VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

VIỆN TOÁN HỌC

THÁI THỊ KIM CHUNG

BÀI TOÁN DIRICHLET CHO PHƯƠNG TRÌNH KIỂU MONGE-AMPÈRE ELLIPTIC KHÔNG ĐỐI XỨNG

Chuyên ngành: Phương trình Vi phân và Tích phân

Mã số: 9 46 01 03

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HÀ NỘI - 2019

Luận án được hoàn thành tại:

Viện Toán học - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS. Hà Tiến Ngoạn

Phản biện 1:

Phản biện 2:

Phản biện 3:

Luận án được bảo vệ trước Hội đồng chấm Luận án cấp Viện, họp tại Viện Toán học - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam vào hồi .... giờ.......... ngày .... tháng .... năm ....

Có thể tìm luận án tại:

- Thư viện Quốc gia Hà Nội
- Thư viện Viện Toán học

Mở đầu

Phương trình Monge-Ampère là một trong các phương trình vi phân đạo hàm riêng cổ điển phi tuyến hoàn toàn, xuất hiện từ cuối thế kỷ XIX trong các công trình của G. Monge, A.M. Ampère và có dạng sau đây

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = K(x,y)\big(1 + u_x^2 + u_y^2\big)^2, \quad (x,y) \in \Omega, \tag{0.1}$$

trong đó $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ là miền bị chặn, $u(x,y)$ là ẩn hàm của hai biến độc lập x, y cần tìm sao cho đồ thị của hàm $z = u(x,y)$ tại điểm $(x, y, u(x,y))$ có độ cong Gauss $K(x,y)$ cho trước.

Phương trình (0.1) được khái quát lên trường hợp n chiều thành phương trình độ cong Gauss sau đây

$$\det D^2u = K(x)\big(1 + |Du|^2\big)^{\frac{n+2}{2}}, \quad x \in \Omega, \tag{0.2}$$

trong đó $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là miền bị chặn, $u = u(x) = u(x_1, \ldots, x_n)$ là ẩn hàm, $Du = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$ là véc tơ gradient của u, $D^2u = [u_{x_ix_j}]_{n\times n}$ là ma trận Hessian của u và $K(x)$ là hàm số cho trước. Phương trình này là elliptic khi ma trận Hessian D^2u là xác định dương hay u là hàm lồi chặt trong Ω và do đó $K(x) > 0$. Nó được nhiều nhà Toán học nghiên cứu như A.D. Alexandrov, I.J. Bakelman, H. Lewy, S. Bernstein,...

Sau này, trong một số lĩnh vực như Hình học affine, Khí tượng học, Cơ học chất lỏng,... đã xuất hiện phương trình có dạng tổng quát hơn sau đây

$$\det D^2u = f(x, u, Du), \quad x \in \Omega, \tag{0.3}$$

trong đó $f(x, z, p)$ là hàm số cho trước xác định trên $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Trong việc nghiên cứu nghiệm cổ điển của bài toán Dirichlet cho phương trình (0.3), có một số sự kiện đột phá quan trọng. Trước tiên, đó là các kết quả của E. Calabi và A.V. Pogorelov về thiết lập các đánh giá tiên nghiệm bên trong miền đối với các đạo hàm cấp hai của nghiệm lồi chặt. Tiếp theo, đó là các kết quả của L.C. Evans và N.V. Krylov vào những năm 1980 về việc thiết lập các đánh giá tiên nghiệm Hölder bên trong miền đối với các đạo hàm cấp hai của nghiệm lồi chặt một khi chuẩn của nó trong $C^2(\overline{\Omega})$ đã được đánh giá. Cũng trong những năm 1980, các kết quả về đánh giá tiên nghiệm toàn cục đối với các đạo hàm cấp hai của nghiệm elliptic cổ điển của phương trình (0.3) đã được thiết lập bởi N.M. Ivochkina, còn đánh giá tiên nghiệm cho đạo hàm cấp ba được thiết lập một cách độc lập bởi Caffarelli-Nirenberg-Spruck và Krylov. Từ đó, bằng phương pháp liên tục đối với phương trình toán tử phi tuyến, người ta đã chứng minh được sự tồn tại duy nhất nghiệm elliptic cổ điển của bài toán Dirichlet cho phương trình (0.3).

Những năm gần đây, trong các lĩnh vực Vận chuyển tối ưu và Hình học bảo giác đã đưa đến việc nghiên cứu bài toán Dirichlet cho phương trình kiểu Monge-Ampère, trong đó vế trái của phương trình này là định thức của tổng D^2u với các ma trận vuông nào đó phụ thuộc vào (x, u, Du) và được mô tả bởi

$$\det\left[D^2u - A(x,u,Du) - B(x,u,Du)\right] = f(x,u,Du) \ \text{ trong } \Omega, \tag{0.4}$$
$$u(x) = \varphi(x) \ \text{ trên } \partial\Omega, \tag{0.5}$$

trong đó Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n$, $A(x,z,p) = [A_{ij}(x,z,p)]_{n\times n}$, $B(x,z,p) = [B_{ij}(x,z,p)]_{n\times n}$ và $f(x,z,p)$ lần lượt là ma trận đối xứng, ma trận phản đối xứng và hàm vô hướng xác định trên $\Gamma := \overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, $\varphi(x)$ là hàm vô hướng xác định trên $\overline{\Omega}$. Ở đây, ta sử dụng (x,z,p) để ký hiệu các điểm thuộc Γ. Nếu $B(x,z,p)\equiv 0$ thì (0.4) được gọi là *phương trình kiểu Monge-Ampère đối xứng*, còn nếu $B(x,z,p)\not\equiv 0$ thì (0.4) được gọi là *phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng.*

Với hàm $u(x)\in C^2(\overline{\Omega})$ tùy ý, ta ký hiệu

$$\omega(x,u) := D^2u(x) - A(x,u(x),Du(x)), \tag{0.6}$$
$$\lambda_u := \min_{x\in\overline{\Omega}} \lambda_{\min}(\omega(x,u)), \tag{0.7}$$

trong đó $\lambda_{\min}(\omega(x,u))$ là giá trị riêng nhỏ nhất của ma trận đối xứng $\omega(x,u)\in\mathbb{R}^{n\times n}$. Phương trình (0.4) là *elliptic* đối với $u(x)$ trên $\overline{\Omega}$ khi và chỉ khi

$$\lambda_u > 0. \tag{0.8}$$

Điều này đưa đến điều kiện sau đối với hàm vế phải $f(x,z,p)$ (Mệnh đề 2.2.2),

$$f(x,z,p) > 0, \quad \text{trong } \Gamma. \tag{0.9}$$

Nhà toán học người Úc N.S. Trudinger và nhóm nghiên cứu của ông đã khởi xướng việc nghiên cứu bài toán Dirichlet cho phương trình kiểu Monge-Ampère đối xứng có dạng (0.4)-(0.5), trong đó $B(x,z,p)\equiv 0$, cụ thể là bài toán dạng sau đây

$$\det\left[D^2u - A(x,u,Du)\right] = f(x,u,Du) \ \text{ trong } \Omega, \tag{0.10}$$
$$u(x) = \varphi(x) \ \text{ trên } \partial\Omega. \tag{0.11}$$

Để nghiên cứu tính giải được của bài toán Dirichlet (0.10)-(0.11), Trudinger đã áp dụng phương pháp liên tục, trong đó việc chứng minh tính giải được của bài toán trên được đưa về việc thiết lập các đánh giá tiên nghiệm trong $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ đối với nghiệm elliptic của bài toán với hằng số $\alpha\in(0,1)$ nào đó. Việc thiết lập các đánh giá tiên nghiệm này được Trudinger tiến hành qua các bước sau:

- Bước 1: Áp dụng các kỹ thuật của A.V. Pogorelov để thiết lập đánh giá độ lớn các đạo hàm cấp hai của nghiệm elliptic trên toàn miền Ω thông qua đánh giá của chúng trên biên;
- Bước 2: Đánh giá độ lớn các đạo hàm cấp hai của nghiệm elliptic trên biên $\partial\Omega$;
- Bước 3: Đánh giá chuẩn $C^1(\overline{\Omega})$ đối với nghiệm elliptic;
- Bước 4: Áp dụng các kỹ thuật của L.C. Evans và N.V. Krylov để thiết lập đánh giá nửa chuẩn Hölder đối với các đạo hàm cấp hai của nghiệm elliptic, qua đó nhận được đánh giá đối với chuẩn $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Trudinger đã đưa ra bốn giả thiết quan trọng sau đây đối với bài toán Dirichlet (0.10)-(0.11):

T1) Ma trận $A(x,z,p) = [A_{ij}(x,z,p)]_{n\times n} \in C^2(\Gamma;\mathbb{R}^{n\times n})$ và thỏa mãn điều kiện *chính quy* trong Γ, nghĩa là

$$D_{p_k p_\ell} A_{ij}(x,z,p)\xi_i\xi_j\eta_k\eta_\ell \geq 0, \quad \forall (x,z,p)\in\Gamma,\ \xi,\ \eta\in\mathbb{R}^n,\ \xi\perp\eta; \tag{0.12}$$

hoặc thỏa mãn điều kiện *chính quy chặt* trong Γ, nghĩa là tồn tại hằng số $a_0 > 0$ sao cho

$$D_{p_k p_\ell} A_{ij}(x,z,p)\xi_i\xi_j\eta_k\eta_\ell \geq a_0|\xi|^2|\eta|^2, \quad \forall (x,z,p)\in\Gamma,\ \xi,\ \eta\in\mathbb{R}^n,\ \xi\perp\eta. \tag{0.13}$$

Ở đây, tất cả các biểu thức ở các vế trái của (0.12) và (0.13) cũng như trong luận án này, nếu không nói gì thêm về các chỉ số có mặt trong biểu thức thì chúng ta ngầm hiểu đó là phép toán lấy tổng trên tập hợp tất cả các chỉ số lặp có mặt trong biểu thức đó.

T2) Ma trận $A(x,z,p)$ thỏa mãn điều kiện về cấu trúc

$$D_z A(x,z,p) \geq 0, \quad A(x,z,p) \geq -\gamma_0\big(1+|p|^2\big)E \quad \text{và} \quad \lambda_{\max}(A(x,z,0)) \geq 0, \tag{0.14}$$

với mọi $x\in\Omega, z\in\mathbb{R}$ và $p\in\mathbb{R}^n$, trong đó $\gamma_0 > 0$ là hằng số dương, E là ma trận đơn vị cấp n.

T3) Hàm $f(x,z,p)\in C^2(\Gamma;\mathbb{R})$ thỏa mãn $f(x,z,p) > 0$, $D_z f(x,z,p) \geq 0$, trong Γ.

T4) Tồn tại nghiệm dưới elliptic $\underline{u}(x)\in C^4(\overline{\Omega})$ của bài toán Dirichlet (0.10)-(0.11), nghĩa là $\underline{u}(x)$ thỏa mãn các điều kiện

$$\lambda_{\underline{u}} := \min_{x\in\overline{\Omega}} \lambda_{\min}(\omega(x,\underline{u})) > 0, \tag{0.15}$$

$$\det\big[D^2\underline{u} - A(x,\underline{u},D\underline{u})\big] \geq f(x,\underline{u},D\underline{u}) \quad \text{trong } \Omega, \tag{0.16}$$

$$\underline{u}(x) = \varphi(x) \quad \text{trên } \partial\Omega, \tag{0.17}$$

trong đó $\varphi(x)\in C^4(\overline{\Omega})$ và $\partial\Omega\in C^4$.

