VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM
VIỆN TOÁN HỌC

NGUYỄN HUYỀN MƯỜI

ỔN ĐỊNH HỮU HẠN THỜI GIAN CHO HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN SUY BIẾN CÓ TRỄ

Chuyên ngành: Phương trình vi phân và tích phân
Mã số: 9 46 01 03

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - 2021

Luận án được hoàn thành tại: Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt nam

Tập thể hướng dẫn khoa học:

GS. TSKH. Vũ Ngọc Phát

Phản biện 1: TS. Hà Phi, Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội

Phản biện 2: PGS. TS. Đỗ Đức Thuận, Đại học Bách khoa Hà

Phản biện 3: TS. Trần Văn Bằng , Đại học Sư Phạm Hà Nội 2

Luận án được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án cấp Viện, họp tại Viện Toán học-Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam vào hồi 14.00 giờ ngày 03 tháng 2 năm 2021

Có thể tìm luận án tại:

- Thư viện Quốc gia Hà Nội
- Thư viện Viện Toán học

MỞ ĐẦU

Bài toán nghiên cứu tính chất định tính nghiệm của các hệ động lực học là một trong những hướng nghiên cứu quan trọng có nhiều ứng dụng trong thực tế, thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà khoa học trong và ngoài nước. Tính chất ổn định hữu hạn thời gian của hệ động lực học là một trong các tính chất quan trọng trong các tính chất định tính của hệ động lực học đảm bảo hệ động lực học có hoạt động trong định mức cho phép hay không. Khái niệm ổn định hữu hạn lần đầu tiên được đưa ra bởi nhà khoa học người Nga G. Kamenkov năm 1953 [20], do tính ứng dụng mạnh mẽ của khái niệm ổn định hữu hạn thời gian cho hệ động lực học đã được các nhà khoa học phương Tây quan tâm nghiên cứu mạnh mẽ từ những năm 1960 bởi P. Dorato [13], A. Michel [25], L. Weiss [31],... và áp dụng trong các quá trình công nghiệp và kĩ thuật [15],[19]. Đặc biệt khái niệm ổn định hữu hạn thời gian khác khái niệm ổn định tiệm cận do Lyapunov đưa ra. Khái niệm ổn định hữu hạn thời gian xem xét trạng thái của hệ phương trình vi phân trong khoảng thời gian hữu hạn cố định, và hệ ổn định hữu hạn thời gian có thể không ổn định tiệm cận và ngược lại hệ ổn định tiệm cận chưa chắc đã ổn định hữu hạn thời gian (xem Amato et al. [4]). Khái niệm ổn định hữu hạn cho hệ $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ với $f(t, x)$ là hàm thỏa mãn các điều kiện sao cho hệ có nghiệm duy nhất với mọi điều kiện ban đầu được phát biểu như sau:
Cho trước số $T > 0$ và hai tập hợp X_0, X_1, thì hệ $\dot{x}(t) = f(t, x),\ x(0) = x_0$ được gọi là ổn định hữu hạn thời gian theo (T, X_0, X_1) nếu

$$x_0 \in X_0 \to x(t) \in X_1, \forall t \in [0, T].$$

Thông qua việc nghiên cứu tính ổn định hữu hạn thời gian của hệ giúp chúng ta có thêm thông tin chặn trên, chặn dưới của nghiệm của hệ trong một khoảng thời gian hữu hạn. Các kết quả ban đầu về tính ổn định hữu hạn thời gian được đưa ra từ việc đánh giá trực tiếp công thức nghiệm của hệ, nhưng do hệ động lực học ngày càng phức tạp, việc mô hình hóa các hệ động lực học, robot ngày càng trở nên gần sát với thực tế hơn, kéo theo các hệ phức tạp hơn. Dẫn tới việc đưa ra công thức nghiệm của các hệ trở lên khó khăn hơn. Từ những năm 1976 trở về đây, nhờ khoa học máy tính phát triển, cùng các thuật toán tối ưu kiểm tra các điều kiện bất đẳng thức ma trận chạy trên máy tính tốt hơn đã tạo điều kiện cho phương pháp xây dựng hàm Lyapunov từ đó đánh giá được trạng thái của hệ dẫn ra các điều kiện bất đẳng thức ma trận phát triển [2], [4],[9].

Hệ phương trình vi phân suy biến $E\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t)$ được nghiên cứu đầu tiên bởi Weierstrass (1867) với điều kiện $|sE - A| \neq 0$, sau đó được Kronecker (1880) xem xét trường hợp $|sE - A| = 0$ hoặc E, A là các ma trận không vuông và đưa ra khái niệm chỉ số của hệ phương trình vi phân suy biến. Do tính ứng dụng cao của hệ phương trình vi phân suy biến trong nhiều ngành như: hệ động lực học, cơ học; kinh tế học (Leotief dynamic model [24]), mạng lưới điện [8]... nên trong những năm gần đây nghiên cứu tính chất định tính nghiệm của hệ phương trình vi phân suy biến phát triển mạnh mẽ [4], [7], [12], [8].

Do tính đặc thù của hệ phương trình vi phân suy biến việc giải quyết bài toán ổn định hữu hạn thời gian còn gặp nhiều khó khăn về phương pháp và kỹ thuật:

- Nghiên cứu bài toán tồn tại nghiệm của hệ phương trình vi phân suy biến [8], [12].
- Nghiên cứu bài toán tồn tại nghiệm và các tính chất nghiệm của hệ suy biến có trễ, có nhiễu, có xung [8], [12].
- Xây dựng các hàm Lyapunov thích hợp và tính đạo hàm của chúng để thiết lập các điều khiện đủ hữu hiệu [34], [35], [36].

Ngoài việc quan tâm xem xét bài toán ổn định hữu hạn thời gian cho hệ phương trình vi phân suy biến và do nhu cầu ứng dụng trong lý thuyết điều khiển kỹ thuật, bài toán ổn định hóa hữu hạn thời gian cho hệ (bài toán thiết kế điều khiển phản hồi để đảm bảo hệ đóng là ổn định hữu hạn thời gian) cũng được các nhà khoa học quan tâm do tính ứng dụng của bài toán [4], [27], [28].

Bài toán ổn định hữu hạn thời gian cho hệ suy biến được nhiều nhà khoa học trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu như: F. Amato, E. Moulay, S.B. Stojanovic, Y. Lin, V.N. Phát .... [5] , [26], [23], [27] với phương pháp hàm Lyapunov được sử dụng mạnh mẽ và các ước lượng để đưa ra các điều kiện đủ kiểm tra tính ổn định hữu hạn thời gian của hệ suy biến. Hiện nay phương pháp hàm Lyapunov vẫn là một phương pháp hữu hiệu trong nghiên cứu bài toán ổn định hệ phương trình vi phân có trễ và hệ phương trình vi phân suy biến có trễ. Ứng dụng linh hoạt phương pháp này (thiết kế các hàm Lyapunov nâng cao thích hợp) để đảm bảo các điều kiện tồn tại nghiệm và điều kiện đủ tính ổn định, ổn định hoá. Trong bài báo [33], S. Xu và các cộng sự xét bài toán ổn định và ổn định hóa cho hệ tuyến tính liên tục suy biến với trễ hằng. Năm 2009, A. Haidar và cộng sự trong bài báo [17] xét bài toán ổn định mũ cho hệ tuyến tính liên tục suy biến với nhiều trễ biến thiên khả vi bị chặn. Các kết quả đối với hệ liên tục suy biến đa số đều tập trung vào tính ổn định tiệm cận. Đối với bài toán ổn định (và ổn định hoá) hữu hạn thời gian, năm 2001 Amato và các cộng sự [2] đã xét cho hệ tuyến tính không suy biến có nhiễu. Các kết quả về tính ổn định hữu hạn thời gian đa số nhận được cho hệ phương trình vi phân không suy biến không có trễ hoặc có trễ hằng. Trong chương 2, chúng tôi trình bày kết quả nghiên cứu bài toán ổn định hữu hạn thời gian cho hệ phương trình vi phân suy biến có trễ gồm hai phần:

- Phần thứ nhất: Nghiên cứu bài toán ổn định vững hữu hạn thời gian cho hệ phương trình vi phân tuyến tính suy biến với trễ hằng. Bằng cách cải tiến phương pháp hàm Lyapunov (xây dựng các hàm Lyapunov thích hợp bao gồm các ma trận trọng tự do và sử dụng các bất đẳng thức Jensen mở rộng) và sử dụng phương pháp phân tích giá trị kì dị, chúng tôi đề thiết lập các điều kiện đủ mới dựa trên giải các các bất đẳng thức ma trận tuyến tính.

- Phần thứ hai: Mở rộng kết quả đối với hệ tuyến tính suy biến có trễ biến thiên là các hàm bị chặn và không khả vi, chúng tôi thu được quy tắc thiết kế điều khiển phản hồi và điều kiện đủ về tính ổn định hóa vững hữu hạn thời gian.

