VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

VIỆN TOÁN HỌC

THÁI THỊ KIM CHUNG

BÀI TOÁN DIRICHLET CHO PHƯƠNG TRÌNH KIỂU MONGE-AMPÈRE ELLIPTIC KHÔNG ĐỐI XỨNG

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HÀ NỘI - 2019

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

VIỆN TOÁN HỌC

THÁI THỊ KIM CHUNG

BÀI TOÁN DIRICHLET CHO PHƯƠNG TRÌNH KIỂU MONGE-AMPÈRE ELLIPTIC KHÔNG ĐỐI XỨNG

Chuyên ngành: Phương trình Vi phân và Tích phân

Mã số: 9 46 01 03

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS. HÀ TIẾN NGOẠN

HÀ NỘI - 2019

TÓM TẮT

Luận án nghiên cứu về tính giải được của bài toán Dirichlet cho phương trình kiểu Monge-Ampère elliptic không đối xứng trong miền giới nội $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Bài toán này đã được giải quyết trước đây cho trường hợp phương trình kiểu Monge-Ampère đối xứng với số chiều n bất kỳ và cho phương trình không đối xứng khi $n = 2$ bởi nhóm nghiên cứu của N.S. Trudinger bằng các công cụ như: tính lõm của hàm $\log(\det \omega)$ trên tập hợp các ma trận đối xứng xác định dương và nguyên lý so sánh đối với các nghiệm elliptic của phương trình kiểu Monge-Ampère đối xứng. Luận án đã thu hẹp khái niệm nghiệm elliptic bằng cách đưa vào khái niệm nghiệm δ-elliptic với $0 \leq \delta < 1$ đối với phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng và thiết lập tính d-lõm với $d \geq 0$ cho hàm $\log(\det R)$ trên tập lồi không bị chặn $D_{\delta,\mu} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ gồm các ma trận R xác định dương không đối xứng với thành phần phản đối xứng của nó là nhỏ theo nghĩa nào đó. Luận án đã thiết lập nguyên lý so sánh đối với các nghiệm δ-elliptic của phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng. Bằng việc dựa vào sơ đồ đánh giá được đề xuất bởi N.S. Trudinger, luận án đã thiết lập được các đánh giá tiên nghiệm trong $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, với $\alpha \in (0, 1)$ nào đó đối với nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet và đánh giá này là đều đối với một lớp các ma trận phản đối xứng nhỏ theo nghĩa nào đó. Luận án đã đưa ra một điều kiện cần đối với ma trận phản đối xứng có mặt trong phương trình cho sự tồn tại nghiệm δ-elliptic. Áp dụng phương pháp liên tục giải phương trình toán tử phi tuyến, luận án đã thiết lập các điều kiện đủ để nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet tồn tại và duy nhất trong $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, với điều kiện ma trận phản đối xứng có mặt trong phương trình là đủ nhỏ theo một nghĩa nào đó.

ABSTRACT

The thesis studies the solvability of the Dirichlet problem for nonsymmetric Monge-Ampère equations of elliptic type in a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. This problem had been solved by N.S. Trudinger and his group for any dimension n in the case of symmetric Monge-Ampère type equations and for the dimension $n = 2$ in the nonsymmetric case by the tools such as: the concavity of the function $\log(\det \omega)$ in the domain of symmetric positive definite matrices ω and the comparison principle for their elliptic solutions. For $0 \leq \delta < 1$, the thesis had narrowed the notion of elliptic solution by introducing the notion of δ-elliptic solution for nonsymmetric Monge-Ampère type equations and for $d \geq 0$ had established the d-concavity for the function $\log(\det R)$, defined on the unbounded convex set $D_{\delta,\mu} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ that consists of nonsymmetric positive definite matrices with skewsymmetric parts which are small in some sense. The thesis had proved the comparison principle for δ-elliptic solutions to nonsymmetric Monge-Ampère type equations. By following the scheme of estimation that had been proposed by N.S. Trudinger, the thesis had established a priori estimates in $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, for some $\alpha \in (0,1)$ for δ-elliptic solution to the Dirichlet problem, that are uniform with respect to a class of skewsymmetric matrices which are small in some sense. A necessary condition for the skewsymmetric matrix in the equation had been obtained to guarantee the existence of δ-elliptic solution. By applying the method of continuity for solving nonlinear operator equations in Banach spaces, the thesis had established sufficient conditions for the unique existence of δ-elliptic solution to the Dirichlet problem for nonsymmetric Monge-Ampère type equations in $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, in which the skewsymmetric matrix in the equation is sufficiently small in some sense.

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi, được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của PGS.TS. Hà Tiến Ngoạn. Các kết quả viết chung với tác giả khác đã được sự nhất trí của đồng tác giả khi đưa vào luận án. Các kết quả nêu trong luận án là những kết quả mới và chưa từng được ai công bố trong các công trình nào khác.

Tác giả

Thái Thị Kim Chung

LỜI CẢM ƠN

Bằng lòng kính trọng và biết ơn vô hạn, đầu tiên tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành và sâu sắc tới PGS.TS. Hà Tiến Ngoạn. Thầy là người hướng dẫn của tôi từ khi tôi theo học Thạc sĩ rồi Tiến sĩ tại Viện Toán học. Trên con đường học tập và nghiên cứu về Toán, tôi luôn được thầy chỉ bảo tận tình, chu đáo, nghiêm khắc và nhẫn nại để tôi ngày càng tiến bộ, vững vàng hơn trong chuyên môn. Bản thân tôi tự nhủ phải luôn cố gắng phấn đấu không ngừng trong công việc cũng như trong cuộc sống để không phụ lòng với công sức dạy bảo và niềm tin của thầy dành cho tôi.

Tôi xin trân trọng cảm ơn Ban Lãnh đạo Viện Toán học - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam, Trung tâm Đào tạo Sau đại học và các Phòng ban chức năng của Viện Toán đã tạo mọi điều kiện thuận lợi cho các nghiên cứu sinh để đảm bảo việc học tập và nghiên cứu có hiệu quả. Tôi xin gửi lời tri ân sâu sắc tới các Giáo sư và cán bộ nghiên cứu của Viện Toán đã dạy bảo, truyền thụ kiến thức về Toán cho tôi. Các thầy cô và các anh chị không chỉ là những người thầy trong chuyên môn mà còn là những tấm gương sáng trong cuộc sống, cho tôi những bài học về tinh thần làm việc say mê, nghiêm túc cũng như sự khổ luyện trong khoa học chân chính.

Tôi xin trân trọng cảm ơn các Giáo sư và cán bộ trẻ của Phòng Phương trình Vi phân đã giúp đỡ tôi rất nhiều trong quá trình học tập và tham gia các xêmina khoa học hàng tuần. Tôi xin gửi lời cảm ơn sâu sắc tới GS.TSKH. Đinh Nho Hào và GS.TSKH. Nguyễn Minh Trí (Phòng Giải tích) đã luôn động viên, khích lệ các nghiên cứu sinh của phòng. Xin cảm ơn TS. Nguyễn Anh Tú và TS. Đào Quang Khải đã nhiệt tình dạy bảo mỗi khi tôi hỏi bài cũng như cho tôi nhiều lời khuyên quý giá.

Tôi xin trân trọng cảm ơn Ban Giám hiệu Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, Ban Giám hiệu Trường Đại học Công nghệ Giao thông vận tải đã tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình công tác, học tập và nghiên cứu. Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn sâu sắc tới các đồng nghiệp cũ tại Khoa Toán - Tin, trường Đại học Khoa học đã động viên, chia sẻ và giúp đỡ tôi rất nhiều trong công việc cũng như trong cuộc sống.

Tôi xin chân thành cảm ơn các anh chị em nghiên cứu sinh đã và đang học tập, nghiên cứu tại Viện Toán học về những trao đổi trong khoa học cũng như những sẻ chia, giúp đỡ trong cuộc sống đời thường.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới gia đình, người thân, bạn bè và đồng nghiệp đã luôn động viên tôi trong cuộc sống và công việc. Cuối cùng, tôi xin cảm ơn chồng tôi đã luôn ủng hộ và tạo mọi điều kiện thuận lợi để tôi yên tâm học tập và nghiên cứu, xin cảm ơn hai con yêu quý vì các con luôn là động lực tinh thần lớn lao để tôi hoàn thành được luận án này.

Tác giả

Thái Thị Kim Chung

Mục lục

Trang

Một số ký hiệu và quy ước viết tắt

$\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$)	trường các số thực (số phức)
i	đơn vị ảo, $\mathrm{i}^2 = -1$
$\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$)	không gian Euclide thực (phức) n-chiều
$\mathbb{R}^n_+$	nửa không gian, $\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$
$(\cdot)$	phép toán tích vô hướng trong $\mathbb{R}^n$ hoặc $\mathbb{C}^n$
$\lvert\xi\rvert$	độ dài của véc tơ $\xi \in \mathbb{R}^n$ hoặc $\mathbb{C}^n$
$\xi \perp \eta$	hai véc tơ ξ, η vuông góc với nhau
$\mathbb{R}^{n\times n}$ ($\mathbb{C}^{n\times n}$)	không gian các ma trận thực (phức) cấp n
E	ma trận đơn vị cấp n
$D = \mathrm{diag}\,(d_1, \ldots, d_n)$	là ma trận đường chéo với $D_{ii} = d_i,\ i = 1, \ldots, n$
M^T	ma trận chuyển vị của ma trận M
$\overline{M}$	ma trận liên hợp phức của ma trận M
M^*	ma trận chuyển vị phức của ma trận M, $M^* = \overline{M}^T$
M^{-1}	ma trận nghịch đảo của ma trận M
$M^{(2)}$	ma trận compound bậc 2 của ma trận M
$\det M$	định thức của ma trận M
$\mathrm{Tr}M$	vết của ma trận $M = [M_{ij}]_{n\times n}$, $\mathrm{Tr}M = \sum_{i=1}^{n} M_{ii}$
$\lvert M\rvert$	chuẩn Frobenius của ma trận $M = [M_{ij}]_{n\times n}$, $\lvert M\rvert^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \lvert M_{ij}\rvert^2$
$\lVert M\rVert$	chuẩn toán tử của ma trận M, $\lVert M\rVert = \sup_{\lvert x\rvert=1} \lvert Mx\rvert$
$M > 0$ (≥ 0)	ma trận M là xác định dương (xác định không âm)
$M > N$ ($M \geq N$)	$M - N > 0$ ($M - N \geq 0$)
$\lambda_{\min}(P),\ \lambda_{\max}(P)$	giá trị riêng nhỏ nhất, lớn nhất của ma trận thực đối xứng P
$x \otimes y$	$x \otimes y = [x_i y_j]_{n\times n}$, với $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$
osc	hàm dao độ, $\operatorname*{osc}_{\Omega} u := \sup_{\Omega} u - \inf_{\Omega} u$
log	hàm logarit
min, max	giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của một tập hợp các số thực
inf, sup	infimum, supremum của một tập hợp các số thực
Ω	miền trong không gian $\mathbb{R}^n$, là tập mở và liên thông

$\partial\Omega$	biên của miền Ω
$\overline{\Omega}$	bao đóng của miền Ω, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$
$\Omega' \subset\subset \Omega$	Ω' có bao đóng là tập compact được chứa trong Ω
Γ	$:= \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$
$B_R(x^0)$ $\big(\overline{B}_R(x^0)\big)$	hình cầu mở (đóng) tâm tại x^0, bán kính R
$\Omega_\rho,\ T_\rho$	$\Omega_\rho := \Omega \cap B_\rho(x^0),\ T_\rho := \partial\Omega \cap B_\rho(x^0)$
$D_i u,\ D_{ij}u, \ldots$	$D_i u = \dfrac{\partial u}{\partial x_i},\ D_{ij}u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \ldots$
Du	véc tơ gradient của hàm u, $Du = (D_1 u, \ldots, D_n u)$
D^2u	ma trận Hessian của hàm u, $D^2u = [D_{ij}u]_{n\times n}$
$C^k(\Omega)$	không gian các hàm khả vi liên tục đến cấp k trong Ω
$BC^k(\Omega)$	không gian các hàm khả vi liên tục bị chặn đến cấp k trong Ω
$\Vert u\Vert_{BC^k(\Omega)}$	chuẩn trong $BC^k(\Omega)$, $\Vert u\Vert_{BC^k(\Omega)} = \sum\limits_{\vert\beta\vert\le k} \sup\limits_{x\in\Omega} \big\vert D^\beta u(x)\big\vert$
$C^k(\overline{\Omega})$	$= \big\{u \in C^k(\Omega) \mid D^\beta u$ có thể thác triển liên tục lên $\overline{\Omega}$ với $\forall\beta : \vert\beta\vert \le k\big\}$
$\vert u\vert_{k;\overline{\Omega}}$	chuẩn trong $C^k(\overline{\Omega})$, $\vert u\vert_{k;\overline{\Omega}} = \sum\limits_{\vert\beta\vert\le k} \sup\limits_{x\in\Omega} \big\vert D^\beta u(x)\big\vert$
$[u]_{\alpha;\Omega}$	nửa chuẩn Hölder bậc α, $[u]_{\alpha;\Omega} = \sup\limits_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\ne y}} \dfrac{\vert u(x)-u(y)\vert}{\vert x-y\vert^\alpha}$
$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$	$= \{u \in C^k(\overline{\Omega}) \mid D^\beta u$ liên tục Hölder đều bậc α với $\forall\beta : \vert\beta\vert = k\}$
$\vert u\vert_{k,\alpha;\overline{\Omega}}$	chuẩn trong $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\vert u\vert_{k,\alpha;\overline{\Omega}} = \vert u\vert_{k;\overline{\Omega}} + \sup\limits_{\vert\beta\vert=k} \big[D^\beta u\big]_{\alpha;\Omega}$
$L^p(\Omega)$	không gian các hàm đo được và khả tích bậc p trên Ω
$\Vert u\Vert_{L^p(\Omega)}$	chuẩn trong $L^p(\Omega)$, $\Vert u\Vert_{L^p(\Omega)} = \Big(\int\limits_\Omega \vert u(x)\vert^p\,dx\Big)^{1/p}$
$W^{k,p}(\Omega)$	không gian Sobolev, $\Vert u\Vert_{W^{k,p}(\Omega)} = \sum\limits_{\vert\beta\vert\le k} \Vert D^\beta u\Vert_{L^p(\Omega)}$
$\omega(x,u)$	$:= D^2u - A(x,u,Du)$
$R(x,u)$	$:= D^2u - A(x,u,Du) - B(x,u,Du) = \omega(x,u) - B(x,u,Du)$
λ_u	$:= \min\limits_{x\in\overline{\Omega}} \lambda_{\min}(\omega(x,u))$
$\mu(B)$	$:= \sup\limits_{(x,z,p)\in\Gamma} \Vert B(x,z,p)\Vert$, với $B \in BC(\Gamma;\mathbb{R}^{n\times n})$
$D_{\delta,\mu}$	$:= \{R \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid R = \omega + \beta, \omega^T = \omega, \beta^T = -\beta, \lambda_{\min}(\omega) > 0,$ $\mu \le \delta\lambda_{\min}(\omega), \Vert\beta\Vert \le \mu\}$

Mở đầu

Phương trình Monge-Ampère là một trong các phương trình vi phân đạo hàm riêng cổ điển phi tuyến hoàn toàn, xuất hiện từ cuối thế kỷ XIX trong các công trình của G. Monge [50], A.M. Ampère [48] và có dạng sau đây

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = K(x,y)\big(1 + u_x^2 + u_y^2\big)^2, \quad (x,y) \in \Omega, \tag{0.1}$$

trong đó $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ là miền bị chặn, $u(x,y)$ là ẩn hàm của hai biến độc lập x, y cần tìm sao cho đồ thị của hàm $z = u(x,y)$ tại điểm $(x, y, u(x,y))$ có độ cong Gauss $K(x,y)$ cho trước.

Phương trình (0.1) được khái quát lên trường hợp n chiều thành phương trình độ cong Gauss sau đây

$$\det D^2u = K(x)\big(1 + |Du|^2\big)^{\frac{n+2}{2}}, \quad x \in \Omega, \tag{0.2}$$

trong đó $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là miền bị chặn, $u = u(x) = u(x_1, \ldots, x_n)$ là ẩn hàm, $Du = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$ là véc tơ gradient của u, $D^2u = [u_{x_ix_j}]_{n\times n}$ là ma trận Hessian của u và $K(x)$ là hàm số cho trước. Phương trình này là elliptic khi ma trận Hessian D^2u là xác định dương hay u là hàm lồi chặt trong Ω và do đó $K(x) > 0$. Nó được nhiều nhà Toán học nghiên cứu như A.D. Alexandrov [2, 3], I.J. Bakelman [4], H. Lewy [25], S. Bernstein [49],...

Sau này, trong một số lĩnh vực như Hình học affine, Khí tượng học, Cơ học chất lỏng,... đã xuất hiện phương trình có dạng tổng quát hơn sau đây

$$\det D^2u = f(x, u, Du), \quad x \in \Omega, \tag{0.3}$$

trong đó $f(x,z,p)$ là hàm số cho trước xác định trên $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Trong việc nghiên cứu nghiệm cổ điển của bài toán Dirichlet cho phương trình (0.3), có một số sự kiện đột phá quan trọng. Trước tiên, đó là các kết quả của E. Calabi [7] và A.V. Pogorelov [29] về thiết lập các đánh giá tiên nghiệm bên trong miền đối với các đạo hàm cấp hai của nghiệm lồi chặt. Tiếp theo, đó là các kết quả của L.C. Evans [10] và N.V. Krylov [22, 24] vào những năm 1980 về việc thiết lập các đánh giá tiên nghiệm Hölder bên trong miền đối với các đạo hàm cấp hai của nghiệm lồi chặt một khi chuẩn của nó trong $C^2(\overline{\Omega})$ đã được đánh giá. Cũng trong những năm 1980, các kết quả về đánh giá tiên nghiệm toàn cục đối với các đạo hàm cấp hai của nghiệm elliptic cổ điển của phương trình (0.3) đã được thiết lập bởi N.M. Ivochkina [16] (xem thêm [5, 11]), còn đánh giá tiên nghiệm cho đạo hàm cấp ba được thiết lập một cách độc lập bởi Caffarelli-Nirenberg-Spruck [5] và N.V. Krylov [22, 23, 24]. Từ đó, bằng phương pháp liên tục đối với phương trình toán tử phi tuyến (sẽ được mô tả trong Chương 1), người ta đã chứng minh được sự tồn tại duy nhất nghiệm elliptic cổ điển của bài toán Dirichlet cho phương trình (0.3) [5, 6, 17].

Những năm gần đây, ([8, 33, 36, 39, 40, 41, 42, 43, 44]) trong các lĩnh vực Vận chuyển tối ưu và Hình học bảo giác đã đưa đến việc nghiên cứu bài toán Dirichlet cho phương trình kiểu Monge-Ampère, trong đó vế trái của phương trình này là định thức của tổng D^2u với các ma trận vuông nào đó phụ thuộc vào (x, u, Du) và được mô tả bởi

$$\det\left[D^2u - A(x,u,Du) - B(x,u,Du)\right] = f(x,u,Du) \;\text{ trong } \Omega, \tag{0.4}$$

$$u(x) = \varphi(x) \;\text{ trên } \partial\Omega, \tag{0.5}$$

trong đó $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là miền bị chặn, $A(x,z,p) = [A_{ij}(x,z,p)]_{n\times n}$, $B(x,z,p) = [B_{ij}(x,z,p)]_{n\times n}$ và $f(x,z,p)$ lần lượt là ma trận đối xứng, ma trận phản đối xứng và hàm vô hướng xác định trên $\Gamma := \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $\varphi(x)$ là hàm vô hướng xác định trên $\overline{\Omega}$. Ở đây, ta sử dụng (x, z, p) để ký hiệu các điểm thuộc Γ. Nếu $B(x, z, p) \equiv 0$ thì (0.4) được gọi là *phương trình kiểu Monge-Ampère đối xứng*, còn nếu $B(x, z, p) \not\equiv 0$ thì (0.4) được gọi là *phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng*.

Với hàm $u(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ tùy ý, ta ký hiệu

$$\omega(x,u) := D^2u(x) - A(x,u(x),Du(x)), \tag{0.6}$$

$$\lambda_u := \min_{x\in\overline{\Omega}} \lambda_{\min}(\omega(x,u)), \tag{0.7}$$

trong đó $\lambda_{\min}(\omega(x,u))$ là giá trị riêng nhỏ nhất của ma trận đối xứng $\omega(x,u) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Phương trình (0.4) là *elliptic* đối với $u(x)$ trên $\overline{\Omega}$ khi và chỉ khi (Định nghĩa 1.4.1, Mệnh đề 1.4.2)

$$\lambda_u > 0. \tag{0.8}$$

Điều này đưa đến điều kiện sau đối với hàm vế phải $f(x,z,p)$ (Mệnh đề 2.2.2),

$$f(x,z,p) > 0, \quad \text{trong } \Gamma. \tag{0.9}$$

Nhà toán học người Úc N.S. Trudinger và nhóm nghiên cứu của ông đã khởi xướng việc nghiên cứu bài toán Dirichlet cho phương trình kiểu Monge-Ampère đối xứng có dạng (0.4)-(0.5), trong đó $B(x,z,p) \equiv 0$, cụ thể là bài toán dạng sau đây

$$\det\left[D^2u - A(x,u,Du)\right] = f(x,u,Du) \;\text{ trong } \Omega, \tag{0.10}$$

$$u(x) = \varphi(x) \;\text{ trên } \partial\Omega, \tag{0.11}$$

(xem [18, 19, 20, 26, 27, 41, 45]). Để nghiên cứu tính giải được của bài toán Dirichlet (0.10)-(0.11), Trudinger đã áp dụng phương pháp liên tục, trong đó việc chứng minh tính giải được của bài toán trên được đưa về việc thiết lập các đánh giá tiên nghiệm trong

$C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ đối với nghiệm elliptic của bài toán với hằng số $\alpha \in (0,1)$ nào đó. Việc thiết lập các đánh giá tiên nghiệm này được Trudinger tiến hành qua các bước sau:

- Bước 1: Áp dụng các kỹ thuật của A.V. Pogorelov ([28], [29]) để thiết lập đánh giá độ lớn các đạo hàm cấp hai của nghiệm elliptic trên toàn miền Ω thông qua đánh giá của chúng trên biên;

- Bước 2: Đánh giá độ lớn các đạo hàm cấp hai của nghiệm elliptic trên biên $\partial\Omega$;

- Bước 3: Đánh giá chuẩn $C^1(\overline{\Omega})$ đối với nghiệm elliptic;

- Bước 4: Áp dụng các kỹ thuật của L.C. Evans và N.V. Krylov để thiết lập đánh giá nửa chuẩn Hölder đối với các đạo hàm cấp hai của nghiệm elliptic, qua đó nhận được đánh giá đối với chuẩn $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Trudinger đã đưa ra bốn giả thiết quan trọng sau đây đối với bài toán Dirichlet (0.10)-(0.11):

T1) Ma trận $A(x,z,p) = [A_{ij}(x,z,p)]_{n\times n} \in C^2(\Gamma;\mathbb{R}^{n\times n})$ và thỏa mãn điều kiện *chính quy* trong Γ, nghĩa là

$$D_{p_k p_\ell} A_{ij}(x,z,p)\xi_i\xi_j\eta_k\eta_\ell \geq 0, \quad \forall (x,z,p)\in\Gamma,\ \xi,\ \eta\in\mathbb{R}^n,\ \xi\perp\eta; \tag{0.12}$$

hoặc thỏa mãn điều kiện *chính quy chặt* trong Γ, nghĩa là tồn tại hằng số $a_0 > 0$ sao cho

$$D_{p_k p_\ell} A_{ij}(x,z,p)\xi_i\xi_j\eta_k\eta_\ell \geq a_0|\xi|^2|\eta|^2, \quad \forall (x,z,p)\in\Gamma,\ \xi,\ \eta\in\mathbb{R}^n,\ \xi\perp\eta. \tag{0.13}$$

Ở đây, tất cả các biểu thức ở các vế trái của (0.12) và (0.13) cũng như trong luận án này, nếu không nói gì thêm về các chỉ số có mặt trong biểu thức thì chúng ta ngầm hiểu đó là phép toán lấy tổng trên tập hợp tất cả các chỉ số lặp có mặt trong biểu thức đó.

T2) Ma trận $A(x,z,p)$ thỏa mãn điều kiện về cấu trúc

$$D_z A(x,z,p) \geq 0, \quad A(x,z,p) \geq -\gamma_0\big(1+|p|^2\big)E \ \text{ và } \ \lambda_{\max}(A(x,z,0)) \geq 0, \tag{0.14}$$

với mọi $x\in\Omega, z\in\mathbb{R}$ và $p\in\mathbb{R}^n$, trong đó γ_0 là hằng số dương, E là ma trận đơn vị cấp n.

T3) Hàm $f(x,z,p)\in C^2(\Gamma;\mathbb{R})$ và thỏa mãn $f(x,z,p)>0$, $D_z f(x,z,p)\geq 0$, trong Γ.

T4) Tồn tại nghiệm dưới elliptic $\underline{u}(x)\in C^4(\overline{\Omega})$ của bài toán Dirichlet (0.10)-(0.11), nghĩa là $\underline{u}(x)$ thỏa mãn các điều kiện

$$\lambda_{\underline{u}} := \min_{x\in\overline{\Omega}} \lambda_{\min}(\omega(x,\underline{u})) > 0, \tag{0.15}$$

$$\det\big[D^2\underline{u} - A(x,\underline{u},D\underline{u})\big] \geq f(x,\underline{u},D\underline{u}) \ \text{ trong } \Omega, \tag{0.16}$$

$$\underline{u}(x) = \varphi(x) \ \text{ trên } \partial\Omega, \tag{0.17}$$

trong đó $\varphi(x)\in C^4(\overline{\Omega})$ và $\partial\Omega\in C^4$.

Để tiến hành các đánh giá tiên nghiệm trong các bước nói trên, trong lớp nghiệm elliptic, nhóm của Trudinger đã biểu diễn phương trình (0.10) dưới dạng tương đương

$$\log(\det\omega(x,u)) = \hat{f}(x,u,Du), \quad \text{trong } \Omega, \tag{0.18}$$

trong đó $\omega(x,u)$ được cho bởi (0.6) và $\hat{f} = \log f$, rồi sử dụng hai kết quả quan trọng đó là tính lõm của *hàm số kiểu Monge-Ampère đối xứng* có dạng

$$F(\omega) = \log(\det \omega), \tag{0.19}$$

trên tập lồi các ma trận đối xứng xác định dương $\omega \in \mathbb{R}^{n\times n}$ và nguyên lý so sánh đối với phương trình (0.18), được phát biểu sau đây.

Định lý 0.0.1 (Nguyên lý so sánh) ([11]) *Cho các hàm* $u(x), v(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ *thỏa mãn*

$$\log(\det \omega(x,u)) - \hat{f}(x,u,Du) \le \log(\det \omega(x,v)) - \hat{f}(x,v,Dv) \text{ trong } \Omega, \quad u \ge v \text{ trên } \partial\Omega.$$

Giả sử các điều kiện sau thỏa mãn:

1) $\lambda_u > 0$, $\lambda_v > 0$;

2) $D_z A(x,z,p) \ge 0$, *trong* Γ;

3) $f(x,z,p) > 0$, $D_z f(x,z,p) \ge 0$, *trong* Γ.

Khi đó $u \ge v$ *trong* Ω. *Hơn nữa, nếu* $u = v$ *trên* $\partial\Omega$ *thì ta có* $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} \ge \dfrac{\partial v}{\partial \nu}$ *trên* $\partial\Omega$, *trong đó* ν *là véc tơ pháp tuyến trong đơn vị của biên* $\partial\Omega$.

Kết quả của nhóm Trudinger qua các bước đánh giá tiên nghiệm nói trên được tổng kết trong định lý sau đây.

Định lý 0.0.2 (Đánh giá tiên nghiệm trong $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$) ([11, 18, 45]) *Giả sử* $u(x) \in C^4(\overline{\Omega})$ *là nghiệm elliptic của bài toán Dirichlet* (0.10)-(0.11), *trong đó* $A = A(x,p)$, $f = f(x,p)$ *và giả sử các giả thiết* T1)-T4) *nói trên được thỏa mãn. Khi đó ta có đánh giá sau*

$$|u|_{2,\alpha;\overline{\Omega}} \le C, \tag{0.20}$$

trong đó $\alpha \in (0,1)$ *và* C *là các hằng số dương phụ thuộc vào* $n, \gamma_0, A, f, \underline{u}, \varphi$ *và* Ω.

Trên cơ sở Định lý 0.0.2, bằng việc đưa bài toán (0.10)-(0.11) về phương trình toán tử trong không gian Banach $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ và áp dụng phương pháp liên tục, nhóm của Trudinger đã chứng minh tính giải được của bài toán (0.10)-(0.11) trong trường hợp ma trận đối xứng A và hàm vế phải f không phụ thuộc vào biến z. Cụ thể, ta có định lý sau đây.

Định lý 0.0.3 ([18]) *Xét bài toán Dirichlet* (0.10)-(0.11), *trong đó* $A = A(x,p)$, $f = f(x,p)$ *và giả sử các giả thiết* T1)-T4) *nói trên được thỏa mãn. Khi đó tồn tại hằng số* $\alpha \in (0,1)$ *sao cho nghiệm elliptic* $u(x)$ *của bài toán Dirichlet* (0.10)-(0.11) *là tồn tại và duy nhất trong* $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Trong việc thiết lập các đánh giá tiên nghiệm trong $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ với $\alpha \in (0,1)$, giả thiết ban đầu về tính chính quy của nghiệm u chỉ là $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Trong chứng minh của Định lý 0.0.3, từ các giả thiết về độ trơn của các dữ kiện của bài toán và định lý về tính chính quy của nghiệm elliptic của phương trình đạo hàm riêng phi tuyến (Định lý 1.4.3), người ta đã suy ra được $u \in W^{4,p}(\Omega) \cap C^{3,\alpha}(\overline{\Omega})$, với mọi $p \in (1, +\infty)$. Từ đó, bằng việc áp dụng kỹ thuật xấp xỉ đối với phương trình phi tuyến rất phức tạp, người ta vẫn thiết lập được đánh giá tiên nghiệm như trong Định lý 0.0.2.

Trong [20], nhóm của Trudinger cũng đã mở rộng kết quả của các định lý trên khi A và f phụ thuộc thêm vào biến z bằng việc đưa vào giả thiết về sự tồn tại của một nghiệm trên elliptic $\overline{u}(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ đối với phương trình (0.10) sao cho $\overline{u}(x) \geq \varphi(x)$ trên $\partial\Omega$. Bài toán Dirichlet (0.4)-(0.5) khi ma trận phản đối xứng $B(x,z,p) \not\equiv 0$ cũng đã được nghiên cứu bởi Trudinger trong trường hợp số chiều $n = 2$ ([11, 41]).

Trong [8] và [41], các nhà Toán học G. De Philippis, A. Figalli và N.S. Trudinger đã chỉ ra sự cần thiết của việc nghiên cứu phương trình kiểu Monge-Ampère elliptic không đối xứng. Do đó mục tiêu của luận án là nghiên cứu tính giải được của bài toán Dirichlet (0.4)-(0.5) trong không gian $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ khi $B(x,z,p) \not\equiv 0$.

Luận án cũng đặt vấn đề áp dụng phương pháp liên tục tương tự như đối với bài toán Dirichlet (0.10)-(0.11) để nghiên cứu tính giải được của bài toán Dirichlet (0.4)-(0.5). Do sự có mặt của ma trận phản đối xứng $B(x,z,p)$ trong phương trình (0.4), việc tiến hành các đánh giá tiên nghiệm đối với nghiệm elliptic $u(x) \in C^4(\overline{\Omega})$ của bài toán (0.4)-(0.5) trong bốn bước nói trên sẽ gặp nhiều khó khăn. Trong trường hợp $B(x,z,p) \equiv 0$, các đánh giá tại từng điểm $x^0 \in \Omega$ trong các bước nói trên trên có thể tiến hành một cách thuận lợi sau khi chéo hóa ma trận đối xứng $\omega(x,u)$ tại điểm x^0 này. Để khắc phục các khó khăn trong trường hợp $B(x,z,p) \not\equiv 0$, luận án đã hạn chế xét một lớp con của nghiệm elliptic, được gọi là nghiệm δ-elliptic với $0 \leq \delta < 1$, trong đó khi $\delta = 0$ thì trùng với nghiệm elliptic thông thường. Cụ thể, luận án đưa ra định nghĩa sau đây.

Định nghĩa 0.0.4 Cho hằng số $\delta \in [0,1)$. Ta nói rằng phương trình (0.4) là δ-*elliptic* đối với hàm $u(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ nếu nó là elliptic đối với u và điều kiện sau được thỏa mãn

$$\mu(B) \leq \delta\lambda_u, \tag{0.21}$$

trong đó $\mu(B)$ là đại lượng được xác định bởi

$$\mu(B) := \sup_{(x,z,p)\in\Gamma} \|B(x,z,p)\|, \tag{0.22}$$

ở đây $\|B\|$ là chuẩn toán tử của ma trận B.

Với hàm $u(x) \in C^2(\overline{\Omega})$, ta ký hiệu

$$R(x,u) := D^2u - A(x,u,Du) - B(x,u,Du) = \omega(x,u) - B(x,u,Du). \tag{0.23}$$

Khi đó, trong lớp nghiệm elliptic, phương trình (0.4) tương đương với

$$\log(\det R(x,u)) = \hat{f}(x,u,Du), \quad \text{trong } \Omega, \tag{0.24}$$

trong đó $\hat{f} = \log f$. Để chuẩn bị các công cụ cho việc đánh giá tiên nghiệm đối với nghiệm δ-elliptic của phương trình (0.24), thay vì hàm số kiểu Monge-Ampère đối xứng $F(\omega) = \log(\det \omega)$, ta xét *hàm số kiểu Monge-Ampère không đối xứng* có dạng sau đây

$$F(R) = \log(\det R), \tag{0.25}$$

trong đó $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận xác định dương có dạng

$$R = \omega + \beta,\ \omega^T = \omega,\ \omega > 0,\ \beta^T = -\beta.$$

Luận án sẽ chỉ ra rằng $\det \beta \geq 0$ và $\det R \geq \det \omega + \det \beta \geq \det \omega > 0$ (Mệnh đề 2.2.2). Do đó hàm $F(R)$ luôn xác định và khả vi vô hạn trên miền $R > 0$.

Với các hằng số $\delta \in [0,1)$ và $\mu \geq 0$, trên cơ sở gợi ý của khái niệm nghiệm δ-elliptic, luận án đưa vào tập xác định $D_{\delta,\mu}$ sau đây của hàm $F(R)$,

$$D_{\delta,\mu} \equiv \left\{ R \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid R = \omega + \beta, \omega^T = \omega, \beta^T = -\beta, \lambda_{\min}(\omega) > 0, \mu \leq \delta\lambda_{\min}(\omega), \|\beta\| \leq \mu \right\}. \tag{0.26}$$

Khi đó $D_{\delta,\mu}$ là tập lồi và không bị chặn trong $\mathbb{R}^{n\times n}$ (Mệnh đề 2.2.1). Khi $\delta = 0$ thì $\mu = 0$, $\beta = 0$ và $D_{0,0}$ trùng với tập các ma trận đối xứng xác định dương.

Nhằm mở rộng khái niệm về tính lõm thông thường của hàm $F(\omega) = \log(\det \omega)$ trên tập lồi các ma trận đối xứng xác định dương trong $\mathbb{R}^{n\times n}$, luận án đưa ra khái niệm về tính d-lõm với $d \geq 0$ của hàm $F(R) = \log(\det R)$ trên $D_{\delta,\mu}$. Cụ thể, ta có định nghĩa sau đây.

Định nghĩa 0.0.5 Giả sử $d \geq 0$ là số thực không âm. Ta nói rằng hàm $F(R)$ là *d-lõm* trên tập $D_{\delta,\mu}$ nếu với hai ma trận tùy ý $R^{(0)} = \left[R_{ij}^{(0)}\right]_{n\times n}$ và $R^{(1)} = \left[R_{ij}^{(1)}\right]_{n\times n}$ thuộc $D_{\delta,\mu}$, ta có

$$F\left(R^{(1)}\right) - F\left(R^{(0)}\right) \leq \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial F\left(R^{(0)}\right)}{\partial R_{ij}} \left(R_{ij}^{(1)} - R_{ij}^{(0)}\right) + d. \tag{0.27}$$

Khái niệm 0-lõm trùng với khái niệm lõm thông thường. Trong Định lý 2.2.21, luận án sẽ chỉ ra rằng hàm $F(R) = \log(\det R)$ là d-lõm trên tập $D_{\delta,\mu}$, trong đó hằng số d chỉ phụ thuộc vào δ và n, không phụ thuộc vào μ.

Luận án sẽ thiết lập nguyên lý so sánh (Định lý 3.1.1) đối với các nghiệm δ-elliptic của phương trình (0.4), trong đó khi so với Định lý 0.0.1 ở trên có bổ sung một số điều kiện để ma trận phản đối xứng $B(x,z,p)$ là nhỏ theo nghĩa nào đó. Khi tiến hành các bước đánh giá tiên nghiệm đối với nghiệm δ-elliptic của bài toán (0.4)-(0.5), bằng cách dựa theo sơ đồ của nhóm Trudinger, luận án sẽ sử dụng các dạng khác nhau của tính d-lõm của hàm $F(R) = \log(\det R)$ cũng như giả thiết về tính chính quy chặt của ma trận đối xứng $A(x,z,p)$. Trong các tính toán và đánh giá, ma trận nghịch đảo $R^{-1}(x,u)$ đóng một vai trò quan trọng. Luận án trước hết chéo hóa $\omega(x,u)$, sau đó chéo hóa một ma trận phản đối xứng liên quan đến $B(x,u,Du)$ và nhận được công thức tường minh (Hệ quả 2.2.6) đối với phần đối xứng và phản đối xứng của ma trận $R^{-1}(x,u)$ tại x^0. Định lý 3.5.1 là một trong các kết quả chính của luận án, trong đó tổng kết của kết quả các bước đánh giá tiên nghiệm. Định lý này mô tả các điều kiện đủ áp đặt lên ma trận đối xứng $A(x,z,p)$, hàm vế phải $f(x,z,p)$, hàm trên biên $\varphi(x)$ và miền Ω để tồn tại các hằng số dương $\alpha \in (0,1)$ và C sao cho với mọi ma trận phản đối xứng $B(x,z,p)$ nhỏ được xác định bởi một số tham số liên quan đến các dữ kiện vừa nêu trên, nghiệm δ-elliptic $u(x) \in C^4(\overline{\Omega})$ của bài toán Dirichlet (0.4)-(0.5) thỏa mãn

$$|u|_{2,\alpha;\overline{\Omega}} \leq C,$$

đồng thời đánh giá này là đều đối với một lớp ma trận $B(x,z,p)$ nhỏ theo nghĩa nào đó. Trong Định lý 4.1.1, luận án đã thiết lập được một điều kiện cần áp lên $B(x,z,p)$ để phương trình (0.4) có nghiệm δ-elliptic.

Việc áp dụng phương pháp liên tục giải phương trình toán tử phi tuyến đã đưa tới Định lý 4.2.3, một trong các kết quả chính của luận án. Định lý này sẽ chỉ ra rằng với một số điều kiện đủ áp đặt lên các dữ kiện của bài toán, tương tự như đối với trường hợp phương trình đối xứng, nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet (0.4)-(0.5) sẽ tồn tại duy nhất trong $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ với $\alpha \in (0,1)$ nếu ma trận $B(x,z,p)$ là đủ nhỏ theo một nghĩa nào đó. Tuy nhiên, đối với trường hợp phương trình không đối xứng, việc sử dụng kỹ thuật xấp xỉ tương tự như trường hợp phương trình đối xứng đã đề cập ở trên nói chung là rất khó để vượt qua. Do đó trong luận án, giả thiết về độ trơn của các dữ kiện của bài toán Dirichlet (0.4)-(0.5) đã được làm mạnh hơn để thiết lập tính giải được của nó.

Ngoài phần Mở đầu, luận án gồm bốn chương, Kết luận, Danh mục các công trình liên quan đến luận án và Tài liệu tham khảo.

Chương 1 trình bày một số kiến thức chuẩn bị về lý thuyết ma trận, khái niệm các không gian hàm cơ bản và một số kết quả đối với phương trình đạo hàm riêng elliptic cấp hai tuyến tính và phi tuyến hoàn toàn.

Chương 2 trình bày kết quả về tính d-lõm của hàm số kiểu Monge-Ampère với biến là các ma trận xác định dương không đối xứng.

Các Chương 3 và 4 là các chương chính của luận án, trong đó Chương 3 trình bày các bước đánh giá tiên nghiệm trong $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ đối với nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet cho phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng.

Chương 4 trình bày về một điều kiện cần và một số điều kiện đủ cho sự tồn tại nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet cho phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng. Cuối cùng, luận án trình bày một số ví dụ về bài toán Dirichlet cho phương trình kiểu Monge-Ampère elliptic không đối xứng.

Luận án được viết dựa trên hai bài báo [1], [2] trong Danh mục các công trình liên quan đến luận án.

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Chương này trình bày các kiến thức chuẩn bị cho luận án: giới thiệu một số khái niệm và kết quả cơ bản trong lý thuyết Ma trận, khái niệm một số không gian hàm, khái niệm và một số kết quả cơ bản về phương trình đạo hàm riêng elliptic cấp hai tuyến tính và phi tuyến hoàn toàn, giới thiệu về phương pháp liên tục giải phương trình toán tử phi tuyến trong không gian Banach. Nội dung của chương này được tham khảo chủ yếu từ các tài liệu [1, 9, 11, 14, 15, 32, 46, 47].

1.1 Một số kiến thức trong lý thuyết ma trận

1.1.1 Một số khái niệm cơ bản

Trước tiên, luận án giới thiệu một số không gian tuyến tính cơ bản.

(i) Ký hiệu $\mathbb{R}^n$ là không gian Euclide thực n-chiều. Với mọi véc tơ $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, ta định nghĩa:

- Tích vô hướng của x và y: $(x, y) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$;
- Chuẩn Euclide (độ dài) của x: $|x| = (x, x)^{1/2} = \left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)^{1/2}$.

(ii) Ký hiệu $\mathbb{C}^n$ là không gian Euclide phức n-chiều. Với mọi véc tơ $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$, ta định nghĩa:

- Tích vô hướng của x và y: $(x, y) = x_1\overline{y}_1 + \cdots + x_n\overline{y}_n$;
- Chuẩn Euclide (độ dài) của x: $|x| = (x, x)^{1/2} = \left(|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2\right)^{1/2}$.

(iii) Ký hiệu $\mathbb{C}^{n\times n}$ ($\mathbb{R}^{n\times n}$) là không gian các ma trận vuông phức (thực) cấp n. Với mọi ma trận $M = [M_{ij}]_{n\times n} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, ta định nghĩa:

- Chuẩn Frobenius của M : $|M| = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |M_{ij}|^2\right)^{1/2}$;

- Chuẩn toán tử của M : $\|M\| = \sup\limits_{x\in\mathbb{C}^n, x\neq 0} \dfrac{|Mx|}{|x|} = \sup\limits_{x\in\mathbb{C}^n, |x|=1} |Mx|$;

  Hơn nữa, nếu $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ thì ta có thể thay $x \in \mathbb{C}^n$ bởi $x \in \mathbb{R}^n$ trong công thức trên.

Cho ma trận $M = [M_{ij}]_{n\times n} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Ta ký hiệu ma trận chuyển vị của M là M^T; ma trận liên hợp phức của M là $\overline{M}$, $\overline{M} = \left[\overline{M}_{ij}\right]_{n\times n}$; ma trận chuyển vị phức (hay ma trận liên hợp Hermite) của M là M^*, $M^* = \overline{M}^T$.

Định nghĩa 1.1.1 (i) Ma trận $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ được gọi là *ma trận đối xứng* nếu $M^T = M$, *ma trận phản đối xứng* nếu $M^T = -M$, và *ma trận trực giao* nếu $M^TM = MM^T = E$.

(ii) Ma trận $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ được gọi là *ma trận Hermite* nếu $M^* = M$, *ma trận phản Hermite* nếu $M^* = -M$, và *ma trận unita* nếu $M^*M = MM^* = E$.

Định nghĩa 1.1.2 (i) Cho $M = [M_{ij}]_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận đối xứng. Khi đó M được gọi là *xác định dương* (*xác định không âm*), ký hiệu là $M > 0$ (≥ 0), nếu

$$(M\xi, \xi) = \sum_{i,j=1}^{n} M_{ij}\xi_i\xi_j > 0\ (\geq 0),\quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \xi \neq 0.$$

(ii) Cho $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận tùy ý. Khi đó $M > 0$ (≥ 0) nếu $\dfrac{M + M^T}{2} > 0$ (≥ 0).

(iii) Cho $M, N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là các ma trận tùy ý. Khi đó $M > N$ $(M \geq N)$ nếu $M - N > 0$ (≥ 0).

Ta biết rằng một ma trận thực đối xứng luôn có các giá trị riêng là thực; hơn nữa, các giá trị riêng này là các số không âm nếu ma trận đó là xác định không âm, và là các số dương nếu ma trận đó là xác định dương. Một ma trận thực phản đối xứng luôn có các giá trị riêng là thuần ảo. Trong luận án này, ta ký hiệu giá trị riêng nhỏ nhất và lớn nhất của một ma trận thực đối xứng P lần lượt là $\lambda_{\min}(P)$ và $\lambda_{\max}(P)$. Các mệnh đề sau đây liệt kê một số tính chất cơ bản đối với chuẩn Frobenius và chuẩn toán tử của ma trận.

Mệnh đề 1.1.3 ([15, 32]) *Ta có các khẳng định sau:*

(i) $\|M\| = \lambda_{\max}(M) = \max\limits_{\xi\in\mathbb{R}^n, |\xi|=1} (M\xi, \xi),\quad \forall M \in \mathbb{R}^{n\times n}, M^T = M, M \geq 0$;

(ii) $\|M\| = \|M^T\| = \sqrt{\|M^TM\|} = \sqrt{\lambda_{\max}(M^TM)},\quad \forall M \in \mathbb{R}^{n\times n}$;

(iii) $\|M\| = \sqrt{\lambda_{\max}(-M^2)} = \max\limits_{\xi\in\mathbb{C}^n, |\xi|=1} |(M\xi, \xi)|,\quad \forall M \in \mathbb{R}^{n\times n}, M^T = -M.$

Mệnh đề 1.1.4 ([15, 32]) (i) *Các chuẩn* $|\cdot|$ *và* $\|\cdot\|$ *trong* $\mathbb{R}^{n\times n}$ *là tương đương nhau, cụ thể ta có*

$$\|M\| \leq |M| \leq \sqrt{n}\|M\|,\quad \forall M \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

(ii) *Giả sử* M *và* N *là các ma trận tương đương trực giao (hoặc tương đương unita), tức là* $M = CNC^{-1}$ *với* C *là ma trận trực giao (hoặc ma trận unita), khi đó ta có*

$$|M| = |N|,\ \|M\| = \|N\|.$$

Cho ma trận $M = [M_{ij}]_{n\times n} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Khi đó, *vết* của M, ký hiệu là TrM, là đại lượng được xác định bởi $\mathrm{Tr}M = \sum_{i=1}^{n} M_{ii}$. Mệnh đề sau đây liệt kê một số tính chất cơ bản của khái niệm vết của ma trận.

Mệnh đề 1.1.5 ([15, 32]) *Cho các ma trận $M, N \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Ta có các khẳng định sau:*

(i) $\mathrm{Tr}(MN) = \mathrm{Tr}(NM)$;

(ii) $\mathrm{Tr}(MN) = 0$, *nếu $M^T = M$ và $N^T = -N$;*

(iii) $\mathrm{Tr}M = \mathrm{Tr}N$, *nếu M và N là tương đương trực giao hoặc tương đương unita;*

(iv) $\mathrm{Tr}(MM^*) = |M|^2$.

Mệnh đề 1.1.6 ([15]) *Cho véc tơ $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Khi đó ma trận $x\otimes x = [x_i x_j]_{n\times n}$ là xác định không âm, có một giá trị riêng bằng $|x|^2$ và $n-1$ giá trị riêng còn lại bằng 0.*

Chứng minh. Ta nhận thấy ma trận $x\otimes x$ có hạng bằng 1 và $\mathrm{Tr}\,(x\otimes x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = |x|^2$. Từ đó ta dễ dàng suy ra kết luận của Mệnh đề 1.1.6. □

1.1.2 Chéo hóa ma trận

Mục này giới thiệu một số kết quả cơ bản về vấn đề chéo hóa các ma trận thực đối xứng hoặc phản đối xứng.

Định lý 1.1.7 (Schur) ([15]) *Cho ma trận $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ có n giá trị riêng là $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Khi đó luôn tồn tại một ma trận unita $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ và một ma trận tam giác trên $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ với $T_{ii} = \lambda_i, i = 1, \dots, n$ sao cho*

$$M = UTU^{-1}.$$

Hơn nữa, nếu M là ma trận thực và có các giá trị riêng là thực thì ta có thể chọn ma trận U là trực giao thực và ma trận tam giác trên T là thực.

Trong trường hợp M là ma trận chuẩn tắc, tức là $M^*M = MM^*$, thì ma trận tam giác trên T nói trên có dạng đường chéo ([15]). Như vậy, nếu M là ma trận thực đối xứng hoặc phản đối xứng thì M là chuẩn tắc và do đó từ Định lý Schur, ta suy ra được mệnh đề sau.

Mệnh đề 1.1.8 ([15]) (i) *Cho $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận đối xứng có các giá trị riêng là $\lambda_i, i = 1, \dots, n$. Khi đó ta có thể chéo hóa M bởi một ma trận trực giao $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$,*

$$M = CDC^{-1}, \quad D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

(ii) *Cho $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận phản đối xứng có các giá trị riêng thuần ảo là $\mathrm{i}\lambda_1, \dots, \mathrm{i}\lambda_n$, trong đó $\lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$. Khi đó ta có thể chéo hóa M bởi một ma trận unita $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$,*

$$M = CDC^{-1}, \quad D = \mathrm{diag}\,(\mathrm{i}\lambda_1, \dots, \mathrm{i}\lambda_n).$$

Sử dụng lý thuyết về chéo hóa ma trận, ta nhận được đánh giá sau đây đối với vết của tích của một ma trận đối xứng và một ma trận xác định không âm.

Mệnh đề 1.1.9 *Cho $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận đối xứng và $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận xác định không âm. Khi đó ta có đánh giá sau*

$$\lambda_{\min}(M)\,\mathrm{Tr}N \le \mathrm{Tr}(MN) \le \lambda_{\max}(M)\,\mathrm{Tr}N, \tag{1.1}$$

trong đó $\lambda_{\min}(M)$ và $\lambda_{\max}(M)$ lần lượt là giá trị riêng nhỏ nhất và lớn nhất của M.

Chứng minh. Từ giả thiết và Mệnh đề 1.1.8, ta có thể biểu diễn $M = CDC^{-1}$, trong đó C là ma trận trực giao và $D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ là các giá trị riêng thực của M. Từ Mệnh đề 1.1.5, ta có

$$\mathrm{Tr}\,(MN) = \mathrm{Tr}\,\big(CDC^{-1}N\big) = \mathrm{Tr}\,\big(DC^{-1}NC\big) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \big(C^{-1}NC\big)_{ii}. \tag{1.2}$$

Vì $N \ge 0$ nên $C^{-1}NC \ge 0$ và do đó $\big(C^{-1}NC\big)_{ii} \ge 0$, $i = 1, \ldots, n$. Khi đó từ (1.2), ta có

$$\lambda_{\min}(M) \sum_{i=1}^{n} \big(C^{-1}NC\big)_{ii} \le \mathrm{Tr}\,(MN) \le \lambda_{\max}(M) \sum_{i=1}^{n} \big(C^{-1}NC\big)_{ii}. \tag{1.3}$$

Cũng từ Mệnh đề 1.1.5, ta có $\sum_{i=1}^{n} \big(C^{-1}NC\big)_{ii} = \mathrm{Tr}\big(C^{-1}NC\big) = \mathrm{Tr}N$. Kết hợp đẳng thức này với (1.3), ta nhận được (1.1). Mệnh đề được chứng minh. □

1.1.3 Ma trận compound bậc 2

Định nghĩa 1.1.10 ([1]) Cho ma trận $M = [M_{ij}]_{n\times n} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Giả sử $i < k$ và $j < \ell$. Ký hiệu $M^{(2)}_{ik,j\ell}$ là định thức con của ma trận vuông cấp hai của các phần tử nằm trên các hàng i, k và các cột j, ℓ của M, tức là

$$M^{(2)}_{ik,j\ell} = \begin{vmatrix} M_{ij} & M_{i\ell} \\ M_{kj} & M_{k\ell} \end{vmatrix}. \tag{1.4}$$

Khi các cặp $(ik), (j\ell)$ với $i < k$ và $j < \ell$ được sắp xếp theo thứ tự từ điển, ma trận cấp $\binom{n}{2} \times \binom{n}{2}$ thu được từ các định thức con nói trên được gọi là *ma trận compound bậc 2* của M và được ký hiệu là $M^{(2)}$. Như vậy,

$$M^{(2)} = \Big[M^{(2)}_{ik,j\ell}\Big]_{\binom{n}{2}\times\binom{n}{2}}. \tag{1.5}$$

Một số tính chất cơ bản của ma trận compound bậc 2 được cho bởi mệnh đề sau đây.

Mệnh đề 1.1.11 ([1]) *Cho các ma trận $M, N \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Khi đó ta có các khẳng định sau:*

(i) $(MN)^{(2)} = M^{(2)}N^{(2)}$ *(công thức Binet-Cauchy);*

(ii) $\left(M^{(2)}\right)^T = \left(M^T\right)^{(2)}$;

(iii) $\overline{M^{(2)}} = \overline{M}^{(2)}$;

(iv) $\left(M^{(2)}\right)^* = \left(M^*\right)^{(2)}$;

(v) *M là không suy biến khi và chỉ khi $M^{(2)}$ là không suy biến và* $\left(M^{(2)}\right)^{-1} = \left(M^{-1}\right)^{(2)}$;

(vi) *Giả sử $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ và M là đối xứng hoặc phản đối xứng, khi đó $M^{(2)}$ là đối xứng;*

(vii) $\left(kM\right)^{(2)} = k^2 M^{(2)}, \quad \forall k \in \mathbb{C}$;

(viii) *Giả sử $M = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, khi đó $M^{(2)} = \operatorname{diag}(\lambda_j\lambda_k, j < k)$.*

Trong bài báo [1] của Danh mục các công trình liên quan đến luận án, chúng tôi đã phát biểu và chứng minh mệnh đề sau đây, và sẽ được dùng trong Chương 2 để khảo sát tính d-lõm của hàm $F(R) = \log(\det R)$.

