (i) $\Rightarrow$ (iii) và (iv) $\Rightarrow$ (i).
Phần còn lại chỉ cần chứng minh (iii) $\Rightarrow$ (iv). Trước hết cần bổ đề sau:

Bổ đề 3.3.4. *Giả sử tồn tại các hằng số* $c_0 > 0$ *và* $\rho_1 > 0, \ldots, \rho_s > 0$ *sao cho*

$$|f(x)| \geq c_0 \min\{dist(x, f^{-1}(0))^{\rho_i}, i = 1, \ldots, s\}, \tag{3.8}$$

với mọi $x \in V_1$. *Khi đó, tồn tại hằng số* $c > 0$ *sao cho*

$$|f(x)| \geq c \min\{dist(x, f^{-1}(0))^{\rho_i}, dist(x, f^{-1}(0))^d, i = 1, \ldots, s\}, \tag{3.9}$$

với mọi $x \in \mathbb{R}^n$.

Chứng minh Bổ đề 3.3.4. Xét $x = (x', x_n)$ là điểm bất kỳ của $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$. Nếu $x \in f^{-1}(0)$ thì (3.9) hiển nhiên đúng. Nếu $x \in V_1$, thì (3.9) được suy ra từ (3.8).

Bây giờ giả sử $x \notin f^{-1}(0) \cup V_1$, khi đó theo Bổ đề 3.3.2, tồn tại $x^* \in \mathbb{R}^n$ sao cho

$$x^* \in V_1 \cup f^{-1}(0), |f(x^*)| \leq |f(x)| \tag{3.10}$$

và

$$(2e)^{-1}[|a_0|d!(d+1)!]^{\frac{-1}{d}} \|x - x^*\| \leq |f(x)|^{\frac{1}{d}} \tag{3.11}$$

Rõ ràng, nếu $x^* \in f^{-1}(0)$ thì (3.9) được suy ra từ (3.11).

Giả sử $x^* \in V_1$. Gọi $H(x^*)$ là điểm trên $f^{-1}(0)$ sao cho

$$dist(x^*, f^{-1}(0)) = \|x^* - H(x^*)\|.$$

Xét hai khả năng xảy ra.

Nếu

$$\|x - x^*\| \leq \|x^* - H(x^*)\|,$$

thì

$$dist(x, f^{-1}(0)) \leq \|x - H(x^*)\| \leq 2\|x^* - H(x^*)\| = 2dist(x^*, f^{-1}(0)).$$

Vì $\rho_i > 0$, với $i = 1, 2, \ldots, s$, ta có

$$2^{-\rho_i} dist(x, f^{-1}(0))^{\rho_i} \leq dist(x^*, f^{-1}(0))^{\rho_i}.$$

Khi đó (3.9) dễ dàng được suy ra từ (3.8) và (3.10).

Nếu

$$\|x - x^*\| \geq \|x^* - H(x^*)\|,$$

thì

$$dist(x, f^{-1}(0)) \leq 2\|x - x^*\|$$

Do đó, theo (3.11), tồn tại $c > 0$ sao cho

$$cdist(x, f^{-1}(0))^d \leq |f(x)|.$$

và (3.9) luôn đúng. Bổ đề 3.3.4 được chứng minh.

Bây giờ chúng ta chứng minh (iii)$\Rightarrow$ (iv): Các khẳng định (b), (c) và (d) được suy ra từ Định lý 3.2.5 và Bổ đề 3.3.4.
Ta chứng minh (a). Theo Định lý 3.2.5, nếu $f_* > 0$ và nếu hàm $dist(x, f^{-1}(0))$ bị chặn trên tập V_1, khi đó với mọi $\rho > 0$, tồn tại $c_0 > 0$ sao cho

$$|f(x)| \geq c_0 dist(x, f^{-1}(0))^{\rho}, \tag{3.12}$$

với mọi $x \in V_1$.
Chọn $\rho = d$ trong (3.12), khi đó khẳng định (a) của (iv) được suy ra từ (3.12) và Bổ đề 3.3.4. Định lý 3.3.3 được chứng minh. □

Bây giờ ta xét câu hỏi: *Kiểm tra điều kiện tồn tại bất đẳng thức Łojasiewicz bằng cách nào?*

Nếu $n > 2$, bài toán vẫn còn khó, nhưng với $n = 2$, thì nó dễ dàng được kiểm tra trong Chương 4.

3.4 Số mũ của bất đẳng thức Łojasiewicz

Trong mục này, luôn giả sử

- f là đa thức có dạng (3.4);
- Bất đẳng thức Łojasiewicz toàn cục của f luôn tồn tại.

Khi đó ta có thể định nghĩa số mũ $\mathcal{L}_0(f)$ và $\mathcal{L}_\infty(f)$, được gọi tương ứng là *số mũ Łojasiewicz gần tập* $f^{-1}(0)$ và *số mũ Łojasiewicz xa tập* $f^{-1}(0)$ *của* f trên $\mathbb{R}^n$.
Trước khi định nghĩa $\mathcal{L}_0(f)$ và $\mathcal{L}_\infty(f)$, chúng tôi bắt đầu với một kết quả đơn giản. Nếu $h(t)$ và $g(t)$ là các hàm số dương theo biến $t \in \mathbb{R}$, kí hiệu $h(t) \asymp g(t)$ được hiểu là

$$\lim_{t\to\infty} \frac{h(t)}{g(t)} = c \neq 0.$$

Bổ đề 3.4.1. *Cho f là đa thức dạng (3.4) và $(0,a) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Khi đó ta có*

$$|f(0,a)| \asymp |a|^d \asymp dist((0,a), f^{-1}(0))^d.$$

Chứng minh. Hiển nhiên $|f(0,a)| \asymp |a|^d$.

Ta sẽ chứng minh $|a|^d \asymp dist((0,a), f^{-1}(0))^d$, điều đó có nghĩa là $|a| \asymp dist((0,a), f^{-1}(0))$.

Khẳng định. Tồn tại các hằng số $r > 0$ và $c > 0$ sao cho nếu $(x', \lambda(x')) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ là một điểm của $f^{-1}(0)$, với $\|x'\| \geq r$, thì

$$|\lambda(x')| \leq c\|x'\|.$$

Chứng minh khẳng định: Bằng phản chứng, giả sử tồn tại một dãy $x^k = (x'^k, \lambda(x'^k)) \to \infty$ sao cho $f(x^k) = 0$ và $\lim \dfrac{|\lambda(x'^k)|}{\|x'^k\|} = \infty$. Khi đó, vì

$$f(x', x_n) = a_0 x_n^d + a_1(x') x_n^{d-1} + \cdots + a_d(x')$$

và $deg(a_i(x')) \leq i$, nên ta có

$$\lim \frac{|a_i(x'^k)|}{|\lambda(x'^k)|^i} \to 0 \quad \text{khi } \|x'^k\| \to \infty.$$

Hơn nữa, $(x'^k, \lambda(x'^k)) \in f^{-1}(0)$, nên

$$a_0 + \frac{a_1(x'^k)}{\lambda(x'^k)} + \cdots + \frac{a_d(x'^k)}{\lambda(x'^k)^d} = 0,$$

suy ra $a_0 = 0$, điều này mâu thuẫn giả thiết.

Trong phần này chúng tôi sử dụng chuẩn l^1 trên $\mathbb{R}^n$: Nếu $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ thì

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_{l^1} := \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Lấy c và r như trong khẳng định trên và lấy $(x'_0, x_{n0}) \in f^{-1}(0)$, ta có

$$\begin{aligned} dist((0,a), f^{-1}(0)) &\leq \|(0,a) - (x'_0, x_{n0})\|_{l^1} \\ &= \|x'_0\|_{l^1} + |a - x_{n0}| \sim |a|. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Xét $(x'(a), \lambda(x'(a))) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ là điểm thuộc $f^{-1}(0)$ sao cho

$$dist((0, a), f^{-1}(0)) = \|(x'(a), \lambda(x'(a))) - (0, a)\|_{l^1}.$$

Vì khoảng cách từ điểm $(x'(a), \lambda(x'(a)))$ đến siêu phẳng $x_n = 0$ bằng $|\lambda(x'(a))|$, nên ta có

$$\begin{aligned} |a| &= \|(0, a) - (0, 0)\|_{l^1} \\ &\leq \|(0, a) - (x'(a), \lambda(x'(a)))\|_{l^1} + |\lambda(x'(a))|. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Trước hết, giả sử $\|x'(a)\|_{l^1} \leq r$. Khi đó, vì f có dạng (3.4), nên tập

$$\{(x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : \|x'\|_{l^1} \leq r, f(x', x_n) = 0\}$$

là compact. Do đó tồn tại hằng số $\varphi(r) > 0$ sao cho $|x_n| \leq \varphi(r)$ nếu $f(x', x_n) = 0$ và $\|x'\|_{l^1} \leq r$. Từ (3.14) suy ra

$$\begin{aligned} |a| &\leq \|(0, a) - (x'(a), \lambda(x'(a)))\|_{l^1} + \varphi(r) \\ &= dist((0, a), f^{-1}(0)) + \varphi(r) \asymp dist((0, a), f^{-1}(0)) \end{aligned} \tag{3.15}$$

Từ (3.13) và (3.15), ta có

$$|a| \asymp dist((0, a), f^{-1}(0)) \text{ nếu } \|x'(a)\|_{l^1} \leq r.$$

Giả sử $\|x'(a)\|_{l^1} \geq r$, khi đó từ (3.14) suy ra

$$\begin{aligned} |a| &\leq \|x'(a)\|_{l^1} + |a - \lambda(x'(a))| + |\lambda(x'(a))| \\ &\leq \|x'(a)\|_{l^1} + |a - \lambda(x'(a))| + c\|x'(a)\|_{l^1} \\ &\leq (c + 1)(\|x'(a)\|_{l^1} + |a - \lambda(x'(a))|) \\ &= (c + 1)dist((0, a), f^{-1}(0)). \end{aligned}$$

Vậy $|a| \asymp dist((0, a), f^{-1}(0))$ và Bổ đề 3.4.1 được chứng minh. □

Giả sử không tồn tại các dãy loại một và loại hai của f trên $\mathbb{R}^n$. Khi đó hàm

$$\varphi(t) = \sup_{|f(x)|=t} dist(x, f^{-1}(0)),$$

hoàn toàn xác định trên khoảng $(0, +\infty)$ và là hàm nửa đại số. Do đó, tồn tại các hằng số $c_0 > 0, c_\infty > 0$ và các số hữu tỉ α và β sao cho

$$\varphi(t) = c_0 t^\alpha + o(t^\alpha), \quad \text{nếu } \ t \to 0,$$

và

$$\varphi(t) = c_\infty t^\beta + o(t^\beta), \quad \text{nếu } \ t \to \infty.$$

Vì không có dãy loại một nên $\varphi(t) \to 0$ nếu $t \to 0$, do đó $\alpha > 0$. Từ Bổ đề 3.4.1 suy ra $\varphi(t) \to +\infty$ nếu $t \to +\infty$, điều này kéo theo $\beta > 0$.

Đặt $\mathcal{L}_0(f) = \dfrac{1}{\alpha}$ và $\mathcal{L}_\infty(f) = \dfrac{1}{\beta}$, khi đó tồn tại $\delta \in (0, 1)$ đủ nhỏ, $\Delta \gg 1$ đủ lớn và các hằng số $c_1 > 0, c_2 > 0$ sao cho

$$|f(x)| \geq c_1 dist(x, f^{-1}(0))^{\mathcal{L}_0(f)}, \text{với mọi } x \in \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| < \delta\},$$

và

$$|f(x)| \geq c_2 dist(x, f^{-1}(0))^{\mathcal{L}_\infty(f)}, \text{với mọi } x \in \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \Delta\}.$$

Hơn nữa, số mũ $\mathcal{L}_0(f)$ và $\mathcal{L}_\infty(f)$ thỏa mãn các công thức tương ứng sau

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(f) = \inf\{\rho > 0 : \exists \delta > 0 \ \text{ và } \ c > 0 \,\text{sao cho} \\ |f(x)| \geq c dist(x, f^{-1}(0))^\rho \\ \text{với mọi}\, x \in \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \leq \delta\}\}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

và

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\infty(f) = \sup\{\rho > 0 : \exists \Delta \gg 1 \ \text{ và } \ c > 0 \ \text{sao cho} \\ |f(x)| \geq c dist(x, f^{-1}(0))^\rho \\ \text{với mọi } \ x \in \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \geq \Delta\}\}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Định nghĩa 3.4.2. ([Ha2]) Ta gọi $\mathcal{L}_0(f)$ và $\mathcal{L}_\infty(f)$, tương ứng là *số mũ Łojasiewicz gần tập* $f^{-1}(0)$ và *số mũ Łojasiewicz xa tập* $f^{-1}(0)$ của f.