Đối với hệ suy biến rời rạc cũng được nhiều quan tâm nghiên cứu và xuất hiện trong nhiều mô hình xử lý tín hiệu, dữ liệu trong nhiều ngành khoa học như máy tính, xử lý tín hiệu và được nhiều nhà khoa học, kĩ sư quan tâm, nghiên cứu [3]. F. Amato (2005) và các cộng sự [3] xét bài toán ổn định hóa hữu hạn thời gian cho hệ rời rạc. Các tác giả đã sử dụng phương pháp hàm Lyapunov và kỹ thuật đánh giá thông qua sai phân của các hàm toàn phương đưa ra các điều kiện đủ dưới dạng các bất đẳng thức ma trận tuyến tính về tính ổn định hữu hạn thời gian. Sau đó các kết quả này đã được mở rộng cho trường hợp hệ có trễ biến thiên bởi S.B. Stojanovic và cộng sự [23] cho bài toán ổn định hữu hạn thời gian. Năm 2000, S. Xu và cộng sự [32] đã xét bài toán điều khiển H_∞ cho hệ rời rạc suy biến không có trễ. Năm 2011, Y. Lin và các cộng sự [23] đã mở rộng nghiên cứu bài toán ổn định hóa hữu hạn thời gian cho hệ rời rạc suy biến trên.
Nghiên cứu tính chất định tính của hệ rời rạc chuyển mạch cũng được quan tâm nhiều do lớp hệ này mô tả các vi điều khiển kỹ thuật số và các thiết bị nhúng xuất hiện trong quá trình sản xuất, mạng lưới thông tin liên lạc, ... Có một số các kết quả về tính ổn định Lyapunov (Lyapunov stability) cho hệ chuyển mạch có trễ được công bố [21], [30], như: L. Zhou (2013) cùng các cộng sự xét bài toán ổn định cho hệ chuyển mạch nhưng không có trễ. Dựa trên xây dựng các hàm Lyapunov thỏa mãn điều kiện của quy luật chuyển mạch dạng đặc biệt tác giả đã đưa ra điều kiện đủ kiểm tra tính ổn định của hệ. Năm 2010, J.X. Liu và các cộng sự [22] xét tính ổn định mũ phụ thuộc vào trễ cho hệ suy biến chuyển mạch .
Các kết quả về tính ổn định hữu hạn thời gian cho hệ chuyển mạch chủ yếu được xem xét cho các hệ chuyển mạch không suy biến như G. Chen (2014) [10],...
Trong chương 3, chúng tôi trình bày kết quả nghiên cứu bài toán ổn định hữu hạn thời gian cho hệ rời rạc suy biến có trễ gồm hai phần:

- Phần một: Nghiên cứu bài toán ổn định - ổn định hóa vững hữu hạn thời gian cho hệ rời rạc suy biến có trễ biến thiên bị chặn. Dựa trên phương pháp hàm Lyapunov và phương pháp phân tích giá trị kì dị, chúng tôi xây dựng lớp hàm Lyapunov cải tiến bao gồm một số ma trận trọng tự do và bổ đề đánh giá ma trận Jensen mở rộng, chúng tôi đề xuất các điều kiện đủ mới về tính ổn định vững hữu hạn thời gian cho hệ suy biến rời rạc có trễ biến thiên. Đồng thời chúng tôi xây dựng một luật thiết kế điều khiển phản hồi hữu hiệu đảm bảo cho tính ổn định hóa hữu hạn thời gian cho hệ đóng mà vẫn đảm bảo tính chính quy và không phụ thuộc xung của nghiệm.

- Phần hai: Nghiên cứu bài toán ổn định hữu hạn thời gian cho hệ rời rạc chuyển mạch suy biến có trễ biến thiên bị chặn. Dựa trên phương pháp cải tiến hàm Lyapunov và phương pháp phân tích giá trị kì dị, chúng tôi thiết kế điều khiển quy tắc chuyển mạch dạng hình học đảm bảo tính ổn định hữu hạn thời gian của hệ trên.

Ngoài phần mở đầu, kết luận, danh mục các kí hiệu, danh mục các công trình khoa học của tác giả, tài liệu tham khảo, luận án gồm 3 chương như sau:

Chương 1. Cơ sở toán học.
Chương 2. Ổn định và ổn định hóa hữu hạn thời gian cho một số lớp hệ vi phân suy biến có trễ.
Chương 3. Ổn định và ổn định hóa hữu hạn thười gian cho một số lớp hệ suy biến rời rạc có trễ.

Chương 1

Cơ sở toán học

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số cơ sở toán học về phương trình vi phân suy biến, về bài toán ổn định, ổn định hữu hạn thời gian và một số kiến thức bổ trợ trong luận án. Nội dung trong chương này được trình bày từ các tài liệu [1], [9].

1.1 Hệ phương trình vi phân suy biến tuyến tính

Trong một số mô hình (robot, kinh tế,...), ngoài mối liên hệ giữa các đối tượng như vận tốc, khối lượng, nhiệt độ, gia tốc, trạng thái được biểu diễn bởi các phương trình vi phân, mô hình còn phải đảm bảo những ràng buộc đại số giữa các thành phần cấu tạo hoặc giữa các đối tượng trong mô hình đó. Từ đó ta có phương trình vi bậc nhất dạng tổng quát như sau:

$$\begin{cases} f(\dot{x}(t), x(t), u(t), t) = 0, \\ g(x(t), u(t), y(t), t) = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

trong đó $x(t)$ là vectơ trạng thái của hệ; $u(t)$ là điều khiển đầu vào; $y(t)$ là thông tin đầu ra đo được; f và g là các hàm vectơ của $\dot{x}(t),\ x(t),\ u(t),\ y(t)$, với số kích cỡ phù hợp.
Trong trường hợp phương trình (1.1) giải được với $\dot{x}(t)$ ta có dạng

$$\dot{x}(t) = g(t, x_t),\ t \geq 0, \tag{1.2}$$

trong đó $x_t \in C((t-h;t], \mathbb{R}^n), t \in [t_0, t_0+\sigma]$ được xác định bởi $x_t(s) := x(t+s), s \in [-h, 0]$ và là quỹ đạo của $x(t)$ trên đoạn $[-h, 0]$ của hàm $x(.)$ với chuẩn trong $C([t-h;t], \mathbb{R}^n)$ được định nghĩa bởi $\|x_t\| = \sup_{s\in[-h,0]} \|x(t+s)\|$; $g(t, x_t) : D \subset \mathbb{R}^+ \times C([0, +\infty), \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$. Một hàm $x(t)$ được gọi là nghiệm của phương trình (1.2) trên $[t_0 - h, t_0 + \sigma)$ nếu tồn tại $t_0 \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ sao cho $x(t) \in C([t_0 - h, t_0 + \sigma), \mathbb{R}^n)$, $(t, x_t) \in D$ và $x(t)$ thỏa mãn phương trình (1.2) với mọi $t \in [t_0, t_0 + \sigma)$. Cho $t_0 \in \mathbb{R}, \phi \in C$, ta nói $x(t_0, \phi, f)$ là một nghiệm của phương trình (1.2) với hàm điều kiện ban đầu ϕ tại t_0 hoặc đơn giản là một nghiệm đi qua điểm (t_0, ϕ) nếu tồn tại một số $\sigma > 0$ sao cho $x(t_0, \phi, f)$ là nghiệm của hệ (1.2) trên $[t_0 - h, t_0 + \sigma)$ và $x_{t_0} = \phi$. Khi t_0 đã rõ, để cho đơn giản trong cách viết, từ nay về sau kí hiệu $x(t, \phi)$ thay cho $x(t_0, \phi, f)$. Trường hợp hệ (1.1) không giải được với đạo hàm $\dot{x}(t)$ ta xét hệ có dạng:

$$E(t)\dot{x}(t) = H(x(t), u(t), t), \tag{1.3}$$

trong đó $E(t)$ là ma trận suy biến. Hệ được mô tả như dạng (1.3) được gọi là hệ phương trình vi phân suy biến.
Nếu H là hàm tuyến tính đối với $x(t)$ và $u(t)$, thì phương trình (1.3) trở thành phương trình vi phân tuyến tính suy biến. Ví dụ hệ điều khiển tuyến tính suy biến dạng

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + f(t), \quad t \geq 0, \tag{1.4}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là vec tơ trạng thái; A, B là các ma trận thực hằng có chiều phù hợp; E là ma trận vuông suy biến; $u(t)$ là hàm điều khiển; $f(t)$ là hàm véc tơ phụ thuộc t.
Tiếp theo, xét hệ phương trình vi phân suy biến tuyến tính dạng:

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t), \quad t \geq 0, \tag{1.5}$$

trong đó E, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$; $E \in \mathbb{R}^n$ là ma trận suy biến : rank$E = r$; $f(t) : R^+ \to R^n$ là hàm phi tuyến cho trước.

Định nghĩa 1.1.1. (i) Hệ (1.5) được gọi là chính quy nếu cặp (E, A) là cặp ma trận chính quy theo nghĩa: $\det(sE - A)$ không đồng nhất bằng 0 với giá trị $s \in \mathbb{C}$ nào đó.
(ii) Hệ (1.5) không phụ thuộc vào xung nếu $\deg(\det(sE - A)) = r = \mathrm{rank}(E)$ với giá trị $s \in \mathbb{C}$ nào.

Chú ý 1.1.2. Nếu hệ (1.5) là chính quy và $f(t)$ là hàm khả vi với bậc phù hợp thì hệ có nghiệm với điều kiện ban đầu chấp nhận được [12].