Để tiến hành các đánh giá tiên nghiệm trong các bước nói trên, trong lớp nghiệm elliptic, nhóm của Trudinger đã biểu diễn phương trình (0.10) dưới dạng tương đương

$$\log(\det\omega(x,u)) = \hat{f}(x,u,Du), \quad \text{trong } \Omega, \tag{0.18}$$

trong đó $\omega(x,u)$ được cho bởi (0.6) và $\hat{f} = \log f$, rồi sử dụng hai kết quả quan trọng đó là tính lõm của *hàm số kiểu Monge-Ampère đối xứng* có dạng

$$F(\omega) = \log(\det\omega), \tag{0.19}$$

trên tập lồi các ma trận đối xứng xác định dương $\omega\in\mathbb{R}^{n\times n}$ và nguyên lý so sánh đối với phương trình (0.18), được phát biểu sau đây.

Định lý 0.0.1 (Nguyên lý so sánh) *Cho các hàm $u(x), v(x)\in C^2(\overline{\Omega})$ thỏa mãn*

$$\log(\det\omega(x,u)) - \hat{f}(x,u,Du) \leq \log(\det\omega(x,v)) - \hat{f}(x,v,Dv) \ \textit{trong}\ \Omega,\ u\geq v \ \textit{trên}\ \partial\Omega.$$

Giả sử các điều kiện sau thỏa mãn:

1) $\lambda_u > 0,\ \lambda_v > 0$;

2) $D_z A(x,z,p) \geq 0$, *trong* Γ;

3) $f(x,z,p) > 0,\ D_z f(x,z,p) \geq 0,$ *trong* Γ.

Khi đó $u \geq v$ *trong* Ω. *Hơn nữa, nếu* $u = v$ *trên* $\partial\Omega$ *thì ta có* $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} \geq \dfrac{\partial v}{\partial \nu}$ *trên* $\partial\Omega$, *trong đó* ν *là véc tơ pháp tuyến trong đơn vị của biên* $\partial\Omega$.

Kết quả của nhóm Trudinger qua các bước đánh giá tiên nghiệm nói trên được tổng kết trong định lý sau đây.

Định lý 0.0.2 (Đánh giá tiên nghiệm trong $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$) *Giả sử* $u(x) \in C^4(\overline{\Omega})$ *là nghiệm elliptic của bài toán Dirichlet* (0.10)-(0.11), *trong đó* $A = A(x,p)$, $f = f(x,p)$ *và giả sử các giả thiết* T1)-T4) *nói trên được thỏa mãn. Khi đó ta có đánh giá sau*

$$|u|_{2,\alpha;\overline{\Omega}} \leq C, \tag{0.20}$$

trong đó $\alpha \in (0,1)$ *và* C *là các hằng số dương phụ thuộc vào* $n, \gamma_0, A, f, \underline{u}, \varphi$ *và* Ω.

Trên cơ sở Định lý 0.0.2, bằng việc đưa bài toán (0.10)-(0.11) về phương trình toán tử trong không gian Banach $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ và áp dụng phương pháp liên tục, nhóm của Trudinger đã chứng minh tính giải được của bài toán (0.10)-(0.11) trong trường hợp ma trận đối xứng A và hàm vế phải f không phụ thuộc vào biến z. Cụ thể, ta có định lý sau đây.

Định lý 0.0.3 *Xét bài toán Dirichlet* (0.10)-(0.11), *trong đó* $A = A(x,p)$, $f = f(x,p)$ *và giả sử các giả thiết* T1)-T4) *nói trên được thỏa mãn. Khi đó tồn tại hằng số* $\alpha \in (0,1)$ *sao cho nghiệm elliptic* $u(x)$ *của bài toán Dirichlet* (0.10)-(0.11) *là tồn tại và duy nhất trong* $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Trong việc thiết lập các đánh giá tiên nghiệm trong $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ với $\alpha \in (0,1)$, giả thiết ban đầu về tính chính quy của nghiệm u chỉ là $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Trong chứng minh của Định lý 0.0.3, từ các giả thiết về độ trơn của các dữ kiện của bài toán và định lý về tính chính quy của nghiệm elliptic của phương trình đạo hàm riêng phi tuyến, người ta đã suy ra được $u \in W^{4,p}(\Omega) \cap C^{3,\alpha}(\overline{\Omega})$, với mọi $p \in (1, +\infty)$. Từ đó, bằng việc áp dụng kỹ thuật xấp xỉ đối với phương trình phi tuyến rất phức tạp, người ta vẫn thiết lập được đánh giá tiên nghiệm như trong Định lý 0.0.2.

Về sau, nhóm của Trudinger cũng đã mở rộng kết quả của các định lý trên khi A và f phụ thuộc thêm vào biến z bằng việc đưa vào giả thiết về sự tồn tại của một nghiệm trên elliptic $\overline{u}(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ đối với phương trình (0.10) sao cho $\overline{u}(x) \geq \varphi(x)$ trên $\partial\Omega$. Bài toán Dirichlet (0.4)-(0.5) khi ma trận phản đối xứng $B(x,z,p) \not\equiv 0$ cũng đã được nghiên cứu bởi Trudinger trong trường hợp số chiều $n = 2$.

Các nhà Toán học G. De Philippis, A. Figalli và N.S. Trudinger đã chỉ ra sự cần thiết của việc nghiên cứu phương trình kiểu Monge-Ampère elliptic không đối xứng. Do đó mục tiêu của luận án là nghiên cứu tính giải được của bài toán Dirichlet (0.4)-(0.5) trong không gian $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ khi $B(x,z,p) \not\equiv 0$.

Luận án cũng đặt vấn đề áp dụng phương pháp liên tục tương tự như đối với bài toán Dirichlet (0.10)-(0.11) để nghiên cứu tính giải được của bài toán Dirichlet (0.4)-(0.5). Do sự có mặt của ma trận phản đối xứng $B(x,z,p)$ trong phương trình (0.4), việc tiến hành các đánh giá tiên nghiệm đối với nghiệm elliptic $u(x) \in C^4(\overline{\Omega})$ của bài toán (0.4)-(0.5) trong bốn bước nói trên sẽ gặp nhiều khó khăn, bởi vì trong trường hợp $B(x,z,p) \equiv 0$, các đánh giá tại từng điểm $x^0 \in \Omega$ trong các bước nói trên trên có thể tiến hành một cách thuận lợi sau khi chéo hóa ma trận đối xứng $\omega(x,u)$ tại điểm x^0 này. Để khắc phục các khó khăn này, luận án đã hạn chế xét một lớp con của nghiệm elliptic, được gọi là nghiệm δ-elliptic với $0 \le \delta < 1$, trong đó khi $\delta = 0$ thì trùng với nghiệm elliptic thông thường. Cụ thể, luận án đưa ra định nghĩa sau đây.

Định nghĩa 0.0.4 Cho hằng số $\delta \in [0, 1)$. Ta nói rằng phương trình (0.4) là *δ-elliptic* đối với hàm $u(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ nếu nó là elliptic đối với u và điều kiện sau được thỏa mãn

$$\mu(B) \le \delta\lambda_u, \tag{0.21}$$

trong đó $\mu(B)$ là đại lượng được xác định bởi

$$\mu(B) := \sup_{(x,z,p)\in\Gamma} \|B(x, z, p)\|, \tag{0.22}$$

ở đây $\|B\|$ là chuẩn toán tử của ma trận B.

Với hàm $u(x) \in C^2(\overline{\Omega})$, ta ký hiệu

$$R(x, u) := D^2u - A(x, u, Du) - B(x, u, Du) = \omega(x, u) - B(x, u, Du). \tag{0.23}$$

Khi đó, trong lớp nghiệm elliptic, phương trình (0.4) tương đương với

$$\log(\det R(x, u)) = \hat{f}(x, u, Du), \quad \text{trong } \Omega, \tag{0.24}$$

trong đó $\hat{f} = \log f$. Để chuẩn bị các công cụ cho việc đánh giá tiên nghiệm đối với nghiệm δ-elliptic của phương trình (0.24), thay vì hàm số kiểu Monge-Ampère đối xứng $F(\omega) = \log(\det\omega)$, ta xét *hàm số kiểu Monge-Ampère không đối xứng* có dạng sau đây

$$F(R) = \log(\det R), \tag{0.25}$$

trong đó $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận xác định dương có dạng

$$R = \omega + \beta,\ \omega^T = \omega,\ \omega > 0,\ \beta^T = -\beta.$$

Luận án sẽ chỉ ra rằng $\det\beta \ge 0$ và $\det R \ge \det\omega + \det\beta \ge \det\omega > 0$ (Mệnh đề 2.2.2). Do đó hàm $F(R)$ luôn xác định và khả vi vô hạn trên miền $R > 0$.

Với các hằng số $\delta \in [0, 1)$ và $\mu \ge 0$, trên cơ sở gợi ý của khái niệm nghiệm δ-elliptic, luận án đưa vào tập xác định $D_{\delta,\mu}$ sau đây của hàm $F(R)$,

$$\begin{aligned} D_{\delta,\mu} = \big\{R \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid R = \omega + \beta,\ \omega^T = \omega, \beta^T = -\beta,\ \lambda_{\min}(\omega) > 0, \\ \mu \le \delta\lambda_{\min}(\omega),\ \|\beta\| \le \mu\big\}. \end{aligned} \tag{0.26}$$

Khi đó $D_{\delta,\mu}$ là tập lồi và không bị chặn trong $\mathbb{R}^{n\times n}$ (Mệnh đề 2.2.1). Khi $\delta = 0$ thì $\mu = 0$, $\beta = 0$ và $D_{0,0}$ trùng với tập các ma trận đối xứng xác định dương.

Nhằm mở rộng khái niệm về tính lõm thông thường của hàm $F(\omega) = \log(\det\omega)$ trên tập lồi các ma trận đối xứng xác định dương trong $\mathbb{R}^{n\times n}$, luận án đưa ra khái niệm về tính d-lõm với $d \ge 0$ của hàm $F(R) = \log(\det R)$ trên $D_{\delta,\mu}$. Cụ thể, ta có định nghĩa sau đây.

Định nghĩa 0.0.5 Giả sử $d \ge 0$ là số thực không âm. Ta nói rằng hàm $F(R)$ là *d-lõm* trên tập $D_{\delta,\mu}$ nếu với hai ma trận tùy ý $R^{(0)} = \big[R^{(0)}_{ij}\big]_{n\times n}$ và $R^{(1)} = \big[R^{(1)}_{ij}\big]_{n\times n}$ thuộc $D_{\delta,\mu}$, ta có

$$F\big(R^{(1)}\big) - F\big(R^{(0)}\big) \le \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial F\big(R^{(0)}\big)}{\partial R_{ij}} \Big(R^{(1)}_{ij} - R^{(0)}_{ij}\Big) + d. \tag{0.27}$$

Khái niệm 0-lõm trùng với khái niệm lõm thông thường. Trong Định lý 2.2.21, luận án sẽ chỉ ra rằng hàm $F(R) = \log(\det R)$ là d-lõm trên tập $D_{\delta,\mu}$, trong đó hằng số d chỉ phụ thuộc vào δ và n, không phụ thuộc vào μ.

