VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM
VIỆN TOÁN HỌC

NGUYỄN THỊ HỒNG

MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN ĐƯỢC VỮNG CỦA HỆ ĐỘNG LỰC MÔ TẢ BỞI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CÓ TRỄ

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - 2021

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM
VIỆN TOÁN HỌC

MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN ĐƯỢC VỮNG CỦA HỆ ĐỘNG LỰC MÔ TẢ BỞI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CÓ TRỄ

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: **Phương trình vi phân và tích phân**
Mã số: 9 46 01 03

Tập thể hướng dẫn khoa học:
GS. TSKH. NGUYỄN KHOA SƠN
PGS. TS. ĐỖ ĐỨC THUẬN

Người thực hiện luận án:
NGUYỄN THỊ HỒNG

Hà Nội - 2021

Tóm tắt

Luận án nghiên cứu sự bền vững của tính điều khiển được của hệ động lực mô tả bởi phương trình vi phân có trễ trong ba trường hợp: hệ điều khiển tuyến tính có trễ rời rạc, hệ tuyến tính trung tính và hệ điều khiển tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm khi các ma trận của các hệ này được nhiễu có cấu trúc. Luận án gồm bốn chương.

Trong Chương 1, chúng tôi đưa ra một số kiến thức chuẩn bị và một số kiến thức cơ bản về tính điều khiển được của hệ tuyến tính, hệ tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm, hệ tuyến tính trung tính và lý thuyết về toán tử đa trị tuyến tính, những phần cốt lõi sử dụng trong luận án. Ngoài ra, chúng tôi cũng nhắc lại một số mệnh đề về các bán kính toàn ánh được sử dụng để chứng minh các kết quả chính ở các chương sau.

Trong Chương 2, chúng tôi đưa ra các công thức tính bán kính điều khiển được xấp xỉ phức trong không gian trạng thái $M_2 := \mathbb{K}^n \times L_2([-h, 0], \mathbb{K}^n)$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, bán kính điều khiển được Euclide phức của hệ tuyến tính có trễ rời rạc. Ngoài ra, chúng tôi đưa ra mối quan hệ giữa các bán kính điều khiển thực và phức cho hệ này.

Trong Chương 3, chúng tôi đưa ra các công thức tính bán kính điều khiển được Euclide phức, bán kính điều khiển được chính xác phức trong không gian trạng thái $W_2^1([-h, 0], \mathbb{C}^n)$, bán kính điều khiển được xấp xỉ phức trong không gian $W_2^1([-h, 0], \mathbb{C}^n)$ của hệ tuyến tính trung tính.

Trong Chương 4, chúng tôi nghiên cứu tính điều khiển được vững trong không gian trạng thái $M_p = \mathbb{K}^n \times L_p([-h, 0], \mathbb{K}^n), 1 < p < \infty$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ cho hệ điều khiển tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm. Một số công thức và các đánh giá cho các bán kính điều khiển được phổ, bán kính điều khiển được xấp xỉ phức được thiết lập cho hệ này, dưới giả thiết các ma trận của hệ được nhiễu có cấu trúc.

Abstract

The thesis studies the robustness of controllability of dynamical systems described by differential equations with time delays. The thesis consists of four chapters:

In Chapter 1, we introduce some mathematical backgrounds of controllability of linear systems, linear retarded systems with time delays, linear neutral systems and some characteristics of multi-value linear operators. Some technical lemmas needed for the proof of the main results are given.

In Chapter 2, we provide some computable formulas for caculating the complex radius of approximate controllability in the Banach space $M_2 := \mathbb{K}^n \times L_2([-h, 0], \mathbb{K}^n)$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$, the complex radius of Euclide controllability for linear retarded systems.

In Chapter 3, we give some computable formulas of the complex radius of Euclide controllability, the complex radius of exact controllability in the space $W_2^1([-h, 0], C^n)$, the complex radius of approximate controllability in the space $W_2^1([-h, 0], C^n)$ of linear neutral systems.

In Chapter 4, we study the robustness of controllability in the state space $M_p = \mathbb{K}^n \times L_p([-h, 0], \mathbb{K}^n), 1 < p < \infty$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, for the linear retarded system described linear fuctional differential equations. Some formulas and estimating of the radius of spectral controllability and the radius of approximate controllability for this system are obtained under the assumption that the system's matrices are subjected to structured perturbations.

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng mình, được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của GS. TSKH. Nguyễn Khoa Sơn và PGS. TS. Đỗ Đức Thuận. Các kết quả viết chung với các tác giả đã nhận được sự nhất trí của đồng tác giả khi đưa vào luận án. Các kết quả nêu trong luận án là những kết quả trung thực và chưa từng được ai công bố trên bất kỳ công trình nào khác.

Tác giả

Nguyễn Thị Hồng

Lời cảm ơn

Luận án này được thực hiện và hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của GS. TSKH. Nguyễn Khoa Sơn và PGS. TS. Đỗ Đức Thuận tại Viện Toán học. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới GS. TSKH. Nguyễn Khoa Sơn, người đã tận tình hướng dẫn và giúp đỡ tôi trong suốt quá trình làm luận án. Khi tôi mới được thầy nhận hướng dẫn, mọi kiến thức về chuyên ngành và lĩnh vực nghiên cứu là rất mới mẻ với tôi. Mặc dù công việc quản lí rất bận rộn nhưng thầy vẫn dành thời gian cho tôi, dạy tôi cách tìm tài liệu, cách đọc, cách đặt vấn đề nghiên cứu và cách viết một bài báo khoa học. Mỗi lần có thắc mắc, tôi đều được thầy ân cần chỉ bảo từ những kiến thức cơ bản đến kiến thức chuyên sâu của lĩnh vực mình nghiên cứu. Nhờ sự chỉ bảo của thầy, tôi đã trở lên tiến bộ hơn trong quá trình học tập và nghiên cứu. Bên cạnh đó, thầy luôn tạo điều kiện thuận lợi cho tôi tham gia các đề tài và làm việc tại Viện Toán cao cấp để tôi có điều kiện nghiên cứu hơn. Đặc biệt, thầy luôn động viên mỗi lần tôi gặp khó khăn trong công việc và cuộc sống để tôi có thể vượt qua được thời gian học tiến sĩ và hoàn thành luận án.

Tôi cũng xin bày tỏ lòng biết ơn tới PGS. TS. Đỗ Đức Thuận. Thầy đã tận tình giảng giải cho tôi những vấn đề mà tôi thắc mắc. Đặc biệt, thầy đã dẫn dắt tôi rất nhiều trong việc khai thác các vấn đề xoay quanh bài toán mình tìm hiểu và thúc đẩy quá trình hoàn thành một số bài báo. Thầy luôn nhiệt tình giúp đỡ, động viên, khích lệ giúp tôi từng bước tự tin hơn trong quá trình học tập.

Tôi xin chân thành cảm ơn PGS. TSKH. Hà Huy Vui, người đã giới thiệu để tôi được về làm việc tại Viện Toán. Trong thời gian đầu về làm việc tại Viện, tôi may mắn được thầy dẫn dắt và chỉ bảo tận tình. Nhờ đó, tôi đã có kết quả nghiên cứu đầu tiên của mình. Mặc dù kết quả đó không được trình bày trong luận án, nhưng đối với tôi đó là động lực đầu tiên giúp tôi tự tin hơn đi trên con đường nghiên cứu. Hơn nữa, nhờ thầy giới thiệu tôi mới được làm nghiên cứu sinh dưới sự hướng dẫn của GS. TSKH. Nguyễn Khoa Sơn. Trong suốt thời gian qua, thầy luôn động viên để tôi vững tin trên con đường nghiên cứu.

Tôi xin chân thành cảm ơn tới các thầy, cô trong phòng Giải Tích Toán học đã giúp đỡ và tạo điều kiện để tôi được làm việc tại phòng trong 2 năm đầu tôi về Viện. Tôi cũng xin cảm ơn tới các thầy trong phòng Hình học và Tôpô đã cho phép tôi được trình bày một số kết quả học tập và góp ý chỉnh sửa những thiếu sót trong kiến thức cho tôi trong những buổi xêmina của phòng.

Tôi xin chân thành cảm ơn tới các thầy, cô trong Trung tâm Đào tạo Sau đại học, Viện Toán học đã dạy dỗ và cho tôi nhiều bài giảng bổ ích cũng như cho tôi cơ hội để học tập và trình bày những thắc mắc tại những buổi xêmina của phòng trong suốt ba năm tôi làm việc tại phòng. Tôi cũng gửi lời cảm ơn tới các đồng nghiệp trong phòng đã chia sẻ các kiến thức và kinh nghiệm trong việc học tập và nghiên cứu.

