VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM
VIỆN TOÁN HỌC

Nguyễn Huyền Mười

ỔN ĐỊNH HỮU HẠN THỜI GIAN CHO HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN SUY BIẾN CÓ TRỄ

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - 2021

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM
VIỆN TOÁN HỌC

Nguyễn Huyền Mười

ỔN ĐỊNH HỮU HẠN THỜI GIAN CHO HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN SUY BIẾN CÓ TRỄ

Chuyên ngành: Phương trình vi phân và tích phân
Mã số: 9 46 01 03

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
GS. TSKH. Vũ Ngọc Phát

Hà Nội - 2021

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi, được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của GS. TSKH. Vũ Ngọc Phát. Các kết quả viết chung với tác giả khác đã được sự nhất trí của đồng tác giả khi đưa vào luận án. Các kết quả trong luận án là những kết quả mới và chưa từng được ai công bố trên bất kỳ công trình nào khác.

Tác giả luận án

Nguyễn Huyền Mười

LỜI CẢM ƠN

Luận án được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của GS.TSKH Vũ Ngọc Phát.
Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành nhất tới GS.TSKH Vũ Ngọc Phát. Thầy đã tận tụy chỉ bảo tôi từ những ngày chập chững nghiên cứu, động viên và đốc thúc tôi những khi tôi nản lòng và xao nhãng. Những khi gặp những vấn đề khó hiểu, Thầy chỉ bảo tôi bình tĩnh xem xét không được vội vàng kết luận khi chưa hiểu thấu đáo vấn đề.
Tôi xin chân thành gửi lời cảm ơn tới Viện Toán học, nơi tôi công tác đã tạo điều kiện, giúp đỡ tôi trong công việc cũng như trong thời gian làm nghiên cứu sinh. Nơi mà tôi có thể nghe, bàn, học về các chủ đề toán, các bài toán khó, cách nhìn nhận vấn đề ở bất cứ thời điểm nào với các đồng nghiệp.
Tôi xin chân thành cảm ơn những góp ý, nhận xét từ những đồng nghiệp, phản biện giúp tôi hoàn thiện luận án.
Tôi xin gửi lời cảm ơn tới gia đình tôi đã động viên tôi giúp tôi có thêm động lực hoàn thành luận án.

Mục lục

DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU **2**

MỞ ĐẦU **4**

1 CƠ SỞ TOÁN HỌC **12**

1.1 Hệ phương trình vi phân suy biến tuyến tính 12

1.1.1 Bài toán ổn định hữu hạn thời gian 15

1.1.2 Bài toán ổn định hóa hữu hạn thời gian 17

1.2 Bất đẳng thức ma trận tuyến tính 18

1.3 Một số bổ đề bổ trợ 20

2 ỔN ĐỊNH VÀ ỔN ĐỊNH HÓA HỮU HẠN THỜI GIAN CHO MỘT SỐ LỚP HỆ VI PHÂN SUY BIẾN CÓ TRỄ **22**

2.1 Ổn định hữu hạn thời gian cho hệ phương trình vi phân suy biến có trễ hằng 23

2.2 Ổn định hóa hữu hạn thời gian cho hệ phương trình vi phân suy biến có trễ biến thiên bị chặn không khả vi 31

2.3 Kết luận Chương 2 49

3 ỔN ĐỊNH VÀ ỔN ĐỊNH HÓA HỮU HẠN THỜI GIAN CHO MỘT SỐ LỚP HỆ SUY BIẾN RỜI RẠC CÓ TRỄ **50**

3.1 Tính ổn định hóa hữu hạn thời gian của hệ suy biến rời rạc có trễ . . . 50

3.2 Tính ổn định hóa hữu hạn thời gian của hệ suy biến rời rạc chuyển mạch có trễ 60

3.3 Kết luận chương 3 69

KẾT LUẬN **70**

DANH MỤC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC CỦA TÁC GIẢ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN **72**

DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU

$\mathbb{R}$ là tập các số thực.

$\mathbb{R}_+$ là tập các số thực không âm.

$\mathbb{R}^n$ là không gian Euclide n chiều.

$\mathbb{R}^{n\times r}$ là tập các ma trận thực kích thước $(n \times r)$.

$(x, y) = x^\top y$ là tích vô hướng trên $\mathbb{R}^n$, $x^\top y = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$.

$||x||$ là chuẩn Euclide của véc tơ $x \in \mathbb{R}^n$, $||x|| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$.

$C([a, b], \mathbb{R}^n)$ là không gian các hàm liên tục trên $[a, b]$ nhận giá trị trong $\mathbb{R}^n$ với chuẩn $\|x\|_C = \sup\limits_{a\le t\le b} \|x(t)\|$.

$C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ là không gian các hàm khả vi liên tục trên $[a, b]$ nhận giá trị trong $\mathbb{R}^n$ với chuẩn $\|x\|_{C^1} = \max\{\sup\limits_{a\le t\le b} \|x(t)\|, \sup\limits_{a\le t\le b} \|\dot{x}(t)\|\}$.

$C = C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$.

$C_0((a, b); \mathbb{R})$ là không gian các hàm liên tục trên (a,b) có giá compact.

$PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ không gian các hàm liên tục từng đoạn trên $[-h, 0]$.

I là ma trận đơn vị kích thước $n \times n$.

I_i là ma trận đơn vị kích thước $i \times i$.

$*$ các phần tử dưới đường chéo chính của ma trận đối xứng.

$A^\top$ là ma trận chuyển vị của ma trận A.

$\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^\top A)}$.

$\lambda(A)$ là tập các giá trị riêng của ma trận A.

$\mathrm{Re}(\lambda)$ là phần thực của số phức λ.

$\lambda_{\max}(A) := \max\{\mathrm{Re}(\lambda) : \ \lambda \in \lambda(A)\}$.

$\lambda_{\min}(A) := \min\{\mathrm{Re}(\lambda) : \ \lambda \in \lambda(A)\}$.

$\lambda_A = \lambda_{\max}(A^\top A)$.

$A \geq 0$ có nghĩa là ma trận A nửa xác định dương, nghĩa là $x^\top Ax \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

$A > 0$ có nghĩa là ma trận A xác định dương, nghĩa là $x^\top Ax > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

$L^2_{loc}([0,\infty), \mathbb{R}^n)$ là không gian các hàm bình phương khả tích địa phương trên $[0,\infty)$.

$L^2([0,\infty), \mathbb{R}^n)$ không gian các hàm bình phương khả tích trên $[0,\infty)$.

LMI– bất đẳng thức ma trận tuyến tính.

MỞ ĐẦU

Nghiên cứu tính chất định tính nghiệm của các hệ động lực học là một trong những hướng nghiên cứu quan trọng có nhiều ứng dụng trong thực tế, thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà khoa học trong và ngoài nước. Tính chất ổn định hữu hạn thời gian của hệ động lực học là một trong các tính chất quan trọng trong các tính chất định tính của hệ động lực học đảm bảo hệ động lực học có hoạt động trong định mức cho phép hay không. Khái niệm ổn định hữu hạn lần đầu tiên được đưa ra bởi nhà khoa học người Nga G. Kamenkov năm 1953 [30], do tính ứng dụng mạnh mẽ của khái niệm ổn định hữu hạn thời gian cho hệ động lực học đã được các nhà khoa học phương Tây quan tâm nghiên cứu mạnh mẽ từ những năm 1960 bởi P. Dorato [18], A. Michel [41], L. Weiss [60],... và áp dụng trong các quá trình công nghiệp và kĩ thuật [21], [25], [57], [67]. Đặc biệt khái niệm ổn định hữu hạn thời gian khác khái niệm ổn định tiệm cận do Lyapunov đưa ra. Khái niệm ổn định hữu hạn thời gian xem xét trạng thái của hệ phương trình vi phân trong khoảng thời gian hữu hạn cố định, và hệ ổn định hữu hạn thời gian có thể không ổn định tiệm cận và ngược lại hệ ổn định tiệm cận chưa chắc đã ổn định hữu hạn thời gian (xem Amato et al. [6]). Khái niệm ổn định hữu hạn cho hệ $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ với $f(t, x)$ là hàm thỏa mãn các điều kiện sao cho hệ có nghiệm duy nhất với mọi điều kiện ban đầu được phát biểu như sau:
Cho trước số $T > 0$ và hai tập hợp X_0, X_1, thì hệ $\dot{x}(t) = f(t, x),\ x(0) = x_0$ được gọi là ổn định hữu hạn thời gian theo (T, X_0, X_1) nếu

$$x_0 \in X_0 \to x(t) \in X_1, \forall t \in [0, T].$$

Thông qua việc nghiên cứu tính ổn định hữu hạn thời gian của hệ giúp chúng ta có thêm thông tin chặn trên, chặn dưới của nghiệm của hệ trong một khoảng thời gian hữu hạn. Các kết quả ban đầu về tính ổn định hữu hạn thời gian được đưa ra từ việc đánh giá trực tiếp công thức nghiệm của hệ, nhưng do hệ động lực học ngày càng phức tạp, việc mô hình hóa các hệ động lực học, robot ngày càng trở nên gần sát với thực tế hơn, kéo theo các hệ phức tạp hơn. Từ những năm 1976 trở về đây, nhờ khoa học máy tính phát triển, cùng các thuật toán tối ưu kiểm tra các điều kiện bất đẳng thức ma trận chạy trên máy tính tốt hơn đã tạo điều kiện cho phương pháp xây dựng hàm Lyapunov từ đó đánh giá được trạng thái của hệ dẫn ra các điều kiện bất đẳng thức ma trận phát triển [4], [6], [12].

Hệ phương trình vi phân suy biến (singular systems) $E\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t)$ được nghiên cứu đầu tiên bởi Weierstrass (1867) với điều kiện $|sE - A| \neq 0$, sau đó được Kronecker (1880) xem xét trường hợp $|sE - A| = 0$ hoặc E, A là các ma trận không vuông và đưa ra khái niệm chỉ số của hệ phương trình vi phân suy biến. Do tính ứng dụng cao của hệ phương trình vi phân suy biến trong nhiều ngành như: hệ động lực học, cơ học [43]; kinh tế học (Leotief dynamic model [39]), mạng lưới điện [11]... nên trong những năm gần đây nghiên cứu tính chất định tính nghiệm của hệ phương trình vi phân suy biến phát triển mạnh mẽ [6], [10], [17], [11].

Bài toán ổn định hữu hạn thời gian cho hệ phương trình vi phân suy biến còn gặp nhiều khó khăn về phương pháp và kỹ thuật:

- Bài toán tồn tại nghiệm của hệ phương trình vi phân suy biến không phải bao giờ cũng thỏa mãn, ngay cả với trường hợp hệ là tuyến tính [11], [17].
- Nghiên cứu bài toán tồn tại nghiệm và các tính chất nghiệm của hệ suy biến có trễ, có nhiễu, có xung [11], [17].
- Xây dựng các hàm Lyapunov thích hợp và tính đạo hàm của chúng để thiết lập các điều khiện đủ hữu hiệu [68], [69].

Ngoài việc quan tâm xem xét bài toán ổn định hữu hạn thời gian cho hệ phương trình vi phân suy biến và do nhu cầu ứng dụng trong lý thuyết điều khiển kỹ thuật, bài toán ổn định hóa hữu hạn thời gian cho hệ (bài toán thiết kế điều khiển phản hồi) để đảm bảo hệ đóng là ổn định hữu hạn thời gian) cũng được các nhà khoa học quan tâm do tính ứng dụng của bài toán [6], [40], [44], [45], [46].

Bài toán ổn định hữu hạn thời gian cho hệ suy biến được nhiều nhà khoa học trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu như: F. Amato, E. Moulay, S.B. Stojanovic, Y. Lin, V.N. Phát .... [7], [42], [53], [37], [44] với phương pháp hàm Lyapunov được sử dụng mạnh mẽ và các ước lượng để đưa ra các điều kiện đủ kiểm tra tính ổn định hữu hạn thời gian của hệ suy biến. Hiện nay phương pháp hàm Lyapunov vẫn là một phương pháp hữu hiệu trong nghiên cứu bài toán ổn định hệ phương trình vi phân có trễ và hệ phương trình vi phân suy biến có trễ. Ứng dụng linh hoạt phương pháp này (thiết kế các hàm Lyapunov nâng cao thích hợp) để đảm bảo các điều kiện tồn tại nghiệm và điều kiện đủ tính ổn định, ổn định hoá.

Trong bài báo [63], S. Xu và các cộng sự xét bài toán ổn định và ổn định hóa cho hệ tuyến tính liên tục suy biến với trễ hằng dạng

$$\begin{cases} E\dot{z}(t) &= (A + \triangle A)z(t) + (A_d + \triangle A_d)z(t-\tau) + (B + \triangle B)u(t), \\ z(t) &= \phi(t), t \in (\tau, 0], \end{cases} \tag{1}$$

trong đó $z(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái, $u(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ điều khiển. Các ma trận $E,\ A,\ A_d,\ B$ là các ma trận cho trước có số chiều thích hợp, $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận suy biến. Còn các đại lương $\triangle A,\ \triangle A_d,\ \triangle B$ thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} [\triangle A\ \triangle A_d\ \triangle B] = MF(\sigma)[N_A\ N_d\ N_B] \\ F(\sigma)F^{\top}(\sigma) \leq I. \end{cases}$$

Trường hợp đối với hệ tuyến tính không có điều khiển và nhiễu dạng

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-\tau) \tag{2}$$

dựa trên các phép biến đổi ma trận và đổi biến:

$$GEH = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{A} = GAH = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}, \bar{A}_d = GA_dH = \begin{pmatrix} A_{d11} & A_{d12} \\ A_{d21} & A_{d22} \end{pmatrix},$$

$$\xi(t) = \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{pmatrix} = H^{-1}x(t).$$

Hệ (2) trở thành

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) &= A_1\xi_1(t) + A_{d11}\xi_1(t-\tau) + A_{d12}\xi_2(t-\tau), \\ 0 &= \xi_2(t) + A_{d21}\xi_1(t-\tau) + A_{d22}\xi_2(t-\tau). \end{cases} \tag{3}$$

S. Xu và các cộng sự đã xây dựng lớp hàm Lyapunov thích hợp dựa trên các thành phần của véc tơ trạng thái: $\xi_1(t),\ \xi(t)$. Việc xây dựng hàm Lyapunov dựa vào các thành phần véc tơ trạng thái của hệ cảm sinh xuất phát từ tính suy biến của ma trận suy biến E đồng thời đảm bảo tồn tại nghiệm không phụ thuộc xung của hệ mà vẫn ổn định. Từ kết quả của hệ (2) S. Xu và các cộng sự đã mở rộng kết quả đối với hệ (1). Năm 2009, A. Haidar và cộng sự trong bài báo [23] xét bài toán ổn định mũ cho hệ tuyến tính liên tục suy biến với nhiều trễ biến thiên khả vi bị chặn dạng

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + \sum_{k=1}^{p} A_k x(t - d_k(t)), \\ x(t) &= \phi(t), -\bar{d} \leq t \leq 0, \end{cases}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái, $E,\ A,\ A_k$ là các ma trận hằng cho trước có số chiều thích hợp, $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận suy biến.
Các kết quả đối với hệ liên tục suy biến đa số đều tập trung vào tính ổn định tiệm cận. Đối với bài toán ổn định (và ổn định hoá) hữu hạn thời gian, năm 2001 Amato và các cộng sự [4] đã xét cho hệ tuyến tính không suy biến có nhiễu dạng :

$$\dot{x}(t) = A(p)x(t) + B(p)u(t) + G(p)w(t), x(0) = x_0, \tag{4}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái, $A(p),\ B(p),\ C(p)$ là các ma trận cho trước, hàm nhiễu $w(.)$ là bị chặn, trong đó bài toán ổn định hữu hạn thời gian được phát biểu như sau:
Với các số dương $c_1,\ c_2,\ T,\ d$ cho trước và R là ma trận xác định dương. Hệ (4) ổn định hữu hạn thời gian theo (c_1, c_2, T, R, d) với $c_2 > c_1$ và $R > 0$ nếu

$$x^\top(0)Rx(0) \le c_1 \Rightarrow x^\top(t)Rx(t) < c_2,\ \forall t \in [0, T],$$

và với mọi w thỏa mãn $w^\top w \le d$.
Các kết quả về tính ổn định hữu hạn thời gian đa số nhận được cho hệ phương trình vi phân không suy biến không có trễ hoặc có trễ hằng. Trong chương 2, chúng tôi trình bày nghiên cứu bài toán ổn định hữu hạn thời gian trong hai phần:

- Phần thứ nhất: Nghiên cứu bài toán ổn định vững hữu hạn thời gian cho hệ phương trình vi phân tuyến tính suy biến với trễ hằng dạng

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Dx(t-h) + B_1 w(t), \quad t \ge 0, \\ x(t) &= \psi(t), \quad \forall t \in [-h, 0], \end{cases} \tag{5}$$

  trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái; $E,\ A,\ D,\ B_1$ là các ma trận hằng cho trước với số chiều thích hợp; $E \in R^{n\times n}$ là ma trận suy biến; $w(t)$ là hàm nhiễu thỏa mãn điều kiện $w^\top(t)w(t) \le d$ với mọi $t \in [0, T]$. Ở đây bài toán ổn định hữu hạn thời gian cho hệ có trễ được phát biểu như sau:
  Với các số dương $c_1,\ c_2,\ T,\ d,\ c_2 > c_1$ cho trước và ma trận $R \in \mathbb{R}^n$ đối xứng xác định dương. Hệ (5) được gọi là ổn định vững hữu hạn thời gian theo (c_1, c_2, T, R) nếu

$$\max_{t\in[-h,0]} \psi^\top(t)R\psi(t) \le c_1 \Rightarrow x^\top(t)Rx(t) < c_2,\ \forall t \in [0, T],$$

  và với mọi hàm nhiễu $w(.)$ thỏa mãn $w^\top(t)w(t) \le d$.
  Bằng cách cải tiến phương pháp hàm Lyapunov (xây dựng các hàm Lyapunov thích hợp bao gồm các ma trận trọng tự do) và sử dụng các bất đẳng thức Jensen mở rộng) và sử dụng phương pháp phân tích giá trị kì dị (singular value

decomposition method -SVD), chúng tôi đề thiết lập các điều kiện đủ mới dựa trên giải các các bất đẳng thức ma trận tuyến tính (linear matrix inequalities-LMIs).

- Phần thứ hai: Mở rộng kết quả đối với hệ tuyến tính suy biến có trễ biến thiên là các hàm bị chặn và không khả vi, chúng tôi thu được quy tắc thiết kế điều khiển phản hồi và điều kiện đủ về tính ổn định hóa vững hữu hạn thời gian cho hệ:

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Dx(t-h(t)) + Bu(t) + B_1w(t), \quad t \geq 0, \\ x(t) &= \psi(t), \quad \forall t \in [-h, 0], \end{cases}$$

  với $h(t)$ là hàm trễ bị chặn $0 < h_1 \leq h(t) \leq h_2$ không khả vi.

Đồng thời với các hệ liên tục thì hệ suy biến rời rạc cũng được nhiều quan tâm nghiên cứu và xuất hiện trong nhiều mô hình xử lý tín hiệu, dữ liệu trong nhiều ngành khoa học như máy tính, xử lý tín hiệu và được nhiều nhà khoa học, kĩ sư quan tâm, nghiên cứu [5], [53]. Chúng tôi trình bày một số kết quả về bài toán ổn định - ổn định hóa hữu hạn thời gian cho hệ rời rạc không suy biến nhận được trong những năm gần đây. F. Amato (2005) và các cộng sự [5] xét bài toán ổn định hóa hữu hạn thời gian cho hệ rời rạc dạng

$$\begin{cases} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + Gw(k), \\ w(k+1) &= Fw(k), \end{cases}$$

với $x(k) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái; $A,\ B,\ G$ là các ma trận số thực hằng có số chiều phù hợp; $w(k)$ là hàm nhiễu [62]. Các tác giả đã sử dụng phương pháp hàm Lyapunov và kỹ thuật đánh giá thông qua sai phân của các hàm toàn phương đưa ra các điều kiện đủ dưới dạng các bất đẳng thức ma trận tuyến tính về tính ổn định hữu hạn thời gian.

Sau đó các kết quả này đã được mở rộng cho trường hợp hệ có trễ biến thiên bởi S.B. Stojanovic và cộng sự [37] cho bài toán ổn định hữu hạn thời gian. Năm 2000, S. Xu và cộng sự [61] đã xét bài toán điều khiển H_∞ cho hệ rời rạc suy biến không có trễ dạng

$$\begin{cases} Ex(k+1) &= Ax(k) + B_1u(k) + Bw(k), \\ z(k) &= Cx(k) + Du(k), \end{cases} \tag{6}$$

với $x(k) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái; $u(k) \in \mathbb{R}^m$ là hàm điều khiển đầu; $w(k)$ là véc tơ nhiễu; $z(k)$ là véc tơ quan sát; $E,\ A,\ B_1,\ B,\ C,\ D$ là các ma trận hằng có các số chiều phù hợp; $E \in \mathbb{R}^n$ là ma trận suy biến. Năm 2011, Y. Lin và các cộng sự [37] đã mở

rộng nghiên cứu bài toán ổn định hóa hữu hạn thời gian cho hệ rời rạc suy biến (2.53)
.

Nghiên cứu tính chất định tính của hệ rời rạc chuyển mạch cũng được quan tâm nhiều do lớp hệ này mô tả các vi điều khiển kỹ thuật số và các thiết bị nhúng xuất hiện trong quá trình sản xuất, mạng lưới thông tin liên lạc, ... [50]. Có một số các kết quả về tính ổn định Lyapunov cho hệ chuyển mạch có trễ được công bố [35], [55], [67] như: L. Zhou (2013) cùng các cộng sự [70] xét bài toán ổn định cho hệ chuyển mạch nhưng không có trễ:

$$E_{\sigma(t)}\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t),$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái; $\sigma(t) : \mathbb{R}^n \to \{1, 2, 3, \dots, p\}$ là quy tắc chuyển mạch theo thời gian; $A_i,\ E_i$ là các ma trận thực hằng và E_i là các ma trận vuông suy biến. Dựa trên xây dựng các hàm Lyapunov thỏa mãn điều kiện của quy luật chuyển mạch dạng đặc biệt tác giả đã đưa ra điều kiện đủ kiểm tra tính ổn định của hệ.

Năm 2010, J.X. Liu và các cộng sự [36] xét tính ổn định mũ phụ thuộc vào trễ cho hệ suy biến chuyển mạch dạng

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) & = (A_{\sigma(t)} + \triangle A_{\sigma(t)})x(t) + (A_{d\sigma(t)} + \triangle A_{d\sigma(t)})x(t - d(t)), \\ x(t) & = \phi(t). \end{cases}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái; $\sigma(t) : \mathbb{R}^n \to \{1, 2, 3, \dots, N\}$ là quy tắc chuyển mạch theo thời gian; $A_i,\ E$ là các ma trận thực hằng và E là ma trận vuông suy biến; $\triangle A_i,\ \triangle A_{di}$ là các ma trận chưa biết có dạng:

$$[\triangle A_i,\ \triangle A_{di}] = M_i F_i [N_{ai}\ N_{di}]$$

với M_i, N_{ai}, N_{di} là các ma trận thực hằng đã biết, F_i là ma trận thực chưa biết thỏa mãn $F_i^\top F_i \leq I$ với mọi $i = \overline{1, N}$.

Các kết quả về tính ổn định hữu hạn thời gian cho hệ chuyển mạch chủ yếu được xem xét cho các hệ chuyển mạch không suy biến như Y. Mao (2017) [40], G. Chen (2014) [15],...

Trong chương 3, chúng tôi trình bày kết quả trong hai phần:

- Phần một: Nghiên cứu bài toán ổn định - ổn định hóa vững hữu hạn thời gian cho hệ rời rạc suy biến có trễ biến thiên

$$\begin{cases} Ex(k+1) & = Ax(k) + Dx(k - h(k)) + Bw(k) + Cu(k), \quad k \in \mathbb{Z}^+, \\ x(k) & = \psi(k)\ \forall k = -h, -h+1, \dots, 0, \end{cases}$$

trong đó $x(k) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái; $u(k) \in \mathbb{R}^m$ là véc tơ điều khiển; $w(k)$ là véc tơ nhiễu thỏa mãn điều kiện $w^\top(k)w(k) \le d, \forall k = 0, 1, 2, ...N.$; E, A, D, B, C là các ma trận thực hằng có số chiều thích hợp; $E \in \mathbb{R}^n$ là ma trận suy biến; $h(k)$ là véc tơ trễ thỏa mãn $0 < h(k) \le h, \forall k = 0, 1, 2, ...$ Bài toán ổn định hữu hạn thời gian được định nghĩa trong phần này như sau:
Với các số dương $c_1, c_2, N, c_2 > c_1$ và một ma trận đối xứng xác định dương $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$, hệ không có điều khiển ($u(k) = 0$) là ổn định vững hữu hạn thời gian theo $[c_1, c_2, N, R]$ nếu hệ là chính quy, không phụ thuộc xung và thỏa mãn điều kiện

$$\max_{k\ =-h,-h+1,...0} \psi^\top(k)R\psi(k) < c_1 \Rightarrow x^\top(k)Rx(k) < c_2, \quad \forall k = 0, \dots, N.$$

Dựa trên phương pháp hàm Lyapunov và phương pháp phân tích giá trị kì dị, chúng tôi xây dựng lớp hàm Lyapunov cải tiến bao gồm một số ma trận trọng tự do và bổ đề đánh giá ma trận Jensen mở rộng, chúng tôi đề xuất các điều kiện đủ mới về tính ổn định vững hữu hạn thời gian cho hệ suy biến rời rạc có trễ biến thiên. Đồng thời chúng tôi xây dựng một luật thiết kế điều khiển phản hồi hữu hiệu đảm bảo cho tính ổn định hóa hữu hạn thời gian cho hệ đóng mà vẫn đảm bảo tính chính quy và không phụ thuộc xung của nghiệm.