Bổ đề 1.1.3. [12] (E, A) *là cặp ma trận chính quy nếu và chỉ nếu tồn tại hai ma trận không suy biến* Q, P *sao cho*

$$QEP = diag(I_r, N),\ QAP = diag(A_r, I_{n-r}).$$

Nếu hệ (1.5) là chính quy thì tồn tại cặp ma trận không suy biến M, G sao cho $MEG = diag(I_r, N)$, $MAG = diag(A_r, I_{n-r})$, N là ma trận lũy linh bậc k. Bằng cách đổi biến $y(t) = G^{-1}x(t) = [y_1(t), y_2(t)]^\top$, $Mf(t) = \overline{f}(t) = [\overline{f}_1(t), \overline{f}_2(t)]^\top$ hệ (1.5) trở thành

$$\begin{cases} \dot{y_1}(t) &= A_r y_1(t) + \overline{f}_1(t), \quad t \geq 0, \\ N y_2(t) &= y_2(t) + \overline{f}_2(t). \end{cases} \tag{1.6}$$

Cùng với điều kiện $f(t)$ khả vi với bậc phù hợp thì hệ (1.6) tồn tại nghiệm nên hệ (1.5) tồn tại nghiệm [12] với công thức nghiệm của (1.6) như sau

$$\begin{cases} y_1(t) &= e^{A_r t} y_1(0) + \int_0^t e^{A_r(t-s)} \bar{f}_1(s) ds, \\ y_2(t) &= -\sum_{i=0}^{k-1} N^i \overline{f}_2^{(i)}(t), \end{cases}$$

trong đó $f_2^{(i)}(t)$ là đạo hàm cấp i của hàm $\overline{f}_2(t)$. Ta thấy tính khả vi hoặc liên tục của $y_2(t)$ phụ thuộc vào các đạo hàm của hàm $\overline{f}_2(t)$. Nếu hệ (1.5) chính quy và không phụ thuộc xung, thì khi đó N là ma trận 0, nên nếu $f(t)$ là hàm liên tục thì $y_2(t)$ liên tục. Từ phụ thuộc

xung trong trường hợp này nghĩa là nghiệm của phương trình (1.6) liên tục.
Trong trường hợp rời rạc, hệ có dạng

$$Ex(k+1) = Ax(k) + f(k), \quad k = 0, 1, 2, ...,$$

nếu (E, A) là cặp ma trận chính quy, tương tự như trên với $y(k) = G^{-1}x(k)$ ta có

$$\begin{cases} y_1(k+1) & = A_r y_1(k) + \overline{f}_1(k), \\ Ny_2(k+1) & = y_2(k) + \overline{f}_2(k). \end{cases}$$

Và ta có $y_2(k) = -\sum_{i=0}^{k-1} N^i \overline{f}_2(k+i)$, nếu (E, A) không thỏa mãn điều kiện deg(det($sE - A$))=rank(E) thì khi đó $y_2(k)$ phụ thuộc giá trị $f(k+i)$ với i lớn hơn 0, tức là tại thời điểm k thì nghiệm phụ thuộc vào thời điểm tương lai $k+i$ của hàm số f, nên trong các bài báo tiếng anh đối với hệ rời rạc thường hay dùng từ "causal" (nhân quả) thay cho từ "impluse free" (không phụ thuộc xung) khi deg(det($sE - A$))=rank(E).

1.1.1 Bài toán ổn định hữu hạn thời gian

Xét hệ

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_0, \tag{1.7}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $f(.)$ làm hàm vec tơ thỏa mãn điều kiện để (1.7) có duy nhất nghiệm với điều kiện ban đầu.

Định nghĩa 1.1.4. [4] Cho trước thời điểm ban đầu t_0, số dương T, hai tập hợp X_0 và X_t, hệ (1.7) được gọi là ổn định hữu hạn thời gian theo (t_0, T, X_0, X_1) nếu

$$x_0 \in X_0 \Rightarrow x(t) \in X_1, \ t \in [0, T]. \tag{1.8}$$

1.1.2 Bài toán ổn định hóa hữu hạn thời gian

Xét hệ điều khiển được mô tả bởi phương trình

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \ t \geq 0, \tag{1.9}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là vec tơ trạng thái, $u(t)$ là véc tơ điều khiển, hàm f là hàm cho trước thỏa mãn điều kiện $f(t, 0, 0) = 0, \forall t \geq 0$. Giả sử $u \in L^2_{loc}([0, +\infty), \mathbb{R}^n)$ và với mọi $x_0 \in \mathbb{R}^n$, hệ (1.9) có nghiệm duy nhất $x(t)$ thỏa mãn điều kiện ban đầu $x(0) = x_0$ xác định trên $[0, +\infty)$.

Định nghĩa 1.1.5. [4] Hệ (1.9) được gọi là ổn định hóa hữu hạn thời gian nếu tồn tại hàm $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, h(0) = 0$, sao cho với điều khiển phản hồi $u = h(x)$, thì hệ đóng

$$\dot{x}(t) = f(x(t), h(x(t))), \ t \geq 0 \tag{1.10}$$

là ổn định hữu hạn thời gian theo (t_0, T, X_0, X_t).

Bài toán ổn định hóa hữu hạn thời gian là thiết kế điều khiển phản hồi $u(t) = h(x(t))$ để hệ ổn định hữu hạn thời gian.

1.2 Bất đẳng thức ma trận tuyến tính

Bất đẳng thức ma trận tuyến tính xuất hiện đầu tiên năm 1890, khi Lyapunov xuất bản các công trình về lí thuyết Lyapunov. Ông chỉ ra rằng phương trình vi phân

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

là ổn định tiệm cận khi và chỉ khi tồn tại một ma trận một ma trận đối xứng xác định dương P sao cho

$$A^\top P + PA < 0.$$

Bất đẳng thức trên là một dạng của bất đẳng thức ma trận tuyến tính, và chúng ta có thể giải tường minh thông qua giải hệ các bất phương trình tuyến tính.

Định nghĩa 1.2.1. ([6]) Bất đẳng thức ma trận tuyến tính là biểu thức có dạng $\sum_{i=0}^{i=m} x_i A_i > 0$, trong đó $x_i \in \mathbb{R}$, $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là các ma trận đối xứng.

1.3 Một số bổ đề bổ trợ

Bổ đề 1.3.1. *(Bất đẳng thức Cauchy [6]). Giả sử $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận đối xứng và xác định dương. Khi đó ta có*

$$2x^\top Qy \le y^\top Sy + x^\top QS^{-1}Q^\top x,$$

với mọi $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}, y \in \mathbb{R}^n$. Đặc biệt khi $Q = I$, ta có

$$2x^\top y \le y^\top Sy + x^\top S^{-1}x.$$

Bổ đề 1.3.2. *(Bất đẳng thức tích phân Jensen [16]). Cho $Z \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận đối xứng và xác định dương, các hằng số $0 < h < \overline{h}$ sao cho các tích phân sau xác định. Khi đó, ta có đánh giá sau:*
$\int_{t-h}^{t} x(s)^\top Zx(s)ds \ge \frac{1}{h}\Big(\int_{t-h}^{t} x(s)ds\Big)^\top Z\Big(\int_{-\overline{h}}^{-h}\int_{t+s}^{t} x(\tau)d\tau ds\Big).$

Bổ đề 1.3.3. *(Bổ đề Schur [6]). Giả sử $X_{11} = X_{11}^\top,\ X_{22} = X_{22}^\top,\ X_{21} = X_{12}^\top$ là các ma trận có số chiều thích hợp. Khi đó các điều kiện sau là tương đương*
i) $\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & -X_{22} \end{pmatrix} < 0.$
ii) $X_{22} > 0,\ X_{11} + X_{12}X_{22}^{-1}X_{21} < 0.$

Bổ đề 1.3.4. *Với $\tau > 0,\ \sigma > 0,\ \gamma \in (0,1)$ và $v(t)$ là hàm liên tục thỏa mãn*

$$0 \le v(t) \le \gamma \sup_{-\tau\le s\le 0} v(t+s) + \sigma,\ t \ge 0,$$

thì $v(t) \le \gamma \sup_{-\tau\le s\le 0} v(s) + \frac{\sigma}{1-\gamma},\ t \ge 0.$

Bổ đề 1.3.5. *(Bất đẳng thức Jensen mở rộng [29]) Cho trước ma trận đối xứng $R > 0$ và hàm khả vi $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, ta có bất đẳng thức sau:*

$$\int_a^b \dot{\phi}^\top(u)R\dot{\phi}(u)du \ge \frac{1}{b-a}(\phi(b)-\phi(a))^\top R(\phi(b)-\phi(a)) + \frac{12}{b-a}\Omega^\top R\Omega,$$

với $\Omega = \frac{\phi(b)+\phi(a)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi(u)du.$

Bổ đề 1.3.6. [6] *Với hai ma trận bất kì A, B có kích cỡ phù hợp và ma trận đối xứng xác định dương N, ta có các đánh giá sau:*
i) $2x^\top ANBy \leq x^\top ANA^\top x + y^\top B^\top NBy$.
ii) $-ANA^\top \leq A + A^\top + N^{-1}$.

Chương 2

Ổn định và ổn định hóa hữu hạn thời gian cho một số lớp hệ vi phân suy biến có trễ

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu bài toán ổn định và ổn định hóa hữu hạn thời gian cho một số lớp hệ phương trình vi phân suy biến có trễ hằng, trễ biến thiên liên tục và không khả vi. Nội dung được trình bày trong chương dựa trên hai bài báo [1],[2] trong danh mục các công trình khoa học của tác giả.
Xét hệ

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Dx(t-h(t)) + Bu(t) + B_1 w(t), \quad t \geq 0, \\ x(t) &= \psi(t), \quad \forall t \in [-h_2, 0], \end{cases} \tag{2.1}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là biến trạng thái, $u(t) \in \mathbb{R}^{m_1}$ là hàm điều khiển, $w(t) \in \mathbb{R}^{m_2}$ là hàm nhiễu; A, D, B, B_1 là các ma trận hằng số với số chiều phù hợp, $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận suy biến với rank $E = r < n$, $\psi(t)$ là hàm số điều kiện ban đầu; $h(t)$ là hàm trễ thỏa mãn điều kiện:

$$0 < h_1 \leq h(t) \leq h_2, \quad t \geq 0.$$

Nhiễu $w(t)$ là hàm liên tục thỏa mãn điều kiện

$$\exists d > 0 : \qquad w^\top(t)w(t) \leq d, \quad t \in [0, T]. \tag{2.2}$$

Xét hệ (2.1) với $u(t) = Kx(t)$, do rank $E = r < n$, nên tồn tại hai ma trận không suy biến M, G sao cho $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = MEG$. Đặt

$$M(A+BK)G = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{pmatrix}, MDG = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}, \ MB_1 = \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{pmatrix}.$$