Tôi cũng xin chân thành cảm ơn các thầy, cô, các anh chị và các bạn đồng nghiệp trong phòng Tối ưu và Điều khiển đã luôn quan tâm giúp đỡ, trao đổi và góp ý để tôi hoàn thiện luận án trong suốt thời gian tôi làm nghiên cứu sinh và là nghiên cứu viên tại phòng.

Tôi xin chân thành cảm ơn các thầy trong ban Lãnh đạo Viện Toán học đã cho tôi cơ hội và những điều kiện thuận lợi để tôi được học tập, làm việc trong môi trường nghiên cứu tốt. Tôi cũng xin trân trọng cảm ơn tới các thầy, cô và các anh chị, các bạn đồng nghiệp trong Viện đã luôn quan tâm, chia sẻ, động viên tôi trong công việc và cuộc sống.

Tôi cũng chân thành cảm ơn tới Viện nghiên cứu Cao cấp về Toán đã tạo điều kiện để tôi hoàn thành bài báo thứ ba trong thời gian làm việc 4 tháng tại Viện và có điều kiện được gặp gỡ trao đổi kiến thức chuyên ngành với các đồng nghiệp trong nhóm.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn tới các thầy cô trong Hội đồng chấm luận án cấp phòng và Hội đồng chấm luận án cấp Viện đã đọc và góp ý chi tiết để tôi có thể hoàn thiện luận án tốt hơn.

Tôi chân thành cảm ơn tới những người thân của tôi: Bố, anh chị em, chồng và các con của tôi, đặc biệt là mẹ, người đã luôn ở bên cạnh, chia sẻ, ủng hộ giúp đỡ để tôi có thời gian hoàn thành quá trình học tập.

Tác giả

Nguyễn Thị Hồng

Mục lục

Danh sách các kí hiệu

$\mathbb{K}$	Trường $\mathbb{C}$ hoặc $\mathbb{R}$
$\mathbb{K}^{n\times m}$	Tập tất cả các ma trận cấp $n \times m$ trong $\mathbb{K}$
I_n	Ma trận đơn vị cấp n
$\|\cdot\|_2$	Chuẩn Euclide hay chuẩn phổ trên không gian $\mathbb{K}^n$
$\|\cdot\|_\infty$	Chuẩn vô cùng trên không gian $\mathbb{K}^n$
$\ker \mathcal{F}$	Không gian con nhân của $\mathcal{F}$
$\operatorname{Im} \mathcal{F}$	Không gian ảnh của $\mathcal{F}$
$\operatorname{dom} \mathcal{F}$	Miền xác định của $\mathcal{F}$
$\operatorname{gr} \mathcal{F}$	Đồ thị của $\mathcal{F}$
$\sigma()$	Tập phổ
$\operatorname{Re} \lambda$	Phần thực của λ
$\operatorname{Ima} \lambda$	Phần ảo của λ
$\sigma_{\min}$	Giá trị kì dị nhỏ nhất
$\sigma_i(H_1, H_2)$	Giá trị kì dị suy rộng thứ i của cặp ma trận (H_1, H_2).
$\sigma_{\min}(H_1, H_2)$	Giá trị kì dị suy rộng nhỏ nhất của cặp ma trận (H_1, H_2)
$\tau_n(A, B)$	Giá trị nhiễu thực suy rộng thứ n của cặp ma trận (A, B)
$()^*$	Phép lấy liên hợp
$()^\perp$	Phép lấy trực giao
$()^\dagger$	Nghịch đảo Moore-Penrose
$()^{-1}$	Phép lấy nghịch đảo
A^T	Ma trận chuyển vị của ma trận A
$\operatorname{adj} A$	Ma trận phụ hợp của ma trận $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$
$P(\lambda)$	Ma trận của tựa đa thức đặc trưng
$\mathbb{P}$	Phép chiếu
$\operatorname{cl}A$	Bao đóng của tập hợp A

span$A$	Không gian tuyến tính sinh bởi A
χ_A	Hàm đặc trưng của tập hợp A
$d(0, M)$	Khoảng cách từ gốc tọa độ đến tập M
dist	Khoảng cách toàn ánh
$C([-h, 0], \mathbb{K}^n)$	Không gian các hàm liên tục trên đoạn $[-h, 0]$ trong $\mathbb{K}^n$
$BV([-h, 0], \mathbb{K}^{n\times n})$	Tập các hàm ma trận với các thành phần là các hàm có biến phân giới nội trên đoạn $[-h, 0]$
$NBV([-h, 0], \mathbb{K}^{n\times n})$	Tập các hàm ma trận η thuộc $BV([-h, 0], \mathbb{K}^{n\times n})$ và thỏa mãn $\eta(\theta) = \eta(-h) = 0$ với mọi $\theta \leqslant -h$, và $\eta(\theta) = \eta(0)$, với $\theta \geqslant 0$, η liên tục trái trên $(-h, 0)$.
$L_p([a, b], \mathbb{K}^m)$	Không gian các hàm khả tích cấp p trong $\mathbb{K}^m$
$L_\infty([a, b], \mathbb{K}^m)$	Không gian các hàm bị chặn hầu khắp nơi trên đoạn $[a, b]$ và nhận giá trị trong $\mathbb{K}^m$
$L_p^{loc}([0, \infty), \mathbb{K}^m)$	Không gian các hàm khả tích địa phương cấp p trong $\mathbb{K}^m$
$L_p([a, b], U)$	Không gian các hàm khả tích cấp p nhận giá trị trong U
M_p	Không gian tích $\mathbb{K}^n \times L_p([-h, 0], \mathbb{K}^n)$
$L(X)$	Không gian các toán tử tuyến tính liên tục từ X vào X
$W_2^1([-h, 0], \mathbb{K}^n)$	Không gian Sobolev các hàm $x : [-h, 0] \to \mathbb{K}^n$ liên tục tuyệt đối và có đạo hàm $\dot{x}(\cdot) \in L_2([-h, 0], \mathbb{K}^n)$
I_X	Toán tử đồng nhất trên không gian X

MỞ ĐẦU

Bài toán điều khiển được là bài toán cơ bản trong lý thuyết điều khiển. Một hệ điều khiển tổng quát được mô tả bởi phương trình vi phân:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), t \geqslant 0, \tag{1}$$

trong đó $x \in \mathbb{K}^n$ là biến trạng thái, $u \in \mathbb{K}^m$ là biến điều khiển, $f : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m \times [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{K}^n$, với $\mathbb{K}$ là trường số thực hoặc phức. Thông thường, một số điều kiện được đặt lên hàm f (ví dụ f là hàm đo được theo biến t, liên tục theo biến u và Lipschitz theo biến x) để đảm bảo sự tồn tại và duy nhất nghiệm đối với mỗi điều kiện ban đầu $x(0) = x_0$ và mỗi hàm điều khiển đo được $u(t)$. Hơn thế nữa, việc thác triển nghiệm trên toàn khoảng $[0, \infty)$ cũng được bảo đảm. Hệ (1) được gọi là điều khiển được hoàn toàn (complete controllability) nếu với mọi trạng thái ban đầu cho trước $x_0 \in \mathbb{K}^n$ và mọi trạng thái mong muốn $x_1 \in \mathbb{K}^n$, tồn tại thời gian $T > 0$ và hàm đo được $u(t)$ trên đoạn $[0, T]$ sao cho nghiệm của bài toán Cauchy tương ứng $x(t) = x(x_0, u, t)$ của hệ (1) thỏa mãn $x(0) = x_0$ và $x(T) = x_1$. Trong trường hợp hệ (1) điều khiển được đến mọi x_1 trong một lân cận của x_0, thì hệ (1) được gọi là điều khiển được địa phương tại x_0. Bài toán được đặt ra là tìm các điều kiện để hệ (1) điều khiển được hoàn toàn hoặc điều khiển được địa phương và xây dựng hàm điều khiển $u(t)$ tương ứng. Bài toán này đã được nghiên cứu từ những năm 60 của thế kỉ XX và thu hút sự quan tâm nghiên cứu của rất nhiều nhà toán học (xem trong các tài liệu [38], [29], [11], [81]). Một trong những công trình đầu tiên là bài báo [38] của R.E. Kalman năm 1962. Trong công trình này, tác giả xét hệ điều khiển tuyến tính hệ số hằng

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), t \geqslant 0, \tag{2}$$

với $x(t) \in \mathbb{K}^n$, $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{K}^{n\times m}$ và $u(t) \in \mathbb{K}^m$. Khi đó:

$$\text{Hệ (2) điều khiển được hoàn toàn} \iff \text{rank}[B, AB, ..., A^{n-1}B] = n. \tag{3}$$