- Phần hai: Nghiên cứu bài toán ổn định hữu hạn thời gian cho hệ rời rạc chuyển mạch suy biến có trễ biến thiên:

$$\begin{cases} Ex(k+1) & = A_\sigma x(k) + D_\sigma x(k-h(k)) + B_\sigma w(k) \\ & \qquad + f_\sigma(k, x(k), x(k-h(k), w(k)), \quad k \in Z^+, \\ x(k) & = \psi(k), \quad k = -h, -h+1, \dots, 0, \end{cases}$$

trong đó $x(k) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái; $\sigma : \mathbb{R}^n \to \{1, 2, \dots, p\}$ là quy tắc chuyển mạch phụ thuộc trạng thái $x(k)$; $w(k)$ là véc tơ nhiễu thỏa mãn điều kiện $w^\top(k)w(k) \le d, \forall k = 0, 1, 2, ...N.$; E, A_i, D_i, B_i, là các ma trận thực hằng có số chiều thích hợp; $E \in \mathbb{R}^n$ là ma trận suy biến; $h(k)$ là véc tơ trễ thỏa mãn

$$0 < h(k) \le h_2, \forall k = 0, 1, 2, ...$$

$f_\sigma(k, x(k), x(k-h(k), w(k))$ là các hàm thỏa mãn điều kiện:

$$\|f_i(.)\| \le a_i\|x(k)\| + b_i\|x(k-h(k))\| + m_i\|w(k)\|, \quad i = 1, 2, ..., p.$$

Dựa trên phương pháp cải tiến hàm Lyapunov và phương pháp phân tích giá trị kì dị, chúng tôi thiết kế quy tắc chuyển mạch dạng hình học đảm bảo tính ổn định hữu hạn thời gian của hệ trên.

Ngoài phần mở đầu, kết luận, danh mục các kí hiệu, danh mục các công trình khoa học của tác giả, tài liệu tham khảo, luận án gồm 3 chương như sau:
Chương 1. Cơ sở toán học.
Chương 2. Ổn định và ổn định hóa hữu hạn thời gian cho một số lớp hệ vi phân suy biến có trễ.
Chương 3. Ổn định và ổn định hóa hữu hạn thười gian cho một số lớp hệ suy biến rời rạc có trễ.

Các kết quả được trình bày trong luận án dựa trên các bài báo [1,2,3,4] trong danh mục công trình khoa học của tác giả và được báo cáo tại:

- Semina của phòng Tối ưu và Điều khiển, Viện Toán học, Hà nội.
- Hội thảo khoa học: "Một số hướng mới trong lý thuyết điều khiển và tối ưu hệ động lực" tại Tuần Châu, 21-24/7/2016.
- Hội thảo Khoa học cán bộ trẻ Viện Toán hoc - Trường ĐH Hồng Đức, Thanh Hóa, 9/2016.
- Hội thảo Khoa học NSIDE , 1–7 /7/2017, Irkutsk, Nga.
- Đại hội Toán học toàn quốc lần thứ IX, 14–18/8/ 2018.
- Hội thảo Toán học Việt-Mỹ, ĐH Qui Nhơn, 10–13/6/2019.

Chương 1

CƠ SỞ TOÁN HỌC

Trong chương này, chúng tôi trình bày cơ sở toán học về phương trình vi phân suy biến, bài toán ổn định, ổn định hữu hạn thời gian và kiến thức bổ trợ trong luận án. Nội dung trong chương này được lấy từ các tài liệu [2], [12], [67].

1.1 Hệ phương trình vi phân suy biến tuyến tính

Trong một số mô hình (robot, kinh tế,...), ngoài mối liên hệ giữa các đối tượng như vận tốc, khối lượng, nhiệt độ, gia tốc, trạng thái được biểu diễn bởi các phương trình vi phân, mô hình còn phải đảm bảo những ràng buộc đại số giữa các thành phần cấu tạo hoặc giữa các đối tượng trong mô hình đó. Từ đó ta có phương trình vi bậc nhất dạng tổng quát như sau:

$$\begin{cases} f(\dot{x}(t), x(t), u(t), t) = 0, \\ g(x(t), u(t), y(t), t) = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

trong đó $x(t)$ là véc tơ trạng thái của hệ; $u(t)$ là điều khiển đầu vào; $y(t)$ là thông tin đầu ra đo được; f và g là các hàm véc tơ của $\dot{x}(t),\ x(t),\ u(t),\ y(t)$, với số kích cỡ phù hợp.

Trong trường hợp phương trình (1.1) giải được với $\dot{x}(t)$, xét phương trình có dạng

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t),\ t \geq 0, \tag{1.2}$$

trong đó, với mỗi $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$, hàm $x_t \in C((t-h;t], \mathbb{R}^n)$, được xác định bởi $x_t(s) := x(t+s), s \in [-h, 0]$ với chuẩn được định nghĩa bởi $\|x_t\| = \sup_{s\in[-h,0]} \|x(t+s)\|$; $f(t, x_t) : D \subset \mathbb{R}^+ \times C([0, +\infty), \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$. Một hàm $x(t)$ được gọi là nghiệm của phương trình (1.2) trên $[t_0 - h, t_0 + \sigma)$ nếu tồn tại $t_0 \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ sao cho $x(t) \in C([t_0 - h, t_0 + \sigma), \mathbb{R}^n)$,

$(t, x_t) \in D$ và $x(t)$ thỏa mãn phương trình (1.2) với mọi $t \in [t_0, t_0+\sigma)$. Cho $t_0 \in \mathbb{R}, \phi \in C$, ta nói $x(t_0, \phi, f)$ là một nghiệm của phương trình (1.2) với hàm điều kiện ban đầu ϕ tại t_0 hoặc đơn giản là một nghiệm đi qua điểm (t_0, ϕ) nếu tồn tại một số $\sigma > 0$ sao cho $x(t_0, \phi, f)$ là nghiệm của hệ (1.2) trên $[t_0 - h, t_0 + \sigma)$ và $x_{t_0} = \phi$. Khi t_0 đã rõ, để cho đơn giản trong cách viết, từ nay về sau kí hiệu $x(t, \phi)$ thay cho $x(t_0, \phi, f)$.

Định lí 1.1.1. *(Định lý tồn tại nghiệm địa phương [24]) Giả sử Ω là một tập mở của $\mathbb{R} \times C$ và $f^0 \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Nếu $(t_0, \phi) \in \Omega$ thì tồn tại nghiệm của phương trình (1.2) đi qua điểm (t_0, ϕ). Tổng quát hơn, nếu $W \subset \Omega$ là tập compact và $f^0 \in C_0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ cho trước, thì tồn tại một lân cận $V \subset \Omega$ của W sao cho $f^0 \in C(V, \mathbb{R}^n)$, tồn tại một lân cận $U \subset C_0(V, \mathbb{R}^n)$ và $\alpha > 0$ sao cho với mọi $(t_0, \phi) \in W, f \in U$, tồn tại nghiệm $x(t_0, \phi, f)$ của phương trình (1.2) đi qua điểm (t_0, ϕ) tồn tại trên $[t_0 - h, t_0 + \sigma]$.*

Định lí 1.1.2. *(Định lý tồn tại duy nhất nghiệm địa phương [24]) Giả sử Ω là một tập mở của $\mathbb{R} \times C, f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ liên tục và $f(t, \phi)$ là Lipschitz theo ϕ trong mỗi tập con compact của Ω. Nếu $(t_0, \phi) \in \Omega$ thì tồn tại duy nhất nghiệm địa phương đi qua điểm (t_0, ϕ) của phương trình (1.2).*

Định lí 1.1.3. *(Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm toàn cục [24]) Cho*

$$f : [0, +\infty) \times PC([-h, 0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$$

thỏa mãn các điều kiện sau:
i) Với bất kỳ H>0, tồn tại M(H)>0 sao cho

$$\|f(t, \phi)\| \le M(H),\ (t, \phi) \in [0, +\infty) \times PC([-h, 0], \mathbb{R}^n) \text{ và } \|\phi\|_C \le H;$$

ii) Hàm $f(t, \phi)$ là hàm liên tục theo cả hai biến.
iii) Hàm $f(t, \phi)$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo biến thứ hai, tức là tồn tại hằng số Lipschitz L(H)>0 sao cho

$$\|f(t, \phi_1) - f(t, \phi_2)\| \le L(H)\|\phi_1 - \phi_2\|_C,$$

với mọi $t \ge 0, \phi_i \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n), \|\phi_i\|_C \le H, i = 1, 2.$
iv)

$$\|f(t, \phi)\| \le \eta(\|\phi\|_C),\ t \ge 0, \phi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n),$$

trong đó $\eta(r), r \in [0, +\infty)$ là hàm liên tục, không giảm và sao cho với $r_0 \ge 0$ bất kỳ điều kiện sau thỏa mãn

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{r_0}^{R} \frac{dr}{\eta(r)} = +\infty.$$

Khi đó, với $t_0 \ge 0$ và $\phi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ cho trước, hệ (1.2) có duy nhất nghiệm $x(t_0, \phi, f)$ xác định trên $[t_0 - h, +\infty)$ với điều kiện ban đầu $x_{t_0} = \phi$.

Trường hợp hệ (1.1) không giải được với đạo hàm $\dot{x}(t)$, ta xét hệ có dạng:

$$E(t)\dot{x}(t) = H(x(t), u(t), t), \tag{1.3}$$

trong đó $E(t)$ là ma trận suy biến. Hệ được mô tả như dạng (1.3) được gọi là hệ phương trình vi phân suy biến.
Nếu H là hàm tuyến tính đối với $x(t)$ và $u(t)$, thì phương trình (1.3) trở thành phương trình vi phân tuyến tính suy biến. Ví dụ hệ điều khiển tuyến tính suy biến dạng

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + f(t), \quad t \geq 0, \tag{1.4}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái; A, B là các ma trận thực hằng có chiều phù hợp; E là ma trận vuông suy biến; $u(t)$ là hàm điều khiển; $f(t)$ là hàm véc tơ phụ thuộc t.
Tiếp theo, xét hệ phương trình vi phân suy biến tuyến tính dạng:

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t), \quad t \geq 0, \tag{1.5}$$

trong đó E, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$; $E \in \mathbb{R}^n$ là ma trận suy biến : $\mathrm{rank}(E) = r$; $f(t) : R^+ \to R^n$ là hàm phi tuyến cho trước.

Định nghĩa 1.1.4. [17] (i) Hệ (1.5) được gọi là chính quy nếu cặp (E, A) là cặp ma trận chính quy theo nghĩa: $\det(sE - A)$ là đa thức không đồng nhất bằng 0.
(ii) Hệ (1.5) không phụ thuộc vào xung nếu $\deg(\det(sE - A))$=$r = \mathrm{rank}(E)$.

Chú ý 1.1.5. Nếu hệ (1.5) là chính quy và $f(t)$ là hàm khả vi với bậc phù hợp thì hệ có nghiệm với điều kiện ban đầu chấp nhận được [17].

Bổ đề 1.1.6. [17] *(E, A) là cặp ma trận chính quy nếu và chỉ nếu tồn tại hai ma trận không suy biến Q, P sao cho*

$$QEP = \mathrm{diag}(I_r, N),\ QAP = \mathrm{diag}(A_r, I_{n-r}).$$

Nếu hệ (1.5) là chính quy thì tồn tại cặp ma trận không suy biến M, G sao cho $MEG = \mathrm{diag}(I_r, N)$, $MAG = \mathrm{diag}(A_r, I_{n-r})$, N là ma trận lũy linh bậc k, tức là $N^k = 0$, $N^{k-1} \neq 0$. Chỉ số của hệ (1.5) là chỉ số k của ma trận N. Nếu hệ (1.5) có chỉ số 1, tức là $k = 1$, $N = 0$ tương đương tính chất không phụ thuộc xung và hệ (1.5) có nghiệm duy nhất không phụ thuộc xung. Bằng cách đổi biến $y(t) = G^{-1}x(t) = [y_1(t), y_2(t)]^\top$, $Mf(t) = \overline{f}(t) = [\overline{f}_1(t), \overline{f}_2(t)]^\top$ hệ (1.5) trở thành

$$\begin{cases} \dot{y_1}(t) &= A_r y_1(t) + \overline{f}_1(t), \quad t \geq 0, \\ N y_2(t) &= y_2(t) + \overline{f}_2(t). \end{cases} \tag{1.6}$$

Cùng với điều kiện $f(t)$ khả vi với bậc phù hợp thì hệ (1.6) tồn tại nghiệm nên hệ (1.5) tồn tại nghiệm [17] với công thức nghiệm của (1.6) như sau

$$\begin{cases} y_1(t) &= e^{A_r t} y_1(0) + \int_0^t e^{A_r(t-s)} \bar{f}_1(s) ds, \\ y_2(t) &= -\sum_{i=0}^{k-1} N^i \overline{f}_2^{(i)}(t), \end{cases}$$

trong đó $\overline{f}_2^{(i)}(t)$ là đạo hàm cấp i của hàm $\overline{f}_2(t)$. Ta thấy tính khả vi hoặc liên tục của $y_2(t)$ phụ thuộc vào các đạo hàm của hàm $\overline{f}_2(t)$. Nếu hệ (1.5) chính quy và không phụ thuộc xung, thì khi đó N là ma trận 0, nên nếu $f(t)$ là hàm liên tục thì $y_2(t)$ liên tục. Từ phụ thuộc xung trong trường hợp này nghĩa là nghiệm của phương trình (1.6) liên tục.

Trong trường hợp rời rạc, hệ có dạng

$$Ex(k+1) = Ax(k) + f(k), \quad k = 0, 1, 2, ...,$$

nếu (E, A) là cặp ma trận chính quy, tương tự như trên với $y(k) = G^{-1}x(k)$ ta có

$$\begin{cases} y_1(k+1) &= A_r y_1(k) + \overline{f}_1(k), \\ N y_2(k+1) &= y_2(k) + \overline{f}_2(k). \end{cases}$$

Và ta có $y_2(k) = -\sum_{i=0}^{k-1} N^i \overline{f}_2(k+i)$, nếu (E, A) không thỏa mãn điều kiện deg(det($sE-A$))=rank(E) thì khi đó $y_2(k)$ phụ thuộc giá trị $f(k+i)$ với i lớn hơn 0, tức là tại thời điểm k thì nghiệm phụ thuộc vào thời điểm tương lai $k+i$ của hàm số f, nên trong các bài báo tiếng Anh đối với hệ rời rạc thường hay dùng từ "causal" (nhân quả) thay cho từ "impulse free" (không phụ thuộc xung) khi deg(det($sE - A$))=rank(E).

1.1.1 Bài toán ổn định hữu hạn thời gian

Xét hệ

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_0, \tag{1.7}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $f(.)$ làm hàm véc tơ thỏa mãn điều kiện để (1.7) có duy nhất nghiệm.

Định nghĩa 1.1.7. [6] Cho trước thời điểm ban đầu t_0, số dương T, hai tập hợp X_0 và X_1, hệ (1.7) được gọi là ổn định hữu hạn thời gian theo (t_0, T, X_0, X_1) nếu

$$x_0 \in X_0 \Rightarrow x(t) \in X_1, \ t \in [t_0, t_0 + T]. \tag{1.8}$$

Các kết quả ban đầu với hệ tuyến tính thu được nhờ ước lượng véc tơ trạng thái dựa trên công thức nghiệm do F. Amato và các cộng sự đưa ra trong [6] như sau:
Xét hệ

$$\dot{x} = A(t)x(t),\ x(t_0) = 0, \tag{1.9}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái, $A(t) \in \mathbb{R}^n$ là hàm ma trận liên tục trên $\mathbb{R}$. Bài toán ổn định hữu hạn thời gian được phát biểu cụ thể như sau:

Định nghĩa 1.1.8. [6] Cho trước thời điểm ban đầu t_0, một số dương T, ma trận xác định dương R, một hàm ma trận xác định dương $\Gamma(.)$ trên $[t_0; t_0+T]$ sao cho $\Gamma(t_0) < R$. Hệ (1.9) ổn định hữu hạn thời gian theo $(t_0, T, R, \Gamma(.))$ nếu

$$x_0^\top R x_0 \leq 1 \Rightarrow x^\top(t)\Gamma(t)x(t) < 1,\ t \in [t_0, t_0 + T].$$

Dễ thấy $X_0 = \{x_0 : x_0^\top R x_0 \leq 1\},\ X_1 = \{x : x^\top \Gamma(.) x < 1\}$ là các ellipsoid.

Định lí 1.1.9. [6] *Các mệnh đề dưới đây là tương đương:*
i) Hệ (1.9) *là ổn định hữu hạn thời gian theo* $(t_0, T, R, \Gamma(.))$.
ii) Với mọi $t \in [t_0, t_0 + T]$,

$$\Phi(t, t_0)^\top \Gamma(t) \Phi(t, t_0) \leq R,$$

trong đó $\Phi(t, t_0)$ *là ma trận chuyển trạng thái cho hệ* (1.9).
iii) Phương trình

$$\begin{cases} -\dot{W}(t) + A(t)W(t) + W(t)A^\top(t) = 0,\ t \in [t_0, t_0 + T] \\ W(t_0) = R^{-1}, \end{cases}$$

có nghiệm là hàm ma trận xác định dương $W(.) : [t_0, t_0 + T] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ *thỏa mãn:*

$$C(t)W(t)C^\top(t) < I,\ t \in [t_0, t_0 + T],$$

với $C(.)$ *là hàm ma trận không suy biến thỏa mãn* $\Gamma(t) = C^\top C(t)$ *với mọi* $t \in [t_0, t_0 + T]$.
iv) Một trong hai bất đẳng thức sau đây đúng

$$\lambda_{\max}[C(t)W(t)C^\top(t)] < 1,$$

$$\lambda_{\min}[C^{-\top}(t)M(t)C^{-1}(t)] > 1,$$

với $W(.)$ *là nghiệm dương của hệ trong phần (iii) và* $M(.)$ *là nghiệm xác định dương của*

$$\begin{cases} \dot{M}(t) + A^\top(t)M(t) + M(t)A(t) = 0,\ t \in [t_0, t_0 + T] \\ M(t_0) = R, \end{cases}$$

với $C(.)$ là hàm ma trận không suy biến thỏa mãn $\Gamma(t) = C^\top(t)C(t)$ với $t \in [t_0, t_0+T]$.
v) Hệ

$$\begin{cases} \dot{P}(t) + A^\top(t)P(t) + P(t)A(t) < 0, \; t \in [t_0, t_0+T], \\ P(t) > \Gamma(t), \; t \in [t_0, t_0+T], \\ P(t_0) < R, \end{cases}$$

có nghiệm là ma trận đối xứng $P(.)$ liên tục từng đoạn trên $[t_0, t_0+T]$.

Đối với hệ (1.9), F. Amato đã đưa ra điều kiện cần và đủ. Nhưng khi hệ (1.9) có thêm nhiễu:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Gw(t), \; t \in [0, T], \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1.10}$$

với hàm nhiễu $w(t) \in \mathbb{R}^l$ thỏa mãn điều kiện $w^\top(t)w(t) \le d$; $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $G \in \mathbb{R}^{n\times l}$ là các ma trận thực hằng. F. Amato và các cộng sự xem xét hệ (1.10) ổn định hữu hạn thời gian theo định nghĩa cụ thể:

Định nghĩa 1.1.10. [4] Cho trước các số dương $T, c_2 > c_1 > 0$, R là ma trận đối xứng xác định dương. Hệ (1.10) ổn định hữu hạn theo (c_1, c_2, T, R, d), nếu

$$x_0^\top R x_0 < c_1 \Rightarrow x^\top(t)Rx(t) < c_2, \; \forall t \in [0, T], \; \forall w: \; w^\top(t)w(t) \le d.$$

Trong định nghĩa này X_0, X_1 được định nghĩa theo ma trận đối xứng xác định dương R và các số dương c_1, c_2. F. Amato và các cộng sự trong [4] sử dụng phương pháp hàm Lyapunov đưa ra điều kiện đủ:

Định lí 1.1.11. [4] *Hệ (1.10) là ổn định hữu hạn thời gian theo (c_1, c_2, T, R, d) nếu tồn tại một hằng số dương α, và hai ma trận đối xứng xác định dương $Q_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Q_2 \in \mathbb{R}^{l\times l}$ sao cho*

$$\begin{pmatrix} A\overline{Q_1} + \overline{Q_1}A^\top - \alpha\overline{Q_1} & GQ_2 \\ Q_2G^\top & -\alpha Q_2 \end{pmatrix} < 0,$$

$$\frac{c_1}{\lambda_{\min}(Q_1)} + \frac{d}{\lambda_{\min}(Q_2)} \le \frac{c_2 e^{-\alpha T}}{\lambda_{\max}(Q_1)},$$

với $\overline{Q_1} = R^{\frac{-1}{2}} Q_1 R^{\frac{-1}{2}}$.

1.1.2 Bài toán ổn định hóa hữu hạn thời gian

Xét hệ điều khiển được mô tả bởi phương trình

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \; t \ge 0, \tag{1.11}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái, $u(t)$ là véc tơ điều khiển, hàm f là hàm cho trước thỏa mãn điều kiện $f(t,0,0) = 0, \forall t \geq 0$. Giả sử $u \in L^2_{loc}([0,+\infty), \mathbb{R}^n)$ và với mọi $x_0 \in \mathbb{R}^n$, hệ (1.11) có nghiệm duy nhất $x(t)$ thỏa mãn điều kiện ban đầu $x(0) = x_0$ xác định trên $[0,+\infty)$.

Định nghĩa 1.1.12. [6] Hệ (1.11) được gọi là ổn định hóa hữu hạn thời gian nếu tồn tại hàm $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, h(0) = 0$, sao cho với điều khiển phản hồi $u = h(x)$, thì hệ đóng

$$\dot{x}(t) = f(x(t), h(x(t))),\ t \geq 0 \tag{1.12}$$

là ổn định hữu hạn thời gian theo (t_0, T, X_0, X_t).

Bài toán ổn định hóa hữu hạn thời gian là thiết kế điều khiển phản hồi $u(t) = h(x(t))$ để hệ ổn định hữu hạn thời gian.
Đối với hệ tuyến tính có điều khiển

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\ t \in [0,T], \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1.13}$$

với $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái; A, B là các ma trận thực hằng có chiều thích hợp; $u(t) = Kx(t) \in \mathbb{R}^m$ là điều khiển ngược. Dựa trên phương pháp hàm Lyapunov F. Amato và các cộng sự trong [6] đưa ra quy tắc thiết kế điều khiển ngược và điều kiện đủ để kiểm tra tính ổn định hữu hạn như sau:

Định lí 1.1.13. *Cho các số dương T, $c_2 > c_1 > 0$, và ma trận đối xứng xác định dương R cho trước. Giả sử tồn tại hằng số không âm, và ma trận xác định dương $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ và một ma trận $N \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sao cho*

$$\begin{aligned} &A\overline{Q} + \overline{Q}A^\top + BN + N^\top B^\top - \alpha\overline{Q} < 0, \\ &cond(Q) < \frac{c_2}{c_1} e^{\alpha T}, \end{aligned}$$

thì hệ (1.13) ổn định hóa hữu hạn thời gian theo (c_1, c_2, T, R) với điều khiển ngược $K = N\overline{Q}^{-1}$. Trong đó $\overline{Q} = R^{\frac{-1}{2}} Q R^{\frac{-1}{2}}$ và $cond(Q) = \frac{\lambda_{\max}(Q)}{\lambda_{\min}(Q)}$.

1.2 Bất đẳng thức ma trận tuyến tính

Sử dụng bất đẳng thức ma trận làm điều kiện kiểm tra tính ổn định của hệ phương trình vi phân được Lyapunov xem xét đầu tiên vào những năm 1890. Lyapunov chỉ ra rằng phương trình vi phân

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

là ổn định tiệm cận khi và chỉ khi tồn tại một ma trận một ma trận đối xứng xác định dương P sao cho

$$A^{\top}P + PA < 0.$$

Bất đẳng thức trên là một dạng của bất đẳng thức ma trận tuyến tính, và chúng ta có thể giải tường minh thông qua giải hệ các bất phương trình tuyến tính.

Định nghĩa 1.2.1. [9] Bất đẳng thức ma trận tuyến tính là biểu thức có dạng $\sum_{i=0}^{i=m} x_i A_i > 0$, trong đó $x_i \in \mathbb{R}$, $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là các ma trận đối xứng.

Khoảng năm 1940, Lur'e, Postnikov và nhiều nhà khoa học Liên Xô khác lần đầu tiên áp dụng các phương pháp của Lyapunov cho một số bài toán thực tế trong điều khiển máy móc, đặc biệt, bài toán ổn định của hệ điều khiển với một nhiễu phi tuyến. Các kết quả về ổn định của họ có dạng bất đẳng thức ma trận tuyến tính và được giải "bằng tay". Tất nhiên, các kết quả này chỉ làm được với hệ có kích cỡ nhỏ (bậc 2 hoặc 3).

Đầu thập niên 60, Yakubovich, Popov, Kalman và nhiều nhà khoa học khác đưa ra một cách tiếp cận khác trong việc giải các LMI, phương pháp hình học. Kĩ thuật này cho phép giải các hệ có kích cỡ lớn hơn, tuy nhiên cũng chỉ làm được với hệ không có nhiều hơn một nhiễu phi tuyến. Cuối những năm 60, các nhà khoa học nhận thấy các LMI tương tự có thể được giải thông qua phương trình vi phân Ricatti.

Những năm đầu thập niên 80, nhiều LMI có thể giải được bằng máy tính thông qua bài toán quy hoạch lồi. Những năm cuối thập niên 80, sự ra đời của thuật toán điểm trong cho phép giải được các LMI phát sinh trong các hệ thống có điều khiển. Năm 1984, N. Karmarkar giới thiệu một thuật toán quy hoạch tuyến tính mới, thuật toán điểm trong, cho phép giải các bài toán tuyến tính với thời gian đa thức. Các công trình của ông chủ yếu cho các bài toán toàn phương (lồi) và tuyến tính. Sau đó, năm 1988, Nesterov và Nemirovskii đã phát triển thuật toán điểm trong (thuật toán phép chiếu của Nemirovskii) và áp dụng trực tiếp để giải các bài toán lồi liên quan tới LMI.

Năm 1993, Gahinet và Nemirovskii đã phát triển một phần mềm LMILab dựa trên code FORTRAN, cho phép người sử dụng miêu tả bài toán LMI dưới dạng kí hiệu. LMI-Lab giải quyết bài toán LMI này dựa trên thuật toán phép chiếu của Nemirovskii. Sau đó, năm 1994, El Ghaoui đã phát triển một phần khác, gọi là LMI-tool được sử dụng trong Matlab. Một phiên bản khác của LMI-tool được phát triển bởi Nikoukhah và Delebecque.