Qua việc đặt ẩn phụ $y = G^{-1}x := [y_1^\top, y_2^\top]^\top, y_1 \in \mathbb{R}^r, y_2 \in \mathbb{R}^{n-r}$, hệ (2.1) trở thành

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) & = \bar{A}_{11}y_1(t) + \bar{A}_{12}y_2(t) + D_{11}y_1(t-h(t)) \\ & +D_{12}y_2(t-h(t)) + B_{11}\omega(t), \\ 0 & = \bar{A}_{21}y_1(t) + \bar{A}_{22}y_2(t) + D_{21}y_1(t-h(t)) \\ & +D_{22}y_2(t-h(t)) + B_{12}\omega(t), \\ y(t) & = G^{-1}\psi(t) := [\phi_1(t), \phi_2(t)], \quad t \in [-h_2, 0]. \end{cases} \tag{2.3}$$

2.1 Ổn định hữu hạn thời gian cho hệ phương trình vi phân suy biến có trễ hằng

Khi hàm điều khiển $u(t) = 0$ và $h(t) = h > 0$ với mọi $t \geq 0$, hệ (2.1) trở thành

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) & = Ax(t) + Dx(t-h) + Bw(t) \ \forall t \geq 0 \\ x(t) & = \psi(t) \ \forall t \in [-h, 0], \end{cases} \tag{2.4}$$

với $\psi(t) \in C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ là điều kiện ban đầu.
Tiếp theo, chúng tôi xin nhắc lại định nghĩa hệ chính quy, không phụ thuộc vào xung và ổn định vững hữu hạn thời gian từ Chương 1 đối với hệ (2.4).

Định nghĩa 2.1.1. (i) Hệ (2.4) là chính quy nếu $\det(sE - A)$ là đa thức khác 0.
(ii) Hệ (2.4) không phụ thuộc vào xung nếu $\deg(\det(sE - A)) = r = \mathrm{rank}(E)$.
(iii) Với các số dương $c_1,\ c_2,\ T$ thỏa mãn $c_1 < c_2,\ T > 0$ và ma trận xác định dương R. Hệ (2.4) được gọi là ổn định vững hữu hạn thời gian theo $[c_1, c_2, T, R]$ nếu và chỉ nếu hệ (2.4) là chính quy, không phụ thuộc vào xung và thỏa mãn điều kiện

$$\text{nếu } \max_{t \in [-h, 0]} \psi^\top(t)R\psi(t) < c_1 \text{ thì } x^\top(t)Rx(t) < c_2,\ t \in [0, T],$$

với mọi nhiễu $w(.)$ thỏa mãn điều kiện $w^\top(t)w(t) < d, \forall t \geq 0$.

Trước khi đưa ra các điều kiện đủ cho hệ (2.4) ổn định vững hữu hạn thời gian, chúng tôi sử dụng các kí hiệu như sau:

$$
\begin{aligned}
&W_1 = PA + A^\top P^\top + Q_1 + Q_2\bar{M}A + A^\top \bar{M}^\top Q_2^\top - \eta PE,\\
&W_2 = PD + Q_2\bar{M}D, \bar{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ M_2 \end{pmatrix},\ G^\top PM^{-1} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix},\\
&M^{-\top}RM^{-1} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ * & R_{22} \end{pmatrix},\ b = \|A_{22}^{-1}B_2\|\sqrt{d},\\
&\alpha_1 = \frac{\lambda_{\min}(P_{11})}{\lambda_{\max}(R_{11})}, \alpha_2 = \frac{\lambda_{max}(P_{11})}{\lambda_{\min}(G^\top RG)} + h\frac{\lambda_{\max}(Q_1)}{\lambda_{\min}(R)},\\
&\alpha_3 = \frac{\alpha_2 c_1 + 2Td}{\alpha_1},\ \alpha_4 = \sum_{i=0}^{[\frac{T}{h}]} \|A_{22}^{-1}D_{22}\|^i,\\
&\alpha_5 = b\alpha_4 + \sigma\|G^{-1}\|\sqrt{\frac{c_1}{\lambda_{\min}(R)}},\ \sigma = \max_{i=1,\dots,[\frac{T}{h}]} \|A_{22}^{-1}D_{22}\|^i,\\
&\gamma = \|A_{22}^{-1}(D_{21}\| + \|A_{22}^{-1}D_{22})\|,\ \beta = \lambda_{\max}(G^\top RG).
\end{aligned}
$$

Định lí 2.1.2. *Với các số dương c_1, c_2, T và ma trận đối xứng xác định dương R cho trước, hệ (2.4) là chính quy và không phụ thuộc vào xung nếu tồn tại ma trận đối xứng xác định dương $Q_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ma trận khả nghịch $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ma trận $Q_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ và một số dương η sao cho*

$$
PE = E^\top P^\top \geq 0, \tag{2.5}
$$

$$
\begin{pmatrix} W_1 & W_2 & PB & Q_2\bar{M}B \\ * & -Q_1 & 0 & 0 \\ * & * & -I & 0 \\ * & * & * & -I \end{pmatrix} < 0. \tag{2.6}
$$

Hơn nữa, hệ (2.4) là ổn định vững hữu hạn thời gian theo $[c_1, c_2, T, R]$ nếu thỏa mãn thêm điều kiện

$$
\frac{e^{\eta T}\alpha_3}{\lambda_{\min}(R_{11})} + \left(\alpha_5 + \gamma\alpha_4\sqrt{\frac{e^{\eta T}\alpha_3}{\lambda_{\min}(R_{11})}}\right)^2 \leq \frac{c_2}{\beta}. \tag{2.7}
$$

Lược đồ chứng minh:

- Bước 1. Dựa vào điều kiện (2.5) và (2.6), chứng minh hệ (2.4) là chính quy và không phụ thuộc xung.
- Bước 2. Dựa vào việc xây dựng các hàm tựa Lyapunov cùng bất đẳng thức ma trận (2.6) và điều kiện (2.7) thì hệ (2.4) là ổn định vững hữu hạn thời gian theo $[c_1, c_2, T, R]$

Nhận xét 2.1.3. Định lý 2.1.2 bao gồm ba điều kiện (2.5)-(2.7) đảm bảo tính chính quy, không phụ thuộc xung và ổn định vững hữu hạn của hệ. Đầu tiên từ điều kiện (2.5),(2.6) ta chứng minh được A_{22} là khả nghịch để sử dụng A_{22}^{-1} trong điều kiện (2.7).

Nhận xét 2.1.4. Ta thấy rằng điều kiện (2.7) không phải là bất đẳng thức ma trận tuyến tính do có η, nhưng từ điều kiện (2.5) – (2.6) là tuyến tính, và tìm η từ các bất đẳng thức ma trận (2.6) trước sau đó kiểm tra điều kiện (2.7).

Nhận xét 2.1.5. Nếu $E = I$ thì Định lý 2.1.2 được chuyển về các kết quả trong bài báo [5], [26].

2.2 Ổn định hóa hữu hạn thời gian cho hệ phương trình vi phân suy biến có trễ biến thiên bị chặn không khả vi

Phần tiếp theo, chúng tôi trình bày kết quả cho hệ (2.1) trong đó hàm trễ $h(t)$ là hàm số liên tục không khả vi, $\psi(t) \in C^1([-h_2, 0], \mathbb{R}^n)$ là hàm số điều kiện ban đầu và xây dựng điều khiển ngược cùng điều kiện đủ để hệ (2.2) là ổn định hóa vững hữu hạn thời gian.

Định nghĩa 2.2.1. Hệ (2.1) là ổn định hóa vững hữu hạn thời gian theo (c_1, c_2, T, R) nếu tồn tại một điều khiển ngược $u(t) = Kx(t)$ sao cho hệ đóng

$$E\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + Dx(t - h(t)) + B_1w(t),$$

là ổn định vững hữu hạn thời gian theo (c_1, c_2, T, R) nghĩa là

$$\max\{\sup_{t\in[-h_2,0]} \psi^\top(t)R\psi(t), \sup_{t\in[-h_2,0]} \dot{\psi}^\top(t)R\dot{\psi}(t)\} < c_1 \to x^\top(t)Rx(t) < c_2,\ t \in [0, T],$$

với mọi nhiễu $w(.)$ thỏa mãn điều kiện $w^\top(t)w(t) < d, \forall t \in [0, T]$.