Trong phần này chúng tôi đánh giá $\mathcal{L}_0(f)$ và $\mathcal{L}_\infty(f)$ theo bậc d của f và các số mũ $\mathcal{L}_0(V_1)$ và $\mathcal{L}_\infty(V_1)$, trong đó các số mũ $\mathcal{L}_0(V_1)$ và $\mathcal{L}_\infty(V_1)$ được xác định trong Mục 3.2.

Đặt

$$\Omega_1 \colon = \{x \in \mathbb{R}^n : dist(x, f^{-1}(0)) < 1\}$$

và

$$\Omega_2 \colon = \{x \in \mathbb{R}^n : dist(x, f^{-1}(0)) \geq 1\}.$$

Đặt

$$\mathcal{L}(f, \Omega_1) \colon = \inf\{\rho > 0 : \exists c > 0, |f(x)| \geq c dist(x, f^{-1}(0))^\rho, \forall x \in \Omega_1\}$$

và

$$\mathcal{L}(f, \Omega_2) \colon = \sup\{\rho > 0 : \exists c > 0, |f(x)| \geq c dist(x, f^{-1}(0))^\rho, \forall x \in \Omega_2\}.$$

Mệnh đề 3.4.3. *Giả sử f không có các dãy loại một và dãy loại hai. Khi đó*

i) $\mathcal{L}_0(f) = \mathcal{L}(f, \Omega_1)$;

ii) $\mathcal{L}_\infty(f) = \mathcal{L}(f, \Omega_2)$.

Chứng minh. i) Chứng minh $\mathcal{L}_0(f) = \mathcal{L}(f, \Omega_1)$. Trước hết chứng minh $\mathcal{L}_0(f) \geq \mathcal{L}(f, \Omega_1)$. Vì f không có các dãy loại một, nên tồn tại $c > 0$ và $\delta > 0$ sao cho

$$|f(x)| \geq c dist(x, f^{-1}(0))^{\mathcal{L}_0(f)},$$

với mọi $x \in \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| < \delta\}$.

Chọn $\delta_0 > 0$ sao cho $\delta_0 < \min\{\delta, c\}$, khi đó có thể chứng minh $\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \leq \delta_0\} \subset \Omega_1$. Hiển nhiên, nếu $x \in \Omega_1 \setminus \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| < \delta_0\}$ thì

$$|f(x)| \geq \delta_0 > \delta_0 dist(x, f^{-1}(0))^{\mathcal{L}_0(f)}.$$

Khi đó, có thể kết luận

$$|f(x)| \geq c_* dist(x, f^{-1}(0))^{\mathcal{L}_0(f)},$$

với $c_* = \min\{c, \delta_0\} = \delta_0$, luôn đúng với mọi $x \in \Omega_1$. Do đó, $\mathcal{L}_0(f) \geq \mathcal{L}(f, \Omega_1)$.

Chứng minh $\mathcal{L}_0(f) \leq \mathcal{L}(f, \Omega_1)$. Lấy $\rho > 0$ và giả sử tồn tại $c > 0$ sao cho

$$|f(x)| \geq cdist(x, f^{-1}(0))^\rho \text{ với mọi } x \in \Omega_1.$$

Bất đẳng thức $\mathcal{L}_0(f) \leq \mathcal{L}(f, \Omega_1)$ sẽ được chứng minh nếu chứng minh được $\rho \geq \mathcal{L}_0(f)$.

Lấy δ_0 là hằng số xác định trong chứng minh trên. Khi đó

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| < \delta_0\} \subset \Omega_1.$$

Do đó

$$|f(x)| \geq cdist(x, f^{-1}(0))^\rho,$$

với mọi $x \in \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| < \delta_0\}$.

Vì $\mathcal{L}_0(f)$ thỏa mãn (3.16), suy ra $\mathcal{L}_0(f) \leq \rho$. Vậy $\mathcal{L}_0(f) = \mathcal{L}(f, \Omega_1)$.

ii) Chứng minh $\mathcal{L}_\infty(f) = \mathcal{L}(f, \Omega_2)$. Trước hết chứng minh $\mathcal{L}_\infty(f) \leq \mathcal{L}(f, \Omega_2)$. Vì f không có dãy loại hai, nên tồn tại $c > 0$ và $\Delta \gg 1$ sao cho

$$|f(x)| \geq cdist(x, f^{-1}(0))^{\mathcal{L}_\infty(f)}, \tag{3.18}$$

với mọi $x \in \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \geq \Delta\}$. Hơn nữa, hàm $dist(x, f^{-1}(0))$ bị chặn trên tập

$$\Omega_2 \setminus \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \geq \Delta\},$$

tức là

$$D\colon = \sup\{dist(x, f^{-1}(0)) : x \in \Omega_2 \text{ và } |f(x)| \leq \Delta\} < +\infty.$$

Vì f không có dãy loại một nên $|f(x)| \geq \delta > 0$ trên tập $\Omega_2 \setminus \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \geq \Delta\}$. Do đó, nếu $x \in \Omega_2 \setminus \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \geq \Delta\}$ ta có

$$|f(x)| \geq \delta \geq \frac{\delta}{D^{\mathcal{L}_\infty(f)}} dist(x, f^{-1}(0))^{\mathcal{L}_\infty(f)} \tag{3.19}$$

Từ (3.18) và (3.19) suy ra

$$|f(x)| \geq cdist(x, f^{-1}(0))^{\mathcal{L}_\infty(f)},$$

với mọi $x \in \Omega_2$. Theo định nghĩa của $\mathcal{L}(f, \Omega_2)$ ta có

$$\mathcal{L}_\infty(f) \le \mathcal{L}(f, \Omega_2).$$

Chứng minh $\mathcal{L}_\infty(f) \ge \mathcal{L}(f, \Omega_2)$. Lấy $\rho > 0$ và $c > 0$ sao cho

$$|f(x)| \ge c dist(x, f^{-1}(0))^\rho, \tag{3.20}$$

với mọi $x \in \Omega_2$. Lấy $x \in \mathbb{R}^n$ sao cho $|f(x)| \ge c$ và $dist(x, f^{-1}(0)) < 1$. Vì $\rho > 0$ nên

$$|f(x)| \ge c dist(x, f^{-1}(0))^\rho.$$

Từ điều trên cùng với (3.20) suy ra

$$|f(x)| \ge c dist(x, f^{-1}(0))^\rho,$$

với mọi $x \in \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \ge c\}$.

Từ (3.17) ta có $\rho \le \mathcal{L}_\infty(f)$, và theo định nghĩa của $\mathcal{L}(f, \Omega_2)$, suy ra $\mathcal{L}_\infty(f) \ge \mathcal{L}(f, \Omega_2)$. Đẳng thức $\mathcal{L}_\infty(f) = \mathcal{L}(f, \Omega_2)$ được chứng minh. □

Bây giờ chúng tôi thiết lập quan hệ các số mũ Łojasiewicz $\mathcal{L}_0(f)$ và $\mathcal{L}_\infty(f)$ thông qua d và các số mũ $\mathcal{L}_0(V_1)$, $\mathcal{L}_\infty(V_1)$.

Theo Định lý 3.3.3, nếu bất đẳng thức Łojasiewicz của f luôn đúng, thì nó có một trong bốn dạng được mô tả trong (iv) của Định lý 3.3.3. Chúng tôi sẽ xét các trường hợp riêng rẽ.

Bổ đề 3.4.4. *Ta có*

(i) $\mathcal{L}_\infty(f) \le \min\{\mathcal{L}_\infty(V_1), d\}$;

(ii) $\mathcal{L}_0(f) \ge \mathcal{L}_0(V_1)$.

Chứng minh. (i): Từ Bổ đề 3.4.1 suy ra $\mathcal{L}_\infty(f) \le d$, và bất đẳng thức $\mathcal{L}_\infty(f) \le \mathcal{L}_\infty(V_1)$ là hệ quả của (3.6).

(ii): Suy ra từ (3.5). □

Bây giờ xét các trường hợp $(a) - (d)$ như trong (iv) của Định lý 3.3.3.

Mệnh đề 3.4.5. *Giả sử f không có các dãy loại một và loại hai trên V_1, khi đó các khẳng định sau luôn đúng*

Trường hợp (a): Với $f_* > 0$ và hàm $dist(x, f^{-1}(0))$ bị chặn trên V_1 ta có

$$\mathcal{L}_0(V_1) \leq \mathcal{L}_0(f) \leq d \text{ và } \mathcal{L}_\infty(f) = d;$$

Trường hợp (b): Với $f_* > 0$ và hàm $dist(x, f^{-1}(0))$ không bị chặn trên V_1 ta có

$$\mathcal{L}_0(V_1) \leq \mathcal{L}_0(f) \leq \max\{\mathcal{L}_\infty(V_1), d\},$$

$$\text{và } \mathcal{L}_\infty(f) = \min\{\mathcal{L}_\infty(V_1), d\};$$

Trường hợp (c): Với $f_* = 0$ và hàm $dist(x, f^{-1}(0))$ bị chặn trên V_1 ta có

(i) Nếu $\mathcal{L}_0(V_1) \geq d$ thì

$$\mathcal{L}_\infty(f) = d, \text{ và } \mathcal{L}_0(f) = \mathcal{L}_0(V_1);$$

(ii) Nếu $\mathcal{L}_0(V_1) < d$ thì

$$\mathcal{L}_0(V_1) \leq \mathcal{L}_0(f) \leq d, \text{ và } \mathcal{L}_0(V_1) \leq \mathcal{L}_\infty(f) \leq d;$$

Trường hợp (d): Với $f_* = 0$ và hàm $dist(x, f^{-1}(0))$ không bị chặn trên V_1 ta có

(i) Nếu $\mathcal{L}_0(V_1) \leq \min\{\mathcal{L}_\infty(V_1), d\}$ thì

$$\mathcal{L}_0(V_1) \leq \mathcal{L}_0(f) \leq \max\{\mathcal{L}_\infty(V_1), d\},$$

$$\text{và } \mathcal{L}_0(V_1) \leq \mathcal{L}_\infty(f) \leq \min\{\mathcal{L}_\infty(V_1), d\};$$

(ii) Nếu $\min\{\mathcal{L}_\infty(V_1), d\} \leq \mathcal{L}_0(V_1) \leq \max\{\mathcal{L}_\infty(V_1), d\}$ thì

$$\mathcal{L}_0(V_1) \leq \mathcal{L}_0(f) \leq \max\{\mathcal{L}_\infty(V_1), d\},$$

$$\text{và } \mathcal{L}_\infty(f) = \min\{\mathcal{L}_\infty(V_1), d\};$$

(iii) Nếu $\mathcal{L}_0(V_1) \geq \max\{\mathcal{L}_\infty(V_1), d\}$ *thì*

$$\mathcal{L}_0(f) = \mathcal{L}_0(V_1), \textit{ và } \mathcal{L}_\infty(f) = \min\{\mathcal{L}_\infty(V_1), d\}.$$

Chứng minh. Chứng minh được suy ra từ Bổ đề 3.4.4 và Mệnh đề 3.4.3. □

Chương 4

Bất đẳng thức Łojasiewicz của hàm đa thức trên $\mathbb{R}^2$

Tiếp theo chương 3, trong chương này chúng tôi nghiên cứu bất đẳng thức Łojasiewicz trong trường hợp f là đa thức hai biến. Trước hết, chúng tôi đưa ra một phương pháp để kiểm tra sự tồn tại bất đẳng thức Łojasiewicz, sau đó tính toán số mũ Łojasiewicz thông qua khai triển Puiseux của f và $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Đặc biệt, chúng tôi nghiên cứu bất đẳng thức Łojasiewicz trong trường hợp f là không suy biến tại vô hạn theo lược đồ Newton của nó. Nội dung còn lại của chương có thể được giới thiệu một cách vắn tắt như sau: Trong [Ho], Hörmander đã chứng minh rằng, nếu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là một đa thức, khi đó tồn tại các hằng số $c > 0$ và $\mu > 0, \mu' > 0, \mu'' > 0$ sao cho

$$|f(x)| \geq cdist(x, f^{-1}(0))^{\mu}, \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}^n, \|x\| < 1;$$

và

$$(1 + \|x\|)^{\mu'}|f(x)| \geq cdist(x, f^{-1}(0))^{\mu''}, \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \geq 1.$$

Rõ ràng, μ chính là số mũ Łojasiewicz của f trong miền $\|x\| < 1$, và nhân tử bên trái $(1+\|x\|)^{\mu'}$ của bất đẳng thức thứ hai là cần thiết để kiểm soát dáng điệu của hàm khoảng cách $dist(x, f^{-1}(0))$ khi $\|x\|$ đủ lớn. Chúng tôi sẽ đưa ra một kết quả của bất đẳng thức trên, trong đó số mũ μ' được cho với một giá trị cụ thể khi $n = 2$.

Nội dung của Chương này được viết chủ yếu dựa trên các Mục 5, 6, 7 và một phần của Mục 3 của bài báo **Huy Vui Ha and Van Doat Dang,** *On the Global Łojasiewicz inequality for polynomial functions. (34 pp)*(accepted for publication in Annales Polonici Mathematici.)