Mệnh đề 1.1.12 *Cho ma trận $M = [M_{ij}]_{n\times n} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Khi đó ta có*

$$M^{(2)} + \left(M^T\right)^{(2)} = \frac{1}{2}\left(M + M^T\right)^{(2)} + \frac{1}{2}\left(M - M^T\right)^{(2)}. \tag{1.6}$$

Chứng minh. Với mọi $i, j, k, \ell = 1, \dots, n$ thỏa mãn $i < k, j < \ell$, ta có

$$\begin{aligned}
\left(M + M^T\right)^{(2)}_{ik,j\ell} &= \begin{vmatrix} M_{ij} + M_{ji} & M_{i\ell} + M_{\ell i} \\ M_{kj} + M_{jk} & M_{k\ell} + M_{\ell k} \end{vmatrix} = 2\left(\begin{vmatrix} M_{ij} & M_{i\ell} \\ M_{kj} & M_{k\ell} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} M_{ji} & M_{\ell i} \\ M_{jk} & M_{\ell k} \end{vmatrix}\right) \\
&\quad - \left(\begin{vmatrix} M_{ij} & M_{i\ell} \\ M_{kj} & M_{k\ell} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} M_{ji} & M_{\ell i} \\ M_{jk} & M_{\ell k} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} M_{ij} & M_{\ell i} \\ M_{kj} & M_{\ell k} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} M_{ji} & M_{i\ell} \\ M_{jk} & M_{k\ell} \end{vmatrix}\right) \\
&= 2\left(\begin{vmatrix} M_{ij} & M_{i\ell} \\ M_{kj} & M_{k\ell} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} M_{ji} & M_{\ell i} \\ M_{jk} & M_{\ell k} \end{vmatrix}\right) - \begin{vmatrix} M_{ij} - M_{ji} & M_{i\ell} - M_{\ell i} \\ M_{kj} - M_{jk} & M_{k\ell} - M_{\ell k} \end{vmatrix} \\
&= 2\left(M^{(2)}_{ik,j\ell} + \left(M^T\right)^{(2)}_{ik,j\ell}\right) - \left(M - M^T\right)^{(2)}_{ik,j\ell}.
\end{aligned}$$

Từ hệ thức này ta dễ dàng suy ra (1.6). Mệnh đề được chứng minh. □

1.2 Một số không gian hàm

1.2.1 Không gian Hölder

Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là một miền và k là số nguyên không âm. Ký hiệu β là đa chỉ số, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ và $D^\beta = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} \cdots \partial x_n^{\beta_n}}$, trong đó $|\beta| = \beta_1 + \cdots + \beta_n$.

Định nghĩa 1.2.1 ([11]) (i) $C^k(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u$ khả vi liên tục đến cấp k trong $\Omega\}$.
(ii) $BC^k(\Omega) = \{u \in C^k(\Omega) \mid D^\beta u$ bị chặn trong Ω với mọi $\beta : |\beta| \le k\}$;

$BC^k(\Omega)$ là không gian Banach với chuẩn cho bởi

$$\|u\|_{BC^k(\Omega)} = \sum_{|\beta|\le k} \sup_{x\in\Omega} \left|D^\beta u(x)\right|.$$

(iii) $C^k(\overline{\Omega}) = \left\{u \in C^k(\Omega) \mid D^\beta u \text{ có thể thác triển liên tục lên } \overline{\Omega} \text{ với mọi } \beta : |\beta| \le k\right\}$; $C^k(\overline{\Omega})$ là không gian Banach với chuẩn cho bởi

$$|u|_{k;\overline{\Omega}} = \|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \sum_{|\beta|\le k} \sup_{x\in\Omega} \left|D^\beta u(x)\right|.$$

Khi $k = 0$, ta ký hiệu $C^0(\overline{\Omega}) = C(\overline{\Omega})$.

Định nghĩa 1.2.2 ([11]) Cho hàm số $u : \Omega \to \mathbb{R}$ và hằng số $0 < \alpha \le 1$.

(i) Hàm u được gọi là *liên tục Hölder bậc α tại $x^0 \in \Omega$* nếu

$$[u]_{\alpha;x^0} := \sup_{x\in\Omega, x\ne x^0} \frac{|u(x) - u(x^0)|}{|x - x^0|^\alpha} < +\infty.$$

Khi đó $[u]_{\alpha;x^0}$ được gọi là *hệ số Hölder bậc α* của u tại x^0 đối với Ω.

(ii) Hàm u được gọi là *liên tục Hölder đều bậc α trong* Ω nếu

$$[u]_{\alpha;\Omega} := \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\ne y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} < +\infty.$$

Đại lượng $[u]_{\alpha;\Omega}$ là một nửa chuẩn. Khi $\alpha = 1$, u được gọi là *liên tục Lipschitz* trong Ω.

(iii) Ký hiệu

$$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) = \{u \in C^k(\overline{\Omega}) \mid D^\beta u \text{ là liên tục Hölder đều bậc } \alpha \text{ trong } \Omega \text{ với mọi } \beta : |\beta| = k\};$$

$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ được gọi là *không gian Hölder* và nó là không gian Banach với chuẩn cho bởi

$$|u|_{k,\alpha;\overline{\Omega}} = \|u\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} = |u|_{k;\overline{\Omega}} + [D^k u]_{\alpha;\Omega} = |u|_{k;\overline{\Omega}} + \sup_{|\beta|=k} \left[D^\beta u\right]_{\alpha;\Omega}.$$

(iv) $C^{k,\alpha}(\Omega) = \left\{u \mid u \in C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}'\right), \text{ với mọi } \Omega' \subset\subset \Omega\right\}$.

Nhận xét 1.2.3 Giả sử $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là miền bị chặn và có biên Lipschitz. Khi đó, nhờ Định lý Arzelà-Ascoli, ta dễ dàng suy ra phép nhúng $\mathrm{Id} : C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \to C^2(\overline{\Omega})$ là compact. Cụ thể, với mọi dãy bị chặn đều $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, luôn tồn tại một dãy con $\{u_{n_j}\}_{j=1}^\infty$ hội tụ tới u trong $C^2(\overline{\Omega})$; hơn nữa, hàm giới hạn u thuộc $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

1.2.2 Không gian Sobolev

Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là một miền bị chặn, k là số nguyên không âm và p là hằng số dương thuộc khoảng $(1, +\infty)$.

Định nghĩa 1.2.4 ([11]) (i) $L^p(\Omega) = \Bigg\{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u$ là đo được Lebesgue và $\|u\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^p\, dx\right)^{1/p} < +\infty\Bigg\}$.

(ii) $W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid$ tồn tại đạo hàm yếu $D^\beta u$ và $D^\beta u \in L^p(\Omega)$ với $\forall \beta : |\beta| \leq k\}$;

$W^{k,p}(\Omega)$ được gọi là *không gian Sobolev* và nó là không gian Banach với chuẩn cho bởi

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \sum_{|\beta|\leq k} \|D^\beta u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Định lý 1.2.5 (Bất đẳng thức Hölder) ([11]) *Cho các hằng số $p > 1, q > 1$ thỏa mãn $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Khi đó, nếu $u \in L^p(\Omega), v \in L^q(\Omega)$ thì ta có $uv \in L^1(\Omega)$ và*

$$\int\limits_{\Omega} |uv|\, dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Định lý 1.2.6 (Định lý Morrey) ([11], Định lý 7.19) *Cho $u \in W^{1,1}(\Omega)$ và giả sử tồn tại các hằng số dương $K, \alpha\, (\alpha \leq 1)$ sao cho*

$$\int\limits_{B_R(y)} |Du(x)| dx \leq K R^{n-1+\alpha}, \quad \forall y \in \Omega,\ R > 0. \tag{1.7}$$

Khi đó $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, và với mọi hình cầu $B_R \subset \Omega$,

$$\operatorname*{osc}_{B_R} u \leq CKR^\alpha, \tag{1.8}$$

trong đó $C = C(n, \alpha)$. Nếu $\Omega = \tilde{\Omega} \cap \mathbb{R}^n_+ = \{x \in \tilde{\Omega} \mid x_n > 0\}$ với miền $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ nào đó và (1.7) đúng với mọi $y \in \tilde{\Omega}$ thì $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega} \cap \tilde{\Omega})$ và (1.8) đúng với mọi hình cầu $B_R \subset \tilde{\Omega}$.

Định lý 1.2.6 được sử dụng cho đánh giá nửa chuẩn Hölder đối với các đạo hàm cấp hai trong lân cận của điểm nằm trên phần biên có dạng phẳng trong Chương 3 của luận án.

1.3 Phương trình đạo hàm riêng elliptic tuyến tính cấp hai

Mục này nhắc lại một số kết quả cơ bản đối với phương trình đạo hàm riêng elliptic tuyến tính cấp hai.

1.3.1 Nguyên lý cực đại và nguyên lý so sánh

Xét toán tử tuyến tính cấp hai L có dạng

$$Lu = a^{ij}(x) D_{ij} u + b^i(x) D_i u + c(x) u, \quad a^{ij} = a^{ji}, \tag{1.9}$$

trong đó $x \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là miền bị chặn và $u(x) \in C^2(\Omega)$.

Định nghĩa 1.3.1 ([11]) Toán tử L được gọi là *elliptic trong* Ω nếu ma trận $\left[a^{ij}(x)\right]_{n\times n}$ là xác định dương với mọi $x \in \Omega$. Hơn nữa, nó được gọi là *elliptic đều trong* Ω nếu tồn tại các hằng số dương λ và Λ sao cho

$$\lambda|\xi|^2 \leq a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2, \quad \forall x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{1.10}$$

Định lý 1.3.2 (Nguyên lý cực đại) ([11, 47]) *Giả sử toán tử L cho bởi* (1.9) *là elliptic đều trong miền bị chặn Ω, trong đó $b^i(x), c(x), i = 1, \ldots, n$ là các hàm bị chặn trong Ω và $c(x) \leq 0$ trong Ω. Giả sử hàm $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ thỏa mãn $Lu \geq 0$ trong Ω. Khi đó ta có đánh giá*

$$\sup_{x\in\Omega} u(x) \leq \sup_{x\in\partial\Omega} u^+(x), \quad u^+ := \max\{u, 0\}.$$

Từ nguyên lý cực đại, ta thiết lập được nguyên lý so sánh sau đây.

Định lý 1.3.3 (Nguyên lý so sánh) ([11, 47]) *Giả sử toán tử L cho bởi* (1.9) *là elliptic đều trong miền bị chặn Ω, trong đó $b^i(x), c(x), i = 1, \ldots, n$ là các hàm bị chặn trong Ω và $c(x) \leq 0$ trong Ω. Giả sử các hàm $u(x), v(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ thỏa mãn $Lu \geq Lv$ trong Ω và $u \leq v$ trên $\partial\Omega$. Khi đó ta có $u \leq v$ trong Ω.*

Nhận xét 1.3.4 Nếu toán tử L là elliptic trong miền compact $\overline{\Omega}$, trong đó các hàm hệ số $a^{ij}(x), b^i(x), c(x)$ thuộc $C(\overline{\Omega})$ thì L là elliptic đều trong Ω và các hàm $b^i(x), c(x)$ là bị chặn trong Ω.

Từ Định lý 1.3.3, ta suy ra được hệ quả sau đây.

Hệ quả 1.3.5 *Xét toán tử Q có dạng*

$$Qu = a^{ij}(x)D_{ij}u + b(x, Du), \quad a^{ij} = a^{ji}.$$

Giả sử toán tử Q là elliptic đều trong miền bị chặn Ω, tức là ma trận hệ số $[a^{ij}(x)]_{n\times n}$ thỏa mãn (1.10)*, $b(x, p)$ là hàm khả vi liên tục theo p trên $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n$. Cho các hàm $u(x), v(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ thỏa mãn $Qu \geq Qv$ trong Ω và $u \leq v$ trên $\partial\Omega$. Khi đó ta có $u \leq v$ trong Ω.*

Chứng minh. Từ giả thiết của hệ quả và sử dụng định lý giá trị trung bình, ta có thể biểu diễn

$$Qu - Qv = a^{ij}(x)D_{ij}(u - v) + (b(x, Du) - b(x, Dv)) = a^{ij}(x)D_{ij}(u - v) + b^i(x)D_i(u - v),$$

trong đó $b^i(x), i = 1, \ldots, n$ là các hàm bị chặn trong $\overline{\Omega}$. Đặt $w = u - v$, khi đó $w \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ và thỏa mãn

$$\overline{L}w = a^{ij}(x)D_{ij}w + b^i(x)D_iw \geq 0 \ \text{ trong } \Omega, \quad w \leq 0 \ \text{ trên } \partial\Omega.$$

Dễ thấy toán tử $\overline{L}$ thỏa mãn các giả thiết của nguyên lý so sánh (Định lý 1.3.3) và do đó từ hệ thức trên ta suy ra $w \leq 0$, hay $u \leq v$ trong Ω. Hệ quả được chứng minh. $\square$

1.3.2 Bài toán Dirichlet. Tính khả nghịch của phương trình toán tử

Trước tiên, bằng cách kết hợp các Định lý 3.7, 6.6 và 6.14 trong [11], ta có định lý sau đây.

Định lý 1.3.6 ([11]) *Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là một miền bị chặn thuộc $C^{2,\alpha}$. Giả sử toán tử L cho bởi* (1.9) *là elliptic đều trong Ω, thỏa mãn* (1.10)*, và giả sử hàm số $f(x)$ và các hệ số của L thuộc $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, $c(x) \le 0$ trong Ω. Khi đó bài toán Dirichlet*

$$Lu = f \text{ trong } \Omega, \quad u = 0 \text{ trên } \partial\Omega,$$

có một nghiệm duy nhất $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ thỏa mãn đánh giá sau

$$|u|_{2,\alpha;\overline{\Omega}} \le C|f|_{0,\alpha;\overline{\Omega}},$$

trong đó $C = C(n, \alpha, \Omega, \lambda, \Lambda, |a^{ij}|_{0,\alpha;\overline{\Omega}}, |b^i|_{0,\alpha;\overline{\Omega}}, |c|_{0,\alpha;\overline{\Omega}})$.

Từ định lý trên, ta dễ dàng suy ra hệ quả sau đây.

Hệ quả 1.3.7 *Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là một miền bị chặn thuộc $C^{2,\alpha}$ và $\mathcal{B}_1 = \{u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \mid u = 0 \text{ trên } \partial\Omega\}$. Giả sử toán tử tuyến tính L cho bởi* (1.9) *là elliptic đều trong Ω và có các hệ số thuộc $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, $c(x) \le 0$ trong Ω. Khi đó toán tử $L : \mathcal{B}_1 \to C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ là khả nghịch; hơn nữa toán tử nghịch đảo $L^{-1} : C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \to \mathcal{B}_1$ là tuyến tính liên tục.*

1.3.3 Các định lý Harnack, Krylov và đánh giá trong L^p

Trong mục này, luận án giới thiệu một số kết quả sẽ được sử dụng trong Chương 3 khi thiết lập đánh giá Hölder ở bên trong miền và tại điểm tùy ý ở trên biên. Xét toán tử elliptic tuyến tính cấp hai $\tilde{L}$ có dạng sau đây

$$\tilde{L} = a^{ij}(x)D_{ij}, \quad a^{ij} = a^{ji}. \tag{1.11}$$

Định lý sau đây là bất đẳng thức Harnack yếu đối với các nghiệm trên không âm.

Định lý 1.3.8 (Định lý Harnack) ([11], Định lý 9.22) *Giả sử toán tử $\tilde{L}$ cho bởi* (1.11) *là elliptic đều trong miền bị chặn $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ và thỏa mãn*

$$\lambda|\xi|^2 \le a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \Lambda|\xi|^2, \quad \forall x \in \Omega, \ \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{1.12}$$

trong đó λ, Λ là các hằng số dương và $a^{ij} \in C(\overline{\Omega}), i, j = 1, \ldots, n$. Giả sử hàm $u \in C^2(\overline{\Omega})$ thỏa mãn $\tilde{L}u \le f$ trong Ω với $f \in C(\overline{\Omega})$ và $u \ge 0$ trong hình cầu $B_{2R}(y) \subset \Omega$. Khi đó tồn tại các hằng số dương p (p không nhất thiết lớn hơn 1) và C, chỉ phụ thuộc vào n, λ và Λ sao cho

$$\left(\frac{1}{|B_R(y)|} \int\limits_{B_R(y)} u^p \right)^{1/p} \le C \left(\inf_{B_R(y)} u + \frac{R}{\lambda} \|f\|_{L^n(B_{2R}(y))} \right).$$

Tiếp theo là một số kết quả trong trường hợp miền đang xét có một phần biên có dạng phẳng mà trên đó nghiệm triệt tiêu. Với $R > 0$, ta đưa vào các ký hiệu B_R^+ và T_R như sau

$$B_R^+ := B_R(0) \cap \mathbb{R}_+^n, \quad T_R := B_R(0) \cap \partial\mathbb{R}_+^n.$$

Định lý sau đây thiết lập đánh giá trong L^p đối với các đạo hàm cấp hai của nghiệm trong lân cận đủ nhỏ của điểm nằm trên phần biên phẳng.

Định lý 1.3.9 (Đánh giá trong L^p) ([11], Định lý 9.13) *Giả sử toán tử $\tilde{L}$ cho bởi (1.11) là elliptic đều trong nửa hình cầu $B^+ = B_{R_0}^+$ và thỏa mãn (1.12) trong B^+, trong đó $a^{ij} \in C(\overline{B}^+)$ và $0 < R_0 \leq 1$. Giả sử hàm $u \in C^2(\overline{B}^+)$ thỏa mãn phương trình $\tilde{L}u = f$ trong B^+ với $f \in C(\overline{B}^+)$ và $u = 0$ trên T_{R_0}. Khi đó với mọi $p \in (1, +\infty)$, ta có*

$$\left\|D^2 u\right\|_{L^p\left(B_{R/2}^+\right)} \leq C\left(\|u\|_{L^p(B_R^+)} + \|f\|_{L^p(B_R^+)}\right),$$

miễn là $0 < R \leq R^* \leq R_0$, trong đó C là hằng số dương phụ thuộc vào n, p, λ, Λ và R, R^* là hằng số sao cho $m(R^*) \leq m^*$, trong đó m^* là hằng số dương phụ thuộc vào n, p và λ, $m(r)$ là môđun liên tục của ma trận $a(x) = [a^{ij}(x)]_{n\times n}$ tại điểm $x^0 = 0$ được xác định bởi

$$m(r) = \sup_{x\in B^+, |x|\leq r} |a(x) - a(0)|.$$

Định lý sau đây thiết lập đánh giá nửa chuẩn Hölder đối với đạo hàm theo véc tơ pháp tuyến của nghiệm trên phần biên phẳng.

Định lý 1.3.10 (Định lý Krylov) ([11], Định lý 9.31) *Giả sử các giả thiết của Định lý 1.3.9 được thỏa mãn, khi đó ta có*

$$\operatorname*{osc}_{T_R} \frac{\partial u}{\partial x_n} \leq C\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\alpha}\left(\sup_{B^+}|Du| + \frac{R_0}{\lambda}\sup_{B^+}|f|\right), \quad \forall R \leq R_0,$$

trong đó $\alpha \in (0, 1)$ và C là các hằng số dương chỉ phụ thuộc vào n, λ và Λ.

1.4 Phương trình đạo hàm riêng elliptic cấp hai phi tuyến hoàn toàn

Trong mục này, luận án giới thiệu khái niệm phương trình đạo hàm riêng elliptic cấp hai phi tuyến hoàn toàn và phương pháp liên tục để giải phương trình toán tử phi tuyến trong không gian Banach.

1.4.1 Khái niệm phương trình elliptic cấp hai phi tuyến hoàn toàn

Xét phương trình đạo hàm riêng cấp hai có dạng

$$F[u] := F(x, u, Du, D^2u) = 0, \tag{1.13}$$

trong đó F là hàm thực xác định trên tập $\Gamma \times \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^{n\times n})$, trong đó $\Gamma = \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $\mathrm{Sym}(\mathbb{R}^{n\times n})$ là không gian các ma trận thực đối xứng cấp n, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là miền bị chặn và $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Ký hiệu các điểm thuộc $\Gamma \times \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^{n\times n})$ là (x, z, p, r), trong đó $x \in \overline{\Omega}, z \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}^n$ và $r = [r_{ij}]_{n\times n} \in \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^{n\times n})$. Khi F là hàm affine đối với các biến $r_{ij}, i, j = 1, \dots, n$ thì phương trình (1.13) được gọi là *á tuyến tính*; nếu không, nó được gọi là *phi tuyến hoàn toàn*. Các phương trình kiểu Monge-Ampère (0.4) và (0.10) là các phương trình đạo hàm riêng cấp hai phi tuyến hoàn toàn.

Ta giả thiết F là hàm khả vi theo các biến r_{ij} và ký hiệu $F_{r_{ij}} := \dfrac{\partial F}{\partial r_{ij}}, i, j = 1, \dots, n$. Mặc dù r là ma trận đối xứng, nhưng nói chung, ma trận $[F_{r_{ij}}]_{n\times n}$ là không đối xứng.

Định nghĩa 1.4.1 ([11]) (i) Toán tử F được gọi là *elliptic* trong tập con $U \subset \Gamma \times \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^{n\times n})$ nếu ma trận $[F_{r_{ij}}]_{n\times n}$ là xác định dương trong U. Hơn nữa, nó được gọi là *elliptic đều* trong U nếu tồn tại các hằng số dương λ và Λ sao cho

$$\lambda|\xi|^2 \leq F_{r_{ij}}(x, z, p, r)\xi_i\xi_j = \frac{1}{2}\big(F_{r_{ij}} + F_{r_{ji}}\big)(x, z, p, r)\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2, \quad \forall (x, z, p, r) \in U, \ \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{1.14}$$

(ii) F được gọi là *elliptic* (*elliptic đều*) *đối với* $u \in C^2(\overline{\Omega})$ nếu F là elliptic (elliptic đều) trên miền giá trị của ánh xạ $x \mapsto (x, u(x), Du(x), D^2u(x))$.

Mệnh đề 1.4.2 *Xét phương trình kiểu Monge-Ampère có dạng* (0.4)*,*

$$\det\big[D^2u - A(x, u, Du) - B(x, u, Du)\big] = f(x, u, Du), \quad x \in \Omega, \tag{1.15}$$

trong đó $A(x, z, p), B(x, z, p) \in C(\Gamma; \mathbb{R}^{n\times n})$, $A^T = A$, $B^T = -B$. *Khi đó* (1.15) *là elliptic đối với* $u(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ *khi và chỉ khi*

$$\lambda_u := \min_{x\in\overline{\Omega}} \lambda_{\min}(\omega(x, u)) = \min_{x\in\overline{\Omega}} \min_{\xi\in\mathbb{R}^n, |\xi|=1} \sum_{i,j=1}^{n} \omega_{ij}(x, u)\xi_i\xi_j > 0, \tag{1.16}$$

trong đó $\omega(x, u) = D^2u - A(x, u(x), Du(x)) = [\omega_{ij}(x, u)]_{n\times n}$.

Chứng minh. Ta viết phương trình (1.15) dưới dạng

$$F(x, u, Du, D^2u) := \det R(x, u) - f(x, u, Du) = 0,$$

trong đó $R(x, u) = D^2u - A(x, u, Du) - B(x, u, Du)$. Bằng cách khai triển định thức $\det R(x, u)$ theo hàng i, ta suy ra $\frac{\partial F}{\partial r_{ij}} = \frac{\partial F}{\partial R_{ij}} = U_{ij}, \ i, j = 1, \dots, n$, trong đó U_{ij} là phần bù đại số của R_{ij} trong định thức $\det R(x, u)$. Theo Định nghĩa 1.4.1, (1.15) là elliptic đối với hàm $u(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ nếu

$$U = [U_{ij}(x, u)]_{n\times n} > 0. \tag{1.17}$$

Từ (1.17), ta có $\det U > 0$ và do đó từ hệ thức $\det U = (\det R)^{n-1}$, ta suy ra $\det R \neq 0$ hay R là khả nghịch. Do đó $U = (\det R)\,(R^{-1})^T$ và vì thế (1.17) thỏa mãn khi và chỉ khi

$R^{-1} > 0$ hay $R > 0$. Chú ý $R > 0$ tương đương với $\frac{R+R^T}{2} = \omega > 0$, và do đó ta suy ra được kết luận của mệnh đề. $\square$.

Để kết thúc mục nhỏ này, luận án giới thiệu định lý về tính chính quy toàn cục đối với nghiệm elliptic của bài toán Dirichlet cho phương trình đạo hàm riêng phi tuyến (1.13).

Định lý 1.4.3 ([11], Bổ đề 17.16) *Giả sử hàm $u(x) \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ là nghiệm của bài toán Dirichlet*

$$F(x, u, Du, D^2u) = 0 \text{ trong } \Omega, \ u = \varphi \text{ trên } \partial\Omega,$$

trong đó $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là miền bị chặn thuộc lớp $C^{k+2,\alpha}$, $F \in C^{k,\alpha}\big(\Gamma \times \mathbb{R}^{n\times n}\big)$ là elliptic đối với u và $\varphi \in C^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Khi đó ta có $u(x) \in C^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

1.4.2 Khái niệm đạo hàm Fréchet. Định lý hàm ẩn trong không gian Banach

Cho $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ là các không gian Banach, $\widetilde{\mathcal{B}}_1 \subset \mathcal{B}_1$ là tập mở. Ký hiệu $\mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ là không gian Banach gồm tất cả các ánh xạ tuyến tính bị chặn từ $\mathcal{B}_1$ vào $\mathcal{B}_2$.

Định nghĩa 1.4.4 ([11]) (i) Ánh xạ $T : \widetilde{\mathcal{B}}_1 \to \mathcal{B}_2$ được gọi là *khả vi Gâteaux tại $u \in \widetilde{\mathcal{B}}_1$* nếu tồn tại ánh xạ tuyến tính bị chặn $L \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ sao cho

$$\lim_{t\to 0} \frac{T[u+th] - T[u]}{t} = Lh, \quad \forall h \in \mathcal{B}_1. \tag{1.18}$$

T được gọi là *khả vi Fréchet tại $u \in \widetilde{\mathcal{B}}_1$* nếu sự hội tụ trong (1.18) là đều với mọi h thỏa mãn: $\|h\|_{\mathcal{B}_1} \le 1$, nghĩa là

$$\lim_{\|h\|_{\mathcal{B}_1}\to 0} \frac{\|T[u+h] - T[u] - Lh\|_{\mathcal{B}_2}}{\|h\|_{\mathcal{B}_1}} = 0. \tag{1.19}$$

Nếu T khả vi Gâteaux (Fréchet) tại u thì ánh xạ L được gọi là *đạo hàm Gâteaux* (*Fréchet*) của T tại u và được ký hiệu là T_u. Như vậy, $T_u = L$.

(ii) T được gọi là *khả vi Gâteaux (Fréchet) trong $\widetilde{\mathcal{B}}_1$* nếu T là khả vi Gâteaux (Fréchet) tại mọi phần tử thuộc $\widetilde{\mathcal{B}}_1$.

Chú ý 1.4.5 Nếu T khả vi Gâteaux (Fréchet) trong một lân cận của $u \in \widetilde{\mathcal{B}}_1$ và ánh xạ biến phần tử $u \in \widetilde{\mathcal{B}}_1$ thành phần tử $T_u \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ liên tục tại u thì T được gọi là khả vi liên tục Gâteaux (Fréchet) tại u. Người ta đã chứng minh được rằng, nếu T là khả vi liên tục Gâteaux tại u thì T là khả vi liên tục Fréchet tại u và khi đó các đạo hàm Gâteaux và Fréchet thu được là trùng nhau.

Định nghĩa 1.4.6 ([11]) Giả sử ánh xạ $T : \mathcal{B}_1 \times \mathbb{R} \to \mathcal{B}_2$ là khả vi Gâteaux (Fréchet) tại điểm (u, t), $u \in \mathcal{B}_1$, $t \in \mathbb{R}$. Khi đó *các đạo hàm riêng Gâteaux* (*Fréchet*), $T^1_{(u,t)}$, $T^2_{(u,t)}$ tại (u, t) lần lượt là các ánh xạ tuyến tính bị chặn $T^1_{(u,t)} : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$, $T^2_{(u,t)} : \mathbb{R} \to \mathcal{B}_2$ được xác định bởi

$$T_{(u,t)}(h, k) = T^1_{(u,t)}(h) + T^2_{(u,t)}(k), \ \forall h \in \mathcal{B}_1, k \in \mathbb{R}.$$

Định lý 1.4.7 (Định lý hàm ẩn) ([11], Định lý 17.6) *Cho* $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ *là các không gian Banach và* $\widetilde{\mathcal{B}}_1 \subset \mathcal{B}_1$ *là tập mở. Giả sử ánh xạ* $T : \widetilde{\mathcal{B}}_1 \times \mathbb{R} \to \mathcal{B}_2$ *khả vi liên tục Fréchet tại* $(u_0, t_0) \in \widetilde{\mathcal{B}}_1 \times \mathbb{R}$ *với* $T[u_0, t_0] = 0$ *và giả sử đạo hàm riêng Fréchet* $T^1_{(u_0,t_0)}$ *là khả nghịch. Khi đó tồn tại* $\varepsilon > 0$ *sao cho với mỗi* $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, *tồn tại* $u_t \in \widetilde{\mathcal{B}}_1$ *sao cho* $T[u_t, t] = 0$.

1.4.3 Giới thiệu phương pháp liên tục giải phương trình toán tử phi tuyến

Mục này giới thiệu phương pháp liên tục (the method of continuity) để chứng minh sự tồn tại nghiệm của phương trình $F[u] = 0$, trong đó $F[u]$ là toán tử phi tuyến.

Cho $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ là các không gian Banach, $\widetilde{\mathcal{B}}_1 \subset \mathcal{B}_1$ là tập mở và cho ánh xạ $F : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$. Lấy phần tử cố định $u^{(0)} \in \widetilde{\mathcal{B}}_1$ và xét ánh xạ

$$T : \widetilde{\mathcal{B}}_1 \times \mathbb{R} \to \mathcal{B}_2, \quad T[u, t] = F[u] - (1 - t)F\big[u^{(0)}\big]. \tag{1.20}$$

Ký hiệu I và $\mathcal{E}$ lần lượt là tập con của $[0, 1]$ và $\widetilde{\mathcal{B}}_1$ được xác định bởi

$$\begin{aligned} I &= \{t \in [0, 1] \mid \exists u \in \widetilde{\mathcal{B}}_1 : T[u, t] = 0\}, \\ \mathcal{E} &= \{u \in \widetilde{\mathcal{B}}_1 \mid \exists t \in [0, 1] : T[u, t] = 0\}. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Định lý sau là nội dung của phương pháp liên tục để giải phương trình toán tử phi tuyến.

Định lý 1.4.8 ([11]) *Giả sử ánh xạ* F *là khả vi liên tục Fréchet trên* $\mathcal{E}$ *và đạo hàm Fréchet* F_u *là khả nghịch. Khi đó phương trình* $F[u] = 0$ *là giải được trong* $\widetilde{\mathcal{B}}_1$ *nếu tập* I *là đóng trong đoạn* $[0, 1]$.

Chứng minh. Dễ thấy $T\big[u^{(0)}, 0\big] = 0$. Suy ra $0 \in I$ và do đó $I \neq \emptyset$. Hơn nữa, từ giả thiết của định lý, ta có thể áp dụng Định lý hàm ẩn 1.4.7 và suy ra I là mở trong $[0, 1]$. Nếu ta giả thiết thêm I là đóng trong đoạn $[0, 1]$ thì khi đó I là tập khác rỗng và vừa đóng vừa mở trong $[0, 1]$. Do đó $I = [0, 1]$. Vì $1 \in I$ nên ta suy ra tồn tại $u \in \widetilde{\mathcal{B}}_1$ sao cho $T[u, 1] = 0$ hay $F[u] = 0$. Định lý được chứng minh. □

Chú ý 1.4.9 Trong Chương 4, để chứng minh sự tồn tại nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet cho phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng (1.15), trước tiên ta biến đổi bài toán Dirichlet ban đầu về bài toán Dirichlet mà trong đó dạng của phương trình (1.15) là không đổi và giá trị của nghiệm cần tìm trên biên là đồng nhất bằng không. Sau đó ta sẽ áp dụng Định lý 1.4.8 với $F[u]$ chính là toán tử kiểu Monge-Ampère không đối xứng, $\mathcal{B}_1 = \{u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \mid u = 0 \text{ trên } \partial\Omega\}$ và $\mathcal{B}_2 = C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. Việc chứng minh tính đóng của tập I được đưa về việc thiết lập các đánh giá tiên nghiệm đối với nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet trong không gian $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Do đó, việc tiến hành các đánh giá tiên nghiệm trong $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ đối với nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet qua các bước ở Chương 3 là một trong các nội dung chính của luận án.

Chương 2

Tính d-lõm của hàm số kiểu Monge-Ampère không đối xứng

Chương này nghiên cứu về tính d-lõm của hàm số kiểu Monge-Ampère $F(R) = \log(\det R)$ với biến R là ma trận xác định dương không đối xứng. Tính chất này là một công cụ quan trọng trong các đánh giá tiên nghiệm ở chương sau.

Nội dung của chương này được viết dựa trên bài báo [1] trong Danh mục các công trình liên quan đến luận án.

2.1 Tính lõm của hàm số kiểu Monge-Ampère đối xứng

Trong mục này, luận án tổng quan một số tính chất đã biết về tính lõm của hàm số kiểu Monge-Ampère đối xứng dạng sau đây

$$F(\omega) = \log(\det \omega), \tag{2.1}$$

trong đó $\omega = [\omega_{ij}]_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận thực đối xứng xác định dương. Hàm $F(\omega)$ là hàm lõm chặt trên tập lồi các ma trận đối xứng xác định dương ([15]). Ký hiệu $\omega^{-1} = [\omega^{ij}]_{n\times n}$ là ma trận nghịch đảo của ω. Khi đó ta có ([6]),

$$F^{ij} := \frac{\partial F(\omega)}{\partial \omega_{ij}} = \omega^{ji}, \quad F^{ij,k\ell} := \frac{\partial^2 F(\omega)}{\partial \omega_{ij}\partial \omega_{k\ell}} = -\omega^{\ell i}\omega^{jk}, \quad i,j,k,\ell = 1,\dots,n. \tag{2.2}$$

Mệnh đề 2.1.1 *Cho hàm $F(\omega)$ xác định bởi* (2.1)*, trong đó ω là ma trận đối xứng xác định dương. Khi đó với mỗi ω cố định, ta có*

$$\sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} F^{ij,k\ell}P_{ij}P_{k\ell} = -|\tilde{P}|^2 \le -\frac{1}{(\lambda_{\max}(\omega))^2}|P|^2 \le 0, \quad \forall P = [P_{ij}]_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n}, P^T = P, \tag{2.3}$$

trong đó $\tilde{P} = \omega^{-\frac{1}{2}}P\omega^{-\frac{1}{2}}$.

Chứng minh. Từ (2.2) và Mệnh đề 1.1.5, ta có

$$\sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} F^{ij,k\ell} P_{ij} P_{k\ell} = -\sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} \omega^{\ell i}\omega^{jk} P_{ij} P_{k\ell} = -\mathrm{Tr}\big(\omega^{-1} P \omega^{-1} P\big)$$
$$= -\mathrm{Tr}\big(\omega^{-\frac{1}{2}}\omega^{-\frac{1}{2}} P \omega^{-\frac{1}{2}}\omega^{-\frac{1}{2}} P\big) = -\mathrm{Tr}\Big[\big(\omega^{-\frac{1}{2}} P \omega^{-\frac{1}{2}}\big)\big(\omega^{-\frac{1}{2}} P \omega^{-\frac{1}{2}}\big)\Big] = -|\tilde{P}|^2.$$

Như vậy, ta nhận được đẳng thức thứ nhất trong (2.3). Tiếp theo, ta chéo hóa ω bởi một ma trận trực giao C,

$$\omega = CDC^{-1},$$

trong đó $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_i > 0, i = 1, \dots, n$ là các giá trị riêng của ω. Suy ra

$$\omega^{-\frac{1}{2}} = CD^{-\frac{1}{2}}C^{-1}, \quad D^{-\frac{1}{2}} = \mathrm{diag}\Big(\lambda_1^{-\frac{1}{2}}, \dots, \lambda_n^{-\frac{1}{2}}\Big).$$

Do đó, từ Mệnh đề 1.1.5 ta có

$$\sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} F^{ij,k\ell} P_{ij} P_{k\ell} = -|\tilde{P}|^2 = -\big|\big(CD^{-\frac{1}{2}}C^{-1}\big)P\big(CD^{-\frac{1}{2}}C^{-1}\big)\big|^2$$
$$= -\big|D^{-\frac{1}{2}}\big(C^{-1}PC\big)D^{-\frac{1}{2}}\big|^2 = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i\lambda_j}\big(C^{-1}PC\big)_{ij}^2 \le -\frac{1}{(\lambda_{\max}(\omega))^2}|P|^2.$$

Từ đây ta suy ra bất đẳng thức còn lại trong (2.3). Mệnh đề được chứng minh. ☐

Mệnh đề 2.1.2 *Cho $\omega^{(0)} = \big[\omega_{ij}^{(0)}\big]_{n\times n}$ và $\omega^{(1)} = \big[\omega_{ij}^{(1)}\big]_{n\times n}$ là các ma trận đối xứng xác định dương tùy ý. Khi đó ta có đánh giá*

$$F\big(\omega^{(1)}\big) - F\big(\omega^{(0)}\big) \le \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial F\left(\omega^{(0)}\right)}{\partial \omega_{ij}}\left(\omega_{ij}^{(1)} - \omega_{ij}^{(0)}\right). \tag{2.4}$$

Chứng minh. Áp dụng khai triển Taylor tại $t = 0$ cho hàm $h(t) := F\left(t\omega^{(1)} + (1-t)\omega^{(0)}\right)$, ta có

$$F\big(\omega^{(1)}\big) - F\big(\omega^{(0)}\big) = h(1) - h(0) = h'(0) + \frac{1}{2}h''(\tau),$$

trong đó $\tau \in (0, 1)$ là hằng số nào đó. Bằng tính toán, ta có

$$h'(0) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial F\left(\omega^{(0)}\right)}{\partial \omega_{ij}}\big(\omega_{ij}^{(1)} - \omega_{ij}^{(0)}\big),$$
$$h''(\tau) = \sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} \frac{\partial^2 F\left(\tau\omega^{(1)} + (1-\tau)\omega^{(0)}\right)}{\partial \omega_{ij}\partial\omega_{k\ell}}\big(\omega_{ij}^{(1)} - \omega_{ij}^{(0)}\big)\big(\omega_{k\ell}^{(1)} - \omega_{k\ell}^{(0)}\big).$$

Ta nhận thấy $\tau\omega^{(1)} + (1-\tau)\omega^{(0)}$ là đối xứng xác định dương và $\omega^{(1)} - \omega^{(0)}$ là đối xứng. Do đó, từ Mệnh đề 2.1.1, ta suy ra

$$h''(\tau) \le 0.$$

Từ các đánh giá trên ta dễ dàng thu được (2.4). Mệnh đề được chứng minh. ☐

2.2 Tính d-lõm của hàm số kiểu Monge-Ampère không đối xứng

Trong mục này, luận án nghiên cứu về tính d-lõm (Định nghĩa 0.0.5) của hàm số kiểu Monge-Ampère không đối xứng dạng sau đây

$$F(R) = \log(\det R), \tag{2.5}$$

trong đó R thuộc tập $D_{\delta,\mu} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ đã được định nghĩa trong (0.26),

$$D_{\delta,\mu} \equiv \left\{R \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid R = \omega + \beta, \omega^T = \omega, \beta^T = -\beta, \lambda_{\min}(\omega) > 0, \mu \leq \delta\lambda_{\min}(\omega), \|\beta\| \leq \mu\right\}, \tag{2.6}$$

trong đó $\delta \in [0, 1)$ và μ là các hằng số không âm. Các Mệnh đề 2.1.1 và 2.1.2 sẽ được mở rộng tương ứng cho hàm $F(R)$ trên tập $D_{\delta,\mu}$.

2.2.1 Một vài tính chất của lớp ma trận $D_{\delta,\mu}$

Mục này nghiên cứu một số tính chất của lớp ma trận $D_{\delta,\mu}$ cho bởi (2.6).

Mệnh đề 2.2.1 *Tập hợp $D_{\delta,\mu}$ cho bởi* (2.6) *là lồi và không bị chặn trong* $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Chứng minh. Cho $R_0 = \omega_0+\beta_0$, $R_1 = \omega_1+\beta_1$ là các ma trận tùy ý thuộc $D_{\delta,\mu}$. Với $\forall t \in [0, 1]$, ta đặt $R_t = (1-t)R_0 + tR_1 = \omega_t + \beta_t$, trong đó $\omega_t = (1-t)\omega_0 + t\omega_1$, $\beta_t = (1-t)\beta_0 + t\beta_1$. Khi đó $\omega_t^T = \omega_t$, $\beta_t^T = -\beta_t$ và $\|\beta_t\| \leq (1-t)\|\beta_0\| + t\|\beta_1\| \leq \mu$, $\forall t \in [0, 1]$. Hơn nữa, ta có

$$(\omega_t\xi, \xi) = (1-t)(\omega_0\xi, \xi) + t(\omega_1\xi, \xi) \geq [(1-t)\lambda_{\min}(\omega_0) + t\lambda_{\min}(\omega_1)]|\xi|^2, \quad \forall\xi \in \mathbb{R}^n,$$

và do đó $\lambda_{\min}(\omega_t) \geq (1-t)\lambda_{\min}(\omega_0) + t\lambda_{\min}(\omega_1)$, $\forall t \in [0, 1]$. Từ đây suy ra $\lambda_{\min}(\omega_t) > 0$ và

$$\delta\lambda_{\min}(\omega_t) \geq (1-t)\delta\lambda_{\min}(\omega_0) + t\delta\lambda_{\min}(\omega_1) \geq (1-t)\mu + t\mu = \mu, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Như vậy, $R_t \in D_{\delta,\mu}$ với mọi $t \in [0, 1]$ và vì thế $D_{\delta,\mu}$ là tập lồi. Mặt khác, ta dễ thấy nếu $R = \omega + \beta \in D_{\delta,\mu}$ thì $t\omega + \beta \in D_{\delta,\mu}$ với $\forall t \geq 1$ và do đó $D_{\delta,\mu}$ là tập không bị chặn. Mệnh đề được chứng minh. □

Mệnh đề 2.2.2 *Giả sử $R = \omega + \beta \in \mathbb{R}^{n\times n}$, trong đó ω là đối xứng xác định dương, β là phản đối xứng. Khi đó ta có các khẳng định sau:*

(i) $\det\beta \geq 0$;

(ii) $\det R \geq \det\omega + \det\beta \geq \det\omega > 0$;

(iii) *Đặc biệt, khi $n = 2$,* $\det R = \det\omega + \det\beta \geq \det\omega > 0$.

Do đó, $\det R > 0$ *và R là không suy biến khi $\omega > 0$.*

Chứng minh. (i) Đặt
$$\sigma = \omega^{-\frac{1}{2}}\beta\omega^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.7}$$
Khi đó σ là phản đối xứng và
$$R = \omega + \beta = \omega^{\frac{1}{2}}\left(E + \omega^{-\frac{1}{2}}\beta\omega^{-\frac{1}{2}}\right)\omega^{\frac{1}{2}} = \omega^{\frac{1}{2}}(E+\sigma)\omega^{\frac{1}{2}}. \tag{2.8}$$
Đặt
$$D_1 = \operatorname{diag}(\mathrm{i}\sigma_1, \ldots, \mathrm{i}\sigma_n), \tag{2.9}$$
trong đó $\mathrm{i}\sigma_1, \ldots, \mathrm{i}\sigma_n$ là các giá trị riêng của σ, i là đơn vị ảo, $\sigma_j \in \mathbb{R}, j = 1, \ldots, n$ và
$$\sigma_{2j-1} = -\sigma_{2j}, j = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right] \text{ và } \sigma_n = 0 \text{ nếu } n \text{ lẻ}. \tag{2.10}$$
Khi đó
$$\sigma = C_1 D_1 C_1^*, \tag{2.11}$$
trong đó $C_1 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ là unita, C_1^* là liên hợp Hermite của C_1, $C_1^* = C_1^{-1}$.
Từ (2.8) và (2.11), ta có $R = \omega^{\frac{1}{2}}C_1(E + D_1)C_1^*\omega^{\frac{1}{2}}$. Do đó, từ (2.9) và (2.10), ta suy ra
$$\det R = (\det\omega)\left(1+\sigma_1^2\right)\left(1+\sigma_3^2\right)\cdots\left(1+\sigma^2_{2\left[\frac{n}{2}\right]-1}\right). \tag{2.12}$$
Cũng từ (2.10), ta có $\det\sigma = 0$ nếu n lẻ và $\det\sigma = \sigma_1^2\sigma_3^2\cdots\sigma_{n-1}^2$ nếu n chẵn. Do đó
$$0 \leq \det\sigma \leq \sigma_1^2\sigma_3^2\cdots\sigma^2_{2\left[\frac{n}{2}\right]-1}. \tag{2.13}$$
Từ (2.7), (2.13) và chú ý $\det\omega > 0$, ta nhận được
$$\det\beta = (\det\omega)(\det\sigma) \geq 0. \tag{2.14}$$
Như vậy, ta thu được (i).

(ii) Từ các đánh giá (2.12)-(2.14), ta nhận được
$$\det R \geq (\det\omega)(1+\det\sigma) = \det\omega + \det\beta \geq \det\omega > 0.$$
Như vậy, ta thu được (ii).

(iii) Khi $n = 2$, $\det\sigma = \sigma_1^2$. Do đó, từ (2.12) và (2.14), ta nhận được
$$\det R = (\det\omega)(1+\sigma_1^2) = \det\omega + (\det\omega)(\det\sigma) = \det\omega + \det\beta \geq \det\omega > 0.$$
Như vậy, ta thu được (iii). Mệnh đề được chứng minh. □

Mệnh đề 2.2.3 *Giả sử $R = \omega + \beta \in D_{\delta,\mu}$ và σ là ma trận cho bởi (2.7). Khi đó ta có*

(i) $\|\sigma\| \leq \delta < 1$;

(ii) *Các giá trị riêng $\mathrm{i}\sigma_j$ của σ thỏa mãn: $|\mathrm{i}\sigma_j| = |\sigma_j| \leq \delta < 1$, $j = 1, \ldots, n$.*

Chứng minh. (i) Từ giả thiết của mệnh đề, ta dễ dàng thu được

$$\|\sigma\| = \left\|\omega^{-\frac{1}{2}}\beta\omega^{-\frac{1}{2}}\right\| \leq \left\|\omega^{-\frac{1}{2}}\right\|^2 \|\beta\| \leq \frac{\mu}{\lambda_{\min}(\omega)} \leq \frac{\delta\lambda_{\min}(\omega)}{\lambda_{\min}(\omega)} = \delta < 1.$$

(ii) Khẳng định (ii) được suy ra từ (i) và $|\sigma_j| \leq \|\sigma\|, \forall j$. Mệnh đề được chứng minh. □

Mệnh đề 2.2.4 *Giả sử* $R = \omega + \beta \in D_{\delta,\mu}$*. Khi đó ta có*

$$\frac{1}{\delta^n}\|\beta\|^n + \left(2^{[\frac{n}{2}]} - 1\right)\det\beta \leq \det\omega + \left(2^{[\frac{n}{2}]} - 1\right)\det\beta \leq \det R \leq (1+\delta^2)^{[\frac{n}{2}]}\det\omega, \quad (2.15)$$

trong đó, nếu $\delta = 0$ *thì* $\beta = 0$ *và ta quy ước* $\frac{0}{0} = 0$.

Chứng minh. Từ (2.12), ta có

$$\det R = (\det\omega)\left(1+\sigma_1^2\right)\left(1+\sigma_3^2\right)\cdots\left(1+\sigma^2_{2[\frac{n}{2}]-1}\right).$$

Từ Mệnh đề 2.2.3, ta có $|\sigma_j| \leq \delta < 1$, $j = 1, \ldots, n$ và do đó

$$\begin{aligned}(1+\delta^2)^{[\frac{n}{2}]} &\geq \left(1+\sigma_1^2\right)\left(1+\sigma_3^2\right)\cdots\left(1+\sigma^2_{2[\frac{n}{2}]-1}\right)\\ &\geq 1 + \left(2^{[\frac{n}{2}]}-1\right)\sigma_1^2\sigma_3^2\cdots\sigma^2_{2[\frac{n}{2}]-1} \geq 1 + \left(2^{[\frac{n}{2}]}-1\right)\det\sigma,\end{aligned}$$

trong đó bất đẳng thức cuối được suy ra từ (2.13). Mặt khác, vì $R = \omega + \beta \in D_{\delta,\mu}$ nên

$$\det\omega \geq (\lambda_{\min}(\omega))^n \geq \frac{1}{\delta^n}\mu^n \geq \frac{1}{\delta^n}\|\beta\|^n.$$

Từ các hệ thức trên và (2.14), ta dễ dàng suy ra kết luận của Mệnh đề 2.2.4. □

Mệnh đề 2.2.5 *Giả sử* $R = \omega + \beta \in D_{\delta,\mu}$ *và* σ *là ma trận cho bởi* (2.7)*. Khi đó ta có*

$$\begin{aligned}\frac{R^{-1} + (R^{-1})^T}{2} &= \omega^{-\frac{1}{2}}\left(E-\sigma^2\right)^{-1}\omega^{-\frac{1}{2}},\\ \frac{R^{-1} - (R^{-1})^T}{2} &= \omega^{-\frac{1}{2}}(-\sigma)\left(E-\sigma^2\right)^{-1}\omega^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned} \quad (2.16)$$

Chứng minh. Từ (2.8), ta có

$$R^{-1} = \omega^{-\frac{1}{2}}(E+\sigma)^{-1}\omega^{-\frac{1}{2}},$$

$$\left(R^{-1}\right)^T = \omega^{-\frac{1}{2}}\left((E+\sigma)^{-1}\right)^T\omega^{-\frac{1}{2}} = \omega^{-\frac{1}{2}}(E-\sigma)^{-1}\omega^{-\frac{1}{2}}.$$

Do đó

$$\begin{aligned}\frac{R^{-1} + \left(R^{-1}\right)^T}{2} &= \omega^{-\frac{1}{2}}\frac{(E+\sigma)^{-1} + (E-\sigma)^{-1}}{2}\omega^{-\frac{1}{2}},\\ \frac{R^{-1} - \left(R^{-1}\right)^T}{2} &= \omega^{-\frac{1}{2}}\frac{(E+\sigma)^{-1} - (E-\sigma)^{-1}}{2}\omega^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned} \quad (2.17)$$

Mặt khác, từ $E - \sigma^2 = (E-\sigma)(E+\sigma)$, ta có

$$\frac{(E+\sigma)^{-1} + (E-\sigma)^{-1}}{2}\left(E-\sigma^2\right) = \frac{(E-\sigma)+(E+\sigma)}{2} = E,$$
$$\frac{(E+\sigma)^{-1} - (E-\sigma)^{-1}}{2}\left(E-\sigma^2\right) = \frac{(E-\sigma)-(E+\sigma)}{2} = -\sigma,$$

suy ra

$$\frac{(E+\sigma)^{-1} + (E-\sigma)^{-1}}{2} = \left(E-\sigma^2\right)^{-1}, \quad \frac{(E+\sigma)^{-1} - (E-\sigma)^{-1}}{2} = (-\sigma)\left(E-\sigma^2\right)^{-1}.$$

Từ hệ thức này và (2.17), ta suy ra (2.16). Mệnh đề được chứng minh. □

Hệ quả 2.2.6 *Giả sử $R = \omega + \beta \in D_{\delta,\mu}$ và σ là ma trận cho bởi (2.7). Giả sử σ được chéo hóa bởi ma trận unita $C_1 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ như trong (2.11), $\sigma = C_1 D_1 C_1^*$, trong đó D_1 là ma trận đường chéo cho bởi (2.9). Khi đó ta có*

$$\begin{aligned}\frac{R^{-1} + \left(R^{-1}\right)^T}{2} &= \omega^{-\frac{1}{2}} C_1 D_2 C_1^* \omega^{-\frac{1}{2}},\\ \frac{R^{-1} - \left(R^{-1}\right)^T}{2} &= \omega^{-\frac{1}{2}} C_1 D_3 C_1^* \omega^{-\frac{1}{2}},\end{aligned} \tag{2.18}$$

trong đó

$$\begin{aligned} D_2 &= \left(E - D_1^2\right)^{-1} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{1+\sigma_1^2}, \dots, \frac{1}{1+\sigma_n^2}\right),\\ D_3 &= (-D_1)\left(E - D_1^2\right)^{-1} = \operatorname{diag}\left(\frac{-\mathrm{i}\sigma_1}{1+\sigma_1^2}, \dots, \frac{-\mathrm{i}\sigma_n}{1+\sigma_n^2}\right).\end{aligned} \tag{2.19}$$

Chứng minh. Hệ quả dễ dàng được suy ra từ (2.9), (2.11) và (2.16). □

Hệ quả 2.2.7 *Giả sử $R = \omega + \beta \in D_{\delta,\mu}$. Khi đó ta có*

$$\frac{1}{1+\delta^2}\,\omega^{-1} \le \frac{R^{-1} + \left(R^{-1}\right)^T}{2} \le \omega^{-1}, \tag{2.20}$$

$$\frac{1}{1+\delta^2}\,\omega^{jj} \le R^{jj} \le \omega^{jj}, \ j = 1, \dots, n. \tag{2.21}$$

Chứng minh. Giả sử $\xi \in \mathbb{R}^n$ tùy ý. Khi đó từ Mệnh đề 2.2.3 và Hệ quả 2.2.6, ta có

$$\begin{aligned}\left(\frac{R^{-1} + \left(R^{-1}\right)^T}{2}\xi, \xi\right) &= \left(\omega^{-\frac{1}{2}} C_1 D_2 C_1^* \omega^{-\frac{1}{2}}\xi, \xi\right) = \left(D_2 C_1^* \omega^{-\frac{1}{2}}\xi, \left(\omega^{-\frac{1}{2}} C_1\right)^* \xi\right)\\ &= \left(D_2 C_1^* \omega^{-\frac{1}{2}}\xi, C_1^* \omega^{-\frac{1}{2}}\xi\right) = \sum_{j=1}^n (D_2)_{jj}\left|\left(C_1^*\omega^{-\frac{1}{2}}\xi\right)_j\right|^2,\end{aligned}$$

trong đó $\dfrac{1}{1+\delta^2} \le (D_2)_{jj} \le 1, \ j = 1, \dots, n$. Mặt khác, ta có

$$\sum_{j=1}^n \left|\left(C_1^*\omega^{-\frac{1}{2}}\xi\right)_j\right|^2 = \left|C_1^*\omega^{-\frac{1}{2}}\xi\right|^2 = \left|\omega^{-\frac{1}{2}}\xi\right|^2 = \left(\omega^{-\frac{1}{2}}\xi, \omega^{-\frac{1}{2}}\xi\right) = \left(\omega^{-1}\xi, \xi\right).$$

Từ các hệ thức trên ta suy ra

$$\frac{1}{1+\delta^2}\left(\omega^{-1}\xi,\xi\right) \le \left(\frac{R^{-1}+\left(R^{-1}\right)^T}{2}\xi,\xi\right) \le \left(\omega^{-1}\xi,\xi\right),\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Do đó ta thu được (2.20). Từ (2.20), ta dễ dàng suy ra (2.21). Hệ quả được chứng minh. □

2.2.2 Vi phân cấp hai của hàm số kiểu Monge-Ampère không đối xứng

Trước tiên, luận án phát biểu mệnh đề dưới đây, trong đó chỉ ra rằng các công thức trong (2.2) vẫn còn đúng cho trường hợp khi ma trận R là không đối xứng.

