VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

VIỆN TOÁN HỌC

NGUYỄN THỊ HỒNG

MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN ĐƯỢC VỮNG CỦA HỆ ĐỘNG LỰC MÔ TẢ BỞI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CÓ TRỄ

Chuyên ngành: Phương trình vi phân và tích phân
Mã số: 9 46 01 03

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HÀ NỘI - 2021

Luận án được hoàn thành tại: Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt nam

Tập thể hướng dẫn khoa học:

- GS. TSKH. Nguyễn Khoa Sơn

- PGS. TS. Đỗ Đức Thuận

Phản biện 1: PGS. TSKH. Vũ Hoàng Linh, Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội

Phản biện 2: PGS. TSKH. Đoàn Thái Sơn, Viện Toán học

Phản biện 3: PGS. TS. Lê Văn Hiện, Đại học Sư Phạm Hà Nội

Luận án được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án cấp Viện, họp tại Viện Toán học-Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam vào hồi 15.00 giờ ngày 04 tháng 2 năm 2021

Có thể tìm luận án tại:

- Thư viện Quốc gia Hà Nội
- Thư viện Viện Toán học

Mở đầu

Bài toán điều khiển được là bài toán cơ bản trong lý thuyết điều khiển. Bài toán này đã được nghiên cứu từ những năm 60 của thế kỉ XX và thu hút sự quan tâm nghiên cứu của rất nhiều nhà toán học. Một trong những công trình đầu tiên là bài báo của R.E. Kalman năm 1962. Trong công trình này, tác giả xét hệ điều khiển tuyến tính

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), t \geqslant 0, \tag{1}$$

với $x(t) \in \mathbb{K}^n$, $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{K}^{n\times m}$ và $u(t) \in \mathbb{K}^m$. Khi đó, hệ (1) được gọi là điều khiển được nếu với bất kì trạng thái cho trước x_0 và trạng thái mong muốn x_1 cho trước, tồn tại thời gian $T > 0$ và hàm điều khiển đo được $u(t) \in \mathbb{K}^m$ với $0 \leqslant t \leqslant T$ sao cho nghiệm tương ứng $x(t) = x(x_0, u, t)$ của bài toán Cauchy với điều kiện ban đầu $x(0) = x_0$ của hệ (1) thỏa mãn $x(T) = x_1$. R.E. Kalman đã chứng minh được rằng:

$$\text{Hệ (1) điều khiển được hoàn toàn} \iff \operatorname{rank}[B, AB, ..., A^{n-1}B] = n. \tag{2}$$

Năm 1969, M.L.J. Hautus đã chứng minh một tiêu chuẩn điều khiển được khác tương đương với (2) như sau:

$$\text{Hệ (1) điều khiển được hoàn toàn} \iff \operatorname{rank}\,[A - \lambda I_n, B] = n, \forall \lambda \in \mathbb{C}. \tag{3}$$

Cho đến nay lý thuyết điều khiển được đã đạt được nhiều kết quả cho các hệ điều khiển mô tả bởi phương trình sai phân, phương trình phi tuyến, phương trình vi phân hoặc sai phân đại số, phương trình vi phân và sai phân trong không gian vô hạn chiều... Các kết quả này cũng được mở rộng cho các hệ điều khiển mô tả bởi các phương trình vi phân hoặc sai phân có trễ theo biến thời gian. Lớp các hệ này đóng vai trò rất quan trọng trong thực tiễn, đặc biệt là hệ động lực được mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm dạng:

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + \int_{-h}^{0} d[\eta(\theta)]x(t+\theta) + B_0u(t), t \geqslant 0, \tag{4}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{K}^n$, $A_0 \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $B_0 \in \mathbb{K}^{n\times m}$, $\eta(\cdot) = (\eta_{ij}(\cdot))_{i,j=\overline{1,n}} \in BV([-h, 0], \mathbb{K}^{n\times n})$ là hàm ma trận với các thành phần η_{ij} là các hàm có biến phân giới nội trên đoạn

$[-h, 0]$, và tích phân ở đây được hiểu theo nghĩa Lebesgue-Stieltjes. Chú ý rằng, hệ (4) bao gồm một số trường hợp đặc biệt như hệ tuyến tính có trễ rời rạc dạng:

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t - h_1) + ... + A_kx(t - h_k) + B_0u(t), t \geqslant 0, \tag{5}$$

hay các hệ tuyến tính có các trễ phân phối dạng

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + \int_{-h}^{0} Q(\theta)x(t + \theta)d\theta + B_0u(t), t \geqslant 0, \tag{6}$$

trong đó $0 < h_1 < h_2 < ... < h_k$ là các hằng số, các $A_i \in \mathbb{K}^{n\times n}$, với mọi $i = 0, 1, ..., k$ và $Q(\cdot) \in L_p([-h, 0], \mathbb{K}^{n\times n})$. Lý thuyết phương trình vi phân tuyến tính có trễ trên các không gian hàm đã được nghiên cứu bởi nhiều nhà toán học như J. Hale, M.C. Delfour, H.T. Banks, C. Bernier, A. Manitius, R. Triggiani. Khác với trường hợp hệ điều khiển tuyến tính (1), không gian trạng thái của hệ điều khiển có trễ (4) được mô tả bởi các không gian hàm, ví dụ như không gian các hàm số liên tục $C([-h, 0], \mathbb{K}^n)$, không gian Sobolev $W_2^1([-h, 0], \mathbb{K}^n)$, hay không gian Hilbert $M_2(\mathbb{K}) := \mathbb{K}^n \times L_2([-h, 0], \mathbb{K}^n)$. Vì vậy, có các khái niệm khác nhau về điều khiển được đối với hệ (4) như điều khiển được Euclide trên không gian trạng thái $\mathbb{K}^n$, điều khiển được chính xác trên các không gian hàm, điều khiển được xấp xỉ, điều khiển được phổ... và những khái niệm này quan hệ mật thiết với việc lựa chọn không gian trạng thái. Các khái niệm và tính chất điều khiển được cũng được nghiên cứu cho các không gian $M_p := \mathbb{K}^n \times L_p([-h, 0], \mathbb{K}^n)$, với $1 < p < \infty$. Hiện nay để nghiên cứu bài toán điều khiển được trong các không gian hàm của hệ (4), người ta sử dụng hai cách tiếp cận chính: Cách thứ nhất là sử dụng công thức biểu diễn nghiệm trực tiếp và cách thứ hai là sử dụng lý thuyết nửa nhóm toán tử liên tục mạnh. Theo kết quả của R. Triggiani, hệ (4) không bao giờ điều khiển được chính xác trên không gian trạng thái $M_2(\mathbb{K})$. Bên cạnh đó, một số điều kiện cần và đủ của tính điều khiển được xấp xỉ, điều khiển được Euclide, điều khiển được phổ của hệ (4) trên không gian trạng thái $\mathbb{R}^n \times L_2([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ đã được thiết lập. Năm 1981, Manitius đã thiết lập các tiêu chuẩn hệ điều khiển tuyến tính có trễ rời rạc (5) điều khiển được xấp xỉ. Các tiêu chuẩn này có thể xem như một dạng mở rộng của điều kiện Hautus (3), trong đó thay cho ma trận đặc trưng $A - \lambda I_n$, tác giả sử dụng đến ma trận của tựa đa thức đặc trưng (*characteristic quasi polynomial*) của hệ (5), $P(\lambda) = A_0 + e^{-h_1\lambda}A_1 + ... + e^{-h_N\lambda}A_N - \lambda I_n$.

Năm 1997, N. K. Son đã đưa ra điều kiện cần và đủ để hệ (4) điều khiển được xấp xỉ. Các điều kiện này không những được đặt lên ma trận của tựa đa thức đặc trưng $P(\lambda) = A_0 + \int_{-h}^{0} d[\eta(\theta)]e^{\lambda\theta} - \lambda I_n$ của hệ (4) mà còn được đặt lên các toán tử cấu trúc xác định trên các không gian vô hạn chiều.

Bên cạnh bài toán điều khiển được của hệ tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm, bài toán điều khiển được của hệ tuyến tính trung tính (neutral system)

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h) + A_{-1}\dot{x}(t-h) + Bu(t), t \geqslant 0, \tag{7}$$

cũng nhận được quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học. Thông qua lý thuyết nửa nhóm toán tử liên tục mạnh, D.A. O'Connor và T.J. Tarn đã đưa ra các tiêu chuẩn đại số đơn giản về tính điều khiển được chính xác của hệ trung tính (7) trong không gian Sobolev $W_2^1([-h,0],\mathbb{R}^n)$, tính điều khiển được xấp xỉ trên không gian $W_2^1([-h,0],\mathbb{R}^n)$ của hệ (7) và tính điều khiển được Euclide trên không gian Euclide $\mathbb{C}^n$ của hệ (7). Các điều kiện này cũng sử dụng đến ma trận của tựa đa thức đặc trưng $P(\lambda) = A_0 + e^{-h\lambda}A_1 + \lambda e^{-h\lambda}A_{-1} - \lambda I_n$ của hệ (7).