4.1 Phương pháp kiểm tra sự tồn tại bất đẳng thức Łojasiewicz

4.1.1 Khai triển Puiseux

Xét $f(x, y)$ là đa thức hai biến. Giả sử f có dạng

$$f(x, y) = a_0 y^d + a_1(x) y^{d-1} + \cdots + a_d(x), \tag{4.1}$$

trong đó d là bậc của f. Khi đó, theo định lý Puiseux [GV], f được phân tích thành

$$f(x, y) = a_0 \prod_{j=1}^{d} (y - \lambda_j(x)),$$

trong đó $\lambda_j(x)$ là hàm theo $x^{\frac{1}{p}}$ trong lân cận của $x = \infty$, với p là số nguyên. Hàm $\lambda_j(t^p)$ không có kỳ dị cốt yếu tại vô hạn, do đó chúng có thể viết dưới dạng

$$\lambda_j(t^p) = \lambda_j(x) = \sum_{-\infty}^{k_j} a_{jk} x^{\frac{k}{p}}, \tag{4.2}$$

khi $|x| \gg 1$, trong đó k_j là các số nguyên.

Định nghĩa 4.1.1. Mỗi hàm $\lambda_j(x)$ xác định trong (4.2) được gọi là *chuỗi Puiseux tại vô hạn của* f hoặc *nghiệm Puiseux tại vô hạn của* f.

Nghiệm $\lambda_j(x)$ được gọi là *nghiệm thực* nếu tất cả các hệ số a_{jk} của nó là số thực.

Vì f có dạng (4.1) nên $k_j \leq p$ với $j = 1, \ldots, d$.

Với nghiệm không thực $\lambda^*(x)$, $y = \lambda^*(x)$ không có đồ thị trong miền $x > 0$ khi x dần tới $+\infty$. Bởi vì, khi $x > 0$, tất cả x lũy thừa với số mũ hữu tỉ là số thực, còn $\lambda^*(x)$ không là số thực. Để xem xét quỹ tích của $f(x, y) = 0$ với $x < 0$, chúng ta phải lấy nghiệm thực của $\overline{f}(x, y) : = f(-x, y)$.

Xét phân tích

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = a_0 d \prod_{i=1}^{d-1} (y - \overline{\lambda_i}(x)),$$

trong đó $\overline{\lambda_i}(x), i = 1, 2, \ldots, d-1$, là các nghiệm Puiseux tại vô hạn của $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

Ta xét miền $x > 0$ và $x < 0$ riêng rẽ. Giả sử $x > 0$, kí hiệu

$$\mathcal{P}(f) = \{\lambda_1(x), \ldots, \lambda_d(x)\},$$

và

$$\mathcal{P}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \{\overline{\lambda_1}(x), \ldots, \overline{\lambda_{d-1}}(x)\},$$

lần lượt là tập các nghiệm Puiseux tại vô hạn của f và của $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Với $g \in \{f, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \overline{f}, \dfrac{\partial \overline{f}}{\partial y}\}$, kí hiệu $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}(g)$ là tập tất cả các nghiệm thực tại vô hạn của g.

Xét $\psi(x)$ là chuỗi lũy thừa hữu tỉ có dạng

$$\psi(x) = b_0 x^\rho + o(x^\rho), |x| \gg 1,$$

trong đó $b_0 \neq 0$. Khi đó, số mũ ρ được gọi là *bậc của ψ tại vô hạn* và ta kí hiệu bởi $v(\psi(x))$.

4.1.2 Phương pháp kiểm tra

Theo định lý 3.3.3, để kiểm tra sự tồn tại của bất đẳng thức Łojasiewicz toàn cục, ta phải kiểm tra rằng các dãy loại một và loại hai của f trên V_1 là không tồn tại.

Mệnh đề 4.1.2. *Hai khẳng định sau là tương đương*

(i) Không tồn tại các dãy loại một (x^k, y^k) *của* f *trên* $V_1 \cap \{x > 0\}$;

(ii) Không tồn tại $\overline{\lambda}(x) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\frac{\partial f}{\partial y})$ *sao cho*

$$v(f(x, \overline{\lambda}(x))) < 0$$

và

$$\min_{\lambda \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(f)} v(\overline{\lambda}(x) - \lambda(x)) \geq 0.$$

Mệnh đề 4.1.3. *Hai khẳng định sau là tương đương*

(i) Không tồn tại các dãy loại hai (x^k, y^k) *của* f *trên* $V_1 \cap \{x > 0\}$;

(ii) Không tồn tại $\overline{\lambda}(x) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\frac{\partial f}{\partial y})$ *sao cho*

$$v(f(x, \overline{\lambda}(x))) \leq 0$$

và

$$\min_{\lambda \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(f)} v(\overline{\lambda}(x) - \lambda(x)) > 0.$$

Các mệnh đề sau đây sẽ cho chúng ta biết dạng nào trong bốn dạng (a) - (d) của Định lý 3.3.3 sẽ có bất đẳng thức Łojasiewicz.

Mệnh đề 4.1.4. *Hai khẳng định sau là tương đương*

(i) $f_* = \inf_{(x,y) \in V_1} |f(x, y)| > 0$;

(ii) $f^{-1}(0) \cap \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{-1}(0) = \emptyset$ *và không tồn tại* $\overline{\lambda}(x) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\frac{\partial f}{\partial y}) \cup \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\frac{\partial \overline{f}}{\partial y})$ *sao cho*

$$v(f(x, \overline{\lambda}(x)) < 0, \ \textit{nếu} \ \overline{\lambda}(x) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\frac{\partial f}{\partial y})$$

và

$$v(\overline{f}(x,\overline{\lambda}(x)) < 0, \text{ nếu } \overline{\lambda}(x) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\frac{\partial \overline{f}}{\partial y}).$$

Mệnh đề 4.1.5. *Hai khẳng định sau là tương đương*

(i) Hàm $dist(x, f^{-1}(0))$ không bị chặn trên tập V_1;

(ii) Tồn tại $\overline{\lambda}(x) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\frac{\partial f}{\partial y}) \cup \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\frac{\partial \overline{f}}{\partial y})$ sao cho

$$\min_{\lambda(x)\in\mathcal{P}_{\mathbb{R}}(f)}\{v(\overline{\lambda}(x)-\lambda(x))\} > 0, \text{ nếu } \overline{\lambda}(x) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\frac{\partial f}{\partial y})$$

và

$$\min_{\lambda(x)\in\mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\overline{f})}\{v(\overline{\lambda}(x)-\lambda(x))\} > 0, \text{ nếu } \overline{\lambda}(x) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\frac{\partial \overline{f}}{\partial y}).$$

Tương tự, thay thế $f(x,y), \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(f)$ và $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\frac{\partial f}{\partial y})$ tương ứng bởi $\overline{f}(x,y) = f(-x,y), \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\overline{f})$ và $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\frac{\partial \overline{f}}{\partial y})$ trong các Mệnh đề 4.1.2 và 4.1.3, ta thu được tiêu chuẩn cho việc không tồn tại các dãy loại một và loại hai (x^k, y^k) của f trên $V_1 \cap \{x < 0\}$.

Chứng minh các Mệnh đề 4.1.2, 4.1.3, 4.1.4 và 4.1.5 được suy ra từ Bổ đề sau.

Bổ đề 4.1.6. *Cho $\overline{\lambda}(x) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\frac{\partial f}{\partial y})$ và $\lambda(x) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(f)$. Đặt*

$$V_\lambda\colon = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = \lambda(x)\}.$$

Khi đó

$$dist((x,\overline{\lambda}(x)), V_\lambda) \asymp x^{v(\lambda(x)-\overline{\lambda}(x))},$$

khi $x \gg 1$. Tức là, tồn tại các hằng số $c_1 > 0$ và $c_2 > 0$ sao cho các bất đẳng thức sau luôn đúng

$$c_1 x^{v(\lambda(x)-\overline{\lambda}(x))} \leq dist((x,\overline{\lambda}(x)), V_\lambda) \leq c_2 x^{v(\lambda(x)-\overline{\lambda}(x))},$$

khi $x \gg 1$.

Chứng minh. Vì f có dạng (4.1) nên $v(\lambda(x)) \leq 1$, với mọi $\lambda(x) \in \mathcal{P}(f)$. Việc chứng minh Bổ đề 4.1.6 tương tự như chứng minh Bổ đề 3.3.2 của [Ha3]. □

Nhận xét 4.1.7. Định lý 3.3.3 và các Mệnh đề 4.1.2, 4.1.3 cho chúng ta phương pháp kiểm tra sự tồn tại của bất đẳng thức Łojasiewicz toàn cục đối với đa thức hai biến.

- Ta tính các nghiệm thực tại vô hạn của $f(x, y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ và của $\overline{f}(x, y)$ và $\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial y}(x, y)$.
- Tiếp theo, kiểm tra điều kiện (ii) trong các Mệnh đề 4.1.2 và 4.1.3 đúng hay không, nếu đúng thì f có bất đẳng thức Łojasiewicz toàn cục.

4.2 Tính số mũ Łojasiewicz

Phần này, chúng tôi sẽ tính tường minh các số mũ $\mathcal{L}_0(V_1)$, $\mathcal{L}_\infty(V_1)$ và $\mathcal{L}_0(f)$, $\mathcal{L}_\infty(f)$, trong đó f là đa thức hai biến xác định như Mục 4.1.

4.2.1 Tính số mũ $\mathcal{L}_0(V_1)$

Đặt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{0,\infty}(V_1) &= \inf\{\rho > 0 : \exists c, \delta, r > 0 \text{ sao cho} \\ &\quad |f(x,y)| \geq c dist((x,y), f^{-1}(0))^\rho \\ &\quad \text{với } (x,y) \in V_1, |x| > r, |f(x,y)| < \delta\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{0,0}(V_1) &= \inf\{\rho > 0 : \exists c, \delta, r > 0 \text{ sao cho} \\ &\quad |f(x,y)| \geq c dist((x,y), f^{-1}(0))^\rho \\ &\quad \text{với } (x,y) \in V_1, |x| \leq r, |f(x,y)| < \delta\}.\end{aligned}$$

Khi đó

$$\mathcal{L}_0(V_1) = \max\{\mathcal{L}_{0,\infty}(V_1), \mathcal{L}_{0,0}(V_1)\}. \tag{4.3}$$

Với mỗi $\overline{\lambda}(x) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\dfrac{\partial f}{\partial y})$, đặt

$$D^+(\overline{\lambda}) := \begin{cases} 1 & \text{nếu } \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(f) = \emptyset \\ \min_{\lambda \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(f)} v(\overline{\lambda}(x) - \lambda(x)) & \text{nếu } \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(f) \neq \emptyset; \end{cases}$$

$$\mathcal{L}^+_\infty(\overline{\lambda}) := \frac{v(f(x, \overline{\lambda}(x))}{D^+(\overline{\lambda})};$$

$$\mathcal{L}^+_{0,\infty}(V_1) := \max\{\mathcal{L}^+_\infty(\overline{\lambda}) : \ \overline{\lambda} \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\frac{\partial f}{\partial y}), v(f(x, \overline{\lambda}(x)) < 0\}.$$

Tương tự, với mỗi $\overline{\lambda} \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial y})$ đặt

$$D^-(\overline{\lambda}) := \begin{cases} 1 & \text{nếu } \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\overline{f}) = \emptyset \\ \min_{\lambda \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\overline{f})} v(\overline{\lambda}(x) - \lambda(x)) & \text{nếu } \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\overline{f}) \neq \emptyset; \end{cases}$$

$$\mathcal{L}^-_\infty(\overline{\lambda}) := \frac{v(\overline{f}(x, \overline{\lambda}(x))}{D^-(\overline{\lambda})};$$

$$\mathcal{L}^-_{0,\infty}(V_1) := \max\{\mathcal{L}^-_\infty(\overline{\lambda}) : \ \overline{\lambda} \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\frac{\partial \overline{f}}{\partial y}), v(\overline{f}(x, \overline{\lambda}(x)) < 0\}.$$

Mệnh đề 4.2.1. *Nếu không có các dãy loại một của f trên V_1, thì $\mathcal{L}_{0,\infty}(V_1) > 0$ và*

$$\mathcal{L}_{0,\infty}(V_1) = \max\{\mathcal{L}^+_{0,\infty}(V_1), \mathcal{L}^-_{0,\infty}(V_1)\}.$$

Chứng minh. Chứng minh được suy từ định nghĩa của $\mathcal{L}^+_{0,\infty}(V_1)$, $\mathcal{L}^-_{0,\infty}(V_1)$ và Bổ đề 4.1.6. □

Lấy $c, \delta, r > 0$ sao cho

$$\begin{aligned} |f(x,y)| \ &\geq \ c\,dist((x,y), f^{-1}(0))^{\mathcal{L}_{0,\infty}(V_1)}, \\ &\quad \text{với}(x,y) \in V_1, |x| > r, |f(x,y)| < \delta, \end{aligned}$$

trong đó số mũ $\mathcal{L}_{0,\infty}(V_1)$ được xác định trong Mệnh đề 4.2.1.
Theo (4.3), để tính $\mathcal{L}_0(V_1)$, ta cần tính