Năm 1969, M.L. J. Hautus đã chứng minh một tiêu chuẩn điều khiển được khác tương đương với (3) như sau (xem trong [29]):

$$\text{Hệ (2) điều khiển được hoàn toàn} \iff \text{rank } [A - \lambda I_n, B] = n, \forall \lambda \in \mathbb{C}. \tag{4}$$

Tiêu chuẩn (4) nhìn qua có vẻ phức tạp hơn so với tiêu chuẩn (3) của Kalman, tuy nhiên để kiểm tra tiêu chuẩn này ta chỉ cần kiểm tra tại các λ là giá trị riêng của ma trận A. Hơn thế nữa, do đặc thù của các cấu trúc nhiễu của các ma trận A, B nên tiêu chuẩn Hautus (4) trở nên hữu ích hơn trong các bài toán nghiên cứu về sự bền vững của tính điều khiển được (xem trong các bài báo [39, 69, 70, 71] và các Chương 2, Chương 3, Chương 4 của luận án). Cho đến nay lý thuyết điều khiển được đã đạt được nhiều kết quả cho các hệ điều khiển mô tả bởi phương trình sai phân, phương trình phi tuyến, phương trình vi phân hoặc sai phân đại số, phương trình vi phân và sai phân trong không gian vô hạn chiều... (xem trong các tài liệu [2, 15, 16, 81]). Các kết quả về điều khiển được cũng được mở rộng cho các hệ động lực mô tả bởi các phương trình vi phân hoặc sai phân có trễ theo biến thời gian ([27, 46, 47, 48, 49, 54, 60, 61, 64, 79]). Lớp các hệ này đóng vai trò rất quan trọng trong thực tiễn (xem [27, 66]), đặc biệt là hệ tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm:

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + \int_{-h}^{0} d[\eta(\theta)]x(t+\theta) + B_0u(t), t \geqslant 0, \tag{5}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{K}^n$, $u(t) \in \mathbb{K}^m$, với $t \geqslant 0$, $A_0 \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $B_0 \in \mathbb{K}^{n\times m}$, $\eta(\cdot) = (\eta_{ij}(\cdot))_{i,j=1,...,n} \in BV([-h, 0], \mathbb{K}^{n\times n})$ là hàm ma trận với các thành phần η_{ij} là các hàm có biến phân giới nội trên đoạn $[-h, 0]$, và tích phân ở đây được hiểu theo nghĩa Lebesgue-Stieltjes. Chú ý rằng, hệ (5) bao gồm một số trường hợp đặc biệt như hệ tuyến tính có trễ rời rạc dạng:

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h_1) + ... + A_Nx(t-h_N) + B_0u(t), t \geqslant 0, \quad (6)$$

hay hệ tuyến tính có các trễ phân phối dạng

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + \int_{-h}^{0} Q(\theta)x(t+\theta)d\theta + B_0u(t), t \geqslant 0, \quad (7)$$

trong đó $0 < h_1 < h_2 < ... < h_n$ là các hằng số, các $A_i \in \mathbb{K}^{n\times n}$, với mọi $i = 0, 1, ..., N$ và $Q(\cdot) \in L_p([-h, 0], \mathbb{K}^{n\times n})$, $1 < p < \infty$.

Khác với trường hợp hệ tuyến tính (2), không gian trạng thái của hệ tuyến tính có trễ (5) được mô tả bởi các không gian hàm, ví dụ như không gian các hàm số liên tục $C([-h, 0], \mathbb{K}^n)$, không gian Sobolev $W_2^1([-h, 0], \mathbb{K}^n)$-không gian các hàm liên tục tuyệt đối $x(\cdot) : [-h, 0] \longrightarrow \mathbb{K}^n$ có đạo hàm khả tích bậc hai, hay không gian Hilbert $M_2(\mathbb{K}) := \mathbb{K}^n \times L_2([-h, 0], \mathbb{K}^n)$. Lý thuyết phương trình vi phân tuyến tính có trễ trên các không gian hàm đã được nghiên cứu trong các tài liệu của J. K. Hale [27], M.C. Delfour [18], H.T. Banks [6], C. Bernier [8], A. Manitius, R. Triggiani [46, 47, 48]. Có thể chứng minh được rằng: Với mỗi hàm đo được $u(t)$, với mọi $(x_0, \phi^1) \in M_2$, hệ (5) có duy nhất nghiệm $x(t) = x(x_0, \phi^1, u, t)$ thỏa mãn điều kiện ban đầu $x(0) = x_0 \in \mathbb{K}^n$ và $x(\theta) = \phi^1(\theta)$, $\theta \in [-h, 0)$. Hơn thế nữa, nghiệm $x(t)$ là hàm liên tục tuyệt đối trên $[0, +\infty)$ và thỏa mãn phương trình (5) hầu khắp nơi trên $[0, +\infty)$ (xem tài liệu [27, 30]). Vì vậy, ta có các khái niệm khác nhau về điều khiển được đối với hệ (5) như điều khiển được Euclide trên không gian trạng thái $\mathbb{K}^n$, điều khiển được chính xác trên các không gian hàm, điều khiển được xấp xỉ, điều khiển được phổ... và những khái niệm này quan hệ mật thiết với việc lựa chọn không gian trạng thái. Ví dụ, hệ (5) được gọi là điều khiển được chính xác (tương ứng, điều khiển được xấp xỉ) trên không gian trạng thái $M_2(\mathbb{K})$ nếu với mọi trạng thái ban đầu cho trước $(x_0, \phi_0) \in M_2(\mathbb{K})$ và mọi trạng thái mong muốn $(x_1, \phi_1) \in M_2(\mathbb{K})$, tồn tại thời gian $T > 0$ và hàm điều khiển $u(t)$ đo được trên $[0, T]$ sao cho nghiệm tương ứng của hệ (5), $x(t) = x(t, x_0, \phi_0, u)$ thỏa mãn $x(T) = x_1$ và $x(T + \theta) = \phi_1(\theta)$, với mọi $\theta \in [-h, 0)$ (tương ứng $\|x(T + \cdot) - \phi_1(\cdot)\| < \epsilon$, với $\epsilon > 0$ cho trước nào đó). Trong trường hợp chỉ có điều kiện $x(T) = x_1$ được thỏa mãn thì hệ (5) được gọi là điều khiển được Euclide. Các khái niệm và tính chất điều khiển được cũng được nghiên cứu cho các không gian $M_p := \mathbb{K}^n \times L_p([-h, 0], \mathbb{K}^n)$, với $1 < p < \infty$ (xem trong [18, 19, 63, 64]).

Hiện nay, để nghiên cứu bài toán điều khiển được trong các không gian hàm của hệ (5), người ta sử dụng hai cách tiếp cận chính: Cách thứ nhất là sử dụng công thức biểu diễn nghiệm trực tiếp (xem [6]) và cách thứ hai là sử dụng lý thuyết nửa nhóm toán tử liên tục mạnh. Theo lý thuyết nửa nhóm toán tử liên tục mạnh, hệ (5) cảm sinh phương trình vi phân không có trễ dưới đây trong không gian Hilbert $M_2(\mathbb{K})$:

$$\dot{z}(t) = \mathcal{A}z(t) + \mathcal{B}u(t), t \geqslant 0, \tag{8}$$

trong đó $z(t) = (x(t), x(t+\cdot))$, $\mathcal{A} : \mathrm{dom}(\mathcal{A}) \subset M_2(\mathbb{K}) \longrightarrow M_2(\mathbb{K})$ là toán tử sinh bởi nửa nhóm toán tử tuyến tính liên tục $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$, và $\mathcal{B}$ là toán tử compact từ không gian Banach $\mathbb{K}^m$ vào không gian $M_2(\mathbb{K})$, được xác định bởi $\mathcal{B}u = (B_0u, 0)$. Ở đây với mỗi t, $S(t) : M_2(\mathbb{K}) \longrightarrow M_2(\mathbb{K})$ được xác định bởi $S(t)((x_0, \phi_0)) = (x(t), x_t)$, $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, với $\theta \in [-h, 0]$, và $x(t) = x(x_0, \phi_0, 0, t)$ là nghiệm của hệ (5) với $u(t) \equiv 0$ thỏa mãn điều kiện ban đầu $x(0) = x_0$, $x(\theta) = \phi_0(\theta)$, với mọi $\theta \in [-h, 0)$. Toán tử sinh $\mathcal{A}$ bởi nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ được xác định bởi

$$\mathcal{A}((\phi^0, \phi^1)) = \left(A_0\phi^0 + \int_{-h}^{0} d[\eta(\theta)]\phi^1(\theta), \dot{\phi}^1 \right),$$

với mọi (ϕ^0, ϕ^1) thuộc vào miền xác định của $\mathcal{A}$:

$$\mathrm{dom}(\mathcal{A}) = \{(\phi^0, \phi^1) \in M_2(\mathbb{K}) : \dot{\phi}^1 \in L_2([-h, 0], \mathbb{K}^n), \phi^0 = \phi^1(0)\}.$$