Trên thực tế, các mô hình toán học là xấp xỉ, gần đúng của các mô hình thực tiễn, và có những tính chất có thể đúng với mô hình toán học nhưng chưa chắc đã đúng với mô hình thực tế. Vì vậy, việc nghiên cứu sự bền vững của các tính chất định của các hệ động lực như tính ổn định tiệm cận của nghiệm, tính điều khiển được của hệ thống... trong phạm vi nhiễu bé, và đo độ bền vững của chúng là rất cần thiết. Cụ thể để đo tính bền vững của tính điều khiển được hay khoảng cách từ một hệ điều khiển được đến tập các hệ thống không điều khiển được, người ta đưa ra khái niệm bán kính điều khiển được của hệ (1). Khái niệm này được đề cập và nghiên cứu lần đầu tiên bởi C. C. Paige năm 1981. Giả sử hệ (1) là điều khiển được, khi đó bán kính điều khiển được định nghĩa bởi

$$\begin{aligned} r_{\mathbb{K}}(A,B) := \inf\{&\|[\Delta_1,\Delta_2]\|, [\Delta_1,\Delta_2] \in \mathbb{K}^{n\times n}\times\mathbb{K}^{n\times m} \\ &\text{sao cho } [A+\Delta_1, B+\Delta_2] \text{ không điều khiển được}\}. \end{aligned} \tag{8}$$

Trong trường hợp chuẩn các ma trận được xem xét là chuẩn phổ, C. C. Paige đã đưa ra công thức tính bán kính điều khiển được phức (tức là $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Tuy nhiên, các đánh giá đó còn rất phức tạp. Ba năm sau, R. Eising đã phát triển kết quả này và đưa ra công thức tính bán kính điều khiển được phức tốt hơn

$$r_{\mathbb{C}}(A,B) = \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \sigma_{\min}[A-\lambda I, B], \tag{9}$$

ở đây $\sigma_{\min}[A-\lambda I, B]$ là giá trị kì dị nhỏ nhất của ma trận $[A-\lambda I, B]$. Các bài toán về các bán kính điều khiển được có cấu trúc cũng được đề xuất và một trong các cấu trúc nhiễu được quan tâm của hệ (1) là nhiễu afin dạng

$$[A,B] \rightsquigarrow [A,B] + D\Delta E, \tag{10}$$

ở đó $D \in \mathbb{K}^{n\times l}$, $E \in \mathbb{K}^{q\times(n+m)}$ là các ma trận đã cho trước, và $\Delta \in \mathbb{K}^{l\times q}$ là ma trận chưa biết. Khi đó, bán kính điều khiển được cấu trúc tương ứng với cấu trúc nhiễu

(10) của hệ điều khiển được (1) được định nghĩa

$$r_{\mathbb{K}}^{D,E}(A,B) = \inf\{\|\Delta\| : \Delta \in \mathbb{K}^{l\times q}, [A,B] + D\Delta E \text{ không điều khiển được}\}. \quad (11)$$

Tiếp theo, bằng việc sử dụng các tính chất toán tử đa trị tuyến tính, N.K. Son và D.D. Thuan đưa ra công thức tính:

$$r_{\mathbb{C}}^{D,E}(A,B) = \frac{1}{\sup_{\lambda\in\mathbb{C}} \|EW(\lambda)^{-1}D\|}, \quad (12)$$

với chuẩn ma trận được xét là chuẩn bất kì. Như vậy, các bài toán về bán kính điều khiển được đối với hệ điều khiển tuyến tính (1) đến bây giờ đã khá hoàn thiện. Tuy nhiên, bài toán nghiên cứu về sự bền vững của tính điều khiển được đối với các hệ điều khiển tuyến tính có trễ, các hệ tuyến tính trung tính cho đến bây giờ vẫn chưa có kết quả nào. Dưới sự hướng dẫn của GS. TSKH. Nguyễn Khoa Sơn và PGS. TS. Đỗ Đức Thuận, đề tài nghiên cứu của tôi là "*Một số bài toán điều khiển được vững của hệ động lực mô tả bởi phương trình vi phân có trễ*". Luận án này được viết và hoàn thành tại Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.

Mục tiêu của luận án là nghiên cứu sự bền vững của tính điều khiển được của hệ điều khiển tuyến tính có trễ trong ba trường hợp: hệ điều khiển tuyến tính có trễ rời rạc (5), hệ tuyến tính trung tính (7) và hệ điều khiển tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm (4) khi các ma trận của các hệ này được nhiễu có cấu trúc.

Công cụ chủ yếu được luận án sử dụng là các tiêu chuẩn điều khiển được của các hệ này, đặc biệt là các tiêu chuẩn được mô tả dưới dạng mở rộng của điều kiện hạng Hautus. Kỹ thuật then chốt được dùng là lý thuyết toán tử đa trị tuyến tính trong việc phân tích và đánh giá chuẩn các ma trận, các kết quả về bán kính toàn ánh phức của N. K. Son và D.D Thuan. Luận án cũng sử dụng ý tưởng chia khoảng của M.C. Delfour để thiết lập tiêu chuẩn điều khiển được mới cho hệ tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm (4) trong trường hợp hàm η có nguyên tử cô lập (*isolated-atom*) tại $-h$, tức là tồn tại ma trận $A_h \in \mathbb{K}^{n\times n}$ và $\epsilon \in (0,h]$ sao cho

$$\eta(\theta) \equiv A_h \quad \text{với } \theta \in (-h, -h+\epsilon].$$

Trên tinh thần đó luận án được viết gồm 4 chương:

•Chương 1: Các kiến thức chuẩn bị

•Chương 2: Tính điều khiển được xấp xỉ vững của các hệ tuyến tính có trễ rời rạc

•Chương 3: Tính điều khiển được vững của các hệ tuyến tính trung tính

•Chương 4: Tính điều khiển được vững của các hệ tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm

Các kết quả của Luận án đã được công bố trong 3 bài báo trong danh mục các công trình và được báo cáo tại: Xêmina tại Phòng Tối ưu và Điều khiển, Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.

- Xêmina tại Phòng Giải tích Toán học, Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.

-Hội nghị 'The Third Mongolia-Russia-Vietnam Workshop on Numerical Solution of Integral and Differential Equations ', ngày 22-27, tháng 10 năm 2018 tại Viện Toán học. - Hội thảo Tối ưu và Tính toán Khoa học lần thứ 14, Ba Vì, tháng 4 năm 2016.

- Hội nghị Toán ứng dụng và Tin học tại Đại học Bách Khoa Hà Nội, ngày 12-13 tháng 11 năm 2016.

-Hội nghị Quốc Tế "7th International Conference on High Performance Scientific Computing" ngày 19-23 , tháng 3 năm 2018 tại Hà Nội.

-Workshop "Control and Optimization Problems" ngày 17-19, tháng 5 năm 2018 tại Viện nghiên cứu Cao Cấp về Toán , Hà Nội.

-Hội nghị "The Third Mongolia-Russia-Vietnam Workshop on Numerical Solution of Integral and Differential Equations" ngày 22-27, tháng 10 năm 2018 tại Viện Toán học.

-Các hội nghị đánh giá Nghiên cứu sinh của Viện Toán học, tháng 10 năm 2016, tháng 11 năm 2017 và tháng 11 năm 2018. Dưới đây tôi xin trình bày tóm tắt các kết quả của luận án.

Chương 1

Các kiến thức chuẩn bị

Trong phần này, tôi trình bày các kiến thức nền tảng làm cơ sở để viết luận án, bao gồm các nội dung: Hệ điều khiển tuyến tính, hệ điều khiển tuyến tính trong không gian vô hạn chiều, hệ tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm, hệ trung tính, lý thuyết toán tử đa trị tuyến tính và các kết quả về các bán kính toàn ánh. Dưới đây tôi xin trình bày ngắn gọn những kiến thức cơ sở để tiện cho người đọc có thể theo dõi.

1.1 Hệ tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm

Xét hệ tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm có dạng:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + \int_{-h}^{0} d[\eta(\theta)] x(t+\theta) + B_0 u(t), \quad t \geqslant 0, \tag{1.1}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{K}^n, u(t) \in \mathbb{K}^m, B_0 \in \mathbb{K}^{n\times m}$ và $\eta(\cdot) \in BV([-h,0], \mathbb{K}^{n\times n})$ là $\mathbb{K}^{n\times n}$-các hàm có biến phân giới nội trên tập $[-h,0]$, với $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{C}$, và tích phân được hiểu là tích phân Lebesgue-Stieltjes. Một trường hợp đặc biệt của hệ (1.1) là hệ điều khiển tuyến tính có trễ rời rạc:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h_1) + ... + A_k x(t-h_k) + B_0 u(t), \quad t \geqslant 0, \tag{1.2}$$

ở đây $0 < h_1 < h_2 < ... < h_k$ là các hằng số, các $A_i \in \mathbb{K}^{n\times n}$, với mọi $i = 0, 1, ..., k$.

Ma trận của tựa đa thức đặc trưng của hệ (1.1) là

$$P^{tq}(\lambda) = A_0 + \int_{-h}^{0} d[\eta(\theta)] e^{\lambda\theta} - \lambda I_n. \tag{1.3}$$

Trong trường hợp hệ có trễ rời rạc ta tính được

$$P^{rr}(\lambda) = A_0 + e^{-\lambda h_1} A_1 + ... + e^{-\lambda h_k} A_k - \lambda I_n. \tag{1.4}$$

Đặt $W(\lambda) = [P(\lambda), B_0]$ là ma trận hàm Hautus tương ứng của hệ (1.1).

Định lý 1.1. *Với mỗi $\phi^1(\cdot) \in L_p([-h,0],\mathbb{K}^n)$ và hàm điều khiển đo được $u(\cdot) \in L_p^{loc}([0,\infty),\mathbb{K}^m)$, hệ (1.1) với điều kiện ban đầu $x(0) = \phi^0 \in \mathbb{K}^n, x(\theta) = \phi^1(\theta)$, với mọi $\theta \in [-h,0]$, tồn tại duy nhất nghiệm $x(t)$ xác định trên khoảng $[-h,+\infty)$ thỏa mãn điều kiện ban đầu của bài toán Cauchy trên đoạn $[-h,0]$ và thỏa mãn phương trình (1.1) với hầu hết $t \geqslant 0$.*

Khi hàm điều khiển $u(t) \equiv 0$, hệ (1.1) sinh ra C_0-nửa nhóm toán tử tuyến tính liên tục $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ trên không gian $M_p := \mathbb{K}^n \times L_p([-h,0],\mathbb{K}^n)$ và với mỗi $t \geqslant 0$, $S(t)$ được xác định bởi $S(t)(\phi^0,\phi^1) = (x(t),x_t)$, trong đó $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $\theta \in [-h,0]$. Tương ứng toán tử $\mathcal{A} : M_p \to M_p$ sinh bởi nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ được xác định bởi

$$\mathcal{A}((\phi^0,\phi^1)) = (A_0x_0 + L(\phi^1),\dot{\phi}^1),$$

với mọi $((\phi^0,\phi^1))$ thuộc vào miền xác định $\mathrm{dom}(\mathcal{A})$ của $\mathcal{A}$:

$$\mathrm{dom}(\mathcal{A}) = \{(\phi^0,\phi^1) \in M_p : \dot{\phi}^1 \in L_p([-h,0],\mathbb{K}^n), \phi^0 = \phi^1(0)\},$$

Bây giờ, ta có thể mô tả lại hệ tuyến tính có trễ (1.1) trong phương trình vi không có trễ trên không gian trạng thái vô hạn chiều

$$\dot{z}(t) = \mathcal{A}z(t) + \mathcal{B}u(t), \quad t \geqslant 0,$$

ở đây toán tử tuyến tính bị chặn $\mathcal{B} : \mathbb{K}^m \to M_p$ xác định bởi

$$\mathcal{B}u = (B_0u,0), \quad u \in \mathbb{K}^m. \tag{1.5}$$

Nghiệm nhẹ (*mild solution*) của hệ (1.1) tương ứng với hàm điều khiển $u(\cdot) \in L_p^{loc}([0,\infty),\mathbb{K}^m)$ và điều kiện ban đầu $x(0) = (\phi^0)$, $x(\theta) = \phi^1(\theta)$, với mọi $\theta \in [-h,0]$. là

$$(x(t),x_t) = S(t)\phi + \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds, \quad t \geqslant 0,$$

tích phân ở đây được hiểu là tích phân Bochner.