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{0,0}(V_1) &= \inf\{\rho > 0 : |f(x,y)| \geq c dist((x,y), f^{-1}(0))^\rho,\\ &\quad \text{với } (x,y) \in V_1, |x| \leq r, |f(x,y)| < \delta\}.\end{aligned}$$

Chú ý rằng

$$V_1(r,\delta) := V_1 \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |f(x,y)| \leq \delta, |x| \leq r\}$$

là hợp của một số hữu hạn các đường cong nửa đại số. Đặt $\mathcal{A}$ là tập hợp tất cả các điểm cô lập trong giao của $V_1(r,\delta)$ và $f^{-1}(0)$. Lấy $\epsilon > 0$ đủ nhỏ sao cho với mỗi $A \in \mathcal{A}$, quả cầu $B(A,\epsilon) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y) - A\| < \epsilon\}$ được chứa trong phần trong của tập $\{|x| < r, |f(x,y)| < \delta\}$.
Đặt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0(A,V_1) &:= \inf\{\alpha > 0 : \exists c > 0 \text{ sao cho}\\ &\quad |f(x,y)| \geq c dist((x,y), f^{-1}(0))^\alpha,\\ &\quad \text{với mọi } (x,y) \in V_1 \cap B(A,\epsilon)\}.\end{aligned}$$

Khi đó

$$\mathcal{L}_{0,0}(V_1) = \max\{\mathcal{L}_0(A,V_1) : A \in \mathcal{A}\}. \tag{4.4}$$

Để tính $\mathcal{L}_0(A,V_1)$, ta giải bài toán: cho các đa thức $f(x,y)$ và $\phi(x,y)$ và A là điểm cô lập của $f^{-1}(0) \cap \phi^{-1}(0)$. Tính

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0(A,\phi^{-1}(0)) &:= \inf\{\alpha > 0 : \exists c > 0 \text{ sao cho}\\ &\quad |f(x,y)| \geq c dist((x,y), f^{-1}(0))^\alpha,\\ &\quad \text{với mọi } (x,y) \text{ đủ gần } A \text{ và } (x,y) \in \phi^{-1}(0)\}.\end{aligned}$$

Việc tính toán $\mathcal{L}_0(A,\phi^{-1}(0))$ được chia thành hai bước.
Bước 1: Tính $\mathcal{L}_0(A,\phi^{-1}(0))$, với giả thiết rằng các đa thức $f(x,y)$ và $\phi(x,y)$ thỏa mãn các điều kiện sau

(i) $A = (0,0)$;

(ii) $\dfrac{\partial^m f}{\partial y^m}(0,0) \neq 0$, trong đó m là bội của f tại điểm $(0,0)$;

(iii) $\dfrac{\partial^l \phi}{\partial y^l}(0,0) \neq 0$, trong đó l là bội của ϕ tại điểm $(0,0)$.

Với các điều kiện trên, trong lân cận của điểm $(0,0) \in \mathbb{C}$, các đa thức $f(x,y)$ và $\phi(x,y)$ được phân tích như sau

$$f(x,y) = u(x,y)\prod_{j=1}^{m}(y - \lambda_j(x)),$$

$$\phi(x,y) = v(x,y)\prod_{i=1}^{l}(y - \overline{\lambda_i}(x)),$$

trong đó $u(0,0) \neq 0$ và $v(0,0) \neq 0$, $\lambda_j(x)$ và $\overline{\lambda_i}(x)$, $j = 1,2,\dots,m$; $i = 1,2,\dots,l$ là các chuỗi lũy thừa với số mũ hữu tỉ có dạng

$$\lambda_j(x) = b_{j1}x^{\frac{p_{j1}}{m}} + b_{j2}x^{\frac{p_{j2}}{m}} + \cdots$$

$$\overline{\lambda_i}(x) = c_{i1}x^{\frac{q_{i1}}{l}} + c_{i2}x^{\frac{q_{i2}}{l}} + \cdots,$$

trong đó $p_{jk} \in \mathbb{N}, q_{ik} \in \mathbb{N}, k = 1,2,\dots$ và $p_{j1} < p_{j2} < \cdots$, $q_{i1} < q_{i2} < \cdots$. Các chuỗi $\lambda_j(t^m)$ và $\overline{\lambda}_i(t^l)$, $j = 1,2,\dots,m$; $i = 1,2,\dots,l$ hội tụ trong một đĩa nhỏ tâm $(0,0)$. (Xem [Wa]).

Chú ý điều kiện (ii) là quan trọng để suy ra $\dfrac{p_{j1}}{m} \geq 1$, với mọi $j \in \{1,2,\dots,m\}$.

Các chuỗi $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_m(x)$ và $\overline{\lambda}_1(x), \overline{\lambda}_2(x), \dots, \overline{\lambda}_l(x)$ được gọi là *nghiệm Puiseux tại* $(0,0)$ của f và ϕ, tương ứng.

Như trong trường hợp nghiệm Puiseux tại vô hạn, nghiệm Puiseux $\lambda(x)$ được gọi là *nghiệm thực tại* $(0,0)$ nếu tất cả các hệ số của $\lambda(x)$ là các số thực.

Đặt $\overline{f}(x,y) := f(-x,y)$ và $\overline{\phi}(x,y) := \phi(-x,y)$. Xét $g(x,y) \in \{f, \phi, \overline{f}, \overline{\phi}\}$, kí hiệu $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}(g,0)$ là tập tất cả các nghiệm thực Puiseux của g tại $(0,0)$.

Với $\overline{\lambda}(x) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\phi, 0)$, đặt

$$D^{+}(\overline{\lambda}, 0) := \begin{cases} 1 & \text{nếu } \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(f, 0) = \emptyset \\ \max_{\lambda \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(f)} v(\overline{\lambda}(x) - \lambda(x)) & \text{nếu } \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(f, 0) \neq \emptyset; \end{cases}$$

$$\mathcal{L}^{+}(\overline{\lambda}, 0) := \frac{v(f(x, \overline{\lambda}(x))}{D^{+}(\overline{\lambda}, 0)};$$

$$\mathcal{L}^{+}((0,0), \phi^{-1}(0)) := \max\{\mathcal{L}^{+}(\overline{\lambda}, 0) : \overline{\lambda} \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\phi, 0), v(f(x, \overline{\lambda}(x)) < 0\}.$$

Tương tự, với $\overline{\lambda} \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\overline{\phi}, 0)$, đặt

$$D^{-}(\overline{\lambda}, 0) := \begin{cases} 1 & \text{nếu } \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\overline{f}, 0) = \emptyset \\ \max_{\lambda \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\overline{f})} v(\overline{\lambda}(x) - \lambda(x)) & \text{nếu } \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\overline{f}, 0) \neq \emptyset; \end{cases}$$

$$\mathcal{L}^{-}(\overline{\lambda}, 0) := \frac{v(\overline{f}(x, \overline{\lambda}(x))}{D^{-}(\overline{\lambda}, 0)};$$

$$\mathcal{L}^{-}((0,0), \phi^{-1}(0)) := \max\{\mathcal{L}^{-}(\overline{\lambda}, 0) : \overline{\lambda} \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\phi, 0), v(\overline{f}(x, \overline{\lambda}(x)) < 0\}.$$

Mệnh đề 4.2.2. *Giả sử*

(i) $A = (0,0)$*;*

(ii) $\dfrac{\partial^m f}{\partial y^m}(0,0) \neq 0$*, trong đó* m *là bội của* f *tại điểm* $(0,0)$*;*

(iii) $\dfrac{\partial^l \phi}{\partial y^l}(0,0) \neq 0$*, trong đó* l *là bội của* ϕ *tại điểm* $(0,0)$*.*

Khi đó

$$\mathcal{L}_0((0,0), \phi^{-1}(0)) = \max\{\mathcal{L}^{+}((0,0), \phi^{-1}(0)), \mathcal{L}^{-}((0,0), \phi^{-1}(0))\}.$$

Mệnh đề 4.2.2 được suy ra từ các định nghĩa của các số mũ

$$\mathcal{L}^{+}((0,0), \phi^{-1}(0)), \mathcal{L}^{-}((0,0), \phi^{-1}(0))$$

và Bổ đề sau

Bổ đề 4.2.3. *([Ha3], Bổ đề 3.2) Giả sử* *(i)* $(0,0) \in f^{-1}(0) \cap \phi^{-1}(0)$;

(ii) $\dfrac{\partial^m f}{\partial y^m}(0,0) \neq 0$, *trong đó* m *là bội của* f *tại điểm* $(0,0)$.

Lấy $\overline{\lambda}(x) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\phi, 0)$ *và* $\lambda(x) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(f, 0)$. *Khi đó, với mọi* x *đủ gần* 0, *ta có*

$$dist((x, \overline{\lambda}(x)), V_\lambda) \asymp x^{v(\overline{\lambda}(x) - \lambda(x))},$$

trong đó

$$V_\lambda \colon = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \lambda(x)\}.$$

Bước 2: Xét trường hợp tổng quát: A là một điểm cô lập của $f^{-1}(0) \cap \phi^{-1}(0)$, không nhất thiết trùng với gốc tọa độ $(0,0)$. Kí hiệu m và l tương ứng là bội của f và của ϕ tại A. Các bổ đề sau là hiển nhiên

Bổ đề 4.2.4. *Tồn tại đẳng cấu affine*

$$L \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ (x,y) \mapsto L(x,y) = (u,v) \text{ sao cho}$$

(i) $L(A) = (0,0)$;

(ii) $\dfrac{\partial^m f_0}{\partial v^m}(0,0) \neq 0$ *và* $\dfrac{\partial^l \phi_0}{\partial v^l}(0,0) \neq 0$,
trong đó $f_0 = f \circ L^{-1}$ *và* $\phi_0 = \phi \circ L^{-1}$.

Bổ đề 4.2.5. *Lấy* L, f_0 *và* ϕ_0 *như trong Bổ đề 4.2.4. Khi đó*

$$\mathcal{L}_0(A, \phi^{-1}(0)) = \mathcal{L}_0((0,0), \phi_0^{-1}(0)).$$

Chứng minh. Dễ dàng thấy các phát biểu sau luôn đúng

(i) Tồn tại $c_1 > 0$ và $c_2 > 0$ sao cho

$$\|z - z'\| \leq c_1 \|L(z) - L(z')\|,$$

và

$$\|z - z'\| \leq c_2 \|L^{-1}(z) - L^{-1}(z')\|,$$

với mọi $z, z' \in \mathbb{R}^2$;

(ii) Các ánh xạ

$$L^{-1}\colon f_0^{-1}(0) \to f^{-1}(0),$$
$$L^{-1}\colon \phi_0^{-1}(0) \to \phi^{-1}(0)$$

là song ánh.

Trước hết, chứng minh

$$\mathcal{L}_0((0,0), \phi_0^{-1}(0)) \le \mathcal{L}_0(A, \phi^{-1}(0)).$$

Lấy ρ là số bất kì sao cho $\rho > \mathcal{L}_0(A, \phi^{-1}(0))$ và lấy w là điểm bất kì của $\phi_0^{-1}(0)$ đủ gần $(0,0)$. Khi đó,

$$dist(w, f_0^{-1}(0)) \le \|w - w'\|,$$

với mọi $w' \in f_0^{-1}(0)$.

Vì L là song ánh, bất đẳng thức trên suy ra

$$dist(w, f_0^{-1}(0)) \le \|w - L(z')\|,$$

với mọi $z' \in f^{-1}(0)$.

Do đó,

$$dist(w, f_0^{-1}(0)) \le \|L(L^{-1}(w)) - L(z')\| \le c_1\|L^{-1}(w) - z'\|,$$

với $z' \in f^{-1}(0)$.

Vậy,

$$dist(w, f_0^{-1}(0)) \le c_2 dist(L^{-1}(w), f^{-1}(0)).$$

Vì $L^{-1}(w) \in \phi^{-1}(0)$ và theo giả thiết $\rho > \mathcal{L}_0(A, \phi^{-1}(0))$ nên

$$\begin{aligned} dist(w, f_0^{-1}(0)) &\le c_2 dist(L^{-1}(w), f^{-1}(0)) \\ &\le c|f(L^{-1}(w))|^{\frac{1}{\rho}} = c|f_0(w)|^{\frac{1}{\rho}}, \end{aligned}$$

với mỗi w đủ gần $(0,0)$, từ đó suy ra $\mathcal{L}_0((0,0), \phi_0^{-1}(0)) \le \rho$.
Vì bất đẳng thức luôn đúng với mọi $\rho > \mathcal{L}_0(A, \phi^{-1}(0))$, nên suy ra

$$\mathcal{L}_0((0,0), \phi_0^{-1}(0)) \le \mathcal{L}_0(A, \phi^{-1}(0)).$$

Chứng minh tương tự cho bất đẳng thức ngược lại

$$\mathcal{L}_0(A, \phi^{-1}(0)) \leq \mathcal{L}_0((0,0), \phi_0^{-1}(0)).$$

$\square$

Sử dụng Bổ đề 4.2.4 và Bổ đề 4.2.5, với f và $\phi = \dfrac{\partial f}{\partial y}$, ta có thể tính số mũ $\mathcal{L}_0(A, V_1)$. Kết hợp với (4.3), (4.4) và Mệnh đề 4.2.1 ta hoàn thành tính toán số mũ $\mathcal{L}_0(V_1)$.