Mệnh đề 2.2.8 *Xét hàm số* $F(R) = \log(\det R)$*, trong đó* $R = [R_{ij}]_{n\times n}$ *nói chung là không đối xứng và thỏa mãn* $\det R > 0$*. Khi đó với* $R^{-1} = [R^{ij}]_{n\times n}$ *và* $i,j,k,\ell = 1,\dots,n$*, ta có*

$$F^{ij} := \frac{\partial F(R)}{\partial R_{ij}} = R^{ji}, \tag{2.22}$$

$$F^{ij,k\ell} := \frac{\partial^2 F(R)}{\partial R_{ij}\partial R_{k\ell}} = -R^{\ell i}R^{jk}. \tag{2.23}$$

Chứng minh. Ký hiệu $U = [U_{ij}]$ là ma trận phụ hợp của R, tức là, $U^T = (\det R)R^{-1}$. Bằng cách khai triển định thức $\det R$ theo hàng i, ta có

$$\det R = R_{i1}U_{i1} + \cdots + R_{in}U_{in}, \quad i = 1,\dots,n.$$

Từ đây suy ra $\dfrac{\partial F(R)}{\partial R_{ij}} = \dfrac{1}{\det R}\dfrac{\partial(\det R)}{\partial R_{ij}} = \dfrac{1}{\det R}U_{ij} = R^{ji}, \quad i,j = 1,\dots,n$. Do đó (2.22) được chứng minh. Từ (2.22), ta có

$$\sum_{p=1}^n R_{sp}F^{ip} = \sum_{p=1}^n R_{sp}R^{pi} = \delta_{is}, \quad i,s = 1,\dots,n.$$

Lấy đạo hàm hai vế của phương trình trên theo biến $R_{k\ell}$, ta suy ra

$$\sum_{p=1}^n \frac{\partial R_{sp}}{\partial R_{k\ell}}F^{ip} + \sum_{p=1}^n R_{sp}F^{ip,k\ell} = 0,$$

và vì thế

$$\delta_{sk}F^{i\ell} + \sum_{p=1}^n R_{sp}F^{ip,k\ell} = 0, \quad i,s,k,\ell = 1,\dots,n.$$

Nhân hai vế của phương trình trên với R^{js} rồi lấy tổng trên tập chỉ số s, ta thu được

$$\sum_{s=1}^n \delta_{sk}F^{i\ell}R^{js} + \sum_{p,s=1}^n R^{js}R_{sp}F^{ip,k\ell} = 0,$$

hay

$$R^{\ell i}R^{jk} + F^{ij,k\ell} = 0, \quad i,j,k,\ell = 1,\dots,n.$$

Từ đây suy ra (2.23). Mệnh đề được chứng minh. □

Tiếp theo, ta nghiên cứu vi phân cấp hai của hàm số $F(R)$ cho bởi (2.5), trong đó $R \in D_{\delta,\mu}$, $D_{\delta,\mu}$ là tập hợp cho bởi (2.6). Xét hàm số $\mathcal{F}$ được xác định như sau

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}(R, M) : D_{\delta,\mu} \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}, \\ &\mathcal{F}(R, M) = \sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial R_{ij} \partial R_{k\ell}} M_{ij} M_{k\ell} = -\sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} R^{\ell i} R^{jk} M_{ij} M_{k\ell}, \end{aligned} \tag{2.24}$$

trong đó $R = [R_{ij}]_{n\times n} \in D_{\delta,\mu}$, $M = [M_{ij}]_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Mệnh đề 2.2.9 *Giả sử $R \in D_{\delta,\mu}$. Khi đó với mọi ma trận $M = P + Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ta có*

$$\mathcal{F}(R, M) = \mathcal{F}(R, P) + \mathcal{F}(R, Q) + 2\mathcal{L}(R, P, Q), \tag{2.25}$$

trong đó

$$\mathcal{L}(R, P, Q) = -\sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} R^{\ell i} R^{jk} P_{ij} Q_{k\ell}. \tag{2.26}$$

Chứng minh. Từ (2.24), ta có

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(R, M) = &-\sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} R^{\ell i} R^{jk} P_{ij} P_{k\ell} - \sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} R^{\ell i} R^{jk} Q_{ij} Q_{k\ell} \\ &-\sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} R^{\ell i} R^{jk} P_{ij} Q_{k\ell} - \sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} R^{\ell i} R^{jk} P_{k\ell} Q_{ij}. \end{aligned}$$

Nhận thấy,

$$\sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} R^{\ell i} R^{jk} P_{k\ell} Q_{ij} \overset{\substack{\ell\leftrightarrow j \\ i\leftrightarrow k}}{=} \sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} R^{jk} R^{\ell i} P_{ij} Q_{k\ell}.$$

Từ các hệ thức trên ta thu được kết luận của Mệnh đề 2.2.9. Mệnh đề được chứng minh. □

Mệnh đề 2.2.10 *Giả sử $R \in D_{\delta,\mu}$. Khi đó với mọi ma trận đối xứng $P = [P_{ij}]_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ta có*

$$\mathcal{F}(R, P) = -[\mathcal{G}(R, P)]^2 + \mathcal{H}(R, P), \tag{2.27}$$

trong đó

$$\mathcal{G}(R, P) = \operatorname{Tr}\big(R^{-1}P\big), \quad \mathcal{H}(R, P) = 2\operatorname{Tr}\Big[\big(R^{-1}\big)^{(2)} P^{(2)}\Big], \tag{2.28}$$

với $\big(R^{-1}\big)^{(2)}$ và $P^{(2)}$ lần lượt là ma trận compound bậc hai của R^{-1} và P, được xác định bởi (1.5).

Chứng minh. Từ (2.24) và $P^T = P$, ta có

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(R, P) &= -\sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} R^{\ell i} R^{jk} P_{ij} P_{k\ell} = -\sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} R^{\ell i} R^{jk} P_{ji} P_{\ell k} \\ &\overset{\substack{i\leftrightarrow \ell \\ j\leftrightarrow k}}{=} -\sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} R^{i\ell} R^{kj} P_{k\ell} P_{ij} \overset{j\leftrightarrow \ell}{=} -\sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} R^{ij} R^{k\ell} P_{kj} P_{i\ell}. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Từ (2.29), ta có

$$\mathcal{F}(R,P) = -\frac{1}{2}\left(\sum_{i,j=1}^{n} R^{ij}P_{ij}\right)\left(\sum_{k,\ell=1}^{n} R^{k\ell}P_{k\ell}\right) - \frac{1}{2}\left(\sum_{i,\ell=1}^{n} R^{i\ell}P_{i\ell}\right)\left(\sum_{j,k=1}^{n} R^{kj}P_{kj}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i,j=1}^{n} R^{ij}P_{ij}\right)\left(\sum_{k,\ell=1}^{n} R^{k\ell}P_{k\ell}\right)+\left(\sum_{i,\ell=1}^{n} R^{i\ell}P_{i\ell}\right)\left(\sum_{j,k=1}^{n} R^{kj}P_{kj}\right)\right.$$

$$\left. - \sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} R^{i\ell}R^{kj}P_{k\ell}P_{ij} - \sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} R^{ij}R^{k\ell}P_{kj}P_{i\ell}\right]$$

$$= -\left(\sum_{i,j=1}^{n} R^{ij}P_{ij}\right)^2 + 2\sum_{\substack{i<k\\ j<\ell}}\left(R^{ij}R^{k\ell} - R^{i\ell}R^{kj}\right)(P_{ij}P_{k\ell} - P_{i\ell}P_{kj})$$

$$= -\left(\sum_{i,j=1}^{n} R^{ij}P_{ij}\right)^2 + 2\sum_{\substack{i<k\\ j<\ell}}\left(\left(R^{-1}\right)^{(2)}_{ik,j\ell}P^{(2)}_{j\ell,ik}\right) = -\left[\mathrm{Tr}\left(R^{-1}P\right)\right]^2 + 2\,\mathrm{Tr}\left[\left(R^{-1}\right)^{(2)}P^{(2)}\right].$$

Mệnh đề được chứng minh. □

Mệnh đề 2.2.11 *Giả sử $R \in D_{\delta,\mu}$. Khi đó với mọi ma trận phản đối xứng $Q = [Q_{ij}]_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ta có*

$$\mathcal{F}(R,Q) = -\left[\mathcal{G}(R,Q)\right]^2 + \mathcal{H}(R,Q), \tag{2.30}$$

trong đó các hàm $\mathcal{G}(R,Q)$ và $\mathcal{H}(R,Q)$ được xác định bởi (2.28).

Chứng minh. Tương tự như cho Mệnh đề 2.2.10, trong đó các đẳng thức tương ứng được thỏa mãn do Q là phản đối xứng. □

Mệnh đề 2.2.12 *Giả sử $R \in D_{\delta,\mu}$. Khi đó với mọi ma trận đối xứng $P = [P_{ij}]_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ và ma trận phản đối xứng $Q = [Q_{ij}]_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ta có*

$$\mathcal{L}(R,P,Q) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left[\left(R^{-1} - (R^{-1})^T\right)P\left(R^{-1} + (R^{-1})^T\right)Q\right], \tag{2.31}$$

trong đó hàm $\mathcal{L}(R,P,Q)$ được xác định bởi (2.26).

Chứng minh. Từ (2.26), ta có

$$\mathcal{L}(R,P,Q) = -\sum_{i,j,k,\ell} R^{\ell i}R^{jk}P_{ij}Q_{k\ell} \overset{\substack{i\leftrightarrow j\\ k\leftrightarrow \ell}}{=} -\sum_{i,j,k,\ell} R^{kj}R^{i\ell}P_{ji}Q_{\ell k}.$$

Từ đây và chú ý $P^T = P, Q^T = -Q$, ta suy ra

$$\mathcal{L}(R,P,Q) = -\frac{1}{2}\sum_{i,j,k,\ell} R^{\ell i}R^{jk}P_{ij}Q_{k\ell} - \frac{1}{2}\sum_{i,j,k,\ell} R^{kj}R^{i\ell}P_{ji}Q_{\ell k}$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left[(R^{-1})^T P (R^{-1})^T Q\right] - \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left[R^{-1}PR^{-1}Q\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left[\left(R^{-1} - (R^{-1})^T\right)P(R^{-1})^T Q\right] - \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left[\left(R^{-1} - (R^{-1})^T\right)PR^{-1}Q\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left[\left(R^{-1} - (R^{-1})^T\right)P\left((R^{-1})^T + R^{-1}\right)Q\right],$$

trong đó ở đẳng thức thứ ba ta đã sử dụng hệ thức sau

$$\mathrm{Tr}\left[R^{-1}P(R^{-1})^TQ\right] = \mathrm{Tr}\left[(R^{-1})^TPR^{-1}Q\right] = 0,$$

ở đây hệ thức này đúng nhờ vào tính phản đối xứng của Q và tính đối xứng của các ma trận $R^{-1}P(R^{-1})^T$, $(R^{-1})^TPR^{-1}$. Mệnh đề được chứng minh. □

Bây giờ, với $R = \omega + \beta \in D_{\delta,\mu}$ cố định và với $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ta đặt

$$\tilde{M} \equiv \omega^{-\frac{1}{2}}M\omega^{-\frac{1}{2}} = \left[\tilde{M}_{jk}\right]_{n\times n}, \quad \tilde{\tilde{M}} \equiv C_1^*\tilde{M}C_1 = \left[\tilde{\tilde{M}}_{jk}\right]_{n\times n}, \tag{2.32}$$

trong đó $C_1 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ là ma trận unita thỏa mãn (2.11). Dễ thấy,

$$|\tilde{M}| = |\tilde{\tilde{M}}|, \quad \|\tilde{M}\| = \left\|\tilde{\tilde{M}}\right\|. \tag{2.33}$$

Mệnh đề 2.2.13 *Với mọi ma trận $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ta có đánh giá*

$$\left(\lambda_{\max}(\omega)\right)^{-2}|M|^2 \le \left|\tilde{M}\right|^2 \le \left(\lambda_{\min}(\omega)\right)^{-2}|M|^2. \tag{2.34}$$

Chứng minh. Ký hiệu $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ là các giá trị riêng của ma trận ω, trong đó $\lambda_1 \ge \cdots \ge \lambda_n > 0$. Ta chéo hóa ω bởi một ma trận trực giao C, nghĩa là

$$\omega = CDC^{-1},$$

trong đó $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Khi đó

$$\omega^{-\frac{1}{2}} = CD^{-\frac{1}{2}}C^{-1}, \quad D^{-\frac{1}{2}} = \mathrm{diag}\left(\lambda_1^{-\frac{1}{2}}, \ldots, \lambda_n^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Do đó từ Mệnh đề 1.1.4, ta có

$$\left|\tilde{M}\right|^2 = \left|\omega^{-\frac{1}{2}}M\omega^{-\frac{1}{2}}\right|^2 = \left|D^{-\frac{1}{2}}\left(C^{-1}MC\right)D^{-\frac{1}{2}}\right|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i^{-1}\lambda_j^{-1}\left(\left(C^{-1}MC\right)_{ij}\right)^2.$$

Từ hệ thức trên và chú ý $0 < \lambda_1^{-1} \le \lambda_i^{-1} \le \lambda_n^{-1}$ với $i = 1, \ldots, n$, ta suy ra

$$\lambda_1^{-2}|M|^2 = \lambda_1^{-2}\sum_{i,j=1}^{n}\left(\left(C^{-1}MC\right)_{ij}\right)^2 \le \left|\tilde{M}\right|^2 \le \lambda_n^{-2}\sum_{i,j=1}^{n}\left(\left(C^{-1}MC\right)_{ij}\right)^2 = \lambda_n^{-2}|M|^2.$$

Do đó ta nhận được (2.34). Mệnh đề được chứng minh. □

Để tính toán các dạng toàn phương $\mathcal{F}(R, P)$ và $\mathcal{F}(R, Q)$, kỹ thuật chéo hóa ma trận đã được áp dụng trong các Mệnh đề 2.2.14 và 2.2.16 dưới đây.

Mệnh đề 2.2.14 *Giả sử $R = \omega + \beta \in D_{\delta,\mu}$. Khi đó với mọi ma trận đối xứng $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ta có*

$$\mathcal{F}(R, P) = -\sum_{j,k=1}^{n} \frac{1 - \sigma_j\sigma_k}{\left(1 + \sigma_j^2\right)\left(1 + \sigma_k^2\right)}\left|\tilde{\tilde{P}}_{jk}\right|^2, \tag{2.35}$$

trong đó $\mathcal{F}(R, P)$ được xác định bởi (2.27) và $\mathrm{i}\sigma_j$ ($\sigma_j \in \mathbb{R}$), $j = 1, \ldots, n$ là các giá trị riêng thuần ảo của ma trận phản đối xứng σ cho bởi (2.7).

Chứng minh. Vì P đối xứng nên từ Mệnh đề 1.1.11, ta suy ra $P^{(2)}$ đối xứng. Do đó từ (1.6), (2.27) và (2.28), ta có

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(R,P) &= -\left[\mathcal{G}(R,P)\right]^2 + \mathcal{H}(R,P) = -\left[\mathcal{G}(R,P)\right]^2 + 2\operatorname{Tr}\left[\left(R^{-1}\right)^{(2)} P^{(2)}\right] \\ &= -\left[\mathcal{G}(R,P)\right]^2 + 2\operatorname{Tr}\left[\frac{\left(R^{-1}\right)^{(2)} + \left(\left(R^{-1}\right)^T\right)^{(2)}}{2} P^{(2)}\right] = -\left[\mathcal{G}(R,P)\right]^2 \\ &+ 2\operatorname{Tr}\left[\left(\frac{R^{-1} + \left(R^{-1}\right)^T}{2}\right)^{(2)} P^{(2)}\right] + 2\operatorname{Tr}\left[\left(\frac{R^{-1} - \left(R^{-1}\right)^T}{2}\right)^{(2)} P^{(2)}\right].\end{aligned} \tag{2.36}$$

Từ (2.18) và (2.19), ta có

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(R,P) &= \operatorname{Tr}\left(\frac{R^{-1} + \left(R^{-1}\right)^T}{2} P\right) = \operatorname{Tr}\left(\omega^{-\frac{1}{2}} C_1 D_2 C_1^* \omega^{-\frac{1}{2}} P\right) \\ &= \operatorname{Tr}\left(D_2 C_1^* \omega^{-\frac{1}{2}} P \omega^{-\frac{1}{2}} C_1\right) = \operatorname{Tr}\left(D_2 \tilde{\tilde{P}}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\tilde{\tilde{P}}_{jj}}{1+\sigma_j^2}.\end{aligned} \tag{2.37}$$

Vì P đối xứng nên $\tilde{\tilde{P}}$ là ma trận Hermite và vì thế $\tilde{\tilde{P}}_{jk}\tilde{\tilde{P}}_{kj} = \left|\tilde{\tilde{P}}_{jk}\right|^2$, $j,k = 1,\ldots,n$. Do đó từ Mệnh đề 1.1.11, (2.18) và (2.19), ta có

$$\begin{aligned}&2\operatorname{Tr}\left[\left(\frac{R^{-1} + \left(R^{-1}\right)^T}{2}\right)^{(2)} P^{(2)}\right] = 2\operatorname{Tr}\left[\left(\omega^{-\frac{1}{2}} C_1 D_2 C_1^* \omega^{-\frac{1}{2}}\right)^{(2)} P^{(2)}\right] \\ &= 2\operatorname{Tr}\left[D_2^{(2)} \left(C_1^*\right)^{(2)} \left(\omega^{-\frac{1}{2}}\right)^{(2)} P^{(2)} \left(\omega^{-\frac{1}{2}}\right)^{(2)} C_1^{(2)}\right] \\ &= 2\operatorname{Tr}\left[D_2^{(2)} \tilde{\tilde{P}}^{(2)}\right] = 2\sum_{j<k} \left(D_2^{(2)}\right)_{jk,jk} \tilde{\tilde{P}}^{(2)}_{jk,jk} \\ &= 2\sum_{j<k} \frac{\tilde{\tilde{P}}_{jj}\tilde{\tilde{P}}_{kk} - \left|\tilde{\tilde{P}}_{jk}\right|^2}{\left(1+\sigma_j^2\right)\left(1+\sigma_k^2\right)} = \sum_{j\neq k} \frac{\tilde{\tilde{P}}_{jj}\tilde{\tilde{P}}_{kk}}{\left(1+\sigma_j^2\right)\left(1+\sigma_k^2\right)} - \sum_{j\neq k} \frac{\left|\tilde{\tilde{P}}_{jk}\right|^2}{\left(1+\sigma_j^2\right)\left(1+\sigma_k^2\right)} \\ &= \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\tilde{\tilde{P}}_{jj}\tilde{\tilde{P}}_{kk}}{\left(1+\sigma_j^2\right)\left(1+\sigma_k^2\right)} - \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\left|\tilde{\tilde{P}}_{jk}\right|^2}{\left(1+\sigma_j^2\right)\left(1+\sigma_k^2\right)} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\tilde{\tilde{P}}_{jj}}{1+\sigma_j^2}\right)^2 - \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\left|\tilde{\tilde{P}}_{jk}\right|^2}{\left(1+\sigma_j^2\right)\left(1+\sigma_k^2\right)}.\end{aligned} \tag{2.38}$$

Bằng cách kết hợp (2.37) và (2.38), ta nhận được

$$2\operatorname{Tr}\left[\left(\frac{R^{-1} + \left(R^{-1}\right)^T}{2}\right)^{(2)} P^{(2)}\right] = \left[\mathcal{G}(R,P)\right]^2 - \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\left|\tilde{\tilde{P}}_{jk}\right|^2}{\left(1+\sigma_j^2\right)\left(1+\sigma_k^2\right)}. \tag{2.39}$$

Từ Mệnh đề 1.1.11, (2.18) và (2.19), ta nhận được

$$\begin{aligned}
&2\,\mathrm{Tr}\left[\left(\frac{R^{-1}-\left(R^{-1}\right)^T}{2}\right)^{(2)} P^{(2)}\right] = 2\,\mathrm{Tr}\left[\left(\omega^{-\frac{1}{2}}C_1D_3C_1^*\omega^{-\frac{1}{2}}\right)^{(2)} P^{(2)}\right]\\
&= 2\,\mathrm{Tr}\left[D_3^{(2)}\tilde{\tilde{P}}^{(2)}\right] = 2\sum_{j<k}\left(D_3^{(2)}\right)_{jk,jk}\tilde{\tilde{P}}^{(2)}_{jk,jk}\\
&= 2\sum_{j<k}\frac{-\sigma_j\sigma_k}{\left(1+\sigma_j^2\right)\left(1+\sigma_k^2\right)}\left(\tilde{\tilde{P}}_{jj}\tilde{\tilde{P}}_{kk}-\left|\tilde{\tilde{P}}_{jk}\right|^2\right)\\
&= -\sum_{j\neq k}\frac{\sigma_j\sigma_k}{\left(1+\sigma_j^2\right)\left(1+\sigma_k^2\right)}\tilde{\tilde{P}}_{jj}\tilde{\tilde{P}}_{kk}+\sum_{j\neq k}\frac{\sigma_j\sigma_k}{\left(1+\sigma_j^2\right)\left(1+\sigma_k^2\right)}\left|\tilde{\tilde{P}}_{jk}\right|^2.
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Dễ thấy, $\mathrm{Tr}\left(\frac{R^{-1}-\left(R^{-1}\right)^T}{2}P\right)=0$. Do đó từ (2.18), (2.19) và (2.32), ta có

$$\mathrm{Tr}\left(\omega^{-\frac{1}{2}}C_1D_3C_1^*\omega^{-\frac{1}{2}}P\right)=\mathrm{Tr}\left(D_3\tilde{\tilde{P}}\right)=\sum_{j=1}^n\frac{-\mathrm{i}\sigma_j}{1+\sigma_j^2}\tilde{\tilde{P}}_{jj}=0,$$

và vì thế

$$\left(\sum_{j=1}^n\frac{\sigma_j}{1+\sigma_j^2}\tilde{\tilde{P}}_{jj}\right)^2=0.$$

Từ đó suy ra

$$\sum_{j=1}^n\frac{\sigma_j^2}{\left(1+\sigma_j^2\right)^2}\left(\tilde{\tilde{P}}_{jj}\right)^2=-\sum_{j\neq k}\frac{\sigma_j\sigma_k}{\left(1+\sigma_j^2\right)\left(1+\sigma_k^2\right)}\tilde{\tilde{P}}_{jj}\tilde{\tilde{P}}_{kk}.$$

Kết hợp hệ thức này với (2.40) cho ta

$$2\,\mathrm{Tr}\left[\left(\frac{R^{-1}-\left(R^{-1}\right)^T}{2}\right)^{(2)} P^{(2)}\right]=\sum_{j,k=1}^n\frac{\sigma_j\sigma_k}{\left(1+\sigma_j^2\right)\left(1+\sigma_k^2\right)}\left|\tilde{\tilde{P}}_{jk}\right|^2. \tag{2.41}$$

Hệ thức (2.35) được suy ra từ (2.36), (2.39) và (2.41). Mệnh đề được chứng minh. □

Hệ quả 2.2.15 *Giả sử $R=\omega+\beta\in D_{\delta,\mu}$. Khi đó với mọi ma trận đối xứng $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$, ta có*

$$\mathcal{F}(R,P)\le-\frac{1-\delta^2}{\left(1+\delta^2\right)^2}\left|\tilde{P}\right|^2\le-\frac{1-\delta^2}{\left(1+\delta^2\right)^2}\left(\lambda_{\max}(\omega)\right)^{-2}|P|^2. \tag{2.42}$$

Chứng minh. Từ Mệnh đề 2.2.3, (2.33) và (2.35), ta có

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(R,P)&=-\sum_{j,k=1}^n\frac{1-\sigma_j\sigma_k}{\left(1+\sigma_j^2\right)\left(1+\sigma_k^2\right)}\left|\tilde{\tilde{P}}_{jk}\right|^2\le-\sum_{j,k=1}^n\frac{1-|\sigma_j|\,|\sigma_k|}{\left(1+\sigma_j^2\right)\left(1+\sigma_k^2\right)}\left|\tilde{\tilde{P}}_{jk}\right|^2\\
&\le-\frac{1-\delta^2}{\left(1+\delta^2\right)^2}\sum_{j,k=1}^n\left|\tilde{\tilde{P}}_{jk}\right|^2=-\frac{1-\delta^2}{\left(1+\delta^2\right)^2}\left|\tilde{\tilde{P}}\right|^2=-\frac{1-\delta^2}{\left(1+\delta^2\right)^2}\left|\tilde{P}\right|^2.
\end{aligned}$$

Do đó ta thu được bất đẳng thức thứ nhất trong (2.42). Bất đẳng thức thứ hai trong (2.42) được suy ra từ Mệnh đề 2.2.13. Hệ quả được chứng minh. □

Mệnh đề 2.2.16 *Giả sử $R = \omega + \beta \in D_{\delta,\mu}$. Khi đó với mọi ma trận phản đối xứng $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ta có*

$$\mathcal{F}(R,Q) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{1-\sigma_j\sigma_k}{\left(1+\sigma_j^2\right)\left(1+\sigma_k^2\right)} \left|\tilde{\tilde{Q}}_{jk}\right|^2. \tag{2.43}$$

Chứng minh. Vì Q là phản đối xứng nên theo Mệnh đề 1.1.11, ta suy ra $Q^{(2)}$ là đối xứng. Bằng các lập luận tương tự như trong (2.36), từ (2.30) ta có

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(R,Q) &= -\left[\mathcal{G}(R,Q)\right]^2 + \mathcal{H}(R,Q) = -\left[\mathcal{G}(R,Q)\right]^2 \\ &+ 2\,\mathrm{Tr}\left[\left(\frac{R^{-1}+\left(R^{-1}\right)^T}{2}\right)^{(2)} Q^{(2)}\right] + 2\,\mathrm{Tr}\left[\left(\frac{R^{-1}-\left(R^{-1}\right)^T}{2}\right)^{(2)} Q^{(2)}\right].\end{aligned} \tag{2.44}$$

Mặt khác, từ (2.18) và (2.19) ta có

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(R,Q) &= \mathrm{Tr}\left(\frac{R^{-1}-\left(R^{-1}\right)^T}{2}Q\right) = \mathrm{Tr}\left(\omega^{-\frac{1}{2}}C_1D_3C_1^*\omega^{-\frac{1}{2}}Q\right) \\ &= \mathrm{Tr}\left(D_3C_1^*\omega^{-\frac{1}{2}}Q\omega^{-\frac{1}{2}}C_1\right) = \mathrm{Tr}\left(D_3\tilde{\tilde{Q}}\right) = \sum_{j=1}^{n}\frac{-\mathrm{i}\sigma_j}{1+\sigma_j^2}\tilde{\tilde{Q}}_{jj}.\end{aligned}$$

Suy ra

$$\left[\mathcal{G}(R,Q)\right]^2 = \sum_{j,k=1}^{n}\frac{-\sigma_j\sigma_k}{\left(1+\sigma_j^2\right)\left(1+\sigma_k^2\right)}\tilde{\tilde{Q}}_{jj}\tilde{\tilde{Q}}_{kk}. \tag{2.45}$$

Vì Q là phản đối xứng nên $\tilde{\tilde{Q}}$ là phản Hermite và vì thế $\tilde{\tilde{Q}}_{jk}\tilde{\tilde{Q}}_{kj} = -\left|\tilde{\tilde{Q}}_{jk}\right|^2$, $j,k = 1,\dots,n$. Do đó từ Mệnh đề 1.1.11, (2.18) và (2.19), ta có

$$\begin{aligned}2\,\mathrm{Tr}\left[\left(\frac{R^{-1}-\left(R^{-1}\right)^T}{2}\right)^{(2)} Q^{(2)}\right] &= 2\,\mathrm{Tr}\left[\left(\omega^{-\frac{1}{2}}C_1D_3C_1^*\omega^{-\frac{1}{2}}\right)^{(2)}Q^{(2)}\right] \\ &= 2\,\mathrm{Tr}\left[D_3^{(2)}\tilde{\tilde{Q}}^{(2)}\right] = 2\sum_{j<k}\left(D_3^{(2)}\right)_{jk,jk}\tilde{\tilde{Q}}^{(2)}_{jk,jk} \\ &= 2\sum_{j<k}\frac{-\sigma_j\sigma_k}{\left(1+\sigma_j^2\right)\left(1+\sigma_k^2\right)}\left(\tilde{\tilde{Q}}_{jj}\tilde{\tilde{Q}}_{kk}+\left|\tilde{\tilde{Q}}_{jk}\right|^2\right) \\ &= \sum_{j\neq k}\frac{-\sigma_j\sigma_k}{\left(1+\sigma_j^2\right)\left(1+\sigma_k^2\right)}\tilde{\tilde{Q}}_{jj}\tilde{\tilde{Q}}_{kk} + \sum_{j\neq k}\frac{-\sigma_j\sigma_k}{\left(1+\sigma_j^2\right)\left(1+\sigma_k^2\right)}\left|\tilde{\tilde{Q}}_{jk}\right|^2 \\ &= \sum_{j,k=1}^{n}\frac{-\sigma_j\sigma_k}{\left(1+\sigma_j^2\right)\left(1+\sigma_k^2\right)}\tilde{\tilde{Q}}_{jj}\tilde{\tilde{Q}}_{kk} + \sum_{j,k=1}^{n}\frac{-\sigma_j\sigma_k}{\left(1+\sigma_j^2\right)\left(1+\sigma_k^2\right)}\left|\tilde{\tilde{Q}}_{jk}\right|^2.\end{aligned} \tag{2.46}$$

Bằng cách kết hợp (2.45) và (2.46), ta nhận được

$$2\,\mathrm{Tr}\left[\left(\frac{R^{-1}-\left(R^{-1}\right)^T}{2}\right)^{(2)} Q^{(2)}\right] = \left[\mathcal{G}(R,Q)\right]^2 + \sum_{j,k=1}^{n}\frac{-\sigma_j\sigma_k}{\left(1+\sigma_j^2\right)\left(1+\sigma_k^2\right)}\left|\tilde{\tilde{Q}}_{jk}\right|^2. \tag{2.47}$$

Từ Mệnh đề 1.1.11, (2.18), (2.19) và chú ý $\tilde{\tilde{Q}}_{jk}\tilde{\tilde{Q}}_{kj} = -\left|\tilde{\tilde{Q}}_{jk}\right|^2$, $j, k = 1, \ldots, n$, ta có

$$
\begin{aligned}
2\,\mathrm{Tr}\left[\left(\frac{R^{-1}+\left(R^{-1}\right)^T}{2}\right)^{(2)} Q^{(2)}\right] &= 2\,\mathrm{Tr}\left[\left(\omega^{-\frac{1}{2}}C_1D_2C_1^*\omega^{-\frac{1}{2}}\right)^{(2)} Q^{(2)}\right] \\
&= 2\,\mathrm{Tr}\left[D_2^{(2)}\tilde{\tilde{Q}}^{(2)}\right] = 2\sum_{j<k}\frac{1}{\left(1+\sigma_j^2\right)\left(1+\sigma_k^2\right)}\left(\tilde{\tilde{Q}}_{jj}\tilde{\tilde{Q}}_{kk} + \left|\tilde{\tilde{Q}}_{jk}\right|^2\right) \\
&= \sum_{j\neq k}\frac{1}{\left(1+\sigma_j^2\right)\left(1+\sigma_k^2\right)}\tilde{\tilde{Q}}_{jj}\tilde{\tilde{Q}}_{kk} + \sum_{j\neq k}\frac{1}{\left(1+\sigma_j^2\right)\left(1+\sigma_k^2\right)}\left|\tilde{\tilde{Q}}_{jk}\right|^2 \qquad (2.48) \\
&= \sum_{j,k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\sigma_j^2\right)\left(1+\sigma_k^2\right)}\tilde{\tilde{Q}}_{jj}\tilde{\tilde{Q}}_{kk} + \sum_{j,k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\sigma_j^2\right)\left(1+\sigma_k^2\right)}\left|\tilde{\tilde{Q}}_{jk}\right|^2 \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\tilde{\tilde{Q}}_{jj}}{1+\sigma_j^2}\right)^2 + \sum_{j,k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\sigma_j^2\right)\left(1+\sigma_k^2\right)}\left|\tilde{\tilde{Q}}_{jk}\right|^2.
\end{aligned}
$$

Dễ thấy, $\mathrm{Tr}\left(\frac{R^{-1}+\left(R^{-1}\right)^T}{2}Q\right) = 0$. Do đó từ (2.18) và (2.19), ta có

$$\mathrm{Tr}\left(\omega^{-\frac{1}{2}}C_1D_2C_1^*\omega^{-\frac{1}{2}}Q\right) = \mathrm{Tr}\left(D_2\tilde{\tilde{Q}}\right) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\tilde{\tilde{Q}}_{jj}}{1+\sigma_j^2} = 0.$$

Kết hợp hệ thức này với (2.48) cho ta

$$2\,\mathrm{Tr}\left[\left(\frac{R^{-1}+\left(R^{-1}\right)^T}{2}\right)^{(2)} Q^{(2)}\right] = \sum_{j,k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\sigma_j^2\right)\left(1+\sigma_k^2\right)}\left|\tilde{\tilde{Q}}_{jk}\right|^2. \qquad (2.49)$$

Hệ thức (2.43) được suy ra từ (2.44), (2.47) và (2.49). Mệnh đề được chứng minh. □

Hệ quả 2.2.17 *Giả sử $R = \omega + \beta \in D_{\delta,\mu}$. Khi đó với mọi ma trận phản đối xứng $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ta có*

$$\mathcal{F}(R, Q) \leq \left|\tilde{Q}\right|^2. \qquad (2.50)$$

Chứng minh. Dễ thấy,

$$\frac{1-\sigma_j\sigma_k}{\left(1+\sigma_j^2\right)\left(1+\sigma_k^2\right)} \leq \frac{1+|\sigma_j||\sigma_k|}{\left(1+\sigma_j^2\right)\left(1+\sigma_k^2\right)} \leq 1,\ \ j, k = 1, \ldots, n.$$

Do đó từ (2.33) và (2.43), ta suy ra

$$\mathcal{F}(R, Q) \leq \sum_{j,k=1}^{n}\left|\tilde{\tilde{Q}}_{jk}\right|^2 = \left|\tilde{\tilde{Q}}\right|^2 = \left|\tilde{Q}\right|^2.$$

Hệ quả được chứng minh. □

Mệnh đề 2.2.18 *Giả sử $R = \omega + \beta \in D_{\delta,\mu}$. Khi đó với mọi ma trận đối xứng $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ và ma trận phản đối xứng $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ta có*

$$|\mathcal{L}(R,P,Q)| \le \frac{2n\delta}{1+\delta^2}|\tilde{P}||\tilde{Q}|. \tag{2.51}$$

Chứng minh. Từ (2.16) và (2.31), ta có

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(R,P,Q) &= -2\operatorname{Tr}\left[\frac{\left(R^{-1}\right)-\left(R^{-1}\right)^T}{2}P\frac{\left(R^{-1}\right)+\left(R^{-1}\right)^T}{2}Q\right]\\
&= -2\operatorname{Tr}\left[\left(\omega^{-\frac{1}{2}}(-\sigma)\left(E-\sigma^2\right)^{-1}\omega^{-\frac{1}{2}}\right)P\left(\omega^{-\frac{1}{2}}\left(E-\sigma^2\right)^{-1}\omega^{-\frac{1}{2}}\right)Q\right]\\
&= 2\operatorname{Tr}\left[\sigma\left(E-\sigma^2\right)^{-1}\left(\omega^{-\frac{1}{2}}P\omega^{-\frac{1}{2}}\right)\left(E-\sigma^2\right)^{-1}\left(\omega^{-\frac{1}{2}}Q\omega^{-\frac{1}{2}}\right)\right]\\
&= 2\operatorname{Tr}\left[\sigma\left(E-\sigma^2\right)^{-1}\tilde{P}\left(E-\sigma^2\right)^{-1}\tilde{Q}\right].
\end{aligned}$$

Suy ra

$$|\mathcal{L}(R,P,Q)| \le 2\left|\sigma\left(E-\sigma^2\right)^{-1}\right|\left|(E-\sigma^2)^{-1}\right||\tilde{P}||\tilde{Q}|. \tag{2.52}$$

Từ Mệnh đề 2.2.3, (2.9) và (2.11), ta có

$$\left|\sigma\left(E-\sigma^2\right)^{-1}\right| = \left|D_1\left(E-D_1^2\right)^{-1}\right| = \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\sigma_j^2}{\left(1+\sigma_j^2\right)^2}\right)^{1/2} \le \frac{\sqrt{n}\,\delta}{1+\delta^2},$$

$$\left|(E-\sigma^2)^{-1}\right| = \left|\left(E-D_1^2\right)^{-1}\right| = \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\sigma_j^2\right)^2}\right)^{1/2} \le \sqrt{n}.$$

Kết hợp các đánh giá trên với (2.52), ta thu được (2.51). Mệnh đề được chứng minh. □

Để kết thúc mục này, luận án sẽ đánh giá cận trên cho vi phân cấp hai của hàm $F(R)$. Định lý sau đây là mở rộng của Mệnh đề 2.1.1 và được dùng trong Mục 3.2.3 trong việc đánh giá đạo hàm cấp hai của nghiệm δ-elliptic trong miền.

Định lý 2.2.19 *Giả sử $R = \omega + \beta \in D_{\delta,\mu}$. Khi đó với mọi ma trận $M = P + Q$, trong đó $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là đối xứng và $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là phản đối xứng, ta có*

$$\mathcal{F}(R,M) \le -(1-\eta)\frac{1-\delta^2}{\left(1+\delta^2\right)^2}\left|\tilde{P}\right|^2 + \left(1+\frac{4n^2\delta^2}{\eta\left(1-\delta^2\right)}\right)\left|\tilde{Q}\right|^2, \tag{2.53}$$

với mọi hằng số $\eta \in (0,1]$, trong đó $\tilde{P} = \omega^{-\frac{1}{2}}P\omega^{-\frac{1}{2}}, \tilde{Q} = \omega^{-\frac{1}{2}}Q\omega^{-\frac{1}{2}}$.

Chứng minh. Từ (2.25), (2.42), (2.50) và (2.51), ta có

$$\mathcal{F}(R,M) \le -\frac{1-\delta^2}{\left(1+\delta^2\right)^2}\left|\tilde{P}\right|^2 + \left|\tilde{Q}\right|^2 + \frac{4n\delta}{1+\delta^2}|\tilde{P}||\tilde{Q}|.$$

Sử dụng Bất đẳng thức Cauchy, ta có đánh giá sau với mọi hằng số dương $\eta \in (0,1]$,

$$\frac{4n\delta}{1+\delta^2}|\tilde{P}||\tilde{Q}| \le \frac{\eta\left(1-\delta^2\right)}{\left(1+\delta^2\right)^2}\left|\tilde{P}\right|^2 + \frac{4n^2\delta^2}{\eta\left(1-\delta^2\right)}\left|\tilde{Q}\right|^2.$$

Từ các đánh giá trên, ta thu được (2.53). Định lý được chứng minh. □

2.2.3 Tính d-lõm của hàm số kiểu Monge-Ampère không đối xứng

Định lý dưới đây về một dạng của tính d-lõm sẽ được sử dụng trong việc chứng minh Định lý 3.4.1.

Định lý 2.2.20 *Với mọi ma trận $R^{(0)} = \omega^{(0)} + \beta^{(0)} = \big[R_{ij}^{(0)}\big]_{n\times n}$ và $R^{(1)} = \omega^{(1)} + \beta^{(1)} = \big[R_{ij}^{(1)}\big]_{n\times n}$ thuộc tập $D_{\delta,\mu}$, ta có*

$$\begin{aligned} F\big(R^{(1)}\big)-F\big(R^{(0)}\big) \leq &\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial F\big(R^{(0)}\big)}{\partial R_{ij}}\Big(R_{ij}^{(1)} - R_{ij}^{(0)}\Big) \\ &+ \frac{1}{2}\left(1+\frac{4n^2\delta^2}{1-\delta^2}\right)\big(\lambda_{\min}\big(\omega^{(s)}\big)\big)^{-2}\big|\beta^{(1)}-\beta^{(0)}\big|^2, \end{aligned} \tag{2.54}$$

trong đó $\omega^{(s)} = (1-s)\omega^{(0)} + s\omega^{(1)}$, $s \in (0,1)$ là hằng số nào đó.

Chứng minh. Với mọi $t \in [0,1]$, ta đặt

$$g(t) := F\big((1-t)R^{(0)} + tR^{(1)}\big) = F\big(R^{(t)}\big),$$

trong đó $R^{(t)} = (1-t)R^{(0)} + tR^{(1)} = \omega^{(t)} + \beta^{(t)}$, $\omega^{(t)} = (1-t)\omega^{(0)} + t\omega^{(1)}$, $\beta^{(t)} = (1-t)\beta^{(0)} + t\beta^{(1)}$. Vì $D_{\delta,\mu}$ là tập lồi nên ta có $R^{(t)} \in D_{\delta,\mu}$.
Bằng cách sử dụng khai triển Taylor cho hàm $g(t)$ tại $t = 0$, ta nhận được

$$F\big(R^{(1)}\big) - F\big(R^{(0)}\big) = g(1) - g(0) = g'(0) + \frac{1}{2}g''(s), \tag{2.55}$$

với hằng số $s \in (0,1)$ nào đó. Bằng tính toán, ta có

$$\begin{aligned} g'(t) &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial F\big(R^{(t)}\big)}{\partial R_{ij}}\Big(R_{ij}^{(1)} - R_{ij}^{(0)}\Big), \\ g''(t) &= \sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} \frac{\partial^2 F\big(R^{(t)}\big)}{\partial R_{ij}\partial R_{k\ell}}\Big(R_{ij}^{(1)} - R_{ij}^{(0)}\Big)\Big(R_{k\ell}^{(1)} - R_{k\ell}^{(0)}\Big) = \mathcal{F}\big(R^{(t)}, R^{(1)} - R^{(0)}\big), \end{aligned}$$

trong đó hàm $\mathcal{F}$ được cho bởi (2.24). Do đó

$$g'(0) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial F\big(R^{(0)}\big)}{\partial R_{ij}}\Big(R_{ij}^{(1)} - R_{ij}^{(0)}\Big). \tag{2.56}$$

Hơn nữa, bằng cách áp dụng Định lý 2.2.19 với $R = R^{(s)} = \omega^{(s)} + \beta^{(s)}$, $M = R^{(1)} - R^{(0)} = \big(\omega^{(1)} - \omega^{(0)}\big) + \big(\beta^{(1)} - \beta^{(0)}\big) \equiv P + Q$ và $\eta = 1$, ta thu được

$$\begin{aligned} g''(s) = \mathcal{F}\big(R^{(s)}, R^{(1)} - R^{(0)}\big) &\leq \left(1+\frac{4n^2\delta^2}{1-\delta^2}\right)\Big|\big(\omega^{(s)}\big)^{-\frac{1}{2}}\big(\beta^{(1)}-\beta^{(0)}\big)\big(\omega^{(s)}\big)^{-\frac{1}{2}}\Big|^2 \\ &\leq \left(1+\frac{4n^2\delta^2}{1-\delta^2}\right)\big(\lambda_{\min}\big(\omega^{(s)}\big)\big)^{-2}\big|\beta^{(1)}-\beta^{(0)}\big|^2, \end{aligned}$$

trong đó bất đẳng thức cuối được suy ra từ Mệnh đề 2.2.13. Kết hợp đánh giá này với (2.55) và (2.56), ta thu được (2.54). Định lý được chứng minh. □

Sau đây, luận án phát biểu định lý về tính d-lõm của hàm số kiểu Monge-Ampère không đối xứng $F(R)$ trên tập lồi không bị chặn $D_{\delta,\mu} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$. Định lý này là mở rộng của Mệnh đề 2.1.2 và sẽ được sử dụng trong việc chứng minh Bổ đề 3.3.5.

Định lý 2.2.21 *Hàm $F(R) = \log(\det R)$ là d-lõm trên tập hợp $D_{\delta,\mu}$, trong đó $D_{\delta,\mu} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ là tập lồi không bị chặn cho bởi (2.6), $d = 2n\delta^2\left(1 + \dfrac{4n^2\delta^2}{1-\delta^2}\right)$ chỉ phụ thuộc vào δ và n. Điều này có nghĩa là, với mọi ma trận $R^{(0)} = \omega^{(0)} + \beta^{(0)} = \big[R^{(0)}_{ij}\big]_{n\times n}$ và $R^{(1)} = \omega^{(1)} + \beta^{(1)} = \big[R^{(1)}_{ij}\big]_{n\times n}$ thuộc $D_{\delta,\mu}$, ta có*

$$F\big(R^{(1)}\big) - F\big(R^{(0)}\big) \le \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial F\big(R^{(0)}\big)}{\partial R_{ij}} \left(R^{(1)}_{ij} - R^{(0)}_{ij}\right) + d. \tag{2.57}$$

Chứng minh. Từ giả thiết của định lý và Mệnh đề 1.1.4, ta có

$$\left|\beta^{(1)} - \beta^{(0)}\right|^2 \le n\left\|\beta^{(1)} - \beta^{(0)}\right\|^2 \le 2n\left(\left\|\beta^{(0)}\right\|^2 + \left\|\beta^{(1)}\right\|^2\right) \le 4n\mu^2.$$

Mặt khác, vì $D_{\delta,\mu}$ là tập lồi nên ta dễ dàng suy ra

$$\mu \le \delta\lambda_{\min}\big((1-s)\omega^{(0)} + s\omega^{(1)}\big),\ \forall s \in [0,1].$$

Từ các đánh giá trên và (2.54), ta thu được (2.57). Định lý được chứng minh. □

KẾT LUẬN CHƯƠNG 2

Trong chương này, luận án đã nghiên cứu về tính d-lõm của hàm số kiểu Monge-Ampère $F(R) = \log(\det R)$ trên lập lồi không bị chặn $D_{\delta,\mu} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ của tập hợp các ma trận xác định dương không đối xứng, trong đó $\delta \in [0,1)$ và $\mu \ge 0$. Cụ thể, luận án đã chứng minh được các kết quả sau:

- Đã nhắc lại một số tính chất đã biết về tính lõm của hàm số kiểu Monge-Ampère đối xứng.
- Đã thiết lập một số tính chất cơ bản của các ma trận thuộc $D_{\delta,\mu}$.
- Đã thiết lập đánh giá đối với cận trên cho vi phân cấp hai của hàm $F(R)$ tại mỗi phần tử $R \in D_{\delta,\mu}$ (Định lý 2.2.19).
- Đã thiết lập được Định lý 2.2.20 và thiết lập tính d-lõm trên tập $D_{\delta,\mu}$ đối với hàm số $F(R)$ với d là hằng số không âm chỉ phụ thuộc vào n và δ (Định lý 2.2.21). Các định lý này là các công cụ quan trọng cho các đánh giá tiên nghiệm trong $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ đối với nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet cho phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng trong chương sau.

Chương 3

Các đánh giá tiên nghiệm trong $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ đối với nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet cho phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng

Nội dung chương này nhằm trình bày các bước đánh giá tiên nghiệm trong $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ đối với nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet cho phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng dạng sau đây

$$\det\left[D^2u - A(x,u,Du) - B(x,u,Du)\right] = f(x,u,Du) \quad \text{trong } \Omega, \tag{3.1}$$

$$u(x) = \varphi(x) \quad \text{trên } \partial\Omega, \tag{3.2}$$

trong đó $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là miền bị chặn có biên $\partial\Omega$ trơn, $A(x,z,p) = [A_{ij}(x,z,p)]_{n\times n}$, $B(x,z,p) = [B_{ij}(x,z,p)]_{n\times n}$ và $f(x,z,p)$ lần lượt là ma trận đối xứng, ma trận phản đối xứng và hàm vô hướng xác định trên $\Gamma := \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $\varphi(x)$ là hàm vô hướng xác định trên $\overline{\Omega}$. Các bước này là tương tự như của nhóm N.S. Trudinger trong việc đánh giá tiên nghiệm trong $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ đối với nghiệm elliptic của bài toán Dirichlet cho phương trình kiểu Monge-Ampère đối xứng.

Trong chương này, ta luôn giả thiết $A(x,z,p) \in C^2(\Gamma;\mathbb{R}^{n\times n})$, $B(x,z,p) \in BC^2(\Gamma;\mathbb{R}^{n\times n})$ và $f(x,z,p) \in C^2(\Gamma;\mathbb{R})$.

Khi $B(x,z,p) \equiv 0$, ta có phương trình kiểu Monge-Ampère đối xứng tương ứng với (3.1),

$$\det\left[D^2u - A(x,u,Du)\right] = f(x,u,Du), \quad \text{trong } \Omega. \tag{3.3}$$

Cho hằng số $\delta \in [0,1)$, theo Định nghĩa 0.0.4, phương trình (3.1) là *δ-elliptic* đối với hàm $u(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ nếu nó là elliptic đối với u, tức là $\lambda_u > 0$ và $\mu(B) \le \delta\lambda_u$.

Nội dung của chương này được viết dựa trên hai bài báo [1], [2] trong Danh mục các công trình liên quan đến luận án.

3.1 Nguyên lý so sánh cho phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng

Trong mục này, luận án thiết lập nguyên lý so sánh cho phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng (3.1) khi nó là δ-elliptic đối với các hàm được so sánh. Đặt

$$G[u](x) := \log\det\left[D^2u - A(x,u,Du) - B(x,u,Du)\right] - \log f(x,u,Du), \quad x \in \Omega. \tag{3.4}$$

Định lý sau đây là mở rộng của Định lý 0.0.1 trong phần Mở đầu sang trường hợp phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng.

Định lý 3.1.1 *Cho các hàm $u(x), v(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ thỏa mãn $G[u](x) \le G[v](x)$ trong Ω và $u(x) \ge v(x)$ trên $\partial\Omega$. Giả sử các điều kiện sau đây được thỏa mãn:*

(i) $\lambda_u > 0,\ \lambda_v > 0$;

(ii) $\mu(B) \le \delta \min\{\lambda_u, \lambda_v\}$;

(iii) $\inf\limits_{(x,z,p)\in\Gamma} \lambda_{\min}(D_zA(x,z,p)) \ge (-\alpha_1)\min\{\lambda_u, \lambda_v\}$;

(iv) $\mu(D_zB) \le \beta_1 \min\{\lambda_u, \lambda_v\}$;

(v) $f(x,z,p) > 0$, *trong* Γ;

(vi) $f_1 := \inf\limits_{(x,z,p)\in\Gamma} \left(\frac{D_zf}{f}\right)(x,z,p) \ge n\left(\alpha_1 + \dfrac{\delta}{1+\delta^2}\beta_1\right)$,

trong đó $\delta \in [0,1), \alpha_1$ và β_1 là các hằng số không âm, $\mu(B)$ và $\mu(D_zB)$ là các đại lượng được xác định bởi (0.22).

Khi đó ta có $u(x) \ge v(x)$ trong Ω. Hơn nữa, nếu $u(x) = v(x)$ trên $\partial\Omega$ thì ta có $\dfrac{\partial u}{\partial\nu} \ge \dfrac{\partial v}{\partial\nu}$ trên $\partial\Omega$, trong đó ν là véc tơ pháp tuyến trong đơn vị của biên $\partial\Omega$.

Chứng minh. Với mọi $x \in \overline{\Omega}$ và $t \in [0,1]$, ta đặt

$$w(x) = v(x) - u(x),\ u^{(t)}(x) = (1-t)u(x) + tv(x),$$

và

$$\omega^{(0)}(x) = D^2u(x) - A(x,u(x),Du(x)),\ \omega^{(1)}(x) = D^2v(x) - A(x,v(x),Dv(x)),$$

$$R^{(0)}(x) = \omega^{(0)}(x) - B(x,u(x),Du(x)),\ R^{(1)}(x) = \omega^{(1)}(x) - B(x,v(x),Dv(x)),$$
$$\omega^{(t)}(x) = (1-t)\omega^{(0)}(x) + t\omega^{(1)}(x),\ R^{(t)}(x) = (1-t)R^{(0)}(x) + tR^{(1)}(x).$$

Đặt

$$g(t,x) := \log\det\big((1-t)R^{(0)}(x) + tR^{(1)}(x)\big) = \log\det\big(R^{(t)}(x)\big).$$

Từ định lý giá trị trung bình và (2.22), ta có

$$\begin{aligned}\log\det\big(R^{(1)}(x)\big) - \log\det\big(R^{(0)}(x)\big) &= g(1,x) - g(0,x)\\ &= g'_t(s,x) = \sum_{i,j=1}^{n}\big(R^{(s)}(x)\big)^{-1}_{ji}\big(R^{(1)}_{ij}(x) - R^{(0)}_{ij}(x)\big),\end{aligned} \tag{3.5}$$

trong đó $s \in (0,1)$ là hằng số phụ thuộc vào x.
Đặt

$$\begin{aligned}h(t,x) := \sum_{i,j=1}^{n}\big(R^{(s)}(x)\big)^{-1}_{ji}\big[D_{ij}u^{(t)}(x) - A_{ij}\big(x,u^{(t)}(x),Du^{(t)}(x)\big)\\ - B_{ij}\big(x,u^{(t)}(x),Du^{(t)}(x)\big)\big] - \log f\big(x,u^{(t)}(x),Du^{(t)}(x)\big).\end{aligned} \tag{3.6}$$

Từ định lý giá trị trung bình, (3.4), (3.5) và (3.6), ta có

$$\begin{aligned}G[v](x) - G[u](x) &= h(1,x) - h(0,x) = h'_t(\tau,x)\\ &= \sum_{i,j=1}^{n}\big(R^{(s)}(x)\big)^{-1}_{ji}\Big[(D_{ij}v(x) - D_{ij}u(x))\\ &- \sum_{k=1}^{n}(D_{p_k}A_{ij} + D_{p_k}B_{ij})\big(x,u^{(\tau)}(x),Du^{(\tau)}(x)\big)(D_kv(x) - D_ku(x))\\ &- (D_zA_{ij} + D_zB_{ij})\big(x,u^{(\tau)}(x),Du^{(\tau)}(x)\big)(v(x) - u(x))\Big]\\ &- \frac{1}{f\big(x,u^{(\tau)}(x),Du^{(\tau)}(x)\big)}\sum_{k=1}^{n}D_{p_k}f\big(x,u^{(\tau)}(x),Du^{(\tau)}(x)\big)(D_kv(x) - D_ku(x))\\ &- \frac{1}{f\big(x,u^{(\tau)}(x),Du^{(\tau)}(x)\big)}D_zf\big(x,u^{(\tau)}(x),Du^{(\tau)}(x)\big)(v(x) - u(x)),\end{aligned}$$

trong đó $\tau \in (0,1)$ là hằng số phụ thuộc vào x và s.
Từ hệ thức trên và giả thiết $G[u] \le G[v]$ trong Ω, ta nhận được

$$G[v](x) - G[u](x) = \sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}(x)D_{ij}w(x) + \sum_{k=1}^{n}b^k(x)D_kw(x) + c(x)w(x) \ge 0, \ \text{ trong } \Omega, \tag{3.7}$$

trong đó

$$\begin{aligned}a^{ij}(x) &= \frac{\big(R^{(s)}(x)\big)^{-1}_{ij} + \big(R^{(s)}(x)\big)^{-1}_{ji}}{2}, \ i,j = 1,\dots,n,\\ b^k(x) &= -\sum_{i,j=1}^{n}\big(R^{(s)}(x)\big)^{-1}_{ji}\big[(D_{p_k}A_{ij} + D_{p_k}B_{ij})\big(x,u^{(\tau)}(x),Du^{(\tau)}(x)\big)\big]\\ &\quad - \frac{1}{f\big(x,u^{(\tau)}(x),Du^{(\tau)}(x)\big)}D_{p_k}f\big(x,u^{(\tau)}(x),Du^{(\tau)}(x)\big), \quad k = 1,\dots,n,\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$c(x) = -\sum_{i,j=1}^{n} \big(R^{(s)}(x)\big)^{-1}_{ji}\big[(D_zA_{ij} + D_zB_{ij})\big(x, u^{(\tau)}(x), Du^{(\tau)}(x)\big)\big]$$
$$- \frac{1}{f\big(x, u^{(\tau)}(x), Du^{(\tau)}(x)\big)} D_z f\big(x, u^{(\tau)}(x), Du^{(\tau)}(x)\big).$$

Bây giờ, ta xét toán tử vi phân đạo hàm riêng tuyến tính cấp hai L cho bởi

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)D_{ij} + \sum_{k=1}^{n} b^k(x)D_k + c(x), \tag{3.9}$$

trong đó các hàm hệ số a^{ij}, b^k, c được cho bởi (3.8). Ta có các khẳng định sau đây.