Định nghĩa 1.1. Các không gian riêng suy rộng $\sigma(\mathcal{A})$ được gọi là *đầy đủ* trong không gian M_p nếu $\mathrm{clspan}\{\mathcal{M}_\lambda, \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\} = M_p$.

Dưới đây là một số khái niệm về điều khiển được đối với hệ (1.1):

Định nghĩa 1.2. Hệ tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm (1.1) được gọi là *điều khiển được Euclide* , nếu với mọi điều kiện ban đầu $x_0 \in \mathbb{K}^n$, trạng thái mong muốn cuối cùng $x_1 \in \mathbb{K}^n$, tồn tại thời gian $T > 0$ và hàm điều khiển đo được $u(\cdot), u(t) \in \mathbb{K}^m$ hầu hết $t \in [0,T]$ sao cho nghiệm tương ứng của hệ (1.1) $x(t) = x(t,x_0,\phi_0,u)$ thỏa mãn $x(T) = x_1$.

Định nghĩa 1.3. Hệ tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm (1.1) được gọi là điều khiển được xấp xỉ trong không gian trạng thái M_p, hay nói một cách ngắn gọn là *M_p-điều khiển được xấp xỉ*, với bất kì trạng thái $\phi = (\phi^0, \phi^1) \in M_p$ cho trước và $\epsilon > 0$ tùy ý, tồn tại thời gian hữu hạn $T > 0$ và hàm điều khiển $u(\cdot) \in L_p([0,T], \mathbb{K}^m)$ sao cho nghiệm tương ứng $x(t) = x_{0,u}(t)$ của hệ (1.1) với điều kiện ban đầu $\phi = 0$ thỏa mãn $\|x(T) - \phi^0\|_{\mathbb{K}^n} + \|x_T - \phi^1\|_{L_p} < \epsilon$. Điều này cũng tương đương với tập đạt được

$$\mathcal{R} = \Big\{ \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds : u(\cdot) \in L_p([0,t], \mathbb{K}^m), t \geqslant 0 \Big\}$$

trù mật trong không gian trạng thái $M_p : \mathrm{cl}(\mathcal{R}) = M_p$.

Định nghĩa 1.4. Hệ (1.1) được gọi là *điều khiển được phổ* nếu với mỗi $\lambda \in \sigma(\mathcal{A}), P_\lambda \mathcal{R} = \mathcal{M}_\lambda$ trong đó P_λ là phép chiếu chính tắc của M_p trên không gian riêng suy rộng hữu hạn chiều $\mathcal{M}_\lambda$.

Định lý 1.2. *Hệ (1.1) điều khiển được phổ khi và chỉ khi*

$$\mathrm{rank}[P^{tq}(\lambda), B_0] = n, \forall \lambda \in \mathbb{C}. \tag{1.6}$$

Định lý 1.3 (Manitius, 1981)**.** *Hệ (1.2) là điều khiển được Euclide nếu và chỉ nếu*

$$\mathrm{rank}\ [P^{rr}(\lambda), B] = n \textit{ với mọi } \lambda \in \mathbb{C}. \tag{1.7}$$

Định lý 1.4 (Manitius, 1981)**.** *Hệ (1.2)là điều khiển được xấp xỉ trong không gian Banach $M_2(\mathbb{K})$ khi và chỉ khi*

$$\begin{aligned} &(i)\mathrm{rank}\ [P^{rr}(\lambda), B] = n \quad \textit{với mọi} \quad \lambda \in \mathbb{C}, \\ &(ii)\mathrm{rank}\ [A_k, B] = n. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Định lý 1.5 (Son, 1997)**.** *Hệ (1.1) là M_p-điều khiển được xấp xỉ khi và chỉ khi*

$$\begin{aligned} &(\mathrm{i})_1 \quad \mathrm{rank}\ [P^{tq}(\lambda), B_0] = n, \quad \textit{với mọi} \quad \lambda \in \mathbb{C}, \\ &(\mathrm{ii})_1 \quad KerH^* \cap KerG^* = \{0\}, \end{aligned}$$

trong đó $1/p + 1/q = 1$ và

$$(H^*\psi^1)(\alpha) = \int_{-h}^{\alpha} d[\eta^*(\theta)]\psi^1(\theta - \alpha), \quad \alpha \in [-h, 0]. \tag{1.9}$$

và $G^* : L_q([-h,0], \mathbb{K}^n) \to L_q([-h,0], \mathbb{K}^m), 1/p + 1/q = 1$, được cho bởi

$$(G^*v)(\alpha) = B_0^* v(\alpha), \quad \alpha \in [-h, 0]. \tag{1.10}$$

1.2 Hệ tuyến tính trung tính

Xét hệ tuyến tính trung tính

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_{-1}\dot{x}(t-h) + A_1x(t-h) + Bu(t), t \geqslant 0, \tag{1.11}$$

trong đó, h là hằng số dương, $A_{-1}, A_0, A_1 \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{K}^{n\times m}$, $x \in \mathbb{K}^n$, $u \in \mathbb{K}^m$.

Xét $W_2^1([-h,0],\mathbb{K}^n)$ là không gian các hàm $\xi : [-h,0] \to \mathbb{K}^n$ liên tục tuyệt đối và có đạo hàm $\dot{\xi}(\cdot) \in L_2([-h,0],\mathbb{K}^n)$, với chuẩn được xác định bởi:

$$\|\xi\|_{W_2^1([-h,0],\mathbb{K}^n)} = \left(\|\xi(0)\|^2 + \|\dot{\xi}\|^2_{L_2([-h,0],\mathbb{K}^n)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Định nghĩa 1.5. Hệ (1.11) được gọi là *điều khiển được chính xác* nếu với mọi điều kiện ban đầu $\xi_0(\cdot) \in W_2^1([-h,0],\mathbb{C}^n)$, điều kiện cuối cần đạt được $\xi_1(\cdot) \in W_2^1([-h,0],\mathbb{C}^n)$, tồn tại thời gian $T > 0$ và hàm điều khiển $u(t) \in L_2([0,T],\mathbb{C}^n)$ sao cho nghiệm tương ứng với điều kiện ban đầu của bài toán Cauchy $x(\theta) = \xi_0(\theta)$, với mọi $\theta \in [-h,0]$: $x(t) = x(\xi_0,u,t)$ thỏa mãn $x_T(\theta) = \xi_1(\theta), \forall\theta \in [-h,0]$, ở đó $x_T(\theta) = x(T+\theta), \theta \in [-h,0]$.

Định nghĩa 1.6. Hệ (1.11) được gọi là *điều khiển được xấp xỉ* nếu với mọi điều kiện ban đầu $\xi_0(\cdot) \in W_2^1([-h,0],\mathbb{C}^n)$, điều kiện cuối mong muốn $\xi_1(\cdot) \in W_2^1([-h,0],\mathbb{C}^n)$ và $\epsilon > 0$ tùy ý, tồn tại $T > 0$ và hàm điều khiển $u(t) \in L_2([0,T],\mathbb{C}^n)$ sao cho nghiệm tương ứng với điều kiện ban đầu của bài toán Cauchy $x(\theta) = \xi_0(\theta)$, với mọi $\theta \in [-h,0]$: $x(t) = x(\xi_0,u,t)$ thỏa mãn $\|x_T(\cdot) - \xi_1(\cdot)\|_{W_2^1([-h,0],\mathbb{C}^n)} < \epsilon$.

Định nghĩa 1.7. Hệ (1.11) được gọi là điều khiển được *Euclide* nếu với mọi điều khiển ban đầu cho trước $\xi_0(\cdot) \in W_2^1([-h,0],\mathbb{C}^n)$ và mọi trạng thái cuối mong muốn x_1, tồn tại $T > 0$ và hàm điều khiển $u(t) \in L_2([0,T],\mathbb{C}^n)$ sao cho nghiệm tương ứng $x(t) = x(\xi_0,u,t)$ thỏa mãn $x(T) = x_1$.

Ma trận của tựa đa thức đặc trưng của hệ (1.11) là

$$P^{th}(\lambda) = A_0 + e^{-h\lambda}A_1 + \lambda e^{-h\lambda}A_{-1} - \lambda I_n. \tag{1.12}$$

Dưới đây là điều kiện cần và đủ cho tính điều khiển được của hệ (1.11):

Mệnh đề 1.6 (O'Connor-Tarn,1983)**.** *Hệ (1.11) là điều khiển được Euclide khi và chỉ khi*

(i) rank $[P^{th}(\lambda), B] = n$, *với mọi* $\lambda \in \mathbb{C}$.

Hệ (1.11) là điều khiển được chính xác khi và chỉ khi (i) xảy ra và

(ii) rank $[B, A_{-1}B, \ldots, A_{-1}^{n-1}B] = n$.

Hệ (1.11) là điều khiển được xấp xỉ khi và chỉ khi (i) xảy ra và

(ii) rank $[\lambda A_{-1} + A_1, B] = n$, *với mọi* $\lambda \in \mathbb{C}$.

1.3 Toán tử đa trị tuyến tính và các kết quả về các bán kính toàn ánh

Cho $\mathbb{K}$ là trường số thực hoặc phức. Dưới đây là một số nội dung chính về toán tử đa trị tuyến tính mà chúng tôi dùng trong luận án:

Định nghĩa 1.8. Cho $\mathcal{F} : \mathbb{K}^n \rightrightarrows \mathbb{K}^m$ là một toán tử đa trị, nếu đồ thị của $\mathcal{F}$ được định nghĩa bởi

$$gr\mathcal{F} = \big\{(x, y) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m : y \in \mathcal{F}(x)\big\}, \tag{1.13}$$

là một không gian con tuyến tính của $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m$ thì $\mathcal{F}$ được gọi là một toán tử đa trị tuyến tính.