Điều thuận lợi nhất cho các nhà kĩ thuật là có nhiều phương pháp số hiệu quả để xác định xem LMI là khả thi hay không. Tính khả thi thể hiện ở chỗ: liệu có tồn tại x_i sao cho $\sum_{i=0}^{i=m} x_i A_i > 0$, hoặc để giải quyết một vấn đề tối ưu lồi hóa với những hạn chế LMI. Nhiều vấn đề tối ưu hóa trong lí thuyết điều khiển, hệ thống nhận dạng, và xử lí tín hiệu có thể được xây dựng bằng cách sử dụng các bất đẳng thức ma trận tuyến tính. Để kiểm tra LMI thực thi hay không, hộp công cụ LMI trong Matlab [20] có một vai trò quan trọng. Đặc biệt, cùng với phần mềm này, các công cụ thiết kế điều khiển có thể sử dụng một cách đơn giản mà không cần phải có kiến thức nhất định về LMI hoặc thuật toán để giải LMI.

1.3 Một số bổ đề bổ trợ

Bổ đề 1.3.1. *(Bất đẳng thức Cauchy* [6]*). Giả sử $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận đối xứng và xác định dương. Khi đó ta có*

$$2x^\top Qy \leq y^\top Sy + x^\top QS^{-1}Q^\top x,$$

với mọi $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}, y \in \mathbb{R}^n$. Đặc biệt khi $Q = I$, ta có

$$2x^\top y \leq y^\top Sy + x^\top S^{-1}x.$$

Bổ đề 1.3.2. *(Bất đẳng thức tích phân Jensen* [16]*). Cho $Z \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận đối xứng và xác định dương, các hằng số $0 < h < \overline{h}$ sao cho các tích phân sau xác định. Khi đó, ta có đánh giá sau:*
$\int_{t-h}^{t} x(s)^\top Zx(s)ds \geq \frac{1}{h}\Big(\int_{t-h}^{t} x(s)ds\Big)^\top Z\Big(\int_{-\overline{h}}^{-h}\int_{t+s}^{t} x(\tau)d\tau ds\Big)$.

Bổ đề 1.3.3. *(Bổ đề Schur* [9]*). Giả sử $X_{11} = X_{11}^\top,\ X_{22} = X_{22}^\top,\ X_{21} = X_{12}^\top$ là các ma trận có số chiều thích hợp. Khi đó các điều kiện sau là tương đương*
i) $\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & -X_{22} \end{pmatrix} < 0.$
ii) $X_{22} > 0,\ X_{11} + X_{12}X_{22}^{-1}X_{21} < 0.$

Bổ đề 1.3.4. [27] *Với $\tau > 0,\ \sigma > 0,\ \gamma \in (0, 1)$ và $v(t)$ là hàm liên tục thỏa mãn*

$$0 \leq v(t) \leq \gamma \sup_{-\tau\leq s\leq 0} v(t + s) + \sigma,\ t \geq 0,$$

thì $v(t) \leq \gamma \sup_{-\tau\leq s\leq 0} v(s) + \frac{\sigma}{1-\gamma},\ t \geq 0$.

Bổ đề 1.3.5. *(Bất đẳng thức Jensen mở rộng* [52]*) Cho trước ma trận đối xứng $R > 0$ và hàm khả vi $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, ta có bất đẳng thức sau:*

$$\int_a^b \dot{\phi}^\top(u)R\dot{\phi}(u)du \geq \frac{1}{b-a}(\phi(b) - \phi(a))^\top R(\phi(b) - \phi(a)) + \frac{12}{b-a}\Omega^\top R\Omega,$$

với $\Omega = \frac{\phi(b)+\phi(a)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi(u)du$.

Bổ đề 1.3.6. [9] *Với* $x, y \in \mathbb{R}$ *và hai ma trận bất kì* A, B *có kích cỡ phù hợp và ma trận đối xứng xác định dương* N, *ta có các đánh giá sau:*
i) $2x^\top ANBy \leq x^\top ANA^\top x + y^\top B^\top NBy$.
ii) $-ANA^\top \leq A + A^\top + N^{-1}$.

Chương 2

ỔN ĐỊNH VÀ ỔN ĐỊNH HÓA HỮU HẠN THỜI GIAN CHO MỘT SỐ LỚP HỆ VI PHÂN SUY BIẾN CÓ TRỄ

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu bài toán ổn định và ổn định hóa hữu hạn thời gian cho một số lớp hệ phương trình vi phân suy biến có trễ hằng, trễ biến thiên liên tục và không khả vi. Nội dung được trình bày trong chương dựa trên hai bài báo [1], [2] trong danh mục các công trình khoa học của tác giả.
Xét hệ:

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Dx(t-h(t)) + Bu(t) + B_1w(t), \quad t \geq 0, \\ x(t) &= \psi(t), \quad \forall t \in [-h_2, 0], \end{cases} \tag{2.1}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là biến trạng thái, $u(t) \in \mathbb{R}^{m_1}$ là hàm điều khiển, $w(t) \in \mathbb{R}^{m_2}$ là hàm nhiễu; A, D, B, B_1 là các ma trận hằng số với số chiều phù hợp, $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận suy biến với rank $E = r < n$, $\psi(t)$ là hàm số điều kiện ban đầu; $h(t)$ là hàm trễ thỏa mãn điều kiện:

$$0 < h_1 \leq h(t) \leq h_2, \quad t \geq 0. \tag{2.2}$$

Nhiễu $w(t)$ là hàm liên tục thỏa mãn điều kiện

$$\exists d > 0 : \qquad w^\top(t)w(t) \leq d, \quad t \geq 0. \tag{2.3}$$

Xét hệ (2.1) với $u(t) = Kx(t)$, do rank $E = r < n$, nên tồn tại hai ma trận không suy biến M, G sao cho $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = MEG$. Đặt

$$M(A+BK)G = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{pmatrix}, MDG = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}, \ MB_1 = \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{pmatrix}.$$

Qua việc đặt ẩn phụ $y = G^{-1}x := [y_1, y_2], y_1 \in \mathbb{R}^r, y_2 \in \mathbb{R}^{n-r}$, hệ (2.1) trở thành

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) & = \bar{A}_{11}y_1(t) + \bar{A}_{12}y_2(t) + D_{11}y_1(t-h(t)) \\ & \quad +D_{12}y_2(t-h(t)) + B_{11}\omega(t), \\ 0 & = \bar{A}_{21}y_1(t) + \bar{A}_{22}y_2(t) + D_{21}y_1(t-h(t)) \\ & \quad +D_{22}y_2(t-h(t)) + B_{12}\omega(t), \\ y(t) & = G^{-1}\psi(t) := [\phi_1(t), \phi_2(t)], \quad t \in [-h_2, 0]. \end{cases} \tag{2.4}$$

2.1 Ổn định hữu hạn thời gian cho hệ phương trình vi phân suy biến có trễ hằng

Hệ phương trình vi phân suy biến có trễ xuất hiện nhiều trong các mô hình thực tế: hệ thống điện [11], mô hình kinh tế của Leotief [39],... có trễ được nghiên cứu mạnh mẽ do tính thực tiễn cao. Nghiên cứu tính chất định tính của hệ phương trình vi phân suy biến thu hút được nhiều nhà khoa học quan tâm [7], [42], [53]. Trong phần này, chúng tôi nghiên cứu hệ (2.1) với hàm điều khiển $u(t) = 0$ và $h(t) = h > 0$:

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) & = Ax(t) + Dx(t-h) + Bw(t) \ \forall t \geq 0 \\ x(t) & = \psi(t) \ \forall t \in [-h, 0], \end{cases} \tag{2.5}$$

với $\psi(t) \in C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ là điều kiện ban đầu. Tiếp theo, chúng tôi xin nhắc lại định nghĩa hệ chính quy, không phụ thuộc vào xung và ổn định vững hữu hạn thời gian từ Chương 1 đối với hệ (2.5).

Định nghĩa 2.1.1. (i) Hệ (2.5) là chính quy nếu $\det(sE - A)$ là đa thức khác 0.
(ii) Hệ (2.5) không phụ thuộc vào xung nếu deg($\det(sE - A)$)=r = rank(E).
(iii) Với các số dương $c_1, \ c_2, \ T$ thỏa mãn $c_1 < c_2, \ T > 0$ và ma trận xác định dương R. Hệ (2.5) được gọi là ổn định vững hữu hạn thời gian theo $[c_1, c_2, T, R]$ nếu và chỉ

nếu hệ (2.5) là chính quy, không phụ thuộc vào xung và thỏa mãn điều kiện

$$\text{nếu } \max_{t\in[-h,0]} \psi^\top(t)R\psi(t) < c_1 \text{ thì } x^\top(t)Rx(t) < c_2,\ t \in [0,T],$$

với mọi nhiễu $w(.)$ thỏa mãn điều kiện $w^\top(t)w(t) < d, \forall t \in [0,T]$.

Trước khi đưa ra các điều kiện đủ cho hệ (2.5) ổn định vững hữu hạn thời gian, chúng tôi sử dụng các kí hiệu như sau:

$$\begin{aligned}
&W_1 = PA + A^\top P^\top + Q_1 + Q_2\bar{M}A + A^\top\bar{M}^\top Q_2^\top - \eta PE,\\
&W_2 = PD + Q_2\bar{M}D, \bar{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ M_2 \end{pmatrix},\ G^\top PM^{-1} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix},\\
&MAG = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},\ M^{-\top}RM^{-1} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ * & R_{22} \end{pmatrix},\ b = \|A_{22}^{-1}B_2\|\sqrt{d},\\
&\alpha_1 = \frac{\lambda_{\min}(P_{11})}{\lambda_{\max}(R_{11})}, \alpha_2 = \frac{\lambda_{max}(P_{11})}{\lambda_{\min}(G^\top RG)} + h\frac{\lambda_{\max}(Q_1)}{\lambda_{\min}(R)},\\
&\alpha_3 = \frac{\alpha_2 c_1 + 2Td}{\alpha_1},\ \alpha_4 = \sum_{i=0}^{[\frac{T}{h}]} \|A_{22}^{-1}D_{22}\|^i,\\
&\alpha_5 = b\alpha_4 + \sigma\|G^{-1}\|\sqrt{\frac{c_1}{\lambda_{\min}(R)}},\ \sigma = \max_{i=1,\dots,[\frac{T}{h}]} \|A_{22}^{-1}D_{22}\|^i,\\
&\gamma = \|A_{22}^{-1}D_{21}\| + \|A_{22}^{-1}D_{22})\|,\ \beta = \lambda_{\max}(G^\top RG).
\end{aligned}$$

Định lí 2.1.2. *Với các số dương c_1, c_2, T và ma trận đối xứng xác định dương R cho trước, hệ (2.5) là chính quy và không phụ thuộc vào xung nếu tồn tại ma trận đối xứng xác định dương $Q_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ma trận khả nghịch $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ma trận $Q_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ và một số dương η sao cho*

$$PE = E^\top P^\top \geq 0, \tag{2.6}$$

$$\begin{pmatrix} W_1 & W_2 & PB & Q_2\bar{M}B \\ * & -Q_1 & 0 & 0 \\ * & * & -I & 0 \\ * & * & * & -I \end{pmatrix} < 0. \tag{2.7}$$

Hơn nữa, hệ (2.5) là ổn định vững hữu hạn thời gian theo $[c_1, c_2, T, R]$ nếu thỏa mãn thêm điều kiện

$$\frac{e^{\eta T}\alpha_3}{\lambda_{\min}(R_{11})} + \left(\alpha_5 + \gamma\alpha_4\sqrt{\frac{e^{\eta T}\alpha_3}{\lambda_{\min}(R_{11})}}\right)^2 \leq \frac{c_2}{\beta}. \tag{2.8}$$

Chứng minh. Lược đồ chứng minh:

- Bước 1. Dựa vào điều kiện (2.6) và (2.7), chứng minh hệ (2.5) là chính quy và không phụ thuộc xung.
- Bước 2. Dựa vào việc xây dựng các hàm tựa Lyapunov cùng bất đẳng thức ma trận (2.7) và điều kiện (2.8) thì hệ (2.5) là ổn định vững hữu hạn thời gian theo $[c_1, c_2, T, R]$

Bước 1. Chúng tôi chứng minh hệ (2.5) là chính quy:
Ta có: $\mathrm{rank}(E) = r < n$, nên tồn tại hai ma trận không suy biến M, G sao cho

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = MEG.$$

Đặt

$$MAG = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad G^\top P M^{-1} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix},$$

Từ (2.6) ta có được

$$\begin{aligned} G^\top PEG = G^\top PM^{-1}MEG &= \begin{pmatrix} P_{11} & 0 \\ P_{21} & 0 \end{pmatrix} \\ &= G^\top E^\top P^\top G = G^\top E^\top M^\top M^{-\top} P^\top G = \begin{pmatrix} P_{11}^\top & P_{21}^\top \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 0. \end{aligned}$$

Suy ra: $P_{21} = 0, P_{11} = P_{11}^\top \geq 0$. Do P, G, M là các ma trận không suy biến nên $G^\top PM^{-1} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ 0 & P_{22} \end{pmatrix}$ cũng là ma trận không suy biến, kéo theo $\det(P_{11}) \neq 0$, và $P_{11} > 0$. Từ bất đẳng thức ma trận (2.7) ta có:

$$\Gamma_{11} = PA + A^\top P^\top - 4E^\top Q_1 E - \eta PE < 0,$$

kết hợp với G là ma trận không suy biến, suy ra $G^\top(PA + A^\top P^\top - 4E^\top Q_1 E - \eta PE)G < 0$, và

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{111} & \Gamma_{112} \\ * & A_{22}P_{22}^\top + P_{22}A_{22}^\top \end{pmatrix} < 0.$$

Vậy $A_{22}P_{22}^\top + P_{22}A_{22}^\top < 0$, $\det(A_{22}) \neq 0$. Đặt

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} I_r & -A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} M, \quad \bar{G} = G \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21} & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Qua các phép nhân giữa các ma trận ta có các kết quả sau:

$$\bar{E} = \hat{M}E\bar{G} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \hat{A} = \hat{M}A\bar{G} = \begin{pmatrix} \hat{A}_{11} & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}.$$

$$\hat{M}(sE - A)\bar{G} = s\hat{M}E\bar{G} - \hat{M}A\bar{G} = \begin{pmatrix} sI_r - \hat{A}_{11} & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Do đó

$$\det(sE - A) = \det(\hat{M}^{-1}\hat{M}(sE - A)\bar{G}\bar{G}^{-1}) = \det(\hat{M}^{-1})\det(sI_r - A_{11})\det(\bar{G}^{-1}),$$

$$\det(sI_r - \hat{A}_{11}) = \sum_{i=0}^{r} a_i s^i, \ a_r = 1$$

và $\det(\hat{M}) \neq 0, \det(\bar{G}) \neq 0$, điều này kéo theo đa thức $\det(sE - A)$ là đa thức ẩn s khác đa thức không và hệ (2.5) là hệ chính quy. Hơn nữa ta có:

$$\deg\left(\det(sE - A)\right) = r = \operatorname{rank}(E),$$

nên hệ (2.5) là hệ không phụ thuộc vào xung.

Bước 2: Chúng tôi chứng minh hệ (2.5) ổn định vững hữu hạn thời gian.
Xét các hàm Lyapunov-Krasovskii:

$$V(t, x_t) = x^\top(t)PEx(t) + h\int_{t-h}^{t} x^\top(\tau)Q_1x(\tau)d\tau.$$

Chú ý rằng $M^{-\top}RM^{-1} > 0$, nên theo tiêu chuẩn Silvester: các ma trận con chính của ma trận đối xứng xác định dương là ma trận xác định dương nên ma trận R_{11} là ma trận xác định dương. Mặt khác, ta có:

$$\begin{aligned} G^\top E^\top REG =& G^\top E^\top M^\top M^{-\top}RM^{-1}MEG \\ =& \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$G^T PEG = \begin{pmatrix} P_{11} & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

nên

$$(GE^\top REGx, x) \geq \lambda_{\min}(R_{11})\sum_{i=1}^{r} \|x_i\|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

$$(G^\top PEGx, x) \leq \lambda_{\max}(P_{11})\sum_{i=1}^{r} ||x_i||^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

suy ra

$$([\frac{\lambda_{\max}(P_{11})}{\lambda_{\min}(R_{11})}GE^\top REG - G^\top PEG]x, x) \le 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

kéo theo

$$G^\top(PE - \frac{\lambda_{\max}(P_{11})}{\lambda_{\min}(R_{11})}E^\top RE)G \le 0.$$

Do G là ma trận không suy biến, nên $PE \le \frac{\lambda_{\max}(P_{11})}{\lambda_{\min}(R_{11})}E^\top RE$ và

$$x^\top(0)PEx(0) \le \frac{\lambda_{\max}(P_{11})}{\lambda_{\min}(R_{11})}c_1. \tag{2.11}$$

Lập luận tương tự ta có:

$$Q_1 \le \frac{\lambda_{\max}(Q_{11})}{\lambda_{\min}(R_{11})}R,$$

kéo theo

$$\int_{t-h}^t x^\top(\tau)Q_1x(\tau)d\tau \le h\frac{\lambda_{\max}(Q_1)}{\lambda_{\min}(R)}\sup_{t\in[-h,0]}\psi^\top(t)R\psi(t). \tag{2.12}$$

Từ các điều kiện (2.11)-(2.12), ta thu được

$$V(0, x_0) \le \alpha_2 \sup_{t\in[-h,0]}\psi^\top(t)R\psi(t). \tag{2.13}$$

Tiếp theo chúng tôi chứng minh

$$\alpha_1 x^\top(t)E^\top REx(t) \le V(t, x_t), \forall t \in [0, T]. \tag{2.14}$$

Thật vậy, từ (2.9), (2.10) ta thu được

$$(GE^\top REGx, x) \le \lambda_{\max}(R_{11})\sum_{i=1}^r ||x_i||^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

$$(G^\top PEGx, x) \ge \lambda_{\min}(P_{11})\sum_{i=1}^r ||x_i||^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

kéo theo

$$([\alpha_1 GE^\top REG - G^\top PEG]x, x) \le 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

suy ra

$$G^\top PEG \ge \alpha_1 G^\top E^\top REG,$$

nên

$$G^\top(PE - \alpha_1 E^\top RE)G \ge 0.$$

Nhắc lại rằng G là ma trận không suy biến, ta đạt được

$$PE \ge \alpha_1 E^\top RE.$$

Do đó,
$$V(t,x_t) \geq x^\top(t)PEx(t) \geq \alpha_1 x^\top(t)E^\top REx(t). \tag{2.15}$$
Tiếp theo lấy đạo hàm của hàm $V(x(t),t)$ dọc theo quỹ đạo nghiệm của hệ (2.5), ta thu được
$$\begin{aligned}\dot{V}(t,x_t) =& x^\top(t)(PA + A^\top P^\top)x(t) + 2x^\top(t)PDx(t-h)\\ &+ 2x^\top(t)PBw(t) + \dot{x}^\top(t)Q_1\dot{x}(t) - x^\top(t-h)Q_1x(t-h).\end{aligned} \tag{2.16}$$
Hơn nữa, khi nhân cả hai vế của hệ (2.5) với $2x(t)^\top Q_2\bar{M}$ về bên phải, ta thu được:
$$2x^\top(t)Q_2\bar{M}Ax(t) + 2x^\top(t)Q_2\bar{M}Dx(t-h) + 2x^\top(t)Q_2\bar{M}Bw(t) = 0. \tag{2.17}$$
Từ (2.16)-(2.17), ta có
$$\begin{aligned}\dot{V}(t,x_t) - \eta V(t,x_t) \leq\ & x^\top(t)(PA + A^\top P^\top - \eta PE)x(t) + 2x^\top(t)PDx(t-h)\\ &+ 2x^\top(t)PBw(t) + x^\top(t)Q_1x(t)\\ &- x(t-h)^\top Q_1x(t-h) + 2x^\top(t)Q_2\bar{M}Ax(t)\\ &+ 2x^\top(t)Q_2\bar{M}Dx(t-h) + 2x^\top(t)Q_2\bar{M}Bw(t).\end{aligned} \tag{2.18}$$
Áp dụng Bổ đề 1.3.1 (bất đẳng thức Cauchy), ta có các đánh giá sau:
$$2x^\top(t)PBw(t) - w^\top(t)w(t) \leq x^\top(t)PBB^\top Px(t),$$
$$2x^\top(t)Q_2\bar{M}Bw(t) - w^\top(t)w(t) \leq x^\top(t)Q_2\bar{M}BB^\top\bar{M}^\top Q_2^\top x(t).$$
Đặt
$$\xi(t) = [x^\top(t), x^\top(t-h)]^\top,$$
Từ (2.18), ta thu được
$$\dot{V}(t,x_t) - \eta V(t,x_t) \leq \xi^\top(t)\Phi\xi(t) + 2w^\top(t)w(t), \quad \forall t \in [0,T], \tag{2.19}$$
trong đó
$$\Phi = \begin{pmatrix}\Phi_{11} & PD + Q_2\bar{M}D\\ * & \Phi_{22}\end{pmatrix},$$
$$\Phi_{11} = PA + A^\top P^\top + PBB^\top P^\top + Q_2\bar{M}A + A^\top\bar{M}^\top Q_2^\top + Q_1 - \eta PE$$
$$\Phi_{22} = -Q_1.$$

Áp dụng Bổ đề 1.3.3 và từ điều kiện (2.7) thì $\Phi < 0$. Dẫn tới,

$$\dot{V}(t, x_t) - \eta V(t, x_t) \leq 2w^\top(t)w(t), \quad \forall t \in [0, T]. \tag{2.20}$$

Nhân cả hai vế của biểu thức (2.20) với $e^{-\eta t}$ và thực hiện tích phân hai vế từ 0 tới t, ta được:

$$\begin{aligned} e^{-\eta t}V(t, x_t) - V(0, x_0) \leq & 2\int_0^t e^{-\eta s}w^\top(s)w(s)ds \\ & \leq 2\int_0^t w^\top(s)w(s)ds, \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Kết hợp các điều kiện (2.13), (2.15) và điều kiện (2.21), ta thu được

$$x^\top(t)E^\top REx(t) < e^{\eta T}\frac{\alpha_2 c_1 + 2Td}{\alpha_1} = e^{\eta T}\alpha_3, \quad \forall t \in [0, T].$$

Kéo theo

$$\|y_1(t)\| \leq \sqrt{\frac{e^{\eta T}\alpha_3}{\lambda_{\min}(R_{11})}}, \forall t \in [0, T]. \tag{2.22}$$

Đặt

$$p(t) = -A_{22}^{-1}A_{21}y_1(t) - A_{22}^{-1}D_{21}y(t-h).$$

Do đó,

$$\begin{aligned} \|p(t)\| &\leq \|A_{22}^{-1}A_{21}\|\|y_1(t)\| + \|A_{22}^{-1}D_{21}\|\|y_1(t-h)\| \\ &\leq (\|A_{22}^{-1}A_{21}\| + \|A_{22}^{-1}D_{21}\|)\sqrt{\frac{e^{\eta T}\alpha_3}{\lambda_{\min}(R_{11})}}. \end{aligned}$$

Hơn nữa, từ phương trình thứ hai của hệ (2.4), ta thu được

$$y_2(t) = p(t) - A_{22}^{-1}D_{22}y_2(t-h) - A_{22}^{-1}B_2w(t).$$

Ta có

$$\|y_2(t)\| \leq \|p(t)\| + \|A_{22}^{-1}D_{22}\|\|y_2(t-h)\| + \|A_{22}^{-1}B_2w(t)\|, \forall t \geq 0. \tag{2.23}$$

Nếu $t \in [0, h]$ thì $t - h \in [-h, 0]$. Ta có

$$\begin{aligned} \|y_2(t)\| &\leq \|p(t)\| + \|A_{22}^{-1}D_{22}\|\|y_2(t-h)\| + \|A_{22}^{-1}B_2w(t)\| \\ &\leq \|p(t)\| + \|A_{22}^{-1}D_{22}\|\|G^{-1}\|\|\psi(t)\| + b \\ &\leq (\|A_{22}^{-1}A_{21}\| + \|A_{22}^{-1}D_{21}\|)\sqrt{\frac{e^{\eta T}\alpha_3}{\lambda_{\min}(R_{11})}} \\ &+ \|A_{22}^{-1}D_{22}\|\|G^{-1}\|\sqrt{\frac{c_1}{\lambda_{\min}(R)}} + b \\ &\leq \gamma\sqrt{\frac{e^{\eta T}\alpha_3}{\lambda_{\min}(R_{11})}} + \|A_{22}^{-1}D_{22}\|\|G^{-1}\|\sqrt{\frac{c_1}{\lambda_{\min}(R)}} + b. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Nếu $t \in [h, 2h]$ thì $t - h \in [0, h]$. Từ (2.23), (2.24) ta có:

$$\|y_2(t)\| \le (\|A_{22}^{-1}D_{22}\| + 1)\gamma\sqrt{\frac{e^{\eta T}\alpha_3}{\lambda_{\min}(R_{11})}} + \|A_{22}^{-1}D_{22}\|^2\|G^{-1}\|\sqrt{\frac{c_1}{\lambda_{\min}(R)}} + b$$
$$+ \|A_{22}^{-1}D_{22}\|b + b.$$

Tương tự như vậy với $t \in [(k-1)h, kh]$, ta có:

$$\|y_2(t)\| \le b\sum_{i=0}^{k-1}\|A_{22}^{-1}D_{22}\|^i + \|A_{22}^{-1}D_{22}\|^{k-1}\|G^{-1}\|\sqrt{\frac{c_1}{\lambda_{\min}(R)}}$$
$$+ \gamma\sqrt{\frac{e^{\eta T}\alpha_3}{\lambda_{\min}(R_{11})}}\sum_{i=0}^{k-1}\|A_{22}^{-1}D_{22}\|^i.$$

Kéo theo, với $t \in [[\frac{T}{h}]h, T]$, thì

$$\|y_2(t)\| \le b\sum_{i=0}^{[\frac{T}{h}]}\|A_{22}^{-1}D_{22}\|^i + \|A_{22}^{-1}D_{22}\|^{[\frac{T}{h}]}\|G^{-1}\|\sqrt{\frac{c_1}{\lambda_{\min}(R)}}$$
$$+ \gamma\sqrt{\frac{e^{\eta T}\alpha_3}{\lambda_{\min}(R_{11})}}\sum_{i=0}^{[\frac{T}{h}]}\|A_{22}^{-1}D_{22}\|^i.$$

Tóm lại, với $t \in [0, T]$, ta có:

$$\|y_2(t)\| \le \alpha_5 + \gamma\alpha_4\sqrt{\frac{e^{\eta T}\alpha_3}{\lambda_{\min}(R_{11})}}. \tag{2.25}$$

Tổng hợp lại, từ (2.8),(2.22) và (2.25) ta có:

$$x^\top(t)Rx(t) \le c_2.$$

□

Nhận xét 2.1.3. Định lý 2.1.2 bao gồm ba điều kiện (2.6)-(2.8) đảm bảo tính chính quy, không phụ thuộc xung và ổn định vững hữu hạn của hệ. Đầu tiên từ điều kiện (2.6),(2.7) ta chứng minh được A_{22} là khả nghịch để sử dụng A_{22}^{-1} trong điều kiện (2.8).