Trước khi giới thiệu điều kiện đủ cho việc thiết kế điều khiển ngược đảm bảo ổn định vững hữu hạn thời gian theo (c_1, c_2, T, R), chúng tôi sử dụng một số kí hiệu sau đây trong định lý để làm đơn giản việc trình bày:

$$
\begin{aligned}
&M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{M} = \begin{pmatrix} 0_{r\times n} \\ M_2 \end{pmatrix}, G^\top P M^{-1} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}, \\
&M^{-\top} R M^{-1} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}, \Gamma_{25} = 2D^\top + W\hat{M}, \\
&\Gamma_{11} = AP^{-\top} + BU + P^{-1}A^\top + U^\top B^\top + B_1 B_1^\top - \eta E P^{-\top}, \\
&\Gamma_{38} = \frac{8h^2\eta}{h_1} Q, \; \Gamma_{12} = -P^{-1}A^\top D - U^\top B^\top D, \Gamma_{15} = P^{-1}A^\top + U^\top B^\top, \\
&\Gamma_{33} = -4Q + Q_1 - \frac{4h^2\eta}{h_1} Q, \Gamma_{88} = -\frac{4h^2\eta}{h_1} Q, \alpha_2 = \frac{\lambda_{\max}(P_{11})}{\lambda_{\min}(G^\top R G)}, \\
&\Gamma_{22} = -8E^\top Q E - DD^\top - D^\top D + D^\top B_1 B_1^\top D, \\
&\Gamma_{44} = -4Q - Q_1, \Gamma_{55} = -I + h^2 Q + B_1 B_1^\top, \Gamma_{66} = \Gamma_{77} = -12Q - h\eta Q_1, \\
&\Gamma_{89} = \frac{24h^2\eta}{h_1}, \Gamma_{99} = -\frac{96h^2\eta}{3h_1} Q, h = h_2 - h_1, \alpha_1 = \frac{\lambda_{\min}(P_{11})}{\lambda_{\max}(R_{11})}, \\
&b_1 = \Big(\frac{h(h_2^2 - h_1^2)}{2\lambda_{\min}(R)} \lambda_{\max}(E^\top Q E) + \frac{h\lambda_{\max}(E^\top Q_1 E)}{\lambda_{\min}(R)}\Big), \\
&\alpha_3 = \frac{(\alpha_2 + b_1)c_1 + 3Td}{\alpha_1}, \beta = \max\{\sqrt{\frac{\alpha_3}{\lambda_{\min}(R_{11})}}, \frac{\|G^{-1}\|\sqrt{c_1}}{\sqrt{\lambda_{\min}(R)}}\}, \\
&\gamma_1 = \|\bar{A}_{22}^{-1}\bar{A}_{21}\| + \|\bar{A}_{22}^{-1} D_{21}\|, \gamma_2 = \|\bar{A}_{22}^{-1} D_{22}\|, \gamma_3 = \|\bar{A}_{22}^{-1} B_{12}\|\sqrt{d}, \\
&\gamma_4 = \beta e^{0.5\eta T}, a_1 = 2\beta \frac{\gamma_1\gamma_2}{1-\gamma_2} \|G^{-1}\| \sqrt{\frac{c_1}{\lambda_{\min}(R)}}, a_3 = \frac{1-\gamma_2}{\beta^2(1-\gamma_2+\gamma_1)}, \\
&a_2 = \frac{c_2}{\lambda_{\max}(GRG)} - (\frac{\gamma_3}{1-\gamma_2} + \gamma_2 \|G^{-1}\| \sqrt{\frac{c_1}{\lambda_{\min}(R)}})^2.
\end{aligned}
$$

Định lí 2.2.2. *Hệ (2.1) là ổn định hóa vững hữu hạn thời gian theo $(c_1, c_2, T, \mathbb{R})$ nếu tồn tại các ma trận đối xứng xác định dương $Q, Q_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ma trận không suy biến $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, các ma trận $W \in \mathbb{R}^{n\times n}, U \in \mathbb{R}^{m_1\times n}$, số dương $\eta > 0$ sao cho $\|\bar{A}_{22}^{-1} D_{22}\| < 1$ và thỏa mãn các bất đẳng thức sau:*

$$PE = E^\top P^\top \geq 0, \tag{2.8}$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & 0 & 0 & \Gamma_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & \Gamma_{22} & -2E^\top Q & -2E^\top Q & \Gamma_{25} & 6E^\top Q & 6E^\top Q & 0 & 0 \\ * & * & \Gamma_{33} & 0 & 0 & 0 & 6Q & \Gamma_{38} & 0 \\ * & * & * & \Gamma_{44} & 0 & 6Q & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Gamma_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \Gamma_{66} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \Gamma_{77} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & \Gamma_{88} & \Gamma_{89} \\ * & * & * & * & * & * & * & * & \Gamma_{99} \end{pmatrix} < 0 \tag{2.9}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 e^{0.5\eta T} - a_2 & e^{0.5\eta T} \\ e^{0.5\eta T} & -a_3 \end{pmatrix} \leq 0. \tag{2.10}$$

Ngoài ra, điều khiển ngược được thiết kế với luật: $u(t) = UP^\top x(t)$.

Lược đồ chứng minh: Chứng minh định lý gồm ba bước.

Bước 1: Chứng minh hệ đóng là hệ chính quy và không phụ thuộc vào xung.

Bước 2: Xây dựng hàm Lyapunov- Karoskii $V(t, x_t)$ và ước lượng $\dot{V}(t, x_t)$

Bước 3: Thông qua ước lượng $\dot{V}(t, x_t)$ chúng tôi ước lượng được $x^\top(t)x(t)$ từ đó chỉ ra luật điều khiển ngược đảm bảo hệ ổn định hóa vững theo (c_1, c_2, T, R).

Nhận xét 2.2.3. Điều kiện (2.8) không là bất đẳng thức ma trận tuyến tính nhưng ta có thể tìm nghiệm dưới dạng bất đẳng thức ma trận tuyến tính chặt. Thật vậy, đặt $\mathcal{P} = P^{-\top}$ thì điều kiện (2.8) chuyển thành điều kiện $E\mathcal{P} = \mathcal{P}^\top E^\top \geq 0$ (coi là điều kiện (2.8a), và điều kiện (2.9) chuyển thành bất đẳng thức ma trận tuyến tính theo $\mathcal{P}$ (kí hiệu điều kiện (2.9a). Chuyển điều kiện (2.8a) thành LMI $EXE^\top \geq 0$, bằng cách đặt $\mathcal{P} = (EX + \Theta S)^\top$, X là ma trận đối xứng xác định dương, S là ma trận vuông cùng cấp với E thỏa mãn $SE^\top = 0$ và ma trận $EX + \Theta S$ là ma trận khả nghịch. Thay $\mathcal{P}$ bằng $(EX + \Theta S)^\top$ và (2.8a), (2.9a) được các LMI mới đối với X, kí hiệu là (2.8b) và (2.9b).

Nhận xét 2.2.4. Chọn số cố định $\eta > 0$ sử dụng LMI Toolbox trong Matlab giải (2.8b),(2.9b) tìm X, Θ, Q, Q_1, W, U từ đó tìm được $\mathcal{P}, P$. Tiếp theo xác định các số a_1, a_2, a_3 và kiểm tra điều kiện (2.10). Nếu điều kiện (2.10) không thỏa mãn ta chọn số $\eta > 0$ khác và lặp lại theo các bước trên.

Nhận xét 2.2.5. Định lý cung cấp cho ta điều kiện đủ cho hệ là ổn định vững hóa hữu hạn thời gian đối với hệ suy biến có trễ biến thiên không khả vi phụ thuộc cả vào điều kiện của trễ, mà ở các kết quả trước đây [10], [13], [9] không kiểm tra được. Hơn nữa ở các kết quả [13], [9] có nhiều ma trận trọng tự do, làm quá trình giải bất đẳng thức ma trận trở nên phức tạp hơn. Trong kết quả này chúng tôi dựa vào bất đẳng thức tích phân Jensen mở rộng chỉ sử dụng hai ma trận trọng tự do.

2.3 Kết luận Chương 2

Chương 2 trình bày kết về bài toán ổn định hóa vững hữu hạn thời gian cho một số hệ phương trình vi phân suy biến có trễ hằng và trễ biến thiên liên tục bị chặn khoảng, không yêu cầu tính khả vi của hàm trễ. Kết quả đạt được như sau:

- Thiết lập các điều kiện đủ mới cho tính ổn định vững hữu hạn thời gian cho hệ vi phân suy biến có trễ hằng.
- Đưa ra điều kiện đủ và thiết kế điều khiển phản hồi đảm bảo tính ổn định vững hữu hạn thời gian cho hệ vi phân suy biến có trễ biến thiên bị chặn khoảng và không yêu cầu tính khả vi của hàm trễ.
- Đề xuất các điều kiện đủ để hệ là chính quy và tính không có xung được thông qua giải hệ bất đẳng thức ma trận tuyến tính.

Chương 3

Ổn định và ổn định hóa hữu hạn thời gian cho một số lớp hệ suy biến rời rạc có trễ

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu bài toán ổn định và ổn định hóa hữu hạn thời gian cho một số lớp hệ phương trình suy biến rời rạc có trễ biến thiên: ổn định hóa vững hữu hạn thời gian cho hệ suy biến rời rạc có trễ biễn thiên và ổn định hóa vững hữu hạn thời gian cho hệ suy biến chuyển mạch rời rạc có trễ biến thiên. Nội dung được trình bày dựa trên hai bài báo [3], [4] trong danh mục các công trình khoa học của tác giả.

3.1 Tính ổn định hóa hữu hạn thời gian của hệ suy biến rời rạc có trễ

Hệ suy biến rời rạc tuyến tính với trễ biến thiên được mô tả như bởi hệ sau:

$$\begin{cases} Ex(k+1) & = Ax(k) + Dx(k-h(k)) \\ & \quad +Bw(k) + Cu(k), k \in \mathbb{Z}^+, \\ x(k) & = \psi(k) \ \forall k = -h, \dots, 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

với $x(k)$ là véc tơ trạng thái thuộc $\mathbb{R}^n$, A, D là hai ma trận hằng trong $\mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{n\times l}$, E là ma trận suy biến trong $R^{n\times n}$: $rank(E) = r < n$; $h(k)$ là hàm trễ thỏa mãn điều kiện sau:

$$0 < h(k) \leq h, \quad k \geq 0.$$

Nhiễu $w(k) \in L^2([0, N], \mathbb{R}^m)$ thỏa mãn điều kiện sau:

$$\exists d > 0 : \qquad \sum_{k=1}^{N} w^\top(k)w(k) \leq d. \tag{3.2}$$

Định nghĩa 3.1.1. Với các số dương c_1, c_2, N, và một ma trận đối xứng xác định dương R, hệ (3.1) không có điều khiển ($u(k) = 0$) là ổn định vững hữu hạn thời gian theo $[c_1, c_2, N, R]$ nếu hệ là chính quy, không phụ thuộc xung và với mọi nhiễu $w(k)$ thỏa mãn điều kiện (3.2) sao cho

$$\max_{k\ =-h,-h+1,\ldots 0} \psi^\top(k)R\psi(k) < c_1 \Rightarrow x^\top(k)Rx(k) < c_2 \quad \forall k = 0, \ldots, N.$$

Định nghĩa 3.1.2. Hệ (3.1) là ổn định hóa vững hữu hạn thời gian theo $[c_1, c_2, N, R]$ nếu tồn tại điều khiển ngược $u(k) = Kx(k)$ sao cho hệ đóng $Ex(k+1) = (A+CK)x(k)+Dx(k-h(k)) + Bw(k)$ là ổn định vững hữu hạn thời gian theo $[c_1, c_2, N, R]$.