Miền xác định của $\mathcal{F}$ được ký hiệu tương ứng bởi $dom\mathcal{F} = \big\{x \in \mathbb{K}^n : \mathcal{F}(x) \neq \emptyset\big\}$. Cho $\mathcal{F} : \mathbb{K}^n \rightrightarrows \mathbb{K}^m$ là một toán tử đa trị tuyến tính, khi đó với chuẩn véc tơ đã cho trên $\mathbb{K}^n$ và $\mathbb{K}^m$, chuẩn của $\mathcal{F}$ được định nghĩa bởi

$$\|\mathcal{F}\| = \sup\big\{\inf_{y\in\mathcal{F}(x)} \|y\| : x \in dom\mathcal{F}, \|x\| = 1\big\}. \tag{1.14}$$

Với toán tử đa trị tuyến tính $\mathcal{F} : \mathbb{K}^n \rightrightarrows \mathbb{K}^m$ thì toán tử liên hợp $\mathcal{F}^* : (\mathbb{K}^m)^* \rightrightarrows (\mathbb{K}^n)^*$ và toán tử đa trị tuyến tính nghịch đảo $\mathcal{F}^{-1}$ được xác định bởi:

$$\mathcal{F}^{-1}(y) = \big\{x \in \mathbb{K}^n : y \in \mathcal{F}(x)\big\}. \tag{1.15}$$

Mệnh đề 1.7 (Son-Thuan, 2012)**.** *Giả sử $Q \in \mathbb{K}^{n\times m}$ là một ma trận toàn ánh, tức là $rankQ = n$ và $D \in \mathbb{K}^{n\times l}, E \in \mathbb{K}^{q\times m}$ là các ma trận cấu trúc cho trước, khi đó khoảng cách có cấu trúc tới các cặp ma trận không toàn ánh được cho bởi công thức*

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}_{\mathbb{C}}(Q; D, E) &= \inf\{\|\Delta\| : \Delta \in \mathbb{C}^{l\times q} \ s.c.\ Q + D\Delta E \textit{ không toàn ánh }\}\\ &= \frac{1}{\|EQ^{-1}D\|},\end{aligned} \tag{1.16}$$

trong đó Q^{-1} là toán tử đa trị tuyến tính nghịch đảo của Q.

Định nghĩa 1.9. Cho $Q \in \mathbb{C}^{n\times m}$ là ma trận toàn ánh, tức là $\operatorname{rank} Q = n$ và $E \in \mathbb{C}^{q\times m}$ là ma trận cho trước. Giá trị nhiễu thực suy rộng thứ n của cặp ma trận (Q, E) được định nghĩa bởi:

$$\tau_n(Q, E) := \inf\{\|\Delta\|_2 : \Delta \in \mathbb{R}^{n\times l}, \operatorname{rank}(Q + \Delta E) < n\}. \tag{1.17}$$

Dưới đây là công thức tính τ_n được chứng minh bởi S. Lam và E.J. Davison:

$$\tau_n(Q, E) = \sup_{\gamma\in(0,1]} \sigma_{2n-1}\left(\begin{bmatrix}\operatorname{Re} Q & -\gamma \operatorname{Ima} Q\\ \frac{1}{\gamma}\operatorname{Ima} Q & \operatorname{Re} Q\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\operatorname{Re} E & -\gamma \operatorname{Ima} E\\ \frac{1}{\gamma}\operatorname{Ima} E & \operatorname{Re} E\end{bmatrix}\right), \tag{1.18}$$

trong đó $\sigma_i(H_1, H_2)$ là giá trị kì dị suy rộng thứ i của cặp ma trận (H_1, H_2).

Chương 2

Tính điều khiển được vững của hệ tuyến tính có trễ rời rạc

Nội dung của chương này được lấy từ bài báo [1] trong Danh mục công trình. Trong chương này, ta xét hệ tuyến tính có trễ rời rạc được mô tả bởi phương trình vi phân:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h_1) + \ldots + A_k x(t-h_k) + Bu(t), t \geqslant 0, \tag{2.1}$$

trong đó $0 = h_0 < h_1 < ... < h_k, A_i \in \mathbb{K}^{n\times n}, i = 0, 1, \ldots, k, B \in \mathbb{K}^{n\times m}$, $x(t) \in \mathbb{K}^n$, $u(t) \in \mathbb{K}^m$, với $t \geqslant 0$ và $\mathbb{K}$ là trường số thực hoặc phức.

2.1 Bán kính điều khiển được phức

Nhắc lại rằng, ma trận của tựa đa thức tựa đặc trưng của hệ (2.1) là

$$P(\lambda) = A_0 + e^{-\lambda h_1} A_1 + ... + e^{-\lambda h_k} A_k - \lambda I_n. \tag{2.2}$$

Bây giờ, ta giả sử rằng các ma trận của hệ (2.1) được nhiễu có cấu trúc dạng:

$$[A_0, A_1 \ldots, A_k, B] \rightsquigarrow [\widetilde{A}_0, \widetilde{A}_1, \ldots, \widetilde{A}_k, \widetilde{B}] = [A_0, A_1 \ldots, A_k, B] + D\Delta E. \tag{2.3}$$

Khi đó, hệ nhiễu tương ứng được mô tả như sau:

$$\dot{x}(t) = \widetilde{A}_0 x(t) + \widetilde{A}_1 x(t-h_1) + \ldots + \widetilde{A}_k x(t-h_k) + \widetilde{B}u(t). \tag{2.4}$$

Ở đây $\Delta \in \mathbb{K}^{l\times q}$ là ma trận nhiễu chưa biết và $D \in \mathbb{K}^{n\times l}, E \in \mathbb{K}^{q\times(n(k+1)+m)}$ là các ma trận đã cho xác định cấu trúc các nhiễu.

Định nghĩa 2.1. Cho hệ (2.1) là điều khiển được Euclide, và $\|\cdot\|$ là một chuẩn trên không gian $\mathbb{K}^{l\times q}$, bán kính điều khiển được Euclide của hệ (2.1) tương ứng với cấu trúc nhiễu dạng (2.3) được xác định bởi

$$\begin{aligned} r^e_{\mathbb{K}}(\underline{A}, B; D, E) = \inf\big\{ \|\Delta\| : \Delta \in \mathbb{K}^{l\times q} \text{ sao cho} \\ \text{(2.4) không điều khiển được Euclide } \big\}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Nếu $[\underline{A}, B]+D\Delta E$ là điều khiển được Euclide với mọi $\Delta \in \mathbb{K}^{l\times q}$ thì ta đặt $r^e_{\mathbb{K}}(\underline{A}, B; D, E)$ $= +\infty$.

Định nghĩa 2.2. Giả sử hệ tuyến tính có trễ rời rạc (2.1) là điều khiển được xấp xỉ trong không gian Banach $M_2(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ hoặc $\mathbb{R}$, và $\|\cdot\|$ là một chuẩn trên không gian $\mathbb{K}^{l\times q}$. Khi đó bán kính điều khiển được xấp xỉ của hệ (2.1) tương ứng với nhiễu cấu trúc (2.3) được xác định bởi

$$\begin{aligned} r^a_{\mathbb{K}}(\underline{A}, B; D, E) = \inf\big\{\|\Delta\| : \Delta\in \mathbb{K}^{l\times q} \text{ sao cho} \\ \text{(2.4) không điều khiển được xấp xỉ trong không gian } M_2(\mathbb{K})\big\}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Nếu $[\underline{A}, B] + D\Delta E$ điều khiển được xấp xỉ với mọi $\Delta \in \mathbb{C}^{l\times q}$ thì ta đặt $r^a_{\mathbb{K}}(\underline{A}, B; D, E)$ $= +\infty$.

Đặt

$$\begin{aligned} W(\lambda) = [P(\lambda), B],\ N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix},\ H(\lambda) = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ e^{-h_1\lambda} I_n & 0 \\ \vdots & \vdots \\ e^{-h_k\lambda} I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}, \\ M = EN, \qquad E(\lambda) = EH(\lambda). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Định lý 2.1. *Giả sử hệ tuyến tính có trễ rời rạc (2.1) là điều khiển được Euclide và $\|\cdot\|$ là một chuẩn trên không gian $\mathbb{K}^{l\times q}$. Khi đó, bán kính điều khiển được Euclide của hệ (2.1) tương ứng với cấu trúc nhiễu dạng (2.3) được tính bởi công thức*

$$r^e_{\mathbb{C}}(\underline{A}, B; D, E) = \frac{1}{\sup_{\lambda\in\mathbb{C}} \|E(\lambda)W(\lambda)^{-1}D\|}, \tag{2.8}$$

ở đó $W(\lambda)^{-1} : \mathbb{K}^n \rightrightarrows \mathbb{K}^{n+m}$ là toán tử đa trị tuyến tính nghịch đảo của $W(\lambda)$.

Định lý 2.2. *Giả sử rằng hệ tuyến tính có trễ rời rạc (2.1) là điều khiển được xấp xỉ trên không gian $M_2(\mathbb{K})$ và được nhiễu có cấu trúc dạng (2.3). Khi đó, bán kính điều khiển được phức của hệ (2.1) được cho bởi công thức*

$$r^a_{\mathbb{C}}(\underline{A}, B; D, E) = \min\left\{\frac{1}{\sup_{\lambda\in\mathbb{C}} \|E(\lambda)W(\lambda)^{-1}D\|}, \frac{1}{\|M[A_k, B]^{-1}D\|}\right\}, \tag{2.9}$$

trong đó các ma trận $W(\lambda), E(\lambda)$ và M được xác định bởi (2.7).

Định lý 2.3. *Giả sử rằng ma trận cấu trúc E có hạng bằng số cột và các các chuẩn toán tử được sinh ra bởi các chuẩn vectơ Euclide. Khi đó, ta có*

$$r^a_{\mathbb{C}}(\underline{A}, B; D, E) = r^e_{\mathbb{C}}(\underline{A}, B; D, E) = \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \sigma_{\min}(E(\lambda)^{*\dagger} W(\lambda)^*, D^*), \tag{2.10}$$

trong đó $E^{*\dagger}$ kí hiệu là ma trận giả nghịch Moore-Penrose của ma trận E^* và $\sigma_{\min}$ kí hiệu là giá trị kì dị suy rộng của một cặp ma trận.

2.2 Bán kính điều khiển được thực

Bây giờ, ta giả sử rằng tất cả $A_i, i = 0, \ldots, k, B$ của hệ (2.1) và các ma trận cấu trúc D, E trong cấu trúc nhiễu (2.3) là thực.