4.2.2 Tính số mũ $\mathcal{L}_\infty(V_1)$

Đặt

$$\mathcal{L}_\infty^+(V_1) := \min\{\mathcal{L}_\infty^+(\overline{\lambda}) : \overline{\lambda} \in \mathcal{P}_\mathbb{R}(\frac{\partial f}{\partial y}), v(f(x, \overline{\lambda}(x)) > 0\},$$

$$\text{và} \quad \mathcal{L}_\infty^-(V_1) := \min\{\mathcal{L}_\infty^-(\overline{\lambda}) : \overline{\lambda} \in \mathcal{P}_\mathbb{R}(\frac{\partial \overline{f}}{\partial y}), v(\overline{f}(x, \overline{\lambda}(x)) > 0\}.$$

Mệnh đề 4.2.6. *Nếu không có dãy loại hai của f trên V_1, thì $\mathcal{L}_\infty(V_1) > 0$ và $\mathcal{L}_\infty(V_1) = \min\{\mathcal{L}_\infty^+(V_1), \mathcal{L}_\infty^-(V_1)\}$.*

Chứng minh. Chứng minh được suy ra từ định nghĩa của $\mathcal{L}_\infty^+(V_1)$, $\mathcal{L}_\infty^-(V_1)$ và Bổ đề 4.1.6. $\square$

4.2.3 Tính số mũ $\mathcal{L}_0(f)$

Đặt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0(f) \; := \; & \inf\{\rho > 0 : \exists c > 0, \delta > 0 \;\text{ sao cho} \\ & |f(x,y)| \geq c\,dist((x,y), f^{-1}(0))^\rho \\ & \text{với } (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y)| \leq \delta\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{0,\infty}(f) \; := \; & \inf\{\rho > 0 : \exists c > 0, \delta > 0, r > 0 \;\text{ sao cho} \\ & |f(x,y)| \geq c\,dist((x,y), f^{-1}(0))^\rho \\ & \text{với } (x,y) \in \mathbb{R}^2, |x| > r, f(x,y)| \leq \delta\};\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{0,0}(f) \;:=\; & \inf\{\rho > 0 : \exists c > 0, \delta > 0, r > 0 \;\text{ sao cho}\\
& |f(x,y)| \geq c dist((x,y), f^{-1}(0))^{\rho}\\
& \text{với } (x,y) \in \mathbb{R}^2, |x| \leq r, f(x,y)| \leq \delta\}.
\end{aligned}
$$

Khi đó

$$\mathcal{L}_0(f) = \max\{\mathcal{L}_{0,\infty}(f), \mathcal{L}_{0,0}(f)\}.$$

Việc tính $\mathcal{L}_{0,0}(f)$ được dựa trên công việc của Kuo [Ku]. Trước hết, chú ý rằng nếu $f^{-1}(0)$ không có các điểm kì dị trong tập $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |f(x,y)| < \delta, |x| \leq r\}$ thì $\mathcal{L}_{0,0}(f) = 1$.
Nếu $f^{-1}(0)$ có các điểm kì dị trong miền này, thì

$$\mathcal{L}_{0,0}(f) = \max\{\mathcal{L}(f, A) : \; A \text{ là điểm kì dị của } f^{-1}(0)\},$$

trong đó $\mathcal{L}(f, A)$ là số mũ Łojasiewicz của f tại A, tức là

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(f, A) \;:=\; & \inf\{\rho > 0 : \exists c > 0, \epsilon > 0 \;\text{ sao cho}\\
& |f(x,y)| \geq c dist((x,y), f^{-1}(0))^{\rho}\\
& \text{với mọi } (x,y) \in \mathbb{R}^2, \|(x,y) - A\| \leq \epsilon\}.
\end{aligned}
$$

Số mũ $\mathcal{L}(f, A)$ có thể được tính toán tường minh bởi công thức của Kuo [Ku] (xem thêm [Ha3], Định lý 2.8). Điều này đã biết, chúng tôi không trình bày chi tiết.

Số mũ $\mathcal{L}_{0,\infty}(f)$ đã tính trong [HD]. Chúng tôi sẽ nhắc lại công thức.

Lấy $\lambda_i(x) \in \mathcal{P}(f) \setminus \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(f)$

$$\lambda_i(x) = a_1 x^{\alpha_1} + \cdots + a_{s-1} x^{\alpha_{s-1}} + a_s x^{\alpha_s} + \cdots$$

trong đó $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots$ và $a_s \in \mathbb{C}$.
Giả sử $a_1, a_2, \ldots, a_{s-1} \in \mathbb{R}$ và $a_s \notin \mathbb{R}$, khi đó các chuỗi

$$\lambda_i^{\mathbb{R}}(x) := a_1 x^{\alpha_1} + \cdots + a_{s-1} x^{\alpha_{s-1}} + c x^{\alpha_s},$$

trong đó $c \notin \mathbb{R}$ và c là "generic" được gọi là *xấp xỉ thực của* $\lambda_i(x)$.

Lấy $\lambda_i(x), \lambda_j(x) \in \mathcal{P}(f) \setminus \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(f)$ và ký hiệu

$$\rho_{ij} = v(\lambda_i^{\mathbb{R}}(x) - \lambda_j^{\mathbb{R}}(x)).$$

Xét

$$\lambda_i^{\mathbb{R}}(x) = a_1 x^{\alpha_1} + \cdots + a_{t-1} x^{\alpha_{t-1}} + a x^{\rho_{ij}} + o(x^{\rho_{ij}}),$$

$$\lambda_j^{\mathbb{R}}(x) = a_1 x^{\alpha_1} + \cdots + a_{t-1} x^{\alpha_{t-1}} + b x^{\rho_{ij}} + o(x^{\rho_{ij}}).$$

Đặt

$$\lambda_{ij}^{\mathbb{R}}(x) = a_1 x^{\alpha_1} + \cdots + a_{t-1} x^{\alpha_{t-1}} + c x^{\rho_{ij}},$$

trong đó c là "generic". Đặt

$$D(\lambda_{ij}^{\mathbb{R}}) := \begin{cases} 1 \ , & \text{nếu } \ \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(f) = \emptyset \\ \min_{\lambda \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(f)} v(\lambda(x) - \lambda_{ij}^{\mathbb{R}}(x)), & \text{nếu } \ \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(f) \neq \emptyset \end{cases}$$

và

$$L(\lambda_{ij}^{\mathbb{R}}) := \frac{v(f(x, \lambda_{ij}^{\mathbb{R}}(x)))}{D(\lambda_{ij}^{\mathbb{R}})}.$$

Lấy $\lambda(x) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(f)$, kí hiệu $t(\lambda)$ là bội của $\lambda(x)$, và $t(f) = \max\{t(\lambda) : \lambda \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(f)\}$.

Mệnh đề 4.2.7. ([HD], Định lý 2.5)
Nếu f không có các dãy loại một (x_k, y_k) trên $\{x > 0\}$ thì $\mathcal{L}_{0,\infty}^{+}(f) > 0$ và

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{0,\infty}^{+}(f) \ = \ & \inf\{\alpha > 0 : \exists c > 0, \delta > 0, r > 0 \ \ \textit{sao cho} \\ & |f(x,y)| \geq c dist((x,y), f^{-1}(0))^{\alpha} \\ & \textit{với mọi} \ \ (x,y) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > r, |f(x,y)| < \delta\}\} \\ & = \max\{t(f), L(\lambda_{ij}^{\mathbb{R}}) : v(f(x, \lambda_{ij}^{\mathbb{R}}(x)) < 0\}, \end{aligned}$$

trong đó λ_i và λ_j lấy trên tất cả các phần tử của tập $\mathcal{P}(f) \setminus \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(f)$.

Tương tự, với $\mathcal{P}(\overline{f}) \setminus \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\overline{f}), \overline{f}(x,y) = f(-x,y)$, ta có thể xác định được số mũ $\mathcal{L}_{0,\infty}^{-}(f)$.
Khi đó

$$\mathcal{L}_{0,\infty}(f) = \max\{\mathcal{L}_{0,\infty}^{+}(f), \mathcal{L}_{0,\infty}^{-}(f)\},$$

tức là $\mathcal{L}_{0,\infty}(f)$ có thể được tính theo các nghiệm xấp xỉ thực Puiseux tại vô hạn của f và $\overline{f}$. Vậy số mũ $\mathcal{L}_0(f)$ hoàn toàn được tính.

4.2.4 Tính số mũ $\mathcal{L}_\infty(f)$

Bổ đề 4.2.8. ([HD], Mệnh đề 2.7) *Cho $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ là hàm đa thức có dạng*

$$f(x, y) = a_0y^d + a_1(x)y^{d-1} + \cdots + a_d(x),$$

trong đó d là bậc của f. Khi đó, tồn tại $c, R, r > 0$ và $\rho \in \mathbb{R}$ sao cho

$$|f(x, y)| \geq cdist((x, y), f^{-1}(0))^{\rho},$$

với mọi $(x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| > r, dist((x, y), f^{-1}(0)) > R\}$.
Hơn nữa, nếu $\widehat{\mathcal{L}}_\infty(f)$ kí hiệu là số lớn nhất của các số mũ ρ thỏa mãn bất đẳng thức trên, thì

$$\widehat{\mathcal{L}}_\infty(f) = \min\{L(\lambda_{ij}^{\mathbb{R}}) : D(\lambda_{ij}^{\mathbb{R}}) > 0\},$$

trong đó λ_i và λ_j là các nghiệm Puiseux tại vô hạn của f và $\overline{f}$, và $\lambda_i, \lambda_j \in \mathcal{P}(f) \setminus \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(f)$ hoặc $\lambda_i, \lambda_j \in \mathcal{P}(\overline{f}) \setminus \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\overline{f})$.

Mệnh đề 4.2.9. *Nếu f không có các dãy loại một và loại hai thì*

$$\mathcal{L}_\infty(f) = \widehat{\mathcal{L}}_\infty(f).$$

Chứng minh. Vì f không có các dãy loại hai, nên $\widehat{\mathcal{L}}_\infty(f) > 0$ và

$$|f(x, y)| \geq cdist((x, y), f^{-1}(0))^{\widehat{\mathcal{L}}_\infty(f)},$$

với mọi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $|x| > r$ và $dist((x, y), f^{-1}(0)) > R$.
Vì f không có dãy loại một, nên

$$\widehat{f}_* := \inf\{|f(x, y)| : 1 \leq dist((x, y), f^{-1}(0)) \leq R\} > 0.$$

Do đó, có thể mở rộng bất đẳng thức trên ra miền lớn hơn và nhận được

$$|f(x, y)| \geq cdist((x, y), f^{-1}(0))^{\widehat{\mathcal{L}}_\infty(f)},$$

với mọi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $|x| > r$ và $dist((x, y), f^{-1}(0)) > 1$. Vậy, đẳng thức $\mathcal{L}_\infty(f) = \widehat{\mathcal{L}}_\infty(f)$ là hệ quả của Mệnh đề 3.4.3. □

4.3 Đa thức không suy biến tại vô hạn

Trong phần này, chúng tôi nghiên cứu bất đẳng thức Łojasiewicz đối với các đa thức hai biến mà không suy biến đối với lược đồ Newton tại vô hạn của chúng.

Tương tự như ở Chương 1 và Chương 2, chúng tôi nhắc lại một số định nghĩa, ta viết f dưới dạng

$$f(x,y) = \sum_{i+j\leq d} c_{ij}x^i y^j.$$

Đặt

$$\mathrm{supp}(f) := \{(i,j) : c_{ij} \neq 0\},$$

và gọi là *giá của* f và

$$\Gamma(f) = co(\mathrm{supp}(f))$$

là *bao lồi của* $\mathrm{supp}(f)$.

Định nghĩa 4.3.1. $\Gamma(f)$ gọi là *đa giác Newton của f.*

Rõ ràng, điểm $(0,d)$ là một đỉnh của $\Gamma(f)$ (đỉnh cao nhất). Hơn nữa, $\Gamma(f)$ nằm dưới đường thẳng

$$L := \{(i,j) \in \mathbb{R}^2 : i + j = d\}.$$

Định nghĩa 4.3.2. $\Gamma(f)$ gọi là *thuận tiện* nếu nó cắt các trục tọa độ tại các điểm khác gốc.

Định nghĩa 4.3.3. Đa thức f được gọi là *thuận tiện* nếu $\Gamma(f)$ thuận tiện.