Trong phần này chúng tôi xem xét tính ổn định vững hữu hạn thời gian cho hệ (3.1) với ($u(k) = 0$). Do $\text{rank}(E) = r < n$, nên tồn tại hai ma trận không suy biến M, G sao cho $MEG = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Trước khi trình bày định lý, chúng tôi đưa ra một số kí hiệu trong định lý sử dụng:

$$MAG = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{M} = \begin{pmatrix} 0r \times n \\ M_2 \end{pmatrix},$$

$$M^{-\top}PM^{-1} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}, \ \beta = \min\{\eta, \eta^{h-1}\},$$

$$X_1 = 2A^\top PA - (1+\eta)E^\top PE + Q - P\bar{M}A - A^\top \bar{M}^\top P,$$

$$\alpha_1 = \Big(\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(R)} + \sum_{s=-h}^{-1} \frac{\lambda_{max}(Q)}{\lambda_{\min}(R)}\eta^{-1-s}\Big),$$

$$\alpha_2 = \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(R)}, \quad \gamma = \lambda_{\max}(I + 3B^\top PB).$$

Định lí 3.1.3. *Với các số dương c_1, c_2, N và ma trận đối xứng dương R cho trước, hệ (3.1) không có điều khiển là ổn định vững hữu hạn thời gian theo $[c_1, c_2, N, R]$ nếu tồn tại các ma trận đối xứng xác định dương $P, Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, và số dương $\eta > 0$ thỏa mãn các điều kiện sau:*

$$\begin{pmatrix} X_1 & A^\top PD - P\bar{M}D & P\bar{M}B \\ * & -\beta Q + 2D^\top PD & 0 \\ * & * & -I \end{pmatrix} < 0, \tag{3.3}$$

$$(1+\eta)^{N+1}\alpha_1 c_1 + \gamma d\frac{(1+\eta)^{N+1} - 1}{\eta} \leq \alpha_2 c_2. \tag{3.4}$$

Lược đồ chứng minh:

- Bước 1. Dựa vào điều kiện (3.3), chứng minh được hệ (3.1) không có điều khiển là chính quy và không phụ thuộc xung.
- Bước 2. Dựa vào việc xây dựng các hàm tựa Lyapunov cùng bất đẳng thức ma trận (3.3) và điều kiện (3.4) thì hệ (3.1) không có điều khiển là ổn định vững hữu hạn thời gian theo bộ $[c_1, c_2, N, R]$

Tiếp theo, ta áp dụng kết quả đã đạt được để giải quyết bài toán ổn định vững hóa hữu hạn thời gian cho hệ (3.1). Trước hết, ta coi điều khiển ngược

$$u(t) = Kx(t),$$

với $K \in K^{l\times n}$ là dạng điều khiển được thiết kế.

Định lí 3.1.4. *Với các số dương c_1, c_2, N, và ma trận đối xứng dương R cho trước, hệ (3.1) đóng ổn định vững hữu hạn thời gian theo $[c_1, c_2, N, R]$, nếu tồn tại các ma trận đối xứng dương $Z_1, Z_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ma trận $U \in \mathbb{R}^{n\times l}$ và số dương $\eta > 0$ thỏa mãn các điều kiện sau:*

$$\begin{pmatrix} \Xi_{11} & -\bar{M}DZ_1 & \bar{M}B & \Xi_{14} & \Xi_{15} \\ * & -\beta Z_2 & 0 & Z_1D^\top & 0 \\ * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & \frac{-1}{2}Z_1 & 0 \\ * & * & * & 0 & \frac{-2}{3}Z_1 \end{pmatrix} < 0, \tag{3.5}$$

$$(1+\eta)^{N+1}\bar{\alpha}_1 c_1 + \bar{\gamma} d\frac{(1+\eta)^{N+1}-1}{\eta} \le \bar{\alpha}_2 c_2, \tag{3.6}$$

với

$$\begin{aligned}\Xi_{11} &= (1+\eta)(Z_1E^\top + Z_1 + EZ_1) + Z_2 - \bar{M}AZ_1 - \bar{M}ACU^\top \\ &\quad - Z_1A^\top \bar{M}^\top - UC^\top A^\top \bar{M}^\top, \\ \Xi_{14} &= \frac{1}{2}(UC^\top + Z_1A^\top), \quad \Xi_{15} = UC^\top + Z_1A^\top,\end{aligned}$$

$$\beta = \min\{\eta, \eta^{h_2-1}\}, \quad \bar{\alpha}_1 = \Big(\frac{\lambda_{\max}(Z_1^{-1})}{\lambda_{\min}(R)} + \sum_{s=-h_2}^{-1}\frac{\lambda_{max}(Z_1^{-1}Z_2Z_1^{-1})}{\lambda_{\min}(R)}\eta^{-1-s}\Big),$$
$$\bar{\alpha}_2 = \frac{\lambda_{\min}(Z_1^{-1}Z_2Z_1^{-1})}{\lambda_{\max}(R)}, \quad \bar{\gamma} = \lambda_{\max}(I + 3B^\top Z_1^{-1}B).$$

Hơn nữa điều khiển ngược được thiết kế với quy tắc $K = U^\top Z_1^{-1}$.

3.2 Tính ổn định hóa hữu hạn thời gian của hệ suy biến rời rạc chuyển mạch có trễ

Hệ rời rạc phi tuyến suy biến có trễ và nhiễu có dạng sau:

$$\begin{cases} Ex(k+1) &= A_\sigma x(k) + D_\sigma x(k-h(k)) + B_\sigma w(k) \\ & \qquad +f_\sigma(k, x(k), x(k-h(k), w(k)), \quad k \in Z^+, \\ x(k) &= \psi(k), \quad k = -h, -h+1, \dots, 0, \end{cases} \tag{3.7}$$

với $x(k)$ là véc tơ trạng thái thuộc $\mathbb{R}^n$, $w(k)$ là hàm vector nhiễu, hàm chuyển mạch $\sigma : \mathbb{R}^n \to \{1, ..., p\}$ với quy tắc chuyển mạch xây dựng dựa trên vector trạng thái tại mỗi thời điểm và đầu ra là các giá trị trong tập hữu hạn $\{1, ..., p\}$; cặp ma trận $(A_\sigma, D_\sigma, B_\sigma)$ nhận giá trị trong tập hữu hạn phần tử $(A_i,\ D_i,\ B_i),\ i \in \overline{1,p}$, với $A_i, D_i \in \mathbb{R}^{n\times n}, B_i \in \mathbb{R}^{n\times q}$ là các ma trận hằng số; $f_\sigma(.)$ là các hàm thỏa mãn điều kiện:

$$\|f_i(k, x(k), x(k-h(k), w(k))\| \leq a_i\|x(k)\| + b_i\|x(k-h(k))\| + m_i\|w(k)\|, \quad i = 1, 2, ..., p. \tag{3.8}$$

Hàm trễ $h(k)$ thỏa mãn điều kiện sau:

$$0 < h(k) \leq h, \quad k \in Z^+.$$

Nhiễu $w(k)$ thỏa mãn

$$\exists d > 0 : \qquad w^\top(k)w(k) \leq d, \quad k = 0, \ldots, T. \tag{3.9}$$

Với quy tắc chuyển mạch $\sigma(x(t))$, ta giả sử rằng hệ chuyển mạch được kích hoạt tại nốt thứ l, nghĩa là $\sigma(x(t)) = l$.

Định nghĩa 3.2.1 (19)**.** Đối với quy tắc chuyển mạch $\sigma(.)$, hệ (3.7) được gọi là
(i) chính quy nếu đa thức $\det(sE - A_l)$ là đa thức khác 0 với mỗi nốt trong chuyển mạch $\sigma(x(t)) = l$;
(ii) không phụ thuộc xung nếu $\deg(\det(sE - A_l)) = \operatorname{rank} E$ với mọi nốt chuyển mạch $\sigma(x(t)) = l$.

Định nghĩa 3.2.2 (4)**.** Cho trước các số dương $c_1,\ c_2$, số nguyên dương T và ma trận đối xứng xác định dương $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$, hệ (3.7) là ổn định vững hữu hạn thời gian theo (c_1, c_2, T, R) với quy tắc chuyển mạch $\sigma(\cdot)$ nếu hệ là chính quy, không phục thuộc xung và mọi nghiệm $x_\sigma(t, \varphi)$ của hệ thỏa mãn điều kiện:

$$\max_{k=-h,\ldots,0} \psi^\top(k)R\psi(k) < c_1 \Longrightarrow x_\sigma^\top(k)Rx_\sigma(k) < c_2, \quad k = 0, \ldots, T.$$

với mọi nhiễu $\omega(\cdot)$ thỏa mãn (3.9).

Chúng tôi xây dựng quy tắc chuyển mạch cho hệ (3.7) dựa trên cấu trúc của vector trạng thái trong các nón lồi sao cho mỗi nốt được kích hoạt khi vector trạng thái nằm trong nón lồi được xác định nhờ các dạng toàn phương âm.