Định lý 2.4. *Cho $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Giả sử rằng hệ tuyến tính có trễ rời rạc* (2.1) *là điều khiển được xấp xỉ trong không gian Banach $M_2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \times L_2([-h_k, 0], \mathbb{R}^n)$ và các ma trận của hệ được nhiễu có cấu trúc* (2.3)*, với $D \in \mathbb{R}^{n\times l}, E \in \mathbb{R}^{q\times(n(k+1)+m)}$. Khi đó, ta có các đánh giá với bán kính điều khiển được xấp xỉ thực của hệ* (2.1)*:*

$$\begin{aligned} r^a_{\mathbb{C}}(\underline{A}, B; D, E) &\le r^a_{\mathbb{R}}(\underline{A}, B; D, E) \\ &\le \min\left\{\frac{1}{\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \|E(\lambda)W(\lambda)^{-1}D\|}, \frac{1}{\|M[A_k, B]^{-1}D\|}\right\}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

trong đó các ma trận $W(\lambda), E(\lambda), M$ được xác định trong (2.7)*.*

Định lý 2.5. *Giả sử rằng hệ tuyến tính có trễ rời rạc* (2.1) *là điều khiển được xấp xỉ trong không gian $M_2(\mathbb{R})$. Khi đó, ta có*

$$r^a_{\mathbb{C}}(\underline{A}, B; D, E) = \min\{r^a_{\mathbb{R}}(\underline{A}, B; D, E); r^e_{\mathbb{C}}(\underline{A}, B; D, E)\}, \tag{2.12}$$

$$r^a_{\mathbb{R}}(\underline{A}, B; D, E) = \min\left\{r^e_{\mathbb{R}}(\underline{A}, B; D, E); \frac{1}{\|M[A_k, B]^{-1}D\|}\right\}. \tag{2.13}$$

Hơn nữa, nếu E có hạng bằng số cột và các chuẩn toán tử được sinh bởi các chuẩn vectơ Euclide thì

$$r^a_{\mathbb{R}}(\underline{A}, B; D, E) = r^e_{\mathbb{R}}(\underline{A}, B; D, E).$$

Định lý 2.6. *Giả sử rằng hệ tuyến tính có trễ rời rạc* (2.1) *là điều khiển được xấp xỉ, được nhiễu bởi các nhiễu cấu trúc dạng* (2.3)*. Nếu D là ma trận khả nghịch và các không gian vectơ được trang bị bởi các chuẩn Euclide thì*

$$r^e_{\mathbb{R}}(\underline{A}, B; D, E) = \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \tau_n(D^{-1}W(\lambda), E(\lambda)),$$

và

$$r^a_{\mathbb{R}}(\underline{A}, B; D, E) = \min\left\{\inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \tau_n(D^{-1}W(\lambda), E(\lambda)); \tau_n(D^{-1}[A_k, B], M)\right\},$$

trong đó τ_n được tính theo công thức (1.18)*.*

2.3 Kết luận

Trong chương này, chúng tôi đã thu được các công thức tính bán kính điều khiển được Euclide phức, bán kính điều khiển được xấp xỉ phức, các đánh giá cho các bán kính điều khiển được thực và mối quan hệ giữa các bán kính này của hệ tuyến tính có trễ rời rạc (2.1) khi các ma trận của hệ được nhiễu cấu trúc dạng (2.3).

Chương 3

Tính điều khiển được vững của hệ tuyến tính trung tính

Nội dung của chương này trình bày các kết quả của bài báo [2] trong Danh mục công trình. Trong chương này chúng tôi nghiên cứu sự bền vững của tính điều khiển được của hệ điều khiển tuyến tính trung tính:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + A_{-1}\dot{x}(t-h) + Bu(t), t \geqslant 0, \tag{3.1}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{K}^n$, $u(t) \in \mathbb{K}^m$, với $t \geqslant 0$, $A_0, A_1, A_{-1} \in \mathbb{C}^{n\times n}, B \in \mathbb{C}^{n\times m}$, h là hằng số dương.

3.1 Các bán kính điều khiển được dưới nhiễu có cấu trúc

Giả sử các ma trận của hệ tuyến tính trung tính (3.1) được nhiễu cấu trúc dạng:

$$\dot{x}(t) = \widetilde{A}_0 x(t) + \widetilde{A}_1 x(t-h) + \widetilde{A}_{-1}\dot{x}(t-h) + \widetilde{B}u(t), \tag{3.2}$$

với

$$[A_0, A_1, A_{-1}, B] \rightsquigarrow [\widetilde{A}_0, \widetilde{A}_1, \widetilde{A}_{-1}, \widetilde{B}] = [A_0, A_1, A_{-1}, B] + D\Delta E, \tag{3.3}$$

ở đây $\Delta \in \mathbb{C}^{l\times q}$ là ma trận nhiễu và $D \in \mathbb{C}^{n\times l}, E \in \mathbb{C}^{q\times(3\times n+m)}$ xác định cấu trúc của nhiễu $D\Delta E$.

Định nghĩa 3.1. Giả sử hệ tuyến tính trung tính (3.1) là điều khiển được chính xác trên không gian Sobolev $W_2^1([-h,0],\mathbb{C}^n)$. Cho $\|\cdot\|$ là một chuẩn trên $\mathbb{C}^{l\times q}$. Khi đó, bán kính điều khiển được chính xác của hệ tuyến tính trung tính (3.1) tương ứng với nhiễu cấu trúc dạng (3.3) được cho bởi

$$\begin{aligned} r_{\mathbb{K}}^{ex} = \inf\big\{ \|\Delta\| : \Delta \in \mathbb{K}^{l\times q} \text{ sao cho} \\ \text{hệ (3.2) không điều khiển được chính xác } \big\}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Nếu hệ (3.2) với cấu trúc nhiễu (3.3) là điều khiển được chính xác với mọi $\Delta \in \mathbb{C}^{l\times q}$ thì ta đặt $r_{\mathbb{K}}^{ex} = +\infty$.

Định nghĩa 3.2. Cho hệ tuyến tính trung tính (3.1) là điều khiển được xấp xỉ trên không gian Sobolev $W_2^1([-h,0],\mathbb{C}^n)$ và $\|\cdot\|$ là một chuẩn trên $\mathbb{C}^{l\times q}$. Khi đó, bán kính điều khiển được xấp xỉ của hệ trung tính (3.1) tương ứng với nhiễu có cấu trúc dạng (3.3) được xác định bởi

$$\begin{aligned} r_{\mathbb{K}}^{ap} = \inf\big\{ \|\Delta\| : \Delta \in \mathbb{K}^{l\times q} \text{ sao cho} \\ \text{hệ (3.2) không điều khiển được xấp xỉ } \big\}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Nếu hệ (3.2) với cấu trúc nhiễu (3.3) là điều khiển được xấp xỉ với mọi $\Delta \in \mathbb{C}^{l\times q}$ thì ta đặt $r_{\mathbb{K}}^{ap} = +\infty$.

Định nghĩa 3.3. Cho hệ tuyến tính trung tính (3.1) là điều khiển được Euclide và $\|\cdot\|$ là một chuẩn trên $\mathbb{C}^{l\times q}$. Khi đó, bán kính điều khiển được Euclide của hệ được của hệ (3.1) tương ứng với nhiễu cấu trúc dạng (3.3) được xác định bởi

$$\begin{aligned} r_{\mathbb{K}}^{eu} = \inf\big\{ \|\Delta\| : \Delta \in \mathbb{K}^{l\times q} \text{ sao cho} \\ \text{hệ (3.2) không điều khiển được Euclide}\big\}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Nếu hệ (3.2) với cấu trúc nhiễu (3.3) là điều khiển được Euclide với mọi $\Delta \in \mathbb{C}^{l\times q}$ thì ta đặt $r_{\mathbb{K}}^{eu} = \infty$.

Nhắc lại rằng, ma trận của tựa đa thức đặc trưng của hệ tuyến tính trung tính (3.1) là

$$P(\lambda) = A_0 + e^{-h\lambda}A_1 + \lambda e^{-h\lambda}A_{-1} - \lambda I_n. \tag{3.7}$$

Ta đặt

$$\begin{aligned} &W_1(\lambda) = [P(\lambda), B],\ W_2(\lambda) = [A_{-1} - \lambda I_n, B],\ W_3(\lambda) = [\lambda A_{-1} + A_1, B], \\ &H_1(\lambda) = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ e^{-h\lambda}I_n & 0 \\ \lambda e^{-h\lambda}I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix},\ H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix},\ H_3(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I_n & 0 \\ \lambda I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}, \\ &E_1(\lambda) = EH_1(\lambda), \quad E_2 = EH_2, \quad E_3(\lambda) = EH_3(\lambda). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Định lý 3.1. *Giả sử rằng hệ tuyến tính trung tính* (3.1) *là điều khiển được chính xác. Khi đó, bán kính điều khiển được chính xác của hệ* (3.1) *tương ứng với nhiễu cấu trúc dạng* (3.3) *được cho bởi công thức*

$$r_{\mathbb{C}}^{ex} = \min\left\{ \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \|E_1(\lambda)W_1(\lambda)^{-1}D\|^{-1}, \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \|E_2W_2(\lambda)^{-1}D\|^{-1} \right\}, \tag{3.9}$$

trong đó $W_1(\lambda)^{-1}, W_2(\lambda)^{-1} : \mathbb{C}^n \rightrightarrows \mathbb{C}^{n+m}$ *tương ứng là các toán tử đa trị tuyến tính nghịch đảo của* $W_1(\lambda)$, $W_2(\lambda)$.

Định lý 3.2. *Giả sử rằng hệ tuyến tính trung tính* (3.1) *là điều khiển được xấp xỉ. Khi đó, bán kính điều khiển được xấp xỉ của hệ tuyến tính trung tính* (3.1) *tương ứng với nhiễu cấu trúc* (3.3) *được cho bởi công thức*

$$r_{\mathbb{C}}^{ap} = \min\left\{\inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \|E_1(\lambda)W_1(\lambda)^{-1}\, D\|^{-1}, \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \|E_3(\lambda)W_3(\lambda)^{-1}D\|^{-1}\right\}, \tag{3.10}$$

ở đó $W_1(\lambda)^{-1}, W_3(\lambda)^{-1} : \mathbb{C}^n \rightrightarrows \mathbb{C}^{n+m}$ *tương ứng là các toán tử đa trị tuyến tính nghịch đảo của* $W_1(\lambda)$, $W_3(\lambda)$.

Định lý 3.3. *Giả sử rằng hệ tuyến tính trung tính* (3.1) *là điều khiển được Euclide. Khi đó, bán kính điều khiển được Euclide của hệ tuyến tính trung tính* (3.1) *tương ứng với nhiễu cấu trúc* (3.3) *được cho bởi công thức*

$$r_{\mathbb{C}}^{eu} = \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \|E_1(\lambda)W_1(\lambda)^{-1}D\|^{-1}, \tag{3.11}$$

trong đó $W_1(\lambda)^{-1} : \mathbb{C}^n \rightrightarrows \mathbb{C}^{n+m}$ *là toán tử đa trị tuyến tính nghịch đảo của toán tử* $W_1(\lambda)$.