Nhận xét 2.1.4. Ta thấy rằng điều kiện (2.8) không phải là bất đẳng thức ma trận tuyến tính do có η, nhưng từ điều kiện $(2.6)-(2.7)$ là tuyến tính, và tìm η từ các bất đẳng thức ma trận (2.7) trước sau đó kiểm tra điều kiện (2.8).

Nhận xét 2.1.5. Nếu $E = I$ thì Định lý 2.1.2 được chuyển về các kết quả trong bài báo [7], [42].

Ví dụ 2.1. (Ổn định vững hữu hạn thời gian) Xét hệ (2.5) không có điều khiển với

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 1 & 1.8 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$d = 10^{-2}, h = 0.4, c_1 = 0.3, c_2 = 60, T = 10, \psi(t) = [t^2, t^3].$$

Bằng tính toán đại số thông thường, ta có

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, MEG = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$MAG = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.4 \\ 0.7 & 2.2 \end{bmatrix}, \bar{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Sử dụng LMI toolbox trong Matlb, cho (3.3),(3.4)với $\eta = 0.29$ ta có

$$P = \begin{bmatrix} 9.0239 & -3.0692 \\ 5.4689 & -2.4916 \end{bmatrix}, \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 1.5981 & 2.2658 \\ 2.2658 & 4.4685 \end{bmatrix}, Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1.099 \\ 0 & -0.4074 \end{bmatrix},$$

$$b = 0.0144, \alpha_1 = 1.567, \alpha_2 = 4.1072, \alpha_3 = 0.9139,$$

$$\alpha_4 = 1.291, \sigma = 0.2273, \alpha_5 = 0.2309, \gamma = 0.3182.$$

Do Định lý 2.1, hệ là ổn định vững hữu hạn thời gian theo $[0.3, 60, 10, R]$.

2.2 Ổn định hóa hữu hạn thời gian cho hệ phương trình vi phân suy biến có trễ biến thiên bị chặn không khả vi

Phần tiếp theo, chúng tôi trình bày kết quả cho hệ (2.1) trong đó hàm trễ $h(t)$ là hàm số liên tục không khả vi thỏa mãn điều kiện (2.2) với $h_1 < h_2$, $\psi(t) \in C^1([-h_2, 0], \mathbb{R}^n)$ là hàm số điều kiện ban đầu và xây dựng điều khiển ngược cùng điều kiện đủ để hệ (2.1) là ổn định hóa vững hữu hạn thời gian.

Định nghĩa 2.2.1. Hệ (2.1) là ổn định hóa vững hữu hạn thời gian theo (c_1, c_2, T, R) nếu tồn tại một điều khiển ngược $u(t) = Kx(t)$, sao cho hệ đóng

$$E\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + Dx(t - h(t)) + B_1 w(t),$$

là ổn định vững hữu hạn thời gian theo (c_1, c_2, T, R), nghĩa là

$$\max\{\sup_{t\in[-h_2,0]} \psi^\top(t)R\psi(t), \sup_{t\in[-h_2,0]} \dot{\psi}^\top(t)R\dot{\psi}(t)\} < c_1 \to x^\top(t)Rx(t) < c_2,\ t \in [0, T],$$

với mọi nhiễu $w(.)$ thỏa mãn điều kiện $w^\top(t)w(t) < d, \forall t \in [0, T]$.

Trước khi giới thiệu điều kiện đủ cho việc thiết kế điều khiển ngược đảm bảo ổn định vững hữu hạn thời gian theo (c_1, c_2, T, R), chúng tôi sử dụng một số kí hiệu sau đây trong định lý để làm đơn giản việc trình bày:

$$M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{M} = \begin{pmatrix} 0_{r\times n} \\ M_2 \end{pmatrix}, G^\top P M^{-1} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix},$$

$$M^{-\top} R M^{-1} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}, \Gamma_{25} = 2D^\top + W\hat{M},$$

$$\Gamma_{11} = AP^{-\top} + BU + P^{-1}A^\top + U^\top B^\top + B_1 B_1^\top - \eta E P^{-\top},$$

$$\Gamma_{38} = \frac{8h^2\eta}{h_1}Q,\ \Gamma_{12} = -P^{-1}A^\top D - U^\top B^\top D, \Gamma_{15} = P^{-1}A^\top + U^\top B^\top,$$

$$\Gamma_{33} = -4Q + Q_1 - \frac{4h^2\eta}{h_1}Q, \Gamma_{88} = -\frac{4h^2\eta}{h_1}Q, \alpha_2 = \frac{\lambda_{\max}(P_{11})}{\lambda_{\min}(G^\top R G)},$$

$$\Gamma_{22} = -8E^\top Q E - DD^\top - D^\top D + D^\top B_1 B_1^\top D,$$

$$\Gamma_{44} = -4Q - Q_1, \Gamma_{55} = -I + h^2 Q + B_1 B_1^\top, \Gamma_{66} = \Gamma_{77} = -12Q - h\eta Q_1,$$

$$\Gamma_{89} = \frac{24h^2\eta}{h_1}, \Gamma_{99} = -\frac{96h^2\eta}{3h_1}Q, h = h_2 - h_1, \alpha_1 = \frac{\lambda_{\min}(P_{11})}{\lambda_{\max}(R_{11})},$$

$$b_1 = \Big(\frac{h(h_2^2 - h_1^2)}{2\lambda_{\min}(R)}\lambda_{\max}(E^\top Q E) + \frac{h\lambda_{\max}(E^\top Q_1 E)}{\lambda_{\min}(R)}\Big),$$

$$\alpha_3 = \frac{(\alpha_2 + b_1)c_1 + 3Td}{\alpha_1}, \beta = \max\{\sqrt{\frac{\alpha_3}{\lambda_{\min}(R_{11})}}, \frac{\|G^{-1}\|\sqrt{c_1}}{\sqrt{\lambda_{\min}(R)}}\},$$

$$\gamma_1 = \|\bar{A}_{22}^{-1}\bar{A}_{21}\| + \|\bar{A}_{22}^{-1}D_{21}\|, \gamma_2 = \|\bar{A}_{22}^{-1}D_{22}\|, \gamma_3 = \|\bar{A}_{22}^{-1}B_{12}\|\sqrt{d},$$

$$\gamma_4 = \beta e^{0.5\eta T}, a_1 = 2\beta\frac{\gamma_1\gamma_2}{1-\gamma_2}\|G^{-1}\|\sqrt{\frac{c_1}{\lambda_{\min}(R)}}, a_3 = \frac{1-\gamma_2}{\beta^2(1-\gamma_2+\gamma_1)},$$

$$a_2 = \frac{c_2}{\lambda_{\max}(GRG)} - \Big(\frac{\gamma_3}{1-\gamma_2} + \gamma_2\|G^{-1}\|\sqrt{\frac{c_1}{\lambda_{\min}(R)}}\Big)^2.$$

Định lí 2.2.2. *Hệ* (2.1) *là ổn định hóa vững hữu hạn thời gian theo* $(c_1, c_2, T, \mathbb{R})$ *nếu tồn tại các ma trận đối xứng xác định dương* $Q, Q_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$*, ma trận không suy biến* $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$*, các ma trận* $W \in \mathbb{R}^{n\times n}, U \in \mathbb{R}^{m_1\times n}$*, số dương* $\eta > 0$ *sao cho* $\|\bar{A}_{22}^{-1}D_{22}\| < 1$ *và thỏa mãn các bất đẳng thức sau:*

$$PE = E^\top P^\top \geq 0, \tag{2.26}$$

$$\begin{pmatrix}
\Gamma_{11} & \Gamma_{12} & 0 & 0 & \Gamma_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & \Gamma_{22} & -2E^\top Q & -2E^\top Q & \Gamma_{25} & 6E^\top Q & 6E^\top Q & 0 & 0 \\
* & * & \Gamma_{33} & 0 & 0 & 0 & 6Q & \Gamma_{38} & 0 \\
* & * & * & \Gamma_{44} & 0 & 6Q & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & \Gamma_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & \Gamma_{66} & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & \Gamma_{77} & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & \Gamma_{88} & \Gamma_{89} \\
* & * & * & * & * & * & * & * & \Gamma_{99}
\end{pmatrix} < 0 \tag{2.27}$$

$$\begin{pmatrix}
a_1 e^{0.5\eta T} - a_2 & e^{0.5\eta T} \\
e^{0.5\eta T} & -a_3
\end{pmatrix} \leq 0. \tag{2.28}$$

Ngoài ra, điều khiển ngược được thiết kế với luật: $u(t) = UP^\top x(t)$.

Chứng minh. Lược đồ chứng minh: Chứng minh định lý gồm ba bước.

Bước 1: Chứng minh hệ đóng là hệ chính quy và không phụ thuộc vào xung.

Bước 2: Xây dựng hàm Lyapunov- Krasovskii $V(t, x_t)$ và ước lượng $\dot{V}(t, x_t)$

Bước 3: Thông qua ước lượng $\dot{V}(t, x_t)$ chúng tôi ước lượng được $x^\top(t)x(t)$ từ đó chỉ ra luật điều khiển ngược đảm bảo hệ ổn định hóa vững theo (c_1, c_2, T, R).

1. Chính quy và không phụ thuộc xung. Trước hết, chúng tôi chứng minh hệ (2.1) với điều khiển ngược là chính quy và không phụ thuộc vào xung. Từ điều kiện (2.26), ta có:

$$\begin{aligned}
G^\top PEG = G^\top PM^{-1}MEG &= \begin{pmatrix} P_{11} & 0_{r\times(n-r)} \\ P_{21} & 0_{(n-r)\times(n-r)} \end{pmatrix} \\
&= G^\top E^\top P^\top G = G^\top E^\top M^\top M^{-1^\top} P^\top G \\
&= \begin{pmatrix} P_{11}^\top & P_{21}^\top \\ 0_{(n-r)\times r} & 0_{(n-r)\times(n-r)} \end{pmatrix} \geq 0.
\end{aligned}$$

Kéo theo, $P_{21} = 0, P_{11} = P_{11}^\top \geq 0$. Do P là ma trận không suy biến, nên

$$G^\top P M^{-1} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ 0_{(n-r)\times r} & P_{22} \end{pmatrix}$$

là ma trận không suy biến, ta có $\det(P_{11}) \neq 0$, kéo theo $P_{11} > 0$. Từ $\Gamma < 0$ và áp dụng Bổ đề 1.3.3, ta đạt được $\Gamma_{11} < 0$, nghĩa là

$$AP^{-\top} + BU + P^{-1}A^\top + U^\top B^\top + B_1 B_1^\top - \eta E P^{-\top} < 0. \tag{2.29}$$

Thay $U = KP^{-\top}$ vào (2.29) thu được

$$(A + BK)P^{-\top} + P^{-1}(A + BK)^\top + B_1 B_1^\top - \eta E P^{-\top} < 0. \tag{2.30}$$

Lại có các ma trận P, G là các ma trận không suy biến và $B_1 B_1^\top \geq 0$, ta có

$$\begin{aligned} G^\top P \Gamma_{11} P^\top G &= G^\top P(A + BK)G + G^\top (A + BK)^\top P^\top G - \eta G^\top P E G. \\ &\geq G^\top P M^{-1} M(A + BK)G + G^\top (A + BK)^\top M^\top M^{-\top} P^\top G \\ &\qquad - \eta G^\top P M^{-1} M E G \\ &\geq \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}^\top \\ &\qquad - \eta \begin{pmatrix} P_{11} & 0_{r\times(n-r)} \\ P_{21} & 0_{(n-r)\times(n-r)} \end{pmatrix} \\ &\geq \begin{pmatrix} Y_{11} & P_{11}\bar{A}_{12} + \bar{A}_{12}\bar{A}_{22} + \bar{A}_{21}^\top P_{22}^\top - \eta P_{21}^\top \\ * & \bar{A}_{22}^\top P_{22}^\top + P_{22}\bar{A}_{22} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

với $Y_{11} := P_{11}\bar{A}_{11} + P_{12}\bar{A}_{21} + \bar{A}_{11}^\top P_{11}^\top + \bar{A}_{21}^\top P_{12}^\top - \eta P_{11}$. Do vậy, $\det(\bar{A}_{22}) \neq 0$.
Đặt

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} I_r & -\bar{A}_{12}\bar{A}_{22}^{-1} \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} M, \quad \bar{G} = G \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ -\bar{A}_{22}^{-1}\bar{A}_{21} & \bar{A}_{22}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Ta dễ dàng kiểm tra được:

$$\bar{E} = \hat{M} E \bar{G} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \hat{A} = \hat{M}(A + BK)\bar{G} = \begin{pmatrix} \hat{A}_{11} & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix},$$

$$\hat{M}(sE - (A + BK))\bar{G} = s\hat{M}E\bar{G} - \hat{M}(A + BK)\bar{G} = \begin{pmatrix} sI_r - \hat{A}_{11} & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Do vậy

$$\begin{aligned}\det(sE-(A+BK)) &= \det(\hat{M}^{-1}\hat{M}(sE-(A+BK))\bar{G}\bar{G}^{-1})\\ &= \det(\hat{M}^{-1})\det(sI_r-\hat{A}_{11})\det(\bar{G}^{-1}).\end{aligned}$$

Hơn nữa, chú ý rằng $\det(sI_r-\hat{A}_{11})=\sum_{i=0}^{r}a_is^i,\ a_r=1$, và $\det(\hat{M})\neq 0, \det(\bar{G})\neq 0$ do tính chất không suy biến của $\hat{M}$ và $\bar{G}$, nên đa thức $\det(sE-(A+BK))$ là đa thức khác 0 và

$$\deg\left(\det(sE-(A+BK))\right)=r=\operatorname{rank}(E),$$

điều đó kéo theo hệ (2.1) là hệ chính quy và không phụ thuộc xung với luật điều khiển $u(t)=Kx(t)$.

2. Hệ ổn định vững hữu hạn thời gian. Xét hàm toàn phương không âm sau: $V(t,x_t)=\sum_{i=1}^{3}V_i(t,x_t)$, với

$$\begin{aligned}V_1(t,x_t) &= x^\top(t)PEx(t),\\ V_2(t,x_t) &= \int_{t-h_2}^{t-h_1}x^\top(s)E^\top Q_1Ex(s)ds\\ V_3(t,x_t) &= h\int_{-h_2}^{-h_1}\int_{t+s}^{t}\dot{x}^\top(\tau)E^\top QE\dot{x}(\tau)d\tau ds.\end{aligned}$$

Chú ý rằng

$$\begin{aligned}G^\top E^\top REG &= G^\top E^\top M^\top M^{-\top}RM^{-1}MEG\\ &= \begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}R_{11} & R_{12}\\ R_{21} & R_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R_{11} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{2.31}$$

$$\begin{aligned}G^\top PEG &= G^\top PM^{-1}MEG\\ &= \begin{pmatrix}P_{11} & P_{21}\\ 0 & P_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_{11} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Từ $M^{-\top}RM^{-1}>0$, qua tiêu chuẩn Silvester đối với các ma trận xác định dương thì ma trận R_{11} là ma trận xác định dương, ta có được

$$\begin{aligned}(G^\top E^\top REGx,x) &\geq \lambda_{\min}(R_{11})\sum_{i=1}^{r}||x_i||^2, \quad \forall x\in\mathbb{R}^n.\\ (G^\top RGx,x) &\geq \lambda_{\min}(G^\top RG)\sum_{i=1}^{n}||x_i||^2, \quad \forall x\in\mathbb{R}^n.\\ (G^\top PEGx,x) &\leq \lambda_{\max}(P_{11})\sum_{i=1}^{r}||x_i||^2, \quad \forall x\in\mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Hơn nữa,
$$\Big([\frac{\lambda_{\max}(P_{11})}{\lambda_{\min}(G^\top RG)}GRG - G^\top PEG]x, x\Big) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$
kéo theo
$$G^\top(PE - \frac{\lambda_{\max}(P_{11})}{\lambda_{\min}(G^\top RG)}R)G \leq 0.$$
Do G là ma trận không suy biến, nên $PE \leq \frac{\lambda_{\max}(P_{11})}{\lambda_{\min}(G^\top RG)}R$, do vậy
$$x^\top(0)PEx(0) \leq \frac{\lambda_{\max}(P_{11})}{\lambda_{\min}(G^\top RG)} \sup_{t\in[-h_2,0]} \psi^\top(t)R\psi(t). \tag{2.32}$$
Mặt khác, ta có
$$\begin{aligned} h\int_{-h_2}^{h_1}\int_s^0 \dot{x}^\top(\tau)E^\top QE\dot{x}(\tau)d\tau ds &\leq \frac{h(h_2^2-h_1^2)}{2}\lambda_{\max}(E^\top QE)||\psi||^2 \\ &\leq \frac{h(h_2^2-h_1^2)}{2\lambda_{\min}(R)}\lambda_{\max}(E^\top QE)c_1, \qquad (2.33) \\ \int_{-h_2}^{-h_1} x^\top(s)E^\top QEx(s)ds &\leq h\lambda_{\max}(E^\top Q_1E)\|\psi(t)\|^2 \\ &\leq \frac{h\lambda_{\max}(E^\top Q_1E)\|\psi(t)\|^2}{\lambda_{\min}(R)}c_1. \qquad (2.34) \end{aligned}$$
Kết hợp các điều kiện từ (2.32) tới (2.34) ta được
$$V(0, x_0) \leq (\alpha_2 + b_1)c_1. \tag{2.35}$$
2.1 Ước lượng cận dưới của hàm $V(t, x_t)$. Trước hết, ta có
$$\alpha_1 x^\top(t)E^\top REx(t) \leq V(t, x_t), \quad \forall t \in [0, T]. \tag{2.36}$$
Thật vậy, từ (2.31) ta có:
$$(GE^\top REGx, x) \leq \lambda_{\max}(R_{11})\sum_{i=1}^r ||x_i||^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$
$$(G^\top PEGx, x) \geq \lambda_{\min}(P_{11})\sum_{i=1}^r ||x_i||^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$
kéo theo
$$([\alpha_1 GE^\top REG - G^\top PEG]x, x) \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$
ta thu được
$$G^\top(PE - \alpha_1 E^\top RE)G \geq 0.$$
Từ G là ma trận không suy biến, ta thu được $PE \geq \alpha_1 E^\top RE$, và
$$V(t, x_t) \geq x^\top(t)PEx(t) \geq \alpha_1 x^\top(t)E^\top REx(t).$$

2.2. Ước lượng cận trên của hàm $V(t,x_t)$. Đạo hàm các hàm $V_i(.)$, ta có

$$\begin{aligned}\dot V_1(.) &= x^\top(t)(P\bar A + \bar A^\top P^\top)x(t) + 2x^\top(t)PDx(t-h(t))\\ &\quad + 2x^\top(t)PB_1w(t), \qquad (2.37)\\ \dot V_2(.) &= x^\top(t-h_1)E^\top Q_1 Ex(t-h_1)\\ &\quad - x^\top(t-h_2)E^\top Q_1Ex(t-h_2), \qquad (2.38)\\ \dot V_3(.) &= h^2\dot x^\top(t)E^\top QE\dot x(t) - h\int_{t-h_2}^{t-h_1}\dot x^\top(s)E^\top QE\dot x(s)ds\\ &= h^2\dot x^\top(t)E^\top QE\dot x(t) - h\int_{t-h_2}^{t-h(t)}\dot x^\top(s)E^\top QE\dot x(s)ds\\ &\quad - h\int_{t-h(t)}^{t-h_1}\dot x^\top(s)E^\top QE\dot x(s)ds. \qquad (2.39)\end{aligned}$$

Để ước lượng $\dot V_3(.), -\eta V_2(.), -\eta V_3(.)$, ta xét ba trường hợp:
a) Trường hợp 1: Với t sao cho $h_1 < h(t) < h_2$. Áp dụng Bổ đề 1.3.5 cho các biểu thức sau:

$$\begin{aligned}-h\int_{t-h_2}^{t-h(t)}\dot x^\top(s)E^\top QE\dot x(s)ds &\le -4x(t-h(t))^\top E^\top QEx(t-h(t))\\ &\quad - 4x(t-h_2)^\top E^\top QEx(t-h_2) - 4x(t-h(t))^\top E^\top QEx(t-h_2)\\ &\quad + \frac{12}{h_2-h(t)}x(t-h(t))^\top E^\top QE\int_{t-h_2}^{t-h(t)}x(s)ds\\ &\quad + \frac{12}{h_2-h(t)}x(t-h_2)^\top E^\top QE\int_{t-h_2}^{t-h(t)}x(s)ds\\ &\quad - \frac{12}{(h_2-h(t))^2}\int_{t-h_2}^{t-h(t)}x(s)^\top dsE^\top QE\int_{t-h_2}^{t-h(t)}x(s)ds, \qquad (2.40)\\ -h\int_{t-h(t)}^{t-h_1}\dot x^\top(s)E^\top QE\dot x(s)ds &\le -4x(t-h(t))^\top E^\top QEx(t-h(t))\\ &\quad - 4x(t-h_1)^\top E^\top QEx(t-h_1) - 4x(t-h(t))^\top E^\top QEx(t-h_1)\\ &\quad + \frac{12}{h(t)-h_1}x(t-h(t))^\top E^\top QE\int_{t-h(t)}^{t-h_1}x(s)ds\\ &\quad + \frac{12}{h(t)-h_1}x(t-h_1)^\top E^\top QE\int_{t-h(t)}^{t-h_1}x(s)ds\\ &\quad - \frac{12}{(h(t)-h_1)^2}\int_{t-h(t)}^{t-h_1}x(s)^\top dsE^\top QE\int_{t-h(t)}^{t-h_1}x(s)ds, \qquad (2.41)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
-\eta V_2 =& -\eta \int_{t-h_2}^{t-h_1} x^\top(s)E^\top Q_1 Ex(s)ds \\
=& -\eta\Big(\int_{t-h_2}^{t-h(t)} x^\top(s)E^\top Q_1 Ex(s)ds + \int_{t-h(t)}^{t-h_1} x^\top(s)E^\top Q_1 Ex(s)ds\Big) \\
\leq& -\eta h\Big(\frac{1}{h_2-h(t)} \int_{t-h_2}^{t-h(t)} x^\top(s)E^\top Q_1 Ex(s)ds \\
&+ \frac{1}{h(t)-h_1} \int_{t-h(t)}^{t-h_1} x^\top(s)E^\top Q_1 Ex(s)ds\Big) \\
\leq& -h\eta\Big(\frac{1}{(h(t)-h_1)^2}(\int_{t-h(t)}^{t-h_1} Ex(s)ds)^\top Q_1 \int_{t-h(t)}^{t-h_1} Ex(s)ds \\
&+ \frac{1}{(h_2-h(t))^2}(\int_{t-h_2}^{t-h(t)} Ex(s)ds)^\top Q_1 \int_{t-h_2}^{t-h(t)} Ex(s)ds\Big), \qquad (2.42) \\
-\eta V_3 =& -\frac{\eta}{3}V_3 - \frac{2\eta}{3}V_3 \\
=& -\frac{\eta}{3}h \int_{-h_2}^{-h_1} \int_{t+s}^{t} \dot{x}^\top(\tau)E^\top QE\dot{x}(\tau)d\tau ds \\
&- \frac{2\eta}{3}h \int_{-h_2}^{-h_1} \int_{t+s}^{t} \dot{x}^\top(\tau)E^\top QE\dot{x}(\tau)d\tau ds \\
\leq& -\frac{\eta}{3}h \int_{-h_2}^{-h_1} \int_{t+s}^{t-\frac{h_1}{2}} \dot{x}^\top(\tau)E^\top QE\dot{x}(\tau)d\tau ds \\
&- \frac{2\eta}{3}h \int_{-h_2}^{-h_1} \int_{t+s}^{t-\frac{h_1}{2}} \dot{x}^\top(\tau)E^\top QE\dot{x}(\tau)d\tau ds,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{\eta}{3}h \int_{-h_2}^{-h_1} \int_{t+s}^{t-\frac{h_1}{2}} \dot{x}^\top(\tau)E^\top QE\dot{x}(\tau)d\tau ds & \\
\leq -\frac{\eta}{3}h \int_{-h_2}^{-h_1} \int_{t-h_1}^{t-\frac{h_1}{2}} \dot{x}^\top(\tau)E^\top QE\dot{x}(\tau)d\tau ds & \\
\leq \frac{2h^2\eta}{3h_1}\Big[-4x(t-\frac{h_1}{2})^\top E^\top QEx(t-\frac{h_1}{2}) & \\
-4x(t-h_1)^\top E^\top QEx(t-h_1) & \\
-4x(t-\frac{h_1}{2})^\top E^\top QEx(t-h_1) & \\
+\frac{24}{h_1}x(t-\frac{h_1}{2})^\top E^\top QE \int_{t-h_1}^{t-\frac{h_1}{2}} x(s)ds & \\
+\frac{24}{h_1}x(t-h_1)^\top E^\top QE \int_{t-h_1}^{t-\frac{h_1}{2}} x(s)ds & \\
-\frac{48}{h_1^2} \int_{t-h_1}^{t-\frac{h_1}{2}} x(s)^\top ds E^\top QE \int_{t-h_1}^{t-\frac{h_1}{2}} x(s)ds\Big], & \qquad (2.43)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{2\eta}{3}h\int_{-h_2}^{-h_1}\int_{t+s}^{t}\dot{x}^\top(\tau)E^\top QE\dot{x}(\tau)d\tau ds\\
&\leq -\frac{2\eta}{3}h\int_{-h_2}^{-h_1}\int_{t-h_1}^{t-\frac{h_1}{2}}\dot{x}^\top(\tau)E^\top QE\dot{x}(\tau)d\tau ds\\
&\leq \frac{4h^2\eta}{3h_1}\Big[-x(t-\frac{h_1}{2})^\top E^\top QEx(t-\frac{h_1}{2})\\
&-x(t-h_1)^\top E^\top QEx(t-h_1)\\
&\quad +2x(t-\frac{h_1}{2})^\top E^\top QEx(t-h_1)\Big]. \qquad (2.44)
\end{aligned}
$$