Luận án sẽ thiết lập nguyên lý so sánh (Định lý 3.1.1) đối với các nghiệm δ-elliptic của phương trình (0.4), trong đó khi so với Định lý 0.0.1 ở trên có bổ sung một số điều kiện để ma trận phản đối xứng $B(x, z, p)$ là nhỏ theo nghĩa nào đó. Khi tiến hành các bước đánh giá tiên nghiệm đối với nghiệm δ-elliptic của bài toán (0.4)-(0.5), bằng cách dựa theo sơ đồ của nhóm Trudinger, luận án sẽ sử dụng các dạng khác nhau của tính d-lõm của hàm $F(R) = \log(\det R)$ cũng như giả thiết về tính chính quy chặt của ma trận đối xứng $A(x, z, p)$. Định lý 3.5.1 là một trong các kết quả chính của luận án, trong đó tổng kết của kết quả các bước đánh giá tiên nghiệm. Định lý này mô tả các điều kiện đủ áp đặt lên ma trận đối xứng $A(x, z, p)$, hàm vế phải $f(x, z, p)$, hàm trên biên $\varphi(x)$ và miền Ω để tồn tại các hằng số dương $\alpha \in (0, 1)$ và C sao cho với mọi ma trận phản đối xứng $B(x, z, p)$ nhỏ được xác định bởi một số tham số liên quan đến các dữ kiện vừa nêu trên, nghiệm δ-elliptic $u(x) \in C^4(\overline{\Omega})$ của bài toán Dirichlet (0.4)-(0.5) thỏa mãn

$$|u|_{2,\alpha;\overline{\Omega}} \leq C,$$

đồng thời đánh giá này là đều đối với một lớp các ma trận $B(x, z, p)$ nhỏ theo nghĩa nào đó. Trong Định lý 4.1.1, luận án đã thiết lập được một điều kiện cần áp lên $B(x, z, p)$ để phương trình (0.4) có nghiệm δ-elliptic.

Việc áp dụng phương pháp liên tục giải phương trình toán tử phi tuyến đã đưa tới Định lý 4.2.3, một trong các kết quả chính của luận án. Định lý này sẽ chỉ ra rằng với một số điều kiện đủ áp đặt lên các dữ kiện của bài toán, tương tự như đối với trường hợp phương trình đối xứng, nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet (0.4)-(0.5) sẽ tồn tại duy nhất trong $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ với $\alpha \in (0, 1)$ nếu ma trận $B(x, z, p)$ là đủ nhỏ theo một nghĩa nào đó. Tuy nhiên, đối với trường hợp phương trình không đối xứng, việc sử dụng kỹ thuật xấp xỉ tương tự như trường hợp phương trình đối xứng đã đề cập ở trên nói chung là rất khó để vượt qua. Do đó trong luận án, giả thiết về độ trơn của các dữ kiện của bài toán Dirichlet (0.4)-(0.5) đã được làm mạnh hơn để thiết lập tính giải được của nó.

Ngoài phần Mở đầu, luận án gồm bốn chương, Kết luận, Danh mục các công trình liên quan đến luận án và Tài liệu tham khảo.

Chương 1 trình bày một số kiến thức chuẩn bị về lý thuyết ma trận, khái niệm các không gian hàm cơ bản và một số kết quả đối với phương trình đạo hàm riêng elliptic cấp hai tuyến tính và phi tuyến hoàn toàn.

Chương 2 trình bày kết quả về tính d-lõm của hàm số kiểu Monge-Ampère với biến là các ma trận xác định dương không đối xứng.

Các Chương 3 và 4 là các chương chính của luận án, trong đó Chương 3 trình bày các bước đánh giá tiên nghiệm trong $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ đối với nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet cho phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng.

Chương 4 trình bày về một điều kiện cần và một số điều kiện đủ cho sự tồn tại nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet cho phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng. Cuối cùng, luận án trình bày một số ví dụ về bài toán Dirichlet cho phương trình kiểu Monge-Ampère elliptic không đối xứng.

Luận án được viết dựa trên hai bài báo [1], [2] trong Danh mục các công trình liên quan đến luận án.

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Nội dung chương này nhắc lại một số khái niệm và kiến thức đã biết để sử dụng trong luận án.

Mục 1.1 trình bày một số kiến thức cơ bản trong lý thuyết Ma trận: các khái niệm ma trận đối xứng, phản đối xứng, trực giao, Hermite, phản Hermite, unita; khái niệm ma trận xác định dương; một số tính chất cơ bản của chuẩn Frobenius và chuẩn toán tử của ma trận; một số tính chất cơ bản về vết của ma trận; bài toán chéo hóa ma trận thực đối xứng và phản đối xứng; giới thiệu về khái niệm ma trận compound bậc 2 của một ma trận vuông và một số tính chất cơ bản của nó.

Mục 1.2 trình bày các khái niệm về không gian Hölder và không gian Sobolev; phát biểu định lý về bất đẳng thức Hölder và Định lý Morrey.

Mục 1.3 trình bày một số kết quả cơ bản của phương trình đạo hàm riêng elliptic tuyến tính cấp hai: nguyên lý cực đại, nguyên lý so sánh; bài toán Dirichlet và tính khả nghịch của phương trình toán tử; các Định lý Harnack, Krylov và đánh giá trong L^p.

Mục 1.4 trình bày khái niệm phương trình đạo hàm riêng elliptic cấp hai phi tuyến hoàn toàn, khái niệm đạo hàm Fréchet và định lý hàm ẩn trong không gian Banach; giới thiệu về phương pháp liên tục để giải phương trình toán tử phi tuyến trong không gian Banach.

Chương 2

Tính d-lõm của hàm số kiểu Monge-Ampère không đối xứng

Chương này nghiên cứu về tính d-lõm của hàm số kiểu Monge-Ampère $F(R) = \log(\det R)$ với biến R là ma trận xác định dương không đối xứng. Tính chất này là một công cụ quan trọng trong các đánh giá tiên nghiệm ở chương sau.

Nội dung của chương này được viết dựa trên bài báo [1] trong Danh mục các công trình liên quan đến luận án.

2.1 Tính lõm của hàm số kiểu Monge-Ampère đối xứng

Trong mục này, luận án tổng quan một số tính chất đã biết về tính lõm của hàm số kiểu Monge-Ampère đối xứng dạng sau đây

$$F(\omega) = \log(\det \omega), \tag{2.1}$$

trong đó $\omega = [\omega_{ij}]_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận thực đối xứng xác định dương. Hàm $F(\omega)$ là hàm lõm chặt trên tập lồi các ma trận đối xứng xác định dương. Ký hiệu $\omega^{-1} = [\omega^{ij}]_{n\times n}$ là ma trận nghịch đảo của ω. Khi đó ta có

$$F^{ij} := \frac{\partial F(\omega)}{\partial \omega_{ij}} = \omega^{ji}, \quad F^{ij,k\ell} := \frac{\partial^2 F(\omega)}{\partial \omega_{ij}\partial \omega_{k\ell}} = -\omega^{\ell i}\omega^{jk}, \quad i,j,k,\ell = 1,\dots,n. \tag{2.2}$$

Mệnh đề 2.1.1 *Cho hàm $F(\omega)$ xác định bởi (2.1), trong đó ω là ma trận đối xứng xác định dương. Khi đó với mỗi ω cố định, ta có*

$$\sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} F^{ij,k\ell} P_{ij} P_{k\ell} = -|\tilde{P}|^2 \le -\frac{1}{(\lambda_{\max}(\omega))^2}|P|^2 \le 0, \quad \forall P = [P_{ij}]_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n}, P^T = P, \tag{2.3}$$

trong đó $\tilde{P} = \omega^{-\frac{1}{2}} P \omega^{-\frac{1}{2}}$.

Mệnh đề 2.1.2 *Cho $\omega^{(0)} = \left[\omega_{ij}^{(0)}\right]_{n\times n}$ và $\omega^{(1)} = \left[\omega_{ij}^{(1)}\right]_{n\times n}$ là các ma trận đối xứng xác định dương tùy ý. Khi đó ta có đánh giá*

$$F\left(\omega^{(1)}\right) - F\left(\omega^{(0)}\right) \le \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial F\left(\omega^{(0)}\right)}{\partial \omega_{ij}} \left(\omega_{ij}^{(1)} - \omega_{ij}^{(0)}\right). \tag{2.4}$$

2.2 Tính d-lõm của hàm số kiểu Monge-Ampère không đối xứng

Trong mục này, luận án nghiên cứu về tính d-lõm (Định nghĩa 0.0.5) của hàm số kiểu Monge-Ampère không đối xứng dạng sau đây

$$F(R) = \log(\det R), \tag{2.5}$$

trong đó R thuộc tập $D_{\delta,\mu}$ đã được định nghĩa trong (0.26),

$$\begin{aligned} D_{\delta,\mu} = \big\{ R \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid R = \omega + \beta,\ \omega^T = \omega, \beta^T = -\beta,\ \lambda_{\min}(\omega) > 0, \\ \mu \le \delta\lambda_{\min}(\omega),\ \|\beta\| \le \mu \big\}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

trong đó $\delta \in [0,1)$ và μ là các hằng số không âm. Các Mệnh đề 2.1.1 và 2.1.2 sẽ được mở rộng tương ứng cho hàm $F(R)$ trên tập $D_{\delta,\mu}$.

2.2.1 Một vài tính chất của lớp ma trận $D_{\delta,\mu}$

Mục này nghiên cứu một số tính chất của lớp ma trận $D_{\delta,\mu}$ cho bởi (2.6).

Mệnh đề 2.2.1 *Tập $D_{\delta,\mu}$ cho bởi* (2.6) *là lồi và không bị chặn trong $\mathbb{R}^{n\times n}$.*

Mệnh đề 2.2.2 *Giả sử $R = \omega + \beta \in \mathbb{R}^{n\times n}$, trong đó ω là đối xứng xác định dương, β là phản đối xứng. Khi đó ta có các khẳng định sau:*

(i) $\det\beta \ge 0$;

(ii) $\det R \ge \det\omega + \det\beta \ge \det\omega > 0$;

(iii) *Đặc biệt, khi $n = 2$, ta có* $\det R = \det\omega + \det\beta \ge \det\omega > 0$.

Do đó, $\det R > 0$ *và R là không suy biến khi $\omega > 0$.*

Trong quá trình chứng minh mệnh đề trên, luận án đưa vào các ma trận

$$\sigma = \omega^{-\frac{1}{2}}\beta\omega^{-\frac{1}{2}}, \tag{2.7}$$
$$D_1 = \operatorname{diag}(\mathrm{i}\sigma_1, \ldots, \mathrm{i}\sigma_n), \tag{2.9}$$
$$\sigma = C_1 D_1 C_1^*, \tag{2.11}$$

trong đó $\mathrm{i}\sigma_1, \ldots, \mathrm{i}\sigma_n$ là các giá trị riêng thuần ảo của σ và $C_1 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ là ma trận unita.