Khẳng định 1. Toán tử L là elliptic đều, cụ thể là tồn tại các hằng số dương λ, Λ sao cho

$$\lambda|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_i \le \Lambda|\xi|^2, \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{3.10}$$

Thật vậy, từ (i) ta suy ra tồn tại hằng số dương Λ_0 sao cho

$$\lambda_u E \le \omega(x, u) \le \Lambda_0 E, \quad \lambda_v E \le \omega(x, v) \le \Lambda_0 E, \quad \forall x \in \overline{\Omega},$$

và do đó

$$\lambda_0 E \le \omega^{(s)}(x) \le \Lambda_0 E, \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \tag{3.11}$$

trong đó $\lambda_0 = \min\{\lambda_u, \lambda_v\}$. Từ đây suy ra

$$\frac{1}{\Lambda_0}E \le \big(\omega^{(s)}(x)\big)^{-1} \le \frac{1}{\lambda_0}E, \quad \forall x \in \overline{\Omega}. \tag{3.12}$$

Mặt khác, từ (i) và (ii), ta có $R^{(0)}(x), R^{(1)}(x) \in D_{\delta,\mu(B)}$ và vì thế $R^{(s)}(x) \in D_{\delta,\mu(B)}$. Do đó ta có thể áp dụng Hệ quả 2.2.7, ta có

$$\frac{1}{1+\delta^2}\Big(\big(\omega^{(s)}(x)\big)^{-1}\xi, \xi\Big) \le (H(x)\xi, \xi) \le \Big(\big(\omega^{(s)}(x)\big)^{-1}\xi, \xi\Big), \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \tag{3.13}$$

trong đó $H(x) := \dfrac{\big(R^{(s)}(x)\big)^{-1} + \Big(\big(R^{(s)}(x)\big)^{-1}\Big)^T}{2}$.

Từ (3.12) và (3.13), ta suy ra (3.10) với $\lambda = \dfrac{1}{(1+\delta^2)\Lambda_0}$ và $\Lambda = \dfrac{1}{\lambda_0}$.

Khẳng định 2. Các hàm hệ số $b^k(x), k = 1, \ldots, n$ và $c(x)$ là bị chặn trong $\overline{\Omega}$.

Thật vậy, từ Mệnh đề 2.2.2 và (3.11), ta có

$$\det R^{(s)}(x) \ge \det \omega^{(s)}(x) \ge \lambda_0^n > 0, \quad \forall x \in \overline{\Omega}. \tag{3.14}$$

Dễ thấy tập $\big\{\big(x, u^{(t)}(x), Du^{(t)}(x), D^2u^{(t)}(x)\big) \mid x \in \overline{\Omega}, t \in [0,1]\big\}$ là bị chặn trong $\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times n}$. Do đó, từ điều kiện (v), (3.14) và các giả thiết về độ trơn A, B và f, ta dễ dàng suy ra được tính bị chặn của các hàm hệ số $b^k(x), c(x)$.

Khẳng định 3. Hệ số $c(x) \le 0$, với $\forall x \in \overline{\Omega}$.

Thật vậy, *Khẳng định 3* được suy ra từ (3.8), điều kiện (vi) và các đánh giá sau đây

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \big(R^{(s)}(x)\big)^{-1}_{ji} D_z A_{ij}\big(x, u^{(\tau)}(x), Du^{(\tau)}(x)\big) \le n\alpha_1, \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \tag{3.15}$$

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \big(R^{(s)}(x)\big)^{-1}_{ji} D_z B_{ij}\big(x, u^{(\tau)}(x), Du^{(\tau)}(x)\big) \le n\frac{\delta}{1+\delta^2}\beta_1, \quad \forall x \in \overline{\Omega}. \tag{3.16}$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh (3.15) và (3.16). Thật vậy, vì D_zA là đối xứng và $H(x)$ là xác định dương nên ta có thể áp dụng Mệnh đề 1.1.9 và nhận được

$$\sum_{i,j=1}^{n} \big(R^{(s)}(x)\big)^{-1}_{ji} D_z A_{ij} = \mathrm{Tr}[(D_zA)(H(x))] \ge \lambda_{\min}(D_zA)\,\mathrm{Tr}H(x). \tag{3.17}$$

Giả sử $x \in \overline{\Omega}$ là điểm tùy ý cho trước. Khi đó, nếu $\lambda_{\min}\big(D_zA\big(x, u^{(\tau)}(x), Du^{(\tau)}(x)\big)\big) \ge 0$ tại điểm này thì từ (3.17) ta suy ra vế trái của (3.15) là không dương và do đó ta thu được (3.15). Giả sử ngược lại, $\lambda_{\min}\big(D_zA\big(x, u^{(\tau)}(x), Du^{(\tau)}(x)\big)\big) < 0$, khi đó (3.15) được suy ra từ (3.17) và các đánh giá sau đây

$$\mathrm{Tr}H(x) \le \mathrm{Tr}\Big[\big(\omega^{(s)}(x)\big)^{-1}\Big] \le \frac{n}{\lambda_{\min}\big(\omega^{(s)}(x)\big)} \le \frac{n}{\min\{\lambda_u, \lambda_v\}},$$

$$(-\alpha_1)\lambda_{\min}(\omega^{(s)}(x)) \le (-\alpha_1)\min\{\lambda_u, \lambda_v\} \le \lambda_{\min}\big(D_zA\big(x, u^{(\tau)}(x), Du^{(\tau)}(x)\big)\big),$$

ở đây, các đánh giá này được suy ra từ Hệ quả 2.2.7, điều kiện (iii) và (3.11). Như vậy, (3.15) được chứng minh.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh (3.16). Đặt $K(x) = \dfrac{\big(R^{(s)}(x)\big)^{-1} - \Big(\big(R^{(s)}(x)\big)^{-1}\Big)^T}{2}$. Từ Mệnh đề 2.2.3 và Hệ quả 2.2.6, ta có

$$\|K(x)\| \le \frac{\delta}{1+\delta^2}\frac{1}{\lambda_{\min}\big(\omega^{(s)}(x)\big)} \le \frac{\delta}{1+\delta^2}\frac{1}{\min\{\lambda_u, \lambda_v\}}, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Do đó, từ điều kiện (iv) và bất đẳng thức sau

$$\mathrm{Tr}(MN) \le |M||N| \le n\|M\|\|N\|, \quad \forall M, N \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

ta thu được

$$\begin{aligned}-\sum_{i,j=1}^{n} \big(R^{(s)}(x)\big)^{-1}_{ji} D_z B_{ij}(x, u^{(\tau)}(x), Du^{(\tau)}(x)) &= \mathrm{Tr}\big[(K(x))(-D_zB(x, u^{(\tau)}(x), Du^{(\tau)}(x)))\big]\\ &\le n\frac{\delta}{1+\delta^2}\frac{\mu(D_zB)}{\min\{\lambda_u, \lambda_v\}} \le n\frac{\delta}{1+\delta^2}\beta_1, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.\end{aligned}$$

Từ đó ta nhận được (3.16) và vì thế *Khẳng định 3* được chứng minh.

Giả sử $G[u] \le G[v]$ trong Ω và $u \ge v$ trên $\partial\Omega$. Khi đó từ (3.7) và (3.9), ta có $Lw \ge 0$ trong Ω và $w \le 0$ trên $\partial\Omega$. Nhờ các *Khẳng định 1, 2, 3* ở trên, ta có thể áp dụng nguyên lý so sánh (Định lý 1.3.3) và nhận được $w \le 0$ hay $u \ge v$ trong Ω. Phần còn lại của kết luận của định lý là dễ thấy. Định lý được chứng minh. □

3.2 Đánh giá trên toàn miền các đạo hàm cấp hai của nghiệm δ-elliptic của phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng qua độ lớn của chúng ở trên biên

Trong mục này, luận án sẽ chứng minh một kết quả tương tự như đối với phương trình kiểu Monge-Ampère đối xứng ([18, 20, 26, 27, 45]) rằng độ lớn của các đạo hàm cấp hai của nghiệm δ-elliptic của phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng (3.1) trong $\overline{\Omega}$ được đánh giá qua độ lớn của chúng ở trên biên $\partial\Omega$.

3.2.1 Phát biểu định lý chính

Định lý 3.2.1 *Giả sử $u(x) \in C^4(\overline{\Omega})$ là một nghiệm elliptic của phương trình* (3.1) *và các điều kiện sau được thỏa mãn*

(i) $\sup\limits_{x\in\Omega} |u(x)| \leq M_0,\ \sup\limits_{x\in\Omega} |Du(x)| \leq M_1;$

(ii) $A(x,z,p)$ *là chính quy chặt trong* Γ*, nghĩa là tồn tại hằng số* $a_0 > 0$ *sao cho*

$$A_{ij,k\ell}(x,z,p)\xi_i\xi_j\eta_k\eta_\ell \geq a_0|\xi|^2|\eta|^2, \tag{3.18}$$

với mọi $(x,z,p) \in \Gamma$ *và* $\xi,\eta \in \mathbb{R}^n$, $\xi \perp \eta$, *trong đó* $A_{ij,k\ell} = D_{p_kp_\ell}A_{ij}$;

(iii) $\left|B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\right| \leq \delta\lambda_u|\xi|^2;$

(iv) $\left|D_zB_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\right| \leq \beta_1\lambda_u|\xi|^2;$

(v) $\left|D_{x_k}B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\right|, \left|D_{p_k}B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\right| \leq \beta_2\lambda_u|\xi|^2|\eta|;$

(vi) $\left|D_{x_kx_\ell}B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\eta_\ell\right|, \left|D_{x_kp_\ell}B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\eta_\ell\right| \leq \beta_3|\xi|^2|\eta|^2,$
$\left|D_{x_kz}B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\right|, \left|D_{zp_k}B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\right| \leq \beta_3|\xi|^2|\eta|,$
$\left|D_{zz}B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\right| \leq \beta_3|\xi|^2;$

(vii) $\left|D_{p_kp_\ell}B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\eta_\ell\right| \leq b_0|\xi|^2|\eta|^2;$

(viii) $f(x,z,p) > 0$, *trong* Γ,

trong đó $M_0, M_1, \beta_2, \beta_3$ *là các hằng số dương và* δ, β_1, b_0 *là các hằng số không âm,* $0 \leq \delta < 1$, $0 \leq b_0 \leq a_0$, *các điều kiện* (iii)-(vii) *thỏa mãn với mọi* $(x,z,p) \in \Gamma$ *và* $\xi \in \mathbb{C}^n$, $\eta \in \mathbb{R}^n$.

Khi đó ta có các đánh giá sau

$$\sup_{x\in\Omega} \lambda_{\max}(\omega(x,u)) \leq C\Big(1 + \sup_{x\in\partial\Omega} \lambda_{\max}(\omega(x,u))\Big), \tag{3.19}$$

$$\sup_{x\in\Omega} |D^2u(x)| \leq C\Big(1 + \sup_{x\in\partial\Omega} \left|D^2u(x)\right|\Big), \tag{3.20}$$

trong đó C *là hằng số dương chỉ phụ thuộc vào* $M_0, M_1, n, a_0, \delta, \beta_1, \beta_2, \beta_3, b_0, A, f$ *và* Ω.

Nhận xét 3.2.2 (1) Ta dễ dàng kiểm tra được rằng, dạng của phương trình (3.1) và các giả thiết của Định lý 3.2.1 là bất biến dưới phép quay các tọa độ với các hằng số $M_0, M_1, a_0, \delta, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ và b_0 là không đổi.

(2) Từ các giả thiết (iii)-(vii), ta nhận được các đánh giá sau với mọi $(x, z, p) \in \Gamma$ và $k, \ell = 1, \dots, n$,

$$\|B(x,z,p)\| \le \delta\lambda_u; \tag{3.21}$$

$$\|D_z B(x,z,p)\| \le \beta_1\lambda_u; \tag{3.22}$$

$$\|D_{x_k} B(x,z,p)\|, \|D_{p_k} B(x,z,p)\| \le \beta_2\lambda_u; \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned} \|D_{x_k x_\ell} B(x,z,p)\|, \|D_{x_k p_\ell} B(x,z,p)\|, \|D_{x_k z} B(x,z,p)\| &\le \beta_3, \\ \|D_{z p_k} B(x,z,p)\|, \|D_{zz} B(x,z,p)\| &\le \beta_3; \end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\|D_{p_k p_k} B(x,z,p)\| \le b_0, \|D_{p_k p_\ell} B(x,z,p)\| \le 2b_0 \ (k \ne \ell). \tag{3.25}$$

(3) Từ (3.21) ta có $\mu(B) \le \delta\lambda_u$. Do đó $u(x)$ là nghiệm δ-elliptic của phương trình (3.1) và $R(x,u) \in D_{\delta,\mu(B)}$, trong đó $D_{\delta,\mu(B)}$ được cho bởi (2.6) với $\mu = \mu(B)$. Khi đó, từ Mệnh đề 2.2.2 và Mệnh đề 2.2.4, ta có đánh giá sau

$$0 < \det\omega(x,u) \le \det R(x,u) \le \left(1+\delta^2\right)^{[\frac{n}{2}]} \det\omega(x,u), \quad \forall x \in \Omega. \tag{3.26}$$

3.2.2 Bổ đề bổ trợ về vết của tích hai ma trận

Nội dung của mục nhỏ này giới thiệu một số đánh giá đối với vết của tích hai ma trận mà một trong hai ma trận đó là ma trận nghịch đảo R^{-1} của ma trận $R \in D_{\delta,\mu}$, trong đó $D_{\delta,\mu}$ là tập hợp được cho bởi (2.6). Cụ thể, ta có bổ đề sau đây.

Bổ đề 3.2.3 *Giả sử $R = \omega + \beta \in D_{\delta,\mu}$. Khi đó ta có các đánh giá sau:*

(a) $\left|\mathrm{Tr}\left(R^{-1}P\right)\right| \le \|P\|\,\mathrm{Tr}R^{-1} \le \|P\|\,\mathrm{Tr}\,\omega^{-1}, \quad \forall P \in \mathbb{R}^{n\times n}, P^T = P;$ (3.27)

(b) $\left|\mathrm{Tr}\left(R^{-1}Q\right)\right| \le \delta\|Q\|\,\mathrm{Tr}R^{-1} \le \delta\|Q\|\,\mathrm{Tr}\,\omega^{-1}, \quad \forall Q \in \mathbb{R}^{n\times n}, Q^T = -Q;$ (3.28)

(c) $\left|\mathrm{Tr}\left(R^{-1}M\right)\right| \le (1+\delta)\|M\|\,\mathrm{Tr}R^{-1} \le (1+\delta)\|M\|\,\mathrm{Tr}\,\omega^{-1}, \quad \forall M \in \mathbb{R}^{n\times n}.$ (3.29)

Chứng minh (a) Vì $P^T = P$ và $R^{-1} > 0$ nên ta có

$$\lambda_{\min}(P)\,\mathrm{Tr}R^{-1} \le \mathrm{Tr}\left(R^{-1}P\right) = \mathrm{Tr}\left(P\frac{R^{-1} + \left(R^{-1}\right)^T}{2}\right) \le \lambda_{\max}(P)\,\mathrm{Tr}R^{-1}.$$

Do đó

$$\left|\mathrm{Tr}\left(R^{-1}P\right)\right| \le \max\{|\lambda_{\min}(P)|, |\lambda_{\max}(P)|\}\,\mathrm{Tr}R^{-1} = \|P\|\,\mathrm{Tr}R^{-1}.$$

Từ đánh giá này và (2.21), ta thu được (3.27).

(b) Vì $Q^T = -Q$ nên $\mathrm{Tr}\left(R^{-1}Q\right) = \mathrm{Tr}\left(\dfrac{R^{-1} - \left(R^{-1}\right)^T}{2}Q\right)$. Do đó, từ (2.18) ta có

$$\mathrm{Tr}\left(R^{-1}Q\right) = \mathrm{Tr}\left(D_3 C_1^{-1}\omega^{-\frac{1}{2}}Q\omega^{-\frac{1}{2}}C_1\right) = \sum_{j=1}^{n} (D_3)_{jj}\left(C_1^{-1}\omega^{-\frac{1}{2}}Q\omega^{-\frac{1}{2}}C_1\right)_{jj},$$

trong đó C_1 là ma trận unita và từ Mệnh đề 2.2.3 và (2.19), $D_3 = \big[(D_3)_{ij}\big]_{n\times n}$ là ma trận đường chéo phức thỏa mãn $\big|(D_3)_{jj}\big| \le \frac{\delta}{1+\delta^2}, j = 1, \dots, n$. Do đó

$$\big|\mathrm{Tr}\big(R^{-1}Q\big)\big| \le \frac{\delta}{1+\delta^2}\sum_{j=1}^{n}\Big|\big(C_1^{-1}\omega^{-\frac{1}{2}}Q\omega^{-\frac{1}{2}}C_1\big)_{jj}\Big|. \tag{3.30}$$

Vì $\omega^T = \omega$ và $\omega > 0$, nên ta có thể biểu diễn $\omega = CDC^{-1}$, trong đó $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận trực giao, $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, trong đó $\lambda_i > 0, i = 1, \dots, n$ là các giá trị riêng của ω. Đặt $C_2 = C_1^{-1}C = \big[(C_2)_{ij}\big]_{n\times n}$, $\tilde{Q} = C^{-1}QC = \big[\tilde{Q}_{ij}\big]_{n\times n}$, khi đó C_2 là unita và $C_1^{-1}\omega^{-\frac{1}{2}}Q\omega^{-\frac{1}{2}}C_1 = C_2D^{-\frac{1}{2}}\tilde{Q}D^{-\frac{1}{2}}C_2^{-1}$. Do đó

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\Big|\big(C_1^{-1}\omega^{-\frac{1}{2}}Q\omega^{-\frac{1}{2}}C_1\big)_{jj}\Big| &= \sum_{j=1}^{n}\Bigg|\sum_{k,\ell=1}^{n}(C_2)_{jk}\lambda_k^{-\frac{1}{2}}\tilde{Q}_{k\ell}\lambda_\ell^{-\frac{1}{2}}\big(C_2^{-1}\big)_{\ell j}\Bigg| \\
&= \sum_{j=1}^{n}\Bigg|\sum_{k,\ell=1}^{n}\tilde{Q}_{k\ell}\Big((C_2)_{jk}\lambda_k^{-\frac{1}{2}}\Big)\Big(\overline{(C_2)_{j\ell}\lambda_\ell^{-\frac{1}{2}}}\Big)\Bigg| \le \sum_{j=1}^{n}\Bigg(\|\tilde{Q}\|\sum_{k=1}^{n}\Big|(C_2)_{jk}\lambda_k^{-\frac{1}{2}}\Big|^2\Bigg) \\
&= \|Q\|\sum_{k=1}^{n}\Bigg(\sum_{j=1}^{n}\big|(C_2)_{jk}\big|^2\Bigg)\lambda_k^{-1} = \|Q\|\,\mathrm{Tr}\,\omega^{-1}.
\end{aligned}$$

Từ hệ thức này và (3.30), ta suy ra $\big|\mathrm{Tr}\,\big(R^{-1}Q\big)\,\big| \le \frac{\delta}{1+\delta^2}\|Q\|\,\mathrm{Tr}\,\omega^{-1}$. Kết hợp đánh giá này với (2.21) cho ta (3.28).

(c) Bằng cách phân tích $M = \dfrac{M+M^T}{2} + \dfrac{M-M^T}{2} = P + Q$, từ (3.27) và (3.28), ta dễ dàng thu được (3.29). Bổ đề được chứng minh. □

3.2.3 Chứng minh của Định lý 3.2.1

Trước tiên, trong lớp nghiệm elliptic, ta biểu diễn phương trình (3.1) dưới dạng tương đương

$$F(R(x,u)) := \log(\det R(x,u)) = \hat{f}(x,u,Du), \quad \text{trong } \Omega, \tag{3.31}$$

trong đó $\hat{f} = \log f$. Từ Mệnh đề 2.2.8, ta có với $i, j, k, \ell = 1, \dots, n$,

$$F^{ij} := \frac{\partial F(R(x,u))}{\partial R_{ij}} = R^{ji}, \quad F^{ij,k\ell} := \frac{\partial^2 F(R(x,u))}{\partial R_{ij}\partial R_{k\ell}} = -R^{\ell i}R^{jk}. \tag{3.32}$$

Ta đưa vào các toán tử tuyến tính hóa của toán tử F và phương trình (3.31),

$$\begin{aligned}
L &= F^{ij}\left[D_{ij} - D_{p_k}A_{ij}(x,u,Du)D_k - D_{p_k}B_{ij}(x,u,Du)D_k\right], \\
\mathcal{L} &= L - D_{p_k}\hat{f}(x,u,Du)D_k.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Dễ thấy $R(x,u) \in D_{\delta,\mu(B)}$, do đó từ (3.32) và Bổ đề 3.2.3 ta có thể đánh giá các tổng có dạng $\sum_{i,j=1}^{n}F^{ij}M_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n}R^{ji}M_{ij} = \mathrm{Tr}\,(R^{-1}M)$ qua $\sum_{i=1}^{n}R^{ii} = \sum_{i=1}^{n}F^{ii}$, hoặc $\sum_{i=1}^{n}\omega^{ii}$, trong đó $M = [M_{ij}]_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Điều này đóng một vai trò quan trọng trong các đánh giá về sau của luận án.

Chứng minh của Định lý 3.2.1 Xét $v(x,\xi)$ là hàm bổ trợ được cho bởi

$$v(x,\xi)=\omega_{\xi\xi}(x),$$

trong đó $\omega_{\xi\xi}(x)=\omega_{ij}(x,u)\xi_i\xi_j=(D_{ij}u(x)-A_{ij}(x,u(x),Du(x)))\xi_i\xi_j$, $x\in\overline{\Omega}$, $\xi\in S^n$, S^n là tập hợp tất các các véc tơ đơn vị trong $\mathbb{R}^n$. Giả sử hàm $v(x,\xi)$ đạt giá trị cực đại của nó tại $(x^0,\xi^0)\in\overline{\Omega}\times S^n$. Khi đó ta có

$$v(x^0,\xi^0)=\max_{x\in\overline{\Omega}}\lambda_{\max}(\omega(x,u)). \tag{3.34}$$

Ta xét các trường hợp sau.

Trường hợp 1: $x^0\in\Omega$. Không mất tính tổng quát, ta có thể chọn được một hệ trực giao $e_1,\dots,e_n$ tại x^0 sao cho $e_1(x^0)=\xi^0$, $[\omega_{ij}]_{n\times n}$ có dạng đường chéo tại x^0 và $\omega_{11}\geq\cdots\geq\omega_{nn}>0$. Khi đó $\omega^{-1}=[\omega^{ij}]_{n\times n}$ cũng có dạng đường chéo tại x^0 và $\omega^{11}\leq\cdots\leq\omega^{nn}$.

Đặt $v(x)\equiv v(x,e_1)=\omega_{11}(x)$. Khi đó hàm $v(x)$ cũng đạt giá trị cực đại của nó tại x^0. Do đó $Dv\left(x^0\right)=0, D^2v\left(x^0\right)\leq 0$ và

$$\mathcal{L}\omega_{11}\big(x^0\big)=\mathcal{L}v\big(x^0\big)\leq 0. \tag{3.35}$$

Tiếp theo, ta sẽ đánh giá $\mathcal{L}\omega_{11}\big(x^0\big)$. Bằng cách lấy đạo hàm hai vế của phương trình (3.31) theo véc tơ $\xi\in\mathbb{R}^n$, ta thu được

$$\begin{aligned}F^{ij}\big[D_{ij}u_\xi-D_\xi A_{ij}&-(D_zA_{ij})u_\xi-(D_{p_k}A_{ij})D_ku_\xi-D_\xi B_{ij}-(D_zB_{ij})u_\xi\\&-(D_{p_k}B_{ij})D_ku_\xi\big]=D_\xi\hat{f}+\big(D_z\hat{f}\big)u_\xi+\big(D_{p_k}\hat{f}\big)D_ku_\xi,\end{aligned} \tag{3.36}$$

và lấy đạo hàm theo ξ một lần nữa cho ta

$$\begin{aligned}&F^{ij}\big[D_{ij}u_{\xi\xi}-D_{\xi\xi}A_{ij}-(D_{zz}A_{ij})(u_\xi)^2-(D_{p_kp_\ell}A_{ij})D_ku_\xi D_\ell u_\xi-(D_zA_{ij})u_{\xi\xi}\\&-(D_{p_k}A_{ij})D_ku_{\xi\xi}-2(D_{\xi z}A_{ij})u_\xi-2(D_{\xi p_k}A_{ij})D_ku_\xi-2(D_{zp_k}A_{ij})(D_ku_\xi)u_\xi\\&-D_{\xi\xi}B_{ij}-(D_{zz}B_{ij})(u_\xi)^2-(D_{p_kp_\ell}B_{ij})D_ku_\xi D_\ell u_\xi-(D_zB_{ij})u_{\xi\xi}-(D_{p_k}B_{ij})D_ku_{\xi\xi}\\&-2(D_{\xi z}B_{ij})u_\xi-2(D_{\xi p_k}B_{ij})D_ku_\xi-2(D_{zp_k}B_{ij})(D_ku_\xi)u_\xi\big]+F^{ij,k\ell}D_\xi R_{ij}\,D_\xi R_{k\ell}\\&=D_{\xi\xi}\hat{f}+\big(D_{zz}\hat{f}\big)(u_\xi)^2+\big(D_{p_kp_\ell}\hat{f}\big)D_ku_\xi D_\ell u_\xi+\big(D_z\hat{f}\big)u_{\xi\xi}+\big(D_{p_k}\hat{f}\big)D_ku_{\xi\xi}\\&+2\big(D_{\xi z}\hat{f}\big)u_\xi+2\big(D_{\xi p_k}\hat{f}\big)D_ku_\xi+2\big(D_{zp_k}\hat{f}\big)(D_ku_\xi)u_\xi.\end{aligned} \tag{3.37}$$

Ta có

$$\mathcal{L}\omega_{11}=\mathcal{L}(u_{11}-A_{11})=\mathcal{L}u_{11}-\mathcal{L}A_{11}. \tag{3.38}$$

Bằng cách lấy $\xi=e_1$ trong (3.37), khi đó từ Bổ đề 3.2.3, (3.24) và chú ý $u_{k\ell}=\omega_{k\ell}+A_{k\ell}$, trong đó $\omega_{k\ell}=0$ nếu $k\neq\ell$, ta có

$$\begin{aligned}\mathcal{L}u_{11}\geq{}&F^{ij}A_{ij,k\ell}u_{1k}u_{1\ell}+F^{ij}B_{ij,k\ell}u_{1k}u_{1\ell}+F^{ij}D_zB_{ij}u_{11}\\&-F^{ij,k\ell}D_1R_{ij}\,D_1R_{k\ell}-C\big[\omega^{ii}(1+\omega_{11})+\omega_{11}^2\big],\end{aligned}$$

trong đó C phụ thuộc vào $M_0, M_1, n, \delta, \beta_3, A, f$ và Ω. Nếu không nói gì thêm, ta ký hiệu C là hằng số dương phụ thuộc vào các đại lượng đó trong chứng minh này.

Bằng cách áp dụng Định lý 2.2.19 về đánh giá bị chặn trên đối với vi phân cấp hai của hàm $F(R) = \log(\det R)$ với các ma trận $R = R(x^0, u) \in D_{\delta,\mu(B)}$, $M = D_1R(x^0, u) = D_1\omega(x^0, u) - D_1B(x^0, u(x^0), Du(x^0))$ và $\eta = 1$, ta có

$$-F^{ij,k\ell} D_1R_{ij}D_1R_{k\ell} \geq -\left(1 + \frac{4n^2\delta^2}{1-\delta^2}\right)\left|\omega^{-\frac{1}{2}}D_1B\omega^{-\frac{1}{2}}\right|^2$$
$$\geq -n\left(1 + \frac{4n^2\delta^2}{1-\delta^2}\right)\left(\frac{\|D_1B\|}{\lambda_u}\right)^2 \geq -\frac{C}{1-\delta}\left(1 + \omega_{11}^2\right),$$

trong đó bất đẳng thức thứ hai được suy ra từ Mệnh đề 2.2.13, bất đẳng thức cuối được suy ra từ (3.22), (3.23) và hệ thức $D_1B = D_{x_1}B + D_zBu_1 + \sum_k D_{p_k}Bu_{1k}$, hằng số C phụ thuộc thêm vào β_1 và β_2.

Từ Bổ đề 3.2.3 và (3.22), ta có

$$F^{ij}D_zB_{ij}u_{11} \geq -\left(\delta\|D_zB\|\omega^{ii}\right)|u_{11}| \geq -n\delta\frac{\|D_zB\|}{\lambda_u}|u_{11}| \geq -C(1 + \omega_{11}).$$

Từ Bổ đề 3.2.3 và (3.25), ta có

$$F^{ij}A_{ij,k\ell}u_{1k}u_{1\ell} + F^{ij}B_{ij,k\ell}u_{1k}u_{1\ell} \geq F^{ij}(A_{ij,11} + B_{ij,11})\omega_{11}^2 - C(1 + \omega_{11})\omega^{ii},$$

trong đó C phụ thuộc thêm vào b_0.

Từ các đánh giá trên ta suy ra

$$\mathcal{L}u_{11} \geq F^{ij}(A_{ij,11} + B_{ij,11})\omega_{11}^2 - \frac{C}{1-\delta}\left[\omega^{ii}(1 + \omega_{11}) + \omega_{11}^2\right]. \tag{3.39}$$

Từ (3.32) và $A^T = A$, ta có biểu diễn

$$F^{ij}A_{ij,11} = \sum_{i=1}^{n}\left(R^{1i} + R^{i1}\right)A_{1i,11} - R^{11}A_{11,11} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=2}^{n}\left(R^{ij} + R^{ji}\right)A_{ij,11}.$$

Ký hiệu

$$\left(R^{-1} + \left(R^{-1}\right)^T\right)' \equiv \left[R^{ij} + R^{ji}\right]_{2\leq i,j\leq n}, \ D_{p_1p_1}A' \equiv [A_{ij,11}]_{2\leq i,j\leq n}.$$

Ta có $R^{-1} + \left(R^{-1}\right)^T > 0$ và do đó $\left(R^{-1} + \left(R^{-1}\right)^T\right)' > 0$. Mặt khác, bằng cách chọn các véc tơ trực giao với nhau $\eta = e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ và $\xi = (0, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, từ (3.18) ta dễ dàng suy ra $\lambda_{\min}(D_{p_1p_1}A'(x, z, p)) \geq a_0$, với mọi $(x, z, p) \in \Gamma$. Từ đó ta có

$$\sum_{i,j=2}^{n}\left(R^{ij} + R^{ji}\right)A_{ij,11} = \operatorname{Tr}\left[\left(D_{p_1p_1}A'\right)\left(R^{-1} + \left(R^{-1}\right)^T\right)'\right]$$
$$\geq \lambda_{\min}\left(D_{p_1p_1}A'\right)\operatorname{Tr}\left(R^{-1} + \left(R^{-1}\right)^T\right)' \geq 2a_0\sum_{i>1}R^{ii}.$$

Hơn nữa, vì $R^{-1} + \left(R^{-1}\right)^T > 0$ nên mọi định thức con chính cấp 2×2 của nó là dương. Do đó, bằng cách áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\left|R^{1i} + R^{i1}\right| \le 2\sqrt{R^{11}R^{ii}} \le 2\theta R^{ii} + \frac{1}{2\theta}R^{11},\ i = 1, \dots, n,$$

với mọi hằng số $\theta > 0$.
Kết hợp các hệ thức trên cho ta

$$F^{ij}A_{ij,11} \ge -\sum_i \Big(2\theta R^{ii} + \frac{1}{2\theta}R^{11}\Big)|A_{1i,11}| - R^{11}|A_{11,11}| + a_0 \sum_{i>1} R^{ii}. \tag{3.40}$$

Từ Bổ đề 3.2.3 và (3.32), ta có

$$F^{ij}B_{ij,11} \ge -\delta \|D_{p_1p_1}B\| R^{ii}. \tag{3.41}$$

Từ (3.25), (3.41) và $0 \le b_0 \le a_0$, ta có $F^{ij}B_{ij,11} \ge -\delta a_0 R^{ii}$. Kết hợp đánh giá này với (3.40) cho ta

$$\begin{aligned} F^{ij}(A_{ij,11} + B_{ij,11}) \ge& \sum_{i>1} \left[(1-\delta)a_0 - 2\theta|A_{1i,11}|\right] R^{ii} \\ &- \left[(1+2\theta)|A_{11,11}| + \frac{1}{2\theta}\sum_i |A_{1i,11}| + \delta a_0\right] R^{11}. \end{aligned}$$

Từ (3.18), ta có $\max\limits_{i,j,k,\ell} \max\limits_V |A_{ij,k\ell}(x,z,p)| > 0$, trong đó $V = \{(x,z,p) \in \Gamma : |z| \le M_0, |p| \le M_1\}$. Bằng cách chọn $\theta = \dfrac{(1-\delta)a_0}{4\max\limits_{i,j,k,\ell}\max\limits_V |A_{ij,k\ell}(x,z,p)|}$, ta thu được

$$\begin{aligned} F^{ij}(A_{ij,11} + B_{ij,11}) &\ge \frac{(1-\delta)a_0}{2}\sum_{i>1} R^{ii} - \frac{C}{1-\delta}R^{11} \\ &\ge \frac{(1-\delta)a_0}{2\big(1+\delta^2\big)}\sum_{i>1}\omega^{ii} - \frac{C}{1-\delta}\omega^{11} \ge \frac{(1-\delta)a_0}{4\big(1+\delta^2\big)}\sum_i \omega^{ii} - \frac{C}{1-\delta}\omega^{11}, \end{aligned}$$

trong đó C phụ thuộc thêm vào a_0, bất đẳng thức thứ hai được suy ra từ (2.21) và bất đẳng thức cuối được suy ra từ đánh giá $\sum_{i>1}\omega^{ii} \ge \frac{1}{2}\sum_i \omega^{ii}$, điều này đúng nhờ hệ thức $\omega^{11} \le \cdots \le \omega^{nn}$. Do đó từ (3.39), ta thu được đánh giá cho $\mathcal{L}u_{11}$,

$$\mathcal{L}u_{11} \ge \frac{(1-\delta)a_0}{4\big(1+\delta^2\big)}\omega_{11}^2\omega^{ii} - \frac{C}{1-\delta}\left[\omega^{ii}(1+\omega_{11}) + \omega_{11}^2\right]. \tag{3.42}$$

Bây giờ sẽ ta đánh giá $\mathcal{L}A_{11}$. Từ Bổ đề 3.2.3 và (3.23), ta có

$$\begin{aligned} \mathcal{L}A_{11} = F^{ij}&\big[D_{x_ix_j}A_{11} + D_{x_iz}A_{11}u_j + D_{x_ip_k}A_{11}u_{jk} + D_{x_jz}A_{11}u_i + D_{zz}A_{11}u_iu_j \\ &+ D_{zp_k}A_{11}u_iu_{jk} + D_zA_{11}u_{ij} + D_{x_jp_k}A_{11}u_{ik} + D_{zp_k}A_{11}u_ju_{ik} + A_{11,k\ell}u_{ik}u_{j\ell} \\ &+ D_{p_k}A_{11}u_{ijk} - D_{p_k}A_{ij}\big(D_{x_k}A_{11} + D_zA_{11}u_k + D_{p_\ell}A_{11}u_{k\ell}\big) \\ &- D_{p_k}B_{ij}\big(D_{x_k}A_{11} + D_zA_{11}u_k + D_{p_\ell}A_{11}u_{k\ell}\big)\big] - D_{p_k}\hat{f}(D_{x_k}A_{11} + D_zA_{11}u_k + D_{p_\ell}A_{11}u_{k\ell}) \\ \le F^{ij}&\left[A_{11,k\ell}u_{ik}u_{j\ell} + D_{p_k}A_{11}u_{ijk}\right] + C\left[\omega^{ii}(1+\omega_{jj}) + \omega_{ii}\right]. \end{aligned}$$

Từ phương trình (3.36) với $\xi = e_k$, trong đó e_k là véc tơ đơn vị thứ k, Bổ đề 3.2.3, (3.22) và (3.23), ta có

$$\begin{aligned} D_{p_k}A_{11}F^{ij}u_{ijk} = D_{p_k}A_{11}\big[F^{ij}\big(D_{x_k}A_{ij} + D_zA_{ij}u_k + D_{p_\ell}A_{ij}u_{k\ell} + D_{x_k}B_{ij} + D_zB_{ij}u_k \\ + D_{p_\ell}B_{ij}u_{k\ell}\big) + D_{x_k}\hat{f} + D_z\hat{f}u_k + D_{p_\ell}\hat{f}u_{k\ell}\big] \le C\left[\omega^{ii}(1+\omega_{jj}) + \omega_{ii}\right]. \end{aligned}$$

Từ Bổ đề 3.2.3, (3.21) và (3.32), ta có

$$\begin{aligned} F^{ij}A_{11,k\ell}u_{ik}u_{j\ell} &= R^{ji}(R_{ik} + A_{ik} + B_{ik})(R_{\ell j} + A_{\ell j} + B_{\ell j})A_{11,k\ell} \\ &= R_{\ell j}A_{11,j\ell} + (A_{\ell j} + B_{\ell j})A_{11,j\ell} + (A_{ik} + B_{ik})A_{11,ki} \\ &\quad + R^{ji}(A_{ik} + B_{ik})(A_{\ell j} + B_{\ell j})A_{11,k\ell} \le C\big(1 + \omega_{ii} + \omega^{ii}\big). \end{aligned}$$

Từ các đánh giá trên và chú ý $\omega_{ii} \le \omega_{11}, i = 1, \dots, n$, ta nhận được

$$\mathcal{L}A_{11} \le C\left[\omega^{ii}(1+\omega_{11}) + \omega_{11}\right] \le C\big[\omega^{ii}(1+\omega_{11}) + \omega_{11}^2\big]. \tag{3.43}$$

Bằng cách kết hợp (3.38), (3.42) và (3.43), ta thu được đánh giá cho $\mathcal{L}\omega_{11}$ tại x^0,

$$\mathcal{L}\omega_{11} \ge \frac{(1-\delta)a_0}{4(1+\delta^2)}\omega_{11}^2\omega^{ii} - \frac{C}{1-\delta}\big[\omega^{ii}(1+\omega_{11}) + \omega_{11}^2\big]. \tag{3.44}$$

Ta xét hai khả năng sau:

- Nếu $\frac{(1-\delta)a_0}{8(1+\delta^2)}\omega^{ii} \le \frac{C}{1-\delta}$, tức là $\omega^{ii} \le \frac{8(1+\delta^2)C}{(1-\delta)^2a_0}$. Khi đó từ (3.26), ta dễ dàng suy ra $\omega_{11} \le \frac{C}{(1-\delta)^{2(n-1)}}$, với một hằng số C khác.

- Nếu $\frac{(1-\delta)a_0}{8(1+\delta^2)}\omega^{ii} \ge \frac{C}{1-\delta}$, khi đó từ (3.44) ta có

$$\mathcal{L}\omega_{11} \ge \left[\frac{(1-\delta)a_0}{8(1+\delta^2)}\omega_{11}^2 - \frac{C}{1-\delta}\omega_{11} - \frac{C}{1-\delta}\right]\omega^{ii}.$$

  Kết hợp đánh giá này với (3.35) cho ta

$$0 \ge \left[\frac{(1-\delta)a_0}{8(1+\delta^2)}\omega_{11}^2 - \frac{C}{1-\delta}\omega_{11} - \frac{C}{1-\delta}\right]\omega^{ii}.$$

  Từ hệ thức trên ta nhận được đánh giá $\omega_{11} \le \frac{C}{(1-\delta)^2}$, với một hằng số C khác.

Như vậy, từ (3.44) ta đã chứng minh được $\omega_{11}(x^0) \le C$, trong đó C là hằng số dương chỉ phụ thuộc vào $M_0, M_1, n, a_0, \delta, \beta_1, \beta_2, \beta_3, b_0, A, f$ và Ω. Do đó từ (3.34), ta có

$$\sup_{x\in\Omega}\lambda_{\max}(\omega(x,u)) \le C. \tag{3.45}$$

Trường hợp 2: $x^0 \in \partial\Omega$. Từ (3.34), ta có

$$\sup_{x\in\Omega}\lambda_{\max}(\omega(x,u)) \le \sup_{x\in\partial\Omega}\lambda_{\max}(\omega(x,u)). \tag{3.46}$$

Từ (3.45) và (3.46), ta nhận được đánh giá (3.19). Từ (3.19), hệ thức $\omega(x,u) = D^2u - A(x,u,Du)$ và các Mệnh đề 1.1.3, 1.1.4, ta dễ dàng suy ra đánh giá (3.20). Định lý được chứng minh. □

3.3 Đánh giá trên biên các đạo hàm cấp hai của nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet cho phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng

Như đã chỉ ra trong Định lý 3.2.1, để thiết lập đánh giá tiên nghiệm đối với các đạo hàm cấp hai của nghiệm δ-elliptic của phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng (3.1) trong $\overline{\Omega}$, ta đưa về việc thiết lập đánh giá tương ứng trên biên $\partial\Omega$. Trong mục này, luận án sẽ thiết lập đánh giá $|D^2u| \le C$ trên biên $\partial\Omega$ cho nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet (3.1)-(3.2) dựa theo sơ đồ và phương pháp được đề xuất bởi nhóm của N.S. Trudinger ([18, 20, 38]) cho trường hợp phương trình kiểu Monge-Ampère đối xứng.

3.3.1 Phát biểu định lý chính

Định lý 3.3.1 *Giả sử $u(x) \in C^4(\overline{\Omega})$ là nghiệm elliptic của bài toán Dirichlet* (3.1)-(3.2), *trong đó $\varphi(x) \in C^4(\overline{\Omega})$ và $\partial\Omega \in C^4$. Giả sử tồn tại một nghiệm dưới elliptic $\underline{u}(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ của phương trình* (3.3) *tương ứng với* (3.1), *trong đó $B(x,z,p) \equiv 0$ và $\underline{u}(x) = \varphi(x)$ trên $\partial\Omega$, và giả sử các điều kiện sau được thỏa mãn:*

(i) $\max\left\{\sup_{\Omega}|u|, \sup_{\Omega}|\underline{u}|\right\} \le M_0,\ \max\left\{\sup_{\Omega}|Du|, \sup_{\Omega}|D\underline{u}|\right\} \le M_1;$

(ii) $D_zA(x,z,p) = [D_zA_{ij}(x,z,p)] \ge 0,$ *trong* Γ;

(iii) $A(x,z,p)$ *là chính quy chặt trong* Γ *thỏa mãn* (3.18) *với* $a_0 > 0$;

(iv) $\left|B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\right| \le \delta \min\{\lambda_u, \lambda_{\underline{u}}\}|\xi|^2;$

(v) $\left|D_zB_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\right| \le \beta_1 \min\{\lambda_u, \lambda_{\underline{u}}\}|\xi|^2;$

(vi) $\left|D_{x_k}B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\right|, \left|D_{p_k}B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\right| \le \beta_2 \min\{\lambda_u, \lambda_{\underline{u}}\}|\xi|^2|\eta|;$

(vii) $\left|D_{p_kp_\ell}B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\eta_\ell\right| \le b_0|\xi|^2|\eta|^2;$

(viii) $f(x,z,p) > 0,$ *trong* Γ;

(ix) $\inf_{(x,z,p)\in\Gamma}\left(\dfrac{D_zf}{f}\right)(x,z,p) \ge \dfrac{n\delta}{1+\delta^2}\beta_1,$

trong đó M_0, M_1, β_2 là các hằng số dương và δ, β_1, b_0 là các hằng số không âm, $0 \le \delta < 1, 0 \le b_0 \le a_0$, các điều kiện (iv)-(vii) *thỏa mãn với mọi $(x,z,p) \in \Gamma$ và $\xi \in \mathbb{C}^n$, $\eta \in \mathbb{R}^n$.*

Khi đó ta có các đánh giá trên biên

$$\sup_{x\in\partial\Omega}\left|D^2u(x)\right| \le C, \tag{3.47}$$

$$\sup_{x\in\partial\Omega}\lambda_{\max}(\omega(x,u)) \le C, \tag{3.48}$$

trong đó C là hằng số dương chỉ phụ thuộc vào $M_0, M_1, n, a_0, \delta, \beta_1, \beta_2, b_0, A, f, \underline{u}, \varphi$ và Ω.

Nhận xét 3.3.2 Vì $\underline{u}(x)$ là một nghiệm dưới elliptic của phương trình (3.3) nên từ Mệnh đề 2.2.2 ta suy ra $\underline{u}(x)$ cũng là một nghiệm dưới elliptic của phương trình (3.1). Do đó từ điều kiện (iv), ta suy ra u và $\underline{u}$ lần lượt là nghiệm và nghiệm dưới δ-elliptic của phương trình (3.1). Từ điều này và các giả thiết (ii), (v), (viii) và (ix), ta nhận thấy tất cả các giả thiết của nguyên lý so sánh (Định lý 3.1.1) được thỏa mãn với hai hàm được so sánh u và $\underline{u}$. Từ đó ta có

$$u \geq \underline{u} \text{ trong } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \geq \frac{\partial \underline{u}}{\partial \nu} \text{ trên } \partial\Omega \text{ (ν là véc tơ pháp tuyến trong đơn vị của $\partial\Omega$)},$$

trong đó bất đẳng thức thứ hai được suy ra từ bất đẳng thức thứ nhất và $u = \underline{u}$ trên $\partial\Omega$.

3.3.2 Làm phẳng biên

Để thiết lập được đánh giá đối với các đạo hàm cấp hai tại điểm $x^0 \in \partial\Omega$ tùy ý, ta thường dùng kỹ thuật làm phẳng biên, tức là dùng các phép biến đổi tọa độ để phần biên nằm trong một lân cận đủ nhỏ của x^0 có dạng phẳng. Trong mục này, luận án sẽ xây dựng một phép đổi biến thích hợp để từ đó có thể chứng minh được Định lý 3.3.1.

Trước tiên ta nhận thấy, dạng của phương trình (3.1) và các giả thiết của Định lý 3.3.1 là bất biến dưới các phép tịnh tiến và phép quay hệ tọa độ. Giả sử $x^0 \in \partial\Omega$ là điểm tùy ý cho trước, không mất tính tổng quát, ta có thể giả thiết x^0 là gốc tọa độ và véc tơ pháp tuyến trong đơn vị của $\partial\Omega$ tại điểm này có giá nằm trên trục tọa độ x_n và hướng theo chiều dương của trục x_n. Khi đó phần biên $\partial\Omega$, nằm trong một lân cận $\mathcal{N}$ đủ nhỏ của x^0, là đồ thị của hàm

$$x_n = h(x'),$$

thỏa mãn $h(0) = 0, Dh(0) = 0$, trong đó $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. Ta sẽ làm phẳng phần biên này. Cụ thể, ta xét vi đồng phôi $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ cho bởi

$$y = \psi(x) = (x', x_n - h(x')), \quad x = (x', x_n) \in \Omega, \; y \in \tilde{\Omega} := \psi(\Omega). \tag{3.49}$$

Ta sẽ khảo sát sự thay đổi của dạng phương trình (3.1) và các giả thiết của Định lý 3.3.1 dưới phép đổi biến (3.49). Ký hiệu $J_{ij} = \dfrac{\partial \psi_j}{\partial x_i}, i, j = 1, \ldots, n$. Khi đó

$$J = [J_{ij}]_{n\times n} = \begin{bmatrix} E_{(n-1)\times(n-1)} & -Dh \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; J^{-1} = [J^{ij}]_{n\times n} = \begin{bmatrix} E_{(n-1)\times(n-1)} & Dh \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{3.50}$$

hơn nữa,

$$D_{x_k} J^{-1} = \left[D_{x_k} J^{ij}\right]_{n\times n} = \begin{bmatrix} 0 & D(D_{x_k} h) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{3.51}$$

Với phép đổi biến (3.49), ta đặt

$$v(y) = u(x), \quad \underline{v}(y) = \underline{u}(x). \tag{3.52}$$

Ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_i},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}=\sum_{k,\ell=1}^{n}\frac{\partial^2 v}{\partial y_k\partial y_\ell}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_\ell}{\partial x_j}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial y_k}\frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i\partial x_j},\quad i,j=1,\dots,n.$$

Suy ra

$$Du=JDv,\ D^2u=JD^2vJ^T+\sum_{k=1}^{n}v_kD^2\psi_k. \tag{3.53}$$

Do đó phương trình (3.1) được đưa về dạng

$$\det\big[D^2v-\tilde{A}(y,v,Dv)-\tilde{B}(y,v,Dv)\big]=\tilde{f}(y,v,Dv),\quad \text{trong } \tilde{\Omega}, \tag{3.54}$$

trong đó

$$\begin{cases}\tilde{A}(y,z,p) &= J^{-1}\big[A(\psi^{-1}(y),z,Jp)-\sum_{k=1}^{n}p_kD^2\psi_k\big]\big(J^{-1}\big)^T,\\ \tilde{B}(y,z,p) &= J^{-1}B\big(\psi^{-1}(y),z,Jp\big)\big(J^{-1}\big)^T,\\ \tilde{f}(y,z,p) &= f\big(\psi^{-1}(y),z,Jp\big).\end{cases} \tag{3.55}$$

Ta nhận thấy dạng của phương trình (3.1) là bất biến qua phép đổi biến (3.49).

Ký hiệu $s_1(y),\dots,s_n(y)$ là các giá trị riêng của ma trận đối xứng $S(y)=(JJ^T)\big(\psi^{-1}(y)\big)$ trong $\tilde{\Omega}$, trong đó $s_1\ge\cdots\ge s_n$. Bằng tính toán, từ (3.50) ta có $s_j=1, j=2,\dots,n-1$ và

$$\begin{aligned}s_1&=\frac{\big(2+|Dh|^2\big)+\sqrt{\big(2+|Dh|^2\big)^2-4}}{2},\\ s_n&=\frac{\big(2+|Dh|^2\big)-\sqrt{\big(2+|Dh|^2\big)^2-4}}{2}.\end{aligned} \tag{3.56}$$

Rõ ràng, $s_1,\dots,s_n$ cũng là các giá trị riêng của $S^{-1}=\big(J^{-1}\big)^TJ^{-1}$ và do đó chúng cũng là các giá trị riêng của $J^{-1}\big(J^{-1}\big)^T$. Ký hiệu $B_{\rho_0}(0)$ là hình cầu trong y-không gian có bán kính ρ_0 và tâm tại $y^0=0$ sao cho $B_{\rho_0}(0)\subset\subset\tilde{\mathcal{N}}:=\psi(\mathcal{N})$. Đặt

$$s_0:=\max_{\overline{B}_{\rho_0}(0)}s_1(y)=\max_{\overline{B}_{\rho_0}(0)}(s_n(y))^{-1}. \tag{3.57}$$

Ta có $s_1(0)=s_n(0)=1$ và do đó $s_0\ge 1$. Chú ý $\delta\in[0,1)$, ta chọn ρ_0 đủ nhỏ sao cho

$$s_0^6\delta<1. \tag{3.58}$$

Từ (3.55), ta có

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}(y,v)&\equiv D^2v-\tilde{A}(y,v,Dv)=J^{-1}\omega(x,u)\big(J^{-1}\big)^T,\\ \tilde{\omega}(y,\underline{v})&\equiv D^2\underline{v}-\tilde{A}(y,\underline{v},D\underline{v})=J^{-1}\omega(x,\underline{u})\big(J^{-1}\big)^T.\end{aligned}$$

Ta sẽ chứng minh

$$\min\{\lambda_u,\lambda_{\underline{u}}\}\le s_0\min\{\lambda_v,\lambda_{\underline{v}}\}, \tag{3.59}$$

trong đó $\lambda_v = \min_{y\in\tilde{\Omega}_{\rho_0}} \lambda_{\min}(\tilde{\omega}(y,v))$, $\lambda_{\underline{v}} = \min_{y\in\tilde{\Omega}_{\rho_0}} \lambda_{\min}(\tilde{\omega}(y,\underline{v}))$, $\tilde{\Omega}_{\rho_0} := \tilde{\Omega}\cap B_{\rho_0}(0)$. Thật vậy, với mọi $\xi \in \mathbb{R}^n$ và $y \in \tilde{\Omega}_{\rho_0}$, ta có

$$\begin{aligned}(\tilde{\omega}(y,v)\xi,\xi) &= \big(J^{-1}\omega(x,u)(J^{-1})^T\xi,\xi\big) = \big(\omega(x,u)(J^{-1})^T\xi,(J^{-1})^T\xi\big)\\ &\geq \lambda_{\min}(\omega(x,u))\big|(J^{-1})^T\xi\big|^2 \geq \lambda_{\min}(\omega(x,u))\|J^T\|^{-2}|\xi|^2 \geq \lambda_u s_0^{-1}|\xi|^2,\end{aligned}$$

trong đó $J = J(x)$, $J^{-1} = J^{-1}(x)$, $x = \psi^{-1}(y)$ và bất đẳng thức cuối được suy ra từ (3.57). Từ đó suy ra $\lambda_v \geq s_0^{-1}\lambda_u$ hay $\lambda_u \leq s_0\lambda_v$. Tương tự, ta cũng suy ra được $\lambda_{\underline{u}} \leq s_0\lambda_{\underline{v}}$. Từ các đánh giá này, ta thu được (3.59).

Bây giờ ta kiểm tra tính bất biến của các giả thiết của Định lý 3.3.1. Dễ thấy $v(y)$ là nghiệm elliptic của (3.54) và $\underline{v}(y)$ là nghiệm dưới elliptic của phương trình tương ứng với (3.54) mà trong đó $\tilde{B} \equiv 0$. Hơn nữa, ta có $v(y) = \underline{v}(y) = \tilde{\varphi}(y)$ trên $\partial\tilde{\Omega}$, trong đó $\tilde{\varphi}(y) = \varphi(x)$. Tính bất biến của các giả thiết (i)-(viii) của Định lý 3.3.1 được chứng minh bởi bổ đề sau đây.

Bổ đề 3.3.3 *Dưới phép đổi biến* (3.49), *các giả thiết* (i)-(viii) *của Định lý 3.3.1 là bất biến trong* $\tilde{\Omega}_{\rho_0}$. *Cụ thể, ta có*

(i)' $\max\Big\{\sup_{\tilde{\Omega}_{\rho_0}}|v|, \sup_{\tilde{\Omega}_{\rho_0}}|\underline{v}|\Big\} \leq \tilde{M}_0,\ \max\Big\{\sup_{\tilde{\Omega}_{\rho_0}}|Dv|, \sup_{\tilde{\Omega}_{\rho_0}}|D\underline{v}|\Big\} \leq \tilde{M}_1,\ \tilde{M}_0 = M_0, \tilde{M}_1 = \sqrt{s_0}M_1;$

(ii)' $D_z\tilde{A}(y,z,p) = [D_z\tilde{A}_{ij}(y,z,p)] \geq 0$, *trong* $\tilde{\Omega}_{\rho_0}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$;

(iii)' $\tilde{A}(y,z,p) = [\tilde{A}_{ij}(y,z,p)]_{n\times n}$ *là chính quy chặt trong* $\tilde{\Omega}_{\rho_0}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, *thỏa mãn*

$$\tilde{A}_{ij,k\ell}(y,z,p)\xi_i\xi_j\eta_k\eta_\ell \geq \tilde{a}_0|\xi|^2|\eta|^2,\quad \tilde{a}_0 = s_0^{-2}a_0,$$

với mọi $(y,z,p)\in\tilde{\Omega}_{\rho_0}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ *và* $\xi,\eta\in\mathbb{R}^n, \xi\perp\eta$;

(iv)' $\big|\tilde{B}_{ij}(y,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\big| \leq \tilde{\delta}\min\{\lambda_v,\lambda_{\underline{v}}\}|\xi|^2,\quad \tilde{\delta} = s_0^2\delta;$

(v)' $\big|D_z\tilde{B}_{ij}(y,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\big| \leq \tilde{\beta}_1\min\{\lambda_v,\lambda_{\underline{v}}\}|\xi|^2,\quad \tilde{\beta}_1 = s_0^2\beta_1;$

(vi)' $\big|D_{y_k}\tilde{B}_{ij}(y,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\big|, \big|D_{p_k}\tilde{B}_{ij}(y,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\big| \leq \tilde{\beta}_2\min\{\lambda_v,\lambda_{\underline{v}}\}|\xi|^2|\eta|$, *trong đó*

$$\tilde{\beta}_2 = 2\sqrt{n}s_0^2\delta\Bigg(\max_k \sup_{y\in\tilde{\Omega}_{\rho_0}}\big\|D_{x_k}J^{-1}\big(\psi^{-1}(y)\big)\big\|\Bigg)+s_0^{5/2}\beta_2;$$

(vii)' $\big|\tilde{B}_{ij,k\ell}(y,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\eta_\ell\big| \leq \tilde{b}_0|\xi|^2|\eta|^2,\quad \tilde{b}_0 = s_0^2b_0;$

(viii)' $\tilde{f}(y,z,p) > 0,$

trong đó các hệ thức (iv)'-(viii)' *thỏa mãn với mọi* $(y,z,p)\in\tilde{\Omega}_{\rho_0}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ *và* $\xi\in\mathbb{C}^n$, $\eta\in\mathbb{R}^n$.