Định nghĩa 3.4. Cho ma trận $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$. Tập hợp

$$LNS(A) = \{y^T \in \mathbb{K}^{1\times n} : y^T A = 0 \in \mathbb{K}^{1\times m}\},$$

với phép cộng vectơ và phép nhân vectơ với một số vô hướng cảm sinh trên không gian $\mathbb{K}^{1\times n}$ lập thành một không gian vectơ con của $\mathbb{K}^{1\times n}$. Ta gọi không gian này là không gian nhân trái (left nullspace) của A.

Gọi k là số chiều tương ứng của $LNS(A)$ và $\{f_1, f_2, ..., f_k\}$ là một cơ sở của nó. Khi đó, ma trận

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ ... \\ f_k \end{bmatrix}, \tag{3.12}$$

là ma trận mà dòng thứ i của nó là tọa độ của vectơ f_i, với $i = 1, ..., k$ được gọi là ma trận cơ sở của không gian nhân trái của ma trận A.

Mệnh đề 3.4. *Cho* $U_1(\lambda) \in \mathbb{C}^{h_1\times n}, V_1(\lambda) \in \mathbb{C}^{h_1\times q}, U_2(\lambda) \in \mathbb{C}^{h_2\times n}, V_2(\lambda) \in \mathbb{C}^{h_2\times q}$, $U_3(\lambda) \in \mathbb{C}^{h_3\times n}$, $V_3(\lambda) \in \mathbb{C}^{h_3\times q}$, *sao cho* $[U_1(\lambda), V_1(\lambda)]^T$, $[U_2(\lambda), V_2(\lambda)]^T$, $[U_3(\lambda), V_3(\lambda)]^T$ *tương ứng là các ma trận cơ sở của không gian nhân trái của ma trận* $\begin{bmatrix} W_1(\lambda) \\ E_1(\lambda) \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} W_2(\lambda) \\ E_2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} W_3(\lambda) \\ E_3(\lambda) \end{bmatrix}$. *Khi đó, ta có*

$$\begin{aligned} \|E_1(\lambda)W_1(\lambda)^{-1}D\| &= \max_{\|v\|=1} \min\{\|z\| : V_1(\lambda)z = -U_1(\lambda)Dv\}, \\ \|E_2W_2(\lambda)^{-1}D\| &= \max_{\|v\|=1} \min\{\|z\| : V_2(\lambda)z = -U_2(\lambda)Dv\}, \\ \|E_3(\lambda)W_3(\lambda)^{-1}D\| &= \max_{\|v\|=1} \min\{\|z\| : V_3(\lambda)z = -U_3(\lambda)Dv\}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

3.2 Một số trường hợp đặc biệt

Định lý 3.5. *Cho các ma trận* $U_1(\lambda) \in \mathbb{C}^{h_1\times n}$, $V_1(\lambda) \in \mathbb{C}^{h_1\times q}$, $U_2(\lambda) \in \mathbb{C}^{h_2\times n}$, $V_2(\lambda) \in \mathbb{C}^{h_2\times q}$,$U_3(\lambda) \in \mathbb{C}^{h_3\times n}$, $V_3(\lambda) \in \mathbb{C}^{h_3\times q}$ *sao cho* $[U_1(\lambda), V_1(\lambda)]^T$, $[U_2(\lambda), V_2(\lambda)]^T$, $[U_3(\lambda), V_3(\lambda)]^T$ *lần lượt là các ma trận cơ sở của các không gian nhân trái tương ứng của* $\begin{bmatrix} W_1(\lambda) \\ E_1(\lambda) \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} W_2(\lambda) \\ E_2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} W_3(\lambda) \\ E_3(\lambda) \end{bmatrix}$. *Giả sử rằng các không gian vectơ được trang bị các chuẩn Euclide. Khi đó,*

$$\begin{aligned}
r_{\mathbb{C}}^{ex} &= \min\left\{\inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \|V_1(\lambda)^\dagger U_1(\lambda)D\|^{-1}, \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \|V_2(\lambda)^\dagger U_2(\lambda)D\|^{-1}\right\},\\
r_{\mathbb{C}}^{ap} &= \min\left\{\inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \|V_1(\lambda)^\dagger U_1(\lambda)D\|^{-1}, \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \|V_3(\lambda)^\dagger U_3(\lambda)D\|^{-1}\right\},\\
r_{\mathbb{C}}^{eu} &= \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \|V_1(\lambda)^\dagger U_1(\lambda)D\|^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Hơn nữa, nếu ma trận cấu trúc E *có hạng đủ bằng số cột của nó thì*

$$\begin{aligned}
r_{\mathbb{C}}^{ex} &= \min\left\{\inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \|(W_1(\lambda)E_1(\lambda)^\dagger)^\dagger D\|^{-1}, \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \|(W_2(\lambda)E_2^\dagger)^\dagger D\|^{-1}\right\},\\
r_{\mathbb{C}}^{ap} &= \min\left\{\inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \|(W_1(\lambda)E_1(\lambda)^\dagger)^\dagger D\|^{-1}, \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \|(W_3(\lambda)E_3(\lambda)^\dagger)^\dagger D\|^{-1}\right\},\\
r_{\mathbb{C}}^{eu} &= \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \|(W_1(\lambda)E_1(\lambda)^\dagger)^\dagger D\|^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Trong các trường hợp ma trận E có hạng bằng số cột và ma trận D khả nghịch, ta cũng nhận được một số kết quả tương tự Chương 2.

3.3 Kết luận

Trong chương này, luận án thu được các công thức tính bán kính điều khiển được Euclide phức, bán kính điều khiển được chính xác phức, bán kính điều khiển được xấp xỉ phức trên không gian $W_2^1([-h,0],\mathbb{K}^n)$ của hệ tuyến tính trung tính (3.1) khi các ma trận của hệ được nhiễu có cấu trúc dạng (3.2). Một số trường hợp đặc biệt được nghiên cứu: Khi ma trận E trong cấu trúc nhiễu (3.2) có đủ hạng theo số cột của nó, ma trận D trong cấu trúc (3.2) là khả nghịch.

Chương 4

Tính điều khiển được vững của hệ tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm

Nội dung của chương này được lấy từ bài báo [3] trong Danh mục công trình. Trong chương này, luận án sẽ trình bày về tính bền vững của hệ tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm:

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + \int_{-h}^{0} d[\eta(\theta)]x(t+\theta) + B_0u(t), \quad t \geqslant 0, \tag{4.1}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{K}^n$, $u(t) \in \mathbb{K}^m$, với $t \geqslant 0$, $A_0 \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $B_0 \in \mathbb{K}^{n\times m}$ và η là $\mathbb{K}^{n\times n}$-các hàm có biến phân giới nội trên khoảng $[-h, 0]$, với $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{C}$.

4.1 Các đặc trưng của tính điều khiển được xấp xỉ

Ta biết rằng, hệ (4.1) có thể viết lại dưới dạng

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + Lx_t + B_0u(t), \quad t \geqslant 0, \tag{4.2}$$

ở đó, $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ với $-h \leqslant \theta \leqslant 0$ và L là toán tử tuyến tính bị chặn dạng$\mathcal{C} := C([-h,0],\mathbb{K}^n)$ tới $\mathbb{K}^n$, được mô tả bởi

$$L\phi = \int_{-h}^{0} d[\eta(\theta)]\phi(\theta), \quad \phi \in \mathcal{C}, \tag{4.3}$$

với η là $\mathbb{K}^{n\times n}$-các hàm có biến phân giới nội trên $\mathbb{K}$ và tích phân ở đây được hiểu là tích phân Lebesgue-Stieltjes. Không mất tính tổng quát ta giả sử $\eta \in NBV([-h,0],\mathbb{K}^{n\times n})$, tức là $\eta(\theta) = \eta(-h) = 0$, với mọi $\theta \leqslant -h$, $\eta(\theta) = \eta(0)$, với mọi $\theta \geqslant 0$ và η liên tục trái trên $(-h, 0)$.

Định nghĩa 4.1. Giả sử rằng $\eta \in NBV([-h,0],\mathbb{K}^{n\times n})$, ta nói rằng η có *nguyên tử cô lập* tại $-h$ nếu tồn tại ma trận $A_h \in \mathbb{K}^{n\times n}$ và $\epsilon \in (0, h]$ sao cho

$$\eta(\theta) \equiv A_h \quad \text{với } \theta \in (-h, -h+\epsilon]. \tag{4.4}$$

Khi đó, ta cũng nói η có nguyên tử cô lập (A_h) tại $-h$.

Định lý 4.1. *Giả sử rằng η có nguyên tử cô lập (A_h) tại $-h$. Khi đó, hệ* (4.2)-(4.3) *là M_p-điều khiển được xấp xỉ nếu và chỉ nếu*

$$\begin{aligned} &(\mathrm{i})_2 \quad \operatorname{rank} W(\lambda) = n, \quad \textit{với mọi } \lambda \in \mathbb{C},\\ &(\mathrm{ii})_2 \quad \operatorname{rank}\,[A_h, B_0] = n. \end{aligned}$$

4.2 Khoảng cách tới tập không điều khiển được của hệ tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm

Giả sử rằng hệ (4.2)-(4.3) là điều khiển được xấp xỉ trong không gian trạng thái M_p và được nhiễu bởi các nhiễu tham số afin dạng

$$\begin{aligned} [A_0, B_0] &\rightsquigarrow [\widetilde{A}_0, \widetilde{B}_0] = [A_0, B_0] + D_0\Delta_0 E_0,\\ \eta(\cdot) &\rightsquigarrow \widetilde{\eta}(\cdot) = \eta(\cdot) + D_1\delta(\cdot)E_1. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Khi đó, hệ nhiễu tương ứng được mô tả bởi

$$\dot{x}(t) = \widetilde{A}_0 x(t) + \widetilde{L}x_t + \widetilde{B}_0 u(t), \quad t \geqslant 0, \tag{4.6}$$

trong đó $\widetilde{L}$ là toán tử tuyến tính nhiễu bị chặn từ không gian $\mathcal{C} := C([-h,0],\mathbb{K}^n)$ tới không gian $\mathbb{K}^n$ được xác định bởi

$$\widetilde{L}\phi = \int_{-h}^{0} d[\eta(\theta) + D_1\delta(\theta)E_1]\phi(\theta),\ \phi \in \mathcal{C}. \tag{4.7}$$

Ở đây các ma trận $D_i \in \mathbb{K}^{n\times l_i}, i = 0,1$ và $E_0 \in \mathbb{K}^{q_0\times(n+m)}, E_1 \in \mathbb{K}^{q_1\times n}$ là các ma trận cho trước xác định các cấu trúc nhiễu, $\Delta_0 \in \mathbb{C}^{l_0\times q_0}$ và $\delta(\cdot) \in \mathrm{NBV}([-h,0],\mathbb{C}^{l_1\times q_1})$ là các nhiễu phức chưa biết. Ta sẽ giả sử rằng mỗi ma trận hàm nhiễu $\delta(\cdot)$ được mở rộng trên toàn không gian thực $\mathbb{R}$ bằng cách đặt $\delta(\theta) = \delta(-h) = 0$ với $\theta \leqslant -h$ và $\delta(\theta) = \delta(0)$ với $\theta > 0$.