Vì vậy, theo kết quả của R. Triggiani trong [79], hệ (5) không bao giờ điều khiển được chính xác trên không gian trạng thái $M_2(\mathbb{K})$. Bên cạnh đó, thông qua việc nghiên cứu hệ (8), một số điều kiện cần và đủ của tính điều khiển được Euclide, điều khiển được phổ, điều khiển được xấp xỉ trên không gian trạng thái $\mathbb{R}^n \times L_2([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ của hệ (5) đã được thiết lập (xem [8, 20, 46, 47, 48]). Đáng chú ý là kết quả của Manitius về tiêu chuẩn điều khiển được xấp xỉ cho hệ điều khiển tuyến tính có trễ rời rạc (6) (xem [46]): Các tiêu chuẩn này có thể xem như một dạng mở rộng của điều kiện Hautus (4), trong đó ma trận đặc trưng $A - \lambda I_n$ được thay thế bởi ma trận của tựa đa thức đặc trưng (*characteristic quasi polynomial*) của hệ (6), $P^{rr}(\lambda) = A_0 + e^{-h_1\lambda}A_1 + ... + e^{-h_N\lambda}A_N - \lambda I_n$.

Ngoài ra, bài toán điều khiển được của hệ (5) với hạn chế của biến điều khiển tập $\Omega \subset \mathbb{K}^m$ cũng được các nhà toán học đề cập đến, đặc biệt, Ω là nón dương trong $\mathbb{R}^m$ (xem trong các bài báo [13, 65, 68, 67]). Một trong những kết quả tiêu biểu là của N.K. Son trong bài báo [67]. Trong bài báo này, tác giả sử dụng phương pháp rời rạc hóa công thức biểu diễn nghiệm của hệ (5) theo thang thời gian và các tính chất của các toán tử bị chặn compact để đưa ra điều kiện cần và đủ để hệ (5) là điều khiển được xấp xỉ trên không gian M_p, $1 < p < \infty$. Các điều kiện này không những được đặt lên ma trận của tựa đa thức đặc trưng $P^{tq}(\lambda) = A_0 + \int_{-h}^{0} d[\eta(\theta)]e^{\lambda\theta} - \lambda I_n$ của hệ (5) mà còn được đặt lên các toán tử cấu trúc $H^* : L_q([-h, 0], \mathbb{K}^n) \longrightarrow L_q([-h, 0], \mathbb{K}^n)$, xác định bởi

$$(H^*\psi)(\alpha) = \int_{-h}^{\alpha} d[\eta^*(\theta)\psi(\theta - \alpha)], \text{ với } \alpha \in [-h, 0],$$

và toán tử $G^* : L_q([-h, 0], \mathbb{K}^n) \longrightarrow L_q([-h, 0], \mathbb{K}^m)$, xác định bởi

$$(G^*v)(\alpha) = B_0^*v(\alpha),$$

với $q > 0$ thỏa mãn $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Bên cạnh bài toán điều khiển được của hệ có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm, bài toán điều khiển được của hệ tuyến tính trung tính (neutral system) được mô tả bởi phương trình

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t - h) + A_{-1}\dot{x}(t - h) + Bu(t), t \geqslant 0, \tag{9}$$

cũng nhận được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học [6, 28, 37, 54, 61, 60, 63]. Với hệ tuyến tính trung tính (9), trễ theo biến thời gian không những xuất hiện trong trạng thái mà nó còn xuất hiện trong đạo hàm. Vì vậy, bài toán điều khiển được của hệ (9) cũng đã được nghiên cứu đối với các khái niệm khác nhau như điều khiển được Euclide, điều khiển được chính xác trên các không gian hàm, điều khiển được xấp xỉ (xem trong các tài liệu [37, 54, 61, 60]). Những chứng minh đầu tiên về tính điều khiển được của các hệ tuyến tính trung tính trong không gian trạng thái $W_2^1([-h,0],\mathbb{C}^n)$ đã được trình bày trong các công trình [6, 37, 61], bằng việc sử dụng các kĩ thuật của phép tính toán tử. Cụ thể, để nghiên cứu tính điều khiển được của hệ (9), các tác giả đưa hệ này về dạng:

$$(I_nD - A_{-1}TD - A_0 - A_1T)x = Bu,$$

với các toán tử T và D tương ứng được xác định bởi

$$(Tx)(t) = x(t-h), \text{ và } (Dx)(t) = \dot{x}(t).$$

Một hướng tiếp cận khác để nghiên cứu tính điều khiển được của hệ tuyến tính trung tính (9) là sử dụng kỹ thuật nửa nhóm toán tử tuyến tính liên tục (xem trong [54, 61, 60]). Một cách tương tự, hệ (9) cũng được biểu diễn lại bằng phương trình vi phân không có trễ như phương trình (8) trên không gian trạng thái $\mathbb{C}^n \times L_2([-h,0],\mathbb{C}^n)$, trong đó toán tử sinh $\mathcal{A}$ xác định bởi:

$$\mathcal{A}(\phi^0,\phi^1) = \left(A_0\phi^0 + A_1\phi^1(-h), \dot{\phi}^1\right),$$

và có miền xác định là:

$$\mathrm{dom}(\mathcal{A}) = \{(\phi^0,\phi^1) : \phi^1 \in W_2^1([-h,0],\mathbb{C}^n), x_1 = \phi^1(0) - A_{-1}\phi^1(-h)\}.$$

Bằng việc sử dụng các kĩ thuật của nửa nhóm toán tử liên tục mạnh, D.A. O'Connor và T.J. Tarn đã đưa ra các tiêu chuẩn đại số đơn giản về tính điều khiển được Euclide, tính điều khiển được chính xác trên không gian Sobolev $W_2^1([-h,0],\mathbb{C}^n)$, tính điều khiển được xấp xỉ trên không gian $W_2^1([-h,0],\mathbb{C}^n)$ cho hệ tuyến tính trung tính (9) (xem trong [54]). Các điều kiện này cũng được đặt lên ma trận của tựa đa thức đặc trưng $P^{th}(\lambda) = A_0 + e^{-h\lambda}A_1 + \lambda e^{-h\lambda}A_{-1} - \lambda I_n$ của hệ (9).

Trên thực tế, các mô hình toán học là xấp xỉ, gần đúng của các mô hình thực tiễn và có những tính chất có thể đúng với mô hình toán học nhưng chưa chắc đã đúng với mô hình thực tế. Vì vậy, việc nghiên cứu sự bền vững của các tính chất định tính của các hệ động lực như tính ổn định tiệm cận của nghiệm, tính điều khiển được của hệ thống... trong phạm vi nhiễu bé và đo độ bền vững của chúng là rất cần thiết. Đối với hệ tuyến tính (2) (với $u(t) \equiv 0$) thì tính ổn định tiệm cận của nghiệm tương đương với tính ổn định Hurwitz của ma trận A. Ma trận A được gọi là ổn định Hurwitz nếu $\operatorname{Re}\lambda < 0$, với mọi $\lambda \in \sigma(A)$. Do đó, tính chất này được bảo toàn khi hệ chịu tác động của các nhiễu bé và để đo sự bền vững của tính chất này người ta đưa ra các khái niệm bán kính ổn định phức, bán kính ổn định thực. Những người đầu tiên nghiên cứu các khái niệm này là D. Hinrichsen và A.J. Pritchard, với hai bài báo [31, 32]. Cho A là ma trận ổn định Hurwitz, bán kính ổn định có cấu trúc được định nghĩa và tính theo công thức sau:

$$\begin{aligned} r_{\mathbb{C}}^{hu}(A,D,E) :&= \inf\{\|\Delta\| : \Delta \in \mathbb{C}^{l\times q}, A + D\Delta E \text{ không ổn định Hurwitz}\} \\ &= \frac{1}{\sup_{\omega\in\mathbb{R}} \|E(A - i\omega I_n)^{-1}D\|}. \end{aligned} \tag{10}$$