Từ (2.37)-(2.44), ta thu được

$$
\begin{aligned}
\dot{V}_3(.) \leq& h^2\dot{x}^\top(t)E^\top QE\dot{x}(t)-8x(t-h(t))^\top E^\top QEx(t-h(t))\\
&-4x(t-h_2)^\top E^\top QEx(t-h_2)-4x(t-h(t))^\top E^\top QEx(t-h_2)\\
&+\frac{12}{h_2-h(t)}x(t-h(t))^\top E^\top QE\int_{t-h_2}^{t-h(t)}x(s)ds\\
&+\frac{12}{h_2-h(t)}x(t-h_2)^\top E^\top QE\int_{t-h_2}^{t-h(t)}x(s)ds\\
&-\frac{12}{(h_2-h(t))^2}\int_{t-h_2}^{t-h(t)}x(s)^\top dsE^\top QE\int_{t-h_2}^{t-h(t)}x(s)ds\\
&-4x(t-h_1)^\top E^\top QEx(t-h_1)-4x(t-h(t))^\top E^\top QEx(t-h_1)\\
&+\frac{12}{h(t)-h_1}x(t-h(t))^\top E^\top QE\int_{t-h(t)}^{t-h_1}x(s)ds\\
&+\frac{12}{h(t)-h_1}x(t-h_1)^\top E^\top QE\int_{t-h(t)}^{t-h_1}x(s)ds\\
&-\frac{12}{(h(t)-h_1)^2}\int_{t-h(t)}^{t-h_1}x(s)^\top dsE^\top QE\int_{t-h(t)}^{t-h_1}x(s)ds \qquad (2.45)\\
-\eta V_3(.) \leq& \frac{2h^2\eta}{3h_1}\Big[-6x(t-\frac{h_1}{2})^\top E^\top QEx(t-\frac{h_1}{2})-6x(t-h_1)^\top E^\top QEx(t-h_1)\\
&+\frac{24}{h_1}x(t-\frac{h_1}{2})^\top E^\top QE\int_{t-h_1}^{t-\frac{h_1}{2}}x(s)ds\\
&+\frac{24}{h_1}x(t-h_1)^\top E^\top QE\int_{t-h_1}^{t-\frac{h_1}{2}}x(s)ds\\
&-\frac{48}{h_1^2}\int_{t-h_1}^{t-\frac{h_1}{2}}x(s)^\top dsE^\top QE\int_{t-h_1}^{t-\frac{h_1}{2}}x(s)ds\Big]. \qquad (2.46)
\end{aligned}
$$

Với $\bar{M} = \begin{pmatrix} 0_{r\times n} \\ M_2 \end{pmatrix}$, ta có:

$$2x^\top(t-h(t))W\bar{M}E\dot{x}(t) = 0. \tag{2.47}$$

Nhân cả hai vế của phương trình (2.5) về bên phải với $2\dot{x}(t)^\top E^\top, 2x^\top(t-h(t))D^\top$, ta thu được:

$$\begin{aligned}
&2\dot{x}(t)^\top E^\top\Big(-E\dot{x}(t) + (A+BK)x(t) + Dx(t-h(t)) + B_1w(t)\Big) = 0,\\
&2x^\top(t-h(t))D^\top\Big(E\dot{x}(t) - (A+BK)x(t) - Dx(t-h(t)) - B_1w(t)\Big) = 0.
\end{aligned}$$

Áp dụng Bổ đề 1.3.1 ta có

$$2\dot{x}^\top(t)E^\top B_1w(t) - w^\top(t)w(t) \le \dot{x}^\top(t)E^\top B_1B_1^\top E\dot{x}(t), \tag{2.48}$$

$$\begin{aligned}
&-2x^\top(t-h(t))D^\top B_1w(t) - w^\top(t)w(t)\\
&\qquad \le x^\top(t-h(t))D^\top B_1B_1^\top Dx(t-h(t)),
\end{aligned} \tag{2.49}$$

$$-2x^\top(t)PB_1w(t) - w^\top(t)w(t) \le x^\top(t)PB_1B_1^\top P^\top x(t), \tag{2.50}$$

Kết hợp các điều kiện (2.37), (2.38), (2.39), (2.40)-(2.50) ta có:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(.) - \eta V(.) \le & 2x^\top(t)P\Big((A+BK)x(t) + Dx(t-h(t)) + B_1w(t)\Big)\\
&+ h^2\dot{x}^\top(t)E^\top QE\dot{x}(t) - 4x(t-h(t))^\top E^\top QEx(t-h(t))\\
&- 4x(t-h_2)^\top E^\top QEx(t-h_2)\\
&- 4x(t-h(t))^\top E^\top QEx(t-h_2)\\
&+ \frac{12}{h_2-h(t)}x(t-h(t))^\top E^\top QE\int_{t-h_2}^{t-h(t)} x(s)ds\\
&+ \frac{12}{h_2-h(t)}x(t-h_2)^\top E^\top QE\int_{t-h_2}^{t-h(t)} x(s)ds\\
&- \frac{12}{(h_2-h(t))^2}\int_{t-h_2}^{t-h(t)} x(s)^\top ds E^\top QE\int_{t-h_2}^{t-h(t)} x(s)ds\\
&- 4x(t-h(t))^\top E^\top QEx(t-h(t))\\
&- 4x(t-h_1)^\top E^\top QEx(t-h_1)\\
&- 4x(t-h(t))^\top E^\top QEx(t-h_1)\\
&+ \frac{12}{h(t)-h_1}x(t-h(t))^\top E^\top QE\int_{t-h(t)}^{t-h_1} x(s)ds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{12}{h(t)-h_1}x(t-h_1)^\top E^\top QE\int_{t-h(t)}^{t-h_1}x(s)ds\\
&-\frac{12}{(h(t)-h_1)^2}\int_{t-h(t)}^{t-h_1}x(s)^\top dsE^\top QE\int_{t-h(t)}^{t-h_1}x(s)ds\\
&+x^\top(t-h_1)E^\top Q_1Ex(t-h_1)-x^\top(t-h_2)E^\top Q_1Ex(t-h_2)\\
&+2\dot{x}(t)^\top E^\top\Big(-E\dot{x}(t)+(A+BK)x(t)\\
&+Dx(t-h(t))+B_1w(t)\Big)\\
&+2x^\top(t-h(t)D^\top\Big(E\dot{x}(t)-(A+BK)x(t)\\
&-Dx(t-h(t))-B_1w(t)\Big)\\
&+2x^\top(t-h(t))W\hat{M}E\dot{x}(t)-\eta x^\top(t)PEx(t)\\
&+\frac{2h^2\eta}{3h_1}\Big[-6x(t-\frac{h_1}{2})^\top E^\top QEx(t-\frac{h_1}{2})\\
&-6x(t-h_1)^\top E^\top QEx(t-h_1)\\
&+\frac{24}{h_1}x(t-\frac{h_1}{2})^\top E^\top QE\int_{t-h_1}^{t-\frac{h_1}{2}}x(s)ds\\
&+\frac{24}{h_1}x(t-h_1)^\top E^\top QE\int_{t-h_1}^{t-\frac{h_1}{2}}x(s)ds\\
&-\frac{48}{h_1^2}\int_{t-h_1}^{t-\frac{h_1}{2}}x(s)^\top dsE^\top QE\int_{t-h_1}^{t-\frac{h_1}{2}}x(s)ds\Big]\\
&-h\eta\Big[\frac{1}{(h(t)-h_1)^2}(\int_{t-h(t)}^{t-h_1}Ex(s)ds)^\top Q\int_{t-h(t)}^{t-h_1}Ex(s)ds\\
&+\frac{1}{(h_2-h(t))^2}(\int_{t-h_2}^{t-h(t)}Ex(s)ds)^\top Q\int_{t-h_2}^{t-h(t)}Ex(s)ds\Big]. \qquad (2.51)
\end{aligned}
$$

Từ (2.51), ta đạt được:

$$\dot{V}(.)-\eta V(.)\le\xi^\top(t)\Phi\xi(t)+3w^\top(t)w(t), \qquad (2.52)$$

trong đó

$$
\begin{aligned}
\xi(t)=[&x^\top(t),x^\top(t-h(t)),(Ex)^\top(t-h_1),(Ex)^\top(t-h_2),(E\dot{x})^\top(t),\\
&\frac{1}{h_2-h(t)}\int_{t-h_2}^{t-h(t)}(Ex)^\top(s)ds,\\
&\frac{1}{h(t)-h_1}\int_{t-h(t)}^{t-h_1}(Ex)^\top(s)ds,\frac{2}{h_1}\int_{t-h_1}^{t_1-\frac{h_1}{2}}(Ex)^\top(s)ds,(Ex)^\top(t-\frac{h_1}{2})]^\top,
\end{aligned}
$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & 0 & 0 & (A+BK)^\top & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & \Gamma_{22} & -2E^\top Q & -2E^\top Q & \Gamma_{25} & 6E^\top Q & 6E^\top Q & 0 & 0 \\ * & * & \Gamma_{33} & 0 & 0 & 0 & 6Q & \Gamma_{38} & 0 \\ * & * & * & \Gamma_{44} & 0 & 6Q & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Gamma_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \Gamma_{66} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \Gamma_{77} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & \Gamma_{88} & \Gamma_{89} \\ * & * & * & * & * & * & * & * & \Gamma_{99} \end{pmatrix}$$

$$\Phi_{11} = P(A+BK) + (A+BK)^\top P^\top + PB_1B_1^\top P^\top - \eta PE$$

$$\Phi_{12} = PD - (A+BK)^\top D.$$

b) Trường hợp 2: Với t sao cho $h(t) = h_2$, khi đó $h(t) - h_1 > 0$, thì

$$\begin{aligned}\dot{V}_3(.) &= h^2\dot{x}^\top E^\top QE\dot{x}(t) - h\int_{t-h(t)}^{t-h_1} \dot{x}^\top(s)E^\top QE\dot{x}(s)ds.\\ &\le h^2\dot{x}^\top E^\top QE\dot{x}(t) - 4x(t-h(t))^\top E^\top QEx(t-h(t))\\ &- 4x(t-h_1)^\top E^\top QEx(t-h_1) - 4x(t-h(t))^\top E^\top QEx(t-h_1)\\ &+ \frac{12}{h(t)-h_1}x(t-h(t))^\top E^\top QE\int_{t-h(t)}^{t-h_1} x(s)ds\\ &+ \frac{12}{h(t)-h_1}x(t-h_1)^\top E^\top QE\int_{t-h(t)}^{t-h_1} x(s)ds\\ &- \frac{12}{(h(t)-h_1)^2}\int_{t-h(t)}^{t-h_1} x(s)^\top dsE^\top QE\int_{t-h(t)}^{t-h_1} x(s)ds\end{aligned}$$

Mặt khác, khi $h(t) = h_2$, ta có:

$$\begin{aligned}0 &= -24x^\top(t-h_2)E^\top QEx(t-h_2) + 24x^\top(t-h_2)E^\top QEx(t-h_2)\\ &= z_1^\top(t)\Upsilon_1 z_1(t),\end{aligned} \tag{2.53}$$

trong đó

$$z_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & x^\top(t-h(t)) & 0 & (Ex)^\top(t-h_2) & 0 & (Ex)^\top(t-h_2) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top,$$

$$\Upsilon_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & -4E^\top QE & 0 & -2E^\top Q & 0 & 6E^\top Q & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -4Q & 0 & 6Q & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -12Q & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & 0 \end{pmatrix}.$$

Ta làm tương tự như Trường hợp 1 kết hợp với (2.53), ta có

$$\begin{aligned} \dot{V}(.) - \eta V(.) &\leq \varpi_1^\top(t)\Psi_1\varpi_1(t) + z_1^\top(t)\Upsilon_1 z_1(t) + 3w^\top(t)w(t) \\ &\leq \xi_1^\top(t)\Phi\xi_1(t) + 3w^\top(t)w(t), \end{aligned} \tag{2.54}$$

với

$$\begin{aligned} \varpi_1(t) &= [x^\top(t), x^\top(t-h(t)), (Ex)^\top(t-h_1), (Ex)^\top(t-h_2), (E\dot{x})^\top(t), 0, \\ &\quad \frac{1}{h(t)-h_1}\int_{t-h(t)}^{t-h_1}(Ex)^\top(s)ds, \frac{2}{h_1}\int_{t-h_1}^{t_1-\frac{h_1}{2}}(Ex)^\top(s)ds, (Ex)^\top(t-\frac{h_1}{2})]^\top \\ \xi_1(t) &= [x^\top(t), x^\top(t-h(t)), (Ex)^\top(t-h_1), (Ex)^\top(t-h_2), (E\dot{x})^\top(t), (Ex)^\top(t-h_2), \\ &\quad \frac{1}{h(t)-h_1}\int_{t-h(t)}^{t-h_1}(Ex)^\top(s)ds, \frac{2}{h_1}\int_{t-h_1}^{t_1-\frac{h_1}{2}}(Ex)^\top(s)ds, (Ex)^\top(t-\frac{h_1}{2})]^\top, \\ \Psi_1 &= \Phi - \Upsilon_1. \end{aligned}$$

c) Trường hợp 3: Với t sao cho $h(t) = h_1$, khi đó $h_2 - h(t) > 0$, ta có:

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(.) &= h^2\dot{x}^\top E^\top QE\dot{x}(t) - h\int_{t-h_2}^{t-h(t)}\dot{x}^\top(s)E^\top QE\dot{x}(s)ds \\ &\leq h^2\dot{x}^\top E^\top QE\dot{x}(t) - 4x(t-h(t))^\top E^\top QEx(t-h(t)) \\ &- 4x(t-h_2)^\top E^\top QEx(t-h_2) - 4x(t-h(t))^\top E^\top QEx(t-h_2) \\ &+ \frac{12}{h_2-h(t)}x(t-h(t))^\top E^\top QE\int_{t-h_2}^{t-h(t)}x(s)ds \\ &+ \frac{12}{h_2-h(t)}x(t-h_2)^\top E^\top QE\int_{t-h_2}^{t-h(t)}x(s)ds \\ &- \frac{12}{(h_2-h(t))^2}\int_{t-h_2}^{t-h(t)}x(s)^\top dsE^\top QE\int_{t-h_2}^{t-h(t)}x(s)ds. \end{aligned}$$

Khi $h(t) = h_1$, ta có:

$$
\begin{aligned}
0 &= -24x^\top(t-h_1)E^\top QEx(t-h_1) + 24x^\top(t-h_1)E^\top QEx(t-h_1) \\
&= z_2(t)\Upsilon_2 z_2^\top(t), \qquad (2.55)
\end{aligned}
$$

trong đó

$$
z_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & x^\top(t-h(t)) & (Ex)^\top(t-h_1) & 0 & 0 & 0 & (Ex)^\top(t-h_1) & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top,
$$

$$
\Upsilon_2 = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & -4E^\top QE & -2E^\top Q & 0 & 0 & 0 & 6E^\top Q & 0 & 0 \\
* & * & -4Q & 0 & 0 & 0 & 6Q & 0 & 0 \\
* & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & -12Q & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & 0
\end{pmatrix}.
$$

Tương tự như trường hợp 2, ta có:

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(.) - \eta V(.) &\le \varpi_2^\top(t)\Psi_2\varpi_1(t) + z_2^\top(t)\Upsilon_2 z_2(t) + 3w^\top(t)w(t) \\
&\le \xi_2^\top(t)\Phi\xi_2(t) + 3w^\top(t)w(t), \qquad (2.56)
\end{aligned}
$$

với

$$
\begin{aligned}
\varpi_2(t) = [&x^\top(t), x^\top(t-h(t)), (Ex)^\top(t-h_1), (Ex)^\top(t-h_2), (E\dot{x})^\top(t), \\
&\frac{1}{h_2-h(t)}\int_{t-h_2}^{t-h(t)}(Ex)^\top(s)ds, 0, \frac{2}{h_1}\int_{t-h_1}^{t_1-\frac{h_1}{2}}(Ex)^\top(s)ds, (Ex)^\top(t-\frac{h_1}{2})]^\top \\
\xi_2(t) = [&x^\top(t), x^\top(t-h(t)), (Ex)^\top(t-h_1), (Ex)^\top(t-h_2), (E\dot{x})^\top(t), \\
&\frac{1}{h_2-h(t)}\int_{t-h_2}^{t-h(t)}(Ex)^\top(s)ds, (Ex)^\top(t-h_1), \\
&\frac{2}{h_1}\int_{t-h_1}^{t_1-\frac{h_1}{2}}(Ex)^\top(s)ds, (Ex)^\top(t-\frac{h_1}{2})]^\top, \\
\Psi_2 = \Phi& - \Upsilon_2.
\end{aligned}
$$

Tổng hợp ba trường hợp, ta nhận được đánh giá:

$$\dot{V}(.) - \eta V(.) \leq \begin{cases} \xi^\top(t)\Phi\xi(t) + 3w^\top(t)w(t) \text{ khi } h_1 < h(t) < h_2, \\ \xi_1^\top(t)\Phi\xi_1(t) + 3w^\top(t)w(t) \text{ khi } h_1 < h(t) = h_2, \\ \xi_2^\top(t)\Phi\xi_2(t) + 3w^\top(t)w(t) \text{ khi } h_1 = h(t) < h_2. \end{cases} \tag{2.57}$$

Trong cả ba trường hợp, đánh giá (2.57) có cùng ma trận Φ. Từ điều kiện (2.27) thỏa mãn ta sẽ chứng minh $\Phi < 0$ như sau:
Nhân các ma trận $\mathrm{diag}(P^{-1}, I_{8n}), \mathrm{diag}(P^{-1}, I_{8n})^\top$ vào bên trái và bên phải của Φ, ta được:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & P^{-1}\Phi_{12} & 0 & 0 & \Lambda_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & \Gamma_{22} & -2E^\top Q & -2E^\top Q & \Gamma_{25} & 6E^\top Q & 6E^\top Q & 0 & 0 \\ * & * & \Gamma_{33} & 0 & 0 & 0 & 6Q & \Gamma_{38} & 0 \\ * & * & * & \Gamma_{44} & 0 & 6Q & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Gamma_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \Gamma_{66} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \Gamma_{77} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & \Gamma_{88} & \Gamma_{89} \\ * & * & * & * & * & * & * & * & \Gamma_{99} \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_{11} = (A + BK)P^{-\top} + P^{-1}(A + BK)^\top + B_1B_1^\top - \eta EP^{-\top},$$
$$\Lambda_{15} = P^{-1}(A + BK)^\top.$$

Với $U = KP^{-\top}$, thì điều kiện $\Lambda < 0$ đúng khi chỉ khi $\Gamma < 0$. Từ đó nếu bất đẳng thức ma trận (2.27) thỏa mãn, thì $\Lambda < 0$ và $\Phi < 0$. Do đó

$$\dot{V}(t, x_t) - \eta V(t, x_t) < 3w^\top(t)w(t), \quad \forall t \in [0, T]. \tag{2.58}$$

Nhân cả 2 vế của (2.58) với $e^{-\eta t}$ sau đó tích phân hai vế từ 0 tới t ta được:

$$e^{-\eta t}V(t, x_t) - V(0, x_0) < 3\int_0^t e^{-\eta s}w^\top(s)w(s)ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

và từ (2.35), ta có

$$V(t, x_t) < e^{\eta t}[V(0, x_0) + 3Td] \leq e^{\eta T}[(\alpha_2 + b_1)c_1 + 3Td], \quad \forall t \in [0, T]. \tag{2.59}$$

2.3. Đánh giá $y_1(t)$. Từ (2.31) và (2.59) ta có

$$\begin{aligned} x^\top(t)E^\top REx(t) &= y^\top(t)G^\top E^\top REGy(t) = y^\top(t)\begin{pmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y(t) \\ &= y_1^\top(t)R_{11}y_1(t) < \frac{V(t,x_t)}{\alpha_1} \le e^{\eta T}\alpha_3, \quad t \in [0,T]. \end{aligned}$$

Kéo theo

$$\|y_1(t)\| \le \sqrt{\frac{\alpha_3}{\lambda_{\min}(R_{11})}}e^{0.5\eta T} \le \beta e^{0.5\eta T}, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{2.60}$$

2.4. Đánh giá $y_2(t)$. Đặt

$$p(t) = -\bar{A}_{22}^{-1}\bar{A}_{21}y_1(t) - \bar{A}_{22}^{-1}D_{21}y_1(t-h(t)).$$

Để đánh giá $\|p(t)\|$, xét hai trường hợp. Đầu tiên, nếu $t-h(t)$ lớn hơn 0, thì từ (2.60) ta có

$$\|y_1(t-h(t))\| \le \beta e^{0.5\eta T}.$$

Thứ hai, nếu $t-h(t) < 0$, thì

$$\|y_1(t-h(t))\| = \|\phi_1(t)\| \le \|G^{-1}\|\|\psi\| \le \beta e^{0.5\eta T}.$$

Tổng hợp lại ta thu được:

$$\begin{aligned} \|p(t)\| \le& \|\bar{A}_{22}^{-1}\bar{A}_{21}\|\|y_1(t)\| + \|\bar{A}_{22}^{-1}D_{21}\|\|y_1(t-h(t))\| \\ \le& (\|\bar{A}_{22}^{-1}\bar{A}_{21}\| + \|\bar{A}_{22}^{-1}D_{21}\|)\beta e^{0.5\eta T}. \end{aligned}$$

Hơn nữa, từ phương trình thứ hai của (2.4) ta có

$$y_2(t) = p(t) - \bar{A}_{22}^{-1}D_{22}y_2(t-h(t)) - \bar{A}_{22}^{-1}B_{12}\omega(t).$$

Do đó,

$$\|y_2(t)\| \le \|p(t)\| + \|\bar{A}_{22}^{-1}D_{22}\|\|y_2(t-h(t))\| + \|\bar{A}_{22}^{-1}B_{12}\omega(t)\|, \forall t \ge 0.$$

Chú ý rằng $h_1 \le h(t) \le h_2$, nên ta có

$$\|y_2(t-h(t))\| \le \sup_{-h_2 \le s \le 0} \|y_2(t+s)\|.$$

Đặt $f(t) = \|y_2(t)\|$, ta thu được

$$f(t) \le \gamma_1\beta e^{0.5\eta T} + \gamma_2 \sup_{-h_2 \le s \le 0} f(t+s) + \gamma_3,$$

với $\gamma_2 = \|\bar{A}_{22}^{-1}D_{22}\| < 1, \gamma_3 = \|\bar{A}_{22}^{-1}B_{12}\|\sqrt{d}$. Áp dụng Bổ đề 1.3.4, ta có:

$$\begin{aligned}
\|y_2(t)\|^2 &\leq \frac{\gamma_1\gamma_4 + \gamma_3}{1-\gamma_2} + \gamma_2 \sup_{-h_2 \leq s \leq 0} f(s) \leq \frac{\gamma_1\gamma_4 + \gamma_3}{1-\gamma_2} + \gamma_2 \sup_{-h_2 \leq s \leq 0} \|y_2(s)\| \\
&\leq \frac{\gamma_1\gamma_4 + \gamma_3}{1-\gamma_2} + \gamma_2 \sup_{-h_2 \leq s \leq 0} \|y(s)\| \leq \frac{\gamma_1\gamma_4 + \gamma_3}{1-\gamma_2} + \gamma_2 \sup_{-h_2 \leq s \leq 0} \|G^{-1}\psi(s)\| \\
&\leq \frac{\gamma_1\gamma_4 + \gamma_3}{1-\gamma_2} + \gamma_2\|G^{-1}\|\sqrt{\frac{c_1}{\lambda_{\min}(R)}}, \quad \forall t \in [0, T]. \qquad (2.61)
\end{aligned}$$

2.5. Ổn định vững hữu hạn thời gian. Từ (2.60) và (2.61) ta thu được

$$\begin{aligned}
x^\top(t)Rx(t) =& y^\top(t)G^\top RGy(t) \\
\leq& \lambda_{\max}(G^\top RG)(\|y_1(t)\|^2 + \|y_2(t)\|^2) \\
\leq& \lambda_{\max}(G^\top RG)\Big(\gamma_4^2 + (\frac{\gamma_1\gamma_4 + \gamma_3}{1-\gamma_2} + \gamma_2\|G^{-1}\|\sqrt{\frac{c_1}{\lambda_{\min}(R)}})^2\Big) \\
\leq& c_2, \quad \forall t \in [0, T],
\end{aligned}$$

Từ bất đẳng thức ma trận (2.28), áp dụng Bổ đề Schur, ta có bất đẳng thức ma trận tương đương:

$$\lambda_{\max}(G^\top RG)\Big(\gamma_4^2 + (\frac{\gamma_1\gamma_4 + \gamma_3}{1-\gamma_2} + \gamma_2\|G^{-1}\|\sqrt{\frac{c_1}{\lambda_{\min}(R)}})^2\Big) \leq c_2.$$

Tới đây, chúng tôi kết thúc phần chứng minh. □

Nhận xét 2.2.3. Điều kiện (2.26) không là bất đẳng thức ma trận tuyến tính nhưng ta có thể tìm nghiệm dưới dạng bất đẳng thức ma trận tuyến tính chặt. Thật vậy, đặt $\mathcal{P} = P^{-\top}$ thì điều kiện (2.26) chuyển thành điều kiện $E\mathcal{P} = \mathcal{P}^\top E^\top \geq 0$ (coi là điều kiện (2.26a), và điều kiện (2.27) chuyển thành bất đẳng thức ma trận tuyến tính theo $\mathcal{P}$ (kí hiệu điều kiện (2.27a). Chuyển điều kiện (2.26a) thành LMI $EXE^\top \geq 0$, bằng cách đặt $\mathcal{P} = (EX + \Theta S)^\top$, X là ma trận đối xứng xác định dương, S là ma trận vuông cùng cấp với E thỏa mãn $SE^\top = 0$ và ma trận $EX + \Theta S$ là ma trận khả nghịch. Thay $\mathcal{P}$ bằng $(EX + \Theta S)^\top$ và (2.26a), (2.27a) được các LMI mới đối với X, kí hiệu là (2.26b) và (2.27b).