Định nghĩa 3.2.3 (20)**.** Hệ ma trận $\{L_i\}_{i=1}^p$ là đầy chặt nếu với mọi $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ thì tồn tại $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ sao cho $x^\top L_i x < 0$.

Ta dễ dàng kiểm tra được rằng: nếu hệ $\{L_i\}$ là đầy chặt nếu và chỉ nếu $\cup_{i=1}^p \Omega_i = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, trong đó $\Omega_i = \{x \in \mathbb{R}^n : x^\top L_i x < 0\}, i = 1, p$.

Chúng tôi sử dụng các mệnh đề sau trong chứng minh định lý.

Mệnh đề 3.2.4. [20] *Hệ $\{L_i\}_{i=1}^p$ là đầy chặt nếu tồn tại các số $\xi_i \geq 0, i = 1\bar{,}p, \sum_{i=1}^p \xi_i > 0$, sao cho $\sum_{i=1}^p \xi_i L_i < 0$.*

Từ rank $E = r < n$, nên tồn tại hai ma trận không suy biến M, N sao cho $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = MEN$. Đặt

$$MA_\sigma N = \begin{pmatrix} \bar{A}_{\sigma 11} & \bar{A}_{\sigma 12} \\ \bar{A}_{\sigma 21} & \bar{A}_{\sigma 22} \end{pmatrix},\ MD_\sigma N = \begin{pmatrix} \bar{D}_{\sigma 11} & \bar{D}_{\sigma 12} \\ \bar{D}_{\sigma 21} & \bar{D}_{\sigma 22} \end{pmatrix},$$
$$MB_\sigma = \begin{pmatrix} \bar{B}_{\sigma 1} \\ \bar{B}_{\sigma 2} \end{pmatrix},\ M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}.$$

Qua phép đổi biến $y = N^{-1}x := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},\ y_1 \in \mathbb{R}^r,\ y_2 \in \mathbb{R}^{n-r}$, hệ (3.7) trở thành

$$\begin{cases} y_1(k+1) & = A_{\sigma 11} y_1(k) + \overline{A}_{\sigma 12} y_2(k) + \bar{D}_{\sigma 11} y_1(k-h(k)) \\ & \quad + \bar{D}_{\sigma 12} y_2(k-h(k)) + \bar{B}_{\sigma 1} w(k) + M_1 f(.) \\ 0 & = \overline{A}_{\sigma 21} y_1(k) + \overline{A}_{\sigma 22} y_2(k) + \bar{D}_{\sigma 21} y_1(k-h(k)) \\ & \quad + \bar{D}_{\sigma 22} y_2(k-h(k)) + \bar{B}_{\sigma 2} w(k) + M_2 f(.) \\ y(k) & = N^{-1}\psi(k) := [\phi_1(k), \phi_2(k)], \quad k = \overline{-h, 0}. \end{cases} \tag{3.10}$$

Trước khi phát biểu định lý, chúng tôi liệt kê các kí hiệu của các biểu thức chứa ma trận được đặt lại cho gọn như sau:

$$M^{-\top}P_lM^{-1} = \begin{pmatrix} P_{l11} & P_{l12} \\ P_{l21} & P_{l22} \end{pmatrix},\ M^{-\top}RM^{-1} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}, \overline{M} = \begin{pmatrix} 0_{r\times n} \\ M_2 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_{l11} = 0.8G_l + 2A_l^\top P_lA_l - (1+\eta_l)E^\top P_lE - S_l\overline{M}A_l - A_l^\top\overline{M}^\top S_l + 2a_lI + 3a_l^2P_l,$$

$$\Gamma_{l12} = 2A_l^\top P_lD_l - 2S_l\overline{M}D_l,\ \Gamma_{l13} = S_l\bar{M},\ \Gamma_{l14} = S_l\overline{M}B_l,\ \Gamma_{l15} = A_l^\top P_l,$$

$$\Gamma_{l22} = 4D_l^\top P_lD_l + 8b_lI_n + b_l^2P_l - \eta_l^{T_l}G_l,\ \Gamma_{l26} = D_l^\top P_l,$$

$$\Gamma_{l33} = \Gamma_{l55} = \Gamma_{l66} = \frac{-1}{2(a_l+b_l+m_l)},$$

$$L_l = 1.2G_l + 2A^\top P_lA_l - (1+\eta_l)E^\top P_lE - S_l\bar{M}A_l - A^\top\bar{M}^\top S_l + 4a_lI + 3a_l^2P_l,$$

$$\Gamma_l = \begin{pmatrix} \Gamma_{l11} & \Gamma_{l12} & \Gamma_{l13} & \Gamma_{l14} & \Gamma_{l15} & 0 \\ * & \Gamma_{l22} & 0 & 0 & 0 & \Gamma_{l26} \\ * & * & \Gamma_{l33} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Gamma_{l55} & 0 \\ * & * & * & * & * & \Gamma_{l66} \end{pmatrix},\ T_l = \begin{cases} \max_{k=\overline{1,T}}(k-h(k))\ if\ \eta_l < 1 \\ \min_{k=\overline{1,T}}(k-h(k))\ if\ \eta_l \geq 1 \end{cases},$$

$$\Omega_l = \{x \in \mathbb{R}^n : x^\top L_lx < 0\},\ l = \overline{1,p},\ \overline{\Omega}_1 = \Omega_1 \cup \{0\},$$

$$\overline{\Omega}_l = \Omega_l \backslash \cup_{k=1}^{l-1}\overline{\Omega}_k, l = 2,3,\ldots,p.$$

$$\gamma_1 = c_1\Big(\max_{l=\bar{1,p}}\Big(\lambda_{\max}(E^\top P_lE) + \lambda_{\max}(G_l)\frac{\eta_l^{-h-1}-1}{\eta_l^{-1}-1}\Big)\Big), b = c_1\|N^{-1}\|$$

$$\gamma_2 = \max_{l=\bar{1,p}}\Big((1+\eta_l)^T\gamma_1 + \alpha_l\frac{\eta_l^T-1}{\eta_l-1}\Big),\ \gamma_3 = \max_{l=\bar{1,p}}\frac{\lambda_{\max}(R_{11})}{\lambda_{\min}(P_{l11})},\ \gamma_4 = \gamma_2\gamma_3,$$

$$\gamma_5 = \max_{l=\bar{1,p}}\Big(\|\bar{A}_{l22}^{-1}\bar{A}_{l21}\| + \|\bar{A}_{l22}^{-1}\bar{D}_{l21}$$

$$+ \|N^{-1}\|\|\bar{A}_{l22}^{-1}\|(a_l+b_l)\Big)\max\Big(\sqrt{\frac{\gamma_4}{\lambda_{\min}(R_{11})}}, b\Big) + \|N^{-1}\|\|\bar{A}_{l22}^{-1}\|m_ld,$$

$$\gamma_6 = \max_{l=\bar{1,p}}\frac{(\|\bar{A}_{l22}^{-1}\bar{D}_{l22}\|)}{1-\|N^{-1}\|\|\bar{A}_{l22}^{-1}\|a_l}, \gamma_7 = \frac{\gamma_5 + d\max_{l=\bar{1,p}}(\|\bar{A}|_{l22}^{-1}\bar{B}_{l12}\|)}{1-\|N^{-1}\|\|\bar{A}_{l22}^{-1}\|a_l},$$

$$\gamma_8 = \max(\gamma_6, \gamma_6^T)b + \gamma_7\frac{\gamma_6^T-1}{\gamma_6-1}.$$

Định lí 3.2.5. *Cho trước các số dương* $, c_1, c_2$*, số nguyên dương* T *và ma trận đối xứng xác định dương* $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$*, hệ (3.7)ổn định vững hữu hạn theo* (c_1, c_2, T, R) *nếu tồn tại các ma trận đối xứng xác định dương* $P_l, G_l \in \mathbb{R}^{n\times n}$*, và các ma trận* $S_l \in \mathbb{R}^{n\times n}, l = \overline{1,p}$*, số dương* $\xi_l \geq 0, \eta_l \geq 0, l = 1,p, \sum_{l=1}^p \xi_l > 0$*, sao cho các điều kiện sau thỏa mãn:*

$$\Gamma_l < 0,\ l = \overline{1,p}, \tag{3.11}$$

$$\sum_{l=1}^p \xi_lL_l < 0, \tag{3.12}$$

$$\lambda_{\max}(G^\top RG)(\gamma_4 + \gamma_8^2) \leq c_2. \tag{3.13}$$

Quy tắc chuyển mạch được xây dựng như sau: $\sigma(x(k)) = l$ *khi* $x(k) \in \overline{\Omega}_l$.

Lược đồ chứng minh: Chứng minh định lý gồm bốn bước.

Bước 1: Chứng minh hệ chính quy và không phụ thuộc vào xung với mọi nốt được kích hoạt.

Bước 2: Xây dựng hàm Lyapunov- Karoskii $V_l(k, x_k)$ và ước lượng $\dot{V}_l(k, x_k)$

Bước 3: Xây dựng các nón lồi, thiết kế quy tắc chuyển mạch dựa trên các nón lồi.

Bước 4: Thông qua ước lượng $\triangle V_l(k, x_k)$ chúng tôi ước lượng được $x^\top(k)x(k)$ từ đó chỉ ra hệ ổn định hóa vững theo (c_1, c_2, T, R) theo thiết kế chuyển mạch.

3.3 Kết luận chương 3

Chương 3 trình bày kết quả nghiên cứu bài toán ổn định hóa vững hữu hạn thời gian cho một số hệ phương trình suy biến rời rạc có trễ biến thiên bị chặn khoảng, và hệ suy biến chuyển mạch với trễ biến thiên bị chặn. Kết quả đạt được như sau:

- Thiết lập các điều kiện đủ mới cho tính ổn định vững hữu hạn thời gian cho hệ suy biến rời rạc có trễ biến thiên. Dựa trên các điều kiện nhận được, chúng tôi thiết kế điều khiển phản hồi để đảm bảo tính ổn định vững hữu hạn thời gian cho hệ.