Kết quả này đã mở ra một hướng nghiên cứu hoàn toàn mới. Cho đến nay đã có nhiều kết quả phong phú và sâu sắc về bán kính ổn định phức, bán kính ổn định thực cho các hệ tuyến tính trong không gian hữu hạn chiều, vô hạn chiều khi các hệ số của hệ chịu các nhiễu có cấu trúc, không có cấu trúc (xem trong các tài liệu [4, 5, 22, 23, 26, 33, 34, 35]). Sự bền vững của tính ổn định của hệ tuyến tính có trễ (5) cũng đã được N.K. Son và P.H.A. Ngoc nghiên cứu trong trường hợp $u(t) \equiv 0$ (xem trong [75]) và gần đây nhất, bài toán này cũng được xem xét cho hệ tuyến tính chuyển mạch (xem trong [74, 77]). Bài toán tương tự được đặt ra cho lý thuyết điều khiển, đó là tính điều khiển được của hệ thống liệu có được bảo tồn khi hệ chịu tác động của các nhiễu nhỏ. Thật may mắn, đối với hệ (2), E.B. Lee và L. Markus đã chứng minh rằng tập các cặp ma trận không điều khiển được là một tập đóng trong không gian tích $\mathbb{K}^{n\times n} \times \mathbb{K}^{n\times m}$ (xem [43]). Nói cách khác, tập các cặp các ma trận điều khiển được là tập mở trong không gian $\mathbb{K}^{n\times n} \times \mathbb{K}^{n\times m}$. Điều này chứng tỏ rằng tính điều khiển được của hệ (2) vẫn được bảo toàn khi các ma trận của hệ chịu tác động của các nhiễu nhỏ và do đó ta có bài toán điều khiển được vững với hệ điều khiển tuyến tính (2). Tương tự như tính ổn định, để đo tính bền vững của tính điều khiển được người ta đưa ra khái niệm bán kính điều khiển được cho hệ (2). Khái niệm này được đề cập và nghiên cứu lần đầu bởi C. C. Paige vào năm 1981 (xem trong [58]). Giả sử hệ (2) là điều khiển được, bán kính điều khiển được được định nghĩa bởi

$$\begin{aligned} r_{\mathbb{K}}(A,B) = \inf\{\|[\Delta_1,\Delta_2]\|, [\Delta_1,\Delta_2] \in \mathbb{K}^{n\times n} \times \mathbb{K}^{n\times m} \\ \text{sao cho } [A+\Delta_1, B+\Delta_2] \text{ không điều khiển được}\}, \end{aligned} \tag{11}$$

trong đó $\|[\Delta_1,\Delta_2]\|$ là chuẩn của toán tử tuyến tính liên tục sinh bởi ma trận $[\Delta_1,\Delta_2]$ tương ứng với các chuẩn vectơ trên các không gian $\mathbb{K}^{n+m}$ và $\mathbb{K}^n$. Nói cách khác, bán kính điều khiển được là số thực lớn nhất $r_{\mathbb{K}}(A,B)$ sao cho với mọi nhiễu $[\Delta_1,\Delta_2]$ thỏa mãn $\|[\Delta_1,\Delta_2]\| < r_{\mathbb{K}}(A,B)$ thì hệ nhiễu thu được vẫn còn điều khiển được. Trong trường hợp chuẩn các ma trận được xem xét là chuẩn phổ, C.C. Paige đã đưa ra công thức tính bán kính điều khiển được phức (tức là $\mathbb{K}=\mathbb{C}$), tuy nhiên các đánh giá đó còn rất phức tạp. Ba năm sau, R. Eising [25] đã phát triển kết quả này và đưa ra công thức tính bán kính điều khiển được phức tốt hơn

$$r_{\mathbb{C}}(A,B) = \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \sigma_{\min}[A-\lambda I, B], \tag{12}$$

ở đây $\sigma_{\min}[A-\lambda I,B]$ là giá trị kì dị nhỏ nhất của ma trận $[A-\lambda I,B]$. Trên thực tế, có nhiều trường hợp chỉ một số tham số của hệ thống là không chắc chắn, vì vậy các nhiễu bị hạn chế trên một số cấu trúc đặc biệt và việc bỏ qua các cấu trúc nhiễu như thế có thể dẫn tới việc đánh giá thấp đáng kể khoảng cách hợp lý. Do đó, các bài toán về các bán kính điều khiển được có cấu trúc được đề xuất, một trong các cấu trúc nhiễu được quan tâm của hệ (2) là nhiễu afin dạng

$$[A, B] \rightsquigarrow [A, B] + D\Delta E, \tag{13}$$

ở đó $D \in \mathbb{K}^{n\times l}$, $E \in \mathbb{K}^{q\times(n+m)}$ là các ma trận đã cho trước và $\Delta \in \mathbb{K}^{l\times q}$ là ma trận chưa biết. Khi đó, bán kính điều khiển được cấu trúc tương ứng với cấu trúc nhiễu (13) của hệ điều khiển được (2) được định nghĩa

$$r_{\mathbb{K}}^{D,E}(A, B) = \inf\{\|\Delta\| : \Delta \in \mathbb{K}^{l\times q}, [A, B]+D\Delta E \text{ không điều khiển được}\}. \tag{14}$$

Trong trường hợp ma trận cấu trúc E ở trên có hạng đầy đủ theo số cột và chuẩn của các ma trận là chuẩn phổ, M. Karow và D. Kressner đã chứng minh được

$$r_{\mathbb{C}}^{D,E}(A, B) = \frac{1}{\sup_{\lambda\in\mathbb{C}} \|(W(\lambda)(E^*E)^{-1/2})^{\dagger} D\|},$$

ở đây $W(\lambda) = [A - \lambda I, B]$ và † được kí hiệu là giả nghịch đảo Moore-Penrose của ma trận. Xuất phát từ kết quả (4) của Hautus, sự bền vững của tính toàn ánh của một ánh xạ đi từ không gian Banach X vào không gian Banach Y (xem [62]) và các tính chất của toán tử đa trị tuyến tính, N.K. Son và D.D. Thuan đã đưa ra công thức tính bán kính điều khiển được tương ứng với nhiễu có cấu trúc (13):

$$r_{\mathbb{C}}^{D,E}(A, B) = \frac{1}{\sup_{\lambda\in\mathbb{C}} \|EW(\lambda)^{-1}D\|}, \tag{15}$$

với chuẩn ma trận được xét là chuẩn bất kì và không cần bất cứ điều kiện nào đặt lên ma trận E. Kết quả này tổng quát hơn kết quả trên của M. Karow and D. Kressner. Đặc biệt, trong tình huống $D = I_n$, $E = I_{n+m}$ và các không gian được trang bị các chuẩn Euclide, từ (15), hai tác giả cũng nhận được công thức của R. Eising (xem [69]). Hai tác giả cũng đã phát triển kết quả này cho hệ điều khiển tuyến tính (2) trong trường hợp có ràng buộc của tham số điều khiển trên miền $\Omega \subset \mathbb{K}^m$ khi các ma trận của hệ chịu nhiễu cấu trúc dạng (13) và bài toán tính bán kính toàn ánh của tiến trình lồi (xem trong [72, 73]).

Dễ thấy rằng, từ các kết quả của R.E. Kalman và M.L. J. Hautus cho ta mối liên hệ giữa bài toán tính bán kính điều khiển được với bài toán tính bán kính toàn ánh của một ánh xạ. Kết quả về bán kính bảo toàn tính toàn ánh phức cho ma trận vuông dưới nhiễu không cấu trúc được C. Eckart và G. Young phát biểu trong [24]. Sau đó, kết quả này đã được mở rộng bởi N.K. Son và D.D. Thuan (xem trong [70]). Thông qua việc sử dụng lý thuyết toán tử đa trị tuyến tính và hệ quả của định lý Hahn-Banach, hai tác giả này thu được công thức tính bán kính toàn ánh phức khi một ánh xạ toàn ánh bị nhiễu có cấu trúc