Chứng minh. (i)' Dễ thấy (i)' được suy ra từ (i) và (3.52).

(ii)' Dễ thấy (ii)' được suy ra từ (ii) và (3.55).

(iii)' Giả sử $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, $\xi \perp \eta$. Bằng tính toán, từ (3.55) ta có

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} \tilde{A}_{ij,k\ell}\xi_i\xi_j\eta_k\eta_\ell &= \sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} \left(\sum_{m,r,s,t=1}^{n} J^{im}J^{jr}J_{sk}J_{t\ell}A_{mr,st} \right) \xi_i\xi_j\eta_k\eta_\ell \\ &= \sum_{m,r,s,t=1}^{n} A_{mr,st} \left(\sum_{i=1}^{n} J^{im}\xi_i \right) \left(\sum_{j=1}^{n} J^{jr}\xi_j \right) \left(\sum_{k=1}^{n} J_{sk}\eta_k \right) \left(\sum_{\ell=1}^{n} J_{t\ell}\eta_\ell \right).\end{aligned} \tag{3.60}$$

Đặt $\xi' = \big(J^{-1}\big)^T\xi$, $\eta' = J\eta$, khi đó $\xi' \perp \eta'$. Do đó từ (iv), (3.57) và (3.60), ta suy ra

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} \tilde{A}_{ij,k\ell}\xi_i\xi_j\eta_k\eta_\ell &= \sum_{m,r,s,t=1}^{n} A_{mr,st}\xi'_m\xi'_r\eta'_s\eta'_t \geq a_0|\xi'|^2|\eta'|^2 \\ &\geq a_0\big(s_0^{-1}|\xi|^2\big)\big(s_0^{-1}|\eta|^2\big) = \tilde{a}_0|\xi|^2|\eta|^2,\ \tilde{a}_0 = s_0^{-2}a_0.\end{aligned}$$

(iv)' Giả sử $\xi \in \mathbb{C}^n$ tùy ý. Từ (3.55), (3.57), (3.59) và (iii), ta có

$$\begin{aligned}\big|\tilde{B}_{ij}\xi_i\overline{\xi}_j\big| &= \big|\big(B(J^{-1})^T\xi, (J^{-1})^T\xi\big)\big| \leq \delta\min\{\lambda_u, \lambda_{\underline{u}}\}\big|(J^{-1})^T\xi\big|^2 \\ &\leq \delta\big(s_0\min\{\lambda_v, \lambda_{\underline{v}}\}\big)\big(s_0|\xi|^2\big) = \tilde{\delta}\min\{\lambda_v, \lambda_{\underline{v}}\}|\xi|^2, \quad \tilde{\delta} = s_0^2\delta.\end{aligned}$$

(v)' Bằng các lập luận tương tự như trong chứng minh (iii)', từ (3.55), (3.57), (3.59) và (iv) ta thu được (iv)'.

(vi)' Từ (3.50) và (3.55), ta có

$$D_{y_k}\tilde{B} = \sum_{\ell=1}^{n} J^{k\ell}\Big[\big(D_{x_\ell}J^{-1}\big)B(J^{-1})^T + J^{-1}(D_{x_\ell}B)(J^{-1})^T + J^{-1}B\big(D_{x_\ell}J^{-1}\big)^T\Big], \tag{3.61}$$

$$D_{p_k}\tilde{B} = \sum_{\ell=1}^{n} J^{k\ell}J^{-1}(D_{p_\ell}B)(J^{-1})^T,\ k = 1, \ldots, n. \tag{3.62}$$

Giả sử $\xi \in \mathbb{C}^n$, $\eta \in \mathbb{R}^n$ tùy ý. Từ (3.61), ta có

$$\big|D_{y_k}\tilde{B}\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\big| = \big|(D_{y_k}B\xi, \xi)\eta_k\big| \leq |S_1| + |S_2| + |S_3|, \tag{3.63}$$

trong đó

$$\begin{aligned}S_1 &= J^{k\ell}\big((D_{x_\ell}J^{-1})B(J^{-1})^T\xi, \xi\big)\eta_k, \\ S_2 &= J^{k\ell}\big(J^{-1}(D_{x_\ell}B)(J^{-1})^T\xi, \xi\big)\eta_k, \\ S_3 &= J^{k\ell}\big(J^{-1}B(D_{x_\ell}J^{-1})^T\xi, \xi\big)\eta_k.\end{aligned}$$

Đặt $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, trong đó $\zeta_\ell = \big((D_{x_\ell}J^{-1})B(J^{-1})^T\xi, \xi\big), \ell = 1, \ldots, n$. Ta có

$$|S_1| = \big|\big(J^{-1}\zeta, \eta\big)\big| \leq \|J^{-1}\||\zeta||\eta| \leq \|B\|\|J^{-1}\|^2 \left(\sum_{\ell=1}^{n} \|D_{x_\ell}J^{-1}\|^2 \right)^{1/2} |\xi|^2|\eta|.$$

Do đó từ (iv), (3.57) và (3.59), ta suy ra

$$|S_1| \le s_0^2\delta \left(\sum_{\ell=1}^{n} \|D_{x_\ell} J^{-1}\|^2\right)^{1/2} \min\{\lambda_v, \lambda_{\underline{v}}\}|\xi|^2|\eta|. \tag{3.64}$$

Tương tự như trên,

$$|S_3| \le s_0^2\delta \left(\sum_{\ell=1}^{n} \|D_{x_\ell} J^{-1}\|^2\right)^{1/2} \min\{\lambda_v, \lambda_{\underline{v}}\}|\xi|^2|\eta|. \tag{3.65}$$

Đặt $\eta'' = \big(J^{-1}\big)^T\eta \in \mathbb{R}^n$. Khi đó từ (vi) và (3.59), ta có

$$\begin{aligned}|S_2| &= \left|\sum_{\ell=1}^{n}\Big(D_{x_\ell}B\big(J^{-1}\big)^T\xi, \big(J^{-1}\big)^T\xi\Big)\eta''_\ell\right| \le \beta_2 \min\{\lambda_u, \lambda_{\underline{u}}\}\big|\big(J^{-1}\big)^T\xi\big|^2|\eta''| \\ &\le \beta_2(s_0\min\{\lambda_v, \lambda_{\underline{v}}\})\big(s_0|\xi|^2\big)\big(s_0^{1/2}|\eta|\big) \le s_0^{5/2}\beta_2\min\{\lambda_v, \lambda_{\underline{v}}\}|\xi|^2|\eta|.\end{aligned}$$

Như vậy,

$$|S_2| \le s_0^{5/2}\beta_2\min\{\lambda_v, \lambda_{\underline{v}}\}|\xi|^2|\eta|. \tag{3.66}$$

Kết hợp các đánh giá (3.63)-(3.66), ta thu được

$$\big|D_{y_k}\tilde{B}\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\big| \le \tilde{\beta}_2\min\{\lambda_v, \lambda_{\underline{v}}\}|\xi|^2|\eta|,$$

trong đó $\tilde{\beta}_2 = 2\sqrt{n}s_0^2\delta\left(\max_k \sup_{y\in\tilde{\Omega}_{\rho_0}} \big\|D_{x_k}J^{-1}\big(\psi^{-1}(y)\big)\big\|\right) + s_0^{5/2}\beta_2$.

Từ (3.62), ta có đánh giá tương tự (3.66),

$$\big|D_{p_k}\tilde{B}\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\big| \le s_0^{5/2}\beta_2\min\{\lambda_v, \lambda_{\underline{v}}\}|\xi|^2|\eta|.$$

Từ các đánh giá trên ta nhận được (vi)'.

(vii)' Giả sử $\xi \in \mathbb{C}^n$, $\eta \in \mathbb{R}^n$ tùy ý. Khi đó $\xi' = \big(J^{-1}\big)^T\xi \in \mathbb{C}^n, \eta' = J\eta \in \mathbb{R}^n$. Bằng các tính toán tương tự như trong (iii)', ta nhận được

$$\big|\tilde{B}_{ij,k\ell}\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\eta_\ell\big| = \big|B_{mr,st}\xi'_m\overline{\xi'}_r\eta'_s\eta'_t\big| \le b_0|\xi'|^2|\eta'|^2 \le \tilde{b}_0|\xi|^2|\eta|^2, \quad \tilde{b}_0 = s_0^2 b_0.$$

(viii)' Dễ thấy (viii)' được suy ra từ (viii) và (3.55).

Bổ đề được chứng minh. □

Nhận xét 3.3.4 (1) Từ (3.52), giả thiết $u = \underline{u}$ trên $\partial\Omega$ và Nhận xét 3.3.2, ta suy ra $v \ge \underline{v}$ trong $\tilde{\Omega}_{\rho_0}$, $v = \underline{v}$ và $D_n v \ge D_n\underline{v}$ trên $\partial\tilde{\Omega} \cap B_{\rho_0}(0)$.

(2) Từ (3.58), (iv)' và $s_0 \ge 1$, ta suy ra $\tilde{\delta} \in [0, 1)$.

(3) Từ (iii)' và (vii)', ta nhận thấy bất đẳng thức $\tilde{b}_0 \le \tilde{a}_0$ nói chung là không thỏa mãn. Tuy nhiên, từ Bổ đề 3.3.3, (3.58) và $0 \le b_0 \le a_0$, ta có

$$\tilde{\delta}\big|D_{p_kp_\ell}\tilde{B}_{ij}(y,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\eta_\ell\big| \le \big(s_0^2\delta\big)\big(s_0^2 b_0\big)|\xi|^2|\eta|^2 \le s_0^4\delta a_0|\xi|^2|\eta|^2 \le \tilde{a}_0|\xi|^2|\eta|^2,$$

với mọi $(y,z,p) \in \tilde{\Omega}_{\rho_0} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ và $\xi \in \mathbb{C}^n$, $\eta \in \mathbb{R}^n$. Từ đó ta thu được

$$\tilde{\delta}\big\|D_{p_kp_k}\tilde{B}(y,z,p)\big\| \le \tilde{a}_0, \quad \tilde{\delta}\big\|D_{p_kp_\ell}\tilde{B}(y,z,p)\big\| \le 2\tilde{a}_0 \ (k \ne \ell),$$

với mọi $(y,z,p) \in \tilde{\Omega}_{\rho_0} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ và $k, \ell = 1, \ldots, n$.

3.3.3 Chứng minh của Định lý 3.3.1

Chứng minh. Giả sử $x^0 \in \partial\Omega$ là điểm tùy ý cho trước. Từ các lập luận trong Mục 3.3.2, ta có thể đưa về xét bài toán Dirichlet đã được đổi biến để làm phẳng phần biên nằm trong lận cận đủ nhỏ của x^0. Ở đây, ta lại ký hiệu biến mới y qua x, ẩn hàm $v(y)$ qua $u(x)$. Cụ thể, ta có thể giả thiết $x^0 = 0$ và với hằng số $\rho_0 > 0$ đủ nhỏ, ta có

$$\Omega_{\rho_0} := \Omega \cap B_{\rho_0}(0) \subset \mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\},$$
$$T_{\rho_0} := \partial\Omega \cap B_{\rho_0}(0) \subset \partial\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}.$$

Hơn nữa, ta có thể giả thiết các hàm u và $\underline{u}$ lần lượt là nghiệm và nghiệm dưới δ-elliptic của phương trình (3.1) trong Ω_{ρ_0} và

$$\max\left\{\sup_{\Omega_{\rho_0}}|u|, \sup_{\Omega_{\rho_0}}|\underline{u}|\right\} \le M_0, \ \max\left\{\sup_{\Omega_{\rho_0}}|Du|, \sup_{\Omega_{\rho_0}}|D\underline{u}|\right\} \le M_1; \tag{3.67}$$

$$A_{ij,k\ell}(x,z,p)\xi_i\xi_j\eta_k\eta_\ell \ge a_0|\xi|^2|\eta|^2, \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^n, \xi \perp \eta; \tag{3.68}$$

$$\|B(x,z,p)\| \le \delta \min\{\lambda_u, \lambda_{\underline{u}}\}, \quad 0 \le \delta < 1; \tag{3.69}$$

$$\|D_z B(x,z,p)\| \le \beta_1 \min\{\lambda_u, \lambda_{\underline{u}}\}; \tag{3.70}$$

$$\|D_{x_k} B(x,z,p)\|, \|D_{p_k} B(x,z,p)\| \le \beta_2 \min\{\lambda_u, \lambda_{\underline{u}}\}, \quad k = 1, \ldots, n; \tag{3.71}$$

$$\delta\|D_{p_k p_k} B(x,z,p)\| \le a_0, \ \delta\|D_{p_k p_\ell} B(x,z,p)\| \le 2a_0 \ (k \ne \ell), \quad k, \ell = 1, \ldots, n, \tag{3.72}$$

$$f(x,z,p) > 0, \tag{3.73}$$

trong đó các bất đẳng thức (3.68)-(3.73) thỏa mãn với mọi $(x,z,p) \in \Omega_{\rho_0} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Ở đây và về sau trong chứng minh này, $\lambda_u := \min_{x \in \overline{\Omega}_{\rho_0}} \lambda_{\min}(\omega(x,u))$ và $\lambda_{\underline{u}} := \min_{x \in \overline{\Omega}_{\rho_0}} \lambda_{\min}(\omega(x,\underline{u}))$. Hơn nữa, ta có

$$u \ge \underline{u} \text{ trong } \Omega_{\rho_0}, \quad u = \underline{u} = \varphi \text{ trên } T_{\rho_0}, \tag{3.74}$$

và

$$D_n u \ge D_n \underline{u} \text{ trên } T_{\rho_0}. \tag{3.75}$$

Để chứng minh Định lý 3.3.1, luận án sẽ xây dựng các hàm chắn ở gần biên tương tự như nhóm của N.S. Trudinger đã làm cho trường hợp phương trình kiểu Monge-Ampère đối xứng. Đặt $\overline{d} = \overline{d}(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$. Ta có bổ đề sau đây.

Bổ đề 3.3.5 *Dưới các giả thiết* (3.67)-(3.75)*, tồn tại các số dương K_0, N_0 đủ lớn và μ_0, ρ đủ nhỏ sao cho hàm số*

$$\psi_0 = 1 - e^{K_0\left[(\underline{u}-u) - \mu_0\overline{d} + N_0\overline{d}^2\right]}, \tag{3.76}$$

thỏa mãn

$$\mathcal{L}\psi_0 \le -\varepsilon_0 \sum_{i=1}^n F^{ii} - \varepsilon_0 \text{ trong } \Omega_\rho, \quad \psi_0 \ge 0 \text{ trên } \partial\Omega_\rho, \tag{3.77}$$

với hằng số dương ε_0 nào đó, trong đó $K_0, N_0, \mu_0, \rho, \varepsilon_0$ chỉ phụ thuộc vào $M_0, M_1, n, a_0, \delta, \beta_1, \beta_2, \rho_0, A, f, \underline{u}$ và Ω_{ρ_0}, $\mathcal{L}$ là toán tử tuyến tính cho bởi (3.33) *và $\Omega_\rho := \Omega \cap B_\rho(0)$.*

Chứng minh. Giả sử $\underline{u}_\varepsilon = \underline{u} - \dfrac{\varepsilon}{2}|x|^2$, với hằng số dương ε sẽ được xác định sau. Khi đó ta có thể chọn $\varepsilon \in (0,1)$ đủ nhỏ sao cho $\omega(x, \underline{u}_\varepsilon) > 0$ trong $\overline{\Omega}_{\rho_0}$ và

$$\lambda_{\underline{u}_\varepsilon} \geq k_0 \lambda_{\underline{u}} > 0, \tag{3.78}$$

với hằng số dương k_0 nào đó thỏa mãn $k_0 > \delta$, trong đó $\lambda_{\underline{u}_\varepsilon} = \min\limits_{x\in\overline{\Omega}_{\rho_0}} \lambda_{\min}(\omega(x, \underline{u}_\varepsilon))$. Đặt

$$v = (\underline{u} - u) - \mu_0 \overline{d} + N_0 \overline{d}^2. \tag{3.79}$$

Khi đó $v = \dfrac{\varepsilon}{2}|x|^2 + \underline{u}_\varepsilon - u - \mu_0\overline{d} + N_0\overline{d}^2$. Xét L là toán tử tuyến tính cho bởi (3.33). Chú ý $L\big(\overline{d}^2\big) = 2\,\overline{d}(L\overline{d}) + 2F^{ij}D_i\overline{d}D_j\overline{d}$, ta có

$$\begin{aligned}
Lv &= \varepsilon F^{ii} - \varepsilon F^{ij}(D_{p_k}A_{ij} + D_{p_k}B_{ij})(x,u,Du)x_k \\
&\quad + F^{ij}\big[D_{ij}\underline{u}_\varepsilon - (A_{ij}+B_{ij})(x,\underline{u}_\varepsilon, D\underline{u}_\varepsilon) + 2N_0 D_i\overline{d}D_j\overline{d}\big] \\
&\quad - F^{ij}\big[D_{ij}u - (A_{ij}+B_{ij})(x,u,Du)\big] \\
&\quad + F^{ij}\left[(A_{ij}+B_{ij})(x,\underline{u}_\varepsilon, D\underline{u}_\varepsilon) - (A_{ij}+B_{ij})(x,u,D\underline{u}_\varepsilon)\right] \\
&\quad + F^{ij}\big[(A_{ij}+B_{ij})(x,u,D\underline{u}_\varepsilon) - (A_{ij}+B_{ij})(x,u,Du) \\
&\quad - (D_{p_k}A_{ij} + D_{p_k}B_{ij})(x,u,Du)D_k(\underline{u}_\varepsilon - u)\big] - \mu_0(L\overline{d}) + 2N_0\overline{d}(L\overline{d}).
\end{aligned} \tag{3.80}$$

Trước tiên, ta giả thiết $\rho < 1$ đủ nhỏ sao cho $B^+_{2\rho}(0) = \big\{x \in \mathbb{R}^n_+ : |x| < 2\rho\big\} \subset \Omega_{\rho_0}$. Khi đó $\Omega_\rho \subset B^+_{2\rho}(0) \subset \Omega_{\rho_0}$. Từ Bổ đề 3.2.3, (3.71) và chú ý $\overline{d}(x) = x_n$ với mọi $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega_{\rho_0}$, ta có $|L\overline{d}| \leq CF^{ii}$, và do đó

$$-\mu_0(L\overline{d}) + 2N_0\overline{d}(L\overline{d}) \geq -C(\mu_0 + 2N_0\rho)F^{ii}, \quad \text{trong } \Omega_\rho, \tag{3.81}$$

trong đó C phụ thuộc vào các đại lượng $M_0, M_1, n, \delta, \beta_2, A, \underline{u}$ và Ω_{ρ_0}. Trong chứng minh này, nếu không nói gì thêm, ta ký hiệu C để chỉ hằng số dương phụ thuộc vào các đại lượng như thế.

Cũng nhờ Bổ đề 3.2.3 và (3.71), ta nhận được

$$\big|F^{ij}(D_{p_k}A_{ij} + D_{p_k}B_{ij})x_k\big| \leq |x|(|D_pA| + \sqrt{n}\,\delta\beta_2\lambda_{\underline{u}})F^{ii}, \tag{3.82}$$

trong đó $|D_pA| = \big(\sum_{i,j,k=1}^n |D_{p_k}A_{ij}|^2\big)^{1/2}$.

Bây giờ, ta sẽ chứng minh đánh giá sau với hằng số ρ đủ nhỏ,

$$F^{ij}\big[(A_{ij}+B_{ij})(x,\underline{u}_\varepsilon, D\underline{u}_\varepsilon) - (A_{ij}+B_{ij})(x,u,D\underline{u}_\varepsilon)\big] \geq -\frac{\varepsilon}{4}F^{ii}, \quad \text{trong } \Omega_\rho. \tag{3.83}$$

Thật vậy, bằng cách áp dụng định lý Lagrange cho hàm $h_1(t) := F^{ij}(A_{ij}+B_{ij})(x, t\underline{u}_\varepsilon + (1-t)u, D\underline{u}_\varepsilon)$ và sử dụng Bổ đề 3.2.3, (3.67) và (3.70), ta nhận được

$$\begin{aligned}
&F^{ij}\big[(A_{ij}+B_{ij})(x,\underline{u}_\varepsilon, D\underline{u}_\varepsilon) - (A_{ij}+B_{ij})(x,u,D\underline{u}_\varepsilon)\big] = h_1(1) - h_1(0) \\
&\quad = h_1'(t_1) = (\underline{u}_\varepsilon - u)\big[F^{ij}(D_zA_{ij} + D_zB_{ij})(x,\overline{z}, D\underline{u}_\varepsilon)\big] \\
&\quad \geq -|\underline{u}_\varepsilon - u|\big(|D_zA(x,\overline{z},D\underline{u}_\varepsilon)| + \delta\beta_1\lambda_{\underline{u}}\big)F^{ii} \geq -h_0\Big(2M_1 + \frac{\varepsilon}{2}\Big)|x|F^{ii},
\end{aligned}$$

trong đó $\overline{z} = t_1\underline{u}_\varepsilon + (1-t_1)u$, $t_1 \in (0,1)$, $h_0 := \max\limits_{(x,z,p)\in V} |D_z A(x,z,p)| + \delta\beta_1\lambda_{\underline{u}} \geq 0$, với

$$V := \{(x,z,p) \in \overline{\Omega}_{\rho_0} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |z| \leq M_0 + 1/2, |p| \leq M_1 + 1\}.$$

Ở đây, ta đã sử dụng đánh giá

$$|(\underline{u}_\varepsilon - u)(x)| \leq |\underline{u}(x) - \underline{u}(0)| + |u(x) - u(0)| + \frac{\varepsilon}{2}|x|^2 \leq \Big(2M_1 + \frac{\varepsilon}{2}\Big)|x|,$$

điều này được suy ra từ (3.67), $\underline{u}(0) = u(0)$ và $\rho \in (0,1)$. Từ đó ta có, nếu $h_0 = 0$ thì (3.83) được thỏa mãn, còn nếu $h_0 > 0$ thì (3.83) được thỏa mãn nếu ρ đủ nhỏ sao cho $\rho < \min\big\{\frac{\varepsilon}{16M_1h_0}, \frac{1}{4h_0}\big\}$. Như vậy, (3.83) được chứng minh.
Tiếp theo, ta giả thiết

$$\mu_0 + 2N_0\rho \leq 1. \tag{3.84}$$

Bằng cách áp dụng khai triển Taylor tại $t = 0$ cho hàm $h_2(t) := F^{ij}(A_{ij} + B_{ij})(x, u, tD\underline{u}_\varepsilon + (1-t)Du)$, từ Bổ đề 3.2.3, (3.57), (3.67), (3.72), (3.79) và (3.84), ta thu được

$$\begin{aligned}
&F^{ij}\big[(A_{ij} + B_{ij})(x,u,D\underline{u}_\varepsilon) - (A_{ij} + B_{ij})(x,u,Du) \\
&- (D_{p_k}A_{ij} + D_{p_k}B_{ij})(x,u,Du)D_k(\underline{u}_\varepsilon - u)\big] = h_2(1) - h_2(0) - h_2'(0) \\
&= \frac{1}{2}h_2''(t_2) = \frac{1}{2}F^{ij}(A_{ij,k\ell} + B_{ij,k\ell})(x,u,\overline{\overline{p}})D_kvD_\ell v \\
&+ \frac{\varepsilon}{2}F^{ij}(A_{ij,k\ell} + B_{ij,k\ell})(x,u,\overline{\overline{p}})\big[\varepsilon x_k - 2D_kv - 2(\mu_0 - 2N_0\overline{d})D_k\overline{d}\big]x_\ell \\
&+ \frac{1}{2}(\mu_0 - 2N_0\overline{d})F^{ij}(A_{ij,k\ell} + B_{ij,k\ell})(x,u,\overline{\overline{p}})\big[2D_kv + (\mu_0 - 2N_0\overline{d})D_k\overline{d}\big]D_\ell\overline{d} \\
&\geq \frac{1}{2}F^{ij}(A_{ij,k\ell} + B_{ij,k\ell})(x,u,\overline{\overline{p}})D_kvD_\ell v - \frac{\varepsilon}{2}(4M_1+1)(|D_{pp}A| + 2na_0)|x|F^{ii} \\
&- C(\mu_0 + 2N_0\rho)F^{ii},
\end{aligned} \tag{3.85}$$

trong đó $\overline{\overline{p}} = t_2D\underline{u}_\varepsilon + (1-t_2)Du$, $t_2 \in (0,1)$, $|D_{pp}A| = \big(\sum_{i,j,k,\ell=1}^n |D_{p_kp_\ell}A_{ij}|^2\big)^{1/2}$, hằng số C phụ thuộc thêm vào a_0, không phụ thuộc vào μ_0 và N_0. Ở đây, ta đã sử dụng đánh giá sau

$$|\varepsilon x - 2Dv - 2(\mu_0 - 2N_0\overline{d})D\overline{d}| = |\varepsilon x - 2(D\underline{u} - Du)| \leq 4M_1 + 1,$$

điều này được suy ra từ (3.67) và (3.79).
Từ (3.69), ta có $\mu(B) \leq \delta\min\{\lambda_u, \lambda_{\underline{u}}\}$, trong đó $\mu(B)$ được xác định bởi (0.22) với Γ được thay bởi $\Omega_{\rho_0} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Khi đó từ (3.78), ta có $\mu(B) \leq \delta'\lambda_{\underline{u}_\varepsilon}$, trong đó $\delta' = \frac{\delta}{k_0} \in [0,1)$. Đặt $\delta^* = \max\{\delta, \delta'\} \in [0,1)$. Dễ thấy $R(x,u), R(x,\underline{u}_\varepsilon) \in D_{\delta^*,\mu(B)}$, trong đó $D_{\delta^*,\mu(B)}$ là tập hợp được xác định tương tự như (0.26) với δ, μ lần lượt được thay bởi $\delta^*, \mu(B)$. Chú ý $D\overline{d} \otimes D\overline{d} \geq 0$, từ đó ta suy ra $R^{(0)} \equiv R(x,u), R^{(1)} \equiv R(x,\underline{u}_\varepsilon) + 2N_0D\overline{d} \otimes D\overline{d} \in D_{\delta^*,\mu(B)}$. Do đó ta có thể áp dụng Định lý 2.2.21 về tính d-lõm của hàm $F(R) = \log(\det R)$ với $R^{(0)}, R^{(1)}$ và thu được

$$\begin{aligned}
&F^{ij}\big[D_{ij}\underline{u}_\varepsilon - (A_{ij} + B_{ij})(x,\underline{u}_\varepsilon,D\underline{u}_\varepsilon) + 2N_0D_i\overline{d}D_j\overline{d}\big] \\
&\quad - F^{ij}\big[D_{ij}u - (A_{ij} + B_{ij})(x,u,Du)\big] \geq \log\det R^{(1)} - \log\det R^{(0)} - d(n,\delta^*) \\
&\quad \geq \log\det\big[\omega(x,\underline{u}_\varepsilon) + 2N_0D\overline{d} \otimes D\overline{d}\big] - \hat{f}(x,u,Du) - d(n,\delta^*),
\end{aligned} \tag{3.86}$$

trong đó $d(n,\delta^*) = 2n\delta^{*2}\Big(1+\frac{4n^2\delta^{*2}}{1-\delta^{*2}}\Big)$, bất đẳng thức cuối được suy ra từ Mệnh đề 2.2.2 và (3.31).
Từ (3.78) và chú ý các giá trị riêng của $D\overline{d}\otimes D\overline{d}$ là $0,\ldots,0,1$, ta suy ra

$$\det\big[\omega(x,\underline{u}_\varepsilon)+2N_0D\overline{d}\otimes D\overline{d}\big] \geq \big(\lambda_{\underline{u}_\varepsilon}\big)^{n-1}\big(\lambda_{\underline{u}_\varepsilon}+2N_0\big) \geq \big(k_0\lambda_{\underline{u}}\big)^{n-1}\big(k_0\lambda_{\underline{u}}+2N_0\big).$$

Do đó ta có thể giả thiết đại lượng $\log\det[\omega(x,\underline{u}_\varepsilon)+2N_0D\overline{d}\otimes D\overline{d}]$ là lớn tùy ý bằng cách chọn N_0 đủ lớn. Giả sử N_0 đủ lớn sao cho

$$\log\det\big[\omega(x,\underline{u}_\varepsilon)+2N_0D\overline{d}\otimes D\overline{d}\big] \geq \max_V\big|\hat{f}(x,z,p)\big| + d(n,\delta^*) + \tilde{M}, \tag{3.87}$$

trong đó $\tilde{M}$ là hằng số dương sẽ được xác định sau.
Đặt

$$m_0 := \max_{(x,z,p)\in V}\Big[|D_pA(x,z,p)| + \frac{4M_1+1}{2}|D_{pp}A(x,z,p)|\Big] + \sqrt{n}\,\delta\beta_2\lambda_{\underline{u}} + na_0(4M_1+1).$$

Giả sử ρ đủ nhỏ sao cho $\rho < \frac{1}{4m_0}$. Khi đó từ (3.80)-(3.83) và (3.85)-(3.87), ta nhận được

$$Lv \geq \frac{\varepsilon}{2}F^{ii} + \frac{1}{2}F^{ij}(A_{ij,k\ell}+B_{ij,k\ell})(x,u,\overline{\overline{p}})D_kvD_\ell v - C(\mu_0+2N_0\rho)F^{ii} + \tilde{M}, \ \text{ trong } \Omega_\rho. \tag{3.88}$$

Ta chọn

$$\mu_0 = \frac{\varepsilon}{8C} \text{ và } \rho < \frac{\varepsilon}{16N_0C} \text{ đủ nhỏ.} \tag{3.89}$$

Khi đó $\mu_0 + 2N_0\rho < \frac{\varepsilon}{4C}$. Vì C không phụ thuộc vào μ_0 và N_0, nên ta có thể giả thiết C đủ lớn sao cho (3.84) được thỏa mãn.
Từ (3.88) và (3.89), ta có

$$Lv \geq \frac{\varepsilon}{4}F^{ii} + \frac{1}{2}F^{ij}(A_{ij,k\ell}+B_{ij,k\ell})(x,u,\overline{\overline{p}})D_kvD_\ell v + \tilde{M}.$$

Đặt $\phi_0 = e^{K_0v}$ với hằng số dương K_0 sẽ được xác định sau. Ta có

$$\begin{aligned} L\phi_0 &= K_0e^{K_0v}Lv + K_0^2e^{K_0v}F^{ij}D_ivD_jv \\ &\geq K_0e^{K_0v}\Big[\frac{\varepsilon}{4}F^{ii} + \frac{1}{2}F^{ij}(A_{ij,k\ell}+B_{ij,k\ell})(x,u,\overline{\overline{p}})D_kvD_\ell v + K_0F^{ij}D_ivD_jv + \tilde{M}\Big]. \end{aligned}$$

Bằng phép quay các tọa độ, không mất tính tổng quát, ta giả thiết $Dv = (D_1v,0,\ldots,0)$ tại điểm tùy ý cho trước thuộc Ω_ρ. Khi đó ta có

$$L\phi_0 \geq K_0e^{K_0v}\Big[\frac{\varepsilon}{4}F^{ii} + \frac{1}{2}F^{ij}(A_{ij,11}+B_{ij,11})(x,u,\overline{\overline{p}})(D_1v)^2 + K_0F^{11}(D_1v)^2 + \tilde{M}\Big]. \tag{3.90}$$

Từ (3.32), (3.40), (3.41) và (3.72), ta có

$$F^{ij}(A_{ij,11}+B_{ij,11}) \geq -2\theta\sum_{i=1}^n|A_{1i,11}|F^{ii} - \Big(\frac{1}{2\theta}\sum_i|A_{1i,11}| + |A_{11,11}| + a_0\Big)F^{11}.$$

Do đó từ (3.90), ta thu được

$$
\begin{aligned}
L\phi_0 \geq K_0 e^{K_0 v}\bigg[&\left(\frac{\varepsilon}{4} - \theta|A_{1i,11}(x,u,\overline{\overline{p}})|(D_1 v)^2\right) F^{ii} + \tilde{M} \\
&+ \left(K_0 - \frac{1}{4\theta}\sum_{i=1}^{n}|A_{1i,11}(x,u,\overline{\overline{p}})| - \frac{1}{2}|A_{11,11}(x,u,\overline{\overline{p}})| - \frac{1}{2}a_0\right)(D_1 v)^2 F^{11}\bigg].
\end{aligned} \tag{3.91}
$$

Bây giờ, ta chọn

$$\theta = \frac{\varepsilon}{8(2M_1+1)^2 \max\limits_{i,j,k,\ell} \max\limits_{(x,z,p)\in V} |A_{ij,k\ell}(x,z,p)|},$$

rồi chọn K_0 đủ lớn sao cho

$$K_0 \geq \max_{(x,z,p)\in V}\left(\frac{1}{4\theta}\sum_{i=1}^{n}|A_{1i,11}(x,z,p)| + \frac{1}{2}|A_{11,11}(x,z,p)|\right) + \frac{1}{2}a_0.$$

Khi đó từ (3.67), (3.79), (3.84) và (3.91), ta có

$$L\phi_0 \geq K_0 e^{K_0 v}\left(\frac{\varepsilon}{8}F^{ii} + \tilde{M}\right), \quad \text{trong } \Omega_\rho.$$

Do đó từ (3.67), (3.79) và (3.84), ta suy ra

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\phi_0 &= L\phi_0 - D_{p_k}\hat{f}(x,u,Du)D_k\phi_0 \\
&\geq K_0 e^{K_0 v}\left(\frac{\varepsilon}{8}F^{ii} + \tilde{M} - |Dv|\big|D_p\hat{f}(x,u,Du)\big|\right) \\
&\geq K_0 e^{-K_0(2M_0+\mu_0)}\left(\frac{\varepsilon}{8}F^{ii} + \tilde{M} - (2M_1+1)\big|D_p\hat{f}(x,u,Du)\big|\right), \quad \text{trong } \Omega_\rho.
\end{aligned} \tag{3.92}
$$

Chọn $\tilde{M} = \frac{\varepsilon}{8} + (2M_1+1)\max\limits_{(x,z,p)\in V}\big|D_p\hat{f}(x,z,p)\big|$. Ta chú ý là hằng số $\tilde{M}$ bây giờ mới được xác định, do đó các hằng số N_0 và ρ cũng được chọn để đảm bảo cho (3.87) và (3.89) lần lượt được thỏa mãn. Từ (3.92), ta nhận được

$$\mathcal{L}\phi_0 \geq \varepsilon_0\left(F^{ii} + 1\right), \quad \text{trong } \Omega_\rho,$$

trong đó $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{8}K_0 e^{-K_0(2M_0+\mu_0)}$. Từ đánh giá này và chú ý $\mathcal{L}\psi_0 = \mathcal{L}(1-\phi_0)$, ta suy ra được bất đẳng thức thứ nhất trong (3.77).

Từ (3.74) và (3.76), ta có $\psi_0 = 0$ trên $\partial\Omega \cap B(0;\rho)$. Hơn nữa, từ (3.74), (3.79) và (3.89), ta có

$$v \leq (-\mu_0 + N_0\overline{d})\overline{d} \leq (-\mu_0 + N_0\rho)\overline{d} \leq -\frac{\varepsilon}{16C}\overline{d} \leq 0, \quad \text{trên } \Omega \cap \partial B(0;\rho).$$

Suy ra $\phi_0 = e^{K_0 v} \leq 1$ và vì thế $\psi_0 = 1 - \phi_0 \geq 0$ trên $\Omega \cap \partial B(0;\rho)$. Do đó ta nhận được bất đẳng thức thứ hai trong (3.77). Bổ đề được chứng minh. □

Trước khi tiếp tục chứng minh Định lý 3.3.1, luận án sẽ làm rõ hơn tính chất của toán tử tuyến tính $\mathcal{L}$ xác định bởi (3.33) qua nhận xét sau.

Nhận xét 3.3.6 Ta dễ thấy toán tử tuyến tính $\mathcal{L}$ cho bởi (3.33) được biểu diễn dưới dạng

$$\mathcal{L} = a^{ij}(x)D_{ij} + b^i(x)D_i,$$

trong đó

$$\begin{aligned} a^{ij}(x) &= \frac{F^{ij}(x) + F^{ji}(x)}{2}, \\ b^i(x) &= -\sum_{k,\ell=1}^{n} F^{k\ell}(x)\left[D_{p_i}A_{k\ell}(x,u,Du) + D_{p_i}B_{k\ell}(x,u,Du)\right] - D_{p_i}f(x,u,Du), \end{aligned}$$

với $i, j = 1, \dots, n$. Rõ ràng các hàm hệ số $a^{ij}(x), b^i(x)$ thuộc $C(\overline{\Omega}_{\rho_0})$. Mặt khác, từ (3.32) và $R(x,u) > 0$, ta suy ra $[a^{ij}]_{n\times n} = \frac{R^{-1}+(R^{-1})^T}{2} > 0$ trong $\overline{\Omega}_{\rho_0}$. Do đó toán tử $\mathcal{L}$ là elliptic đều trong $\overline{\Omega}_{\rho_0}$ và thỏa mãn các giả thiết của nguyên lý so sánh (Định lý 1.3.3).

Tiếp tục chứng minh Định lý 3.3.1. Trước tiên, ta sẽ thiết lập đánh giá

$$|D^2u(0)| \le C. \tag{3.93}$$

Để nhận được (3.93) ta sẽ lần lượt chứng minh các khẳng định sau.
Khẳng định 1. Ta có đánh giá cho các đạo hàm cấp hai theo phương tiếp tuyến

$$|D_{\alpha\beta}u(0)| \le C, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n-1. \tag{3.94}$$

Thật vậy, từ (3.74) ta có $u = \underline{u}$ trên T_{ρ_0} và do đó $D_{\alpha\beta}u(0) = D_{\alpha\beta}\underline{u}(0)$, $\alpha, \beta = 1, \dots, n-1$. Từ đây ta suy ra đánh giá (3.94).
Khẳng định 2. Ta có đánh giá cho các đạo hàm cấp hai hỗn hợp theo các phương tiếp tuyến và pháp tuyến

$$|D_{\alpha n}u(0)| \le C, \quad \alpha = 1, \dots, n-1. \tag{3.95}$$

Thật vậy, áp dụng phương trình (3.36) với $\xi = e_\alpha, \alpha = 1, \dots, n$, ta nhận được

$$\mathcal{L}(D_\alpha u) = F^{ij}(D_{x_\alpha}A_{ij} + D_zA_{ij}D_\alpha u + D_{x_\alpha}B_{ij} + D_zB_{ij}D_\alpha u) + D_{x_\alpha}\hat{f} + D_z\hat{f}D_\alpha u. \tag{3.96}$$

Từ Bổ đề 3.2.3, (3.70), (3.71) và (3.96), ta có

$$|\mathcal{L}(D_\alpha(u - \underline{u}))| \le C\left(F^{ii} + 1\right), \quad \alpha = 1, \dots, n-1, \text{ trong } \Omega_\rho, \tag{3.97}$$

trong đó ρ là hằng số dương đã được xác định trong Bổ đề 3.3.5. Mặt khác, vì $u = \underline{u}$ trên T_{ρ_0}, nên ta có $D_\alpha(u - \underline{u}) = 0$ trên T_{ρ_0} với $\alpha = 1, \dots, n-1$. Do đó

$$|D_\alpha(u - \underline{u})| \le C|x|^2, \text{ trên } \partial\Omega_\rho, \quad \alpha = 1, \dots, n-1. \tag{3.98}$$

Với hàm chắn ψ_0 đã được xây dựng trong Bổ đề 3.3.5, tức là $\psi_0 = 1 - e^{K_0[(\underline{u}-u)-\mu_0x_n+N_0x_n^2]}$, ta xét một hàm chắn mới $\psi_1 = a\psi_0 + b|x|^2$, trong đó a, b là các hằng số dương nào đó. Từ (3.77), ta có với $a \gg b$,

$$\mathcal{L}\psi_1 \le -\frac{a\varepsilon_0}{2}(1 + F^{ii}) \text{ trong } \Omega_\rho, \ \psi_1 \ge b|x|^2 \text{ trên } \partial\Omega_\rho.$$

Từ hệ thức trên và (3.97), (3.98), ta có với $a \gg b \gg 1$,

$$|\mathcal{L}(D_\alpha(u - \underline{u}))| + \mathcal{L}\psi_1 \le 0 \text{ trong } \Omega_\rho, \quad |D_\alpha(u - \underline{u})| \le \psi_1 \text{ trên } \partial\Omega_\rho,$$

trong đó $\alpha = 1, \dots, n-1$. Do đó từ Nhận xét 3.3.6, ta có thể áp dụng nguyên lý so sánh (Định lý 1.3.3) và nhận được $|D_\alpha(u - \underline{u})| \le \psi_1$ trong Ω_ρ. Từ bất đẳng thức này và $D_\alpha(u - \underline{u})(0) = \psi_1(0) = 0$, ta suy ra $|D_{\alpha n}(u - \underline{u})(0)| \le D_n\psi_1(0)$. Ở đây, từ (3.74) ta có $D_n\psi_1(0) = aD_n\psi_0(0) \ge 0$. Do đó ta nhận được (3.95).

Khẳng định 3. Ta có đánh giá cho đạo hàm cấp hai theo phương véc tơ pháp tuyến

$$|D_{nn}u(0)| \le C. \tag{3.99}$$

Thật vậy, từ tính elliptic của u ta có $\operatorname{Tr}\omega(0, u) > 0$. Khi đó từ (3.94), ta nhận được đánh giá đối với cận dưới của $D_{nn}u(0)$,

$$D_{nn}u(0) \ge \sum_{i=1}^{n} A_{ii}(0, u(0), Du(0)) - \sum_{i=1}^{n-1} D_{ii}u(0) \ge -C.$$

Như vậy ta chỉ cần chứng minh

$$D_{nn}u(0) \le C. \tag{3.100}$$

Chú ý $B_{nn} = 0$, từ (3.1) ta có

$$(D_{nn}u - A_{nn}(x, u, Du)) \det R'(x, u) + H = f(x, u, Du), \tag{3.101}$$

trong đó $R'(x, u) = \omega'(x, u) - B'$, $\omega'(x, u) = [D_{\alpha\beta}u - A_{\alpha\beta}(x, u, Du)]_{1\le\alpha,\beta\le n-1}$, $B' = [B_{\alpha\beta}(x, u, Du)]_{1\le\alpha,\beta\le n-1}$ và H là đại lượng không phụ thuộc vào $D_{nn}u - A_{nn}(x, u, Du)$. Từ (3.94) và (3.95) ta suy ra H là bị chặn tại $x = 0$. Mặt khác, từ Mệnh đề 2.2.2 ta có $\det R'(x, u) \ge \det \omega'(x, u) > 0$. Do đó từ (3.101), ta nhận thấy (3.100) sẽ được chứng minh nếu ta chứng minh được đại lượng $\det \omega'(0, u)$ có một cận dưới dương.

Ký hiệu S^{n-1} là tập hợp gồm các véc tơ đơn vị trong $\mathbb{R}^{n-1}$. Với véc tơ $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \in S^{n-1}$ cố định, ta đặt

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}(x, \xi') : &= \mathcal{Q}[u](x, \xi') = (\omega'(x, u)\xi', \xi') = \big[D_{\alpha\beta}u - A_{\alpha\beta}(x, u, Du)\big]\xi_\alpha\xi_\beta \\ &= \big[D_{\alpha\beta}\varphi - A_{\alpha\beta}(x, \varphi, D'\varphi, D_nu)\big]\xi_\alpha\xi_\beta, \quad \text{trên } T_{\rho_0},\end{aligned}$$

với $\mathcal{Q} > 0$ nhờ tính elliptic của u. Ở đây $D' = (D_1, \dots, D_{n-1})$ là ký hiệu gradient tiếp tuyến. Với $x_n \ge 0$, ta đặt $\overline{\varphi}(x', x_n) = \varphi(x', 0)$ và

$$\overline{\mathcal{Q}}(x, \xi') = \big[D_{\alpha\beta}\overline{\varphi} - A_{\alpha\beta}(x, \overline{\varphi}, D'\overline{\varphi}, D_nu)\big]\xi_\alpha\xi_\beta.$$

Khi đó $D'\overline{\varphi}(x', 0) = D'\varphi(x', 0)$ và $\overline{\mathcal{Q}}(x, \xi') = \mathcal{Q}(x, \xi')$, với mọi $x = (x', 0) \in T_{\rho_0}$. Hơn nữa, ta dễ thấy hàm $\overline{\mathcal{Q}}$ là bị chặn trên tập $\overline{\Omega}_{\rho_0} \times S^{n-1}$. Do đó ta có thể chọn hằng số K đủ lớn sao cho hàm $\tilde{\mathcal{Q}}(x,\xi') := \overline{\mathcal{Q}}(x,\xi') + K|x|^2$ đạt giá trị cực tiểu trên $T_{\rho_0} \times S^{n-1}$ tại điểm $(\overline{x},\overline{\xi}')$, với $\overline{x} \in T_\rho \subset T_{\rho_0}$ và

$$\tilde{\mathcal{Q}}(x,\xi') \geq \tilde{\mathcal{Q}}(\overline{x},\overline{\xi}'), \quad \forall (x,\xi') \in \partial\Omega_\rho \times S^{n-1}, \tag{3.102}$$

trong đó ρ là hằng số đã được xác định trong Bổ đề 3.3.5. Bằng tính toán, ta có

$$\mathcal{L}\tilde{\mathcal{Q}}(x,\overline{\xi}') \leq -\mathcal{L}(D_n u)D_{p_n}A_{\alpha\beta}\overline{\xi}_\alpha\overline{\xi}_\beta - F^{ij}D_{in}uD_{jn}uD_{p_np_n}A_{\alpha\beta}\overline{\xi}_\alpha\overline{\xi}_\beta + C(F^{ii}+1).$$

Từ tính chính quy của A và $[F^{ij}]_{n\times n} > 0$, ta có

$$-F^{ij}D_{in}uD_{jn}uD_{p_np_n}A_{\alpha\beta}\overline{\xi}_\alpha\overline{\xi}_\beta = -(F^{ij}D_{in}uD_{jn}u)(D_{p_np_n}A_{\alpha\beta}\overline{\xi}_\alpha\overline{\xi}_\beta) \leq 0.$$

Từ phương trình (3.96) với $\alpha = n$, Bổ đề 3.2.3, (3.70), (3.71), (3.73) và các đánh giá trên, ta thu được

$$\mathcal{L}\tilde{\mathcal{Q}}(x,\overline{\xi}') \leq C\left(F^{ii}+1\right), \quad \text{trong } \Omega_\rho. \tag{3.103}$$

Bây giờ, ta tiếp tục lợi dụng hàm chắn $\psi_0(x)$ đã được xây dựng trong Bổ đề 3.3.5 như trên. Từ (3.77), (3.102) và (3.103), ta có thể chọn được một số dương h đủ lớn sao cho hàm số $\psi_2 = -h\psi_0 + \tilde{\mathcal{Q}}\big(\overline{x},\overline{\xi}'\big)$ thỏa mãn

$$\mathcal{L}\psi_2(x) \geq \mathcal{L}\tilde{\mathcal{Q}}\big(x,\overline{\xi}'\big) \text{ trong } \Omega_\rho, \;\; \psi_2(x) \leq \tilde{\mathcal{Q}}\big(x,\overline{\xi}'\big) \text{ trên } \partial\Omega_\rho.$$

Do đó, từ nguyên lý so sánh (Định lý 1.3.3), ta nhận được $\psi_2(x) \leq \tilde{\mathcal{Q}}\big(x,\overline{\xi}'\big)$ trong Ω_ρ. Từ bất đẳng thức này và chú ý $\psi_2(\overline{x}) = \tilde{\mathcal{Q}}\big(\overline{x},\overline{\xi}'\big)$, ta suy ra $D_n\psi_2(\overline{x}) \leq D_n\tilde{\mathcal{Q}}\big(\overline{x},\overline{\xi}'\big)$ và do đó

$$D_{nn}u(\overline{x})D_{p_n}A_{\alpha\beta}(\overline{x},\varphi,D'\varphi,D_nu)\overline{\xi}_\alpha\overline{\xi}_\beta \leq C. \tag{3.104}$$

Từ (3.74), ta có

$$\mathcal{Q}[\underline{u}](x,\xi') = \big[D_{\alpha\beta}\underline{u} - A_{\alpha\beta}(x,\underline{u},D'\underline{u},D_n\underline{u})\big]\xi_\alpha\xi_\beta \geq \lambda_{\underline{u}}|\xi'|^2 = \lambda_{\underline{u}} > 0, \; \forall (x,\xi') \in T_{\rho_0} \times S^{n-1}. \tag{3.105}$$

Từ (3.67) và (3.75), ta có

$$0 \leq D_n(u-\underline{u}) \leq 2M_1, \quad \text{trên } T_{\rho_0}. \tag{3.106}$$

Bằng cách sử dụng khai triển Taylor và tính chính quy của A, ta suy ra

$$\mathcal{Q}[u]\big(\overline{x},\overline{\xi}'\big) - \mathcal{Q}[\underline{u}]\big(\overline{x},\overline{\xi}'\big) \geq D_n(\underline{u}-u)(\overline{x})D_{p_n}A_{\alpha\beta}(\overline{x},\varphi,D'\varphi,D_nu)\overline{\xi}_\alpha\overline{\xi}_\beta. \tag{3.107}$$

Bây giờ ta sẽ chỉ ra $\mathcal{Q}\big(\overline{x},\overline{\xi}'\big)$ có một cận dưới dương. Điều này là dễ thấy từ (3.105)-(3.107) nếu $D_n(u-\underline{u})(\overline{x}) = 0$ hoặc $\mathcal{Q}[u]\big(\overline{x},\overline{\xi}'\big) \geq \frac{\tau_0}{2}$, trong đó $\tau_0 = \lambda_{\underline{u}}$. Do đó ta chỉ còn chứng minh cho trường hợp là $D_n(u-\underline{u})(\overline{x}) > 0$ và $\mathcal{Q}[u]\big(\overline{x},\overline{\xi}'\big) < \dfrac{\tau_0}{2}$. Thật vậy, từ (3.105)-(3.107), ta thu được $D_{p_n}A_{\alpha\beta}(\overline{x},\varphi,D'\varphi,D_nu)\overline{\xi}_\alpha\overline{\xi}_\beta > \dfrac{\tau_0}{4M_1}$. Từ đánh giá này và (3.104), ta suy ra

$D_{nn}u(\overline{x}) \leq C$. Khi đó từ (3.26), (3.73) và chú ý $D_{ii}u(\overline{x}) = D_{ii}\underline{u}(\overline{x}), i = 1, \ldots, n$, ta dễ dàng thu được một cận dưới dương cho $\mathcal{Q}(\overline{x}, \overline{\xi}')$.

Ta đã vừa chỉ ra $\mathcal{Q}(\overline{x}, \overline{\xi}')$ có một cận dưới dương. Từ khẳng định này và chú ý

$$\mathcal{Q}(0, \xi') = \tilde{\mathcal{Q}}(0, \xi') \geq \tilde{\mathcal{Q}}(\overline{x}, \overline{\xi}') \geq \mathcal{Q}(\overline{x}, \overline{\xi}'), \quad \forall \xi' \in S^{n-1},$$

ta nhận thấy $\mathcal{Q}(0, \xi')$ cũng có một cận dưới dương. Do đó ta thu được một cận dưới dương cho $\det \omega'(0, u)$, và vì thế từ (3.101), ta suy ra $D_{nn}u(0) \leq C$. Như vậy ta nhận được (3.100) và từ đó (3.99) được chứng minh.

Từ các đánh giá (3.94), (3.95) và (3.99), ta suy ra (3.93). Bằng cách sử dụng phép tịnh tiến hệ tọa độ, ta nhận được $|D^2u(x)| \leq C$ trên T_ρ. Như vậy, với điểm $x^0 \in \partial\Omega$ tùy ý, ta có đánh giá $|D^2u(x)| \leq C$ trong một cân cận đủ nhỏ của x^0 ở trên biên. Bằng cách phủ biên $\partial\Omega$ bởi một họ hữu hạn các lân cận như thế, ta thu được đánh giá (3.47). Từ (3.47) và $\omega(x, u) = D^2u - A(x, u, Du)$, ta suy ra (3.48). Định lý 3.3.1 được chứng minh. □

3.4 Đánh giá Hölder toàn cục đối với các đạo hàm cấp hai của nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet cho phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng

Trong các Mục 3.2 và 3.3, luận án đã đánh giá được chuẩn trong $C^2(\overline{\Omega})$ đối với nghiệm δ-elliptic $u(x) \in C^4(\overline{\Omega})$ của bài toán Dirichlet (3.1)-(3.2) qua chuẩn của nó trong $C^1(\overline{\Omega})$. Việc thiết lập đánh giá trong $C^1(\overline{\Omega})$ này sẽ được thực hiện trong Mệnh đề 3.5.2. Bình thường, trong các bài báo khoa học về bài toán Dirichlet cho phương trình kiểu Monge-Ampère đối xứng, công việc đánh giá trong $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ có thể coi là kết thúc. Điều này có được bởi vì sau khi có đánh giá trong $C^2(\overline{\Omega})$, bằng việc sử dụng tính lõm của hàm $\log(\det \omega)$ trên tập lồi các ma trận đối xứng xác định dương $\omega \in \mathbb{R}^{n\times n}$ và các kỹ thuật do L.C. Evans và N.V. Krylov đề xuất, người ta có thể đánh giá được chuẩn trong $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ đối với nghiệm elliptic của bài toán Dirichlet cho phương trình kiểu Monge-Ampère đối xứng ([11], Section 17.4 và Section 17.8). Trong bài báo [2] của Danh mục các công trình liên quan đến luận án, việc chứng minh kết quả tương tự cho phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng chỉ được chúng tôi nêu ra một cách ngắn gọn. Trong mục này, để hoàn thiện việc trình bày, luận án sẽ thiết lập đánh giá Hölder toàn cục đối với các đạo hàm cấp hai của nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet (3.1)-(3.2) qua chuẩn của nó trong $C^2(\overline{\Omega})$. Nội dung của mục này được tham khảo từ các tài liệu [6, 11, 14, 21, 23, 24].

3.4.1 Đánh giá Hölder bên trong miền đối với các đạo hàm cấp hai của nghiệm δ-elliptic của phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng

Trong mục này, luận án sẽ thiết lập đánh Hölder bên trong miền Ω đối với các đạo hàm cấp hai của nghiệm δ-elliptic của phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng (3.1).

Kết quả chính của mục này là định lý dưới đây.

Định lý 3.4.1 *Cho $u(x) \in C^4(\overline{\Omega})$ là nghiệm δ-elliptic của phương trình* (3.1) *với $\delta \in [0,1)$, trong đó $f(x,z,p) > 0$ trong Γ. Giả sử u thỏa mãn*

$$\sup_{x\in\Omega}|u(x)| \le M_0,\ \sup_{x\in\Omega}|Du(x)| \le M_1,\ \sup_{x\in\Omega}|D^2u(x)| \le M_2, \tag{3.108}$$

trong đó M_0, M_1 và M_2 là các hằng số dương. Khi đó với mọi hình cầu $B_{R_0} \subset \Omega$ và $R \le R_0$, ta có đánh giá sau

$$\operatorname*{osc}_{B_R} D^2u \le C\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\alpha_0}\left(\operatorname*{osc}_{B_{R_0}} D^2u + R_0^{\alpha_0}\right), \tag{3.109}$$

trong đó $\alpha_0 \in (0,1)$ là hằng số phụ thuộc vào $M_0, M_1, M_2, n, \delta, A, f$ và Ω, còn hằng số $C > 0$ phụ thuộc thêm vào B; ở đây, $\operatorname*{osc}_{B_R} D^2u := \sup_{x,y\in B_R}|D^2u(x) - D^2u(y)|$, B_{R_0} và B_R là các hình cầu đồng tâm.