Nhận xét 2.2.4. Chọn số cố định $\eta > 0$ sử dụng LMI toolbox trong Matlab giải (2.26b),(2.27b) tìm X, Θ, Q, Q_1, W, U từ đó tìm được $\mathcal{P}, P$. Tiếp theo xác định các số a_1, a_2, a_3 và kiểm tra điều kiện (2.28). Nếu điều kiện (2.28) không thỏa mãn ta chọn số $\eta > 0$ khác và lặp lại theo các bước trên.

Nhận xét 2.2.5. Định lý cung cấp cho ta điều kiện đủ cho hệ là ổn định vững hóa hữu hạn thời gian đối với hệ suy biến có trễ biến thiên không khả vi phụ thuộc cả vào điều kiện của trễ, mà ở các kết quả trước đấy [15], [18], [12] không kiểm tra được. Hơn nữa ở các kết quả [18], [12], [28] có nhiều ma trận trọng tự do, làm quá trình giải bất đẳng thức ma trận trở nên phức tạp hơn. Trong kết quả này chúng tôi dựa vào bất đẳng thức tích phân Jensen mở rộng chỉ sử dụng hai ma trận trọng tự do. Trễ trong hệ (2.5) thỏa mãn điều kiện $0 < h_1 \leq h(t) \leq h_2$ với $h_1 < h_2$ nên định lý không áp dụng được cho trường hợp trễ hằng $h(t) = h$, sự hạn chế này do điều kiện hàm $h(t)$ liên tục không khả vi gây khó khăn khi xây dựng hàm tựa Lyapunov, cùng việc sử dụng bất đẳng thức Jensen mở rộng tạo ra thành phần $h = h_2 - h_1$ trong các Γ_{88}, Γ_{88} kéo theo khi trễ hằng thì $\Gamma_{88} = \Gamma_{99} = 0$ điều kiện (2.27) không thỏa mãn.

Ví dụ 2.2.6. Xét hệ (2.1) với

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.1 \\ 0.2 & 1.5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0,1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}, \mathbb{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ta có được hai ma trận:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

sao cho

$$\bar{E} = MEG = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, MDG = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.1 & 1 \end{pmatrix}, MB_1 = \begin{pmatrix} 0.05 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

Với $d = 0.01, h_1 = 0,199, h_2 = 0.2, c_1 = 0.3, c_2 = e^2 + 10, T = 25$, sử dụng gói LMI toolbox của phần mềm Matlab, thì các điều kiện bất đẳng thức ma trận (2.26), (2.27), (2.28) là khả thi với $\eta = 0.1$ và

$$P = \begin{pmatrix} 0.001 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}, Q = 10^4 * \begin{pmatrix} 5.2010 & -0.0019 \\ -0.0019 & 8.3423 \end{pmatrix},$$

$$Q_1 = 10^3 * \begin{pmatrix} 8.9022 & -0.0033 \\ -0.0033 & 4.9031 \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} 0 & -0.3874 \\ 0 & -2.0000 \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} 297,3246 & -0.2487 \\ -746.0207 & 0.5658 \end{pmatrix}, K = UP^\top = \begin{pmatrix} 0.0136 & 0.1817 \\ -0.1014 & -0.4134 \end{pmatrix},$$

$$A + BK = \begin{pmatrix} 1.2 & -0.7767 \\ -0.2529 & 0.16 \end{pmatrix},$$

$$\bar{A} = M(A + BK)G = \begin{pmatrix} 0.6114 & -0.3883 \\ -0.2529 & 0.16 \end{pmatrix}.$$

Bằng các tính toán đơn giản ta thu được

$$\bar{A}_{22} = 0.16 \neq 0,\ \|A_{22}^{-1} D_{22}\| = 0.16 < 1,\ \alpha_1 = \frac{0.002}{4},\ \alpha_2 = 0.002, \alpha_3 = 21276,$$

$$b_1 = 10.6889,\ \beta = 146, \gamma_1 = 2.2,\ \gamma_2 = 6.5,\ \gamma_3 = 0.125.$$

Do đó, hệ đóng là ổn định vững hữu hạn thời gian theo $[0.3, e^2 + 10, 5, I]$ với điều khiển ngược:

$$\begin{cases} u_1(t) = 0.0136x_1(t) + 0.1817x_2(t), \\ u_2(t) = -0.1014x_1(t) + -0.4134x_2(t), \quad t \in [0, 25]. \end{cases}$$

2.3 Kết luận Chương 2

Chương 2 trình bày kết về bài toán ổn định hóa vững hữu hạn thời gian cho một số hệ phương trình vi phân suy biến có trễ hằng và trễ biến thiên liên tục bị chặn khoảng, không yêu cầu tính khả vi của hàm trễ. Kết quả đạt được như sau:

- Thiết lập các điều kiện đủ mới cho tính ổn định vững hữu hạn thời gian cho hệ vi phân suy biến có trễ hằng.
- Đưa ra điều kiện đủ và thiết kế điều khiển phản hồi đảm bảo tính ổn định vững hữu hạn thời gian cho hệ vi phân suy biến có trễ biến thiên bị chặn khoảng và không yêu cầu tính khả vi của hàm trễ.
- Đề xuất các điều kiện đủ để hệ là chính quy và tính không có xung được thông qua giải hệ bất đẳng thức ma trận tuyến tính.

Chương 3

ỔN ĐỊNH VÀ ỔN ĐỊNH HÓA HỮU HẠN THỜI GIAN CHO MỘT SỐ LỚP HỆ SUY BIẾN RỜI RẠC CÓ TRỄ

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu bài toán ổn định và ổn định hóa hữu hạn thời gian cho một số lớp hệ phương trình suy biến rời rạc có trễ biến thiên: ổn định hóa vững hữu hạn thời gian cho hệ suy biến rời rạc có trễ biễn thiên và ổn định hóa vững hữu hạn thời gian cho hệ suy biến chuyển mạch rời rạc có trễ biến thiên. Nội dung được trình bày dựa trên hai bài báo [3], [4] trong danh mục các công trình khoa học của tác giả.

3.1 Tính ổn định hóa hữu hạn thời gian của hệ suy biến rời rạc có trễ

Hệ suy biến rời rạc tuyến tính với trễ biến thiên xuất hiện trong nhiều mô hình xử lý tín hiện, dữ liệu trong ngành khoa học máy tính, [5], [53]. Trong phần này, chúng tôi nghiên cứu bài toán ổn định hóa hữu hạn thời gian cho hệ:

$$\begin{cases} Ex(k+1) & = Ax(k) + Dx(k-h(k)) + Bw(k) + Cu(k), k \in \mathbb{Z}^+, \\ x(k) & = \psi(k) \ \forall k = -h, \ldots, 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

với $x(k)$ là véc tơ trạng thái thuộc $\mathbb{R}^n$, A, D là hai ma trận hằng trong $\mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{n\times l}$, E là ma trận suy biến trong $R^{n\times n}$: $\mathrm{rank}(E) = r < n$; $h(k)$ là hàm trễ thỏa mãn điều kiện sau:

$$0 < h(k) \leq h, \quad k \geq 0.$$

Nhiễu $w(k)$ thỏa mãn điều kiện sau:

$$\exists d > 0: \qquad \sum_{k=1}^{N} w^\top(k) w(k) \leq d, \tag{3.2}$$

Định nghĩa 3.1.1. Với các số dương c_1, c_2, số nguyên dương N và một ma trận đối xứng xác định dương R, hệ (3.1) không có điều khiển ($u(k) = 0$) là ổn định vững hữu hạn thời gian theo $[c_1, c_2, N, R]$ nếu hệ là chính quy, không phụ thuộc xung và với mọi nhiễu $w(k)$ thỏa mãn điều kiện (3.2) sao cho

$$\max_{k\ =-h,-h+1,\ldots 0} \psi^\top(k) R \psi(k) < c_1 \Rightarrow x^\top(k) R x(k) < c_2 \quad \forall k = 0, \ldots, N.$$

Định nghĩa 3.1.2. Hệ (3.1) là ổn định hóa vững hữu hạn thời gian theo $[c_1, c_2, N, R]$ nếu tồn tại điều khiển ngược $u(k) = Kx(k)$ sao cho hệ đóng $Ex(k+1) = (A + CK)x(k) + Dx(k - h(k)) + Bw(k)$ là ổn định vững hữu hạn thời gian theo $[c_1, c_2, N, R]$.

Trong phần này chúng tôi xem xét tính ổn định vững hữu hạn thời gian cho hệ (3.1) với ($u(k) = 0$). Do $\mathrm{rank}(E) = r < n$, nên tồn tại hai ma trận không suy biến M, G sao cho $MEG = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Trước khi trình bày định lý, chúng tôi đưa ra một số kí hiệu trong định lý sử dụng:

$$MAG = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{M} = \begin{pmatrix} 0r \times n \\ M_2 \end{pmatrix},$$

$$M^{-\top} P M^{-1} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}, \ \beta = \min\{\eta, \eta^{h-1}\},$$

$$X_1 = 2A^\top PA - (1+\eta)E^\top PE + Q - P\bar{M}A - A^\top \bar{M}^\top P,$$

$$\alpha_1 = \Big(\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(R)} + \sum_{s=-h}^{-1} \frac{\lambda_{max}(Q)}{\lambda_{\min}(R)} \eta^{-1-s}\Big),$$

$$\alpha_2 = \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(R)}, \quad \gamma = \lambda_{\max}(I + 3B^\top PB).$$

Định lí 3.1.3. *Với các số dương c_1, c_2, số nguyên dương N và ma trận đối xứng xác định dương R cho trước, hệ (3.1) không có điều khiển là ổn định vững hữu hạn thời gian theo $[c_1, c_2, N, R]$ nếu tồn tại các ma trận đối xứng xác định dương $P, Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, và số dương $\eta > 0$ thỏa mãn các điều kiện sau:*

$$\begin{pmatrix} X_1 & A^\top PD - P\bar{M}D & P\bar{M}B \\ * & -\beta Q + 2D^\top PD & 0 \\ * & * & -I \end{pmatrix} < 0, \tag{3.3}$$

$$(1+\eta)^{N+1}\alpha_1 c_1 + \gamma d \frac{(1+\eta)^{N+1} - 1}{\eta} \leq \alpha_2 c_2. \tag{3.4}$$

Lược đồ chứng minh:

- Bước 1. Dựa vào điều kiện (3.3), chứng minh được hệ (3.1) không có điều khiển là chính quy và không phụ thuộc xung.
- Bước 2. Dựa vào việc xây dựng các hàm tựa Lyapunov cùng bất đẳng thức ma trận (3.3) và điều kiện (3.4) thì hệ (3.1) không có điều khiển là ổn định vững hữu hạn thời gian theo bộ $[c_1, c_2, N, R]$

Chứng minh. Bước 1. Chứng minh hệ không điều khiển là chính quy và không phụ thuộc xung. Từ (3.3), ta có: $X_1 < 0$ và $A^\top PA \geq 0$, từ ma trận G là ma trận không suy biến, kéo theo

$$\begin{aligned}
0 &> G^\top(-(1+\eta)E^\top PE - P\bar{M}A - A^\top \bar{M}^\top P)G \\
&> -(1+\eta)G^\top E^\top M^\top M^{-\top} PM^{-1}MEG - G^\top P\bar{M}AG - G^\top A^\top \bar{M}^\top PG \\
&> -(1+\eta)\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad - \begin{pmatrix} (G^\top P)_{11} & (G^\top P)_{12} \\ (G^\top P)_{21} & (G^\top P)_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & A_{21}^\top \\ 0 & A_{22}^\top \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (G^\top P)_{11} & (G^\top P)_{12} \\ (G^\top P)_{21} & (G^\top P)_{22} \end{pmatrix}^\top \\
&> -(1+\eta)\begin{pmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (G^\top P)_{12}A_{21} & (G^\top P)_{12}A_{22} \\ (G^\top P)_{22}A_{21} & (G^\top P)_{22}A_{22} \end{pmatrix} \\
&\quad - \begin{pmatrix} (G^\top P)_{12}A_{21} & (G^\top P)_{12}A_{22} \\ (G^\top P)_{22}A_{21} & (G^\top P)_{22}A_{22} \end{pmatrix}^\top,
\end{aligned}$$

do đó $(G^\top P)_{22}A_{22} + A_{22}^\top (G^\top P)_{22}^\top > 0$, kéo theo $\det(A_{22}) \neq 0$.
Đặt

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} I_r & -A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} M, \quad \hat{G} = G\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21} & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Dễ dàng kiểm tra được

$$\hat{M}E\hat{G} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{M}A\hat{G} = \begin{pmatrix} \hat{A}_{11} & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix},$$

$$\hat{M}(sE - A)\hat{G} = s\hat{M}E\hat{G} - \hat{M}A\hat{G} = \begin{pmatrix} sI_r - \hat{A}_{11} & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Nên

$$\det(sE - A) = \det(\hat{M}^{-1}\hat{M}(sE - A)\hat{G}\hat{G}^{-1}) = \det(\hat{M}^{-1})\det(sI_r - \hat{A}_{11})\det(\hat{G}^{-1}),$$

$$\det(sI_r - \hat{A}_{11}) = \sum_{i=0}^{r} a_i s^i,\ a_r = 1$$

và $\det(\hat{M}) \neq 0, \det(\hat{G}) \neq 0$ từ $\hat{M}$, $\hat{G}$ là các ma trận không suy biến, nên đa thức $\det(sE - A)$ khác đa thức 0 và hệ (3.1) không có điều khiển là chính quy. Hơn nữa, ta có

$$\deg\left(\det(sE - A)\right) = r = \operatorname{rank}(E),$$

kéo theo hệ không phục thuộc xung.

Bước 2. Chứng minh hệ ổn định vững hữu hạn thời gian.
Xét các hàm toàn phương không âm sau: $V(k, x_k) = \sum_{i=1}^{2} V_i(k, x_k)$, với

$$\begin{aligned} V_1(k, x_k) &= x^\top(k)E^\top PEx(k), \\ V_2(k, x_k) &= \sum_{i=k-h}^{k-1} \eta^{k-1-i}x^\top(i)Qx(i), \end{aligned}$$

chú ý rằng:

$$x^\top(k)Qx(k) \leq V(k+1, x_{k+1}), \quad k \in Z^+. \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} V(0, x_0) &\leq \frac{\lambda_{\max}(E^\top PE)}{\lambda_{\min}(R)} x^\top(0)\mathbb{R}x(0) + \frac{\lambda_{max}(Q)}{\lambda_{\min}(R)} \sum_{s=-h}^{-1} \eta^{-1-s}x^\top(s)Rx(s) \\ &\leq c_1\Big(\frac{\lambda_{\max}(E^\top PE)}{\lambda_{\min}(R)} + \sum_{s=-h}^{-1} \frac{\lambda_{max}(Q)}{\lambda_{\min}(R)}\eta^{-1-s}\Big) \\ &\leq c_1\alpha_1. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Đặt $\triangle V$ là sai phân của $V(.)$, ta có

$$\begin{aligned}
\triangle V_1(k,x_k) &= x^\top(k+1)E^\top PEx(k+1) - x^\top(k)E^\top PEx(k)\\
&= x^\top(k)(A^\top PA - E^\top PE)x(k) + 2x^\top(k)A^\top PDx(k-h(k))\\
&\quad + 2x^\top(k)A^\top PBw(k) + 2x^\top(k-h(k))D^\top PBw(k)\\
&\quad + x^\top(k-h(k))D^\top PDx(k-h(k)) + w^\top(k)B^\top PBw(k), \qquad (3.7)\\
\triangle V_2(k,x_k) &= \sum_{i=k-h+1}^{k} \eta^{k-i}x^\top(i)Qx(i) - \sum_{i=k-h}^{k-1} \eta^{k-1-i}x^\top(i)Qx(i). \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

Từ (3.7), (3.8), ta có

$$\begin{aligned}
\triangle V(k,x_k) - \eta V(k,x_k) &= x^\top(k)(A^\top PA - E^\top PE)x(k)\\
&\quad + 2x^\top(k)A^\top PDx(k-h(k)) + 2x^\top(k)A^\top PBw(k)\\
&\quad + 2x^\top(k-h(k))D^\top PBw(k)) + \sum_{i=k-h+1}^{k} \eta^{k-i}x^\top(i)Qx(i)\\
&\quad - \sum_{i=k-h}^{k-1} \eta^{k-1-i}x^\top(i)Qx(i) - \eta x^\top(k)E^\top PEx(k)\\
&\quad - \sum_{i=k-h}^{k-1} \eta^{k-i}x^\top(i)Qx(i)\\
&\quad + x^\top(k-h(k))D^\top PDx(k-h(k)) + w^\top(k)B^\top PBw(k)\\
&= x^\top(k)(A^\top PA - (1+\eta)E^\top PE)x(k) + 2x^\top(k)A^\top PDx(k-h(k))\\
&\quad + 2x^\top(k)A^\top PBw(k) + 2x^\top(k-h(k))D^\top PBw(k)\\
&\quad + x^\top(k-h(k))D^\top PDx(k-h(k)) + w^\top(k)B^\top PBw(k)\\
&\quad + x^\top(k)Qx(k) - \eta^{h-1}x^\top(k-h)Qx(k-h)\\
&\quad - \sum_{i=k-h}^{k-1} \eta^{k-1-i}x^\top(i)Qx(i). \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Bằng phép nhân ma trận khối ta có $\bar{M}E = 0$, do vậy nhân cả hai vế của hệ (3.1) không có điều khiển với $-2x^\top(k)P\bar{M}$ về bên trái, ta được:

$$\begin{aligned}
&-2x^\top(k)P\bar{M}Ax(k) - 2x^\top(k)P\bar{M}Dx(k-h(k))\\
&\quad - 2x^\top(k)P\bar{M}Bw(k) = 0. \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

Kết hợp các điều kiện (3.9)-(3.10), ta được

$$\begin{aligned}\triangle V(k,x_k)-\eta V(k,x_k)=&x^\top(k)(A^\top PA-(1+\eta)E^\top PE)x(k)\\&+2x^\top(k)A^\top PDx(k-h(k))+2x^\top(k)A^\top PBw(k)\\&+2x^\top(k-h(k))D^\top PBw(k)+w^\top(k)B^\top PBw(k)\\&+x^\top(k)Qx(k)-\eta^{h-1}x^\top(k-h)Qx(k-h)\\&-\sum_{i=k-h}^{k-1}\eta^{k-1-i}x^\top(i)Qx(i)-2x^\top(k)P\bar{M}Ax(k)\\&-2x^\top(k)P\bar{M}Dx(k-h(k))-2x^\top(k)P\bar{M}Bw(k)\\&+x^\top(k-h(k))D^\top PDx(k-h(k)).\end{aligned}$$

Áp dụng Bổ đề 1.3.1, ta được:

$$\begin{aligned}&2x^\top(k)A^\top PBw(k)-w^\top(k)B^\top PBw(k)\le x^\top(k)A^\top PAx(k),\\&2x^\top(k-h(k))D^\top PBw(k)-w^\top(k)B^\top PBw(k)\\&\qquad\le x^\top(k-h(k))D^\top PDx(k-h(k)),\\&-2x^\top(k)P\bar{M}Bw(k)-w^\top(k)w(k)\le x^\top(k)P\bar{M}BB^\top\bar{M}^\top Px(k).\end{aligned}$$

Do vậy ta có:

$$\begin{aligned}\triangle V(k,x_k)-\eta V(k,x_k)\le&\xi(k)\Phi\xi^\top(k)+w^\top(k)w(k)\\&+3w^\top(k)B^\top PBw(k),\end{aligned}\tag{3.11}$$

với

$$\xi(k)=[x^\top(k),x^\top(k-h(k))]^\top,$$

$$\Phi=\begin{pmatrix}\Phi_{11} & A^\top PD-P\bar{M}D\\ * & -\beta Q+2D^\top PD,\end{pmatrix}$$

$$\Phi_{11}=2A^\top PA-(1+\eta)E^\top PE+Q-P\bar{M}A-A^\top\bar{M}^\top P+P\bar{M}BB^\top\bar{M}^\top P.$$

Nếu điều kiện (3.3) thỏa mãn, áp dụng Bổ đề 1.3.3 ta được $\Phi<0$ và từ (3.11)ta có

$$\triangle V(k,x_k)-\eta V(k,x_k)\le w^\top(k)w(k)+3w^\top B^\top PBw(k).$$

Kéo theo

$$\begin{aligned}V(k+1,x_{k+1})&\le(1+\eta)V(k,x_k)+w^\top(k)(I+3B^\top PB)w(k)\\&\le(1+\eta)^{N+1}V(0,x_0)+\sum_{i=0}^{N}(1+\eta)^{k-i}w^\top(i)(I+3B^\top PB)w(i).\end{aligned}$$

Từ điều kiện (3.6) ta có

$$
\begin{aligned}
V(k+1, x_{k+1}) &\le (1+\eta)^{N+1}\alpha_1 c_1 + \sum_{i=0}^{N}(1+\eta)^{k-i} w^\top(i)(I + 3B^\top PB)w(i)\\
&\le (1+\eta)^{N+1}\alpha_1 c_1 + \gamma d\frac{(1+\eta)^{N+1}-1}{\eta}.
\end{aligned}
$$

Kết hợp các điều kiện (3.7), (3.8) cuối cùng ta được

$$
\begin{aligned}
x^\top(k)Rx(k) &\le \frac{\lambda_{\max}(R)}{\lambda_{\min}(Q)}x^\top(k)Qx(k) \le \frac{\lambda_{\max}(R)}{\lambda_{\min}(Q)}V(k+1, x_{k+1})\\
&\le \frac{\lambda_{\max}(R)}{\lambda_{\min}(Q)}\Big((1+\eta)^{N+1}\alpha_1 c_1 + \gamma d\frac{(1+\eta)^{N+1}-1}{\eta}\Big)\\
&\le c_2.
\end{aligned}
$$

□

Tiếp theo, ta áp dụng kết quả đã đạt được để giải quyết bài toán ổn định vững hóa hữu hạn thời gian cho hệ (3.1). Trước hết, ta thiết kế điều khiển ngược

$$u(t) = Kx(t),$$

với $K \in K^{l\times n}$ là quy tắc điều khiển được thiết kế.

Định lí 3.1.4. *Với các số dương c_1, c_2, số nguyên dương N và ma trận đối xứng xác định dương R cho trước, hệ (3.1) đóng ổn định vững hữu hạn thời gian theo $[c_1, c_2, N, R]$, nếu tồn tại các ma trận đối xứng xác định dương $Z_1, Z_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ma trận $U \in \mathbb{R}^{n\times l}$ và số dương $\eta > 0$ thỏa mãn các điều kiện sau:*

$$
\begin{pmatrix}
\Xi_{11} & -\bar{M}DZ_1 & \bar{M}B & \Xi_{14} & \Xi_{15}\\
* & -\beta Z_2 & 0 & Z_1D^\top & 0\\
* & * & -I & 0 & 0\\
* & * & * & \frac{-1}{2}Z_1 & 0\\
* & * & * & 0 & \frac{-2}{3}Z_1
\end{pmatrix} < 0, \tag{3.12}
$$

$$(1+\eta)^{N+1}\bar{\alpha}_1 c_1 + \bar{\gamma} d\frac{(1+\eta)^{N+1}-1}{\eta} \le \bar{\alpha}_2 c_2, \tag{3.13}$$

với

$$
\begin{aligned}
\Xi_{11} &= (1+\eta)(Z_1E^\top + Z_1 + EZ_1) + Z_2 - \bar{M}AZ_1 - \bar{M}ACU^\top \\
&\quad - Z_1A^\top\bar{M}^\top - UC^\top A^\top \bar{M}^\top, \\
\Xi_{14} &= \frac{1}{2}(UC^\top + Z_1A^\top), \quad \Xi_{15} = UC^\top + Z_1A^\top, \\
\beta &= \min\{\eta, \eta^{h_2-1}\}, \quad \bar{\alpha}_1 = \Big(\frac{\lambda_{\max}(Z_1^{-1})}{\lambda_{\min}(R)} + \sum_{s=-h_2}^{-1} \frac{\lambda_{max}(Z_1^{-1}Z_2Z_1^{-1})}{\lambda_{\min}(R)}\eta^{-1-s}\Big), \\
\bar{\alpha}_2 &= \frac{\lambda_{\min}(Z_1^{-1}Z_2Z_1^{-1})}{\lambda_{\max}(R)}, \quad \bar{\gamma} = \lambda_{\max}(I + 3B^\top Z_1^{-1}B).
\end{aligned}
$$

Hơn nữa điều khiển ngược được thiết kế với quy tắc $K = U^\top Z_1^{-1}$.

Chứng minh. Thay $u(k) = x(k)$ và hệ (3.1), ta có hệ đóng

$$
Ex(k+1) = A_cx(k) + Dx(k-h(k)) + Bw(k), \tag{3.14}
$$

với $A_c = A + CK$. Thì, từ Định lý 3.1.1 áp dụng cho hệ đóng thay A bởi A_c trong (3.3) rồi nhân cả hai vế với $\mathrm{diag}(P^{-1}, P^{-1}, I, I, I)$, $\mathrm{diag}(P^{-1}, P^{-1}, I, I, I)^\top$ về bên trái và bên phải tương ứng, ta thu được

$$
\Gamma_1 = \begin{pmatrix} P^{-1}X_1P^{-1} & P^{-1}A_c^\top PDP^{-1} - \bar{M}DP^{-1} & \bar{M}B \\ * & -\beta P^{-1}QP^{-1} + 2P^{-1}D^\top PDP^{-1} & 0 \\ * & * & -I \end{pmatrix} < 0.
$$

Áp dụng Bổ đề 1.3.3 cho số hạng ở vị trí (2,2) của Γ_1, ta có

$$
\Gamma_2 = \begin{pmatrix} P^{-1}X_1P^{-1} & P^{-1}A_c^\top PDP^{-1} - \bar{M}DP^{-1} & \bar{M}B & 0 \\ * & -\beta P^{-1}QP^{-1} & 0 & P^{-1}D^\top \\ * & * & -I & 0 \\ * & * & * & \frac{-1}{2}P^{-1} \end{pmatrix} < 0.
$$

Nhân Y, $Y^\top$ và bên trái và bên phải của Γ_2, và Y là ma trận không suy biến, với

$$
Y = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & -P^{-1}A_c^\top P \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix},
$$

ta có $\Gamma_2 < 0$ khi và chỉ khi $Y\Gamma_2Y^\top < 0$.