Ký hiệu $\partial\Gamma(f)$ là biên của $\Gamma(f)$ và σ_* là cạnh của $\partial\Gamma(f)$ mà gần đường thẳng L nhất (do đó, σ_* chứa điểm (0,d) và điểm (0,d) là một đỉnh của σ_*).

Ký hiệu (a_{**}, b_{**}) là một đỉnh của $\Gamma(f)$ sao cho

$$b_{**} = \min\{b : \exists a \text{ sao cho } (a,b) \in \Gamma(f)\},$$

tức là, (a_{**}, b_{**}) là đỉnh thấp nhất của $\Gamma(f)$.

Xét $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{k-1}, \sigma_k$ là dãy các cạnh của $\partial\Gamma(f)$ sao cho

$$\sigma_1 = \sigma_*$$

$$(a_{**}, b_{**}) \in \sigma_k$$

và

$$\sigma_i \cap \sigma_{i+1} \neq \emptyset, \quad i = 1, \ldots, k-1.$$

Đặt

$$\partial_\infty\Gamma(f) = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{k-1}, \sigma_k\}.$$

Định nghĩa 4.3.4. Tập $\partial_\infty\Gamma(f)$ gọi là *phần chính Newton tại vô hạn của* f.

Nhận xét 4.3.5. Trong chương 2, chúng ta đã sử dụng khái niệm biên Newton tại vô hạn của f mà được xác định như sau: Ký hiệu $\Gamma(f)$ là bao lồi của tập $\text{supp}(f) \cup \{(0,0)\}$ và ký hiệu $\partial\Gamma(f)$ là biên của $\Gamma(f)$, khi đó biên Newton tại vô hạn của f ký hiệu bởi $\Gamma_\infty(f)$, là hợp của tất cả các cạnh của $\partial\Gamma(f)$ mà không chứa gốc tọa độ.

Dễ dàng thấy rằng, nếu f là thuận tiện thì

$$\partial_\infty\Gamma(f) = \Gamma_\infty(f).$$

Nhưng nhìn chung, hai tập này khác nhau. Chúng ta có thể thấy qua ví dụ sau. Cho

$$f(x,y) = y^{14} + x^4y^{10} + x^8y^4 - 2x^5y^3 + x^2y^2 + y^4,$$

khi đó

$$\Gamma_\infty(f) = \sigma_1 \cup \sigma_2$$

và

$$\partial_\infty\Gamma(f) = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \sigma_3,$$

trong đó $\sigma_1 = [(0,14),(4,10)]$ là cạnh nối các điểm $(0,14)$ và $(4,10)$, và $\sigma_2 = [(4,10),(8,4)], \sigma_3 = [(8,4),(2,2)]$.

Với mỗi cạnh $\sigma \in \partial_\infty \Gamma(f)$, đặt

$$f_\sigma(x,y) = \sum_{(i,j)\in\sigma} a_{ij}x^i y^j.$$

Và với mỗi cạnh $\sigma = [(a_1,b_1),(a_2,b_2)]$, trong đó $b_1 > b_2$, đặt

$$d(\sigma) = b_1 - b_2$$

và

$$v(\sigma) = \frac{a_2 - a_1}{b_1 - b_2}.$$

Định nghĩa 4.3.6. Đa thức f gọi là *không suy biến theo phần chính Newton tại vô hạn của f (viết tắt, f không suy biến tại vô hạn)* nếu điều kiện sau luôn đúng: với mọi $\sigma \in \partial_\infty \Gamma(f)$, hệ phương trình

$$\frac{\partial f_\sigma}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f_\sigma}{\partial y}(x,y) = 0$$

không có nghiệm trong $(\mathbb{R} \setminus 0)^2$.

Bổ đề 4.3.7. *Các phát biểu sau luôn đúng*

(i) $d = d(\sigma_1) + \cdots + d(\sigma_k) + b_{**}$;

(ii) $1 \geq v(\sigma_1) > v(\sigma_2) > \cdots > v(\sigma_k)$;

(iii) $y = 0$ *là nghiệm Puiseux tại vô hạn của* f*, với bội* b_{**};

(iv) Với mỗi $i \in \{1,2,\ldots,k\}$*, tồn tại chính xác* $d(\sigma_i)$ *nghiệm Puiseux tại vô hạn (đếm cả bội), mỗi nghiệm có dạng*

$$y(x) = cx^{v(\sigma_i)} + o(x^{v(\sigma_i)}),$$

trong đó c *là nghiệm khác không của đa thức* $h_{\sigma_i}(u) := f_{\sigma_i}(1,u)$.

(v) Nếu f *là không suy biến tại vô hạn, khi đó đa thức* $h_{\sigma_i}(u)$ *không có nghiệm khác không bội lớn hơn 1.*

Chứng minh. Các khẳng định (i)-(iii) là hiển nhiên. Khẳng định (iv) là đã biết. Ta chứng minh (v).

Vì $f_{\sigma_i}(x,y)$ là đa thức tựa thuần nhất, tức là tồn tại các hằng số p,q và $m \in \mathbb{Z}$, sao cho

$$ip + jq = m,$$

với mọi $(i,j) \in supp(f_{\sigma_i})$. Dễ dàng chỉ ra rằng $f_{\sigma_i}(x,y)$ có thể được viết dưới dạng

$$f_{\sigma_i}(x,y) = x^{\rho_1} y^{\rho_2} \left(x^{\frac{-p}{q}} y - c_1\right)\left(x^{\frac{-p}{q}} y - c_2\right) \cdots \left(x^{\frac{-p}{q}} y - c_s\right),$$

trong đó $c_1, c_2, \ldots, c_s$ là các nghiệm khác không của đa thức $h_\sigma(u) = f_\sigma(1,u)$.

Bằng phản chứng, giả sử $h_\sigma(u)$ có nghiệm thực $c \neq 0$ bội lớn hơn 1, tức là f_{σ_i} có $\left(x^{\frac{-p}{q}} y - c\right)^2$ là nhân tử mà $c \in \{\mathbb{R} \setminus 0\}$. Khi đó, điểm $(1,c) \in (\mathbb{R} \setminus 0)^2$ là một nghiệm của hệ

$$\frac{\partial f_\sigma}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f_\sigma}{\partial y}(x,y) = 0,$$

mâu thuẫn. □

Bây giờ ta mô tả phần chính Newton tại vô hạn của $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, được ký hiệu bởi $\partial_\infty \Gamma(\dfrac{\partial f}{\partial y})$.

Ký hiệu

$$\partial_\infty \Gamma(f) = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k\},$$

là phần chính Newton tại vô hạn của f, trong đó

$$\sigma_1 = [(0,d),(a_1,b_1)]; \sigma_2 = [(a_1,b_1),(a_2,b_2)]; \ldots; \sigma_{k-1} = [(a_{k-2},b_{k-2}), (a_{k-1},b_{k-1})] \text{ và } \sigma_k = [(a_{k-1},b_{k-1}),(a_{**},b_{**})].$$

Dễ thấy $(k-1)$ cạnh đầu tiên của $\partial_\infty \Gamma(\dfrac{\partial f}{\partial y})$ là $\sigma'_1, \sigma'_2, \ldots, \sigma'_{k-1}$, trong đó

$$\sigma'_1 = [(0,d-1),(a_1,b_1-1)]; \sigma'_2 = [(a_1,b_1-1),(a_2,b_2-1)]; \ldots; \text{ và } \sigma'_{k-1} = [(a_{k-2},b_{k-2}-1),(a_{k-1},b_{k-1}-1)].$$

Hiển nhiên $d(\sigma'_i) = d(\sigma_i)$ và $v(\sigma'_i) = v(\sigma_i), i = 1, 2, \ldots, k-1$.

Tiếp theo, nếu cạnh $\sigma_k = [(a_{k-1}, b_{k-1}), (a_{**}, b_{**})]$ với $b_{**} \geq 1$, thì cạnh thứ k của $\partial_\infty \Gamma(\dfrac{\partial f}{\partial y})$ sẽ là $\sigma'_k = [(a_{k-1}, b_{k-1} - 1), (a_{**}, b_{**} - 1)]$ và khi đó

$$\partial_\infty \Gamma(\frac{\partial f}{\partial y}) = \{\sigma'_1, \sigma'_2, \ldots, \sigma'_k\},$$

và $d(\sigma'_k) = d(\sigma_k)$, $v(\sigma'_k) = v(\sigma_k)$.

Còn nếu cạnh $\sigma_k = [(a_{k-1}, b_{k-1}), (a_{**}, b_{**})]$ với $b_{**} = 0$, thì $\partial_\infty \Gamma(\dfrac{\partial f}{\partial y})$ có thể có $k-1, k$ hoặc nhiều hơn k cạnh. Điều này là quan trọng trong việc nghiên cứu.

Khẳng định: Nếu

$$\partial_\infty \Gamma(\frac{\partial f}{\partial y}) = \{\sigma'_1, \sigma'_2, \ldots, \sigma'_{k-1}, \sigma'_k, \sigma'_{k+1}, \ldots, \sigma'_s\},$$

thì với $i \geq k$, ta có

$$v(\sigma'_i) \leq v(\sigma_k).$$

Chứng minh. Điều này được suy ra từ việc xây dựng của $\partial_\infty \Gamma(\dfrac{\partial f}{\partial y})$. □

Bổ đề 4.3.8. *Giả sử f là không suy biến tại vô hạn và $\overline{\lambda}_{i_0}(x) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\dfrac{\partial f}{\partial y})$ có dạng*

$$\overline{\lambda}_{i_0}(x) = cx^{v(\sigma'_{i_0})} + o(x^{v(\sigma'_{i_0})}).$$

Lấy σ_i là cạnh của $\partial_\infty \Gamma(f)$ nối các điểm (a_{i-1}, b_{i-1}) và $(a_i, b_i), i = 1, 2, \ldots, k$. Khi đó, các phát biểu sau luôn đúng

(i) Nếu $i_0 \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ thì

$$\begin{aligned} v(f(x, \overline{\lambda}_{i_0}(x))) &= \sum_{l=1}^{i_0} d(\sigma_l) v(\sigma_l) + \left[\sum_{m=i_0+1}^{k} d(\sigma_m)\right] v(\sigma_{i_0}) \\ &= a_{i_0} + \left[\sum_{m=i_0+1}^{k} d(\sigma_m)\right] v(\sigma_{i_0}); \end{aligned}$$

(ii) Nếu $i_0 \geq k$ thì

$$v(f(x, \overline{\lambda}_{i_0}(x))) = a_{**} + b_{**} v(\sigma'_{i_0}).$$

Chứng minh. Trước hết, ta chứng minh nếu $\overline{\lambda}(x) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\dfrac{\partial f}{\partial y})$ và $\lambda(x) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(f)$ thì

$$v(\overline{\lambda}(x) - \lambda(x)) = \max\{v(\overline{\lambda}(x)), v(\lambda(x))\}. \tag{4.5}$$

Thật vậy, vì $\lambda(x) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(f)$ và $\overline{\lambda}(x) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\dfrac{\partial f}{\partial y})$ nên

$$\lambda(x) = cx^{v(\sigma_i)} + o(x^{v(\sigma_i)}),$$

với $\sigma_i \in \partial_\infty \Gamma(f)$, trong đó c là nghiệm thực khác không của đa thức $h_{\sigma_i}(u) = f_{\sigma_i}(1, u)$ và

$$\overline{\lambda}(x) = c' x^{v(\sigma'_{i_0})} + o(x^{v(\sigma'_{i_0})}),$$

với $\sigma'_{i_0} \in \partial_\infty \Gamma(\dfrac{\partial f}{\partial y})$, trong đó $c' \neq 0$ là nghiệm thực khác không của đa thức $\overline{h}_{\sigma'_{i_0}}(u) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_{\sigma'_{i_0}}(1, u)$.

Dễ dàng thấy, nếu $v(\sigma'_{i_0}) \neq v(\sigma_i)$ thì (4.5) đúng.

Giả sử $v(\sigma'_{i_0}) = v(\sigma_i)$, điều này xảy ra nếu và chỉ nếu $\sigma'_{i_0} = \sigma'_i$, với $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Bằng phản chứng, giả sử $v(\overline{\lambda}(x) - \lambda(x)) = \max\{v(\overline{\lambda}(x)), v(\lambda(x))\} = v(\sigma_i)$, suy ra $c = c'$. Rõ ràng, ta có

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\sigma'_i} = \frac{\partial f_{\sigma_i}}{\partial y},$$

khi đó $\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_{\sigma'_i}(1, c) = \dfrac{\partial f_{\sigma_i}}{\partial y}(1, c) = 0$, điều này nghĩa là đa thức $h_{\sigma_i}(u) := f_{\sigma_i}(1, u)$ có nghiệm thực khác không bội lớn hơn 1, trái với Bổ đề 4.3.7, (v).