Chứng minh của định lý trên được dựa vào chứng minh của Định lý 17.14 ([11]) áp dụng cho một lớp phương trình đạo hàm riêng phi tuyến hoàn toàn có dạng tổng quát $F(x,u,Du,D^2u) = 0$ với hai giả thiết quan trọng: F là elliptic đều đối với u và F là lõm theo biến r trên miền giá trị của D^2u. Đối với phương trình kiểu Monge-Ampère elliptic đối xứng thì các giả thiết này luôn thỏa mãn vì một khi nó là elliptic đối với u thì nó là elliptic đều và tính lõm được thỏa mãn (Mệnh đề 2.1.1). Do đó việc chứng minh kết quả tương tự Định lý 17.14 nói trên trong trường hợp này là rất thuận lợi. Để chứng minh Định lý 3.4.1 khi phương trình có dạng không đối xứng, luận án phải sử dụng các kết quả đã được thiết lập như các Hệ quả 2.2.7, 2.2.15, công thức (3.26) để suy ra được các giả thiết tương tự như trên (Bổ đề 3.4.5 dưới đây), cũng như sử dụng tính d-lõm của hàm số kiểu Monge-Ampère không đối xứng (Định lý 2.2.20) để nhận được các đánh giá tương tự như trong chứng minh của Định lý 17.14 ([11]).

Để chứng minh Định lý 3.4.1, ta cần đến một số bổ đề bổ trợ sau đây.

Bổ đề 3.4.2 ([11], Bổ đề 8.23) *Cho w và σ là các hàm không giảm xác định trên khoảng $(0, R_0]$, nhận giá trị không âm và thỏa mãn*

$$w(\tau R) \le \gamma w(R) + \sigma(R), \quad \forall R \in (0, R_0],$$

với các hằng số $0 < \gamma, \tau < 1$. Khi đó với các hằng số $\mu \in (0,1)$ và $R \in (0, R_0]$ tùy ý, ta có

$$w(R) \le C\left[\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\alpha} w(R_0) + \sigma\big(R^{\mu}R_0^{1-\mu}\big)\right],$$

trong đó $C = C(\gamma,\tau)$ và $\alpha = \alpha(\gamma,\tau,\mu)$ là các hằng số dương; cụ thể, ta có

$$\alpha = \frac{(1-\mu)\log\gamma}{\log\tau}.$$

Bổ đề 3.4.3 ([11], Bổ đề 17.13) *Ký hiệu $S[\lambda,\Lambda]$ là tập hợp các ma trận đối xứng xác định dương trong $\mathbb{R}^{n\times n}$ và có các giá trị riêng thuộc đoạn $[\lambda,\Lambda]$, trong đó $0<\lambda<\Lambda$. Khi đó tồn tại một tập hợp gồm hữu hạn véc tơ đơn vị $\gamma_1,\ldots,\gamma_N\in\mathbb{R}^n$ và các số dương $\lambda^*<\Lambda^*$, chỉ phụ thuộc vào n,λ và Λ sao cho với ma trận tùy ý $\mathcal{A}=[a^{ij}]_{n\times n}\in S[\lambda,\Lambda]$, ta biểu diễn được dưới dạng*

$$\mathcal{A}=\sum_{k=1}^{N}\beta_k\gamma_k\otimes\gamma_k \quad hay \quad a^{ij}=\sum_{k=1}^{N}\beta_k\gamma_{ki}\gamma_{kj},\quad i,j=1,\ldots,n,$$

trong đó $N\le\dfrac{n(n+1)}{2}$ và $\lambda^*\le\beta_k\le\Lambda^*$, $k=1,\ldots,N$. Hơn nữa, tập $\{\gamma_k,k=1,\ldots,N\}$ có thể được chọn sao cho nó chứa các tập $\{e_i,i=1,\ldots,n\}$ và $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_i\pm e_j),1\le i<j\le n\right\}$.

Cho hàm số không âm $g\in C(\overline{B}_R)$, trong đó B_R là hình cầu bán kính R trong $\mathbb{R}^n$. Đặt

$$\Phi_{p,R}(g):=\left(\frac{1}{|B_R|}\int\limits_{B_R}g^p\right)^{1/p},\quad p\in(0,+\infty). \tag{3.110}$$

Bổ đề 3.4.4 *Cho các hàm $g_i\in C(\overline{B}_R)$, $g_i\ge 0$ trong B_R, $i=1,\ldots,m$. Khi đó, với hằng số $p\in(0,+\infty)$ tùy ý, ta có đánh giá sau*

$$\Phi_{p,R}\left(\sum_{i=1}^{m}g_i\right)\le m^{1+1/p}\sum_{i=1}^{m}\Phi_{p,R}(g_i). \tag{3.111}$$

Chứng minh. Giả sử $a_1,\ldots,a_m$ và s là các đại lượng không âm tùy ý, khi đó ta có

$$\left(\sum_{i=1}^{m}a_i\right)^s\le m^s\left(\max_i a_i\right)^s\le m^s\sum_{i=1}^{m}a_i^s.$$

Do đó, từ (3.110) ta có

$$\Phi_{p,R}\left(\sum_{i=1}^{m}g_i\right)=\left(\frac{1}{|B_R|}\int\limits_{B_R}\left(\sum_{i=1}^{m}g_i\right)^p\right)^{1/p}\le\left(\frac{1}{|B_R|}\int\limits_{B_R}m^p\sum_{i=1}^{m}g_i^p\right)^{1/p}$$
$$=m\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{|B_R|}\int\limits_{B_R}g_i^p\right)^{1/p}\le mm^{1/p}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{|B_R|}\int\limits_{B_R}g_i^p\right)^{1/p}=m^{1+1/p}\sum_{i=1}^{m}\Phi_{p,R}(g_i).$$

Từ đó ta nhận được (3.111). Bổ đề được chứng minh. □

Giả sử $u(x)$ là một nghiệm δ-elliptic của phương trình (3.1) đã được cố định. Tương tự như trong các mục trước, ta có thể biểu diễn (3.1) dưới dạng tương đương

$$F(R(x,u)):=\log\det R(x,u)=\hat{f}(x,u,Du),\quad \text{trong } \Omega, \tag{3.112}$$

trong đó $R(x,u) = D^2u - A(x,u,Du) - B(x,u,Du) = \omega(x,u) - B(x,u,Du) := R(x)$ và $\hat{f} = \log f$. Hơn nữa, ta có với $i,j,k,\ell = 1,\ldots,n$,

$$F^{ij}(x) := \frac{\partial F(R(x))}{\partial R_{ij}} = R^{ji}(x),\ F^{ij,k\ell}(x) := \frac{\partial^2 F(R(x))}{\partial R_{ij}\partial R_{k\ell}} = -R^{\ell i}(x)R^{jk}(x), \qquad (3.113)$$

trong đó $R(x) = [R_{ij}(x)]_{n\times n}$, $R^{-1}(x) = \left[R^{ij}(x)\right]_{n\times n}$. Đặt $\omega(x) := \omega(x,u)$.

Bổ đề 3.4.5 *Giả sử các giả thiết của Định lý 3.4.1 được thỏa mãn và F là toán tử cho bởi* (3.112). *Khi đó ta có các khẳng định sau:*

(i) *F là elliptic đều đối với u và thỏa mãn*

$$\lambda|\xi|^2 \le \frac{F^{ij}(x) + F^{ji}(x)}{2}\xi_i\xi_j \le \Lambda|\xi|^2, \quad \forall x \in \overline{\Omega},\ \xi \in \mathbb{R}^n, \qquad (3.114)$$

trong đó λ và Λ là các hằng số dương phụ thuộc vào $M_0, M_1, M_2, n, \delta, A, f$ và Ω.

(ii) *Với mọi $x \in \overline{\Omega}$, ta có*

$$F^{ij,k\ell}(x)P_{ij}P_{k\ell} \le -\varepsilon_0|P|^2, \quad \forall P = [P_{ij}]_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n},\ P^T = P, \qquad (3.115)$$

trong đó ε_0 là hằng số dương phụ thuộc vào $M_0, M_1, M_2, n, \delta, A$ và Ω.

Chứng minh. (i) Từ (3.108), ta suy ra

$$\lambda_{\max}(\omega(x)) \le \Lambda_0, \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \qquad (3.116)$$

trong đó Λ_0 là hằng số dương phụ thuộc vào M_0, M_1, M_2, A và Ω. Mặt khác, ta nhận thấy $R(x) \in D_{\delta,\mu(B)}$ và do đó ta có đánh giá (3.26). Từ (3.26) và (3.116), ta suy ra

$$\lambda_{\min}(\omega(x)) \ge \lambda_0, \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \qquad (3.117)$$

trong đó $\lambda_0 = \dfrac{(1+\delta^2)^{-[\frac{n}{2}]}f_0}{\Lambda_0^{n-1}}$, $f_0 = \min\limits_{x\in\overline{\Omega},|z|\le M_0,|p|\le M_1} f(x,z,p)$.
Từ (3.113), (3.116), (3.117) và Hệ quả 2.2.7, ta dễ dàng thu được (3.114) bằng cách chọn

$$\lambda = \frac{1}{(1+\delta^2)\Lambda_0},\ \Lambda = \frac{1}{\lambda_0} = \frac{\Lambda_0^{n-1}}{(1+\delta^2)^{-[\frac{n}{2}]}f_0}. \qquad (3.118)$$

(ii) Từ Hệ quả 2.2.15 và (3.116), ta dễ dàng thu được (3.115) bằng cách chọn $\varepsilon_0 = \dfrac{1-\delta^2}{(1+\delta^2)^2\Lambda_0^2}$. Bổ đề được chứng minh. □

Hệ quả 3.4.6 *Giả sử λ và Λ là các hằng số dương thỏa mãn* (3.114). *Khi đó tồn tại một tập hợp các véc tơ đơn vị $\{\gamma_k, k = 1,\ldots,N\}$ và các số dương $\lambda^* < \Lambda^*$, chỉ phụ thuộc vào n, λ và Λ sao cho*

$$\frac{R^{ij}(x) + R^{ji}(x)}{2} = \sum_{k=1}^{N} \beta_k(x)\gamma_{ki}\gamma_{kj}, \quad \forall x \in \overline{\Omega},\ i,j = 1,\ldots,n, \qquad (3.119)$$

trong đó $\lambda^* \le \beta_k(x) \le \Lambda^*, k = 1,\ldots,N$. Hơn nữa, tập $\{\gamma_k, k = 1,\ldots,N\}$ có thể được chọn sao cho nó chứa các tập $\{e_i, i = 1,\ldots,n\}$ và $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_i \pm e_j), 1 \le i < j \le n\right\}$.

Chứng minh. Từ (3.113) và (3.114), ta có

$$\left\{\frac{R^{-1}(x)+\left(R^{-1}\right)^T(x)}{2},\ x\in\overline{\Omega}\right\}\subset S[\lambda,\Lambda].$$

Do đó ta có thể áp dụng Bổ đề 3.4.3 và suy ra kết luận của hệ quả. □

Hệ quả 3.4.7 *Ký hiệu $\tilde{L}$ là toán tử tuyến tính cấp hai cho bởi*

$$\tilde{L}=a^{ij}(x)D_{ij},\tag{3.120}$$

trong đó $a^{ij}(x)=\frac{F^{ij}(x)+F^{ji}(x)}{2}$, $i,j=1,\dots,n$. Khi đó $\tilde{L}$ là elliptic đều trong $\overline{\Omega}$ và thỏa mãn

$$\lambda|\xi|^2\le a^{ij}(x)\xi_i\xi_j\le\Lambda|\xi|^2,\quad\forall x\in\overline{\Omega},\ \xi\in\mathbb{R}^n,\tag{3.121}$$

trong đó λ và Λ là các hằng số dương thỏa mãn (3.114).

Chứng minh. Kết luận của hệ quả dễ dàng được suy ra từ (3.114). □

Chứng minh của Định lý 3.4.1. Giả sử $\gamma\in\mathbb{R}^n$ là véc tơ đơn vị tùy ý. Bằng cách lấy đạo hàm hai vế của phương trình (3.112) theo γ hai lần, ta thu được phương trình tương tự (3.37) với véc tơ ξ thay bởi γ. Từ đó ta có

$$F^{ij}D_{ij\gamma\gamma}u=-F^{ij,k\ell}D_{ij\gamma}uD_{k\ell\gamma}u+K_{ij\gamma}D_{ij\gamma}u+L_\gamma,$$

trong đó

$$K_{ij\gamma}=2\sum_{k,\ell=1}^n F^{ij,k\ell}(D_\gamma A_{k\ell}+D_\gamma B_{k\ell})+\sum_{k,\ell=1}^n F^{k\ell}(D_{p_i}A_{k\ell}+D_{p_i}B_{k\ell})\gamma_j+D_{p_i}\hat{f}\gamma_j,\ i,j=\overline{1,n},$$

$$\begin{aligned}L_\gamma=F^{ij}\big[&D_{\gamma\gamma}A_{ij}+(D_{zz}A_{ij})(u_\gamma)^2+(D_{p_kp_\ell}A_{ij})D_ku_\gamma D_\ell u_\gamma+(D_zA_{ij})u_{\gamma\gamma}+2(D_{\gamma z}A_{ij})u_\gamma\\&+2(D_{\gamma p_k}A_{ij})D_ku_\gamma+2(D_{zp_k}A_{ij})(D_ku_\gamma)u_\gamma+D_{\gamma\gamma}B_{ij}+(D_{zz}B_{ij})(u_\gamma)^2\\&+(D_{p_kp_\ell}B_{ij})D_ku_\gamma D_\ell u_\gamma+(D_zB_{ij})u_{\gamma\gamma}+2(D_{\gamma z}B_{ij})u_\gamma+2(D_{\gamma p_k}B_{ij})D_ku_\gamma\\&+2(D_{zp_k}B_{ij})(D_ku_\gamma)u_\gamma\big]-F^{ij,k\ell}(D_\gamma A_{ij}+D_\gamma B_{ij})(D_\gamma A_{k\ell}+D_\gamma B_{k\ell})+D_{\gamma\gamma}\hat{f}+\big(D_{zz}\hat{f}\big)(u_\gamma)^2\\&+\big(D_{p_kp_\ell}\hat{f}\big)D_ku_\gamma D_\ell u_\gamma+\big(D_z\hat{f}\big)u_{\gamma\gamma}+2\big(D_{\gamma z}\hat{f}\big)u_\gamma+2\big(D_{\gamma p_k}\hat{f}\big)D_ku_\gamma+2\big(D_{zp_k}\hat{f}\big)(D_ku_\gamma)u_\gamma.\end{aligned}$$

Áp dụng đánh giá (3.115) với $P=D^2u_\gamma$, ta có $-F^{ij,k\ell}D_{ij\gamma}uD_{k\ell\gamma}u\ge\varepsilon_0|D_{ij\gamma}u|^2$ và do đó

$$F^{ij}D_{ij\gamma\gamma}u\ge\varepsilon_0|D_{ij\gamma}u|^2+K_{ij\gamma}D_{ij\gamma}u+L_\gamma.\tag{3.122}$$

Từ (3.122), ta nhận được đánh giá sau với mọi véc tơ đơn vị $\gamma\in\mathbb{R}^n$,

$$F^{ij}D_{ij\gamma\gamma}u\ge K_{ij\gamma}D_{ij\gamma}u+L_\gamma\ge-\big(K_0\big|D^3u\big|+L_0\big),\tag{3.123}$$

trong đó K_0 và L_0 là các hằng số dương phụ thuộc vào $M_0,M_1,M_2,n,\delta,A,B,f$ và Ω.

Với các véc tơ đơn vị $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ đã được xác định trong Hệ quả 3.4.6, ta đặt

$$h_k = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{D_{\gamma_k\gamma_k} u}{1 + M_2}\right), \quad k = 1, \dots, N. \tag{3.124}$$

Khi đó, $0 < h_k < 1$, $k = 1, \dots, N$. Hơn nữa, từ (3.123) và (3.124), ta có

$$-F^{ij} D_{ij} h_k \le \frac{1}{2(1 + M_2)} \left(K_0 |D^3 u| + L_0\right). \tag{3.125}$$

Nhân hai vế của (3.125) với hàm h_k, rồi lấy tổng theo chỉ số k từ 1 đến N, ta thu được

$$-\sum_{k=1}^{N} F^{ij} (D_{ij} h_k) h_k \le \frac{C(n)}{1 + M_2} \left(K_0 \left|D^3 u\right| + L_0\right), \tag{3.126}$$

ở đây, ta chú ý $N \le \frac{n(n+1)}{2}$. Bây giờ, ta xét hàm số

$$v = \sum_{k=1}^{N} (h_k)^2. \tag{3.127}$$

Ta có

$$D_i v = 2\sum_{k=1}^{N} h_k D_i h_k, \quad D_{ij} v = 2\sum_{k=1}^{N} (D_i h_k D_j h_k + h_k D_{ij} h_k), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Suy ra

$$\sum_{k=1}^{N} D_i h_k D_j h_k - \frac{1}{2} D_{ij} v = -\sum_{k=1}^{N} h_k D_{ij} h_k, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Từ hệ thức này và (3.126), ta nhận được

$$\sum_{k=1}^{N} F^{ij} D_i h_k D_j h_k - \frac{1}{2} F^{ij} D_{ij} v \le \frac{C(n)}{1 + M_2} \left(K_0 \left|D^3 u\right| + L_0\right). \tag{3.128}$$

Từ Hệ quả 3.4.6, (3.124) và chú ý $|a - b|^2 \le 2(|a|^2 + |b|^2)$, với $\forall a, b \in \mathbb{R}^n$, ta có

$$4(1 + M_2)^2 \sum_{k=1}^{N} |Dh_k|^2 \ge \frac{1}{4} \sum_{1 \le i < j \le n} \left[|D(u_{ii} + 2u_{ij} + u_{jj})|^2 + |D(u_{ii} - 2u_{ij} + u_{jj})|^2\right]$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} |Du_{ii}|^2 \ge 2 \sum_{1 \le i < j \le n} |Du_{ij}|^2 + \sum_{i=1}^{n} |Du_{ii}|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} |Du_{ij}|^2 = |D^3 u|^2,$$

và do đó

$$|D^3 u| \le 2(1 + M_2) \left(\sum_{k=1}^{N} |Dh_k|^2\right)^{1/2}. \tag{3.129}$$

Từ (3.114), ta có

$$\sum_{k=1}^{N} F^{ij} D_i h_k D_j h_k \ge \lambda \sum_{k=1}^{N} |Dh_k|^2. \tag{3.130}$$

Giả sử $\varepsilon \in (0,1)$ là hằng số nào đó sẽ được xác định sau. Đặt

$$w = w_k = h_k + \varepsilon v, \quad k = 1, \dots, N. \tag{3.131}$$

Từ (3.125) và (3.128)-(3.131), ta có

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\lambda \sum_{k=1}^{N} |Dh_k|^2 - \frac{1}{2}F^{ij}D_{ij}w = \varepsilon\lambda \sum_{k=1}^{N} |Dh_k|^2 - \frac{1}{2}F^{ij}D_{ij}h_k - \frac{\varepsilon}{2}F^{ij}D_{ij}v \\
&\le \varepsilon \left(\sum_{k=1}^{N} F^{ij}D_ih_kD_jh_k - \frac{1}{2}F^{ij}D_{ij}v \right) - \frac{1}{2}F^{ij}D_{ij}h_k \le C\left(\frac{K_0}{1+M_2}|D^3u| + \frac{L_0}{1+M_2} \right) \\
&\le C\left[\frac{K_0}{1+M_2}\left(2(1+M_2)\left(\sum_{k=1}^{N} |Dh_k|^2 \right)^{1/2} \right) + \frac{L_0}{1+M_2} \right],
\end{aligned}$$

và do đó

$$\varepsilon\lambda \sum_{k=1}^{N} |Dh_k|^2 - \frac{1}{2}F^{ij}D_{ij}w \le C\left[K_0 \left(\sum_{k=1}^{N} |Dh_k|^2 \right)^{1/2} + \frac{L_0}{1+M_2} \right], \quad C = C(n).$$

Từ đánh giá này và bất đẳng thức Cauchy, ta suy ra

$$\begin{aligned}
&F^{ij}D_{ij}w \ge 2\varepsilon\lambda \sum_{k=1}^{N} |Dh_k|^2 - \left(2\sqrt{\varepsilon\lambda} \left(\sum_{k=1}^{N} |Dh_k|^2 \right)^{1/2} \right) \left(\frac{CK_0}{2\sqrt{\varepsilon\lambda}} \right) - C\frac{L_0}{1+M_2} \\
&\ge 2\varepsilon\lambda \sum_{k=1}^{N} |Dh_k|^2 - \left(2\varepsilon\lambda \sum_{k=1}^{N} |Dh_k|^2 + \frac{C^2K_0^2}{8\varepsilon\lambda} \right) - C\frac{L_0}{1+M_2} \ge -C\left(\frac{K_0^2}{\varepsilon\lambda} + \frac{L_0}{1+M_2} \right).
\end{aligned}$$

Như vậy, với $w = w_k$, $k = 1, \dots, N$, ta có

$$F^{ij}D_{ij}w \ge -\lambda\overline{\mu}, \quad \overline{\mu} = \frac{C(n)}{\lambda}\left(\frac{K_0^2}{\varepsilon\lambda} + \frac{L_0}{1+M_2} \right). \tag{3.132}$$

Giả sử B_R và B_{2R} là hai hình cầu đồng tâm tùy ý trong Ω, có bán kính lần lượt là R và $2R$. Với $s = 1,2$ và $k = 1, \dots, N$, ta đặt

$$\begin{gathered}
W_{ks} = \sup_{B_{sR}} w_k, \ M_{ks} = \sup_{B_{sR}} h_k, \ m_{ks} = \inf_{B_{sR}} h_k, \\
\omega(sR) = \sum_{k=1}^{N} \operatorname{osc} h_k = \sum_{k=1}^{N} (M_{ks} - m_{ks}).
\end{gathered} \tag{3.133}$$

Từ (3.132), ta có với $k = 1, \dots, N$,

$$\tilde{L}(W_{k2} - w_k) = F^{ij}D_{ij}(W_{k2} - w_k) \le \lambda\overline{\mu}, \quad \text{trong } \Omega,$$

trong đó $\tilde{L}$ là toán tử cho bởi (3.120). Từ Hệ quả 3.4.7 và chú ý $W_{k2} - w_k \ge 0$ trong B_{2R}, ta có thể áp dụng định lý Harnack (Định lý 1.3.8) cho hàm $W_{k2} - w_k$ và nhận được

$$\Phi_{p,R}(W_{k2} - w_k) = \left(\frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} (W_{k2} - w_k)^p \right)^{1/p} \le C(W_{k2} - W_{k1} + \overline{\mu}R^2), \tag{3.134}$$

trong đó p và C là các hằng số dương chỉ phụ thuộc vào n, λ và Λ.

Từ (3.127), (3.131), (3.133) và chú ý $0 < h_k < 1$, ta có với $k = 1, \dots, N$,

$$\begin{aligned}
W_{k2} - w_k &= \sup_{B_{2R}} w_k - w_k = \sup_{B_{2R}} \left(h_k + \varepsilon \sum_{k=1}^{N} (h_k)^2 \right) - \left(h_k + \varepsilon \sum_{k=1}^{N} (h_k)^2 \right) \\
&\geq \left(\sup_{B_{2R}} h_k + \varepsilon \sum_{k=1}^{N} \Big(\inf_{B_{2R}} h_k \Big)^2 \right) - \left(h_k + \varepsilon \sum_{k=1}^{N} (h_k)^2 \right) \\
&= \left(\sup_{B_{2R}} h_k - h_k \right) - \varepsilon \sum_{k=1}^{N} \Big(h_k + \inf_{B_{2R}} h_k \Big) \Big(h_k - \inf_{B_{2R}} h_k \Big) \\
&\geq (M_{k2} - h_k) - 2\varepsilon \sum_{k=1}^{N} \left(\sup_{B_{2R}} h_k - \inf_{B_{2R}} h_k \right) = (M_{k2} - h_k) - 2\varepsilon\omega(2R), \quad \text{trong } B_{2R},
\end{aligned}$$

trong đó bất đẳng thức thứ ba được suy ra từ đánh giá sau

$$\sup_{B_{2R}} \left(h_k + \varepsilon \sum_{k=1}^{N} (h_k)^2 \right) \geq \sup_{B_{2R}} h_k - \sup_{B_{2R}} \left(-\varepsilon \sum_{k=1}^{N} (h_k)^2 \right) \geq \sup_{B_{2R}} h_k + \varepsilon \sum_{k=1}^{N} \Big(\inf_{B_{2R}} h_k \Big)^2 .$$

Từ hệ thức trên, ta có với $k = 1, \dots, N$,

$$M_{k2} - h_k \leq W_{k2} - w_k + 2\varepsilon\omega(2R), \quad \text{trong } B_{2R}. \tag{3.135}$$

Tương tự như trên và chú ý $\inf_{B_R} h_k \geq \inf_{B_{2R}} h_k$, ta có với $k = 1, \dots, N$,

$$\begin{aligned}
W_{k2} - W_{k1} &= \sup_{B_{2R}} \left(h_k + \varepsilon \sum_{k=1}^{N} (h_k)^2 \right) - \sup_{B_R} \left(h_k + \varepsilon \sum_{k=1}^{N} (h_k)^2 \right) \\
&\leq \left(\sup_{B_{2R}} h_k + \varepsilon \sum_{k=1}^{N} \Big(\sup_{B_{2R}} h_k \Big)^2 \right) - \left(\sup_{B_R} h_k + \varepsilon \sum_{k=1}^{N} \Big(\inf_{B_R} h_k \Big)^2 \right) \\
&= (M_{k2} - M_{k1}) + \varepsilon \sum_{k=1}^{N} \Big(\sup_{B_{2R}} h_k + \inf_{B_R} h_k \Big) \Big(\sup_{B_{2R}} h_k - \inf_{B_R} h_k \Big) \\
&\leq (M_{k2} - M_{k1}) + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{N} (M_{k2} - m_{k2}) = M_{k2} - M_{k1} + 2\varepsilon\omega(2R).
\end{aligned} \tag{3.136}$$

Từ Bổ đề 3.4.4 và (3.134)-(3.136), ta có với $k = 1, \dots, N$,

$$\begin{aligned}
\Phi_{p,R}(M_{k2} - h_k) &\leq \Phi_{p,R}(W_{k2} - w_k + 2\varepsilon\omega(2R)) \\
&\leq 2^{1+1/p} [\Phi_{p,R}(W_{k2} - w_k) + \Phi_{p,R}(2\varepsilon\omega(2R))] \\
&\leq C \left[W_{k2} - W_{k1} + \overline{\mu} R^2 + 2\varepsilon\omega(2R) \right] \leq C \left[M_{k2} - M_{k1} + \overline{\mu} R^2 + \varepsilon\omega(2R) \right],
\end{aligned}$$

và do đó

$$\Phi_{p,R}(M_{k2} - h_k) \leq C \left[M_{k2} - M_{k1} + \overline{\mu} R^2 + \varepsilon\omega(2R) \right], \quad C = C(n, \lambda, \Lambda). \tag{3.137}$$

Từ Bổ đề 3.4.4, (3.137) và chú ý p phụ thuộc vào n, λ và Λ, ta có với ℓ cố định, $\ell = 1, \ldots, N$,

$$\begin{aligned}\Phi_{p,R}\left(\sum_{k\neq\ell}(M_{k2}-h_k)\right) &\le (N-1)^{1+1/p}\sum_{k\neq\ell}\Phi_{p,R}(M_{k2}-h_k)\\ &\le C\left[\sum_{k\neq\ell}(M_{k2}-M_{k1})+\overline{\mu}R^2+\varepsilon\omega(2R)\right]\\ &\le C\left[(1+\varepsilon)\omega(2R)-\omega(R)+\overline{\mu}R^2\right], \quad C=C(n,\lambda,\Lambda),\end{aligned} \tag{3.138}$$

trong đó bất đẳng thức cuối được suy ra từ đánh giá sau

$$\sum_{k\neq\ell}(M_{k2}-M_{k1}) \le \sum_{k=1}^{N}(M_{k2}-M_{k1}) \le \sum_{k=1}^{N}\left[(M_{k2}-m_{k2})-(M_{k1}-m_{k1})\right]=\omega(2R)-\omega(R).$$

Tiếp theo, ta sẽ đánh giá cận trên cho $\Phi_{p,R}(h_k - m_{k2})$, $k = 1, \ldots, N$. Cho các điểm $x \in B_{2R}$, $y \in B_R$ tùy ý. Bằng cách áp dụng Định lý 2.2.20 cho hàm $F(R) = \log(\det R)$ đối với hai ma trận $R^{(0)} = R(y)$, $R^{(1)} = R(x)$ và sử dụng các công thức (3.117), (3.118), ta có

$$\begin{aligned}&\log f(x,u,Du)-\log f(y,u,Du)=F(R(x))-F(R(y))\\ &\le \sum_{i,j=1}^{n}F^{ij}(R(y))(R_{ij}(x)-R_{ij}(y))+\frac{\Lambda^2}{2}\left(1+\frac{4n^2\delta^2}{1-\delta^2}\right)|B(x,u,Du)-B(y,u,Du)|^2.\end{aligned}$$

Do đó từ (3.112), (3.114), Bổ đề 3.2.3 và định lý giá trị trung bình, ta suy ra

$$\frac{\left(F^{ij}+F^{ji}\right)(R(y))}{2}(D_{ij}u(y)-D_{ij}u(x)) \le D_0|x-y|, \tag{3.139}$$

trong đó D_0 là hằng số dương phụ thuộc vào $M_0, M_1, M_2, n, \delta, A, B, f$ và Ω.
Từ (3.113), (3.119) và (3.124), ta có

$$\begin{aligned}&\frac{\left(F^{ij}+F^{ji}\right)(R(y))}{2}\left(D_{ij}u(y)-D_{ij}u(x)\right)=\sum_{k=1}^{N}\beta_k(y)\gamma_{ki}\gamma_{kj}\left(D_{ij}u(y)-D_{ij}u(x)\right)\\ &=\sum_{k=1}^{N}\beta_k(y)\left(D_{\gamma_k\gamma_k}u(y)-D_{\gamma_k\gamma_k}u(x)\right)=2(1+M_2)\sum_{k=1}^{N}\beta_k(y)(h_k(y)-h_k(x)),\end{aligned}$$

trong đó $\lambda^* \le \beta_k(y) \le \Lambda^*$, $k = 1, \ldots, N$. Từ đây và (3.139), ta suy ra

$$\sum_{k=1}^{N}\beta_k(y)(h_k(y)-h_k(x)) \le \frac{D_0|x-y|}{2(1+M_2)} \le \frac{3D_0R}{2(1+M_2)}=\frac{3}{2}\lambda\tilde{\mu}R, \quad \tilde{\mu}=\frac{D_0}{\lambda(1+M_2)}, \tag{3.140}$$

và vì thế, ta có với ℓ cố định,

$$\begin{aligned}h_\ell(y)-h_\ell(x) &\le \frac{1}{\lambda^*}\left[\beta_\ell(y)(h_\ell(y)-h_\ell(x))\right]\\ &=\frac{1}{\lambda^*}\left[\sum_{k=1}^{N}\beta_k(y)(h_k(y)-h_k(x))+\sum_{k\neq\ell}\beta_k(y)(h_k(x)-h_k(y))\right]\\ &\le C\left[\tilde{\mu}R+\sum_{k\neq\ell}(M_{k2}-h_k(y))\right], \quad C=C(n,\lambda,\Lambda).\end{aligned}$$

Như vậy, với $\ell = 1, \dots, N$, ta có

$$h_\ell(y) - m_{\ell 2} = \sup_{x\in B_{2R}} (h_\ell(y) - h_\ell(x)) \le C \left[\tilde{\mu}R + \sum_{k\neq \ell}(M_{k2} - h_k(y))\right], \quad \forall y \in B_R,$$

và do đó từ Bổ đề 3.4.4 và (3.138), ta nhận được

$$\begin{aligned}\Phi_{p,R}(h_\ell - m_{\ell 2}) &\le C \left[\Phi_{p,R}(\tilde{\mu}R) + \Phi_{p,R}\left(\sum_{k\neq\ell}(M_{k2} - h_k(y))\right)\right] \\ &\le C\left[(1+\varepsilon)\omega(2R) - \omega(R) + \tilde{\mu}R + \overline{\mu}R^2\right], \quad C = C(n,\lambda,\Lambda).\end{aligned} \tag{3.141}$$

Từ Bổ đề 3.4.4, (3.137) và áp dụng đánh giá (3.141) với $\ell = k$, ta có

$$\begin{aligned}\Phi_{p,R}(M_{k2} - m_{k2}) &= \Phi_{p,R}\left[(M_{k2} - h_k) + (h_k - m_{k2})\right] \\ &\le 2^{1+1/p}\left[\Phi_{p,R}(M_{k2} - h_k) + \Phi_{p,R}(h_k - m_{k2})\right] \\ &\le C\left[(1+\varepsilon)\omega(2R) - \omega(R) + M_{k_2} - M_{k1} + \tilde{\mu}R + \overline{\mu}R^2\right], \ k = 1,\dots,N,\end{aligned}$$

và do đó

$$\begin{aligned}\Phi_{p,R}(\omega(2R)) = \Phi_{p,R}\left(\sum_{k=1}^N (M_{k2} - m_{k2})\right) &\le N^{1+1/p}\sum_{k=1}^N \Phi_{p,R}(M_{k2} - m_{k2}) \\ &\le C\left[N(1+\varepsilon)\omega(2R) - N\omega(R) + \sum_{k=1}^N (M_{k_2} - M_{k1}) + N\tilde{\mu}R + N\overline{\mu}R^2\right] \\ &\le C\left[(1+\varepsilon)\omega(2R) - \omega(R) + \tilde{\mu}R + \overline{\mu}R^2\right], \quad C = C(n,\lambda,\Lambda),\end{aligned}$$

trong đó bất đẳng thức cuối được suy ra từ đánh giá sau

$$\sum_{k=1}^N (M_{k_2} - M_{k1}) \le \sum_{k=1}^N (M_{k2} - m_{k2}) - \sum_{k=1}^N (M_{k1} - m_{k1}) = \omega(2R) - \omega(R).$$

Từ đánh giá trên và chú ý $\Phi_{p,R}(\omega(2R)) = \omega(2R)$, ta nhận được

$$\omega(2R) \le C\left[(1+\varepsilon)\omega(2R) - \omega(R) + \tilde{\mu}R + \overline{\mu}R^2\right],$$

và do đó

$$\omega(R) \le \left(1 + \varepsilon - \frac{1}{C}\right)\omega(2R) + \left(\tilde{\mu}R + \overline{\mu}R^2\right),$$

trong đó $C = C(n,\lambda,\Lambda)$, C không phụ thuộc vào ε mặc dù $\overline{\mu}$ có phụ thuộc vào đại lượng này. Ta luôn có thể chọn C sao cho $C > \frac{1}{2}$, khi đó bằng cách chọn $\varepsilon = \frac{1}{2C} \in (0,1)$, ta có

$$\omega(R) \le \tilde{\delta}\omega(2R) + \left(\tilde{\mu}R + \overline{\mu}R^2\right), \tag{3.142}$$

trong đó $\tilde{\delta} = 1 - \frac{1}{2C} \in (0,1)$, $\tilde{\delta}$ chỉ phụ thuộc vào n, λ và Λ.

Giả sử $B_{R_0} \subset \Omega$ và ký hiệu B_R là hình cầu đồng tâm với $B_{R_0}, R \leq R_0$. Vì các hằng số $\tilde{\delta}, \overline{\mu}$ và $\tilde{\mu}$ trong đánh giá (3.142) không phụ thuộc vào R nên từ (3.142), ta suy ra

$$\omega\left(\frac{R}{2}\right) \leq \tilde{\delta}\omega(R) + \left(\frac{1}{2}\tilde{\mu}R + \frac{1}{4}\overline{\mu}R^2\right) \leq \tilde{\delta}\omega(R) + \left(\tilde{\mu}R + \overline{\mu}R^2\right), \quad \forall R \leq R_0. \tag{3.143}$$

Do đó ta có thể áp dụng Bổ đề 3.4.2 với $\tau = \dfrac{1}{2} \in (0,1)$, $\gamma = \tilde{\delta} \in (0,1)$ và $\sigma(R) = \tilde{\mu}R + \overline{\mu}R^2$ và thu được

$$\omega(R) \leq C\left[\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\alpha_0} \omega(R_0) + \tilde{\mu}R^{\mu}R_0^{1-\mu} + \overline{\mu}R^{2\mu}R_0^{2-2\mu}\right], \quad \forall R \leq R_0, \tag{3.144}$$

với mọi $\mu \in (0,1)$, trong đó $C = C(\gamma, \tau) = C(n, \lambda, \Lambda)$ và $\alpha_0 = \dfrac{(1-\mu)\log\tilde{\delta}}{\log 1/2}$.
Ta chọn μ sao cho $\mu = \dfrac{(1-\mu)\log\tilde{\delta}}{\log 1/2}$. Khi đó $\alpha_0 = \mu = \dfrac{\log\tilde{\delta}}{\log 1/2 + \log\tilde{\delta}} \in (0,1)$ và từ (3.144), ta thu được

$$\omega(R) \leq C\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\alpha_0} \left(\omega(R_0) + \tilde{\mu}R_0 + \overline{\mu}R_0^2\right), \quad \forall R \leq R_0, \tag{3.145}$$

trong đó C và $\alpha_0 \in (0,1)$ là các hằng số chỉ phụ thuộc vào n, λ và Λ.
Từ (3.124) và (3.133), ta có

$$\omega(R_0) = \frac{1}{2(1+M_2)} \sum_{k=1}^{N} \operatorname*{osc}_{B_{R_0}} D_{\gamma_k\gamma_k}u \leq N \operatorname*{osc}_{B_{R_0}} D^2u \leq \frac{n(n+1)}{2} \operatorname*{osc}_{B_{R_0}} D^2u, \tag{3.146}$$

trong đó bất đẳng thức thứ hai dễ dàng được suy ra từ đánh giá sau

$$|D_{\gamma_k\gamma_k}u(x) - D_{\gamma_k\gamma_k}u(y)| = \left|\left(\left(D^2u(x) - D^2u(y)\right)\gamma_k, \gamma_k\right)\right| \leq \left|D^2u(x) - D^2u(y)\right|, \ \forall x, y.$$

Tiếp theo, ta sẽ đánh giá cận dưới đối với $\omega(R)$. Ta có:

- Với $\gamma_k = e_i$, thì $\operatorname*{osc}_{B_R} D_{\gamma_k\gamma_k}u = \operatorname*{osc}_{B_R} D_{ii}u$.
- Với $\gamma_k = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_i + e_j)$, thì

$$\operatorname*{osc}_{B_R} D_{\gamma_k\gamma_k}u = \sup_{B_R}\left(\frac{1}{2}D_{ii}u + D_{ij}u + \frac{1}{2}D_{jj}u\right) - \inf_{B_R}\left(\frac{1}{2}D_{ii}u + D_{ij}u + \frac{1}{2}D_{jj}u\right).$$

- Với $\gamma_k = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_i - e_j)$, thì

$$\begin{aligned}\operatorname*{osc}_{B_R} D_{\gamma_k\gamma_k}u &= \sup_{B_R}\left(\frac{1}{2}D_{ii}u - D_{ij}u + \frac{1}{2}D_{jj}u\right) - \inf_{B_R}\left(\frac{1}{2}D_{ii}u - D_{ij}u + \frac{1}{2}D_{jj}u\right)\\ &= -\inf_{B_R}\left(\frac{-1}{2}D_{ii}u + D_{ij}u - \frac{1}{2}D_{jj}u\right) + \sup_{B_R}\left(\frac{-1}{2}D_{ii}u + D_{ij}u - \frac{1}{2}D_{jj}u\right).\end{aligned}$$

Từ các hệ thức trên và chú ý tập $\{\gamma_k, k = 1, \ldots, N\}$ chứa các tập $\{e_i, i = 1, \ldots, n\}$ và $\{1/\sqrt{2}(e_i \pm e_j), 1 \leq i < j \leq n\}$, ta dễ dàng suy ra

$$\sum_{k=1}^{N} \operatorname*{osc}_{B_R} D_{\gamma_k\gamma_k} u \geq \operatorname*{osc}_{B_R} D_{ii} u + 2\sum_{i<j}\left(\sup_{B_R} D_{ij}u - \inf_{B_R} D_{ij}u\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \operatorname*{osc}_{B_R} D_{ij}u \geq \operatorname*{osc}_{B_R} D^2u.$$

Từ đây và (3.124), (3.133), ta có

$$\omega(R) = \frac{1}{2(1+M_2)} \sum_{k=1}^{N} \operatorname*{osc}_{B_R} D_{\gamma_k\gamma_k} u \geq \frac{1}{2(1+M_2)} \operatorname*{osc}_{B_R} D^2u. \tag{3.147}$$

Từ các đánh giá (3.145)-(3.147), ta nhận được

$$\operatorname*{osc}_{B_R} D^2u \leq C(1+M_2)\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\alpha_0}\left(\operatorname*{osc}_{B_{R_0}} D^2u + \tilde{\mu}R_0 + \overline{\mu}R_0^2\right), \quad \forall R \leq R_0,$$

trong đó C và $\alpha_0 \in (0,1)$ là các hằng số chỉ phụ thuộc vào n, λ và Λ, $\overline{\mu}$ và $\tilde{\mu}$ là các hằng số dương lần lượt được xác định bởi (3.132) và (3.140). Từ đánh giá này và chú ý các hằng số λ, Λ phụ thuộc vào $M_0, M_1, M_2, n, \delta, A, f$ và Ω, ta nhận được đánh giá (3.109). Định lý được chứng minh. □

Từ Định lý 3.4.1, ta dễ dàng suy ra được hệ quả sau đây.

Hệ quả 3.4.8 *Giả sử các giả thiết của Định lý 3.4.1 được thỏa mãn. Khi đó với miền con tùy ý $\Omega' \subset\subset \Omega$, ta có đánh giá*

$$\left[D^2u\right]_{\alpha_0;\Omega'} \leq C, \tag{3.148}$$

trong đó $\alpha_0 \in (0,1)$ là hằng số đã được xác định trong Định lý 3.4.1, C là hằng số dương phụ thuộc vào $M_0, M_1, M_2, n, \delta, A, B, f, \Omega$ và $\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$.

3.4.2 Đánh giá Hölder tại điểm tùy ý trên biên đối với các đạo hàm cấp hai của nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet cho phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng

Trong mục này, luận án sẽ thiết lập đánh giá Hölder đối với các đạo hàm cấp hai của nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet (3.1)-(3.2) tại điểm tùy ý trên biên và với bậc $\alpha \in (0,1)$ tùy ý. Kết quả chính của mục này là định lý dưới đây.

Định lý 3.4.9 *Cho $u(x) \in C^4(\overline{\Omega})$ là nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet* (3.1)-(3.2), *trong đó $f(x,z,p) > 0$ trong Γ, $\varphi(x) \in C^4(\overline{\Omega})$ và $\partial\Omega \in C^4$. Giả sử u thỏa mãn*

$$\sup_{x\in\Omega} |u(x)| \leq M_0, \ \sup_{x\in\Omega} |Du(x)| \leq M_1, \ \sup_{x\in\Omega} |D^2u(x)| \leq M_2, \tag{3.149}$$

trong đó M_0, M_1 và M_2 là các hằng số dương. Khi đó với hằng số $\alpha \in (0,1)$ tùy ý, ta có

$$|D^2u(x) - D^2u(x^0)| \leq C|x - x^0|^{\alpha}, \quad \forall x^0 \in \partial\Omega, \ x \in \overline{\Omega}, \tag{3.150}$$

trong đó C là hằng số dương phụ thuộc vào $\alpha, M_0, M_1, M_2, n, \delta, A, B, f, \varphi$ và Ω.

Chứng minh của định lý trên được dựa trên chứng minh của các Định lý $17.26, 17.26'$ ([11]) và tài liệu tham khảo [14]. Ý tưởng ở đây là ta cần thiết lập đánh giá nửa chuẩn Hölder đối với các đạo hàm cấp hai của nghiệm trong lân cận đủ nhỏ của điểm biên $x^0 \in \partial\Omega$ tùy ý cho trước, rồi dùng lý thuyết phủ biên $\partial\Omega$ bởi một họ hữu hạn các lân cận đủ nhỏ. Để làm được điều đó, ta làm phẳng phần biên trong lân cận đủ nhỏ của x^0, rồi thiết lập đánh giá trong không gian $L^p, p \in (1, +\infty)$ đối với các đạo hàm cấp ba của nghiệm để từ đó có thể áp dụng được Định lý Morrey 1.2.6. Theo Định lý 1.3.9, việc thiết lập các đánh giá trong L^p liên quan mật thiết đến việc đánh giá môđun liên tục của các hàm hệ số của một toán tử elliptic tuyến tính hóa cấp hai và từ đó dẫn đến việc phải đánh giá được môđun liên tục của các đạo hàm cấp hai của nghiệm tại x^0.

a) Làm phẳng biên và đưa về điều kiện biên bằng không

Ta nhận thấy dạng của bài toán Dirichlet (3.1)-(3.2) và các giả thiết của Định lý 3.4.9 là bất biến dưới các phép tịnh tiến và phép quay các tọa độ. Do đó, với điểm $x^0 \in \partial\Omega$ tùy ý cho trước, không mất tính tổng quát, ta có thể giả thiết x^0 trùng với gốc tọa độ và véc tơ pháp tuyến trong đơn vị của biên $\partial\Omega$ tại điểm này có giá nằm trên trục tọa độ x_n và hướng theo chiều dương của trục này. Khi đó phần biên $\partial\Omega$, nằm trong một lân cận $\mathcal{N}$ đủ nhỏ của x^0, là đồ thị của hàm

$$x_n = h(x'), \quad x' = (x_1, \dots, x_{n-1}),$$

trong đó $h \in C^4$, $h(0) = 0$ và $Dh(0) = 0$. Bây giờ, ta sẽ làm phẳng phần biên này. Cụ thể, ta xét vi đồng phôi $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ cho bởi

$$y = \psi(x) = (x', x_n - h(x')), \quad x = (x', x_n) \in \Omega, \; y \in \tilde{\Omega} := \psi(\Omega). \tag{3.151}$$

Với phép đổi biến (3.151), ta đặt

$$v(y) = u(x) - \varphi(x) \text{ hay } u(x) = v(y) + \varphi(x). \tag{3.152}$$

Bằng tính toán, ta có

$$\begin{aligned} Du &= JDv + D\varphi, \\ D^2u &= JD^2vJ^T + \sum_{k=1}^{n} v_k D^2\psi_k + D^2\varphi, \end{aligned} \tag{3.153}$$

trong đó $J = [J_{ij}]_{n\times n} = \left[\frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}\right]_{n\times n}$ là ma trận được xác định tương tự như trong (3.50). Chú ý $\det J = 1$, khi đó bài toán Dirichlet (3.1)-(3.2) được đưa về dạng

$$\det\big[D^2v - \tilde{A}(y, v, Dv) - \tilde{B}(y, v, Dv)\big] = \tilde{f}(y, v, Dv) \;\text{ trong } \tilde{\Omega}, \tag{3.154}$$

$$v = 0 \;\text{ trên } \partial\tilde{\Omega}, \tag{3.155}$$

trong đó

$$\begin{cases} \tilde{A}(y,z,p) &= J^{-1}\big[A(\psi^{-1}(y), z+\varphi, Jp+D\varphi) - \sum_{k=1}^n p_k D^2\psi_k - D^2\varphi\big]\big(J^{-1}\big)^T, \\ \tilde{B}(y,z,p) &= J^{-1}B\big(\psi^{-1}(y), z+\varphi, Jp+D\varphi\big)\big(J^{-1}\big)^T, \\ \tilde{f}(y,z,p) &= f\big(\psi^{-1}(y), z+\varphi, Jp+D\varphi\big). \end{cases} \tag{3.156}$$

Rõ ràng $\tilde{A}^T = \tilde{A}$, $\tilde{B}^T = -\tilde{B}$ và $\tilde{f} > 0$ trong $\overline{\tilde{\Omega}} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Hơn nữa, bằng các lập luận tương tự như trong Mục 3.4.1, ta suy ra tồn tại hằng số $\rho_0 > 0$ đủ nhỏ sao cho $B_{\rho_0}(0) \subset \tilde{\mathcal{N}}$ và $v(y)$ là nghiệm $\tilde{\delta}$-elliptic của (3.154) trong $\tilde{\Omega}_{\rho_0} := \tilde{\Omega} \cap B_{\rho_0}(0)$ với $0 < \tilde{\delta} < 1$.
Mặt khác, vì $\psi \in C^4$ và khả nghịch nên ta suy ra tồn tại các hằng $0 < \mu_1 \le \mu_2$ sao cho

$$\mu_1|x-\overline{x}| \le |\psi(x) - \psi(\overline{x})| \le \mu_2|x-\overline{x}|, \quad \forall x, \overline{x} \in \Omega. \tag{3.157}$$

Điều này có nghĩa là khoảng cách trong x-không gian là tương đương với khoảng cách trong y-không gian.

b) Chứng minh của Định lý 3.4.9

Giả sử $x^0 \in \partial\Omega$ là điểm tùy ý cho trước. Từ các lập luận trong mục trên, ta có thể giả thiết $x^0 = 0$ và phần biên $\partial\Omega$ nằm trong một lân cận đủ nhỏ của x^0 có dạng phẳng. Cụ thể, tồn tại hằng số $\rho_0 \in (0,1)$ đủ nhỏ sao cho

$$\begin{aligned} \Omega_{\rho_0} &:= \Omega \cap B_{\rho_0}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < \rho_0, x_n > 0\}, \\ T_{\rho_0} &:= \partial\Omega \cap B_{\rho_0}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < \rho_0, x_n = 0\}. \end{aligned}$$

Thay vì bài toán (3.154)-(3.155), ta xét bài toán sau, trong đó ẩn hàm $v(y)$ được ký hiệu trở lại thành $u(x)$,

$$\det\big[D^2u - A(x,u,Du) - B(x,u,Du)\big] = f(x,u,Du), \quad \text{trong } \Omega_{\rho_0}, \tag{3.158}$$

$$u = 0, \quad \text{trên } T_{\rho_0}. \tag{3.159}$$

Các giả thiết của Định lý 3.4.9 tiếp tục được thỏa mãn trong Ω_{ρ_0}. Cụ thể, ta giả thiết $u(x) \in C^4(\overline{\Omega}_{\rho_0})$ là nghiệm δ-elliptic của bài toán (3.158)-(3.159) và thỏa mãn (3.149), trong đó $f(x,z,p) > 0$ trong $\overline{\Omega}_{\rho_0} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, các hằng số mới M_0, M_1, M_2, δ phụ thuộc vào ψ, φ và các giá trị ban đầu của nó. Khi đó ta vẫn nhận được các hệ thức (3.112), (3.113), Bổ đề 3.4.5, Hệ quả 3.4.6 và Hệ quả 3.4.7 trong Ω_{ρ_0}.

Mệnh đề sau đây thiết lập đánh giá Hölder đối với các đạo hàm cấp hai của nghiệm trong lân cận đủ nhỏ của điểm $x^0 = 0$.

Mệnh đề 3.4.10 *Với hằng số $\alpha \in (0,1)$ tùy ý, ta có đánh giá*

$$|D^2u(x) - D^2u(\overline{x})| \le C|x-\overline{x}|^\alpha, \quad \forall x, \overline{x} \in \overline{\Omega}_{\rho_1}, \tag{3.160}$$

trong đó $\rho_1 \in (0,\rho_0)$ và C là các hằng số dương phụ thuộc vào $\alpha, M_0, M_1, M_2, n, \delta, A, B, f$, ρ_0 và Ω_{ρ_0}.

Để chứng minh mệnh đề trên, trước tiên ta sẽ thiết lập đánh giá đối với môđun liên tục của các đạo hàm cấp hai tại điểm biên $x^0 = 0$. Cụ thể, ta có các bổ đề sau đây.

Bổ đề 3.4.11 *Ta có đánh giá*

$$\left|D^2u(x) - D^2u(0)\right| \le \tilde{C}|x|^\beta, \quad \forall x \in T_{\rho_0}, \tag{3.161}$$

trong đó $\beta \in (0,1)$ *phụ thuộc vào* $M_0, M_1, M_2, n, \delta, A, f$ *và* Ω_{ρ_0}, *còn* $\tilde{C} > 0$ *phụ thuộc thêm vào* B *và* ρ_0.

Chứng minh. Ký hiệu H_{ij} là phần bù đại số của R_{ij} trong định thức $\det R$ với $R = R(x,u)$. Khai triển định thức này theo cột n, từ (3.158) ta có

$$(u_{nn} - A_{nn})H_{nn} = R_{nn}H_{nn} = f - \sum_{i=1}^{n-1} R_{in}H_{in}. \tag{3.162}$$

Từ (3.113), (3.114) và (3.158), ta suy ra

$$H_{nn} = R^{nn}\det R = R^{nn} f(x,u,Du) \ge \lambda f_0 > 0, \quad \text{trong } \Omega_{\rho_0},$$

trong đó $f_0 = \min\limits_{x\in\overline{\Omega}_{\rho_0}, |z|\le M_0, |p|\le M_1} f(x,z,p) > 0$. Do đó từ (3.162), ta có

$$u_{nn} = \frac{f - \sum_{i=1}^{n-1} R_{in}H_{in} + A_{nn}H_{nn}}{H_{nn}} = L\left(x,u,Du,(u_{k\ell})_{1\le k\le n-1, 1\le \ell\le n}\right).$$

Bằng cách sử dụng định lý giá trị trung bình đối với vế phải của hệ thức trên, ta suy ra

$$|u_{nn}(x) - u_{nn}(0)| \le C\left(\sup_{1\le k\le n-1, 1\le\ell\le n} |u_{k\ell}(x) - u_{k\ell}(0)| + |x|\right), \quad \forall x \in T_{\rho_0}, \tag{3.163}$$

trong đó C là hằng số dương phụ thuộc vào $\lambda, M_0, M_1, M_2, n, \delta, A, B, f$ và Ω_{ρ_0}.
Từ (3.159), ta có $u_{k\ell}|_{T_{\rho_0}} = 0$, $k,\ell = 1,\ldots,n-1$. Từ hệ thức này và (3.163) ta nhận thấy để chứng minh (3.161), ta chỉ cần chứng minh đánh giá sau

$$|u_{kn}(x) - u_{kn}(0)| \le C|x|^\beta, \quad \forall x \in T_{\rho_0},\ k = 1,\ldots,n-1. \tag{3.164}$$

Thật vậy, bằng cách lấy đạo hàm hai vế của (3.112) theo biến x_k, ta có

$$\begin{aligned} F^{ij}\big(&D_{ijk}u - D_{x_k}A_{ij} - D_zA_{ij}D_ku - D_{p_\ell}A_{ij}D_{k\ell}u - D_{x_k}B_{ij} - D_zB_{ij}D_ku \\ &- D_{p_\ell}B_{ij}D_{k\ell}u\big) = D_{x_k}\hat{f} + D_z\hat{f}D_ku + D_{p_\ell}\hat{f}D_{k\ell}u, \quad k = 1,\ldots,n-1. \end{aligned} \tag{3.165}$$

Với chỉ số k cố định, $k = 1,\ldots,n-1$, từ (3.159) và (3.165), ta suy ra hàm u_k thuộc $C^2(\overline{\Omega}_{\rho_0})$ và thỏa mãn

$$\tilde{L}u_k = g_k(x) \ \text{ trong } \Omega_{\rho_0}, \quad u_k = 0 \ \text{ trên } T_{\rho_0}, \tag{3.166}$$

trong đó $\tilde{L}$ là toán tử tuyến tính cho bởi (3.120) với các hàm hệ số $a^{ij}(x) \in C(\overline{\Omega}_{\rho_0})$, hàm vế phải $g_k(x) \in C(\overline{\Omega}_{\rho_0})$ cho bởi

$$g_k(x) = F^{ij}\big(D_{x_k}A_{ij} + D_zA_{ij}D_ku + D_{p_\ell}A_{ij}D_{k\ell}u + D_{x_k}B_{ij} + D_zB_{ij}D_ku + D_{p_\ell}B_{ij}D_{k\ell}u\big) \\ + D_{x_k}\hat{f} + D_z\hat{f}D_ku + D_{p_\ell}\hat{f}D_{k\ell}u.$$

Từ (3.166) và Hệ quả 3.4.7, ta có thể áp dụng Định lý Krylov 1.3.10 trong $B^+_{\rho_0} = \Omega_{\rho_0}$ và nhận được đánh giá

$$\operatorname*{osc}_{T_\rho} \frac{\partial u_k}{\partial x_n} \le C\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\beta \left(\sup_{\Omega_{\rho_0}}|Du_k| + \frac{\rho_0}{\lambda}\sup_{\Omega_{\rho_0}}|g_k|\right), \quad \forall \rho \le \rho_0,\ k = 1, \dots, n-1,$$

trong đó $\beta \in (0,1)$ và C chỉ phụ thuộc vào n, λ và Λ. Từ đây suy ra

$$\operatorname*{osc}_{T_\rho} u_{kn} \le C\rho^\beta, \quad \forall \rho \le \rho_0,\ k = 1, \dots, n-1,$$

trong đó C phụ thuộc vào $n, \lambda, \Lambda, \rho_0, |D^2u|_{0;\overline{\Omega}_{\rho_0}}$ và $|g_k|_{0;\overline{\Omega}_{\rho_0}}$. Từ đánh giá này và chú ý các hằng số λ và Λ phụ thuộc vào $M_0, M_1, M_2, n, \delta, A, f$ và Ω_{ρ_0}, ta lần lượt suy ra (3.164) và (3.161). Bổ đề được chứng minh. □

Bổ đề 3.4.12 *Giả sử*

$$|D^2u(x) - D^2u(0)| \le \varepsilon', \quad \forall x \in T_{\rho'}, \tag{3.167}$$

trong đó $\rho' \in (0, \rho_0)$ và ε' là các hằng số dương. Khi đó ta có

$$|D^2u(x) - D^2u(0)| \le C'\varepsilon' + C''|x|, \quad \forall x \in \Omega_{\rho'}, \tag{3.168}$$

trong đó $C' \ge 1$ phụ thuộc vào $M_0, M_1, M_2, n, \delta, A, f$ và Ω_{ρ_0}, $C'' > 0$ phụ thuộc thêm vào B, ρ_0 và ρ'.