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}_{\mathbb{C}}(Q;E;D) :&= \inf\{\|\Delta\|, \Delta \in \mathbb{C}^{l\times q} \text{ s. c. rank } (Q + D\Delta E) < n\} \\ &= \frac{1}{\|EQ^{-1}D\|}, \end{aligned} \tag{16}$$

trong đó $\|\cdot\|$ là chuẩn bất kì trên không gian $\mathbb{K}^{l\times q}$ và Q^{-1} là ánh xạ đa trị tuyến tính nghịch đảo của ánh xạ toàn ánh $Q : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$. Từ kết quả này, hai tác giả cũng đã thiết lập các công thức tính bán kính điều khiển được cho hệ mô tả (descriptor) và các hệ bậc cao (xem trong các tài liệu [70, 71]). Bán kính điều khiển được thực cũng được quan tâm từ thập niên 90, với các kết quả ban đầu của R.A. Decarlo và M. Wicks trong [17] nhưng tính toán còn gặp nhiều khó khăn. Tuy nhiên, trong trường hợp ma trận D trong (16) là ma trận đơn vị: $D = I_n$ và $\Delta \in \mathbb{R}^{l\times q}$, ta có thể tính bán kính toàn ánh thực thông qua giá trị nhiễu thực suy rộng của cặp ma trận (Q, E). Khái niệm này được đưa ra bởi S. Lam và J. Davison (xem trong [42]): Cho $Q \in \mathbb{K}^{n\times m}$ là một ma trận toàn ánh, tức là $Q(\mathbb{K}^m) = \mathbb{K}^n$ và $E \in \mathbb{K}^{l\times m}$ là một ma trận cho trước, giá trị nhiễu thực suy rộng thứ n của cặp ma trận (Q, E) được định nghĩa bởi

$$\tau_n := \inf\{\|\Delta\|_2 : \Delta \in \mathbb{R}^{n\times l}, \operatorname{rank}(Q + \Delta E) < n\}. \tag{17}$$

Hơn nữa, trong trường hợp các không gian được trang bị các chuẩn Euclide, bằng phương pháp phân tích ma trận theo giá trị kì dị suy rộng, S. Lam và J. Davison đã đưa ra công thức tính của τ_n:

$$\tau_n = \sup_{\gamma \in (0,1]} \sigma_{2n-1}\left(\begin{bmatrix} \operatorname{Re} Q & -\gamma \operatorname{Ima} Q \\ \frac{1}{\gamma} \operatorname{Ima} Q & \operatorname{Re} Q \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \operatorname{Re} E & -\gamma \operatorname{Ima} E \\ \frac{1}{\gamma} \operatorname{Ima} E & \operatorname{Re} E \end{bmatrix}\right), \tag{18}$$

ở đây $\sigma_i(H_1, H_2)$ là giá trị kì dị suy rộng thứ i của cặp ma trận (H_1, H_2) (xem trong [80]).

Như vậy, các bài toán về bán kính điều khiển được đối với hệ điều khiển tuyến tính (2) đến bây giờ đã khá hoàn thiện. Tuy nhiên, bài toán nghiên cứu về sự bền vững của tính điều khiển được và đánh giá khoảng cách tới tập không điều khiển được đối với các hệ điều khiển tuyến tính có trễ, các hệ trung tính cho đến bây giờ vẫn chưa có kết quả nào. Dưới sự hướng dẫn của GS. TSKH. Nguyễn Khoa Sơn và PGS. TS. Đỗ Đức Thuận, đề tài nghiên cứu của tôi là "*Một số bài toán điều khiển được vững của hệ động lực mô tả bởi phương trình vi phân có trễ*". Tức là bài toán xem xét liệu tính điều khiển được của hệ động lực mô tả bởi phương trình vi phân có trễ còn được bảo tồn không khi các ma trận của hệ chịu tác động của nhiễu bé.

Mục tiêu của luận án là nghiên cứu sự bền vững của tính điều khiển được của hệ động lực mô tả bởi phương trình vi phân có trễ trong ba trường hợp: hệ điều khiển tuyến tính có trễ rời rạc (6), hệ tuyến tính trung tính (9) và hệ điều khiển tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm (5) thông qua các công thức hay các đánh giá khoảng cách từ hệ điều khiển được đến tập các hệ không điều khiển được (bán kính điều khiển được), khi các ma trận của các hệ này được nhiễu có cấu trúc.

Công cụ chủ yếu được sử dụng trong luận án là các tiêu chuẩn điều khiển được của các hệ này, đặc biệt là các tiêu chuẩn được mô tả dưới dạng mở rộng kết quả (4) của Hautus. Công cụ được dùng tiếp theo là cách thức biểu diễn nghiệm của hệ có trễ thông qua nửa nhóm toán tử tuyến tính liên tục mạnh, tính chất phổ, các toán tử cấu trúc trong các tài liệu [19, 46, 47, 68, 67]. Kỹ thuật then chốt được sử dụng trong luận án là lý thuyết toán tử đa trị tuyến tính trong việc phân tích và đánh giá chuẩn các ma trận, các kết quả về bán kính toàn ánh phức (16), giá trị nhiễu thực suy rộng τ_n (18). Đặc biệt, khi ma trận hàm η trong phương trình (5) của hệ tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm có nguyên tử cô lập (*isolated-atom*) tại $-h$ (tức là trường hợp tồn tại ma trận $A_h \in \mathbb{K}^{n\times n}$ và $\epsilon \in (0, h]$ sao cho

$$\eta(\theta) \equiv A_h \quad \text{với } \theta \in (-h, -h+\epsilon]),$$

luận án sử dụng ý tưởng chia khoảng của M.C. Delfour và A. Manitius để thiết lập tiêu chuẩn điều khiển được mới cho hệ tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm trong trường hợp này (xem trong [19]).

Luận án trình bày các kết quả chính sau:

• Các công thức tính bán kính điều khiển được Euclide, bán kính điều khiển được xấp xỉ phức cho hệ tuyến tính có trễ rời rạc (6), các chặn trên và chặn dưới của các bán kính điều khiển được Euclide thực, bán kính điều khiển được xấp xỉ thực cho hệ này và mối quan hệ giữa các loại bán kính này.

• Các công thức tính bán kính điều khiển được chính xác, điều khiển được Euclide, điều khiển được xấp xỉ phức của hệ tuyến tính trung tính (9).

• Các chặn trên và chặn dưới của bán kính điều khiển được phổ phức cho hệ điều khiển tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm (5), điều kiện cần và đủ để hệ (5) điều khiển được xấp xỉ trong trường hợp η có nguyên tử cô lập tại $-h$ và các đánh giá bán kính điều khiển được xấp xỉ phức trong trường hợp này.

Trên tinh thần đó, luận án được viết gồm bốn chương:

• Chương 1: Luận án đưa ra một số kiến thức chuẩn bị và một số kiến thức cơ bản về tính điều khiển được của hệ tuyến tính trong không gian hữu hạn chiều, tính điều khiển được của hệ tuyến tính trong không gian vô hạn chiều, hệ tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm, hệ tuyến tính trung tính, lý thuyết về toán tử đa trị tuyến tính và các kết quả về các bán kính toàn ánh. Đó là những phần cốt lõi được sử dụng trong luận án.

• Chương 2: Luận án nghiên cứu tính điều khiển được vững của hệ tuyến tính có trễ rời rạc (6) trong không gian $M_2 = \mathbb{K}^n \times L_2([-h,0],\mathbb{K}^n)$, khi các ma trận của hệ này được nhiễu có cấu trúc dạng

$$[A_0, A_1 \ldots, A_k, B] \rightsquigarrow [\widetilde{A}_0, \widetilde{A}_1, \ldots, \widetilde{A}_k, \widetilde{B}] = [A_0, A_1 \ldots, A_k, B] + D\Delta E, \tag{19}$$

ở đây $\Delta \in \mathbb{K}^{l\times q}$ là ma trận nhiễu chưa biết và $D \in \mathbb{K}^{n\times l}, E \in \mathbb{K}^{q\times(n(k+1)+m)}$ là các ma trận đã cho xác định cấu trúc nhiễu. Bán kính điều khiển được xấp xỉ phức (tức ma trận nhiễu $\Delta \in \mathbb{C}^{l\times q}$) được thiết lập. Một số trường hợp được đề cập tới như ma trận E trong cấu trúc nhiễu (19) có đủ hạng theo số cột hay trường hợp các ma trận của hệ (6) bị nhiễu tách

$$B \rightsquigarrow \widetilde{B} = B+D_B\Delta_B E_B,\ A_i \rightsquigarrow \widetilde{A}_i = A_i+D_i\Delta_{A_i}E_i,\ \text{với mọi } i = 0,1,...,k \tag{20}$$

trong đó $D_i = D_B = D$. Bán kính điều khiển được thực (tức là ma trận nhiễu, Δ và các ma trận cấu trúc D, E trong (19) xét trên trường số thực), mối liên hệ giữa hai bán kính thực và phức và công thức tính bán kính thực trong trường hợp ma trận cấu trúc D khả nghịch được chứng minh. Một số ví dụ được đưa ra để thảo luận về các kết quả thu được.