- Đưa ra điều kiện đủ mở rộng về tính ổn định hữu hạn thời gian và thiết kế quy tắc chuyển mạch cho hệ suy biến rời rạc chuyển mạch.

KẾT LUẬN

Luận án nghiên cứu tính ổn định và ổn định hóa hữu hạn thời gian cho một số hệ phương trình vi phân suy biến có trễ.

Những kết quả đã được chứng minh trong luận án:

- Hệ suy biến liên tục:
  - Đưa ra một số điều kiện đủ mới về tính ổn định vững hữu hạn thời gian cho một số lớp hệ suy biến có trễ hằng.
  - Mở rộng kết quả đối với hệ phương trình vi phân suy biến trễ hằng đối với hệ có trễ biến thiên dạng khoảng không đòi hỏi điều kiện khả vi. Đồng thời đưa ra quy tắc thiết kế điều khiển ngược đảm bảo tính ổn định vững với thiết kế điều khiển phản hồi đảm bảo tính ổn định vững hữu hạn thời gian. Đây là kết quả đầu tiên về tính ổn định hữu hạn thời gian cho hệ suy biến có trễ biến thiên liên tục dạng khoảng không khả vi.
- Hệ suy biến rời rạc
  - Thiết lập các điều kiện đủ mở rộng về tính ổn định vững hữu hạn thời gian cho hệ suy biến rời rạc có trễ biến thiên bị chặn thông qua việc giải các bất đẳng thức ma trận tuyến tính.
  - Dựa trên xây dựng một quy tắc chuyển mạch dạng hình học, chúng tôi chứng minh các điều kiện đủ mới về tính ổn định vững hữu hạn thời gian cho hệ suy biến chuyển mạch rời rạc có trễ biến thiên bị chặn.

Điểm mới của luận án so với các kết quả đã có:

- Nghiên cứu bài toán ổn định hữu hạn cho hệ suy biến có trễ biến thiên.
- Hàm trễ bị chặn dạng khoảng và không đòi hỏi tính khả vi.
- Xây dựng quy tắc chuyển mạch dạng hình học để giải bài toán ổn định hữu hạn thời gian cho hệ suy biến có trễ biến thiên.

Luận án mở ra một số vấn đề có thể tiếp tục nghiên cứu:

- Nghiên cứu tính ổn định, ổn định hoá hữu hạn thời gian cho hệ suy biến có trễ không liên tục.
- Giải một số bài toán điều khiển ổn định hữu hạn thời gian (bài toán ổn định hoá, bài toán điều khiển H_∞) cho hệ suy biến có trễ không bị chặn

DANH MỤC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC CỦA TÁC GIẢ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

[1]. V. N. Phat, N. H. Muoi, M. V. Bulatov, Robust finite-time stability of linear differential-algebraic delay equations, *Linear Algebra and its Applications* , **487**(2015), 146-157. (SCI)

[2]. N. H. Muoi, V. N. Phat, P. Niamsup, Criteria for robust finite-time stabilisation of linear singular systems with interval time-varying delay, *IET Control Theory and Applications*, **11(12)**(2017), 1968-1975. (SCI)

[3]. N. H. Muoi, G. Rajchakit, V. N. Phat, LMI approach to finite-time stability and stabilization of singular linear discrete delay systems, *Acta Applicandae Mathematicae*, **146(1)**(2016), 81-93. (SCI)

[4]. N. H. Muoi, Finite-time stability of nonlinear singular switched discrete time systems with time-varying delay, *Communications on Applied Nonlinear Analysis*, **26(2)** (2019), 78-89. (Scopus)

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

[1] Vũ Ngọc Phát, *Nhập Môn Lý Thuyết Điều Khiển Toán Học*, NXB Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2001.

Tiếng Anh

[2] F. Amato, M. Ariola, P. Dorato, Finite-time control of linear systems subject to parametric uncertainties and disturbances, *Automatica*, **37**(2001), 1459-1463.

[3] F. Amato, M. Ariola, Finite-time control of discrete-time linear systems, *IEEE Trans. Autom. Control*, **50**(2005), 724–729.

[4] F. Amato, R. Ambrosino, M. Ariola, C. Cosentino, G. De Tommasi, *Finite-time stability and control*, Lecture Notes in Control and In Information Sciences, **453**, Springer London, 2014.

[5] F. Amato, R. Ambrosino, C. Cosentino, G. De Tommasi, Finite-time stabilization of impulsive dynamical linear systems, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, **5**(2011), 89-101.

[6] S. Boyd, L. El Ghaoui and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, Philadelphia, 1994.

[7] K.E. Brenan, S.L. Campbell, L.R. Petzold, *Numerical Solution of Initial Value Problems in Differential Algebraic Equations*, SIAM, Philadelphia, PA, 1996.

[8] S.L Campbell, *Singular Systems of Differential Equations*, Pitman, London, 1980.

[9] S.L. Campbell, V.H. Linh, Stability criteria for differential-algebraic equations with multiple delays and their numerical solutions, *Appl. Math. Comput.*, **208**(2009), 397-415.

[10] G. Chen, Y. Yang, Finite-time stability of switched positive linear systems, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **24**(2014), 179-190.

[11] J. Cheng, S. Zhong, Q. Zhong, H. Zhu, Y. Du, Finite-time boundedness of state estimation for neural networks with time-varying delays, *Neurocomputing*, **129**(2014), 257-264.

[12] L. Dai, *Singular Control Systems, Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Berlin Springer-Verlag, 1989.

[13] P. Dorato, Short time stability in linear time-varying systems, *In Proc IRE Int Convention Record*, Part 4(1961), 83-87.

[14] P. Gahinet, A. Nemirovskii, A.J. Laub, M. Chilali, *LMI Control Toolbox For use with MATLAB*, The MathWorks, Inc, 1995.

[15] G. Garcia, S. Tarbouriech, J. Bernussou, Finite-time stabilization of linear time-varying continuous systems, *IEEE Trans. Auto. Contr.*, **54**(2009), 364-369.

[16] K.C. Goh, M.G. Safonov, G.P. Papavassilopoulos, A global optimization approach for the BMI problem, *Decision and Control, Proceedings of the 33rd IEEE Conference on. V 3. IEEE*, (1994).

[17] A. Haidar, E. K. Boukas, Exponential stability of singular systems with multiple time-varying delays, *Automatica*, **45.2**(2009), 539-545.

[18] J.K. Hale, S.M. Verduyn Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer, New York, 2013.

[19] L. Grujic, Finite time noninertial adaptive control, *AIAA Journal*, **15**(1977), 354-359.

[20] G. Kamenkov, On stability of motion over a finite interval of time, *Journal of Applied Math. and Mechanics*, **17** (1953), 529-540.

[21] D. Liberzon, *Switching in Systems and Control*, Boston, 2003.

[22] J.X. Lin, F. S. Min, Robust exponential admissibility of uncertain switched singular time-delay systems, *Acta Automatica Sinica*, **36**(2010), 1773-1779.

[23] Y. Lin, F. An, Finite-time control of linear discrete singular systems with disturbances, *In: Jin, D., Lin, S. (eds.) Advances in MSEC*, **1**(2011), 569–573.

[24] D.G. Luenberger, A. Arbel, Singular denamic leotief systems, Econometrica, **45**(1977), 991-995.

[25] A. Michel, D. Porter, Practical stability and finite-time stability of discontinuous systems,*IEEE Trans. Circuit Theory*, **CT-19**(1972), 123-129.

[26] E. Moulay, M. Dambrine, N. Yeganefar, W. Perruquetti, Finite-time stability and stabilization of time-delay systems, *Syst. Contr. Letters*, **57**(2008), 561-566.

[27] P. Niamsup, K. Ratchagit, V.N. Phat, Novel criteria for finite-time stabilization and guaranteed cost control of delayed neural networks,*Neurocomputing*, **160**(2015), 281-286.

[28] P. Niamsup, V.N Phat, A new result on finite-time control of singular linear time-delay systems, *Appl. Math. Letters*, **60**(1)(2016), 1-7.

[29] A. Seuret, F. Gouaisbaut, Wirtinger-based integral inequality: Application to time-delay systems,*Automatica*, **49**(2013), 2860-2866.

[30] Z.D. Sun, X. Zhao, J. Huang, Absolute exponential stability of switched nonlinear time-delay systems, *J. Frankl. Inst.*, **353**(2016), 1249- 1267.

[31] L. Weiss,E.F. Infante, Finite time stability under perturbing forces and on product spaces, *IEEE Trans. Autom. Control*, **12**(1967), 54-59.

[32] S. Xu, C. Yang, H_∞ state feedback control for discrete singular systems, *IEEE Trans. Autom. Control*, **45**(2000), 1405–1409.

[33] S. Xu, P. Van Dooren, S. Radu, J. Lam, Robust stability and stabilization for singular systems with state delay and parameter uncertainty, *IEEE Trans. Autom. Contr.*, **47**(2002), 1122-1128.

[34] F. Zhiguang, J. Lam, On reachable set estimation of singular systems, *Automatica*, **52**(2015), 146-153.

[35] F. Zhiguang, J. Lam, H. Gao, $\alpha-$dissipativity analysis of singular time-delay systems, Automatica, **47**(2011), 2548-2552.

[36] W. Zhu, L.R. Petzold, Asymptotic stability of linear delay differential-algebraic equations and numerical methods,*Appl. Numer. Math.*, **24**(1997), 247-264.