Mệnh đề 2.2.3 *Giả sử $R = \omega + \beta \in D_{\delta,\mu}$ và σ là ma trận cho bởi* (2.7)*. Khi đó ta có*

(i) $\|\sigma\| \le \delta < 1$;

(ii) *Các giá trị riêng $\mathrm{i}\sigma_j$ của σ thỏa mãn:* $|\mathrm{i}\sigma_j| = |\sigma_j| \le \delta < 1,\ j = 1, \ldots, n$.

Mệnh đề 2.2.4 *Giả sử $R = \omega + \beta \in D_{\delta,\mu}$. Khi đó ta có*

$$\frac{1}{\delta^n}\|\beta\|^n + \big(2^{[\frac{n}{2}]} - 1\big)\det\beta \le \det\omega + \big(2^{[\frac{n}{2}]} - 1\big)\det\beta \le \det R \le (1+\delta^2)^{[\frac{n}{2}]}\det\omega, \tag{2.15}$$

trong đó, nếu $\delta = 0$ thì $\beta = 0$ và ta quy ước $\dfrac{0}{0} = 0$.

Mệnh đề 2.2.5 *Giả sử* $R = \omega + \beta \in D_{\delta,\mu}$ *và* σ *là ma trận cho bởi* (2.7). *Khi đó ta có*

$$\begin{aligned} \frac{R^{-1} + \left(R^{-1}\right)^T}{2} &= \omega^{-\frac{1}{2}} \left(E - \sigma^2\right)^{-1} \omega^{-\frac{1}{2}}, \\ \frac{R^{-1} - \left(R^{-1}\right)^T}{2} &= \omega^{-\frac{1}{2}} (-\sigma) \left(E - \sigma^2\right)^{-1} \omega^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Từ (2.7), (2.9), (2.11) và Mệnh đề 2.2.5, ta suy ra được hệ quả sau.

Hệ quả 2.2.6 *Giả sử* $R = \omega + \beta \in D_{\delta,\mu}$ *và* σ *là ma trận cho bởi* (2.7). *Giả sử* σ *được chéo hóa bởi ma trận unita* $C_1 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *như trong* (2.11), $\sigma = C_1 D_1 C_1^*$, *trong đó* D_1 *là ma trận đường chéo cho bởi* (2.9). *Khi đó ta có*

$$\begin{aligned} \frac{R^{-1} + \left(R^{-1}\right)^T}{2} &= \omega^{-\frac{1}{2}} C_1 D_2 C_1^* \omega^{-\frac{1}{2}}, \\ \frac{R^{-1} - \left(R^{-1}\right)^T}{2} &= \omega^{-\frac{1}{2}} C_1 D_3 C_1^* \omega^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{2.18}$$

trong đó

$$\begin{aligned} D_2 &= \left(E - D_1^2\right)^{-1} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{1+\sigma_1^2}, \ldots, \frac{1}{1+\sigma_n^2}\right), \\ D_3 &= (-D_1)\left(E - D_1^2\right)^{-1} = \operatorname{diag}\left(\frac{-\mathrm{i}\sigma_1}{1+\sigma_1^2}, \ldots, \frac{-\mathrm{i}\sigma_n}{1+\sigma_n^2}\right). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Từ Mệnh đề 2.2.3 và Hệ quả 2.2.6, ta suy ra được hệ quả sau.

Hệ quả 2.2.7 *Giả sử* $R = \omega + \beta \in D_{\delta,\mu}$. *Khi đó ta có*

$$\frac{1}{1+\delta^2}\,\omega^{-1} \leq \frac{R^{-1} + \left(R^{-1}\right)^T}{2} \leq \omega^{-1}, \tag{2.20}$$

$$\frac{1}{1+\delta^2}\,\omega^{jj} \leq R^{jj} \leq \omega^{jj},\ j = 1, \ldots, n. \tag{2.21}$$

2.2.2 Vi phân cấp hai của hàm số kiểu Monge-Ampère không đối xứng

Trước tiên, luận án phát biểu mệnh đề dưới đây, trong đó chỉ ra rằng các công thức trong (2.2) vẫn còn đúng cho trường hợp khi ma trận R là không đối xứng.

Mệnh đề 2.2.8 *Xét hàm số* $F(R) = \log(\det R)$, *trong đó* $R = [R_{ij}]_{n\times n}$ *nói chung là không đối xứng và thỏa mãn* $\det R > 0$. *Khi đó với* $R^{-1} = [R^{ij}]_{n\times n}$ *và* $i, j, k, \ell = 1, \ldots, n$, *ta có*

$$F^{ij} := \frac{\partial F(R)}{\partial R_{ij}} = R^{ji}, \tag{2.22}$$

$$F^{ij,k\ell} := \frac{\partial^2 F(R)}{\partial R_{ij}\partial R_{k\ell}} = -R^{\ell i} R^{jk}. \tag{2.23}$$

Tiếp theo, ta nghiên cứu vi phân cấp hai của hàm số $F(R)$ cho bởi (2.5), trong đó $R \in D_{\delta,\mu}$, $D_{\delta,\mu}$ là tập hợp cho bởi (2.6). Xét hàm số $\mathcal{F}$ được xác định như sau

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}(R, M) : D_{\delta,\mu} \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}, \\ &\mathcal{F}(R, M) = \sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial R_{ij} \partial R_{k\ell}} M_{ij} M_{k\ell} = - \sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} R^{\ell i} R^{jk} M_{ij} M_{k\ell}, \end{aligned} \tag{2.24}$$

trong đó $R = [R_{ij}]_{n\times n} \in D_{\delta,\mu}$, $M = [M_{ij}]_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Mệnh đề 2.2.9 *Giả sử $R \in D_{\delta,\mu}$. Khi đó với mọi ma trận $M = P + Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ta có*

$$\mathcal{F}(R, M) = \mathcal{F}(R, P) + \mathcal{F}(R, Q) + 2\mathcal{L}(R, P, Q), \tag{2.25}$$

trong đó

$$\mathcal{L}(R, P, Q) = - \sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} R^{\ell i} R^{jk} P_{ij} Q_{k\ell}. \tag{2.26}$$

Mệnh đề 2.2.10 *Giả sử $R \in D_{\delta,\mu}$. Khi đó với mọi ma trận đối xứng $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ta có*

$$\mathcal{F}(R, P) = - [\mathcal{G}(R, P)]^2 + \mathcal{H}(R, P), \tag{2.27}$$

trong đó

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(R, P) &= \operatorname{Tr}\big(R^{-1} P\big), \\ \mathcal{H}(R, P) &= 2 \operatorname{Tr}\left[\left(R^{-1}\right)^{(2)} P^{(2)}\right], \end{aligned} \tag{2.28}$$

với $\left(R^{-1}\right)^{(2)}$ và $P^{(2)}$ lần lượt là ma trận compound bậc hai của R^{-1} và P.

Mệnh đề 2.2.11 *Giả sử $R \in D_{\delta,\mu}$. Khi đó với mọi ma trận phản đối xứng $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ta có*

$$\mathcal{F}(R, Q) = - [\mathcal{G}(R, Q)]^2 + \mathcal{H}(R, Q), \tag{2.30}$$

trong đó các hàm $\mathcal{G}$ và $\mathcal{H}$ được xác định bởi (2.28).

Mệnh đề 2.2.12 *Giả sử $R \in D_{\delta,\mu}$. Khi đó với mọi ma trận đối xứng $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ và ma trận phản đối xứng $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ta có*

$$\mathcal{L}(R, P, Q) = -\frac{1}{2} \operatorname{Tr}\left[\left(R^{-1} - (R^{-1})^T\right) P \left(R^{-1} + (R^{-1})^T\right) Q\right], \tag{2.31}$$

trong đó hàm $\mathcal{L}(R, P, Q)$ được xác định bởi (2.26).

Bây giờ, với $R = \omega + \beta \in D_{\delta,\mu}$ cố định và với $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ta đặt

$$\tilde{M} \equiv \omega^{-\frac{1}{2}} M \omega^{-\frac{1}{2}} = \big[\tilde{M}_{jk}\big]_{n\times n}, \quad \tilde{\tilde{M}} \equiv C_1^* \tilde{M} C_1 = \big[\tilde{\tilde{M}}_{jk}\big]_{n\times n}, \tag{2.32}$$

trong đó $C_1 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ là ma trận unita thỏa mãn (2.11). Dễ thấy,

$$\big|\tilde{M}\big| = \big|\tilde{\tilde{M}}\big|, \quad \big\|\tilde{M}\big\| = \Big\|\tilde{\tilde{M}}\Big\|. \tag{2.33}$$

Mệnh đề 2.2.13 *Với mọi ma trận $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ta có đánh giá sau đây*

$$\big(\lambda_{\max}(\omega)\big)^{-2}|M|^2 \le \big|\tilde{M}\big|^2 \le \big(\lambda_{\min}(\omega)\big)^{-2}|M|^2. \tag{2.34}$$

Mệnh đề 2.2.14 *Giả sử $R = \omega + \beta \in D_{\delta,\mu}$. Khi đó với mọi ma trận đối xứng $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ta có*

$$\mathcal{F}(R,P) = -\sum_{j,k=1}^{n} \frac{1-\sigma_j\sigma_k}{\left(1+\sigma_j^2\right)\left(1+\sigma_k^2\right)}\left|\tilde{\tilde{P}}_{jk}\right|^2, \tag{2.35}$$

trong đó $\mathcal{F}(R,P)$ được xác định bởi (2.27) và $\mathrm{i}\sigma_j$ ($\sigma_j \in \mathbb{R}$), $j = 1,\ldots,n$ là các giá trị riêng thuần ảo của ma trận phản đối xứng σ cho bởi (2.7).

Từ Mệnh đề 2.2.14, ta thu được hệ quả sau đây.

Hệ quả 2.2.15 *Giả sử $R = \omega+\beta \in D_{\delta,\mu}$. Khi đó với mọi ma trận đối xứng $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ta có*

$$\mathcal{F}(R,P) \le -\frac{1-\delta^2}{\left(1+\delta^2\right)^2}\big|\tilde{P}\big|^2 \le -\frac{1-\delta^2}{\left(1+\delta^2\right)^2}\big(\lambda_{\max}(\omega)\big)^{-2}|P|^2. \tag{2.42}$$

Mệnh đề 2.2.16 *Giả sử $R = \omega + \beta \in D_{\delta,\mu}$. Khi đó với mọi ma trận phản đối xứng $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ta có*

$$\mathcal{F}(R,Q) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{1-\sigma_j\sigma_k}{\left(1+\sigma_j^2\right)\left(1+\sigma_k^2\right)}\left|\tilde{\tilde{Q}}_{jk}\right|^2. \tag{2.43}$$

Từ Mệnh đề 2.2.16, ta thu được hệ quả sau đây.