• Chương 3: Luận án nghiên cứu các bán kính điều khiển được phức: bán kính điều khiển được chính xác, bán kính điều khiển được Euclide, bán kính điều khiển được xấp xỉ của hệ tuyến tính trung tính (9) khi các ma trận của hệ được nhiễu dạng

$$[A_0, A_1, A_{-1}, B] \rightsquigarrow [\widetilde{A}_0, \widetilde{A}_1, \widetilde{A}_{-1}, \widetilde{B}] = [A_0, A_1, A_{-1}, B] + D\Delta E, \tag{21}$$

ở đây $\Delta \in \mathbb{C}^{l\times q}$ là ma trận nhiễu và $D \in \mathbb{C}^{n\times l}, E \in \mathbb{C}^{q\times(3\times n+m)}$ xác định cấu trúc của nhiễu $D\Delta E$. Luận án đưa ra các công thức tính bán kính điều khiển được trong một số trường hợp như ma trận E có hạng bằng số cột, ma trận D khả nghịch. Luận án cũng xét đến trường hợp nhiễu cấu trúc tách dạng

$$B \rightsquigarrow \widetilde{B} = B + D_B\Delta_B E_B,$$

$$A_i \rightsquigarrow \widetilde{A}_i = A_i + D_{A_i}\Delta_{A_i}E_{A_i}, \text{ với mọi } i \in \{0, 1, -1\},$$

trong đó $D_{A_i} = D_B \in \mathbb{C}^{n\times l}, E_{A_i} \in \mathbb{C}^{q_{A_i}\times n}, E_B \in \mathbb{C}^{q_B\times m}$, với mọi $i \in \{0, 1, -1\}$ là các ma trận đã cho và $\Delta_B \in \mathbb{C}^{l\times q_B}, \Delta_{A_i} \in \mathbb{C}^{l\times q_{A_i}}$ với $i \in \{0, 1, -1\}$ là các ma trận nhiễu. Một số ví dụ được đưa ra để minh họa cho các công thức thu được.

• Chương 4: Phát triển kết quả của N.K. Son trong [67], luận án đưa ra điều kiện cần và đủ cho hệ tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm (5) điều khiển được xấp xỉ dưới điều kiện hạng trong trường hợp η có nguyên tử cô lập tại $-h$. Trong phần hai của chương này, luận án nghiên cứu cấu trúc nhiễu dưới đây cho hệ (5):

$$\begin{aligned} [A_0, B_0] &\rightsquigarrow [\widetilde{A}_0, \widetilde{B}_0] = [A_0, B_0] + D_0\Delta_0 E_0, \\ \eta &\rightsquigarrow \widetilde{\eta} = \eta + D_1\delta E_1, \end{aligned} \tag{22}$$

trong đó $D_i \in \mathbb{K}^{n\times l_i}, i = 0, 1,\ E_0 \in \mathbb{K}^{q_i\times(n_+m)},\ E_1 \in \mathbb{K}^{q_i\times n}$ là các ma trận cho trước, và $\Delta_0 \in \mathbb{K}^{l_0\in q_0},\ \delta(\cdot) \in NBV([-h, 0], \mathbb{K}^{l_1\times q_1})$ là các ma trận nhiễu chưa biết. Bằng việc đo kích cỡ các nhiễu $(\Delta_0, \delta) \in \mathbb{C}^{l_0\times q_0} \times \mathrm{NBV}([-h, 0], \mathbb{C}^{l_1\times q_1})$ bởi các chuẩn

$$\|(\Delta_0, \delta)\| := \|\Delta_0\| + \|\delta\|, \tag{23}$$

trong đó $\|\Delta_0\|$ là chuẩn toán tử của ma trận Δ_0 và $\|\delta\| := V(\delta, [-h, 0])$ là tổng biến phân của δ, luận án đưa ra các khái niệm về bán kính điều khiển được phổ phức, bán kính điều khiển được xấp xỉ phức cho hệ (5). Khi đó, bán kính điều khiển được phổ (tương ứng, bán kính điều khiển được xấp xỉ) của hệ (5) là số $r_{sp}(A_0, \eta, B_0)$ (tương ứng, $r_{M_p}(A_0, \eta, B_0)$)

lớn nhất sao cho mọi hệ nhiễu

$$\dot{x}(t) = \tilde{A}_0 x(t) + \int_{-h}^{0} d[\tilde{\eta}(\theta)]x(t+\theta) + \tilde{B}_0 u(t)$$

vẫn điều khiển được phổ (tương ứng, điều khiển được xấp xỉ) với mọi $\|(\Delta_0, \delta)\| < r_{sp}(A_0, \eta, B_0)$, trong đó $\tilde{A}_0$, $\tilde{B}_0$, $\tilde{\eta}$ được xác định trong (22). Luận án thu được cận trên và cận dưới của các bán kính điều khiển được phổ phức của hệ (5), bán kính điều khiển được xấp xỉ phức của hệ (5)(trong trường hợp η và ma trận nhiễu δ đều có nguyên tử cô lập tại $-h$). Một số ví dụ cũng được đưa vào luận án để minh họa các kết quả chính của chương.

Các kết quả của luận án được hoàn thành dựa trên ba bài báo đã được liệt kê trong Danh mục các công trình và được báo cáo tại:

- Xêmina tại Phòng Tối ưu và Điều khiển, Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.

- Xêmina tại Phòng Giải tích Toán học, Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.

- Hội thảo Tối ưu và Tính toán Khoa học lần thứ 14, Ba Vì, tháng 4 năm 2016.

- Hội nghị Toán ứng dụng và Tin học tại Đại học Bách Khoa Hà Nội, ngày 12-13 tháng 11 năm 2016.

-Hội nghị Quốc Tế "7th International Conference on High Performance Scientific Computing" ngày 19-23 , tháng 3 năm 2018 tại Hà Nội.

-Workshop "Control and Optimization Problems" ngày 17-19, tháng 5 năm 2018 tại Viện nghiên cứu cao cấp về Toán, Hà Nội.

-Hội nghị "The Third Mongolia-Russia-Vietnam Workshop on Numerical Solution of Integral and Differential Equations" ngày 22-27, tháng 10 năm 2018 tại Viện Toán học.

-Các hội nghị đánh giá Nghiên cứu sinh của Viện Toán học, tháng 10 năm 2016, tháng 11 năm 2017, tháng 11 năm 2018, tháng 11 năm 2019.

Chương 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong chương này sẽ trình bày các kiến thức chuẩn bị để sử dụng trong các chương sau. Phần đầu sẽ trình bày một số kiến thức cơ bản về tính điều khiển được của hệ điều khiển tuyến tính hữu hạn chiều, hệ tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm và hệ tuyến tính trung tính. Phần còn lại sẽ trình bày một số khái niệm và tính chất quan trọng của toán tử đa trị tuyến tính và một số kết quả gần đây về bán kính toàn ánh. Đây là các kiến thức cần thiết để nghiên cứu và thiết lập các công thức tính các bán kính điều khiển được của các hệ điều khiển tuyến tính có trễ rời rạc, hệ tuyến tính trung tính, hệ điều khiển tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm với các nhiễu có cấu trúc.

1.1 Tính điều khiển được của hệ tuyến tính hữu hạn chiều

Nội dung của mục này được lấy từ phần I, chương 1 của cuốn sách "Mathematical Control Theory: An Introduction" của J. Zabczyk [81] và các bài báo [29], [38].

Bài toán điều khiển được xuất phát từ phương trình vi phân

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), t \geqslant 0, \tag{1.1}$$

với $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$, $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, B : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ là các toán tử tuyến tính. Như đã biết, với mỗi hàm điều khiển $u(t)$ là hàm khả tích địa phương, tức là $u(t) \in L_1([0,T], \mathbb{R}^m)$ với mọi $T > 0$, và điều kiện ban đầu $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, phương trình (1.1) có nghiệm duy nhất $x(t)$ được mô tả bởi công thức

$$x(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds,$$

ở đây $S(t) = e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} t^n$ là ma trận nghiệm cơ bản.

Định nghĩa 1.1.1. Trạng thái $b \in \mathbb{R}^n$ được gọi là đạt được từ trạng thái $a \in \mathbb{R}^n$ trong thời gian $T > 0$ nếu tồn tại điều khiển $u(t)$ xác định trong $[0,T]$ sao cho phương trình (1.1) có nghiệm $x(t)$ thỏa mãn $x(0) = a, x(T) = b$.

Quy ước: Trạng thái a đạt được từ a trong thời gian $T = 0$.

Định nghĩa 1.1.2. Trạng thái $b \in \mathbb{R}^n$ được gọi là đạt được từ trạng thái $a \in \mathbb{R}^n$ hay trạng thái a dịch chuyển được đến trạng thái b nếu b đạt được từ a trong thời gian $T > 0$ nào đó.