Đặt $\Gamma_3 = Y\Gamma_2 Y^\top = \begin{pmatrix} P^{-1}X_2P^{-1} & -\bar{M}DP^{-1} & \bar{M}B & \frac{1}{2}P^{-1}A_c^\top \\ * & -\beta P^{-1}QP^{-1} & 0 & P^{-1}D^\top \\ * & * & -I & 0 \\ * & * & * & \frac{-1}{2}P^{-1} \end{pmatrix}$,

với $X_2 = X_1 - \frac{1}{2}A_c^\top PA_c$, Áp dụng Bổ đề 1.3.3 cho Γ_3, ta được

$$\Gamma_4 = \begin{pmatrix} P^{-1}X_3P^{-1} & -\bar{M}DP^{-1} & \bar{M}B & \frac{1}{2}P^{-1}A_c^\top & P^{-1}A_c^\top \\ * & -\beta P^{-1}QP^{-1} & 0 & P^{-1}D^\top & 0 \\ * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & \frac{-1}{2}P^{-1} & 0 \\ * & * & * & 0 & \frac{-2}{3}P^{-1} \end{pmatrix} < 0,$$

với $X_3 = X_2 - \frac{3}{2}A_c^\top PA_c$. Đặt $Z_1 = P^{-1}, Z_2 = P^{-1}QP^{-1}, U = Z_1K^\top$, $\Xi < 0$, ta thu được

$$\Xi = \begin{pmatrix} \bar{\Xi}_{11} & \bar{M}DZ_1 & \bar{M}B & \frac{1}{2}(Z_1A^T + UC^T) & Z_1A^T + UC^T \\ * & -\beta Z_1QZ_1 & 0 & Z_1D^\top & 0 \\ * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & \frac{-1}{2}Z_1 & 0 \\ * & * & * & 0 & \frac{-2}{3}Z_1 \end{pmatrix} < 0,$$

với $\bar{\Xi}_{11} = \eta(Z_1E^\top + EZ_1 + Z_1) - (Z_1A^T + UC^T)\bar{M}^\top - \bar{M}(CU^T + AZ_1) + Z_1QZ_1$.
Mặt khác từ Bổ đề 1.3.5 ta có đánh giá sau

$$-(1+\eta)Z_1E^\top PEZ_1 \leq (1+\eta)(Z_1E^\top + EZ_1 + Z_1),$$

kéo theo $\Gamma_4 \leq \Xi$, và điều kiện $\Xi < 0$ trở thành điều (12). □

Ví dụ 3.1. (Ổn định vững hữu hạn thời gian) Xét hệ (3.1) không có điều khiển với

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -0.9 \\ 1 & -0.9 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.3 & 1.5 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -1 & 0.9 \\ 0.5 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.3 & 0.3 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$d = 10^{-4}, h = 5, c_1 = 0.1, c_2 = 40, N = 30.$$

Bằng tính toán đại số thông thường, ta có

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, MEG = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$MAG = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.45 \\ 0.2 & -1.32 \end{bmatrix}, \bar{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Sử dụng LMI toolbox trong Matlb, cho (3.3),(3.4)với $\eta = 0.1$ ta có

$$P = \begin{bmatrix} 1.8196 & -0.5591 \\ -0.5591 & 0.2003 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1.0057 & -0.6157 \\ -0.6157 & 0.6398 \end{bmatrix},$$

$$\beta = 0.0001, \alpha_1 = 8.8673, \alpha_2 = 0.1804, \gamma = 1.0161.$$

Do Định lý 3.1, hệ là ổn định vững hữu hạn thời gian theo $[0.1, 40, 30, R]$.

Ví dụ 3.2. (Ổn định hóa vững hữu hạn thời gian) Xét hệ suy biến (3.1) với

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -0.9 \\ 1 & -0.9 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.3 & 1.5 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -1 & 0.9 \\ 0.5 & 0.1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.3 & 0.3 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.1 \\ 0.5 & 0.2 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$d = 10^{-4}, h = 5, c_1 = 0.1, c_2 = 35, N = 30.$$

bằng tính toán đơn giản ta có

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, MEG = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$MAG = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.45 \\ 0.2 & -1.32 \end{bmatrix}, \bar{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Sử dụng LMI toolbox of Matlab với $\eta = 0.1$, các bất đẳng thức ma trận tuyến tính và điều kiện (3.4) là có nghiệm với

$$Z_1 = \begin{bmatrix} 0.3217 & 0.1307 \\ 0.1307 & 0.6545 \end{bmatrix}, Z_2 = \begin{bmatrix} 0.4520 & -0.0176 \\ -0.0176 & 0.4999 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 0.5942 & -1.7600 \\ 0.0609 & -2.9200 \end{bmatrix}.$$

$$\beta = 0.0016, \alpha_1 = 22.8879, \alpha_2 = 0.9842, \gamma = 1.8577.$$

Từ Định lý 3.2 hệ (3.1) ổn định vững hữu hạn thời gian theo $[0.1, 35, 30, R]$ với điều khiển ngược được thiết kế bởi

$$K = \begin{bmatrix} 1.9693 & -3.002 \\ -3.9818 & -3.6662 \end{bmatrix}.$$

3.2 Tính ổn định hóa hữu hạn thời gian của hệ suy biến rời rạc chuyển mạch có trễ

Hệ rời rạc phi tuyến suy biến có trễ và nhiễu có dạng sau:

$$\begin{cases} Ex(k+1) & = A_\sigma x(k) + D_\sigma x(k-h(k)) + B_\sigma w(k) \\ & \qquad +f_\sigma(k, x(k), x(k-h(k), w(k)), \quad k \in Z^+, \\ x(k) & = \psi(k), \quad k = -h, -h+1, \dots, 0, \end{cases} \tag{3.15}$$

với $x(k)$ là véc tơ trạng thái thuộc $\mathbb{R}^n$, $w(k)$ là hàm véc tơ nhiễu, hàm chuyển mạch $\sigma : \mathbb{R}^n \to \{1, ..., p\}$ với quy tắc chuyển mạch xây dựng dựa trên véc tơ trạng thái tại mỗi thời điểm và đầu ra là các giá trị trong tập hữu hạn $\{1, ..., p\}$; cặp ma trận $(A_\sigma, D_\sigma, B_\sigma)$ nhận giá trị trong tập hữu hạn phần tử $(A_i,\ D_i,\ B_i)$, $i \in \overline{1,p}$, với $A_i, D_i \in \mathbb{R}^{n\times n}, B_i \in \mathbb{R}^{n\times q}$ là các ma trận hằng số; $f_\sigma(.)$ là các hàm thỏa mãn điều kiện:

$$\|f_i(k, x(k), x(k-h(k), w(k))\| \le a_i\|x(k)\| + b_i\|x(k-h(k))\| + m_i\|w(k)\|,\ i = 1, 2, ..., p. \tag{3.16}$$

Hàm trễ $h(k)$ thỏa mãn điều kiện sau:

$$0 < h(k) \le h, \quad k \in Z^+.$$

Nhiễu $w(k)$ thỏa mãn

$$\exists d > 0 : \qquad w^\top(k)w(k) \le d, \quad k \in \mathbb{Z}^+. \tag{3.17}$$

Với quy tắc chuyển mạch $\sigma(x(t))$, ta giả sử rằng hệ chuyển mạch được kích hoạt tại nốt thứ l, nghĩa là $\sigma(x(t)) = l$.

Định nghĩa 3.2.1. [19] Đối với quy tắc chuyển mạch $\sigma(.)$, hệ (3.15) được gọi là
(i) chính quy nếu đa thức $\det(sE - A_l)$ là đa thức khác 0 với mọi nốt $l = \overline{1,p}$ trong chuyển mạch.
(ii) không phụ thuộc xung nếu $\deg(\det(sE - A_l)) = \operatorname{rank} E$ với mọi nốt $l = \overline{1,p}$ chuyển mạch.

Định nghĩa 3.2.2. [4] Cho trước các số dương c_1, c_2, số nguyên dương T và ma trận đối xứng xác định dương $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$, hệ (3.15) là ổn định vững hữu hạn thời gian theo (c_1, c_2, T, R) với quy tắc chuyển mạch $\sigma(\cdot)$ nếu hệ là chính quy, không phục thuộc xung và mọi nghiệm $x_\sigma(t, \varphi)$ của hệ thỏa mãn điều kiện:

$$\max_{k=-h,\dots,0} \psi^\top(k)R\psi(k) < c_1 \Longrightarrow x_\sigma^\top(k)Rx_\sigma(k) < c_2, \quad k = 0, \dots, T.$$

với mọi nhiễu $\omega(\cdot)$ thỏa mãn (3.17).

Chúng tôi xây dựng quy tắc chuyển mạch cho hệ (3.15) dựa trên cấu trúc của véc tơ trạng thái trong các nón lồi sao cho mỗi nốt được kích hoạt khi véc tơ trạng thái nằm trong nón lồi được xác định nhờ các dạng toàn phương âm.

Định nghĩa 3.2.3. [20] Hệ ma trận $\{L_i\}_{i=1}^p$ là đầy chặt nếu với mọi $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ thì tồn tại $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ sao cho $x^\top L_i x < 0$.

Ta dễ dàng kiểm tra được rằng: nếu hệ $\{L_i\}$ là đầy chặt nếu và chỉ nếu $\cup_{i=1}^p \Omega_i = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, trong đó $\Omega_i = \{x \in \mathbb{R}^n : x^\top L_i x < 0\}, i = \overline{1, p}$.

Chúng tôi sử dụng mệnh đề sau trong chứng minh định lý.

Mệnh đề 3.2.4. [20] *Hệ $\{L_i\}_{i=1}^p$ là đầy chặt nếu tồn tại các số $\xi_i \geq 0, i = \overline{1, p}, \sum_{i=1}^p \xi_i > 0$, sao cho $\sum_{i=1}^p \xi_i L_i < 0$.*

Từ rank $E = r < n$, nên tồn tại hai ma trận không suy biến M, N sao cho $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = MEN$. Đặt

$$MA_\sigma N = \begin{pmatrix} \bar{A}_{\sigma 11} & \bar{A}_{\sigma 12} \\ \bar{A}_{\sigma 21} & \bar{A}_{\sigma 22} \end{pmatrix}, \ MD_\sigma N = \begin{pmatrix} \bar{D}_{\sigma 11} & \bar{D}_{\sigma 12} \\ \bar{D}_{\sigma 21} & \bar{D}_{\sigma 22} \end{pmatrix},$$
$$MB_\sigma = \begin{pmatrix} \bar{B}_{\sigma 1} \\ \bar{B}_{\sigma 2} \end{pmatrix}, \ M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}.$$

Qua phép đổi biến $y = N^{-1}x := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $y_1 \in \mathbb{R}^r$, $y_2 \in \mathbb{R}^{n-r}$, hệ (3.15) trở thành

$$\begin{cases} y_1(k+1) & = A_{\sigma 11} y_1(k) + \overline{A}_{\sigma 12} y_2(k) + \bar{D}_{\sigma 11} y_1(k - h(k)) \\ & \quad + \bar{D}_{\sigma 12} y_2(k - h(k)) + \bar{B}_{\sigma 1} w(k) + M_1 f(.), \\ 0 & = \overline{A}_{\sigma 21} y_1(k) + \overline{A}_{\sigma 22} y_2(k) + \bar{D}_{\sigma 21} y_1(k - h(k)) \\ & \quad + \bar{D}_{\sigma 22} y_2(k - h(k)) + \bar{B}_{\sigma 2} w(k) + M_2 f(.), \\ y(k) & = N^{-1}\psi(k) := [\phi_1(k), \phi_2(k)], \quad k = \overline{-h, 0}. \end{cases} \tag{3.18}$$

Trước khi phát biểu định lý, chúng tôi liệt kê các kí hiệu của các biểu thức chứa ma trận được đặt lại cho gọn như sau:

$$M^{-\top}P_lM^{-1} = \begin{pmatrix} P_{l11} & P_{l12} \\ P_{l21} & P_{l22} \end{pmatrix}, \; M^{-\top}RM^{-1} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}, \overline{M} = \begin{pmatrix} 0_{r\times n} \\ M_2 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_{l11} = 0.8G_l + 2A_l^\top P_l A_l - (1+\eta_l)E^\top P_l E - S_l\overline{M}A_l - A_l^\top\overline{M}^\top S_l + 2a_l I + 3a_l^2 P_l,$$

$$\Gamma_{l12} = 2A_l^\top P_l D_l - 2S_l\overline{M}D_l,\; \Gamma_{l13} = S_l\bar{M},\; \Gamma_{l14} = S_l\overline{M}B_l,\; \Gamma_{l15} = A_l^\top P_l,$$

$$\Gamma_{l22} = 4D_l^\top P_l D_l + 8b_l I_n + b_l^2 P_l - \eta_l^{T_l} G_l,\; \Gamma_{l26} = D_l^\top P_l,$$

$$\Gamma_{l33} = \Gamma_{l55} = \Gamma_{l66} = \frac{-1}{2(a_l + b_l + m_l)},$$

$$L_l = 1.2G_l + 2A^\top P_l A_l - (1+\eta_l)E^\top P_l E - S_l\bar{M}A_l - A^\top\bar{M}^\top S_l + 4a_l I + 3a_l^2 P_l,$$

$$\Gamma_l = \begin{pmatrix} \Gamma_{l11} & \Gamma_{l12} & \Gamma_{l13} & \Gamma_{l14} & \Gamma_{l15} & 0 \\ * & \Gamma_{l22} & 0 & 0 & 0 & \Gamma_{l26} \\ * & * & \Gamma_{l33} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Gamma_{l55} & 0 \\ * & * & * & * & * & \Gamma_{l66} \end{pmatrix},$$

$$T_l = \begin{cases} \max_{k=\overline{1,T}}(k - h(k)) \; if \; \eta_l < 1 \\ \min_{k=\overline{1,T}}(k - h(k)) \; if \; \eta_l \geq 1 \end{cases},$$

$$\Omega_l = \{x \in \mathbb{R}^n : x^\top L_l x < 0\},\; l = \overline{1,p},\; \overline{\Omega}_1 = \Omega_1 \cup \{0\},$$

$$\overline{\Omega}_l = \Omega_l \backslash \cup_{k=1}^{l-1} \overline{\Omega}_k, l = 2, 3, \ldots, p.$$

$$\gamma_1 = c_1\Big(\max_{l=\overline{1,p}}\Big(\lambda_{\max}(E^\top P_l E) + \lambda_{\max}(G_l)\frac{\eta_l^{-h-1} - 1}{\eta_l^{-1} - 1}\Big)\Big), b = c_1\|N^{-1}\|$$

$$\gamma_2 = \max_{l=\overline{1,p}}\Big((1+\eta_l)^T\gamma_1 + \alpha_l\frac{\eta_l^T - 1}{\eta_l - 1}\Big),\; \gamma_3 = \max_{l=\overline{1,p}}\frac{\lambda_{\max}(R_{11})}{\lambda_{\min}(P_{l11})},\; \gamma_4 = \gamma_2\gamma_3,$$

$$\gamma_5 = \max_{l=\overline{1,p}}\Big(\|\bar{A}_{l22}^{-1}\bar{A}_{l21}\| + \|\bar{A}_{l22}^{-1}\bar{D}_{l21}$$

$$+ \|N^{-1}\|\|\bar{A}_{l22}^{-1}\|(a_l + b_l)\Big)\max\Big(\sqrt{\frac{\gamma_4}{\lambda_{\min}(R_{11})}}, b\Big) + \|N^{-1}\|\|\bar{A}_{l22}^{-1}\|m_l d,$$

$$\gamma_6 = \max_{l=\overline{1,p}}\frac{(\|\bar{A}_{l22}^{-1}\bar{D}_{l22}\|)}{1 - \|N^{-1}\|\|\bar{A}_{l22}^{-1}\|a_l}, \gamma_7 = \frac{\gamma_5 + d\max_{l=\overline{1,p}}(\|\bar{A}|_{l22}^{-1}\bar{B}_{l12}\|)}{1 - \|N^{-1}\|\|\bar{A}_{l22}^{-1}\|a_l},$$

$$\gamma_8 = \max(\gamma_6, \gamma_6^T)b + \gamma_7\frac{\gamma_6^T - 1}{\gamma_6 - 1}.$$

Định lí 3.2.5. *Cho trước các số dương* $, c_1, c_2$, *số nguyên dương* T *và ma trận đối xứng* *xác định dương $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$, hệ (3.15) ổn định vững hữu hạn theo (c_1, c_2, T, R) nếu tồn tại các ma trận đối xứng xác định dương $P_l, G_l \in \mathbb{R}^{n\times n}$, và các ma trận $S_l \in \mathbb{R}^{n\times n}, l = \overline{1,p}$, số dương $\xi_l \geq 0, \eta_l \geq 0, l = 1, p, \sum_{l=1}^{p} \xi_l > 0$, sao cho các điều kiện sau thỏa mãn:*

$$\Gamma_l < 0,\ l = \overline{1,p}, \tag{3.19}$$

$$\sum_{l=1}^{p} \xi_l L_l < 0, \tag{3.20}$$

$$\lambda_{\max}(G^\top RG)(\gamma_4 + \gamma_8^2) \leq c_2. \tag{3.21}$$

Quy tắc chuyển mạch được xây dựng như sau: $\sigma(x(k)) = l$ khi $x(k) \in \overline{\Omega}_l$.

Chứng minh. Lược đồ chứng minh: Chứng minh định lý gồm bốn bước.

Bước 1: Chứng minh hệ chính quy và không phụ thuộc vào xung với mọi nốt được kích hoạt.

Bước 2: Xây dựng hàm Lyapunov- Krasovskii $V_l(k, x_k)$ và ước lượng $\triangle V_l(k, x_k)$

Bước 3: Xây dựng các nón lồi, thiết kế quy tắc chuyển mạch dựa trên các nón lồi.

Bước 4: Thông qua ước lượng $\triangle V_l(k, x_k)$ chúng tôi ước lượng được $x^\top(k)x(k)$ từ đó chỉ ra hệ ổn định hóa vững theo (c_1, c_2, T, R) theo thiết kế chuyển mạch.

Đầu tiên chú ý rằng nếu hệ (3.15) thỏa mãn các điều kiện (3.19), thì bởi kết quả trong [57] hệ có duy nhất nghiệm. Bây giờ, giả sử rằng hệ được kích hoạt ở nốt thứ l, nghĩa là $\sigma(x(k)) = l$, xét hàm toàn phương không âm sau:

$$V_l(k) = 2x^\top(k)E^\top P_l Ex(k) + 2\sum_{i=k-h}^{k-1} \eta_l^{k-1-i} x^\top(i)G_l x(i).$$

Xét sai phân của $V(.)$, ta có

$$\begin{aligned}
\triangle V_l(k) =& V_l(k+1) - V_l(k) \\
=& 2x^\top(k+1)E^\top P_l Ex(k+1) + 2\sum_{i=k-h+1}^{k} \eta_l^{k-i} x^\top(i)G_l x(i) \\
&- 2x^\top(k)E^\top P_l Ex(k) - 2\sum_{i=k-h}^{k-1} \eta_l^{k-i-1} x^\top(i)G_l x(i) \\
=& 2x^\top(k)(A_l^\top P_l A_l - 2E^\top P_l E)x(k) + 4x^\top(k)A_l^\top P_l D_l x(k-h(k))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ 2x^\top(k-h(k))D_l^\top P_l D_l x(k-h(k)) + 2\sum_{i=k-h+1}^{k} \eta^{k-i} x^\top(i) G_l x(i) \\
&- 2\sum_{i=k-h}^{k} \eta^{k-i-1} x^\top(i) G_l x(i) + 4x^\top(k) A_l^\top P_l B_l w(k) \\
&+ 4x^\top(k-h(k)) D_l^\top P_l B_l w(k) + 2w^\top(k) B_l^\top P_l B_l w(k) \\
&+ 4x^\top(k) A_l^\top P_l f_l(.) + 4x^\top(k-h(k)) D_l^\top P_l f_l(.) \\
&+ 4w^\top(k) B_l^\top P_l f_l(.) + 2f_l(.)^\top P_l f_l(.). \qquad (3.22)
\end{aligned}
$$

Chúng tôi thêm các ma trận trọng tự do bằng cách nhân cả hai vế của hệ (3.15) với $-4x^\top(k)S_l\overline{M}$ và chú ý rằng $\overline{M}E = 0$, ta có

$$
-4x^\top(k) S_l \overline{M}\Big(A_l x(k) + D_l x(k-h(k)) + B_l w(k) + f_l(.)\Big) = 0. \qquad (3.23)
$$

Áp dụng Bổ đề 1.3.1 (bất đẳng thức Cauchy), ta có:

$$
\begin{aligned}
&4x^\top(k) A_l^\top P_l B_l w(k) - 2w^\top(k) B_l^\top P_l B_l w(k) \\
&\qquad \le 2x^\top(k) A_l^\top P_l A_l x(k), \qquad (3.24) \\
&4x^\top(k-h(k)) D_l^\top P_l B_l w(k) - 2w^\top(k) B_l^\top P_l B_l w(k) \\
&\qquad\qquad \le 2x^\top(k-h(k)) D_l^\top P_l D_l x(k-h(k)), \qquad (3.25) \\
&4x^\top(k) A_l^\top P_l f_l(.) \le \|4x^\top(k) A_l^\top P_l\| \Big[a_l\|x(k)\| + b_l\|x(k-h(k))\| + m_l\|w(k)\|\Big] \\
&\qquad \le 2(a_l+b_l+m_l)\|x^\top(k) A_l^\top P_l\|^2 + 2a_l\|x(k)\|^2 \\
&\qquad\qquad + 2b_l\|x(k-h(k))\|^2 + 2m_l\|w(k)\|^2, \qquad (3.26) \\
&4x^\top(k-h(k)) D_l^\top P_l f_l(.) \le 4\|x^\top(k-h(k)) D_l^\top P_l\| \Big[a_l\|x(k)\| \\
&\qquad\qquad + b_l\|x(k-h(k))\| + m_l\|w(k)\|\Big] \\
&\quad \le 2(a_l+b_l+m_l)\|x^\top(k-h(k)) D_l^\top P_l\|^2 + 2a_l\|x(k)\|^2 \\
&\qquad\qquad + 2b_l\|x(k-h(k))\|^2 + 2m_l\|w(k)\|^2, \qquad (3.27) \\
&4w^\top(k) B_l^\top P_l f_l(.) \le 4\|w^\top(k) B_l^\top P_l\| \Big[a_l\|x(k)\| + b_l\|x(k-h(k))\| \\
&\quad + m_l\|w(k)\|\Big] \\
&\quad \le 2(a_l+b_l+m_l)\|w^\top(k) B_l^\top P_l\|^2 + 2a_l\|x(k)\|^2
\end{aligned}
$$

$$+ 2b_l\|x(k-h(k))\|^2 + 2m_l\|w(k)\|^2, \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned} 2f_l(.)^\top P_l f_l(.) \le 6(&a_l^2 x^\top(k) P_l x(k) + b_l^2 x^\top(h-h(k)) P_l x(h-h(k)) \\ &+ m_l^2 w^\top(k) P_l w(k)), \end{aligned} \tag{3.29}$$

$$4x^\top(k) S_l \overline{M} B_l w(k) - 2w^\top(k) w(k) \le 2x^\top(k) S_l \overline{M} B_l B_l^\top \overline{M}^\top S_l^\top x(k), \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned} &-4x^\top(k) S_l \overline{M} f_{(.)} \le 4\|x^\top(k) S_l \overline{M}\| \Big[a_l\|x(k)\| + b_l\|x(k-h(k))\| + m_l\|w(k)\|\Big] \\ &\quad \le 2(a_l + b_l + m_l)\|x^\top(k) S_l \overline{M}\|^2 \\ &\quad + 2a_l\|x(k)\|^2 + 2b_l\|x(k-h(k))\|^2 + 2m_l\|w(k)\|^2. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Từ (3.22)-(3.31) ta có

$$\begin{aligned} \triangle V_l(k) - \eta_l V_l(k) \le\, & 2x^\top(k)(G_l + 2A_l^\top P_l A_l + S_l \overline{M} B_l B_l^\top \overline{M}^\top S_l^\top \\ & + (a_l + b_l + c_l) S_l \overline{M}\overline{M}^\top S_l^\top - (1+\eta_l) E^\top P_l E) x(k) \\ & + 4x^\top(k) A_l^\top P_l D_l x(k-h(k)) + 4x^\top(k-h(k)) D_l^\top P_l D_l x(k-h(k)) \\ & - 2\eta^{k-h} x^\top(k-h) G_l x(k-h) - 2\sum_{i=k-h}^{k} \eta^{k-i-1} x^\top(i) G_l x(i) \\ & - 4x^\top(k) S_l \overline{M} A_l x(k) - 4x^\top(k) S_l \overline{M} D_l x(k-h(k)) \\ & + 6w^\top(k) B_l^\top P_l B_l w(k) + (8m_l + 2) w^\top(k) w(k) \\ & + 2(a_l + b_l + m_l)\|x^\top(k) A_l^\top P_l\|^2 + 8a_l\|x(k)\|^2 \\ & + 8b_l\|x(k-h(k))\|^2 + 2(a_l + b_l + m_l)\|x^\top(k-h(k)) D_l^\top P_l\|^2 \\ & + 2(a_l + b_l + m_l)\|w^\top(k) B_l^\top P_l\|^2 + 6(a_l^2 x^\top(k) P_l x(k) \\ & + b_l^2 x^\top(h-h(k)) P_l x(h-h(k)) + m_l^2 w^\top(k) P_l w(k)) \\ \le\, & \xi^\top(k) \Phi_l \xi(k) + x^\top(k) L_l x(k) + 2(1+4m_l) w^\top(k) w(k) \\ & + 6m_l^2 w^\top(k) P_l w(k) + 6w^\top(k) B_l^\top P_l B_l w(k) \\ & + 2(a_l + b_l + m_l)\|w^\top(k) B_l^\top P_l\|^2, \end{aligned}$$

trong đó

$$\xi(k) = \begin{pmatrix} x(k) \\ x(k-h(k)) \end{pmatrix}, \ \Phi_l = \begin{pmatrix} \Phi_{l11} & \Phi_{l12} \\ * & \Phi_{l22} \end{pmatrix},$$

$$
\begin{aligned}
\Phi_{l11} &= G_l + 2A_l^\top P_l A_l + 2S_l\overline{M}B_lB_l^\top\overline{M}^\top S_l^\top + 2(a_l+b_l+c_l)S_l\bar{M}\bar{M}^\top S_l^\top \\
&\quad - (1+\eta_l)E^\top P_l E - S_l\overline{M}A_l - A_l^\top\overline{M}S_l \\
&\quad + 2(a_l+b_l+m_l)A_l^\top P_l P_l A_l + 2a_l I + 3a_l^2 P_l \\
\Phi_{l12} &= 2A_l^\top P_l D_l - 2S_l\overline{M}D_l, \\
\Phi_{l22} &= 4D_l^\top P_l D_l + 8b_l I_n + 2(a_l+b_l+m_l)D_l^\top P_l P_l D_l + b_l^2 P_l, \\
L_l &= G_l + 2A^\top P_l A_l - (1+\eta_l)E^\top P_l E - S_l\bar{M}A_l - A^\top\bar{M}S_l + 4a_l I + 3a_l^2 P_l.
\end{aligned}
$$