Hệ quả 2.2.17 *Giả sử $R = \omega + \beta \in D_{\delta,\mu}$. Khi đó với mọi ma trận phản đối xứng $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ta có*

$$\mathcal{F}(R,Q) \le \big|\tilde{Q}\big|^2. \tag{2.50}$$

Mệnh đề 2.2.18 *Giả sử $R = \omega+\beta \in D_{\delta,\mu}$. Khi đó với mọi ma trận đối xứng $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ và ma trận phản đối xứng $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ta có*

$$|\mathcal{L}(R,P,Q)| \le \frac{2n\delta}{1+\delta^2}\big|\tilde{P}\big|\big|\tilde{Q}\big|. \tag{2.51}$$

Để kết thúc mục này, luận án sẽ đánh giá cận trên đối với vi phân cấp hai của hàm $F(R)$. Từ Mệnh đề 2.2.9, Hệ quả 2.2.15, Hệ quả 2.2.17 và Mệnh đề 2.2.18, ta thu được định lý sau đây là mở rộng của Mệnh đề 2.1.1 và nó sẽ được dùng trong việc chứng minh Định lý 3.2.1.

Định lý 2.2.19 *Giả sử $R = \omega+\beta \in D_{\delta,\mu}$. Khi đó với mọi ma trận $M = P+Q$, trong đó $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là đối xứng và $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là phản đối xứng, ta có*

$$\mathcal{F}(R,M) \le -(1-\eta)\frac{1-\delta^2}{\left(1+\delta^2\right)^2}\big|\tilde{P}\big|^2 + \left(1+\frac{4n^2\delta^2}{\eta\left(1-\delta^2\right)}\right)\big|\tilde{Q}\big|^2, \tag{2.53}$$

với mọi hằng số $\eta \in (0,1]$, trong đó $\tilde{P} = \omega^{-\frac{1}{2}}P\omega^{-\frac{1}{2}}, \tilde{Q} = \omega^{-\frac{1}{2}}Q\omega^{-\frac{1}{2}}$.

2.2.3 Tính d-lõm của hàm số kiểu Monge-Ampère không đối xứng

Định lý dưới đây về một dạng của tính d-lõm sẽ được sử dụng trong việc chứng minh Định lý 3.4.1.

Định lý 2.2.20 *Với mọi ma trận* $R^{(0)} = \omega^{(0)} + \beta^{(0)} = \left[R_{ij}^{(0)}\right]_{n\times n}$ *và* $R^{(1)} = \omega^{(1)} + \beta^{(1)} = \left[R_{ij}^{(1)}\right]_{n\times n}$ *thuộc tập* $D_{\delta,\mu}$*, ta có*

$$F\big(R^{(1)}\big) - F\big(R^{(0)}\big) \le \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial F\big(R^{(0)}\big)}{\partial R_{ij}}\Big(R_{ij}^{(1)} - R_{ij}^{(0)}\Big) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{4n^2\delta^2}{1-\delta^2}\right)\big(\lambda_{\min}\big(\omega^{(s)}\big)\big)^{-2}\big|\beta^{(1)} - \beta^{(0)}\big|^2, \tag{2.54}$$

trong đó $\omega^{(s)} \equiv (1-s)\omega^{(0)} + s\omega^{(1)}$, $s \in (0,1)$ *là hằng số nào đó.*

Sau đây, luận án phát biểu định lý về tính d-lõm của hàm số kiểu Monge-Ampère không đối xứng $F(R)$ trên tập lồi không bị chặn $D_{\delta,\mu} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$. Định lý này là mở rộng của Mệnh đề 2.1.2 và sẽ được sử dụng trong việc chứng minh Định lý 3.3.1.

Định lý 2.2.21 *Hàm* $F(R) = \log(\det R)$ *là d-lõm trên tập hợp* $D_{\delta,\mu}$*, trong đó* $D_{\delta,\mu} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ *là tập lồi không bị chặn cho bởi (2.6),* $d = 2n\delta^2\left(1 + \dfrac{4n^2\delta^2}{1-\delta^2}\right)$ *chỉ phụ thuộc vào δ và n. Điều này có nghĩa là, với mọi ma trận* $R^{(0)} = \omega^{(0)} + \beta^{(0)} = \big[R_{ij}^{(0)}\big]_{n\times n}$ *và* $R^{(1)} = \omega^{(1)} + \beta^{(1)} = \big[R_{ij}^{(1)}\big]_{n\times n}$ *thuộc* $D_{\delta,\mu}$*, ta có*

$$F\big(R^{(1)}\big) - F\big(R^{(0)}\big) \le \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial F\big(R^{(0)}\big)}{\partial R_{ij}}\left(R_{ij}^{(1)} - R_{ij}^{(0)}\right) + d. \tag{2.57}$$

Chương 3

Các đánh giá tiên nghiệm đối với nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet cho phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng

Nội dung chương này nhằm trình bày các bước đánh giá tiên nghiệm trong $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ đối với nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet cho phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng dạng sau đây

$$\det\left[D^2u - A(x,u,Du) - B(x,u,Du)\right] = f(x,u,Du) \quad \text{trong } \Omega, \tag{3.1}$$

$$u(x) = \varphi(x) \quad \text{trên } \partial\Omega, \tag{3.2}$$

trong đó $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là miền bị chặn có biên $\partial\Omega$ trơn, $A(x,z,p) = [A_{ij}(x,z,p)]_{n\times n}$, $B(x,z,p) = [B_{ij}(x,z,p)]_{n\times n}$ và $f(x,z,p)$ lần lượt là ma trận đối xứng, ma trận phản đối xứng và hàm vô hướng xác định trên $\Gamma := \overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, $\varphi(x)$ là hàm vô hướng xác định trên $\overline{\Omega}$. Các bước này là tương tự như của nhóm N.S. Trudinger trong việc đánh giá tiên nghiệm trong $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ đối với nghiệm elliptic của bài toán Dirichlet cho phương trình kiểu Monge-Ampère đối xứng.

Trong chương này, ta luôn đặt ra giả thiết $A(x,z,p) \in C^2(\Gamma;\mathbb{R}^{n\times n})$, $B(x,z,p) \in BC^2(\Gamma;\mathbb{R}^{n\times n})$ và $f(x,z,p) \in C^2(\Gamma;\mathbb{R})$.

Khi $B(x,z,p) \equiv 0$, ta có phương trình kiểu Monge-Ampère đối xứng tương ứng với (3.1),

$$\det\left[D^2u - A(x,u,Du)\right] = f(x,u,Du), \quad \text{trong } \Omega. \tag{3.3}$$

Cho hằng số $\delta \in [0,1)$, theo Định nghĩa 0.0.4, phương trình (3.1) là δ-*elliptic* đối với hàm $u(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ nếu nó là elliptic đối với u, tức là $\lambda_u > 0$ và $\mu(B) \leq \delta\lambda_u$.

Nội dung của chương này được viết dựa trên hai bài báo [1], [2] trong Danh mục các công trình liên quan đến luận án.

3.1 Nguyên lý so sánh cho phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng

Trong mục này, luận án thiết lập nguyên lý so sánh cho phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng (3.1) khi nó là δ-elliptic đối với các hàm được so sánh.

Đặt

$$G[u](x) := \log\det\left[D^2u - A(x,u,Du) - B(x,u,Du)\right] - \log f(x,u,Du),\ x \in \Omega. \quad (3.4)$$

Định lý sau đây là mở rộng của Định lý 0.0.1 trong phần Mở đầu sang trường hợp phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng.

Định lý 3.1.1 *Cho các hàm $u(x), v(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ thỏa mãn $G[u](x) \le G[v](x)$ trong Ω và $u(x) \ge v(x)$ trên $\partial\Omega$. Giả sử các điều kiện sau đây được thỏa mãn:*

(i) $\lambda_u > 0,\ \lambda_v > 0$;

(ii) $\mu(B) \le \delta \min\{\lambda_u, \lambda_v\}$;

(iii) $\inf\limits_{(x,z,p)\in\Gamma} \lambda_{\min}(D_zA(x,z,p)) \ge (-\alpha_1)\min\{\lambda_u, \lambda_v\}$;

(iv) $\mu(D_zB) \le \beta_1 \min\{\lambda_u, \lambda_v\}$;

(v) $f(x,z,p) > 0$, *trong* Γ;

(vi) $f_1 := \inf\limits_{(x,z,p)\in\Gamma} \left(\frac{D_zf}{f}\right)(x,z,p) \ge n\left(\alpha_1 + \dfrac{\delta}{1+\delta^2}\beta_1\right)$,

trong đó $\delta \in [0,1), \alpha_1$ và β_1 là các hằng số không âm, $\mu(B)$ và $\mu(D_zB)$ là các đại lượng được xác định bởi (0.22).

Khi đó ta có $u(x) \ge v(x)$ trong Ω. Hơn nữa, nếu $u(x) = v(x)$ trên $\partial\Omega$ thì ta có $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} \ge \dfrac{\partial v}{\partial \nu}$ trên $\partial\Omega$, trong đó ν là véc tơ pháp tuyến trong đơn vị của biên $\partial\Omega$.

3.2 Đánh giá trên toàn miền các đạo hàm cấp hai của nghiệm δ-elliptic của phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng qua độ lớn của chúng ở trên biên

Trong mục này, luận án sẽ chứng minh một kết quả tương tự như đối với phương trình kiểu Monge-Ampère đối xứng rằng độ lớn của các đạo hàm cấp hai của nghiệm δ-elliptic của phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng (3.1) trong $\overline{\Omega}$ được đánh giá qua độ lớn của chúng ở trên biên $\partial\Omega$.

Định lý 3.2.1 *Giả sử $u(x) \in C^4(\overline{\Omega})$ là một nghiệm elliptic của phương trình* (3.1) *và các điều kiện sau được thỏa mãn*

(i) $\sup\limits_{x\in\Omega} |u(x)| \le M_0,\ \sup\limits_{x\in\Omega} |Du(x)| \le M_1$;

(ii) $A(x,z,p)$ *là chính quy chặt trong Γ, nghĩa là tồn tại hằng số $a_0 > 0$ sao cho*

$$A_{ij,k\ell}(x,z,p)\xi_i\xi_j\eta_k\eta_\ell \ge a_0|\xi|^2|\eta|^2, \quad (3.18)$$

với mọi $(x,z,p) \in \Gamma$ và $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, $\xi \perp \eta$, trong đó $A_{ij,k\ell} = D_{p_kp_\ell}A_{ij}$;

(iii) $\left|B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\right| \le \delta\lambda_u|\xi|^2$;

(iv) $\left|D_zB_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\right| \le \beta_1\lambda_u|\xi|^2$;

(v) $\left|D_{x_k}B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\right|, \left|D_{p_k}B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\right| \le \beta_2\lambda_u|\xi|^2|\eta|$;

(vi) $\left|D_{x_kx_\ell}B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\eta_\ell\right|, \left|D_{x_kp_\ell}B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\eta_\ell\right| \le \beta_3|\xi|^2|\eta|^2$,
$\left|D_{x_kz}B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\right|, \left|D_{zp_k}B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\right| \le \beta_3|\xi|^2|\eta|$,
$\left|D_{zz}B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\right| \le \beta_3|\xi|^2$;

(vii) $\left|D_{p_kp_\ell}B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\eta_\ell\right| \le b_0|\xi|^2|\eta|^2$;

(viii) $f(x,z,p) > 0$, *trong* Γ,

trong đó $M_0, M_1, \beta_2, \beta_3$ *là các hằng số dương và* δ, β_1, b_0 *là các hằng số không âm,* $0 \le \delta < 1, 0 \le b_0 \le a_0$, *các điều kiện* (iii)-(vii) *thỏa mãn với mọi* $(x,z,p) \in \Gamma$ *và* $\xi \in \mathbb{C}^n$, $\eta \in \mathbb{R}^n$.