Bổ đề 4.3.8 được suy ra dễ dàng từ (4.5) và đẳng thức sau là hiển nhiên

$$\sum_{l=1}^{i_0} d(\sigma_l) v(\sigma_l) = a_{i_0}.$$

$\square$

Định lý 4.3.9. *Cho f là đa thức thuận tiện và không suy biến tại vô hạn, khi đó*

(i) $\lim_{(x,y)\in V_1;(x,y)\to\infty} |f(x,y)| = \infty$;

(ii) Tồn tại các hằng số $\alpha, \beta, c > 0$ sao cho

$$|f(x,y)|^\alpha + |f(x,y)|^\beta \geq cdist((x,y), f^{-1}(0)),$$

với mọi $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Chứng minh. Chứng minh (i) được suy trực tiếp từ Bổ đề 4.3.8; (ii) suy ra từ (i) và Định lý 3.3.3. □

Chú ý 4.3.10. Khẳng định (ii) của Định lý 4.3.9 đã được chứng minh trong [Ha2] với số biến là n nhưng bằng phương pháp khác, còn khẳng định (i) của Định lý 4.3.9 mạnh hơn khẳng định không tồn tại các dãy loại một và loại hai của f.

Định lý 4.3.11. *Cho đa thức f là thuận tiện và không suy biến tại vô hạn, khi đó các số mũ $\mathcal{L}_{0,\infty}(V_1), \mathcal{L}_\infty(V_1)$, $\mathcal{L}_{0,\infty}(f)$ và $\mathcal{L}_\infty(f)$ được biểu diễn theo các số hạng của phần chính Newton tại vô hạn của f.*

Chứng minh. Từ Bổ đề 4.3.8 suy ra rằng $\mathcal{L}_{0,\infty}(V_1)$ và $\mathcal{L}_\infty(V_1)$ được biểu diễn theo các số hạng $d(\sigma_i), v(\sigma_i), i = 1,\ldots,k$.
Các số mũ $\mathcal{L}_{0,\infty}(f)$ và $\mathcal{L}_\infty(f)$ được xác định theo các số hạng $d(\sigma_i)$, $v(\sigma_i)$, $i = 1,\ldots,k$ từ Bổ đề 4.3.7 (v). □

4.4 Một dạng bất đẳng thức Hörmander

Trong [Ho], L. Hörmander đã chứng minh một dạng của bất đẳng thức Łojasiewicz toàn cục.

Định lý 4.4.1. ([Ho], Bổ đề 1 và Bổ đề 2).
Cho $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là một hàm đa thức. Khi đó tồn tại các hằng số $c > 0, \mu > 0, \mu' > 0$ và $\mu'' > 0$ sao cho

(i) $|f(x)| \geq c dist(x, f^{-1}(0))^{\mu}$, *với mọi* $x \in \mathbb{R}^n, \|x\| < 1$;

(ii) Với mọi $x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \geq 1$ *ta có*

$$(1+ \parallel x \parallel)^{\mu'} |f(x)| \geq c dist(x, f^{-1}(0))^{\mu''}. \tag{4.6}$$

Rõ ràng, nhân tử $(1 + \|x\|)^{\mu'}$ trong (4.6) là cần thiết để điều khiển dáng điệu "tồi" của f tại vô hạn. Chú ý, các giá trị cụ thể của μ' và μ'' không được cho trong [Ho].

Trong phần này, với $n = 2$, chúng tôi đưa ra một dạng tương tự của bất đẳng thức Hörmander. Tuy nhiên, trong công thức của chúng tôi, số mũ μ'' bằng 1, nhân tử $(1 + \|x\|)^{\mu'}$ cũng xuất hiện và số mũ μ' sẽ được cho bởi giá trị cụ thể, giá trị này được tính toán thông qua các nghiệm Puiseux tại vô hạn của f và của $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Ta thấy, nhân tử $(1 + \|x\|)^{\mu'}$ chỉ xuất hiện trong bất đẳng thức khi f có các dãy loại một hoặc loại hai, do vậy, chúng tôi chỉ xét trường hợp này. Nói cách khác, giả sử tập $\mathcal{P}^*$ dưới đây là khác rỗng

$$\mathcal{P}^* := \mathcal{P}_0^*(\frac{\partial f}{\partial y}) \cup \mathcal{P}_\infty^*(\frac{\partial f}{\partial y}) \cup \mathcal{P}_0^*(\frac{\partial \overline{f}}{\partial y}) \cup \mathcal{P}_\infty^*(\frac{\partial \overline{f}}{\partial y}),$$

trong đó $\overline{f}(x, y) = f(-x, y)$;

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_0^*(\frac{\partial f}{\partial y}) := \{\overline{\lambda} \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\frac{\partial f}{\partial y}) &: v(f(x, \overline{\lambda}(x))) < 0 \\ &\text{và } \min_{\lambda \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(f)} v(\overline{\lambda}(x) - \lambda(x)) \geq 0\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_\infty^*(\frac{\partial f}{\partial y}) := \{\overline{\lambda} \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\frac{\partial f}{\partial y}) &: v(f(x, \overline{\lambda}(x))) \leq 0 \\ &\text{và } \min_{\lambda \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(f)} v(\overline{\lambda}(x) - \lambda(x)) > 0\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_0^*(\frac{\partial \overline{f}}{\partial y}) := \{\overline{\lambda} \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\frac{\partial \overline{f}}{\partial y}) &: v(\overline{f}(x, \overline{\lambda}(x))) < 0 \\ &\text{và } \min_{\lambda \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\overline{f})} v(\overline{\lambda}(x) - \lambda(x)) \geq 0\};\end{aligned}$$

$$\mathcal{P}^*_\infty(\frac{\partial \overline{f}}{\partial y}) := \{\overline{\lambda} \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\frac{\partial \overline{f}}{\partial y}) : v(\overline{f}(x, \overline{\lambda}(x))) \leq 0$$
$$\text{và} \min_{\lambda \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\overline{f})} v(\overline{\lambda}(x) - \lambda(x)) > 0\}.$$

Lấy $\overline{\lambda} \in \mathcal{P}^*$, đặt

$$\theta(\overline{\lambda}) := \begin{cases} v(f(x, \overline{\lambda}(x))) & \text{nếu } \overline{\lambda} \in \mathcal{P}^*_0(\frac{\partial f}{\partial y}) \cup \mathcal{P}^*_\infty(\frac{\partial f}{\partial y}) \\ v(\overline{f}(x, \overline{\lambda}(x))) & \text{nếu } \overline{\lambda} \in \mathcal{P}^*_0(\frac{\partial \overline{f}}{\partial y}) \cup \mathcal{P}^*_\infty(\frac{\partial \overline{f}}{\partial y}), \end{cases}$$

$$D(\overline{\lambda}) := \begin{cases} 1 & \text{nếu } \overline{\lambda} \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\frac{\partial f}{\partial y}) \text{ và } \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(f) = \emptyset \\ \min_{\lambda \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(f)}\{v(\overline{\lambda}(x) - \lambda(x))\} & \text{nếu } \overline{\lambda} \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\frac{\partial f}{\partial y}) \text{ và } \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(f) \neq \emptyset \\ 1 & \text{nếu } \overline{\lambda} \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\frac{\partial \overline{f}}{\partial y}) \text{ và } \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\overline{f}) = \emptyset \\ \min_{\lambda \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\overline{f})}\{v(\overline{\lambda}(x) - \lambda(x))\} & \text{nếu } \overline{\lambda} \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\frac{\partial \overline{f}}{\partial y}) \text{ và } \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\overline{f}) \neq \emptyset. \end{cases}$$

Đặt

$$\nu(\overline{\lambda}) = D(\overline{\lambda}) - \theta(\overline{\lambda}),$$

và đặt

$$\nu(f) = \max_{\overline{\lambda} \in \mathcal{P}^*} \nu(\overline{\lambda}).$$

Rõ ràng, $\nu(f) > 0$, vì $\mathcal{P}^* \neq \emptyset$.

Định lý 4.4.2. *Cho đa thức*

$$f(x, y) = a_0 y^d + a_1(x) y^{d-1} + \cdots + a_d(x),$$

trong đó d là bậc của f. Khi đó, tồn tại $\mu > 0$ và $c > 0$ sao cho

$$|f(x, y)|^{\frac{1}{\mu}} + |f(x, y)|^{\frac{1}{d}} + (1 + |x|)^{\nu(f)}|f(x, y)| \geq c\,dist((x, y), f^{-1}(0)), \tag{4.7}$$

với mọi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Chứng minh. Trước hết, ta chứng minh tồn tại $\mu > 0$ và $c_1 > 0$ sao cho

$$|f(x,y)|^{\frac{1}{\mu}} + (1+|x|)^{\nu(f)}|f(x,y)| \geq c_1 dist((x,y), f^{-1}(0)), \qquad (4.8)$$

với mọi $(x,y) \in V_1$.

Lấy $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $|x| \geq r > 0$, với r đủ lớn, khi đó $(x,y) \in V_1$ nếu và chỉ nếu tồn tại $\overline{\lambda}(x) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\frac{\partial f}{\partial y}) \cup \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\frac{\partial \overline{f}}{\partial y})$ sao cho $(x,y) = (x, \overline{\lambda}(x))$.

Ta thấy rằng

$$|f(x,y)| = |f(x, \overline{\lambda}(x))| \asymp |x|^{\theta(\overline{\lambda})},$$

và

$$dist((x,y), f^{-1}(0)) = dist((x, \overline{\lambda}(x)), f^{-1}(0)) \asymp |x|^{D(\overline{\lambda})}.$$

Do đó, với mọi $\overline{\lambda}(x) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\frac{\partial f}{\partial y}) \cup \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\frac{\partial \overline{f}}{\partial y})$, ta có,

$$|f(x, \overline{\lambda}(x))|(1+|x|)^{\nu(f)} \geq c_1 dist((x, \overline{\lambda}(x)), f^{-1}(0)),$$

với $c_1 > 0$ nào đó, hoặc tương đương

$$|f(x,y)|(1+|x|)^{\nu(f)} \geq c_1 dist((x,y), f^{-1}(0)), \qquad (4.9)$$

với mọi $(x,y) \in V_1 \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \geq r\}$.

Tập $V_1 \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq r\}$ là compact, do đó theo bất đẳng thức Łojasiewicz, tồn tại $\mu > 0$ và $c_2 > 0$ sao cho

$$|f(x,y)| \geq c_2 dist((x,y), f^{-1}(0))^{\mu}, \qquad (4.10)$$

với mọi $(x,y) \in V_1 \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq r\}$. Vì vậy, (4.8) được suy ra từ (4.9) và (4.10).

Hệ quả, bất đẳng thức (4.7) luôn đúng nếu $(x,y) \in V_1$.

Bây giờ, lấy (x,y) là một điểm tùy ý của $\mathbb{R}^2$ sao cho $(x,y) \notin f^{-1}(0) \cup V_1$. Khi đó, theo Bổ đề 3.3.2 tồn tại điểm $(x, y_*) \in \mathbb{R}^2$ sao cho

$$(x, y_*) \in f^{-1}(0) \cup V_1,$$

$$|f(x,y)| \geq |f(x,y_*)|, \tag{4.11}$$

và

$$\|(x,y)-(x,y_*)\| = |y-y_*| \leq c_3|f(x,y)|^{\frac{1}{d}}, \tag{4.12}$$

với $c_3 > 0$ nào đó. Khi đó

$$dist((x,y), f^{-1}(0)) \leq dist((x,y),(x,y_*)) + dist((x,y_*), f^{-1}(0))$$

Sử dụng (4.10), (4.11), (4.12), ta được

$$\begin{aligned}
&dist((x,y), f^{-1}(0)) \\
&\leq \frac{1}{c_3}|f(x,y_*)|^{\frac{1}{d}} + \frac{1}{c_2}|f(x,y_*)|^{\frac{1}{\mu}} + \frac{1}{c_1}|f(x,y_*)|(1+|x|)^{\nu(f)} \\
&\leq \frac{1}{c_3}|f(x,y)|^{\frac{1}{d}} + \frac{1}{c_2}|f(x,y)|^{\frac{1}{\mu}} + \frac{1}{c_1}|f(x,y)|(1+|x|)^{\nu(f)}.
\end{aligned}$$

Điều này suy ra bất đẳng thức (4.7) luôn đúng. □

Kết luận

Trong luận án này, chúng tôi đã thu được những kết quả sau:

1) Đưa ra một điều kiện đủ để một đa thức không âm là tổng bình phương của các đa thức (Định lý 1.2.4). Điều kiện này được phát biểu thông qua đa diện Newton của đa thức.

2) Chứng minh rằng tồn tại một tập nửa đại số mở, trù mật trong không gian tất cả các đa thức có cùng một đa diện Newton cho trước, sao cho với mỗi đa thức thuộc tập này và bị chặn dưới, bài toán tìm infimum toàn cục là đặt chỉnh (Định lý 2.2.1).

3) Đưa ra một tiêu chuẩn mới của sự tồn tại bất đẳng thức Łojasiewicz toàn cục (Định lý 3.3.3). Tiêu chuẩn này cung cấp một thuật toán cho trường hợp hai biến, kiểm tra sự tồn tại của bất đẳng thức Łojasiewicz toàn cục (Mệnh đề 4.1.2, 4.1.3).