Chúng ta sẽ đo kích cỡ của các nhiễu $(\Delta_0,\delta) \in \mathbb{C}^{l_0\times q_0}\times \mathrm{NBV}([-h,0],\mathbb{C}^{l_1\times q_1})$ bởi chuẩn

$$\|(\Delta_0,\delta)\| := \|\Delta_0\| + \|\delta\|, \tag{4.8}$$

trong đó, $\|\Delta_0\|$ là chuẩn toán tử của ma trận Δ_0 và $\|\delta\| := V(\delta,[-h,0])$ là tổng biến phân của δ.

Định nghĩa 4.2. Bán kính điều khiển được xấp xỉ trong không gian trạng thái $M_p = \mathbb{K}^n \times L_p([-h,0],\mathbb{K}^n)$ của hệ tuyến tính có trễ (4.2)-(4.3) tương ứng với các nhiễu có trúc (Δ_0,δ) của dạng (4.5) được xác định bởi

$$\begin{aligned} &r_{M_p}(A_0,\eta,B_0) := r_{M_p}(A_0,\eta,B_0,D_i,E_i,i\in\{0,1\})\\ &:= \inf\big\{\|(\Delta_0,\delta)\| : \text{Hệ (4.6)-(4.7) không } M_p\text{-điều khiển được xấp xỉ}\big\}, \end{aligned} \tag{4.9}$$

trong đó, chuẩn $\|(\Delta_0,\delta)\|$ được xác định trong (4.8).

Định nghĩa 4.3. Giả sử hệ (4.2)-(4.3) là điều khiển được phổ và các ma trận của hệ được nhiễu các nhiễu có trúc (Δ_0, δ) của dạng (4.5). Khi đó, bán kính điều khiển được phổ của hệ này tương ứng với cấu trúc nhiễu (4.5), được xác định bởi

$$\begin{aligned} r_{sp}(A_0, \eta, B_0) &:= r_{sp}(A_0, \eta, B_0, D_i, E_i, i \in \{0,1\}) \\ &:= \inf\left\{\|(\Delta_0, \delta)\| : \exists \lambda_0 \in \mathbb{C},\ \operatorname{rank}\, [\widetilde{P}(\lambda_0), \widetilde{B}_0] < n\right\}, \end{aligned} \tag{4.10}$$

ở đây

$$\widetilde{P}(\lambda) = \widetilde{A}_0 + \int_{-h}^{0} d[\widetilde{\eta}(\theta)]e^{\lambda\theta} - \lambda I_n$$

là ma trận của tựa đa thức đặc trưng của hệ nhiễu (4.6)-(4.7).

Định lý 4.2. *Giả sử rằng hệ tuyến tính có trễ* (4.2)-(4.3) *là điều khiển được phổ và bị nhiễu với nhiễu có cấu trúc dạng* (4.5)*. Khi đó, bán kính điều khiển được phổ của hệ* (4.2)-(4.3) *thỏa mãn:*

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\max_{i\in\{0,1\}}\left\{\sup_{\lambda\in\mathbb{C}}\|E_0W(\lambda)^{-1}D_i\|; \sup_{\lambda\in\mathbb{C}} M(\lambda)\|\hat{E}_1W(\lambda)^{-1}D_i\|\right\}} \\ &\leqslant r_{sp}(A_0, \eta, B_0) \\ &\leqslant \frac{1}{\max\left\{\sup_{\lambda\in\mathbb{C}}\|E_0W(\lambda)^{-1}D_0\|; \sup_{\lambda\in\mathbb{C}} M(\lambda)\|\hat{E}_1W(\lambda)^{-1}D_1\|\right\}}, \end{aligned} \tag{4.11}$$

trong đó $W(\lambda)^{-1}$ là toán tử tuyến tính đa trị tuyến tính nghịch đảo của $W(\lambda)$,

$$M(\lambda) = \max_{\theta\in[-h,0]} |e^{\lambda\theta}| = \begin{cases} 1, & \text{nếu} \quad \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0 \\ e^{-h(\operatorname{Re}\lambda)}, & \text{nếu} \quad \operatorname{Re}\lambda < 0 \end{cases}, \tag{4.12}$$

$$\hat{E}_1 := \begin{bmatrix} E_1 & 0_{q_1\times m} \\ 0_{m\times n} & 0_{m\times m} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{(q_1+m)\times(n+m)}, \tag{4.13}$$

và $0_{i\times j}$ kí hiệu là ma trận không của $\mathbb{K}^{i\times j}$. Đặc biệt, nếu $D_0 = D_1 = D$ thì ta nhận được công thức tính bán kính điều khiển được phổ của hệ tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm (4.2)-(4.3)*:*

$$r_{sp}(A_0, \eta, B_0) = \frac{1}{\max\left\{\sup_{\lambda\in\mathbb{C}}\|E_0W(\lambda)^{-1}D\|; \sup_{\lambda\in\mathbb{C}} M(\lambda)\|\hat{E}_1W(\lambda)^{-1}D\|\right\}}. \tag{4.14}$$

4.3 Bán kính điều khiển được xấp xỉ của hệ tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm

Xét toán tử:

$$[H, G] : L_p([-h, 0], \mathbb{K}^n) \times L_p([-h, 0], \mathbb{K}^m) \to L_p([-h, 0], \mathbb{K}^n),$$

được xác định bởi

$$[H, G]\begin{pmatrix}\phi^1\\ u\end{pmatrix} = H\phi^1 + Gu, \text{ với } \phi^1 \in L_p([-h,0],\mathbb{K}^n),\ u \in L_p([-h,0],\mathbb{K}^m), \tag{4.15}$$

trong đó $H \in \mathcal{L}(L_p([-h,0],\mathbb{K}^n))$ và $G \in \mathcal{L}(L_p([-h,0],\mathbb{K}^m), L_p([-h,0],\mathbb{K}^n))$ tương ứng được xác định như sau:

$$(H\phi^1)(\alpha) = \int_{-h}^{\alpha} d[\eta(\theta)]\phi^1(\theta-\alpha),\quad \alpha \in [-h,0], \tag{4.16}$$

với $\phi^1 \in L_p([-h,0],\mathbb{K}^n)$ và

$$(Gu)(\alpha) = B_0 u(\alpha),\quad \alpha \in [-h,0]. \tag{4.17}$$

Bổ đề 4.3. *Xét hệ điều khiển (4.2)-(4.3) và giả sử rằng η có nguyên tử cô lập (A_h) tại $-h$. Khi đó, các tính chất sau là tương đương.*

(a) $[H,G]$ *là toàn ánh* ;

(b) $\mathrm{cl}(\mathrm{Im}[H,G]) = L_p([-h,0],\mathbb{K}^n)$;

(c) $\mathrm{Ker}\, H^* \cap \mathrm{Ker}\, G^* = \{0\}$;

(d) $\mathrm{rank}[A_h, B_0] = n$.

Trong trường hợp tổng quát, tính M_p-điều khiển được xấp xỉ không được bảo toàn khi hệ chịu tác động của nhiễu bé. Bây giờ, giả sử rằng η có nguyên tử cô lập tại $-h$ và các ma trận η và B_0 của hệ bị nhiễu với cấu trúc tách dạng:

$$\eta(\cdot) \rightsquigarrow \widetilde{\eta}(\cdot) = \eta(\cdot) + D_1\delta(\cdot)E_1,\quad \widetilde{B}_0 = B_0 \rightsquigarrow B_0 + D_2\Delta_2E_2, \tag{4.18}$$

trong đó, $D_i \in \mathbb{K}^{n\times l_i}, i = 1,2,\ E_1 \in \mathbb{K}^{q_1\times n}, E_2 \in \mathbb{K}^{q_2\times m}$ là các ma trận cho trước và $\delta \in \mathrm{NBV}([-h,0],\mathbb{K}^{l_1\times q_1}), \Delta_2 \in \mathbb{K}^{l_2\times q_2}$ là các ma trận nhiễu chưa biết. Hơn nữa, ta giả sử thêm rằng ma trận nhiễu δ bị hạn chế lấy trong tập

$$\mathrm{NBV}_h([-h,0],\mathbb{K}^{l_1\times q_1}) = \{\delta \in \mathrm{NBV}([-h,0],\mathbb{K}^{l_1\times q_1}) : \\ \delta \text{ có nguyên tử cô lập tại } -h\}.$$

Khi đó, toán tử nhiễu $\widetilde{[H,G]}$ tương ứng được xác định bởi

$$\widetilde{[H,G]}\begin{pmatrix}\phi^1\\ u\end{pmatrix}(\alpha) = [H,G]\begin{pmatrix}\phi^1\\ u\end{pmatrix}(\alpha) + \int_{-h}^{\alpha} d[D_1\delta E_1]\phi^1(\theta-\alpha) \\ + D_2\Delta_2E_2u(\alpha), \text{với } \alpha \in [-h,0]. \tag{4.19}$$

Trong trường hợp này, ta xác định khoảng cách cấu trúc phức tới tập không toàn ánh của ánh xạ $[H,G]$ tương ứng với các nhiễu (4.18) như sau

$$\mathrm{dist}_h([H,G]) = \inf\{\|\Delta_2\| + \|\delta\| : \delta \in \mathrm{NBV}_h([-h,0],\mathbb{C}^{l_1\times q_1}),\ \Delta_2 \in \mathbb{C}^{l_2\times q_2}, \\ \text{s.t } \widetilde{[H,G]} \text{ không toàn ánh }\}. \tag{4.20}$$