Khi đó ta có các đánh giá sau

$$\sup_{x\in\Omega} \lambda_{\max}(\omega(x,u)) \le C\Big(1 + \sup_{x\in\partial\Omega} \lambda_{\max}(\omega(x,u))\Big), \tag{3.19}$$

$$\sup_{x\in\Omega} |D^2u(x)| \le C\Big(1 + \sup_{x\in\partial\Omega} \left|D^2u(x)\right|\Big), \tag{3.20}$$

trong đó C *là hằng số dương chỉ phụ thuộc vào* $M_0, M_1, n, a_0, \delta, \beta_1, \beta_2, \beta_3, b_0, A, f$ *và* Ω.

3.3 Đánh giá trên biên các đạo hàm cấp hai của nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet cho phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng

Như đã chỉ ra trong Định lý 3.2.1, để thiết lập đánh giá tiên nghiệm đối với các đạo hàm cấp hai của nghiệm δ-elliptic của phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng (3.1) trong $\overline{\Omega}$, ta đưa về việc thiết lập đánh giá tương ứng trên biên $\partial\Omega$. Trong mục này, luận án sẽ thiết lập đánh giá $|D^2u| \le C$ trên biên $\partial\Omega$ cho nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet (3.1)-(3.2).

Định lý 3.3.1 *Giả sử* $u(x) \in C^4(\overline{\Omega})$ *là nghiệm elliptic của bài toán Dirichlet* (3.1)-(3.2)*, trong đó* $\varphi(x) \in C^4(\overline{\Omega})$ *và* $\partial\Omega \in C^4$. *Giả sử tồn tại một nghiệm dưới elliptic* $\underline{u}(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ *của phương trình* (3.3) *tương ứng với* (3.1)*, trong đó* $B(x,z,p) \equiv 0$ *và* $\underline{u}(x) = \varphi(x)$ *trên* $\partial\Omega$*, và giả sử các điều kiện sau được thỏa mãn:*

(i) $\max\Big\{\sup_\Omega|u|, \sup_\Omega|\underline{u}|\Big\} \le M_0$, $\max\Big\{\sup_\Omega|Du|, \sup_\Omega|D\underline{u}|\Big\} \le M_1$;

(ii) $D_zA(x,z,p) = [D_zA_{ij}(x,z,p)] \ge 0$, *trong* Γ;

(iii) $A(x,z,p)$ *là chính quy chặt trong* Γ *thỏa mãn* (3.18) *với* $a_0 > 0$;

(iv) $\left|B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\right| \le \delta\min\{\lambda_u, \lambda_{\underline{u}}\}|\xi|^2$;

(v) $\left|D_zB_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\right| \le \beta_1\min\{\lambda_u, \lambda_{\underline{u}}\}|\xi|^2$;

(vi) $\left|D_{x_k}B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\right|, \left|D_{p_k}B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\right| \le \beta_2\min\{\lambda_u, \lambda_{\underline{u}}\}|\xi|^2|\eta|$;

(vii) $\left|D_{p_kp_\ell}B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\eta_\ell\right| \le b_0|\xi|^2|\eta|^2$;

(viii) $f(x,z,p) > 0$, *trong* Γ;

(ix) $\inf\limits_{(x,z,p)\in\Gamma}\left(\dfrac{D_z f}{f}\right)(x,z,p) \geq \dfrac{n\delta}{1+\delta^2}\beta_1$,

trong đó M_0, M_1, β_2 *là các hằng số dương và* δ, β_1, b_0 *là các hằng số không âm,* $0 \leq \delta < 1, 0 \leq b_0 \leq a_0$, *các điều kiện* (iv)-(vii) *thỏa mãn với mọi* $(x,z,p) \in \Gamma$ *và* $\xi \in \mathbb{C}^n$, $\eta \in \mathbb{R}^n$.

Khi đó ta có các đánh giá trên biên

$$\sup_{x\in\partial\Omega}\left|D^2u(x)\right| \leq C, \tag{3.47}$$

$$\sup_{x\in\partial\Omega}\lambda_{\max}(\omega(x,u)) \leq C, \tag{3.48}$$

trong đó C *là hằng số dương chỉ phụ thuộc vào* $M_0, M_1, n, a_0, \delta, \beta_1, \beta_2, b_0, A, f, \underline{u}, \varphi$ *và* Ω.

3.4 Đánh giá Hölder toàn cục đối với các đạo hàm cấp hai của nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet cho phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng

Trong các Mục 3.2 và 3.3, luận án đã đánh giá được chuẩn trong $C^2(\overline{\Omega})$ đối với nghiệm δ-elliptic $u(x) \in C^4(\overline{\Omega})$ của bài toán Dirichlet (3.1)-(3.2) qua chuẩn của nó trong $C^1(\overline{\Omega})$. Trong mục này, luận án sẽ thiết lập đánh giá Hölder toàn cục đối với các đạo hàm cấp hai của nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet (3.1)-(3.2) qua chuẩn của nó trong $C^2(\overline{\Omega})$.

3.4.1 Đánh giá Hölder bên trong miền đối với các đạo hàm cấp hai của nghiệm δ-elliptic của phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng

Trong mục này, luận án sẽ thiết lập đánh Hölder bên trong miền Ω đối với các đạo hàm cấp hai của nghiệm δ-elliptic của phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng (3.1).

Định lý 3.4.1 *Cho* $u(x) \in C^4(\overline{\Omega})$ *là nghiệm* δ*-elliptic của phương trình* (3.1) *với* $\delta \in [0,1)$, *trong đó* $f(x,z,p) > 0$ *trong* Γ. *Giả sử* u *thỏa mãn*

$$\sup_{x\in\Omega}|u(x)| \leq M_0,\ \sup_{x\in\Omega}|Du(x)| \leq M_1,\ \sup_{x\in\Omega}|D^2u(x)| \leq M_2, \tag{3.108}$$

trong đó M_0, M_1 *và* M_2 *là các hằng số dương. Khi đó với mọi hình cầu* $B_{R_0} \subset \Omega$ *và* $R \leq R_0$, *ta có đánh giá sau*

$$\operatorname*{osc}_{B_R} D^2u \leq C\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\alpha_0}\left(\operatorname*{osc}_{B_{R_0}} D^2u + R_0^{\alpha_0}\right), \tag{3.109}$$

trong đó $\alpha_0 \in (0,1)$ *là hằng số phụ thuộc vào* $M_0, M_1, M_2, n, \delta, A, f$ *và* Ω, *còn hằng số* $C > 0$ *phụ thuộc thêm vào* B; *ở đây,* $\operatorname*{osc}\limits_{B_R} D^2u := \sup\limits_{x,y\in B_R}|D^2u(x) - D^2u(y)|$, B_{R_0} *và* B_R *là các hình cầu đồng tâm.*

Hệ quả 3.4.8. *Giả sử các giả thiết của Định lý 3.4.1 được thỏa mãn. Khi đó với miền con tùy ý $\Omega' \subset\subset \Omega$, ta có đánh giá*

$$\left[D^2u\right]_{\alpha_0;\Omega'} \leq C, \tag{3.148}$$

trong đó $\alpha_0 \in (0,1)$ là hằng số đã được xác định trong Định lý 3.4.1, C là hằng số dương phụ thuộc vào $M_0, M_1, M_2, n, \delta, A, B, f, \Omega$ và $\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$.

3.4.2 Đánh giá Hölder tại điểm tùy ý trên biên đối với các đạo hàm cấp hai của nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet cho phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng

Trong mục này, luận án sẽ thiết lập đánh giá Hölder đối với các đạo hàm cấp hai của nghiệm δ-elliptic tại điểm tùy ý trên biên và với bậc $\alpha \in (0,1)$ tùy ý.

Định lý 3.4.9 *Cho $u(x) \in C^4(\overline{\Omega})$ là nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet* (3.1)-(3.2), *trong đó $f(x,z,p) > 0$ trong Γ, $\varphi(x) \in C^4(\overline{\Omega})$ và $\partial\Omega \in C^4$. Giả sử*

$$\sup_{x\in\Omega} |u(x)| \leq M_0, \ \sup_{x\in\Omega} |Du(x)| \leq M_1, \ \sup_{x\in\Omega} |D^2u(x)| \leq M_2, \tag{3.149}$$

trong đó M_0, M_1 và M_2 là các hằng số dương. Khi đó với mọi hằng số $\alpha \in (0,1)$, ta có

$$|D^2u(x) - D^2u(x^0)| \leq C|x - x^0|^{\alpha}, \quad \forall x^0 \in \partial\Omega, \ x \in \overline{\Omega}, \tag{3.150}$$

trong đó C là hằng số dương phụ thuộc vào $\alpha, M_0, M_1, M_2, n, \delta, A, B, f, \varphi$ và Ω.

Hệ quả 3.4.13 *Giả sử các giả thiết của Định lý 3.4.9 được thỏa mãn. Khi đó với hằng số $\alpha \in (0,1)$ tùy ý, ta có đánh giá*

$$\operatorname*{osc}_{B_R(x^0)\cap\Omega} D^2u \leq CR^{\alpha}, \quad \forall x^0 \in \partial\Omega, \ R > 0, \tag{3.183}$$

trong đó C là hằng số dương phụ thuộc vào $\alpha, M_0, M_1, M_2, n, \delta, A, \ B, f, \varphi$ và Ω.

3.4.3 Đánh giá Hölder toàn cục đối với các đạo hàm cấp hai của nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet

Bằng việc kết hợp các đánh giá Hölder ở bên trong miền và tại điểm biên tùy ý, luận án thiết lập được đánh giá Hölder toàn cục sau đây.

Định lý 3.4.14 *Giả sử các giả thiết của Định lý 3.4.9 được thỏa mãn. Khi đó ta có*

$$[D^2u]_{\alpha_0;\Omega} \leq C, \tag{3.184}$$

trong đó $\alpha_0 \in (0,1)$ và C là các hằng số dương phụ thuộc vào $M_0, M_1, M_2, n, \delta, A, B, f$, φ và Ω.

2.5 Đánh giá chuẩn $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ đối với nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet

Nội dung của mục này là một trong những kết quả chính của luận án về đánh giá tiên nghiệm trong $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ đối với nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet cho phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng. Định lý sau đây là mở rộng của Định lý 0.0.2 trong phần Mở đầu sang trường hợp phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng.