Chứng minh. Cho véc tơ đơn vị $\gamma \in \mathbb{R}^n$ tùy ý. Từ (3.122) và bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$F^{ij}D_{ij\gamma\gamma}u \ge \varepsilon_0|D_{ij\gamma}u|^2 + \left(-\frac{1}{4\varepsilon_0}|K_{ij\gamma}|^2 - \varepsilon_0|D_{ij\gamma}u|^2\right) + L_\gamma \ge -C_1, \quad \text{trong } \Omega_{\rho_0}, \tag{3.169}$$

trong đó C_1 là hằng số dương phụ thuộc vào $M_0, M_1, M_2, n, \delta, A, B, f$ và Ω_{ρ_0}.

Giả sử $B_R(y)$ là hình cầu ngoại tiếp biên $\partial\Omega_{\rho_0}$ tại $x^0 = 0$. Xét hàm w cho bởi

$$w(x) = \tau\left(R^{-\sigma} - |x-y|^{-\sigma}\right) = \tau\left(R^{-\sigma} - r^{-\sigma}\right), \quad r = |x-y|, \tag{3.170}$$

trong đó τ và σ là các hằng số dương sẽ được xác định sau. Bằng tính toán, ta có

$$D_i\left(R^{-\sigma} - r^{-\sigma}\right) = \sigma r^{-\sigma-1}D_ir,$$

$$\begin{aligned} D_{ij}\left(R^{-\sigma} - r^{-\sigma}\right) &= -\sigma(\sigma+1)r^{-\sigma-2}D_irD_jr + \sigma r^{-\sigma-1}D_{ij}r \\ &= -\sigma(\sigma+1)r^{-\sigma-4}(x_i-y_i)(x_j-y_j) + \sigma r^{-\sigma-1}\left(\frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{r^3}\right) \\ &= -\sigma(\sigma+2)r^{-\sigma-4}(x_i-y_i)(x_j-y_j) + \sigma r^{-\sigma-2}\delta_{ij}. \end{aligned}$$

Từ hệ thức này và (3.170), ta có

$$\begin{aligned} F^{ij}D_{ij}w &= \tau\sigma r^{-\sigma-2}F^{ij}\big[\delta_{ij} - (\sigma+2)r^{-2}(x_i-y_i)(x_j-y_j)\big] \\ &= \tau\sigma r^{-\sigma-2}\left[F^{ii} - (\sigma+2)r^{-2}F^{ij}(x_i-y_i)(x_j-y_j)\right] \le \tau\sigma r^{-\sigma-2}[n\Lambda - (\sigma+2)\lambda], \end{aligned}$$

trong đó bất đẳng thức cuối được suy ra từ (3.114). Ta chọn $\sigma > 0$ đủ lớn sao cho $n\Lambda - (\sigma+2)\lambda \le -1$. Từ hệ thức này và chú ý $r \le R + \rho_0$, ta có thể chọn τ đủ lớn sao $F^{ij}D_{ij}w \le -\tau\sigma(R+\rho_0)^{-\sigma-2} \le -1$. Như vậy, với các hằng số τ và σ đủ lớn, phụ thuộc vào $n, \lambda, \Lambda, \rho_0$ và R, ta có

$$F^{ij}D_{ij}w \le -1, \quad \text{trong } \Omega_{\rho_0}. \tag{3.171}$$

Từ (3.114), (3.169) và (3.171), ta có đánh giá sau với hằng số $C_2 > 0$ đủ lớn

$$\tilde{L}\left(\varepsilon' + C_2 w(x) + 2M_2\frac{|x|^2}{\rho'^2}\right) \le -C_2 + \frac{4nM_2\Lambda}{\rho'^2} \le -C_1 \le \tilde{L}(D_{\gamma\gamma}u(x) - D_{\gamma\gamma}u(0)), \ \ \forall x \in \Omega_{\rho'},$$

trong đó $\tilde{L}$ là toán tử cho bởi (3.120), C_2 phụ thuộc vào n, M_2, Λ, ρ' và C_1.
Từ (3.149), (3.167) và chú ý $w \ge 0$ trong $\overline{\Omega}_{\rho'}$, $\partial\Omega_{\rho'} = T_{\rho'} \cup (\Omega \cap \partial B_{\rho'}(0))$, ta suy ra

$$D_{\gamma\gamma}u(x) - D_{\gamma\gamma}u(0) \le \varepsilon' + C_2 w(x) + 2M_2\frac{|x|^2}{\rho'^2}, \quad \forall x \in \partial\Omega_{\rho'}.$$

Từ các hệ thức trên, ta có thể áp dụng nguyên lý so sánh (Định lý 1.3.3) và nhận được

$$D_{\gamma\gamma}u(x) - D_{\gamma\gamma}u(0) \le \varepsilon' + C_2 w(x) + 2M_2\frac{|x|^2}{\rho'^2}, \quad \forall x \in \Omega_{\rho'}.$$

Mặt khác, ta luôn có thể giả thiết $\sigma \in \mathbb{N}^*$. Bằng cách sử dụng công thức nhị thức Newton, từ (3.170) và chú ý $0 < \rho' < 1$, ta suy ra

$$w(x) = \tau\frac{|x-y|^\sigma - R^\sigma}{R^\sigma|x-y|^\sigma} \le \tau\frac{|x-y|^\sigma - R^\sigma}{R^{2\sigma}} \le \tau\frac{(|x|+R)^\sigma - R^\sigma}{R^{2\sigma}} \le C_3|x|, \quad \forall x \in \Omega_{\rho'},$$

trong đó C_3 là hằng số dương phụ thuộc vào τ, R và σ.
Từ các đánh giá trên và chú ý ta có thể chọn hình cầu ngoại tiếp $B_R(y)$ với $y = (0, \ldots, 0, -\rho_0/4)$ và $R = \rho_0/4$, ta suy ra

$$D_{\gamma\gamma}u(x) - D_{\gamma\gamma}u(0) \le \varepsilon' + C_4|x|, \quad \forall x \in \Omega_{\rho'},$$

với mọi véc tơ đơn vị $\gamma \in \mathbb{R}^n$ và do đó

$$D_{\gamma_k\gamma_k}u(x) - D_{\gamma_k\gamma_k}u(0) \le \varepsilon' + C_4|x|, \quad \forall x \in \Omega_{\rho'}, \ k = 1, \ldots, N, \tag{3.172}$$

trong đó $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ là các véc tơ đơn vị đã được xác định trong Hệ quả 3.4.6, C_4 là hằng số dương phụ thuộc vào $M_0, M_1, M_2, n, \delta, A, B, f, \Omega_{\rho_0}, \rho_0$ và ρ'.

Bây giờ, ta sẽ chứng minh

$$D_{\gamma_k\gamma_k}u(0) - D_{\gamma_k\gamma_k}u(x) \le C_5\varepsilon' + C_6|x|, \quad \forall x \in \Omega_{\rho'}, \ k = 1, \ldots, N, \tag{3.173}$$

trong đó $C_5 \geq 1$ là hằng số phụ thuộc vào $M_0, M_1, M_2, n, \delta, A, f$ và Ω_{ρ_0}, $C_6 \geq C_4$ cũng phụ thuộc vào các đại lượng này và B, ρ_0 và ρ'. Thật vậy, từ (3.113), (3.119) và lý luận tương tự như trong chứng minh của Định lý 3.4.1, ta nhận được đánh giá tương tự (3.139),

$$\sum_{k=1}^{N} \beta_k(0)(D_{\gamma_k\gamma_k}u(0) - D_{\gamma_k\gamma_k}u(x)) = \frac{\big(F^{ij} + F^{ji}\big)(R(0))}{2}(D_{ij}u(0) - D_{ij}u(x)) \leq D_0|x|,$$

với mọi $x \in \Omega_{\rho_0}$, trong đó $0 < \lambda^* \leq \beta_k(0) \leq \Lambda^*$, $k = 1, \ldots, N$ và D_0 là hằng số dương phụ thuộc vào $M_0, M_1, M_2, n, \delta, A, B, f$ và Ω_{ρ_0}. Từ đánh giá này và (3.172), ta có

$$\begin{aligned}
\beta_k(0)\big(D_{\gamma_k\gamma_k}u(0) - D_{\gamma_k\gamma_k}u(x)\big) &= \sum_{\ell=1}^{N} \beta_\ell(0)\big(D_{\gamma_\ell\gamma_\ell}u(0) - D_{\gamma_\ell\gamma_\ell}u(x)\big) \\
&+ \sum_{\ell\neq k} \beta_\ell(0)\big(D_{\gamma_\ell\gamma_\ell}u(x) - D_{\gamma_\ell\gamma_\ell}u(0)\big) \leq D_0|x| + (N-1)\Lambda^*(\varepsilon' + C_4|x|), \quad k = 1, \ldots, N.
\end{aligned}$$

Bằng cách chia hai vế của bất phương trình trên cho $\beta_k(0)$ và chú ý $\beta_k(0) \geq \lambda^*$, $N \leq \frac{n(n+1)}{2}$, ta dễ dàng thu được (3.173) với $C_5 \geq 1$ và $C_6 \geq C_4$.
Bằng cách kết hợp (3.172) và (3.173), ta có

$$|D_{\gamma_k\gamma_k}u(x) - D_{\gamma_k\gamma_k}u(0)| \leq C_5\varepsilon' + C_6|x|, \quad \forall x \in \Omega_{\rho'}, \ k = 1, \ldots, N. \tag{3.174}$$

Áp dụng đánh giá (3.174) với $\gamma_k = e_i$, ta nhận được

$$|D_{ii}u(x) - D_{ii}u(0)| \leq C_5\varepsilon' + C_6|x|, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Từ hệ thức trên và áp dụng đánh giá (3.174) với $\gamma_k = 1/\sqrt{2}(e_i + e_j)$, ta nhận được

$$\begin{aligned}
|D_{ij}u(x) - D_{ij}u(0)| &\leq \frac{1}{2}|D_{ii}u(x) - D_{ii}u(0)| + \frac{1}{2}|D_{jj}u(x) - D_{jj}u(0)| \\
&+ \left|\left(\frac{1}{2}D_{ii}u(x) + D_{ij}u(x) + \frac{1}{2}D_{jj}u(x)\right) - \left(\frac{1}{2}D_{ii}u(0) + D_{ij}u(0) + \frac{1}{2}D_{jj}u(0)\right)\right| \\
&\leq 2(C_5\varepsilon' + C_6|x|), \quad 1 \leq i < j \leq n.
\end{aligned}$$

Từ các đánh giá trên ta dễ dàng suy ra (3.168). Bổ đề được chứng minh. □

Chứng minh của Mệnh đề 3.4.10. Ta sẽ thiết lập đánh giá trong L^p cho $|D^3u|$ trong một lân cận đủ nhỏ của $x^0 = 0$. Với mọi $p \in (1, +\infty)$, từ Hệ quả 3.4.7 và (3.166), ta có thể áp dụng Định lý 1.3.9 và nhận được đánh giá trong L^p đối với các đạo hàm cấp hai của u_k,

$$\|D^2u_k\|_{L^p(\Omega_{\rho^*/2})} \leq C(n, p, \lambda, \Lambda, \rho^*)\left(\|u_k\|_{L^p(\Omega_{\rho^*})} + \|g_k\|_{L^p(\Omega_{\rho^*})}\right), \quad k = 1, \ldots, n-1, \tag{3.175}$$

trong đó ρ^* là hằng số dương thỏa mãn

$$m(\rho^*) = \sup_{x\in\Omega_{\rho_0}, |x|\leq\rho^*} |a(x) - a(0)| \leq m^*, \quad a(x) = [a^{ij}(x)]_{n\times n}, \tag{3.176}$$

trong đó m^* là hằng số dương phụ thuộc vào n, p và λ.

Bây giờ ta sẽ đánh giá ρ^*. Ký hiệu H_{ij} là phần bù đại số của R_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ trong định thức $\det R(x, u)$. Từ (3.113) và (3.158), ta có với $i, j = 1, \ldots, n$,

$$a^{ij}(x) = \frac{R^{ij} + R^{ji}}{2} = \frac{H_{ji} + H_{ij}}{2 \det R} = \frac{H_{ij} + H_{ji}}{2f} = L_{ij}(x, u(x), Du(x), D^2u(x)).$$

Do đó, bằng cách áp dụng định lý Lagrange cho các hàm số

$$h_{ij}(t) = L_{ij}\big(tx, tu(x) + (1-t)u(0), tDu(x) + (1-t)Du(0), tD^2u(x) + (1-t)D^2u(0)\big),$$

với $i, j = 1, \ldots, n$, ta thu được đánh giá sau với mọi $x \in \Omega_{\rho_0}$,

$$\begin{aligned} |a(x) - a(0)| &\le \sum_{i,j=1}^{n} |a^{ij}(x) - a^{ij}(0)| = \sum_{i,j=1}^{n} |h_{ij}(1) - h_{ij}(0)| \\ &\le \sum_{i,j=1}^{n} \sup_{t \in [0,1]} |h'_{ij}(t)| \le K_0(|x| + |D^2u(x) - D^2u(0)|), \end{aligned} \tag{3.177}$$

trong đó K_0 là hằng số dương phụ thuộc vào $M_0, M_1, M_2, n, \delta, A, B, f$ và Ω_{ρ_0}. Từ đây suy ra môđun liên tục của ma trận $a(x)$ được đánh giá qua môđun liên tục của ma trận $D^2u(x)$.

Với $C' \ge 1$ là hằng số đã được xác định trong Bổ đề 3.4.12, ta chọn hằng số $\varepsilon' > 0$ sao cho $K_0 C' \varepsilon' < \frac{m^*}{2}$ hay $\varepsilon' < \frac{m^*}{2K_0C'}$. Với $\varepsilon' > 0$ vừa được xác định, từ Bổ đề 3.4.11 ta suy ra tồn tại hằng số $\rho' \in (0, \rho_0)$ sao cho $|D^2u(x) - D^2u(0)| \le \tilde{C}|\rho'|^\beta \le \varepsilon'$, với mọi $x \in T_{\rho'}$. Do đó từ Bổ đề 3.4.12, ta nhận được (3.168). Kết hợp (3.168) với (3.177), ta có

$$|a(x) - a(0)| \le K_0(|x| + C'\varepsilon' + C''|x|) < K_0(1 + C'')|x| + \frac{m^*}{2}, \quad \forall x \in \Omega_{\rho'}.$$

Từ đây ta dễ dàng suy ra (3.176) bằng cách chọn ρ^* thỏa mãn $\rho^* < \min\big\{\rho', \frac{m^*}{2K_0(1+C'')}\big\}$. Như vậy, ρ^* phụ thuộc vào $p, M_0, M_1, M_2, n, \delta, A, B, f, \rho_0$ và Ω_{ρ_0}.

Từ (3.175) và phương trình (3.165) với $k = n$, ta dễ dàng suy ra được đánh giá tương tự cho đạo hàm cấp ba $D_{nnn}u$. Từ các đánh giá này và đặt $\rho'' = \rho^*/2$, ta nhận được

$$\|D^3u\|_{L^p(\Omega_{\rho''})} \le C, \tag{3.178}$$

trong đó $\rho'' \in (0, \rho_0)$ và $C > 0$ phụ thuộc vào $p, M_0, M_1, M_2, n, \delta, A, B, f, \rho_0$ và Ω_{ρ_0}.

Chú ý $\Omega_{\rho''} = B_{\rho''}(0) \cap \{x_n > 0\}$. Với các chỉ số i, j cố định, $i, j = 1, \ldots, n$, ta đặt

$$v(x) = \begin{cases} u_{ij}(x), & x \in B_{\rho''}(0) \cap \{x_n \ge 0\}, \\ -3u_{ij}(x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n) + 4u_{ij}(x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n/2), & x \in B_{\rho''}(0) \cap \{x_n < 0\}. \end{cases}$$

Khi đó $v \in C^1(B_{\rho''}(0))$ và v là thác triển của u_{ij} lên hình cầu $B_{\rho''}(0)$. Từ (3.178), ta có

$$\|Dv\|_{L^p\left(B_{\rho''}(0)\right)} \le C.$$

Giả sử $\alpha \in (0,1)$ là hằng số tùy ý cho trước. Khi đó từ đánh giá trên và áp dụng bất đẳng thức Hölder (Định lý 1.2.5) với $p = \frac{n}{1-\alpha} \in (n, +\infty)$, ta có

$$\int\limits_{B_\rho(y)\cap B_{\rho''}(0)} |Dv(x)|dx \leq \|Dv\|_{L^p\left(B_\rho(y)\cap B_{\rho''}(0)\right)} \|1\|_{L^q\left(B_\rho(y)\cap B_{\rho''}(0)\right)} \leq C\big(\omega_n\rho^n\big)^{1/q} = K\rho^{n-1+\alpha},$$

với mọi $y \in B_{\rho''}(0)$ và $\rho > 0$, trong đó $K = C\omega_n^{1/q}$, ω_n là thể tích hình cầu đơn vị, $q = \frac{p}{p-1}$ và $\frac{n}{q} = n - 1 + \alpha$. Từ Định lý Morrey (Định lý 1.2.6), ta suy ra $\underset{B_\rho}{\operatorname{osc}} v \leq \overline{C}(n, \alpha, K)\rho^\alpha$, với mọi hình cầu $B_\rho \subset B_{\rho''}(0)$ và do đó $[v]_{\alpha;\overline{\Omega}_{\rho''/2}} = [u_{ij}]_{\alpha;\overline{\Omega}_{\rho''/2}} \leq \overline{C}(n, \alpha, K)$. Từ đây suy ra

$$|u_{ij}(x) - u_{ij}(\overline{x})| \leq \overline{C}(n, \alpha, K)|x - \overline{x}|^\alpha, \quad \forall x, \overline{x} \in \overline{\Omega}_{\rho''/2},\ i, j = 1, \ldots, n.$$

Do đó ta nhận được đánh giá (3.160) với $\rho_1 = \rho''/2$. Mệnh đề được chứng minh. □

Chứng minh của Định lý 3.4.9. Cho điểm $x^0 \in \partial\Omega$ tùy ý. Nhờ các lập luận trong mục a) và Mệnh đề 3.4.10, ta có đánh giá

$$|D^2u(x) - D^2u(\overline{x})| \leq C|x - \overline{x}|^\alpha, \quad \forall x, \overline{x} \in \overline{\Omega}_\rho,\ \Omega_\rho := \Omega \cap B_\rho(x^0),$$

với mọi $\alpha \in (0,1)$, trong đó ρ và C là các hằng số dương phụ thuộc vào $\alpha, M_0, M_1, M_2, n, \delta, A$, B, f, φ, ψ và Ω. Do đó, từ tính compact của biên $\partial\Omega$, ta có thể phủ biên $\partial\Omega$ bởi một số hữu hạn hình cầu $B_{\rho_i/2}(x^i), i = 1, \ldots, m$, trong đó $x^i \in \partial\Omega$ sao cho

$$|D^2u(x) - D^2u(\overline{x})| \leq C_i|x - \overline{x}|^\alpha, \quad \forall x, \overline{x} \in \overline{\Omega}_{\rho_i}, \quad \Omega_{\rho_i} := \Omega \cap B_{\rho_i}(x^i), \tag{3.179}$$

trong đó ρ_i, C_i là các hằng số dương phụ thuộc vào $\alpha, M_0, M_1, M_2, n, \delta, A, B, f, \varphi$ và Ω. Đặt

$$C_0 = \max_{i=\overline{1,m}} C_i,\ \rho_0 = \min_{i=\overline{1,m}} \rho_i. \tag{3.180}$$

Giả sử $x^0 \in \partial\Omega$ là điểm tùy ý cho trước. Khi đó $x^0 \in B_{\rho_{i_0}/2}(x^{i_0})$ với i_0 nào đó. Cho điểm $x \in \overline{\Omega}$ tùy ý, ta xét hai trường hợp sau:

(i) *Trường hợp 1:* $|x - x^0| \geq \rho_{i_0}/2$. Khi đó từ (3.149) và (3.180), ta có

$$|D^2u(x) - D^2u(x^0)| \leq \frac{|D^2u(x) - D^2u(x^0)|}{(\rho_{i_0}/2)^\alpha}|x - x^0|^\alpha \leq 2(2/\rho_0)^\alpha M_2|x - x^0|^\alpha. \tag{3.181}$$

(ii) *Trường hợp 2:* $|x - x^0| < \rho_{i_0}/2$. Khi đó $|x - x^{i_0}| \leq |x - x^0| + |x^0 - x^{i_0}| < \rho_{i_0}$. Do đó $x^0, x \in B_{\rho_{i_0}}(x^{i_0})$ và vì thế $x^0, x \in \overline{\Omega}_{\rho_{i_0}}$. Từ (3.179) và (3.180), ta có

$$|D^2u(x) - D^2u(x^0)| \leq C_{i_0}|x - x^0|^\alpha \leq C_0|x - x^0|^\alpha. \tag{3.182}$$

Từ (3.181) và (3.182), ta nhận được đánh giá (3.150) với $C = \max\{2(2/\rho_0)^\alpha M_2, C_0\}$. Định lý được chứng minh. □

Hệ quả 3.4.13 *Giả sử các giả thiết của Định lý 3.4.9 được thỏa mãn. Khi đó với hằng số $\alpha \in (0,1)$ tùy ý, ta có đánh giá*

$$\operatorname*{osc}_{B_R(x^0)\cap\Omega} D^2u \le CR^\alpha, \quad \forall x^0 \in \partial\Omega, R > 0, \tag{3.183}$$

trong đó C là hằng số dương phụ thuộc vào $\alpha, M_0, M_1, M_2, n, \delta, A,\ B, f, \varphi$ và Ω.

Chứng minh. Giả sử $\overline{x}$ và $\overline{\overline{x}}$ là các điểm tùy ý thuộc $B_R(x^0)\cap\Omega$. Từ Định lý 3.4.9, ta có

$$\begin{aligned}|D^2u(\overline{x}) - D^2u(\overline{\overline{x}})| &\le |D^2u(\overline{x}) - D^2u(x^0)| + |D^2u(\overline{\overline{x}}) - D^2u(x^0)|\\ &\le C|\overline{x} - x^0|^\alpha + C|\overline{\overline{x}} - x^0|^\alpha \le 2CR^\alpha.\end{aligned}$$

Từ đó ta dễ dàng suy ra (3.183). Hệ quả được chứng minh. □

3.4.3 Đánh giá Hölder toàn cục đối với các đạo hàm cấp hai của nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet

Bằng việc kết hợp các đánh giá Hölder ở bên trong miền và tại các điểm biên tùy ý đã thiết lập trong các mục trước, ta nhận được định lý sau đây.

Định lý 3.4.14 *Giả sử các giả thiết của Định lý 3.4.9 được thỏa mãn. Khi đó ta có*

$$[D^2u]_{\alpha_0;\Omega} \le C, \tag{3.184}$$

trong đó $\alpha_0 \in (0,1)$ và C là các hằng số dương phụ thuộc vào $M_0, M_1, M_2, n, \delta, A, B, f, \varphi$ và Ω.

Chứng minh. Giả sử $x, y \in \Omega$ là các điểm tùy ý cho trước. Đặt $d := \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) = |x - x^0|$, với điểm $x^0 \in \partial\Omega$ nào đó. Ta xét hai trường hợp sau:

(i) *Trường hợp 1:* $|x-y| < d$. Khi đó $B_{|x-y|}(x) \subset B_d(x) \subset \Omega$. Bằng cách lần lượt áp dụng Định lý 3.4.1 với $B_R = B_{|x-y|}(x)$, $B_{R_0} = B_d(x)$ và Hệ quả 3.4.13 với $B_R(x^0) = B_{2d}(x^0)$, $\alpha = \alpha_0$, trong đó $\alpha_0 \in (0,1)$ là hằng số được xác định bởi Định lý 3.4.1, ta có

$$\begin{aligned}|D^2u(x) - D^2u(y)| &\le \operatorname*{osc}_{B_{|x-y|}(x)} D^2u \le C\left(\frac{|x-y|}{d}\right)^{\alpha_0}\left(\operatorname*{osc}_{B_d(x)} D^2u + d^{\alpha_0}\right)\\ &\le C\left(\frac{|x-y|}{d}\right)^{\alpha_0}\left(\operatorname*{osc}_{B_{2d}(x^0)\cap\Omega} D^2u + d^{\alpha_0}\right) \le C\left(\frac{|x-y|}{d}\right)^{\alpha_0} d^{\alpha_0} \le C|x-y|^{\alpha_0}.\end{aligned} \tag{3.185}$$

(ii) *Trường hợp 2:* $|x-y| \ge d$. Khi đó ta có

$$|y - x^0| \le |x-y| + |x - x^0| = |x-y| + d \le 2|x-y|.$$

Suy ra $x, y \in \overline{B}(x^0; 2|x-y|)$. Bằng cách áp dụng Hệ quả 3.4.13 với $B_R(x^0) = B_{2|x-y|}(x^0)$ và $\alpha = \alpha_0$, ta có

$$|D^2u(x) - D^2u(y)| \le \operatorname*{osc}_{B_{2|x-y|}(x^0)} D^2u \le C(2|x-y|)^{\alpha_0} \le C|x-y|^{\alpha_0}. \tag{3.186}$$

Từ (3.185) và (3.186), ta suy ra

$$|D^2u(x) - D^2u(y)| \le C|x-y|^{\alpha_0}, \quad \forall x, y \in \Omega,$$

và do đó ta nhận được đánh giá (3.184). Định lý được chứng minh. □

3.5 Đánh giá chuẩn $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ đối với nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet

Để kết thúc chương này, luận án sẽ phát biểu và chứng minh một trong những kết quả chính về đánh giá tiên nghiệm trong $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ đối với nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet cho phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng. Định lý sau đây là mở rộng của Định lý 0.0.2 sang trường hợp phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng.

Định lý 3.5.1 *Giả sử $u(x) \in C^4(\overline{\Omega})$ là nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet* (3.1)-(3.2), *trong đó $A(x,z,p) = [A_{ij}(x,z,p)]_{n\times n} \in C^2(\Gamma; \mathbb{R}^{n\times n})$, $B(x,z,p) = [B_{ij}(x,z,p)]_{n\times n} \in BC^2(\Gamma; \mathbb{R}^{n\times n})$, $f(x,z,p) \in C^2(\Gamma; \mathbb{R})$, $\varphi(x) \in C^4(\overline{\Omega})$ và $\partial\Omega \in C^4$. Ta cũng giả sử tồn tại một nghiệm dưới δ-elliptic $\underline{u}(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ của bài toán Dirichlet* (3.3)-(3.2), *trong đó $B(x,z,p) \equiv 0$ và $\underline{u}(x) = \varphi(x)$ trên $\partial\Omega$. Giả sử các điều kiện sau được thỏa mãn:*

(i) *Ma trận $A(x,z,p)$ thỏa mãn điều kiện cấu trúc*

$$A(x,z,p) \ge -\gamma_0\big(1+|p|^2\big)E, \tag{3.187}$$

$$\lambda_{\max}(A(x,z,0)) \ge 0, \tag{3.188}$$

với mọi $x \in \Omega, z \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}^n$, trong đó γ_0 là hằng số dương;

(ii) $D_zA(x,z,p) = [D_zA_{ij}(x,z,p)]_{n\times n} \ge 0$, *trong* Γ;

(iii) $A(x,z,p)$ *là chính quy chặt trong Γ thỏa mãn* (3.18) *với* $a_0 > 0$;

(iv) $\big|B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\big| \le \delta\min\{\lambda_u, \lambda_{\underline{u}}\}|\xi|^2$;

(v) $\big|D_zB_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\big| \le \beta_1\min\{\lambda_u, \lambda_{\underline{u}}\}|\xi|^2$;

(vi) $\big|D_{x_k}B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\big|, \big|D_{p_k}B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\big| \le \beta_2\min\{\lambda_u, \lambda_{\underline{u}}\}|\xi|^2|\eta|$;

(vii) $\big|D_{x_kx_\ell}B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\eta_\ell\big|, \big|D_{x_kp_\ell}B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\eta_\ell\big| \le \beta_3|\xi|^2|\eta|^2$,
$\big|D_{x_kz}B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\big|, \big|D_{zp_k}B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\big| \le \beta_3|\xi|^2|\eta|$,
$\big|D_{zz}B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\big| \le \beta_3|\xi|^2$;

(viii) $\big|D_{p_kp_\ell}B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\eta_\ell\big| \le b_0|\xi|^2|\eta|^2$;

(ix) $f(x,z,p) > 0$, *trong* Γ;

(x) $\inf\limits_{(x,z,p)\in\Gamma}\left(\dfrac{D_z f}{f}\right)(x,z,p) \geq \dfrac{n\delta}{1+\delta^2}\beta_1,$

trong đó $\delta, \beta_1, \beta_2, \beta_3, b_0$ *là các hằng số,* $0 \leq \delta < 1, \beta_1 \geq 0, \beta_2 > 0, \beta_3 > 0, 0 \leq b_0 \leq a_0$, *các điều kiện* (iv)-(viii) *thỏa mãn với mọi* $(x,z,p) \in \Gamma$ *và* $\xi \in \mathbb{C}^n$, $\eta \in \mathbb{R}^n$.

Khi đó ta có các đánh giá sau

$$\sup_{x\in\Omega}|u(x)| \leq M_0, \quad \sup_{x\in\Omega}|Du(x)| \leq M_1, \tag{3.189}$$

$$\sup_{x\in\Omega}\lambda_{\max}(\omega(x,u)) \leq C_0, \tag{3.190}$$

$$\lambda_u \geq \lambda_0, \tag{3.191}$$

$$|u|_{2,\alpha_0;\overline{\Omega}} \leq C_1, \tag{3.192}$$

trong đó $M_0, M_1, C_0, \lambda_0, 0 < \alpha_0 < 1, C_1$ *là các hằng số dương chỉ phụ thuộc vào* $n, \gamma_0, a_0, \delta, \beta_1, \beta_2, \beta_3, b_0, A, f, \underline{u}, \varphi$ *và* Ω, $M_0 \geq \sup\limits_{\Omega}|\underline{u}|$, $M_1 \geq \sup\limits_{\Omega}|D\underline{u}|$, λ_0 *được xác định bởi*

$$\lambda_0 = \frac{(1+\delta^2)^{-[\frac{n}{2}]}f_0}{C_0^{n-1}}, \quad f_0 = \min_{x\in\overline{\Omega},|z|\leq M_0,|p|\leq M_1} f(x,z,p). \tag{3.193}$$

Chứng minh. Trước tiên, ta sẽ thiết lập các đánh giá tiên nghiệm trong (3.189). Kết quả và chứng minh của mệnh đề sau đây được dựa trên các tài liệu tham khảo [11] và [18].

Mệnh đề 3.5.2 *Dưới các giả thiết của Định lý 3.5.1, ta có các đánh giá sau*

$$\sup_{x\in\Omega}|u(x)| \leq M_0, \tag{3.194}$$

$$\sup_{x\in\Omega}|Du(x)| \leq M_1, \tag{3.195}$$

trong đó M_0 *phụ thuộc vào* $|\underline{u}|_{0;\overline{\Omega}}$ *và* $|\varphi|_{0;\overline{\Omega}}$, $M_0 \geq \sup\limits_{\Omega}|\underline{u}|$, M_1 *phụ thuộc vào* $n, \gamma_0, |\underline{u}|_{1;\overline{\Omega}}$, $|\varphi|_{2;\overline{\Omega}}$ *và* Ω, $M_1 \geq \sup\limits_{\Omega}|D\underline{u}|$.

Chứng minh. Từ các giả thiết của Định lý 3.5.1, ta có thể sử dụng các lập luận như trong Nhận xét 3.3.2 và nhận được

$$u(x) \geq \underline{u}(x), \quad \forall x \in \overline{\Omega}. \tag{3.196}$$

Ta sẽ đánh giá cận trên của u. Giả sử u đạt giá trị cực đại trên $\overline{\Omega}$ tại điểm $\overline{x} \in \Omega$. Khi đó $Du(\overline{x}) = 0$, $D^2u(\overline{x}) \leq 0$ và do đó từ tính elliptic của u, ta có $A(\overline{x}, u(\overline{x}), 0) < 0$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết (3.188) và từ đó ta suy ra u đạt giá trị cực đại tại điểm thuộc biên $\partial\Omega$, nghĩa là

$$u(x) \leq \max_{\partial\Omega}\varphi, \quad \forall x \in \overline{\Omega}. \tag{3.197}$$

Kết hợp (3.196) và (3.197), ta thu được (3.194) với $M_0 = \max\left\{|\underline{u}|_{0;\overline{\Omega}}, |\varphi|_{0;\overline{\Omega}}\right\}$.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh (3.195). Xét hàm số $\psi(x) = e^{2\gamma_0 u(x)}|Du(x)|$ và giả sử ψ đạt giá trị cực đại trên $\overline{\Omega}$ tại điểm x^*. Nếu $|Du(x^*)| \le 1$ thì từ (3.194), ta suy ra

$$|Du(x)| \le e^{2\gamma_0(u(x^*)-u(x))} \le e^{4\gamma_0 M_0}, \quad \forall x \in \overline{\Omega}. \tag{3.198}$$

Do đó ta chỉ cần xét trường hợp $|Du(x^*)| > 1$. Giả sử $x^* \in \Omega$, khi đó $D_i\psi\big(x^*\big) = 0$, $i = 1, \dots, n$. Bằng tính toán, ta có

$$\sum_{i=1}^{n} D_i u D_i \psi = 2\gamma_0 e^{2\gamma_0 u}|Du|^3 + \frac{e^{2\gamma_0 u}}{|Du|}\sum_{i,j=1}^{n} D_{ij}uD_iuD_ju,$$

suy ra

$$2\gamma_0|Du|^4 + \sum_{i,j=1}^{n} D_{ij}uD_iuD_ju = 0, \quad \text{tại } x^*.$$

Do đó, từ tính elliptic của u và (3.187), ta có

$$2\gamma_0|Du|^4 - \gamma_0\big(1+|Du|^2\big)|Du|^2 < 0, \quad \text{tại } x^*. \tag{3.199}$$

Vì $\gamma_0 > 0$ và $|Du(x^*)| > 1$ nên vế trái của (3.199) là dương và do đó (3.199) không thể xảy ra. Điều này có nghĩa là hàm $\psi = e^{2\gamma_0 u}|Du|$ phải đạt giá trị cực đại tại $x^* \in \partial\Omega$. Do đó

$$\sup_{x\in\Omega}|Du(x)| \le C, \quad C = C\Big(M_0, \gamma_0, \sup_{\partial\Omega}|Du|\Big). \tag{3.200}$$

Bây giờ, ta sẽ đánh giá đại lượng $\sup_{\partial\Omega}|Du|$. Chú ý $D_\tau u(x) = D_\tau \underline{u}(x)$, do đó

$$\sup_{x\in\partial\Omega}|D_\tau u(x)| = \sup_{x\in\partial\Omega}|D_\tau \underline{u}(x)|, \tag{3.201}$$

trong đó τ là véc tơ tiếp tuyến đơn vị của biên $\partial\Omega$ tại điểm x.
Mặt khác, từ Nhận xét 3.3.2, ta có

$$D_\nu u(x) \ge D_\nu \underline{u}(x), \quad \forall x \in \partial\Omega, \tag{3.202}$$

trong đó ν là véc tơ pháp tuyến trong đơn vị của biên $\partial\Omega$ tại điểm x. Đánh giá đối với cận trên của $D_\nu u$ được thiết lập qua bổ đề sau đây.

Bổ đề 3.5.3 *Dưới giả thiết của Mệnh đề 3.5.2, ta có đánh giá*

$$D_\nu u \le C, \quad \text{trên } \partial\Omega, \tag{3.203}$$

trong đó C là hằng số dương phụ thuộc vào $n, \gamma_0, M_0, |\varphi|_{2;\overline{\Omega}}$ và Ω.

Chứng minh. Chứng minh của bổ đề này được dựa trên chứng minh của Định lý 14.1 ([11]). Trước tiên, từ (3.187), ta có $A_{ii}(x,u,Du) \ge -\gamma_0(1+|Du|^2)$, $i = 1, \dots, n$. Do đó từ tính elliptic của u, ta suy ra

$$0 < \mathrm{Tr}\,(D^2u - A(x,u,Du)) = \Delta u - \sum_{i=1}^{n} A_{ii}(x,u,Du) \le \Delta u + n\gamma_0(1+|Du|^2), \quad \text{trong } \Omega.$$

Từ đánh giá này và điều kiện biên (3.2), ta suy ra hàm u thỏa mãn

$$\Delta u + n\gamma_0(1 + |Du|^2) > 0 \ \text{ trong } \Omega, \quad u = \varphi \ \text{ trên } \partial\Omega.$$

Đặt $v = u - \varphi$, khi đó từ hệ thức trên ta suy ra hàm v thỏa mãn

$$Qv = \Delta v + b(x, Dv) > 0 \ \text{ trong } \Omega, \quad v = 0 \ \text{ trên } \partial\Omega, \tag{3.204}$$

trong đó $b(x,p) = \Delta\varphi + n\gamma_0 \left(1 + |p + D\varphi|^2\right)$. Ta sẽ chỉ ra toán tử Q thỏa mãn điều kiện cấu trúc

$$|p| + |b| \leq h(|z|)|p|^2, \tag{3.205}$$

với mọi $(x, z, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ thỏa mãn $|p| \geq h(|z|)$, trong đó h là hàm không giảm xác định trên $[0, +\infty)$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} |p| + |b| &\leq |p| + |\Delta\varphi| + n\gamma_0 \left(1 + |p + D\varphi|^2\right) \\ &\leq |p| + |\Delta\varphi| + n\gamma_0\left(1 + 2|p|^2 + 2|D\varphi|^2\right) \leq h_0|p|^2, \end{aligned}$$

với mọi $|p| \geq h_0$, trong đó $h_0 = (3n\gamma_0 + 1) + 2n\gamma_0\left(\sup_\Omega |D\varphi|\right)^2 + \sup_\Omega |\Delta\varphi|$. Như vậy, toán tử Q thỏa mãn điều kiện cấu trúc (3.205) với hàm $h \equiv h_0$.

Bây giờ, giả sử $x^0 \in \partial\Omega$ là điểm tùy ý cho trước. Từ giả thiết $\partial\Omega \in C^4$, ta suy ra Ω thỏa mãn điều kiện hình cầu ngoại tiếp đều.và do đó tồn tại hình cầu $B = B_R(y)$ sao cho $x^0 \in \overline{B} \cap \overline{\Omega} = \overline{B} \cap \partial\Omega$. Ta xét hàm $d(x) = \operatorname{dist}(x, \partial B)$, $x \in \Omega$ và đặt

$$w = \psi(d), \tag{3.206}$$

trong đó ψ là hàm số nào đó sẽ được xác định sau, $\psi \in C^2([0, +\infty))$ và $\psi' > 0$.

Xét lân cận $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{x^0} = \left\{x \in \overline{\Omega} \mid d(x) < a\right\}$, trong đó a là hằng số dương sẽ được xác định sau. Ta sẽ xây dựng hàm ψ sao cho $w(x^0) = 0$ và

$$Qv \geq Qw, \quad \text{trong } \mathcal{N} \cap \Omega, \tag{3.207}$$

$$v \leq w, \quad \text{trên } \partial(\mathcal{N} \cap \Omega). \tag{3.208}$$

Bằng tính toán, ta có với $i, j = 1, \ldots, n$,

$$D_i w = \psi' D_i d, \quad D_{ij} w = \psi'' D_i d D_j d + \psi' D_{ij} d = \frac{\psi''}{(\psi')^2} D_i w D_j w + \psi' D_{ij} d. \tag{3.209}$$

Dễ thấy, $d(x) = |x - y| - R$ và do đó

$$D_i d = \frac{x_i - y_i}{|x - y|}, \quad D_{ij} d = \frac{\delta_{ij}}{|x - y|} - \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|x - y|^3}, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Từ các hệ thức trên và chú ý $|x - y| \geq R$, ta có

$$Qw = \frac{\psi''}{(\psi')^2}|Dw|^2 + \psi' \frac{n-1}{|x-y|} + b \leq \frac{\psi''}{(\psi')^2}|Dw|^2 + \left(1 + \frac{n-1}{R}\right)(\psi' + |b|), \ \text{ trong } \Omega, \tag{3.210}$$

trong đó $b = b(x, Dw)$. Giả sử hàm ψ thỏa mãn

$$\psi'(d) \geq h_0, \quad \forall d \in [0, a]. \tag{3.211}$$

Từ (3.209) và (3.211), ta có $|Dw| = \psi' \geq h_0$. Do đó, từ (3.205) và (3.210), ta suy ra

$$Qw \leq \left(\frac{\psi''}{(\psi')^2} + \nu_0\right)|Dw|^2, \quad \text{trong } \mathcal{N} \cap \Omega, \quad \nu_0 = \left(1 + \frac{n-1}{R}\right) h_0. \tag{3.212}$$

Bây giờ, ta sẽ tìm hàm ψ dưới dạng

$$\psi(d) = \frac{1}{\nu_0} \log(1 + kd), \tag{3.213}$$

trong đó k là hằng số dương sẽ được xác định sau. Dễ thấy, $\dfrac{\psi''}{(\psi')^2} = -\nu_0$ và do đó từ (3.212), ta suy ra $Qw \leq 0$, trong $\mathcal{N} \cap \Omega$. Từ hệ thức này và (3.204), ta nhận được (3.207).

Tiếp theo, ta sẽ xác định các hằng số a và k để (3.208) được thỏa mãn. Nhận thấy:

- Trên $\partial\mathcal{N} \cap \partial\Omega$, ta có $v = 0, w \geq 0$ và do đó $v \leq w$.
- Trên $\partial\mathcal{N} \cap \Omega$, ta có $d = a$ và $w = \psi(a)$. Do đó hệ thức $v \leq w$ sẽ được thỏa mãn nếu

$$\psi(a) = \frac{1}{\nu_0} \log(1 + ka) = K_0, \quad \text{hay} \quad ka = e^{\nu_0 K_0} - 1, \quad K_0 = M_0 + |\varphi|_{0;\overline{\Omega}}. \tag{3.214}$$

Từ các đánh giá trên và chú ý $\partial(\mathcal{N} \cap \Omega) = (\partial\mathcal{N} \cap \partial\Omega) \cup (\partial\mathcal{N} \cap \Omega)$, ta nhận được (3.208).

Cuối cùng, ta cần kiểm tra điều kiện (3.211). Từ (3.213) và (3.214), ta có

$$\psi'(d) = \frac{k}{\nu_0(1 + kd)} \geq \frac{k}{\nu_0(1 + ka)} = \frac{k}{\nu_0 e^{\nu_0 K_0}}, \quad \forall d \in [0, a].$$

Do đó, (3.211) được thỏa mãn với $k = h_0 \nu_0 e^{\nu_0 K_0}$.

Như vậy, ta đã xây dựng được hàm w sao cho các hệ thức (3.207), (3.208) được thỏa mãn. Bằng cách áp dụng Hệ quả 1.3.5, ta suy ra $v \leq w$ trong $\mathcal{N} \cap \Omega$. Từ đây và chú ý $v(x^0) = w(x^0) = 0$, ta suy ra

$$D_\nu v(x^0) \leq D_\nu w(x^0).$$

Từ (3.206), (3.213) và chú ý $d(x^0) = 0, |x^0 - y| = R$, ta có

$$D_\nu w(x^0) = \big(Dw(x^0), \nu(x^0)\big) = \frac{k}{\nu_0}\big(Dd(x^0), \nu(x^0)\big) = \frac{k}{\nu_0}\left(\frac{x^0 - y}{R}, \frac{x^0 - y}{R}\right) = \frac{k}{\nu_0} = h_0 e^{\nu_0 K_0}.$$

Từ các hệ thức trên, ta suy ra

$$D_\nu v(x^0) \leq C, \tag{3.215}$$

trong đó C là hằng số dương phụ thuộc vào $n, \gamma_0, M_0, |\varphi|_{2;\overline{\Omega}}$ và R. Hơn nữa, vì $x^0 \in \partial\Omega$ là điểm tùy ý và hằng số R có thể được chọn chung cho mọi x^0 nên từ (3.215) và chú ý $u = v + \varphi$, ta dễ dàng suy ra (3.203). Bổ đề được chứng minh. □

Như vậy, nếu hàm $\psi = e^{2\gamma_0 u}|Du|$ đạt giá trị cực đại tại x^* thỏa mãn $|Du(x^*)| > 1$ thì từ (3.194) và (3.200)-(3.203), ta suy ra $\sup_\Omega |Du| \leq K$, trong đó K phụ thuộc vào $n, \gamma_0, |\underline{u}|_{1;\overline{\Omega}}$, $|\varphi|_{2;\overline{\Omega}}$ và Ω. Từ đây và (3.198), ta suy ra (3.195) bằng cách chọn $M_1 = \max\{e^{4\gamma_0 M_0}, K, \sup_\Omega |D\underline{u}|\}$. Mệnh đề 3.5.2 được chứng minh. $\square$

Tiếp tục chứng minh Định lý 3.5.1. Từ các giả thiết của Định lý 3.5.1 và Mệnh đề 3.5.2, ta có thể áp dụng các Định lý 3.2.1, 3.3.1 và 3.4.14 và lần lượt nhận được các đánh giá (3.19)-(3.20), (3.47)-(3.48) và (3.184). Từ (3.19), (3.48) và (3.189), ta suy ra (3.190). Từ (3.190) và sử dụng các lập luận như trong chứng minh Bổ đề 3.4.5, ta suy ra (3.191) với hằng số λ_0 cho bởi (3.193). Từ (3.20), (3.47), (3.184), (3.189)-(3.191) và $\|B(x, z, p)\|_{BC^2(\Gamma)} \leq C(n, \delta, \beta_1, \beta_2, \beta_3, b_0, \lambda_{\underline{u}})$, ta suy ra (3.192). Định lý được chứng minh. $\square$

KẾT LUẬN CHƯƠNG 3

Trong chương này, luận án đã thiết lập các đánh giá tiên nghiệm trong $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ với $\alpha \in (0, 1)$ nào đó đối với nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet cho phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng. Cụ thể, luận án đã chứng minh được các kết quả sau:

- Đã thiết lập nguyên lý so sánh cho phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng khi nó là δ-elliptic đối với các hàm được so sánh (Định lý 3.1.1). Đây là một công cụ quan trọng trong việc thiết lập các đánh giá tiên nghiệm.

- Đã thiết lập đánh giá của chuẩn trong $C^2(\overline{\Omega})$ đối với nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet qua chuẩn của nó trong $C^1(\overline{\Omega})$ (Định lý 3.2.1 và Định lý 3.3.1).

- Đã thiết lập đánh giá Hölder toàn cục bậc α đối với các đạo hàm cấp hai của nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet qua chuẩn của nghiệm trong $C^2(\overline{\Omega})$ (Định lý 3.4.14).

- Đã đưa vào các điều kiện đủ đối với các dữ kiện của bài toán Dirichlet đối với phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng để nhận được đánh giá tiên nghiệm trong $C^1(\overline{\Omega})$ và từ đó nhận được đánh giá của chuẩn trong $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ đối với nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet (Định lý 3.5.1).

Chương 4

Tính giải được của bài toán Dirichlet cho phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng

Trong chương này, luận án nghiên cứu sự tồn tại duy nhất nghiệm δ-elliptic trong $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ đối với bài toán Dirichlet cho phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng dạng sau đây

$$\det\left[D^2u - A(x,u,Du) - B(x,u,Du)\right] = f(x,u,Du) \ \text{ trong } \Omega, \tag{4.1}$$

$$u(x) = \varphi(x) \ \text{ trên } \partial\Omega, \tag{4.2}$$

trong đó $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là miền bị chặn có biên $\partial\Omega$ trơn, $A(x,z,p) = [A_{ij}(x,z,p)]_{n\times n}$, $B(x,z,p) = [B_{ij}(x,z,p)]_{n\times n}$ và $f(x,z,p)$ lần lượt là ma trận đối xứng, ma trận phản đối xứng và hàm vô hướng trơn xác định trên $\Gamma := \overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, $\varphi(x)$ là hàm vô hướng trơn xác định trên $\overline{\Omega}$.

Khi $B(x,z,p) \equiv 0$, ta có phương trình kiểu Monge-Ampère đối xứng tương ứng với (4.1),

$$\det\left[D^2u - A(x,u,Du)\right] = f(x,u,Du), \quad \text{trong } \Omega. \tag{4.3}$$

Nội dung của chương này được viết dựa trên bài báo [2] trong Danh mục các công trình liên quan đến luận án.

4.1 Một điều kiện cần cho sự tồn tại nghiệm δ-elliptic của phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng

Định lý sau cho chúng ta một điều kiện cần đối với ma trận phản đối xứng $B(x,z,p)$ cho sự tồn tại nghiệm δ-elliptic của phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng (4.1).

Định lý 4.1.1 *Ký hiệu $U_\delta(\Omega)$ với $\delta \in (0,1)$ là tập hợp tất cả các nghiệm δ-elliptic u của phương trình* (4.1) *trong Ω sao cho*

$$\sup_{x\in\Omega} |u(x)| \le M_0, \quad \sup_{x\in\Omega} |Du(x)| \le M_1, \tag{4.4}$$

trong đó M_0, M_1 là các hằng số dương. Khi đó, nếu tập $U_\delta(\Omega)$ là khác rỗng thì điều kiện cần là bất đẳng thức sau được thỏa mãn

$$\mu(B) \le \delta(1+\delta^2)^{\frac{1}{n}[\frac{n}{2}]} f_1^{1/n}, \tag{4.5}$$

trong đó $\mu(B)$ là đại lượng được xác định bởi (0.22) *và* $f_1 = \max\limits_{x\in\overline{\Omega}, |z|\le M_0, |p|\le M_1} f(x,z,p)$.

Chứng minh. Giả sử $u \in U_\delta(\Omega)$. Khi đó $\overline{R} = \overline{R}(x,u,y,z,p) \equiv \omega(x,u) - B(y,z,p) \in D_{\delta,\mu(B)}$, với mọi $x, y \in \Omega$, $z \in \mathbb{R}$ và $p \in \mathbb{R}^n$. Bằng cách áp dụng Mệnh đề 2.2.2 cho $R(x,u)$ và Mệnh đề 2.2.4 cho $\overline{R}$, ta nhận được

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta^n}\|B(y,z,p)\|^n + \left(2^{[\frac{n}{2}]} - 1\right)\det B(y,z,p) &\le \det \overline{R}(x,u,y,z,p) \le \left(1+\delta^2\right)^{[\frac{n}{2}]}\det \omega(x,u) \\ &\le \left(1+\delta^2\right)^{[\frac{n}{2}]} R(x,u) = \left(1+\delta^2\right)^{[\frac{n}{2}]} f(x,u,Du), \quad \forall x,y \in \Omega, z\in\mathbb{R}, p\in\mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Vì B là ma trận phản đối xứng nên $\det B(y,z,p) \ge 0$, và do đó từ hệ thức trên ta có

$$\frac{1}{\delta^n}\|B(y,z,p)\|^n \le \left(1+\delta^2\right)^{[\frac{n}{2}]} f(x,u,Du), \quad \forall x,y\in\Omega, z\in\mathbb{R}, p\in\mathbb{R}^n.$$

Từ đánh giá trên ta dễ dàng suy ra (4.5). Định lý được chứng minh. □

Nhận xét 4.1.2 Điều kiện cần (4.5) nói lên rằng bài toán Dirichlet (4.1)-(4.2) không phải lúc nào cũng có nghiệm. Để bài toán có nghiệm thì độ lớn của $B(x,z,p)$ phải bị khống chế bởi độ lớn của vế phải $f(x,z,p)$.

4.2 Các điều kiện đủ cho sự tồn tại nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet cho phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng

Từ Nhận xét 4.1.2 chúng ta thấy rằng, để chứng minh tính giải được của bài toán Dirichlet cho phương trình kiểu Monge-Ampère elliptic không đối xứng (4.1)-(4.2), chúng ta phải đặt ra một số điều kiện về độ lớn đối với ma trận phản đối xứng $B(x,z,p)$. Trong mục này, luận án sẽ thiết lập các điều kiện đủ về độ lớn của $B(x,z,p)$ và các đạo hàm riêng cấp một của nó cho sự tồn tại và duy nhất nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet (4.1)-(4.2).

Cho δ, β_1, b_0 là các hằng số không âm và β_2, β_3 là các hằng số dương, trong đó $0 \le \delta < 1$, $0 \le b_0 \le a_0$, a_0 là hằng số dương được xác định trong công thức (4.8) dưới đây. Giả sử tồn tại hàm $\underline{u}(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ là nghiệm dưới elliptic của (4.3) sao cho $\underline{u} = \varphi$ trên $\partial\Omega$.