Từ $x(k)\in\mathbb{R}^n$, và $\{\overline{\Omega}_i\}$ là đầy chặt nên tồn tại duy nhất $l\in\{1,2,\dots,p\}$ sao cho $x(k)\in\overline{\Omega}_l$ và $x(k)^\top L_l x(k)\le 0$. Mà $\Gamma_l<0$ và Bổ đề 1.3.3 (Bổ đề Shur), ta có $\Phi_l<0$ nên $V(k+1) < (1+\eta_l)V(k) + 2(1+4m_l)w^\top(k)w(k) + 6w^\top(k)B_l^\top P_l B_l w(k) + 6m_l^2 w^\top(k)P_l w(k) + 2(a_l+b_l+m_l)\|w^\top(k)B_l^\top P_l\|^2 = (1+\eta_l)V(k) + \alpha_l \le (1+\eta_l)^T V(0) + \alpha_l\frac{\eta_l^T-1}{\eta_l-1} \le \gamma_2$.

$$
\begin{aligned}
x^\top(k)E^\top REx(k) = y^\top(k)N^\top E^\top RENy(k) &= y^\top(k)\begin{pmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} y(k) \\
&= y_1^\top(k)R_{11}y_1(k) \\
&\le \frac{\lambda_{\max}(R_{11})}{\lambda_{\min}(P_{l11})} y_1^\top(k)P_{l11}y_1(k) \\
&< \gamma_3 V(k,x_k) \le \gamma_3\gamma_2 = \gamma_4, \quad k=\overline{0,T},
\end{aligned}
$$

kéo theo

$$
\|y_1(k)\| \le \sqrt{\frac{\gamma_4}{\lambda_{\min}(R_{11})}}, \quad \forall k=\overline{0,T}. \tag{3.32}
$$

Đặt

$$
\begin{aligned}
p(k) &= \|A_{l22}^{-1}A_{l21}y_1(k)\| + \|A_{l22}^{-1}D_{l21}y_1(k-h(k))\| \\
&\quad + \|N^{-1}\|\|A_{l22}^{-1}\|\Big(a_l\|y_1(k)\| + b_l\|y_1(k-h(k))\| + m_l d\Big).
\end{aligned}
$$

Để ước lượng $p(k)$, chúng tôi xét hai trường hợp .
Trường hợp 1: $k-h(k)\ge 0$, thì từ (3.32) ta có

$$
\|y_1(k-h(k))\| \le \sqrt{\frac{\gamma_4}{\lambda_{\min}(R_{11})}}.
$$

Trường hợp 2: $k-h(k)<0$, thì

$$
\|y_1(k-h(k))\| = \|\phi_1(k)\| \le \|N^{-1}\|\|\psi\| \le b.
$$

Do vậy, ta có

$$p(k) \leq \Big(\|A_{l22}^{-1}A_{l21}\| + \|A_{l22}^{-1}D_{l21} + \|N^{-1}\|\|A_{l22}^{-1}\|(a_l + b_l) \Big) \max\Big(\sqrt{\frac{\gamma_4}{\lambda_{\min}(R_{11})}}, b \Big) + \|N^{-1}\|\|A_{l22}^{-1}\|m_l d = \gamma_5.$$

Hơn nữa, từ phương trình thứ hai của hệ (3.18) ta có:

$$(1 - \|A_{l22}^{-1}N^{-1}\|a_l)\|y_2(k)\| = p(k) + (\|A_{l22}^{-1}D_{l22}\| + \|A_{l22}^{-1}N^{-1}\|b_l) y_2(k-h(k))\| + \|A_{l22}^{-1}B_{l12}\|d.$$

Chú ý rằng $h(k) \leq h$, nên bằng phương pháp hồi quy ta có

$$\|y_2(k-h(k))\| \leq \sup_{s=\overline{-h,0}} \|y_2(k+s)\|,$$

và đặt $g(k) = \|y_2(k)\|$, ta có

$$g(k) \leq \gamma_6 \sup_{s=\overline{-h,0}} g(k+s) + \gamma_7.$$

Từ đó ta thu được

$$\begin{aligned}\|y_2(k)\| &\leq \gamma_6 \sup_{s=\overline{-h,0}} f(k+s) + \gamma_7 \\ &\leq \max(\gamma_6, \gamma_6^T) \sup_{s=\overline{-h,0}} \|y_2(s)\| + \gamma_7\Big(\frac{\gamma_6^T - 1}{\gamma_6 - 1}\Big) = \gamma_8. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Cuối cùng, kết hợp các điều kiện (3.32),(3.33) với mọi $k = \overline{1,T}$, ta được

$$\begin{aligned} x^\top(k)Rx(k) &= y^\top(k)N^\top RNy(k) \\ &\leq \lambda_{\max}(N^\top RN)(\|y_1(k)\|^2 + \|y_2(k)\|^2) \\ &\leq \lambda_{\max}(N^\top RN)\Big(\frac{\gamma_4}{\lambda_{\max}(R_{11})} + \gamma_8^2\Big) \\ &\leq c_2, \quad \forall k = \overline{0,T}, \\ x^\top(k)Rx(k) &\leq \frac{\lambda_{\max}(R)}{\lambda_{\min}(G_l)} x^\top(k)G_l x(k) \leq \frac{\lambda_{\max}(R)}{\lambda_{\min}(G_l)} V_l(k+1) \\ &\leq \frac{\lambda_{\max}(R)}{\lambda_{\min}(G_l)}\Big((1+\eta_l)V_l(k+1) + \alpha_l\Big) \\ &\leq \frac{\lambda_{\max}(R)}{\lambda_{\min}(G_l)}\Big((\gamma_2^{T+1}\gamma_1 + \alpha_l \frac{\gamma_2^{T+1} - 1}{\gamma_2 - 1}\Big) \leq \frac{\lambda_{\max}(R)}{\lambda_{\min}(G_l)}\gamma_3 \leq c_2 \end{aligned}$$

□

Ví dụ 3.3. Xét hệ (3.15), với

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0.21 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.1 \\ 0.2 & 3.5 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.1 \\ 0.3 & 2.5 \end{pmatrix},$$
$$D_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.2 & 1 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.2 & 1 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 \end{pmatrix},$$
$$B_2 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}, R = M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & -0.21 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cho $d = 0.01, h = 2, c_1 = 0.3, c_2 = 197, T = 20$, dùng LMI toolbox của phần mềm Matlab giải các điều kiện (3.19)-(3.21) thỏa mãn với $\eta_1 = 1.6,\ \eta_2 = 1.6$ và

$$P_1 = \begin{pmatrix} 29.8695 & -0.0306 \\ -0.0306 & 0.0340 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 21.4027 & -0.2049 \\ 4.4946 & 0.9570 \end{pmatrix},$$
$$G_1 = \begin{pmatrix} 72.7686 & 0.4383 \\ 0.4383 & 4.8421 \end{pmatrix}, G_2 = \begin{pmatrix} 21.1876 & 1.2650 \\ 1.2650 & 2.3360 \end{pmatrix},$$

$$S_1 = \begin{pmatrix} -29.8920 & -4.5410 \\ 0.0363 & 0.7549 \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} -23.9784 & -3.1452 \\ 0.6743 & 0.4524 \end{pmatrix}.$$

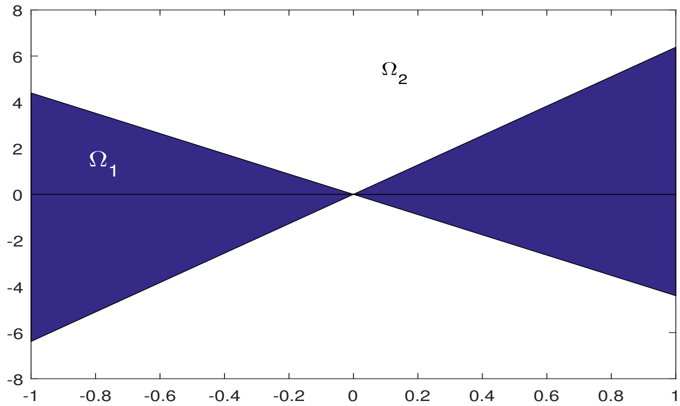
Và ta tính được

$$L_1 = \begin{pmatrix} 5.2442 & 3.3200 \\ 3.3200 & -3.2561 \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} -18.8029 & -1.8273 \\ -1.8273 & -1.0698 \end{pmatrix},$$
$$L_1 + L_2 = \begin{pmatrix} -13.5587 & 1.4927 \\ 1.4927 & -4.3260 \end{pmatrix} < 0.$$

Do dó, hệ ma trận $\{L_1, L_2\}$ là đầy chặt. Họ nón lồi $\bar{\Omega}_l$ được mô tả trong Hình 3.1)

$$\bar{\Omega}_1 = \{x = (x_1, x_2)^\top : (x_1 - 6.3872x_2)(x_1 + 4.3992x_2) \geq 0\}$$
$$\bar{\Omega}_1 = \{x = (x_1, x_2)^\top : (x_1 - 6.3872x_2)(x_1 + 4.3992x_2) < 0\}$$

Từ Định lý 3.3, hệ (3.15) với quy tắc chuyển mạch $\sigma(x(k)) = l$ khi $x(k) \in \bar{\Omega}_l$, là ổn định vững hữu hạn thời gian theo $(0.3, 197, 20, R)$.



Hình 3.1: Tập $\bar{\Omega}_1$ và $\bar{\Omega}_2$.

3.3 Kết luận chương 3

Chương 3 trình bày kết quả nghiên cứu bài toán ổn định hóa vững hữu hạn thời gian cho một số hệ phương trình suy biến rời rạc có trễ biến thiên bị chặn khoảng, và hệ suy biến chuyển mạch với trễ biến thiên bị chặn. Kết quả đạt được như sau:

- Thiết lập các điều kiện đủ mới cho tính ổn định vững hữu hạn thời gian cho hệ suy biến rời rạc có trễ biến thiên. Dựa trên các điều kiện nhận được, chúng tôi thiết kế điều khiển phản hồi để đảm bảo tính ổn định vững hữu hạn thời gian cho hệ.
- Đưa ra một điều kiện đủ về tính ổn định hữu hạn thời gian cho hệ tuyến tính rời rạc chuyển mạch.

KẾT LUẬN

Luận án nghiên cứu tính ổn định và ổn định hóa hữu hạn thời gian cho một số hệ phương trình vi phân suy biến có trễ.

Những kết quả đã được chứng minh trong luận án:

- Hệ suy biến liên tục:
  - Đưa ra một số điều kiện đủ mới về tính ổn định vững hữu hạn thời gian cho một số lớp hệ suy biến có trễ hằng.
  - Mở rộng kết quả đối với hệ phương trình vi phân suy biến trễ hằng đối với hệ có trễ biến thiên dạng khoảng không đòi hỏi điều kiện khả vi. Đồng thời đưa ra quy tắc thiết kế điều khiển ngược đảm bảo tính ổn định vững với thiết kế điều khiển phản hồi đảm bảo tính ổn định vững hữu hạn thời gian. Đây là kết quả đầu tiên về tính ổn định hữu hạn thời gian cho hệ suy biến có trễ biến thiên liên tục dạng khoảng không khả vi.
- Hệ suy biến rời rạc
  - Thiết lập các điều kiện đủ mở rộng về tính ổn định vững hữu hạn thời gian cho hệ suy biến rời rạc có trễ biến thiên bị chặn thông qua việc giải các bất đẳng thức ma trận tuyến tính.
  - Dựa trên xây dựng một quy tắc chuyển mạch dạng hình học, chúng tôi chứng minh các điều kiện đủ mới về tính ổn định vững hữu hạn thời gian cho hệ suy biến chuyển mạch rời rạc có trễ biến thiên bị chặn.

Điểm mới của luận án so với các kết quả đã có:

- Nghiên cứu bài toán ổn định hữu hạn cho hệ suy biến có trễ biến thiên.
- Hàm trễ bị chặn dạng khoảng và không đòi hỏi tính khả vi.
- Xây dựng quy tắc chuyển mạch dạng hình học để giải bài toán ổn định hữu hạn thời gian cho hệ suy biến có trễ biến thiên.

Luận án mở ra một số vấn đề có thể tiếp tục nghiên cứu:

- Nghiên cứu tính ổn định, ổn định hoá hữu hạn thời gian cho hệ suy biến có trễ không liên tục.
- Giải một số bài toán điều khiển ổn định hữu hạn thời gian (bài toán ổn định hoá, bài toán điều khiển H_∞) cho hệ suy biến có trễ không bị chặn

DANH MỤC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC CỦA TÁC GIẢ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

[1]. V. N. Phat, N. H. Muoi, M. V. Bulatov, Robust finite-time stability of linear differential-algebraic delay equations, *Linear Algebra and its Applications* , **487**(2015), 146-157. (SCI)

[2]. N. H. Muoi, V. N. Phat, P. Niamsup, Criteria for robust finite-time stabilisation of linear singular systems with interval time-varying delay, *IET Control Theory and Applications*, **11(12)**(2017), 1968-1975. (SCI)

[3]. N. H. Muoi, G. Rajchakit, V. N. Phat, LMI approach to finite-time stability and stabilization of singular linear discrete delay systems, *Acta Applicandae Mathematicae*, **146(1)**(2016), 81-93. (SCI)

[4]. N. H. Muoi, Finite-time stability of nonlinear singular switched discrete time systems with time-varying delay, *Communications on Applied Nonlinear Analysis*, **26(2)** (2019), 78-89. (Scopus)

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

[1] Lê Văn Hiện, *Tính ổn định của một số lớp hệ phương trình vi phân và điều khiển*, Luận án tiến sĩ toán học, Đại học Sư phạm Hà Nội,2010.

[2] Vũ Ngọc Phát, *Nhập Môn Lý Thuyết Điều Khiển Toán Học*, NXB Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2001.

[3] Nguyễn Hữu Sáu, *Tính ổn định của hệ động lực học tuyến tính suy biến có trễ*, Luận án tiến sĩ toán học, Viện Hàn Lâm Khoa Học và Công nghệ Việt Nam, Viện Toán Học, 2017.

Tiếng Anh

[4] F. Amato, M. Ariola, P. Dorato, Finite–time control of linear systems subject to parametric uncertainties and disturbances, *Automatica*, **37**(2001), 1459–1463.

[5] F. Amato, M. Ariola, Finite–time control of discrete–time linear systems, *IEEE Trans. Autom. Control*, **50**(2005), 724-–729.

[6] F. Amato, R. Ambrosino, M. Ariola, C. Cosentino, G. D. Tommasi, *Finite–time Stability and Control*, Lecture Notes in Control and In Information Sciences, **453**, Springer London, 2014.

[7] F. Amato, R. Ambrosino, C. Cosentino, G. D. Tommasi, Finite–time stabilization of impulsive dynamical linear systems, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, **5**(2011), 89–101.

[8] E. K. Boukas, Delay–dependent robust stabilizability of singular linear systems with delays, *Stoch. Anal. Appl.*, **27**(2009), 637–655.

[9] S. Boyd, L. E. Ghaoui, V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, Philadelphia, 1994.

[10] K. E. Brenan, S. L. Campbell, L. R. Petzold, *Numerical Solution of Initial Value Problems in Differential Algebraic Equations*, SIAM, Philadelphia, PA, 1996.

[11] S. L. Campbell, *Singular Systems of Differential Equations*, Pitman, London, 1980.

[12] S. L. Campbell, V. H. Linh, Stability criteria for differential–algebraic equations with multiple delays and their numerical solutions, *Appl. Math. Comput.*, **208**(2009), 397–415.

[13] M. Chadli, H. R. Karimi, P. Shi, On stability and stabilization of singular uncertain Takagi—Sugeno fuzzy systems, *Journal of the Franklin Institute*, **351**(2014), 1453–1463.

[14] H. Chen, P. Hu, New result on exponential stability for singular systems with two interval time–varying delays, *IET Control Theory Appl.*, **7**(2013), 1941–1949.

[15] G. Chen, Y. Yang, Finite–time stability of switched positive linear systems, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **24**(2014), 179–190.

[16] J. Cheng, S. Zhong, Q. Zhong, H. Zhu, Y. Du, Finite–time boundedness of state estimation for neural networks with time–varying delays, *Neurocomputing*, **129**(2014), 257–264.

[17] L. Dai, *Singular Control Systems, Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Berlin Springer–Verlag, 1989.

[18] P. Dorato, Short time stability in linear time–varying systems, *In Proc IRE Int Convention Record*, Part 4(1961), 83–87.

[19] R. Englanda, S. Gómezb, R. Lamourc, The properties of differential–algebraic equations representing optimal control problems, *Appl. Numer. Math.*, **59**(2009), 2357–2373.

[20] P. Gahinet, A. Nemirovskii, A. J. Laub, M. Chilali, *LMI Control Toolbox For use with MATLAB*, The MathWorks, Inc, 1995.

[21] G. Garcia, S. Tarbouriech, J. Bernussou, Finite–time stabilization of linear time-varying continuous systems, *IEEE Trans. Auto. Contr.*, **54**(2009), 364–369.

[22] K. C. Goh, M. G. Safonov, G. P. Papavassilopoulos, A global optimization approach for the BMI problem, *Decision and Control, Proceedings of the 33rd IEEE Conference on. V 3. IEEE*, (1994).

[23] A. Haidar, E. K. Boukas, Exponential stability of singular systems with multiple time-varying delays, *Automatica*, **45.2**(2009), 539–545.

[24] J. K. Hale, S. M. Verduyn Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer, New York, 2013.

[25] L. Grujic, Finite time noninertial adaptive control, *AIAA Journal*, **15**(1977), 354–359.

[26] L.V. Hien, V.N. Phat, Exponential stabilization for a class of hybrid systems with mixed delays in state and control, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, **3**(2009), 259–265.

[27] L. V. Hien, L. H. Vu, V. N. Phat, Improved delay–dependent exponential stability of singular systems with mixed interval time–varying delays, *IET Contr. Theory Appl*, **9** (2015), 1364–1375.

[28] L. Hou, G. Zong, Y. Wu, Finite-time control for switched delay systems via dynamic output feedback, *Int. J. Inno. Comput. Inform. Contr.*, **8**(2012), 4901–4913.

[29] S. Huang, Z. Xiang, H. R. Karimi, Input-output finite–time stability of discrete–time impulsive switched linear systems with state delays, *Circuits, Systems, and Signal Processing*, **33**(2014), 141–158.

[30] G. Kamenkov, On stability of motion over a finite interval of time, *Journal of Applied Math. and Mechanics*, **17**(1953), 529–540.

[31] D. Kapper, A. Kvarna, A. Rayler, Stability analysis and classification of Runge-Kutta methods for index 1 stochastic differential-algebraic equations with scalar noise, *Appl. Numer. Math.*, **96**(2015), 24–44.

[32] V. L. Kharitonov, *Time-Delay Systems: Lyapunov Functionals and Matrices*, Birkhauser, Springer, Berlin, 2013.

[33] R. Krishnasamy, P. Balasubramaniam, A descriptor system approach to the delay–dependent exponential stability analysis for switched neutral systems with nonlinear perturbations, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, **15**(2015), 23–36.

[34] T. H. Lee, J. H. Park, S. Xu, Relaxed conditions for stability of time–varying delay systems, *Automatica*, **75**(2017), 11–15.

[35] D. Liberzon, *Switching in Systems and Control*, Springer, Boston, 2003.

[36] J. X. Lin, F. S. Min, Robust exponential admissibility of uncertain switched singular time–delay systems, *Acta Automatica Sinica*, **36**(2010), 1773–1779.

[37] Y. Lin, F. An, Finite–time control of linear discrete singular systems with disturbances, *In: Jin, D., Lin, S. (eds.) Advances in MSEC*, **1**(2011), 569-–573.

[38] C. Liu, W. Liu, X. Liu, C. Li, Q. Han, Stability of switched neural networks with time delay, *Nonlinear Dynamics*, **79**(2015), 2145–2154.

[39] D. G. Luenberger, A. Arbel, Singular denamic leotief systems, *Econometrica*, **45**(1977), 991–995.

[40] Y. Mao, Yanbing, H. Zhang, Z. Zhang, Finite–time stabilization of discrete–time switched nonlinear systems without stable subsystems via optimal switching signal design, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **25**(2017), 172–180.

[41] A. Michel, D. Porter, Practical stability and finite–time stability of discontinuous systems, *IEEE Trans. Circuit Theory*, **CT-19**(1972), 123–129.

[42] E. Moulay, M. Dambrine, N. Yeganefar, W. Perruquetti, Finite–time stability and stabilization of time-delay systems, *Syst. Contr. Letters*, **57**(2008), 561–566.

[43] P. C. Muller, Stability of linear mechanical systems with holonomic constraints, *Applied Mechanics Reviews*, **46** (1993), 160–164.

[44] P. Niamsup, K. Ratchagit, V. N. Phat, Novel criteria for finite–time stabilization and guaranteed cost control of delayed neural networks, *Neurocomputing*, **160**(2015), 281–286.

[45] P. Niamsup, V. N. Phat, A new result on finite-time control of singular linear time-delay systems, *Appl. Math. Letters*, **60**(1)(2016), 1–7.

[46] P. Niamsup, N. T. Thanh, V. N. Phat, Robust finite-time stabilization of nonlinear systems with multiple delays in states and controls, *Commun. Appl. Nonl. Anal.*, **23**(2016), 1–13.

[47] V. N. Phat, Switched controller design for stabilization of nonlinear hybrid systems with time-varying delays in state and control, *Journal of the Franklin Institute*, **347**(2010), 195–207.

[48] V. N. Phat, N. H. Sau, On exponential stability of singular positive delayed systems, *Appl. Math. Letters*, **38**(2014), 67–72.

[49] V. N. Phat, N. H. Sau, On exponential stability of singular positive delayed systems, *Appl. Math. Letters*, **38**(1)(2014), 67–72.

[50] A. V. Savkin, R. J. Evans, *Hybrid Dynamical Systems: Controller and Sensor Switching Problems*, Springer, New York, 2001.

[51] L. F. Shampine, P. Gahinet, Delay–differential–algebraic equations in control theory, *Appl. Numer. Math.*, **56**(2006), 574–588.

[52] A. Seuret, F. Gouaisbaut, Wirtinger–based integral inequality: Application to time-delay systems, *Automatica*, **49**(2013), 2860–2866.

[53] S. B. Stojanovic, D. L. J. Debeljkovic, N. Dimitrijevic, Finite–time stability of discrete-time systems with time–varying delay, *Chem. Ind. Chem. Eng*, **18**(2012), 525-–533.

[54] T. Stykel, On criteria for asymptotic stability of differential–algebraic equations, *Z. Angew. Math. Mech.*, **92**(2002), 147–158.

[55] Z. D. Sun, X. Zhao, J. Huang, Absolute exponential stability of switched nonlinear time-delay systems, *J. Frankl. Inst.*, **353**(2016), 1249–1267.

[56] N. T. Thanh, P. Niamsup, V. N. Phat, Finite–time stability of singular nonlinear switched time–delay systems: A singular value decomposition approach, *Journal of the Franklin Institute*, **354**(2017), 3502–3518.

[57] L. A. Tuan, V. N. Phat, Existence of solutions and finite–time stability for nonlinear singular discrete-time neural networks, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, (2018), 1–20.

[58] F. Uhlig , A recuring theorem about pairs of quadratic forms and extensions, *Linear Algebra Appl.*, **25**(1979), 219–237.

[59] W. R. Wade, *An Introduction to Analysis*, Prentice Hall, New Jersey, 2009.

[60] L. Weiss, E. F. Infante, Finite time stability under perturbing forces and on product spaces, *IEEE Trans. Autom. Control*, **12**(1967), 54–59.

[61] S. Xu, C. Yang, H_∞ state feedback control for discrete singular systems, *IEEE Trans. Autom. Control*, **45**(2000), 1405—1409.

[62] S. Xu, C. Yang, Y. Niu, J. Lam, Robust stabilization for uncertain discrete singular systems, *Automatica*, **37**(2001), 769—774.

[63] S. Xu, P. V. Dooren, S. Radu, J. Lam, Robust stability and stabilization for singular systems with state delay and parameter uncertainty, *IEEE Trans. Autom. Contr.*, **47**(2002), 1122-1128.

[64] D. Yue, J. Lam, D.W. Ho, Delay-dependent robust exponential stability of uncertain descriptor systems with time–delaying delays, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, **12** (2005), 129–149.

[65] I. Zamani, M. Shafiee, A. Ibeas, Exponential stability of hybrid switched nonlinear singular systems with time-varying delay, *Journal of the Franklin Institute*, **350**(2013), 171–193.

[66] Zhai, Guisheng, M. Ikeda, Y. Fujisaki, Decentralized H_∞ controller design: a matrix inequality approach using a homotopy method, *Automatica*, **37**(2001), 565–572.

[67] J. Zhang, X. Zhao, J. Huang, Absolute exponential stability of switched nonlinear time-delay systems, *Journal of the Franklin Institute*, **353**(2016), 1249–1267.

[68] F. Zhiguang, J. Lam, On reachable set estimation of singular systems, *Automatica*, **52**(2015), 146–153.

[69] F. Zhiguang, J. Lam, H. Gao, $\alpha-$dissipativity analysis of singular time–delay systems, *Automatica*, **47**(2011), 2548–2552.

[70] L. Zhou, D. W. C. Ho, G. Zhai, Stability analysis of switched linear singular systems, *Automatica*, **49**(2013), 1481–1487.

[71] W. Zhu, L. R. Petzold, Asymptotic stability of linear delay differential–algebraic equations and numerical methods, *Appl. Numer. Math.*, **24**(1997), 247–264.

[72] S. Zhu, Z. Li, C. Zhang, Delay decomposition approach to delay–dependent stability for singular time–delay systems, *IET Control Theory Appl.*, **4**(11)(2010), 2613–2620.