Định lý 3.5.1 *Giả sử $u(x) \in C^4(\overline{\Omega})$ là nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet* (3.1)-(3.2)*, trong đó $A(x,z,p) \in C^2(\Gamma;\mathbb{R}^{n\times n})$, $B(x,z,p) \in BC^2(\Gamma;\mathbb{R}^{n\times n})$, $f(x,z,p) \in C^2(\Gamma;\mathbb{R})$, $\varphi(x) \in C^4(\overline{\Omega})$ và $\partial\Omega \in C^4$. Ta cũng giả sử tồn tại một nghiệm dưới δ-elliptic $\underline{u}(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ của bài toán Dirichlet* (3.3)-(3.2)*, trong đó $B(x,z,p) \equiv 0$ và $\underline{u}(x) = \varphi(x)$ trên $\partial\Omega$. Giả sử các điều kiện sau được thỏa mãn:*

(i) *Ma trận $A(x,z,p)$ thỏa mãn điều kiện cấu trúc*

$$A(x,z,p) \geq -\gamma_0\big(1+|p|^2\big)E, \tag{3.187}$$

$$\lambda_{\max}(A(x,z,0)) \geq 0, \tag{3.188}$$

với mọi $x \in \Omega, z \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}^n$, trong đó γ_0 là hằng số dương;

(ii) $D_zA(x,z,p) = [D_zA_{ij}(x,z,p)]_{n\times n} \geq 0$, *trong* Γ;

(iii) *$A(x,z,p)$ là chính quy chặt trong Γ thỏa mãn* (3.18) *với $a_0 > 0$;*

(iv) $\big|B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\big| \leq \delta\min\{\lambda_u, \lambda_{\underline{u}}\}|\xi|^2$;

(v) $\big|D_zB_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\big| \leq \beta_1\min\{\lambda_u, \lambda_{\underline{u}}\}|\xi|^2$;

(vi) $\big|D_{x_k}B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\big|, \big|D_{p_k}B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\big| \leq \beta_2\min\{\lambda_u, \lambda_{\underline{u}}\}|\xi|^2|\eta|$;

(vii) $\big|D_{x_kx_\ell}B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\eta_\ell\big|, \big|D_{x_kp_\ell}B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\eta_\ell\big| \leq \beta_3|\xi|^2|\eta|^2$,
$\big|D_{x_kz}B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\big|, \big|D_{zp_k}B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\big| \leq \beta_3|\xi|^2|\eta|$,
$\big|D_{zz}B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\big| \leq \beta_3|\xi|^2$;

(viii) $\big|D_{p_kp_\ell}B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\eta_\ell\big| \leq b_0|\xi|^2|\eta|^2$;

(ix) $f(x,z,p) > 0$, *trong* Γ;

(x) $\inf\limits_{(x,z,p)\in\Gamma}\left(\dfrac{D_zf}{f}\right)(x,z,p) \geq \dfrac{n\delta}{1+\delta^2}\beta_1$,

trong đó $\delta, \beta_1, \beta_2, \beta_3, b_0$ là các hằng số, $0 \leq \delta < 1, \beta_1 \geq 0, \beta_2 > 0, \beta_3 > 0, 0 \leq b_0 \leq a_0$, các điều kiện (iv)-(viii) *thỏa mãn với mọi $(x,z,p) \in \Gamma$ và $\xi \in \mathbb{C}^n$, $\eta \in \mathbb{R}^n$.*

Khi đó ta có các đánh giá sau

$$\sup_{x\in\Omega}|u(x)| \leq M_0, \quad \sup_{x\in\Omega}|Du(x)| \leq M_1, \tag{3.189}$$

$$\sup_{x\in\Omega}\lambda_{\max}(\omega(x,u)) \leq C_0, \tag{3.190}$$

$$\lambda_u \geq \lambda_0, \tag{3.191}$$

$$|u|_{2,\alpha_0;\overline{\Omega}} \leq C_1, \tag{3.192}$$

trong đó $M_0, M_1, C_0, \lambda_0, 0 < \alpha_0 < 1, C_1$ là các hằng số dương chỉ phụ thuộc vào $n, \gamma_0, a_0, \delta, \beta_1, \beta_2, \beta_3, b_0, A, f, \underline{u}, \varphi$ và Ω, $M_0 \geq \sup\limits_{\Omega}|\underline{u}|$, $M_1 \geq \sup\limits_{\Omega}|D\underline{u}|$, λ_0 được xác định bởi

$$\lambda_0 = \frac{\left(1+\delta^2\right)^{-[\frac{n}{2}]}f_0}{C_0^{n-1}}, \quad f_0 = \min_{x\in\overline{\Omega},|z|\leq M_0,|p|\leq M_1} f(x,z,p). \tag{3.193}$$

Chương 4

Tính giải được của bài toán Dirichlet cho phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng

Trong chương này, luận án nghiên cứu sự tồn tại duy nhất nghiệm δ-elliptic trong $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ đối với bài toán Dirichlet cho phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng dạng sau đây

$$\det\left[D^2u - A(x,u,Du) - B(x,u,Du)\right] = f(x,u,Du) \ \text{ trong } \Omega, \tag{4.1}$$

$$u(x) = \varphi(x) \ \text{ trên } \partial\Omega, \tag{4.2}$$

trong đó $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là miền bị chặn có biên $\partial\Omega$ trơn, $A(x,z,p)$, $B(x,z,p)$ và $f(x,z,p)$ lần lượt là ma trận đối xứng, ma trận phản đối xứng và hàm vô hướng trơn xác định trên $\Gamma := \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $\varphi(x)$ là hàm vô hướng trơn xác định trên $\overline{\Omega}$.

Khi $B(x,z,p) \equiv 0$, ta có phương trình kiểu Monge-Ampère đối xứng tương ứng với (4.1),

$$\det\left[D^2u - A(x,u,Du)\right] = f(x,u,Du), \ \text{ trong } \Omega. \tag{4.3}$$

Nội dung của chương này được viết dựa trên bài báo [2] trong Danh mục các công trình liên quan đến luận án.

4.1 Một điều kiện cần cho sự tồn tại nghiệm δ-elliptic của phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng

Định lý sau là một điều kiện cần đối với ma trận phản đối xứng $B(x,z,p)$ cho sự tồn tại nghiệm δ-elliptic của phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng (4.1).

Định lý 4.1.1 *Ký hiệu $U_\delta(\Omega)$ với $\delta \in (0,1)$ là tập hợp tất cả các nghiệm δ-elliptic $u(x)$ của phương trình* (4.1) *trong Ω sao cho*

$$\sup_{x\in\Omega}|u(x)| \le M_0, \quad \sup_{x\in\Omega}|Du(x)| \le M_1, \tag{4.4}$$

trong đó M_0, M_1 là các hằng số dương. Khi đó, nếu tập $U_\delta(\Omega)$ là khác rỗng thì điều kiện cần là bất đẳng thức sau được thỏa mãn

$$\mu(B) \le \delta(1+\delta^2)^{\frac{1}{n}\left[\frac{n}{2}\right]} f_1^{1/n}, \quad f_1 = \max_{x\in\overline{\Omega},|z|\le M_0,|p|\le M_1} f(x,z,p). \tag{4.5}$$

4.2 Các điều kiện đủ cho sự tồn tại nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet cho phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng

Điều kiện cần (4.5) cho chúng ta thấy rằng, để chứng minh tính giải được của bài toán Dirichlet cho phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng (4.1)-(4.2), chúng ta phải đặt ra một số điều kiện đối với ma trận phản đối xứng $B(x, z, p)$. Trong mục này, luận án sẽ thiết lập các điều kiện đủ cho sự tồn tại và duy nhất nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet (4.1)-(4.2).

Cho δ, β_1, b_0 là các số không âm và β_2, β_3 là các số dương, trong đó $0 \leq \delta < 1, 0 \leq b_0 \leq a_0$, a_0 là hằng số dương được xác định trong công thức (4.8) dưới đây. Giả sử tồn tại hàm $\underline{u}(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ là nghiệm dưới elliptic của (4.3) sao cho $\underline{u} = \varphi$ trên $\partial\Omega$.

Định nghĩa 4.2.1 Ta ký hiệu $W = W(\delta, \beta_1, \beta_2, \beta_3, b_0, \lambda_{\underline{u}})$ là tập hợp các ma trận phản đối xứng $B(x, z, p) = [B_{ij}(x, z, p)]_{n\times n} \in BC^2\big(\Gamma; \mathbb{R}^{n\times n}\big)$ và thỏa mãn các điều kiện sau với mọi $\xi \in \mathbb{C}^n, \eta \in \mathbb{R}^n$, $\xi, \eta \neq 0$,

(a) $\sup\limits_{(x,z,p)\in\Gamma} \big|B_{ij}(x, z, p)\xi_i\overline{\xi}_j\big| < \delta\lambda_{\underline{u}}|\xi|^2$ nếu $\delta > 0$, và $B \equiv 0$ nếu $\delta = 0$;

(b) $\sup\limits_{(x,z,p)\in\Gamma} \big|D_z B_{ij}(x, z, p)\xi_i\overline{\xi}_j\big| < \beta_1\lambda_{\underline{u}}|\xi|^2$ nếu $\beta_1 > 0$, và $D_z B \equiv 0$ nếu $\beta_1 = 0$;

(c) $\sup\limits_{(x,z,p)\in\Gamma} \big(\big|D_{x_k}B_{ij}(x, z, p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\big|, \big|D_{p_k}B_{ij}(x, z, p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\big|\big) < \beta_2\lambda_{\underline{u}}|\xi|^2|\eta|$;

(d) $\big|D_{x_kx_\ell}B_{ij}(x, z, p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\eta_\ell\big|, \big|D_{x_kp_\ell}B_{ij}(x, z, p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\eta_\ell\big| \leq \beta_3|\xi|^2|\eta|^2$,
$\big|D_{x_kz}B_{ij}(x, z, p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\big|, \big|D_{zp_k}B_{ij}(x, z, p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\big| \leq \beta_3|\xi|^2|\eta|$,
$\big|D_{zz}B_{ij}(x, z, p)\xi_i\overline{\xi}_j\big| \leq \beta_3|\xi|^2, \ \forall(x, z, p) \in \Gamma$;

(e) $\big|D_{p_kp_\ell}B_{ij}(x, z, p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\eta_\ell\big| \leq b_0|\xi|^2|\eta|^2, \ \forall(x, z, p) \in \Gamma$.

Định nghĩa 4.2.2 Giả sử $B = [B_{ij}(x, z, p)]_{n\times n}$ là ma trận tùy ý thuộc W. Ta ký hiệu $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\delta, \beta_1, \beta_2, B)$ là tập hợp các hàm $u(x) \in C^2\big(\overline{\Omega}\big)$ và thỏa mãn các điều kiện sau:

1. $\lambda_u := \min\limits_{x\in\overline{\Omega}} \min\limits_{\xi\in\mathbb{R}^n, |\xi|=1} (D_{ij}u(x) - A_{ij}(x, u(x), Du(x)))\xi_i\xi_j > 0$;
2. $\sup\limits_{(x,z,p)\in\Gamma} \big|B_{ij}(x, z, p)\xi_i\overline{\xi}_j\big| < \delta\lambda_u|\xi|^2, \ \forall\xi \in \mathbb{C}^n, \ \xi \neq 0$ nếu $\delta > 0$;
3. $\sup\limits_{(x,z,p)\in\Gamma} \big|D_z B_{ij}(x, z, p)\xi_i\overline{\xi}_j\big| < \beta_1\lambda_u|\xi|^2, \ \forall\xi \in \mathbb{C}^n, \ \xi \neq 0$ nếu $\beta_1 > 0$;
4. $\sup\limits_{(x,z,p)\in\Gamma} \big(\big|D_{x_k}B_{ij}(x, z, p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\big|, \big|D_{p_k}B_{ij}(x, z, p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\big|\big) < \beta_2\lambda_u|\xi|^2|\eta|, \ \forall\xi \in \mathbb{C}^n, \ \eta \in \mathbb{R}^n, \ \xi, \eta \neq 0$.