Bổ đề 4.4. *Giả sử rằng* η *có nguyên tử cô lập* (A_h) *tại* $-h$ *sao cho* $\operatorname{rank}[A_h, B_0] = n$ *và các ma trận của hệ* (4.2)-(4.3) *được nhiễu có cấu trúc* (4.18), *trong đó* $\delta \in \mathrm{NBV}_h([-h,0], \mathbb{C}^{l_1\times q_1})$. *Khi đó, khoảng cách cấu trúc tới tập không toàn ánh của ánh xạ* $[H,G]$ *tương ứng với nhiễu* (4.18) *được ước lượng bởi*

$$\begin{aligned}\frac{1}{\max_{i,j\in\{1,2\}}\{\|E_{0i}[A_h,B_0]^{-1}D_j\|\}} &\leqslant \operatorname{dist}_h([H,G]) \\ &\leqslant \frac{1}{\max_{i\in\{1,2\}}\{\|E_{0i}[A_h,B_0]^{-1}D_i\|\}},\end{aligned} \tag{4.21}$$

trong đó

$$E_{01} = [E_1, 0_{q_1\times m}], \quad E_{02} = [0_{q_2\times n}, E_2]. \tag{4.22}$$

Đặc biệt, nếu $D_1 = D_2 = D$ *thì*

$$\operatorname{dist}_h([H,G]) = \frac{1}{\max_{i\in\{1,2\}}\{\|E_{0i}[A_h,B_0]^{-1}D\|\}}. \tag{4.23}$$

Định lý 4.5. *Giả sử rằng hệ tuyến tính có trễ* (4.2)-(4.3) *là điều khiển được xấp xỉ trong không gian trạng thái* M_p *và các ma trận của hệ bị nhiễu có cấu trúc* (4.5). *Giả sử thêm rằng* η *có nguyên tử cô lập* (A_h) *tại* $-h$ *với* $A_h \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *và* δ *bị hạn chế trên lớp nhiễu* $NBV_h([-h,0], \mathbb{K}^{l_1\times q_1})$. *Khi đó, bán kính của tính* M_p*-điều khiển được xấp xỉ của hệ có thể tính như sau:*

$$r_{M_p}(A_0,\eta,B_0) = \min\big\{r_{sp}(A_0,\eta,B_0); \operatorname{dist}_h([H,G])\big\}, \tag{4.24}$$

trong đó $r_{sp}(A_0,\eta,B_0)$ *và* $\operatorname{dist}_h([H,G])$ *tương ứng thỏa mãn các ước lượng* (4.11) *và* (4.21), *với* $q_2 = q_0, D_2 = D_0$,

$$E_2 = E_0 \begin{bmatrix} 0_{n\times m} \\ I_m \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{q_0\times m}, \tag{4.25}$$

và các ma trận $E_{0i}, i = 1,2$, *được xác định bởi* (4.22). *Đặc biệt, nếu* $D_0 = D_1 = D$ *thì ta nhận được:*

$$\begin{aligned}r_{M_p}(A_0,\eta,B_0) = \min\Big\{&\frac{1}{\sup_{\lambda\in\mathbb{C}}\|E_0W(\lambda)^{-1}D\|}; \frac{1}{\sup_{\lambda\in\mathbb{C}} M(\lambda)\|\hat{E}_1W(\lambda)^{-1}D\|}; \\ &\frac{1}{\sup_{i\in\{1,2\}}\|E_{0i}[A_h,B_0]^{-1}D\|}\Big\},\end{aligned} \tag{4.26}$$

trong đó $M(\lambda)$ *và các ma trận* $\hat{E}_1$ *tương ứng được xác định bởi* (4.12) *và* (4.13).

Xét trường hợp đặc biệt của hệ (4.2)-(4.3), trong đó η có dạng

$$\eta(\theta) = \sum_{j=1}^{N} A_j\chi_{(-h_j,0]}(\theta) + \int_{-h}^{\theta} Q(s)ds, \tag{4.27}$$

với $0 = h_0 < h_1 < h_2 < \ldots < h_N = h$, và $Q(\cdot)$ là $\mathbb{K}^{n\times n}$-các hàm số khả tích xác định trên đoạn trên $[-h, 0]$ và mở rộng tới $(-\infty, \infty)$ bằng cách đặt $Q(s) \equiv 0$ với mọi $s \notin [-h, 0]$. Khi đó, hệ điều khiển tuyến tính (4.2)-(4.3) có dạng

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + \sum_{j=1}^{N} A_jx(t-h_j) + \int_{-h}^{0} Q(\theta)x(t+\theta)d\theta + B_0u(t), \quad t \geqslant 0. \tag{4.28}$$

Giả sử rằng hàm $Q(\cdot)$ thỏa mãn điều kiện

$$Q(\theta) \equiv 0, \ \forall\theta \in [-h, -h+\gamma] \text{ với } \gamma \in (0, h] \text{ nào đó.} \tag{4.29}$$

Hệ quả 4.6. *Giả sử rằng hệ điều khiển tuyến tính (4.28), với Q thỏa mãn (4.29), là M_p-điều khiển được xấp xỉ và được nhiễu có cấu trúc dạng (4.5), với $D_0 = D_1 = D$ và $\delta \in NBV_h([-h, 0], \mathbb{C}^{l_1\times q_1})$. Khi đó, bán kính M_p-điều khiển được xấp xỉ của hệ thống được tính toán theo công thức sau:*

$$\begin{aligned} r_{M_p}(A_0, \eta, B_0) = \min\Big\{ &\frac{1}{\sup_{\lambda\in\mathbb{C}} \|E_0W(\lambda)^{-1}D\|}; \frac{1}{\sup_{\lambda\in\mathbb{C}} M(\lambda)\|\hat{E}_1W(\lambda)^{-1}D\|}; \\ &\frac{1}{\sup_{i\in\{0,1\}} \|E_{0i}[A_N, B_0]^{-1}D\|}\Big\}, \end{aligned} \tag{4.30}$$

trong đó ma trận hàm Hautus $W(\cdot)$ của hệ thống được viết lại ở dạng

$$W(\lambda) = \Big[\ \sum_{j=1}^{N} A_je^{-h_j\lambda} + \int_{-h+\gamma}^{0} Q(\theta)e^{\lambda\theta}d\theta - \lambda I, B_0\ \Big]$$

và $M(\lambda), \hat{E}_1, E_{0i}, i = 1, 2$ tương ứng được xác định bởi (4.12), (4.13), (4.22).

4.4 Kết luận

Trong chương này, luận án thu được các kết quả sau:

-Tiêu chuẩn điều khiển được xấp xỉ mới cho hệ tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm (4.1) trong trường hợp η có nguyên tử cô lập tại $-h$.

-Cận trên và cận dưới của bán kính điều khiển được phổ của hệ (4.1) trong trường hợp các ma trận của hệ được nhiễu có cấu trúc (4.5) và đưa ra công thức tính bán kính điều khiển được phổ trong trường hợp các ma trận nhiễu $D_0 = D_1$.

- Cận trên và cận dưới của bán kính điều khiển được xấp xỉ của hệ (4.1) trong trường hợp η và hàm nhiễu δ trong cấu trúc (4.5) đều có nguyên tử cô lập tại $-h$.

Kết luận

Luận án này đã nghiên cứu sự bền vững của tính điều khiển được của các hệ động lực mô tả bởi phương trình vi phân có trễ và hệ trung tính trong trường hợp các ma trận của các hệ này chịu tác động của các nhiễu có cấu trúc khác nhau. Để tiếp cận bài toán này, chúng tôi sử dụng lý thuyết toán tử đa trị tuyến tính, lý thuyết nửa nhóm toán tử liên tục mạnh, đặc biệt là các tiêu chuẩn điều khiển được tựa điều kiện hạng Hautus. Các kết quả của luận án hoàn toàn mới và rất được quan tâm. Các kết quả chính mà luận án thu được:

1. Các công thức tính bán kính điều khiển được xấp xỉ, bán kính điều khiển được Euclide của hệ có trễ rời rạc khi các ma trận của hệ chịu tác động của các nhiễu có cấu trúc.

2. Các công thức tính bán kính điều khiển được Euclide, bán kính điều khiển được chính xác phức, bán kính điều khiển được xấp xỉ phức của hệ trung tính.

3. Cận trên và cận dưới của bán kính điều khiển được phổ, điều khiển được xấp xỉ trong không gian trạng thái $M_p = \mathbb{C}^n \times L_p([-h, 0], \mathbb{C}^n)$, với $1 < p < \infty$ của hệ tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm khi các ma trận của hệ bị nhiễu có cấu trúc.

Một số vấn đề có thể tiếp tục nghiên cứu:

1. Bài toán tính bán kính phức của hệ trung tính trong trường hợp tổng quát có trễ tích phân trong biến đạo hàm.

2. Bài toán về bán kính thực của các hệ nêu trên.

3. Bài toán điều khiển được vững cho các hệ đã nghiên cứu ở trên trong trường hợp tổng quát hơn với trễ xuất hiện trong biến điều khiển.

Danh mục các công trình

[1]. Nguyen Khoa Son, Do Duc Thuan and Nguyen Thi Hong (2015), “Radius of approximate controllability of linear retarded systems under structured perturbations”, *Systems & Control Letters* , 84, 13-20 (SCI).

[2]. Do Duc Thuan and Nguyen Thi Hong (2018), “Controllability radii of linear neutral systems under structured perturbations”, *International Journal of Control* , 91, 145-155 (SCI).

[3]. Nguyen Khoa Son and Nguyen Thi Hong, “On structured distance to uncontrollability of general linear retarded systems”, *Acta Mathematica Vietnamica,* , 45, 411-433.

Các kết quả của luận án đã được báo cáo tại:

- Xêmina tại Phòng Tối ưu và Điều khiển, Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.

- Xêmina tại Phòng Giải tích Toán học, Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.

- Hội thảo Tối ưu và Tính toán Khoa học lần thứ 14, Ba Vì, tháng 4 năm 2016.

- Hội nghị Toán ứng dụng và Tin học tại Đại học Bách Khoa Hà Nội, ngày 12-13 tháng 11 năm 2016.

-Hội nghị Quốc Tế “7th International Conference on High Performance Scientific Computing" ngày 19-23 , tháng 3 năm 2018 tại Hà Nội.

-Workshop “Control and Optimization Problem" ngày 17-19, tháng 5 năm 2018 tại Viện Toán Cao Cấp, Hà Nội.

-Hội nghị “The Third Mongolia-Russia-Vietnam Workshop on Numerical Solution of Integral and Differential Equations”, ngày 22-27, tháng 10 năm 2018 tại Viện Toán học.

-Các hội nghị đánh giá Nghiên cứu sinh của Viện Toán học, tháng 10 năm 2016, tháng 11 năm 2017, tháng 11 năm 2018 và tháng 11 năm 2019.