4) Cho một đánh giá các số mũ Łojasiewicz thông qua bậc của đa thức và các số mũ khác dễ tính toán hơn(Mệnh đề 3.4.3, 3.4.5).

   Trong trường hợp hai biến, tính toán một cách tường minh số mũ Łojasiewicz của một đa thức(Mệnh đề 4.2.7, 4.2.9), đa thức thỏa mãn điều kiện không suy biến (Định lý 4.3.11). Hơn nữa, đưa ra một dạng tường minh của bất đẳng thức kiểu Hörmander, trong đó các số mũ xuất hiện với những giá trị cụ thể (Định lý 4.4.2).

Các công trình liên quan đến luận án

1. V. D. Dang and T. T. Nguyen, *Sufficient Conditions for a real Polynomial to be a Sum of Squares of Polynomials.* Kodai J. Math., **39** (2016),253 – 275.

2. V. D. Dang, H. V. Ha and T. S. Pham, *Well-posedness in unconstrained Polynomial Optimization Problems.* SIAM J. Optim., **26**(3) (2016), 1411 – 1428.

3. H. V. Ha and V. D. Dang, *On the Global Łojasiewicz inequality for polynomial functions.* (34 pp)(accepted for publication in Annales Polonici Mathematici.)

Các kết quả trong luận án được báo cáo

1. Xêmina tại Viện nghiên cứu cao cấp về Toán.
2. Xêmina phòng Hình học và Tô pô - Viện Toán học.
3. Xêmina khoa Toán - Trường Đại học Đà Lạt.
4. Hội nghị Nghiên cứu sinh của Viện Toán học, 10/2014, 10/2015, 10/2016, 11/2017.
5. Hội nghị Đại số - Hình học - Tôpô, Buôn Ma Thuột, 10/2016.
6. Hội thảo Tối ưu và tính toán khoa học lần thứ 15, Ba Vì, 4/2017.
7. The 5^{th} Franco - Japanese - Vietnamese Symposium on Singularities (FJV 2017), Japan, 26/10-02/11/2017.
8. Hội nghị Toán học miền trung - Tây nguyên lần thứ 2, Đà Lạt, 12/2017.
9. Hội nghị Toán học toàn quốc lần thứ 9, Nha Trang, 14-18/08/2018.
10. The 6^{th} Franco - Japanese - Vietnamese Symposium on Singularities (FJV 2018), Nha Trang, 15-21/09/2018.

Tài liệu tham khảo

[AGV] V. I. Arnold, S. M. Gusein-Zade, A. N. Varchenko, *Singularities of differentiable maps,* Vol I and Vol II. Springer, (1988).

[BCR] J. Bochnak, M. Coste and M. F. Roy, *Real algebraic geometry*, Springer, Berlin, (1998).

[BM] E. Bierstone and P.D. Milman,*Semianalytic and subanalytic set,* Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci., **67**(1988), 5–42.

[Br] W.D. Brownawell,*Bounds for the degrees in the Nullstellensatz,* Ann. of Math., **126**(1987), 577–591.

[CL2] M. D. Choi, T. Y. Lam, *Extremal positive semidefinite forms,* Math. Ann., **231**(1) (1977), 1–18.

[CLR] M. D. Choi, T. Y. Lam and B. Reznick, *Sum of squares of real polynomials,* Proc. Sympos. Pure Math., **58**(2) (1995), 103–126.

[DHT] S. T. Dinh, H. V. Ha, N. T. Thao, *Łojasiewicz inequality for polynomial function on non-compact domains,* Internat. J. Math., **23**(4)(2012), 1–28.

[DHP1] S. T. Dinh, H. V. Ha and T. S. Pham, *A Frank-Wolfe type theorem for nondegenerate polynomial programs,* Math. Program. Ser. A., **147** (1) (2014), 519–538.

[DHP2] S. T. Dinh, H. V. Ha and T. S. Pham, *Hölder-type global error bounds for non-degenerate polynomial systems,* Acta Math. Vietnam, **42**(2017), 563–585.

[DHPT] S. T. Dinh, H. V. Ha, T. S. Pham and N. T. Thao, *Global Łojasiewicz-type inequality for nondegenerate polynomial maps,* J. Math. Anal. Appl., **410** (2) (2014), 541–560.

[DKL] S. T. Dinh, K. Kurdyka, O. Le Gal, *Łojasiewicz inequality on non compact domains and singularities at infinity,* Internat. J. Math., **24**(10) (2013), 1–8.

[FK] C. Fidalgo and A. Kovacec, *Positive semidefinite diagonal minus tail forms are sum of squares,* Math. Z., **269** (2011), 629–645.

[GM1] M. Ghasemi and M. Marshall, *Lower bounds for polynomials in terms of its coefficients,* Arch. Math., **95** (2010), 343–354.

[GM2] M. Ghasemi and M. Marshall, *Lower bounds for polynomials using geometric programming,* SIAM J. Optim., **22**(2) (2012), 460–473.

[Gi] S. G. Gindikin, *Energy estimates connected with the Newton polyhedron,* Trans. Moscow Math. Soc., **31**(1974), 193–246.

[GV] S.Gindikin, L.R.Volevich, *Method of Newton's Polyhedron in the Theory of Partial Differential Equations,* Kluwer Academic Publishers (1992).

[Gr] L. Grafakos, *Classical Fourier Analysis,* Spinger, (2008).

[GP] V. Guillemin and A. Pollack, *Differential topology,* AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, (2010).

[Gw] J. Gwoździewicz, *The Łojasiewicz exponent of an analytic function at an isolated zero,* Comment. Math. Helv., **74**(3) (1999), 364–375.

[Had] J. Hadamard, *Sur les probleḿe aux deŕiveés et partielles leur signification physique,* Bull. Princeton Univ., **13** (1902), 49–53.

[Ha1] H. V. Ha, *Nombres de Łojasiewicz et singularites à l' infini des polynômes de deux variables complexes,* C. R. Acad. Sci- Paris, Ser I Math., **311** (1990), 429–432.

[Ha2] H. H. Vui, *Global Hölderian error bound for non-degenerate polynomials,* SIAM J. Optim., **23**(2) (2013), 917–933.

[Ha3] H. H. Vui, *Computation of the Łojasiewicz exponent for a germ of a smooth function in two variables,* Studia Math., **240** (2018), 161–176,

[HD] H. H. Vui and N. H. Duc, *Łojasiewicz inequality at infinity for polynomials in two real variables*, Math.Z., **266**(2) (2010) 243–264.

[HNS] H. V. Ha, H. V. Ngai and T. S. Pham, *A global smooth version of the classical Łojasiewicz inequality.* J. Math. Anal. Appl., **421** (2015), 1559–1572.

[HP] H. V. Ha and T. S. Pham, *Genericity in Polynomial Optimization, (Series on Optimization and its Applications-Vol.3)*, World Scientific Publishing Europe Ltd., (2017).

[HP1] H. V. Ha and T. S. Pham, *Minimizing polynomial functions,* Acta Math. Vietnamica **32**(1) (2007), 71–82.

[HP2] H. V. Ha and T. S. Pham, *Global optimization of polynomials using the truncated tangency variety and sums of squares,* SIAM J. Optim., **19** (2008), 941–951.

[HP3] H. V. Ha and T. S. Pham, *Solving polynomial optimization problems via the truncated tangency variety and sums of squares,* J. Pure Appl. Algebra, **213** (2009), 2167–2176.

[HP4] H. V. Ha and T. S. Pham, *Representations of positive polynomials and optimization on noncompact semi-algebraic sets,* SIAM J. Optim., **20**(2010), 3082–3103.

[Hi] D. Hilbert, *Über die Darstellung definiter Formen als Summe von Formenquadraten,* Math. Ann., **32** (1888), 342–350.

[Ho] L. Hörmander, *On the division of distributions by polynomials,* Ark.Mat.,**3** (1958), 555–568.

[Hu] A. Hurwitz, *Über den Vergleich des arithmetischen und des geometrischen,* Mittels.J.Reine Angew.Math., **108** (1891), 266–268.

[Io] A. D. Ioffe, *An invitation to tame optimization,* SIAM J. Optim., **19** (2009), 1894–1917.

[IZ] A. D. Ioffe and A. J. Zaslavski, *Variational principles and well-posedness in optimization and calculus of variations,* SIAM J. Control Optim., **38** (2000), 566–581.

[ILR] A. D. Ioffe, R. E. Lucchetti and J. P. Revalski, *Almost every convex or quadratic programming problem is well posed,* Math. Oper. Res., **29**(2) (2004), 369–382.

[IL1] A. D. Ioffe and R. E. Lucchetti, *Typical convex program is very well posed,* Math. Program., Ser. B, **104** (2005), 483–499.

[IL2] A. D. Ioffe and R. E. Lucchetti, *Generic well-posedness in minimization problems,* Abstr. Appl. Anal., **4** (2005), 343–360.

[JL] D. Jibetean and M. Laurent, *Semidefinite approximations for global unconstrained polynomial optimization,* SIAM J. Optim., **16** (2005), 490–514.

[Kh] A. G. Khovanskii, *Newton polyhedra and toroidal varieties,* Funct. Anal. Appl., **11** (1978), 289–296.

[Ko] A. G. Kouchnirenko, *Polyhedres de Newton et nombre de Milnor,* Invent. Math., **32** (1976), 1–31.

[KMP] K. Kurdyka, T. Mostowski, A. Parusinski, *Proof of the gradient conjecture of R. Thom,* Ann. of Math., **152** (2000), 763–792.

[Ku] C. T. Kuo, *Computation of Łojasiewicz exponent of $f(x, y)$,* Comment.Math.Helv., **49**(1974), 201–213.

[Kur] K. Kurdyka, *On gradient of function definable in o-minimal structures,* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **48**(1998), 769–783.

[Re1] B. Reznick, *Midpoint polytopes and the map $x_i \to x_i^k$.* In preparation.

[Re2] B. Reznick, *Forms derived from the arithmetic-geometric inequality,* Math. Ann., **383** (1989), 431–464.

[Ro] R. M. Robinson, *Some definite polynomials which are not sums of squares of real polynomials,* Abstr. Amer. Math. Soc., **16** (1969), 554.

[La] M. Laurent, *Sums of squares, moment matrices and optimization over polynomials,* Springer, (2009), 157–270.

[La1] J. B. Lasserre, *Global optimization with polynomials and the problem of moments,* SIAM J. Optim., **11**(2001), 796–817.

[La2] J. B. Lasserre, *Moments, positive polynomials and their applications*, Imperial College Press, (2009).

[La3] J. B. Lasserre, *Sufficient conditions for a real polynomial to be a sum of squares,* Arch. Math., (Basel). **89** (2007), 390–398.

[Lo] S. Łojasiewicz, *Sur le problème de la division,* Studia Math., **18** (1959), 87–136.

[LN] J. B. Lasserre and T. Netzer, *SOS approximation of nonnegative polynomial via simple high degree perturbations,* Math. Z., **256** (2006), 99–112.

[Ma1] M. Marshall, *Positive polynomials and sums of squares,* Math. Survey Monogr. **146**, AMS, Providence, RI, (2008).

[Ma2] M. Marshall, *Representations of non-negative polynomials, degree bounds and applications to optimization,* Canad. J. Math., **61**(1) (2009), 205–221.

[Ma3] M. Marshall, *Optimization of polynomials functions,* Canad. Math. Bull., **46** (2008), 537–587.

[Ma4] M. Marshall, *Representation of non-negative polynomials, degree bounds and application to optimization,* Canad. J. Math., **61** (2009), 205–221.

[Mo] T. S. Motzkin, *The arithmetic-geometric inequality, in Inequalities , Oved Shisha (ed.)* Academic Press, (1967), 205–224.

[NDS] J. Nie, J. Demmel, and B. Sturmfels, *Minimizing polynomials via sum of squares over the gradient ideal,* Math. Program. Ser., **106** (3),(2006), 587–606.

[OR] G. Oleksik and A. Rozycki *The Łojasiewicz exponent at infinity of non-negative and non-degenerate polynomials,* Preprint.

[Sch] K. Schmüdgen, An example of a positive polynomial which is not a sum of squares of polynomials. A positive, but not strongly positive functional. Math. Nachr., **88** (1979), 385–390.

[Te] B. Teissier, *Some resonances of Łojasiewicz inequalities,* Wiad. Mat., **48**(2)(2012), 271–284.

[Ty] A. N. Tykhonov and V. Y. Arsenin, *Solutions of ill-posed problems,* Winston, New York, 1977.

[Wa] R. J. Walker, *Algebraic Curves,* Princeton Univ. Press., (1950).

[WKKM] H. Waki, S. Kim, M. Kojima and M. Muramatsu, *Sum of squarer and semidefinite program relaxations for polynomials optimization problems with structured sparsity,* SIAM J. Optim., **17** (2006), 218–242.

[Zo] T. Zolezzi, *Well-posedness criteria in optimization with application to the calculus of variations,* Nonlinear Anal. Theory Methods Appl., **25** (1995), 437–453.