Việc sử dụng các kết quả đánh giá tiên nghiệm đối với nghiệm δ-elliptic trong $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ đưa tới định lý dưới đây, một trong các kết quả chính của luận án, trong đó khẳng định rằng với những điều kiện nhất định, tương tự như trường hợp phương trình đối xứng tương ứng (Định lý 0.0.3), bài toán Dirichlet (4.1)-(4.2) sẽ có duy nhất nghiệm δ-elliptic nếu ma trận phản đối xứng $B(x, z, p)$ là đủ nhỏ, theo nghĩa là nó thỏa mãn các điều kiện (a)', (b)' và (c)' được nói đến trong định lý dưới đây.

Định lý 4.2.3 *Giả sử $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là miền bị chặn có biên $\partial\Omega \in C^5$ và giả sử các điều kiện sau được thỏa mãn:*

(i) *Ma trận $A(x,z,p) = [A_{ij}(x,z,p)]_{n\times n} \in C^3(\Gamma;\mathbb{R}^{n\times n})$ là đối xứng và thỏa mãn điều kiện cấu trúc*

$$A(x,z,p) \geq -\gamma_0\big(1+|p|^2\big)E, \tag{4.6}$$

$$\lambda_{\max}(A(x,z,0)) \geq 0, \tag{4.7}$$

với mọi $x \in \Omega, z \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}^n$, trong đó γ_0 là hằng số dương;

(ii) $D_zA(x,z,p) = [D_zA_{ij}(x,z,p)]_{n\times n} \geq 0$, *trong* Γ;

(iii) $A(x,z,p)$ *là chính quy chặt trong Γ, nghĩa là tồn tại hằng số $a_0 > 0$ sao cho*

$$A_{ij,k\ell}(x,z,p)\xi_i\xi_j\eta_k\eta_\ell \geq a_0|\xi|^2|\eta|^2, \tag{4.8}$$

với mọi $(x,z,p) \in \Gamma$ và $\xi,\eta \in \mathbb{R}^n$, $\xi \perp \eta$;

(iv) *Hàm vô hướng $f(x,z,p) \in C^3(\Gamma;\mathbb{R})$ thỏa mãn $f(x,z,p) > 0$, trong Γ;*

(v) $\inf\limits_{(x,z,p)\in\Gamma}\left(\dfrac{D_zf}{f}\right)(x,z,p) \geq \dfrac{n\delta}{1+\delta^2}\beta_1;$

(vi) *Tồn tại một nghiệm dưới elliptic $\underline{u}(x) \in C^5(\overline{\Omega})$ của phương trình* (4.3), *thỏa mãn $\underline{u} = \varphi$ trên $\partial\Omega$, trong đó $\varphi \in C^5(\overline{\Omega})$.*

Giả sử $W = W(\delta,\beta_1,\beta_2,\beta_3,b_0,\lambda_{\underline{u}})$ là tập hợp đã được mô tả trong Định nghĩa 4.2.1. Khi đó tồn tại các hằng số dương $\lambda_* \leq \lambda_{\underline{u}}$ và $\alpha_* \in (0,1)$, chỉ phụ thuộc vào $n,\gamma_0,a_0,\delta,\beta_1,\ \beta_2,\beta_3,b_0,A,f,\ \underline{u},\varphi$ và Ω sao cho, nếu $B(x,z,p)$ là ma trận tùy ý đủ nhỏ thuộc $W \cap C^3\big(\Gamma;\mathbb{R}^{n\times n}\big)$, tức là nó thỏa mãn thêm các điều kiện sau với mọi $\xi \in \mathbb{C}^n$, $\eta \in \mathbb{R}^n$, $\xi,\eta \neq 0$,

(a)' $\sup\limits_{(x,z,p)\in\Gamma}\big|B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\big| < \delta\lambda_*|\xi|^2$ *nếu* $\delta > 0$, *và* $B \equiv 0$ *nếu* $\delta = 0$;

(b)' $\sup\limits_{(x,z,p)\in\Gamma}\big|D_zB_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\big| < \beta_1\lambda_*|\xi|^2$ *nếu* $\beta_1 > 0$, *và* $D_zB \equiv 0$ *nếu* $\beta_1 = 0$;

(c)' $\sup\limits_{(x,z,p)\in\Gamma}\big(\big|D_{x_k}B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\big|,\big|D_{p_k}B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\big|\big) < \beta_2\lambda_*|\xi|^2|\eta|,$

thì bài toán Dirichlet (4.1)-(4.2) *có duy nhất nghiệm δ-elliptic thuộc $C^{2,\alpha_*}\big(\overline{\Omega}\big)$.*

4.3 Một số ví dụ

Trong mục này, luận án đưa ra một số bài toán Dirichlet cụ thể mà ở đó ta có thể kiểm tra các giả thiết của Định lý 4.2.3. Luận án xét một số ví dụ sau đây.

Ví dụ 4.3.1 Xét bài toán Dirichlet cho phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng sau đây

$$\det\Big[D^2u - \Big(\frac{1}{2}|Du|^2E - Du\otimes Du\Big) - B(x,Du)\Big] = \frac{1}{5^n}\big(1+e^u\big)\big(1+|Du|^2\big) \ \text{ trong } \Omega, \tag{4.24}$$

$$u = 0 \ \text{ trên } \partial\Omega, \tag{4.25}$$

trong đó $\Omega = B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$. Ở đây, $A = A(p) = \dfrac{1}{2}|p|^2 E - p \otimes p$, $B^T(x,p) = -B(x,p), f(x,z,p) = \dfrac{1}{5^n}\big(1+e^z\big)\big(1+|p|^2\big)$. Phương trình (4.24) với $B(x,p) \equiv 0$ xuất hiện trong lĩnh vực Hình học bảo giác.

Ví dụ 4.3.2 Xét bài toán Dirichlet cho phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng sau đây

$$\det\Big[D^2u - (a|Du|^2E - bDu \otimes Du) - B(x,u,Du)\Big] = f(x,u,Du) \quad \text{trong } \Omega, \tag{4.26}$$

$$u = 0 \quad \text{trên } \partial\Omega, \tag{4.27}$$

trong đó a, b là các hằng số, $a > 0$, $A(p) = a|p|^2E - bp \otimes p$, $B^T(x,z,p) = -B(x,z,p)$ và

$$\Omega = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid k_1x_1^2 + \cdots + k_nx_n^2 < 1, k_i > 0, i = 1, \ldots, n\}.$$

Ví dụ 4.3.3 Xét bài toán Dirichlet sau đây cho phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng phụ thuộc vào tham số σ, $|\sigma| \le \Sigma$, $\Sigma > 0$,

$$\det\big[D^2u - A(x,u,Du) - \sigma B^{(0)}(x,u,Du)\big] = f(x,u,Du) \quad \text{trong } \Omega, \tag{4.28}$$

$$u = \varphi(x) \quad \text{trên } \partial\Omega, \tag{4.29}$$

trong đó $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là miền bị chặn có biên $\partial\Omega \in C^5$.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

1. Các kết quả đạt được của luận án

Luận án đã nghiên cứu tính giải được trong không gian $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\alpha \in (0,1)$ đối với bài toán Dirichlet cho phương trình kiểu Monge-Ampère elliptic không đối xứng trong miền bị chặn $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ và nhận được các kết quả chính sau đây:

- Đưa vào một lớp nghiệm δ-elliptic với $\delta \in [0,1)$ cho phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng và nhận được một điều kiện cần cho sự tồn tại loại nghiệm này.
- Đưa vào khái niệm d-lõm với $d \geq 0$, một mở rộng của khái niệm lõm thông thường; đã chứng minh tính d-lõm của hàm số kiểu Monge-Ampère trên một tập lồi không bị chặn của tập hợp các ma trận xác định dương không đối xứng. Tính d-lõm là một công cụ quan trọng trong việc thiết lập các đánh giá tiên nghiệm đối với nghiệm δ-elliptic.
- Bằng cách đặt ra các điều kiện để ma trận phản đối xứng có mặt trong phương trình là nhỏ theo nghĩa nào đó, qua một số bước tiến hành, luận án đã thiết lập được đánh giá tiên nghiệm trong $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ với $\alpha \in (0,1)$ nào đó đối với nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet cho phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng, đồng thời các đánh giá này là đều đối với một lớp các ma trận phản đối xứng.
- Sử dụng phương pháp liên tục giải phương trình toán tử phi tuyến trong không gian Banach, luận án đưa ra các điều kiện đủ áp đặt lên các dữ kiện của bài toán Dirichlet cho phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng để nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet tồn tại và duy nhất trong $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ khi ma trận phản đối xứng có mặt trong phương trình là đủ nhỏ theo một nghĩa nào đó.

2. Kiến nghị một số vấn đề nghiên cứu tiếp theo

Bên cạnh các kết quả đạt được trong luận án, chúng tôi kiến nghị một số vấn đề cần được tiếp tục nghiên cứu như:

- Nghiên cứu các phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng xuất hiện trong các lĩnh vực như: Vận chuyển tối ưu, Hình học bảo giác, Dự báo khí tượng,...
- Nghiên cứu bài toán Neumann cho phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng.

DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

[1] H.T. Ngoan, T.T.K. Chung (2019), Elliptic solutions to nonsymmetric Monge-Ampère type equations I. The d-concavity and the comparison principle, *Acta Math. Vietnam.* 44 (2), 469-491, DOI: 10.1007/s40306-017-0231-2.

[2] H.T. Ngoan, T.T.K. Chung (2018), Elliptic solutions to nonsymmetric Monge-Ampère type equations II. A priori estimates and the Dirichlet problem, *Acta Math. Vietnam.*, DOI: 10.1007/s40306-018-0270-3.

CÁC KẾT QUẢ CỦA LUẬN ÁN ĐÃ ĐƯỢC BÁO CÁO, THẢO LUẬN TẠI CÁC HỘI NGHỊ VÀ XÊMINA SAU:

- Hội nghị khoa học các thế hệ Nghiên cứu sinh - Viện Toán học, tháng 10/2015.
- Xêmina Phòng Phương trình Vi phân - Viện Toán học.
- Hội nghị đánh giá Nghiên cứu sinh hàng năm của Viện Toán học vào tháng 10/2012, tháng 10/2013, tháng 10/2014, tháng 10/2015, tháng 10/2016 và tháng 11/2017.