Định nghĩa 4.2.1 Ta ký hiệu $W = W(\delta, \beta_1, \beta_2, \beta_3, b_0, \lambda_{\underline{u}})$ là tập hợp các ma trận phản đối xứng $B(x,z,p) = [B_{ij}(x,z,p)]_{n\times n} \in BC^2\big(\Gamma; \mathbb{R}^{n\times n}\big)$ và thỏa mãn các điều kiện sau với mọi $\xi \in \mathbb{C}^n$, $\eta \in \mathbb{R}^n$, $\xi, \eta \neq 0$,

(a) $\sup\limits_{(x,z,p)\in\Gamma} \big|B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\big| < \delta\lambda_{\underline{u}}|\xi|^2$ nếu $\delta > 0$, và $B \equiv 0$ nếu $\delta = 0$;

(b) $\sup\limits_{(x,z,p)\in\Gamma} \big|D_z B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\big| < \beta_1\lambda_{\underline{u}}|\xi|^2$ nếu $\beta_1 > 0$, và $D_z B \equiv 0$ nếu $\beta_1 = 0$;

(c) $\sup\limits_{(x,z,p)\in\Gamma} \big(\big|D_{x_k} B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\big|, \big|D_{p_k} B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\big|\big) < \beta_2\lambda_{\underline{u}}|\xi|^2|\eta|$;

(d) $\big|D_{x_k x_\ell} B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\eta_\ell\big|, \big|D_{x_k p_\ell} B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\eta_\ell\big| \leq \beta_3|\xi|^2|\eta|^2$,
$\big|D_{x_k z} B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\big|, \big|D_{z p_k} B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\big| \leq \beta_3|\xi|^2|\eta|$,
$\big|D_{zz} B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\big| \leq \beta_3|\xi|^2, \ \forall (x,z,p) \in \Gamma$;

(e) $\big|D_{p_k p_\ell} B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\eta_\ell\big| \leq b_0|\xi|^2|\eta|^2, \ \forall (x,z,p) \in \Gamma$.

Định nghĩa 4.2.2 Giả sử $B = [B_{ij}(x,z,p)]_{n\times n}$ là ma trận tùy ý thuộc W. Ta ký hiệu $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\delta, \beta_1, \beta_2, B)$ là tập hợp các hàm $u(x) \in C^2\big(\overline{\Omega}\big)$ và thỏa mãn các điều kiện sau:

1. $\lambda_u := \min\limits_{x\in\overline{\Omega}} \min\limits_{\xi\in\mathbb{R}^n, |\xi|=1} (D_{ij}u(x) - A_{ij}(x,u(x),Du(x)))\xi_i\xi_j > 0$;
2. $\sup\limits_{(x,z,p)\in\Gamma} \big|B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\big| < \delta\lambda_u|\xi|^2, \ \forall \xi \in \mathbb{C}^n$, $\xi \neq 0$ nếu $\delta > 0$;
3. $\sup\limits_{(x,z,p)\in\Gamma} \big|D_z B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\big| < \beta_1\lambda_u|\xi|^2, \ \forall \xi \in \mathbb{C}^n$, $\xi \neq 0$ nếu $\beta_1 > 0$;
4. $\sup\limits_{(x,z,p)\in\Gamma} \big(\big|D_{x_k} B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\big|, \big|D_{p_k} B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\big|\big) < \beta_2\lambda_u|\xi|^2|\eta|, \ \forall \xi \in \mathbb{C}^n, \eta \in \mathbb{R}^n$, $\xi, \eta \neq 0$.

Việc sử dụng các kết quả đánh giá tiên nghiệm đối với nghiệm δ-elliptic trong $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ đưa tới định lý dưới đây, một trong các kết quả chính của luận án, trong đó khẳng định rằng với những điều kiện nhất định, tương tự như trường hợp phương trình đối xứng tương ứng (Định lý 0.0.3), bài toán Dirichlet (4.1)-(4.2) sẽ có duy nhất nghiệm δ-elliptic nếu ma trận phản đối xứng $B(x,z,p)$ là đủ nhỏ, theo nghĩa là nó thỏa mãn các điều kiện (a)', (b)' và (c)' được nói đến trong định lý dưới đây.

Định lý 4.2.3 *Giả sử $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là miền bị chặn có biên $\partial\Omega \in C^5$ và giả sử các điều kiện sau được thỏa mãn:*

(i) *Ma trận $A(x,z,p) = [A_{ij}(x,z,p)]_{n\times n} \in C^3(\Gamma; \mathbb{R}^{n\times n})$ là đối xứng và thỏa mãn điều kiện cấu trúc*

$$A(x,z,p) \geq -\gamma_0\big(1 + |p|^2\big)E, \tag{4.6}$$

$$\lambda_{\max}(A(x,z,0)) \geq 0, \tag{4.7}$$

với mọi $x \in \Omega, z \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}^n$, trong đó γ_0 là hằng số dương;

(ii) $D_zA(x,z,p) = [D_zA_{ij}(x,z,p)]_{n\times n} \geq 0$, *trong* Γ;

(iii) $A(x,z,p)$ *là chính quy chặt trong* Γ*, nghĩa là tồn tại hằng số* $a_0 > 0$ *sao cho*

$$A_{ij,k\ell}(x,z,p)\xi_i\xi_j\eta_k\eta_\ell \geq a_0|\xi|^2|\eta|^2, \tag{4.8}$$

với mọi $(x,z,p) \in \Gamma$ *và* $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, $\xi \perp \eta$;

(iv) *Hàm vô hướng* $f(x,z,p) \in C^3(\Gamma;\mathbb{R})$ *thỏa mãn* $f(x,z,p) > 0$, *trong* Γ;

(v) $\inf\limits_{(x,z,p)\in\Gamma}\left(\dfrac{D_zf}{f}\right)(x,z,p) \geq \dfrac{n\delta}{1+\delta^2}\beta_1$;

(vi) *Tồn tại một nghiệm dưới elliptic* $\underline{u}(x) \in C^5(\overline{\Omega})$ *của phương trình* (4.3)*, thỏa mãn* $\underline{u} = \varphi$ *trên* $\partial\Omega$*, trong đó* $\varphi \in C^5(\overline{\Omega})$.

Giả sử $W = W(\delta, \beta_1, \beta_2, \beta_3, b_0, \lambda_{\underline{u}})$ *là tập hợp đã được mô tả trong Định nghĩa 4.2.1. Khi đó tồn tại các hằng số dương* $\lambda_* \leq \lambda_{\underline{u}}$ *và* $\alpha_* \in (0,1)$*, chỉ phụ thuộc vào* $n, \gamma_0, a_0, \delta, \beta_1, \beta_2, \beta_3, b_0, A, f, \underline{u}, \varphi$ *và* Ω *sao cho, nếu* $B(x,z,p)$ *là ma trận tùy ý đủ nhỏ thuộc* $W \cap C^3\big(\Gamma;\mathbb{R}^{n\times n}\big)$*, tức là nó thỏa mãn thêm các điều kiện sau với mọi* $\xi \in \mathbb{C}^n$, $\eta \in \mathbb{R}^n$, $\xi, \eta \neq 0$,

(a)' $\sup\limits_{(x,z,p)\in\Gamma}\big|B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\big| < \delta\lambda_*|\xi|^2$ *nếu* $\delta > 0$*, và* $B \equiv 0$ *nếu* $\delta = 0$;

(b)' $\sup\limits_{(x,z,p)\in\Gamma}\big|D_zB_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\big| < \beta_1\lambda_*|\xi|^2$ *nếu* $\beta_1 > 0$*, và* $D_zB \equiv 0$ *nếu* $\beta_1 = 0$;

(c)' $\sup\limits_{(x,z,p)\in\Gamma}\big(\big|D_{x_k}B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\big|, \big|D_{p_k}B_{ij}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\big|\big) < \beta_2\lambda_*|\xi|^2|\eta|$,

thì bài toán Dirichlet (4.1)-(4.2) *có duy nhất nghiệm* δ*-elliptic thuộc* $C^{2,\alpha_*}\big(\overline{\Omega}\big)$.

Nhận xét 4.2.4 Định lý 4.2.3 là mở rộng của Định lý 0.0.3 từ trường hợp phương trình kiểu Monge-Ampère elliptic đối xứng sang trường hợp nói chung là không đối xứng. Như đã giải thích trong phần Mở đầu, luận án đặt ra giả thiết về độ trơn của các dữ kiện của bài toán Dirichlet (4.1)-(4.2) là mạnh hơn so với giả thiết đặt ra trong Định lý 0.0.3 để đảm bảo cho việc áp dụng được phương pháp liên tục vào việc chứng minh tính giải được của bài toán này.

Chứng minh. Với hàm $w(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ tùy ý, ta đặt

$$\begin{aligned} F[w](x) &:= F(R(x,w)) = \log\det\big[D^2w - A(x,w,Dw) - B(x,w,Dw)\big], \\ G[w](x) &:= F[w] - \log f(x,w,Dw). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Giả sử $B(x,z,p)$ là ma trận tùy ý thuộc W. Để áp dụng phương pháp liên tục giải bài toán Dirichlet (4.1)-(4.2), với mỗi $t \in [0,1]$, ta xét bài toán Dirichlet sau đây:

$$\det\Big[D^2u^{(t)} - A\big(x,u^{(t)},Du^{(t)}\big) - B\big(x,u^{(t)},Du^{(t)}\big)\Big] = g^{(t)} \quad \text{trong } \Omega, \tag{4.10}$$

$$u = \varphi \quad \text{trên } \partial\Omega, \tag{4.11}$$

trong đó $g^{(t)} = g^{(t)}\big(x,u^{(t)},Du^{(t)}\big) = f\big(x,u^{(t)},Du^{(t)}\big)e^{(1-t)G[\underline{u}](x)}$.

Bổ đề 4.2.5 *Giả sử các điều kiện* (i)-(vi) *của Định lý 4.2.3 được thỏa mãn. Giả sử* $B(x,z,p) \in W$ *và* $u^{(t)} \in \mathcal{U} \cap C^4(\overline{\Omega})$ *là nghiệm* δ*-elliptic của bài toán Dirichlet tương ứng* (4.10)-(4.11)*, trong đó* $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\delta, \beta_1, \beta_2, B)$ *là tập được xác định bởi Định nghĩa 4.2.2. Khi đó tồn tại các hằng số dương* $M_0, M_1, C_*, \lambda_*, \alpha_*$ *và* C_{**}*,* $\alpha_* \in (0,1)$*,* $M_0 \geq \sup\limits_{\Omega} |\underline{u}|$*,* $M_1 \geq \sup\limits_{\Omega} |D\underline{u}|$*,* $\lambda_* \leq \lambda_{\underline{u}}$*, chỉ phụ thuộc vào* $n, \gamma_0, a_0, \delta, \beta_1, \beta_2, \beta_3, b_0, A,\ f, \underline{u}, \varphi$ *và* Ω *sao cho* $u^{(t)} \in C^{2,\alpha_*}(\overline{\Omega})$ *và ta có các đánh giá sau*

$$\sup_{x\in\Omega} \left| u^{(t)}(x) \right| \leq M_0, \quad \sup_{x\in\Omega} \left| Du^{(t)}(x) \right| \leq M_1, \tag{4.12}$$

$$\sup_{x\in\Omega} \lambda_{\max}\big(\omega\big(x, u^{(t)}\big)\big) \leq C_*, \tag{4.13}$$

$$\lambda_{u^{(t)}} \geq \lambda_*, \tag{4.14}$$

$$\left| u^{(t)} \right|_{2,\alpha_*;\overline{\Omega}} \leq C_{**}, \tag{4.15}$$

trong đó λ_* *được xác định bởi*

$$\lambda_* = \frac{(1+\delta^2)^{-[\frac{n}{2}]} f_0}{C_*^{n-1}}, \quad f_0 = \min_{x\in\overline{\Omega}, |z|\leq M_0, |p|\leq M_1} f(x,z,p). \tag{4.16}$$

Hơn nữa, các đánh giá này là đều đối với $B(x,z,p) \in W$ *và* $t \in [0,1]$*.*

Chứng minh. Trước tiên, ta nhận thấy bài toán Dirichlet (4.10)-(4.11) có dạng tương tự với bài toán Dirichlet (3.1)-(3.2), trong đó hàm vế phải $f(x,z,p)$ trong (3.1) được thay bởi

$$g^{(t)}(x,z,p) = f(x,z,p) e^{(1-t)G[\underline{u}](x)}. \tag{4.17}$$

Từ điều kiện (vi) và Mệnh đề 2.2.2, ta có

$$G[\underline{u}](x) = \log\det\left[D^2\underline{u} - A(x,\underline{u},D\underline{u}) - B(x,\underline{u},D\underline{u})\right] - \log f(x,\underline{u},D\underline{u}) \geq 0, \text{ trong } \Omega. \tag{4.18}$$

Từ (4.17), (4.18) và các điều kiện (iv)-(v), ta có

$$g^{(t)}(x,z,p) \geq f(x,z,p) > 0, \quad \text{trong } \Gamma,$$
$$\inf_{(x,z,p)\in\Gamma} \left(\frac{D_z g^{(t)}}{g^{(t)}} \right)(x,z,p) = \inf_{(x,z,p)\in\Gamma} \left(\frac{D_z f}{f} \right)(x,z,p) \geq \frac{n\delta}{1+\delta^2}\beta_1.$$

Mặt khác, từ (4.18) ta có $G[\underline{u}](x) \geq (1-t)G[\underline{u}](x)$, với mọi $x \in \Omega, t \in [0,1]$. Do đó ta suy ra $\underline{u}$ cũng là nghiệm dưới δ-elliptic của (4.10). Từ giả thiết của bổ đề và các lập luận vừa thu được, ta suy ra tất cả các giả thiết của Định lý 3.5.1 cho bài toán Dirichlet (4.10)-(4.11) được thỏa mãn và do đó ta có thể áp dụng các kết quả của định lý này. Bằng cách áp dụng Mệnh đề 3.5.2 cho bài toán (4.10)-(4.11), ta nhận được (4.12) với các hằng số M_0, M_1 thỏa mãn (3.194) và (3.195). Từ (4.12), ta nhận được các đánh giá tương tự với (3.190) và (3.191) là (4.13) và $\lambda_{u^{(t)}} \geq \lambda_0^{(t)}$, trong đó

$$\lambda_0^{(t)} = \frac{(1+\delta^2)^{-[\frac{n}{2}]} g_0^{(t)}}{C_*^{n-1}}, \quad g_0^{(t)} = \min_{x\in\overline{\Omega}, |z|\leq M_0, |p|\leq M_1} g^{(t)}(x,z,p).$$

Từ đây và chú ý $g_0^{(t)} \geq f_0$, với mọi $t \in [0,1]$, ta dễ dàng suy ra đánh giá (4.14) bằng cách chọn hằng số λ_* cho bởi công thức (4.16). Vì $\underline{u}$ là nghiệm của bài toán (4.10)-(4.11) khi $t = 0$ nên ta có $\lambda_{\underline{u}} \geq \lambda_*$. Cuối cùng, từ (4.12)-(4.14), ta nhận được đánh giá tương tự với (3.192) là đánh giá (4.15). Bổ đề được chứng minh. $\square$

Với hằng số $\alpha_* \in (0,1)$ đã được xác định trong Bổ đề 4.2.5, ta đặt

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}(\delta, \beta_1, \beta_2, \alpha_*, B) := \mathcal{U}(\delta, \beta_1, \beta_2, B) \cap C^{2,\alpha_*}(\overline{\Omega}).$$

Khi đó tập $\mathcal{V}$ là mở trong $C^{2,\alpha_*}(\overline{\Omega})$. Để chứng minh định lý, ta sẽ tìm nghiệm của bài toán Dirichlet (4.1)-(4.2) trong $\mathcal{V}$. Xét toán tử G cho bởi (4.9), khi đó G ánh xạ $\mathcal{V}$ vào $C^{0,\alpha_*}(\overline{\Omega})$. Hơn nữa, bổ đề sau đây sẽ chỉ ra G là khả vi liên tục Fréchet trong $\mathcal{V}$.

Bổ đề 4.2.6 *Toán tử $G : \mathcal{V} \to C^{0,\alpha_*}(\overline{\Omega})$ là khả vi liên tục Fréchet tại mọi $u \in \mathcal{V}$ với đạo hàm G_u cho bởi*

$$G_u h = a^{ij}(x) D_{ij} h + b^i(x) D_i h + c(x) h, \quad \forall h \in C^{2,\alpha_*}(\overline{\Omega}), \tag{4.19}$$

trong đó

$$\begin{aligned} a^{ij}(x) &= \frac{F^{ij}[u](x) + F^{ji}[u](x)}{2}, \; i,j = 1,\dots,n, \\ b^i(x) &= -\sum_{k,\ell=1}^{n} F^{k\ell}[u](x) D_{p_i}(A_{k\ell} + B_{k\ell})(x,u,Du) - \Big(\frac{D_{p_i} f}{f}\Big)(x,u,Du), \; i = 1,\dots,n, \\ c(x) &= -\sum_{k,\ell=1}^{n} F^{k\ell}[u](x) D_z(A_{k\ell} + B_{k\ell})(x,u,Du) - \Big(\frac{D_z f}{f}\Big)(x,u,Du), \end{aligned} \tag{4.20}$$

ở đây, $F^{ij}[u](x) = \frac{\partial F(R(x,u))}{\partial R_{ij}} = R^{ji}(x,u)$ với $R = [R_{ij}]_{n\times n}$, $R^{-1} = [R^{ij}]_{n\times n}$. Hơn nữa, toán tử G_u là elliptic đều trong $\overline{\Omega}$ với các hàm hệ số a^{ij}, b^i, c thuộc $C^{0,\alpha_*}(\overline{\Omega})$ và $c \leq 0$ trong Ω.

Chứng minh. Lấy $u \in \mathcal{V}$ tùy ý và cố định nó. Giả sử $h(x) \in C^{2,\alpha_*}(\overline{\Omega})$ là hàm tùy ý cho trước. Với t đủ nhỏ, ta áp dụng định lý Lagrange cho hàm $g(t) := G[u+th]$ và nhận được

$$G[u+th] - G[u] = g(t) - g(0) = g'(\tau)t,$$

trong đó τ là số nằm giữa 0 và t, và khi $t \to 0$ thì $\tau \to 0$. Do đó

$$\lim_{t\to 0} \frac{G[u+th] - G[u]}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{g'(\tau)t}{t} = \lim_{\tau\to 0} g'(\tau) = g'(0) = L_u h, \tag{4.21}$$

trong đó đẳng thức thứ ba được suy ra từ tính liên tục của hàm $g'(t)$ trong một lân cận đủ nhỏ của 0, L_u là toán tử được xác định bởi

$$L_u := a^{ij}(x) D_{ij} + b^i(x) D_i + c(x), \tag{4.22}$$

trong đó các hàm hệ số $a^{ij}(x), b^i(x)$ và $c(x)$ được cho bởi (4.20). Dễ thấy ánh xạ $L_u \in \mathcal{L}(C^{2,\alpha_*}(\overline{\Omega}), C^{0,\alpha_*}(\overline{\Omega}))$, trong đó $\mathcal{L}(C^{2,\alpha_*}(\overline{\Omega}), C^{0,\alpha_*}(\overline{\Omega}))$ là tập hợp tất cả các ánh xạ tuyến tính bị chặn đi từ $C^{2,\alpha_*}(\overline{\Omega})$ vào $C^{0,\alpha_*}(\overline{\Omega})$. Như vậy, toán tử G khả vi Gâteaux tại $u \in \mathcal{V}$ với đạo hàm Gâteaux là ánh xạ L_u. Ta dễ thấy ánh xạ đi từ $\mathcal{V}$ vào $\mathcal{L}(C^{2,\alpha_*}(\overline{\Omega}), C^{0,\alpha_*}(\overline{\Omega}))$ biến phần tử u thành ánh xạ L_u là liên tục trên $\mathcal{V}$. Từ đó suy ra G là khả vi liên tục Gâteaux trên $\mathcal{V}$ và do đó nó khả vi liên tục Fréchet trên $\mathcal{V}$ với đạo hàm Fréchet G_u tại u là L_u. Hơn nữa, từ các đánh giá (4.13)-(4.14), ta có thể sử dụng các lập luận tương tự như trong chứng minh của Bổ đề 3.4.5 để suy ra G_u là elliptic đều trong $\overline{\Omega}$. Mặt khác, vì $u \in \mathcal{V}$ nên ta suy ra các hàm hệ số a^{ij}, b^i, c thuộc $C^{0,\alpha_*}(\overline{\Omega})$, còn khẳng định $c(x) \leq 0$ trong Ω được suy ra từ các lập luận tương tự như trong chứng minh của Định lý 3.1.1. Bổ đề được chứng minh. $\square$

Tính giải được của bài toán Dirichlet (4.1)-(4.2) được suy ra từ bổ đề sau đây về phương pháp liên tục giải phương trình toán tử.

Bổ đề 4.2.7 *Cho λ_* và $\alpha_* \in (0,1)$ là các hằng số dương đã được xác định trong Bổ đề 4.2.5. Giả sử $B = B(x,z,p)$ là ma trận tùy ý thuộc $W \cap C^3\big(\Gamma; \mathbb{R}^{n\times n}\big)$ và thỏa mãn thêm các điều kiện* (a)', (b)' *và* (c)'. *Khi đó bài toán Dirichlet* (4.10)-(4.11) *là giải được trong $\mathcal{V}$ với mọi $t \in [0,1]$.*

Chứng minh. Giả sử $u^{(t)} \in \mathcal{V}$ là một nghiệm của bài toán (4.10)-(4.11), nghĩa là $u^{(t)} \in C^{2,\alpha_*}\big(\overline{\Omega}\big)$ là nghiệm δ-elliptic của bài toán (4.10)-(4.11). Khi đó từ các giả thiết về độ trơn của $A, B, f, \varphi, \underline{u}$ và $\partial\Omega$, ta có thể áp dụng Định lý 1.4.3 về tính chính quy của nghiệm và suy ra $u^{(t)} \in C^{4,\alpha_*}\big(\overline{\Omega}\big)$. Do đó $u^{(t)} \in C^4\big(\overline{\Omega}\big)$ và vì thế ta có thể áp dụng Bổ đề 4.2.5 để nhận được các đánh giá (4.12)-(4.15).

Đặt $v^{(t)} = u^{(t)} - \underline{u}$ và $T\big[v^{(t)}, t\big] = G\big[v^{(t)} + \underline{u}\big] - (1-t)G[\underline{u}]$. Chú ý $\underline{u} = \varphi$ trên $\partial\Omega$, khi đó bài toán (4.10)-(4.11) được đưa về dạng

$$T\big[v^{(t)}, t\big] = 0 \ \text{ trong } \Omega, \quad v^{(t)} = 0 \ \text{ trên } \partial\Omega. \tag{4.23}$$

Đặt

$$X = \big\{v \in C^{2,\alpha_*}\left(\overline{\Omega}\right) \mid v = 0 \text{ trên } \partial\Omega\big\}, \quad \tilde{X} = \{v \in X \mid v + \underline{u} \in \mathcal{V}\}, \quad Y = C^{0,\alpha_*}\left(\overline{\Omega}\right).$$

Khi đó X là không gian Banach và $\tilde{X}$ là tập mở trong X. Ta đặt

$$I = \left\{t \in [0,1] \mid \exists v^{(t)} \in \tilde{X} : T\big[v^{(t)}, t\big] = 0\right\},$$
$$\mathcal{E} = \left\{v^{(t)} \in \tilde{X} \mid \exists t \in [0,1] : T\big[v^{(t)}, t\big] = 0\right\}.$$

Tính giải được của bài toán (4.23) tương đương với khẳng định $t \in I$. Dễ thấy, $T[0,0] = 0$. Từ đó suy ra $0 \in I$ và $I \neq \emptyset$. Ta sẽ chứng minh $I = [0,1]$. Để làm được điều này, ta sẽ chứng minh I là tập vừa mở vừa đóng trong đoạn $[0,1]$.

Khẳng định 1: I là tập mở. Trước tiên, ta nhận thấy ánh xạ $T : X \times [0,1] \to Y$ là khả vi liên tục Fréchet trên tập $\tilde{X} \times [0,1]$ và đạo hàm riêng Fréchet theo biến thứ nhất tại

$\big(v^{(t)}, t\big) \in \tilde{X} \times [0,1]$, ký hiệu là $T_{v^{(t)}}$, trùng với đạo hàm Fréchet $G_{u^{(t)}}$ của G tại $u^{(t)} = v^{(t)} + \underline{u}$, được xác định bởi (4.19)-(4.20) với u thay bởi $u^{(t)}$. Do đó từ Hệ quả 1.3.7 và Bổ đề 4.2.6, ta suy ra đạo hàm riêng Fréchet $T_{v^{(t)}}$ là khả nghịch.

Giả sử $t_0 \in I$, nghĩa là $T\big[v^{(t_0)}, t_0\big] = 0$ với hàm $v^{(t_0)} \in \tilde{X}$ nào đó. Khi đó từ các lập luận ở trên, ta có thể áp dụng Định lý hàm ẩn 1.4.7 và suy ra, với mọi $t \in [0,1]$ thuộc một lân cận đủ nhỏ của t_0, luôn tồn tại một hàm $v^{(t)} \in \tilde{X}$ sao cho $T\big[v^{(t)}, t\big] = 0$. Như vậy $t \in I$ với mọi t đủ gần t_0, và do đó I là tập mở.

Khẳng định 2: I là tập đóng. Cho $\{t_k\} \subset I$ là dãy số hội tụ tới $t^* \in [0,1]$. Giả sử $\big\{v^{(t_k)}\big\} \subset \tilde{X}$ thỏa mãn $T\big[v^{(t_k)}, t_k\big] = 0$. Khi đó $u^{(t_k)} = v^{(t_k)} + \underline{u} \in \mathcal{V}$ và $u^{(t_k)}$ là nghiệm của bài toán Dirichlet (4.10)-(4.11) với mọi k. Từ (4.15), dãy $\big\{u^{(t_k)}\big\}$ là bị chặn đều trong $C^{2,\alpha_*}(\overline{\Omega})$ và do đó từ định lý Arzelà-Ascoli ta suy ra tồn tại một dãy con $\big\{u^{(t'_k)}\big\}$ hội tụ trong $C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ tới một hàm $u \in C^{2,\alpha_*}\left(\overline{\Omega}\right)$ nào đó. Khi đó, từ (4.14) ta có $\lambda_u \ge \lambda_* > 0$. Do đó từ các điều kiện (a)', (b)' và (c)', ta suy ra $u \in \mathcal{V}$. Chú ý $T[v,t]$ là liên tục từ $C^2(\overline{\Omega}) \times [0,1]$ vào $C(\overline{\Omega})$, nên từ đó ta có dãy $\big\{v^{(t'_k)}\big\} = \big\{u^{(t'_k)} - \underline{u}\big\}$ hội tụ trong $C^2\big(\overline{\Omega}\big)$ tới hàm $v = u - \underline{u} \in \tilde{X}$ thỏa mãn $T[v, t^*] = 0$. Điều này có nghĩa là $t^* \in I$ và do đó I là tập đóng.

Ta đã chứng minh sự tồn tại của nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet (4.1)-(4.2) trong $\mathcal{V}$. Tính duy nhất của nghiệm δ-elliptic dễ dàng được suy ra từ nguyên lý so sánh (Định lý 3.1.1). Định lý được chứng minh. □

Nhận xét 4.2.8 Để gắn kết các điều kiện đủ (a)', (b)' và (c)' với điều kiện cần (4.5), ta sẽ viết lại các điều kiện này dưới dạng khác. Đặt

$$\gamma = \frac{(1+\delta^2)^{-[\frac{n}{2}]} f_0^{(n-1)/n}}{C_*^{n-1}}.$$

Khi đó hằng số λ_* cho bởi (4.16) có dạng $\lambda^* = \gamma f_0^{1/n}$. Do đó, tương tự như trong Nhận xét 3.2.2, các điều kiện (a)', (b)' và (c)' có thể viết lại như sau

(a)" $\mu(B) < \delta\gamma f_0^{1/n}$ nếu $\delta > 0$, $B \equiv 0$ nếu $\delta = 0$;

(b)" $\mu(D_z B) < \beta_1 \gamma f_0^{1/n}$ nếu $\beta_1 > 0$, $D_z B \equiv 0$ nếu $\beta_1 = 0$;

(c)" $\mu(D_{x_k} B)$, $\mu(D_{p_k B}) < \beta_2 \gamma f_0^{1/n}$, $\quad k = 1, \dots, n$.

Mặt khác, từ (3.26), (4.10), (4.13) và (4.17), ta suy ra

$$C_*^n \ge \det \omega\big(x, u^{(t)}\big) \ge (1+\delta^2)^{-[\frac{n}{2}]} g^{(t)}\big(x, u^{(t)}, Du^{(t)}\big) \ge (1+\delta^2)^{-[\frac{n}{2}]} f_0.$$

Từ đây suy ra $C_* \ge (1+\delta^2)^{-\frac{1}{n}[\frac{n}{2}]} f_0^{1/n}$ và do đó

$$\gamma = \frac{(1+\delta^2)^{-[\frac{n}{2}]} f_0^{(n-1)/n}}{C_*^{n-1}} = (1+\delta^2)^{-\frac{1}{n}[\frac{n}{2}]} \left(\frac{(1+\delta^2)^{-\frac{1}{n}[\frac{n}{2}]} f_0^{1/n}}{C_*} \right)^{n-1} \le (1+\delta^2)^{-\frac{1}{n}[\frac{n}{2}]}.$$

Từ bất đẳng thức trên và chú ý $f_0 \le f_1$, ta nhận thấy ngoài các điều kiện (b)", (c)" phải được thỏa mãn, bản thân điều kiện (a)" là chặt hơn so với điều kiện cần (4.5).

4.3 Một số ví dụ

Trong mục này, luận án đưa ra một số ví dụ mà ở đó ta có thể kiểm tra các giả thiết của Định lý 4.2.3.

4.3.1 Phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng trong Hình học bảo giác

Ví dụ 4.3.1 Xét bài toán Dirichlet cho phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng sau đây

$$\det\Big[D^2u - \Big(\frac{1}{2}|Du|^2E - Du\otimes Du\Big) - B(x,Du)\Big] = \frac{1}{5^n}\big(1+e^u\big)\big(1+|Du|^2\big) \ \text{ trong } \Omega, \tag{4.24}$$

$$u = 0 \ \text{ trên } \partial\Omega, \tag{4.25}$$

trong đó $\Omega = B_1(0) = \{x\in\mathbb{R}^n : |x|<1\}$. Ở đây, $A = A(p) = \frac{1}{2}|p|^2E - p\otimes p$, $B^T(x,p) = -B(x,p)$, $f(x,z,p) = \frac{1}{5^n}\big(1+e^z\big)\big(1+|p|^2\big)$. Phương trình (4.24) với $B(x,p)\equiv 0$ xuất hiện trong lĩnh vực Hình học bảo giác ([41]).

Ta sẽ chỉ ra bài toán (4.24)-(4.25) thỏa mãn các điều kiện (i)-(vi) của Định lý 4.2.3. Thật vậy, vì $0\le p\otimes p\le |p|^2E$ nên $A \ge -\frac{1}{2}|p|^2E > -\frac{1}{2}\big(1+|p|^2\big)E$. Do đó ta dễ thấy ma trận A thỏa mãn các điều kiện (i) và (ii) với $\gamma_0 = \frac{1}{2}$. Hơn nữa, bằng tính toán, ta có với mọi $\xi,\eta\in\mathbb{R}^n, \xi\perp\eta$,

$$A_{ij,k\ell}\xi_i\xi_j\eta_k\eta_\ell = (\delta_{ij}\delta_{k\ell} - \delta_{ik}\delta_{j\ell} - \delta_{jk}\delta_{i\ell})\xi_i\xi_j\eta_k\eta_\ell = |\xi|^2|\eta|^2 - 2(\xi,\eta)^2 = |\xi|^2|\eta|^2.$$

Điều này có nghĩa là A là chính quy chặt trong $\Gamma = \overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ và thỏa mãn (4.8) với $a_0 = 1$. Như vậy, điều kiện (iii) được thỏa mãn.

Tiếp theo, ta dễ dàng nhận thấy $f(x,z,p) > 0$ trong Γ và $\inf\limits_{(x,z,p)\in\Gamma}\left(\frac{D_zf}{f}\right)(x,z,p) = 0$. Điều này có nghĩa là các điều kiện (iv) và (v) được thỏa mãn với $\beta_1 = 0$.

Cuối cùng, ta kiểm tra điều kiện (vi). Ta chọn $\underline{u}(x) = \frac{1}{2}\big(|x|^2-1\big)$. Dễ thấy $\underline{u}\in C^\infty(\overline{\Omega})$ và thỏa mãn $\underline{u} = 0$ trên $\partial\Omega$. Hơn nữa, ta có $D\underline{u}(x) = x, D^2\underline{u}(x) = E$ và do đó

$$\omega(x,\underline{u}) = D^2\underline{u} - A(x,\underline{u},D\underline{u}) = E - \Big(\frac{1}{2}|x|^2E - x\otimes x\Big) \ge \frac{1}{2}E, \quad \forall x\in\overline{\Omega}.$$

Suy ra, $\lambda_{\underline{u}} = \frac{1}{2}$. Do đó, ta có với $n\ge 2$,

$$\det\omega(x,\underline{u}) \ge \Big(\frac{1}{2}\Big)^n > \frac{4}{5^n} \ge \frac{1}{5^n}\Big(1+e^{\frac{1}{2}(|x|^2-1)}\Big)\big(1+|x|^2\big) = f(x,\underline{u},D\underline{u}), \quad \forall x\in\overline{\Omega}.$$

Từ đánh giá trên ta suy ra $\underline{u}$ là một nghiệm dưới elliptic của phương trình tương ứng với (4.24) mà trong đó $B\equiv 0$.

Giả sử $\delta, \beta_2, \beta_3, b_0$ là các số thực cho trước thỏa mãn $0 < \delta < 1, \beta_2 > 0, \beta_3 > 0, 0 \leq b_0 \leq a_0 = 1$. Khi đó Định lý 4.2.3 khẳng định rằng, tồn tại các số thực dương $0 < \lambda_* \leq \frac{1}{2}, 0 < \alpha_* < 1$, phụ thuộc vào $n, \delta, \beta_2, \beta_3, b_0$ sao cho nếu $B(x,p)$ là ma trận tùy ý thuộc $W\big(\delta, 0, \beta_2, \beta_3, b_0, \lambda_{\underline{u}}\big) \cap C^3\big(\Gamma; \mathbb{R}^{n\times n}\big)$ và thỏa mãn các điều kiện (a)' và (c)' thì bài toán Dirichlet (4.24)-(4.25) có duy nhất một nghiệm δ-elliptic thuộc $C^{2,\alpha_*}\big(\overline{\Omega}\big)$.

Ví dụ 4.3.2 Xét bài toán Dirichlet cho phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng sau đây

$$\det\Big[D^2u - (a|Du|^2E - bDu \otimes Du) - B(x,u,Du)\Big] = f(x,u,Du) \text{ trong } \Omega, \tag{4.26}$$

$$u = 0 \text{ trên } \partial\Omega, \tag{4.27}$$

trong đó a, b là các hằng số, $a > 0$, $A(p) = a|p|^2E - bp \otimes p$, $B^T(x,z,p) = -B(x,z,p)$ và

$$\Omega = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid k_1x_1^2 + \cdots + k_nx_n^2 < 1, k_i > 0, i = 1, \dots, n\}.$$

Ta sẽ kiểm tra các các điều kiện (i)-(vi) của Định lý 4.2.3 đối với bài toán (4.26)-(4.27). Vì $0 \leq p \otimes p \leq |p|^2E$ nên $A \geq (a - |b|)|p|^2E \geq -(|a - |b||)\big(1 + |p|^2\big)E$. Do đó ta dễ thấy ma trận A thỏa mãn các điều kiện (i) và (ii) với $\gamma_0 = |a - |b|| + 1 > 0$. Hơn nữa, bằng tính toán, ta có với mọi $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n, \xi \perp \eta$,

$$\begin{aligned} A_{ij,k\ell}\xi_i\xi_j\eta_k\eta_\ell &= (2a\delta_{ij}\delta_{k\ell} - b(\delta_{ik}\delta_{j\ell} + \delta_{jk}\delta_{i\ell}))\xi_i\xi_j\eta_k\eta_\ell \\ &= 2a\xi_i^2\eta_k^2 - 2b\xi_i\xi_j\eta_i\eta_j = 2a|\xi|^2|\eta|^2 - 2b(\xi,\eta)^2 = 2a|\xi|^2|\eta|^2. \end{aligned}$$

Điều này có nghĩa là A là chính quy chặt trong Γ và thỏa mãn (4.8) với $a_0 = 2a > 0$. Như vậy, điều kiện (iii) được thỏa mãn.

Đặt $\underline{u}(x) = \dfrac{c}{2}(k_1x_1^2 + \cdots + k_nx_n^2 - 1)$, trong đó c là hằng số dương sẽ chọn sau. Dễ thấy $\underline{u} \in C^\infty(\overline{\Omega})$ và thỏa mãn $\underline{u} = 0$ trên $\partial\Omega$. Đặt $k_{\min} = \min\limits_i k_i$, $k_{\max} = \max\limits_i k_i$. Khi đó ta có trong Ω,

$$|D\underline{u}|^2 = c^2\left(k_1^2x_1^2 + \cdots + k_n^2x_n^2\right) \leq c^2k_{\max}\left(k_1x_1^2 + \cdots + k_nx_n^2\right) \leq c^2k_{\max},$$

$$D^2\underline{u} = c\,\mathrm{diag}\,(k_1, \dots, k_n) \geq ck_{\min}E,$$

và vì thế

$$\omega(x,\underline{u}) = D^2\underline{u} - A(x,\underline{u},D\underline{u}) \geq D^2\underline{u} - (a + |b|)|D\underline{u}|^2E \geq dE, \quad d = c\big(k_{\min} - c(a + |b|)k_{\max}\big).$$

Từ đó ta suy ra $\underline{u}$ là nghiệm dưới elliptic của bài toán Dirichlet (4.26)-(4.27) nếu hằng số dương c là đủ nhỏ sao cho $d > 0$ và hàm vế phải $f(x,z,p) \in C^3(\Gamma; \mathbb{R})$ được chọn sao cho

$$f > 0, \ D_zf \geq 0, \text{ trong } \Gamma \text{ và } f(x,\underline{u},D\underline{u}) \leq d^n, \text{ trong } \Omega.$$

Việc chọn hàm vế phải $f(x,z,p)$ thỏa mãn các điều kiện trên là khá dễ dàng. Khi đó đối với bài toán (4.26)-(4.27), ta cũng có kết luận tương tự như đối với bài toán (4.24)-(4.25).

4.3.2 Phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng phụ thuộc tham số

Ví dụ 4.3.3 Xét bài toán Dirichlet sau đây cho phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng phụ thuộc vào tham số σ, $|\sigma| \le \Sigma$, $\Sigma > 0$,

$$\det\big[D^2u - A(x,u,Du) - \sigma B^{(0)}(x,u,Du)\big] = f(x,u,Du) \text{ trong } \Omega, \tag{4.28}$$

$$u = \varphi(x) \text{ trên } \partial\Omega, \tag{4.29}$$

trong đó $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là miền bị chặn có biên $\partial\Omega \in C^5$.

Giả sử các giả thiết của Định lý 4.2.3 được thỏa mãn và $W = W(\delta, \beta_1, \beta_2, \beta_3, b_0, \lambda_{\underline{u}})$ là tập hợp đã được mô tả trong Định nghĩa 4.2.1, trong đó $\delta, \beta_1, \beta_2, \beta_3, b_0$ là các hằng số dương cho trước với $0 < \delta < 1, 0 < b_0 \le a_0$. Giả sử $B^{(0)}(x,z,p) \in BC^2(\Gamma; \mathbb{R}^{n\times n}) \cap C^3(\Gamma; \mathbb{R}^{n\times n})$ là ma trận phản đối xứng và thỏa mãn các điều kiện sau với các hằng số dương $\delta^{(0)}, \beta_1^{(0)}, \beta_2^{(0)}$, $\beta_3^{(0)}, b_0^{(0)}$ và với mọi $(x,z,p) \in \Gamma$, $\xi \in \mathbb{C}^n$, $\eta \in \mathbb{R}^n$,

1. $\big|B_{ij}^{(0)}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\big| \le \delta^{(0)}\lambda_{\underline{u}}|\xi|^2$;
2. $\big|D_zB_{ij}^{(0)}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\big| \le \beta_1^{(0)}\lambda_{\underline{u}}|\xi|^2$;
3. $\big|D_{x_k}B_{ij}^{(0)}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\big|$, $\big|D_{p_k}B_{ij}^{(0)}\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\big| \le \beta_2^{(0)}\lambda_{\underline{u}}|\xi|^2|\eta|$;
4. $\big|D_{x_kx_\ell}B_{ij}^{(0)}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\eta_\ell\big|$, $\big|D_{x_kp_\ell}B_{ij}^{(0)}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\eta_\ell\big| \le \beta_3^{(0)}|\xi|^2|\eta|^2$,
   $\big|D_{x_kz}B_{ij}^{(0)}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\big|$, $\big|D_{zp_k}B_{ij}^{(0)}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\big| \le \beta_3^{(0)}|\xi|^2|\eta|$,
   $\big|D_{zz}B_{ij}^{(0)}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\big| \le \beta_3^{(0)}|\xi|^2$;
5. $\big|D_{p_kp_\ell}B_{ij}^{(0)}(x,z,p)\xi_i\overline{\xi}_j\eta_k\eta_\ell\big| \le b_0^{(0)}|\xi|^2|\eta|^2$.

Khi đó tồn tại các hằng số dương $0 < \alpha_* < 1$ và $0 < \Sigma_* \le \Sigma$, trong đó α_* phụ thuộc vào $n, \gamma_0, a_0, \delta, \beta_1, \beta_2, \beta_3, b_0, A, f, \underline{u}, \varphi$ và Ω, Σ_* phụ thuộc thêm vào $\delta^{(0)}, \beta_1^{(0)}, \beta_2^{(0)}, \beta_3^{(0)}$ và $b_0^{(0)}$, sao cho với σ tùy ý thỏa mãn $|\sigma| < \Sigma_*$, bài toán Dirichlet (4.28)-(4.29) có duy nhất một nghiệm δ-elliptic thuộc $\mathcal{U}(\delta, \beta_1, \beta_2, \sigma B^{(0)}) \cap C^{2,\alpha_*}(\overline{\Omega})$, trong đó $\mathcal{U}(\delta, \beta_1, \beta_2, \sigma B^{(0)})$ được xác định bởi Định nghĩa 4.2.2 với B được thay bởi $\sigma B^{(0)}$.

Thật vậy, ta đặt

$$\gamma = \min\left(\frac{\delta}{\delta^{(0)}}, \frac{\beta_1}{\beta_1^{(0)}}, \frac{\beta_2}{\beta_2^{(0)}}, \frac{\beta_3}{\beta_3^{(0)}}, \frac{b_0}{b_0^{(0)}}, \Sigma\right),\ \Sigma_* = \gamma\frac{\lambda_*}{\lambda_{\underline{u}}}, \tag{4.30}$$

trong đó $0 < \lambda_* \le \lambda_{\underline{u}}$ là hằng số đã được xác định trong Định lý 4.2.3.

Giả sử σ là số thực tùy ý thỏa mãn $|\sigma| < \Sigma_*$. Suy ra $|\sigma| < \Sigma_* \le \gamma$. Do đó từ các giả thiết và (4.30), ta suy ra ma trận $\sigma B^{(0)}(x,z,p)$ thuộc $W \cap C^3\big(\Gamma; \mathbb{R}^{n\times n}\big)$ và thỏa mãn các điều kiện bổ sung (a)'-(c)' của Định lý 4.2.3. Do đó, từ Định lý 4.2.3 ta suy ra bài toán Dirichlet (4.28)-(4.29) có duy nhất một nghiệm δ-elliptic thuộc $\mathcal{U}(\delta, \beta_1, \beta_2, \sigma B^{(0)}) \cap C^{2,\alpha_*}(\overline{\Omega})$, trong đó $\mathcal{U}(\delta, \beta_1, \beta_2, \sigma B^{(0)})$ là tập được xác định bởi Định nghĩa 4.2.2 với B được thay bởi $\sigma B^{(0)}$, $\alpha_* \in (0,1)$ là hằng số phụ thuộc vào các đại lượng tương tự như λ_*, đã được xác định trong Định lý 4.2.3.

KẾT LUẬN CHƯƠNG 4

Chương này nghiên cứu về tính giải được của bài toán Dirichlet cho phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng. Cụ thể, luận án đã chứng minh được các kết quả sau:

- Đã thiết lập một điều kiện cần cho sự tồn tại nghiệm δ-elliptic của phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng (Định lý 4.1.1).

- Đã thiết lập các điều kiện đủ áp đặt lên ma trận đối xứng và vế phải của phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng để nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet tồn tại duy nhất trong $C^{2,\alpha_*}(\overline{\Omega})$ với $\alpha_* \in (0,1)$ nào đó khi ma trận phản đối xứng có mặt trong phương trình là đủ nhỏ theo một nghĩa nào đó (Định lý 4.2.3). Việc chứng minh sự tồn tại duy nhất nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet dựa trên phương pháp liên tục để giải phương trình toán tử phi tuyến đã được giới thiệu trong Chương 1 và các đánh giá tiên nghiệm đã được thiết lập trong Chương 3.

- Đã trình bày một số ví dụ cụ thể đối với bài toán Dirichlet cho phương trình kiểu Monge-Ampère elliptic không đối xứng.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

1. Các kết quả đạt được của luận án

Luận án đã nghiên cứu tính giải được trong không gian $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\alpha \in (0,1)$ đối với bài toán Dirichlet cho phương trình kiểu Monge-Ampère elliptic không đối xứng trong miền bị chặn $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ và nhận được các kết quả chính sau đây:

- Đưa vào một lớp nghiệm δ-elliptic với $\delta \in [0,1)$ cho phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng và nhận được một điều kiện cần cho sự tồn tại loại nghiệm này.

- Đưa vào khái niệm d-lõm với $d \geq 0$, một mở rộng của khái niệm lõm thông thường; đã chứng minh tính d-lõm của hàm số kiểu Monge-Ampère trên một tập lồi không bị chặn của tập hợp các ma trận xác định dương không đối xứng. Tính d-lõm là một công cụ quan trọng trong việc thiết lập các đánh giá tiên nghiệm đối với nghiệm δ-elliptic.

- Bằng cách đặt ra các điều kiện để ma trận phản đối xứng có mặt trong phương trình là nhỏ theo nghĩa nào đó, qua một số bước tiến hành, luận án đã thiết lập được đánh giá tiên nghiệm trong $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ với $\alpha \in (0,1)$ nào đó đối với nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet cho phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng, đồng thời các đánh giá này là đều đối với một lớp các ma trận phản đối xứng.

- Sử dụng phương pháp liên tục giải phương trình toán tử phi tuyến trong không gian Banach, luận án đưa ra các điều kiện đủ áp đặt lên các dữ kiện của bài toán Dirichlet cho phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng để nghiệm δ-elliptic của bài toán Dirichlet tồn tại và duy nhất trong $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ khi ma trận phản đối xứng có mặt trong phương trình là đủ nhỏ theo một nghĩa nào đó.

2. Kiến nghị một số vấn đề nghiên cứu tiếp theo

Bên cạnh các kết quả đạt được trong luận án, chúng tôi kiến nghị một số vấn đề cần được tiếp tục nghiên cứu như:

- Nghiên cứu các phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng xuất hiện trong các lĩnh vực như: Vận chuyển tối ưu, Hình học bảo giác, Dự báo khí tượng,...

- Nghiên cứu bài toán Neumann cho phương trình kiểu Monge-Ampère không đối xứng.

DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

[1] H.T. Ngoan, T.T.K. Chung (2019), Elliptic solutions to nonsymmetric Monge-Ampère type equations I. The d-concavity and the comparison principle, *Acta Math. Vietnam.* 44 (2), 469-491, DOI: 10.1007/s40306-017-0231-2.

[2] H.T. Ngoan, T.T.K. Chung (2018), Elliptic solutions to nonsymmetric Monge-Ampère type equations II. A priori estimates and the Dirichlet problem, *Acta Math. Vietnam.*, DOI: 10.1007/s40306-018-0270-3.

CÁC KẾT QUẢ CỦA LUẬN ÁN ĐÃ ĐƯỢC BÁO CÁO, THẢO LUẬN TẠI CÁC HỘI NGHỊ VÀ XÊMINA SAU:

- Hội nghị khoa học các thế hệ Nghiên cứu sinh - Viện Toán học, tháng 10/2015.
- Xêmina Phòng Phương trình Vi phân - Viện Toán học.
- Hội nghị đánh giá Nghiên cứu sinh hàng năm của Viện Toán học vào tháng 10/2012, tháng 10/2013, tháng 10/2014, tháng 10/2015, tháng 10/2016 và tháng 11/2017.

Tài liệu tham khảo

Tiếng Anh

[1] A.C. Aitken (1956), *Determinants and Matrices*, Oliver and Boyd, Edinburgh.

[2] A.D. Alexandrov (1942), Existence of a uniqueness of a convex surface with a given integral curvature, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* 35, 131-134.

[3] A.D. Alexandrov (1942), Smoothness of a convex surface of bounded Gaussian curvature, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* 36, 195-199.

[4] I.J. Bakelman (1994), *Convex analysis and nonlinear geometric elliptic equations*, Springer.

[5] L. Caffarelli, L. Nirenberg, J. Spruck (1984), The Dirichlet problem for nonlinear second-order elliptic equations I. Monge-Ampère equations, *Comm. Pure Appl. Math.* 37, 369-402.

[6] L. Caffarelli, X. Cabré (1995), *Fully nonlinear elliptic equations*, Amer. Math. Soc., Colloquium Publication 43.

[7] E. Calabi (1958), Improper affine hyperspheres of convex type and a generalization of a theorem by K. Jörgens, *Michigan Math. J.* 5, 105-126.

[8] G. De Philippis and A. Figalli (2014), The Monge-Ampère equation and its link to optimal transportation, *Bull. Amer. Math. Soc.* 51, 527-580.

[9] B.K. Driver (2004), *Analysis tools with examples*, Springer.

[10] L.C. Evans (1982), Classical solutions of fully nonlinear, convex, second order elliptic equations, *Comm. Pure Appl. Math.* 25, 333-363.

[11] D. Gilbarg, N.S. Trudinger (2001), *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer-Verlag, Berlin-New York.

[12] C.E. Gutiérrez (2001), *The Monge-Ampère equation*, Birkhäuser.

[13] Q. Han, J.X. Hong (2006), Isometric embedding of Riemannian manifolds in Euclidean spaces, *Mathematical Surveys and Monographs* 130, Amer. Math. Soc.

[14] Q. Han (2016), *Nonlinear elliptic equations of the second order*, Amer. Math. Soc., Graduate Studies in Mathematics 171.

[15] R.A. Horn, C.R. Johnson (2012), *Matrix Analysis*, Cambridge University Press.

[16] N.M. Ivochkina (1983), A priori estimates of $\|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})}$ of convex solutions of the Dirichlet problem for the Monge-Ampère equation, *J. Soviet Math.* 21, 689-697.

[17] N.M. Ivochkina (1985), Classical solvability of the Dirichlet problem for the Monge-Ampère equation, *J. Soviet Math.* 30, 2287-2292.

[18] F. Jiang, N.S. Trudinger, X.-P. Yang (2014), On the Dirichlet problem for Monge-Ampère type equations, *Calc. Var. PDE.* 49, 1223-1236.

[19] F. Jiang, N.S. Trudinger (2014), On Pogorelov estimates in optimal transportation and geometric optics, *Bull. Math. Sci.* 4, 407-431.

[20] F. Jiang, N.S. Trudinger, X.-P. Yang (2015), On the Dirichlet problem for a class of augmented Hessian equations, *J. Diff. Eqns.* 258, 1548-1576.

[21] J.L. Kazdan (1985), *Prescribing the curvature of a Riemannian manifold*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics 57, Amer. Math. Soc.

[22] N.V. Krylov (1983), Boundedly inhomogeneous elliptic and parabolic equations, *Math. USSR. Izv* 20, 459-492.

[23] N.V. Krylov (1984), Boundedly inhomogeneous elliptic and parabolic equations in a domain, *Math. USSR-Izv* 22, 67-98.

[24] N.V. Krylov (1987), *Nonlinear elliptic and parabolic equations of the second order*, English translation: Dordrecht: Reidel.

[25] H. Lewy (1937), A priori limitations for solutions of Monge-Ampère equations I, II, *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 37, 417-434 (1935), Vol. 42, 365-374.

[26] J. Liu, N.S. Trudinger (2010), On Pogorelov estimates for Monge-Ampère type equation, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. A.* 28, 1121-1135.

[27] X.-N. Ma, N.S. Trudinger, X.-J. Wang (2005), Regularity of potential functions of the optimal transportation problem, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 177, 151-183.

[28] A.V. Pogorelov (1964), *Monge-Ampère equations of elliptic type*, Noordhorf, Groningen.

[29] A.V. Pogorelov (1971), The regularity of the generalized solutions of the equation $\det(\partial^2 u/\partial x^i \partial x^j) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 200, 534-537.

[30] F. Schulz (1990), *Regularity theory for quasilinear elliptic systems and Monge-Ampère equations in two dimensions*, Lecture notes in Math. 1445, Springer-Verlag.

[31] J. Serrin (1969), The problem of Dirichlet for quasilinear elliptic differential equations with many independent variables, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* 264, 413-496.

[32] G. Strang (2003), *Introduction to Linear Algebra*, Wellesley-Cambridge Press.

[33] N.S. Trudinger (1983), J.I.E. Urbas, The Dirichlet problem for the equation of prescribed Gauss curvature, *Bull. Austral. Math. Soc.* 28, 217-231.

[34] N.S. Trudinger (1983), Fully nonlinear, uniformly elliptic equations under natural structure conditions, *Trans. Amer. Math. Soc.* 278, 751-769.

[35] N.S.Trudinger (1986), Classical boundary value problems for Monge-Ampère type equations, *Lecture Notes in Math.* 1192, 251-258.

[36] N.S. Trudinger (1990), The Dirichlet problem for the prescribed curvature equations, *Arch. Rational Mech. Anal.* 111, 153-179.

[37] N.S. Trudinger (1995), *Lectures on nonlinear elliptic equations of second order*, Lectures in Mathematical Sciences 9, Univ. Tokyo.

[38] N.S. Trudinger (1995), On the Dirichlet problem for Hessian equations, *Acta Math.* 175, 151-164.

[39] N.S. Trudinger (2001), X.-J. Wang, On the Monge mass transfer problem, *Calc. Var.* 13, 19-31.

[40] N.S. Trudinger (2004), *Fully Nonlinear PDEs in Geometry*, CBMS Lectures.

[41] N.S. Trudinger (2006), Recent developments in elliptic partial differential equations of Monge-Ampère type, *Proc. Int. Cong. Math., Madrid* 3, 291-302.

[42] N.S. Trudinger (2007), *Optimal transportation and Nonlinear partial differential equations*, 26th Brazilian Mathematical Colloquium.

[43] N.S. Trudinger (2008), On the prescribed Jacobian equation, Proc. Intl. Conf. for the 25th Anniversary of Viscosity Solutions, Gakuto Intl. Series, *Math. Sci. Appl.* 20, 243-255.

[44] N.S. Trudinger, X.-J. Wang (2008), The Monge-Ampère equation and its geometric applications, *Handbook of geometric analysis. No. 1, Adv. Lect. Math. (ALM)* 7, 467-524, Int. Press, Somerville, MA.

[45] N.S. Trudinger, X.-J. Wang (2009), On the second boundary value problem for Monge-Ampère type equations and optimal transportation, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa CI. Sci.* VIII, 143-174.

[46] H. Wilhelm Alt (2012), *Linear Functional Analysis: An Application-Oriented Introduction*, Springer.

[47] Z. Wu, J. Yin, C. Wang (2006), *Elliptic and Parabolic Equations,* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

Tiếng Pháp

[48] A.M. Ampère (1820), Mémoire contenant l'application de la théorie, *Journal de l'École Polytechnique.*

[49] S. Bernstein (1910), Sur la généralization du problèms de Dirichlet. (Deuxième partie), *Math. Annalen.* 69, 82-136.

[50] G. Monge (1784), Mémoire sur le calcul intégral des équations aux différences partielles, *Mémoires de l'Académie des Sciences.* Paris, France: Imprimerie Royale, 118-192.