Định nghĩa 1.1.3. Hệ (1.1) được gọi là điều khiển được trong thời gian $T > 0$ nếu với hai trạng thái bất kì $a, b \in \mathbb{R}^n$ thì b có thể đạt được từ a trong thời gian T.

Định nghĩa 1.1.4. Hệ (1.1) được gọi là điều khiển được nếu b và a là hai trạng thái bất kì thì b có thể đạt được từ a.

Xét ma trận

$$Q_T = \int_0^T S(r)BB^*S^*(r)dr,$$

được gọi là ma trận điều khiển được của hệ (1.1). Dễ thấy Q_T là ma trận đối xứng và xác định không âm. Kí hiệu

$$[A|B] = [B, AB, \ldots, A^{n-1}B].$$

Định lý sau đưa ra các điều kiện tương đương cho một hệ là điều khiển được.

Định lý 1.1.5. *Các điều kiện sau là tương đương.*

1. *Mọi trạng thái $b \in \mathbb{R}^n$ đạt được từ 0.*

2. *Hệ* (1.1) *là điều khiển được.*

3. *Hệ* (1.1) *là điều khiển được ở thời gian $T > 0$ nào đó.*

4. *Ma trận Q_T là không suy biến với $T > 0$ nào đó.*

5. *Ma trận Q_T không suy biến với mọi $T > 0$.*

6. $\operatorname{rank}[A|B] = n$.

Điều kiện 6 được gọi là điều kiện hạng Kalman. Định lý trên vẫn đúng khi xét hệ trong không gian phức, tức là các ma trận $A \in \mathbb{C}^{n\times n}, B \in \mathbb{C}^{n\times m}$ và điều khiển $u \in \mathbb{C}^m$. Chú ý rằng, khi ma trận điều khiển Q_T không suy biến, ta có thể tìm được hàm điều khiển

$$u(t) = -B^* e^{A^*(T-t)} Q_T^{-1}(e^{AT}a - b), \text{ với } t \in [0, T]$$

để chuyển dịch hệ từ trạng thái a sang trạng thái b trong thời gian hữu hạn T.

Dưới đây là kết quả tương đương với kết quả của R.E. Kalman, được gọi là điều kiện hạng Hautus (xem [29]).

Định lý 1.1.6. *Hệ* (1.1) *là điều khiển được khi và chỉ khi*

$$\operatorname{rank}[A - \lambda I_n, B] = n, \text{ với mọi } \lambda \in \mathbb{C}.$$

1.2 Tính điều khiển được của hệ tuyến tính trong không gian vô hạn chiều

Nội dung của mục này được lấy trong phần IV, chương 1 và chương 2 của cuốn sách "Mathematical Control Theory: An Introduction" của J. Zabczyk [81] và các bài báo [40], [78], [68].

Cho X và U là các không gian Banach trên trường $\mathbb{K}$, với $\mathbb{K}$ là trường số thực hoặc phức và $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_U$ là các chuẩn tương ứng trên X và U. Gọi $L(X)$ là không gian các toán tử tuyến tính liên tục từ X vào chính nó. Cho trước $T > 0$, kí hiệu $L_p([0,T],U)$, $1 < p < \infty$, là không gian Banach các hàm khả tích bậc p trên đoạn $[0,T]$ nhận giá trị trong U. Tích phân ở đây được hiểu là tích phân Bochner.

Định nghĩa 1.2.1. Họ $\{S(t)\}_{t\geqslant 0} \subset L(X)$ được gọi là nửa nhóm toán tử liên tục mạnh trên X (hay C_0-nửa nhóm toán tử liên tục) nếu 3 tính chất sau đây được thỏa mãn:
- $S(0) = I_X$, trong đó I_X là toán tử đồng nhất trên không gian X;
- $S(t+s) = S(t)S(s) = S(s)S(t)$, với mọi $t, s \geqslant 0$;
- $\lim_{t\to 0} S(t)x = x$, với mọi $x \in X$.

Mỗi nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ sinh ra một toán tử tuyến tính $A : X \longrightarrow X$ được xác định bởi
$$Ax = \lim_{h\to 0} \frac{S(h)x - x}{h}, \tag{1.2}$$
với mọi x thuộc vào miền xác định $\mathrm{dom}(A)$ của A:
$$\mathrm{dom}(A) = \left\{ x \in X : \lim_{h\to 0} \frac{S(h)x - x}{h} \text{ tồn tại} \right\}.$$
Hơn nữa, $\mathrm{dom}(A)$ trù mật trong X.

Nếu A là toán tử tuyến tính liên tục thì họ
$$S(t) = e^{At}, t \geqslant 0,$$
là nửa nhóm toán tử tuyến tính liên tục với toán tử sinh là A.

Bây giờ, ta xét hệ điều khiển tuyến tính
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), t \geqslant 0, \tag{1.3}$$
trong đó $x \in X$, $A : X \longrightarrow X$ là toán tử tuyến tính sinh bởi nửa nhóm toán tử tuyến tính liên tục $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$, $B : U \longrightarrow X$ là toán tử tuyến tính liên tục. Ta có, với mỗi hàm điều khiển khả tích địa phương, tức là

$u(\cdot) \in L_p([0,T],U)$, với mọi $T > 0$ và điều kiện ban đầu $x(0) = x_0 \in X$, nghiệm yếu $x(t)$ tương ứng của hệ (1.3) trên đoạn $[0,T]$ được xác định bởi công thức

$$x(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds, t \in [0,T].$$

Tập đạt được tương ứng từ trạng thái ban đầu $x(0) = x_0$ của hệ (1.3) trong khoảng thời gian $T > 0$ được kí hiệu bởi

$$R_T(x_0) := \left\{ S(T)x_0 + \int_0^T S(T-s)Bu(s)ds : u(\cdot) \in L_p([0,T],U) \right\}.$$

Khi đó, tập $R(x_0) = \bigcup\{R_T(x_0) : T \geqslant 0\}$ là tập đạt được của hệ trong thời gian hữu hạn từ trạng thái x_0.

Dưới đây là các định nghĩa về điều khiển được của hệ (1.3).

Định nghĩa 1.2.2. Hệ (1.3) được gọi là điều khiển được chính xác từ trạng thái $x_0 \in X$ trong thời gian $T > 0$ nếu $R_T(x_0) = X$.

Định nghĩa 1.2.3. Hệ (1.3) được gọi là điều khiển được chính xác nếu với mọi x_0, $x_1 \in X$, tồn tại thời gian $T > 0$ và hàm điều khiển $u(\cdot) \in L_p([0,T],U)$ sao cho nghiệm tương ứng $x(t) = x(x_0,u,t)$ thỏa mãn $x(0) = x_0$ và $x(T) = x_1$. Điều này tương đương với $R(x_0) = X$, với mọi $x_0 \in X$.

Định nghĩa 1.2.4. Hệ (1.3) được gọi là điều khiển được xấp xỉ từ trạng thái $x_0 \in X$ trong thời gian $T > 0$ nếu $\mathrm{cl}R_T(x_0) = X$.

Định nghĩa 1.2.5. Hệ (1.3) được gọi là điều khiển được xấp xỉ nếu với mọi $\epsilon > 0$ và mọi x_0, $x_1 \in X$, tồn tại thời gian $T > 0$ hàm điều khiển $u(\cdot) \in L_p([0,T],U)$ sao cho nghiệm tương ứng $x(t) = x(x_0,u,t)$ thỏa mãn $x(0) = x_0$ và $\|x(T) - x_1\| < \epsilon$. Điều này cũng tương đương với $\mathrm{cl}\ R(x_0) = X$, với mọi $x_0 \in X$.

Năm 1979, V. I. Korobov và R. Rabah đã đưa ra điều kiện cần và đủ để hệ (1.3) điều khiển được chính xác trong trường hợp toán tử $A \in L(X)$ (xem trong [40]):

Định lý 1.2.6. *Giả sử A là toán tử bị chặn. Khi đó, hệ* (1.3) *là điều khiển được chính xác khi và chỉ khi tồn tại số tự nhiên $m > 0$ sao cho*

$$\text{span}\,\{BU, ABU, A^2BU, ..., A^mBU\} = X.$$

Trong nhiều trường hợp tính điều khiển được chính xác không bao giờ xảy ra như kết quả dưới đây của R. Triggiani (xem trong [78]):

Định lý 1.2.7. *Cho X là không gian Banach vô hạn chiều tách được. Khi đó, hệ* (1.3) *không bao giờ điều khiển được chính xác trong khoảng thời gian hữu hạn nếu một trong hai điều kiện sau xảy ra:*

1. *Toán tử $B : U \longrightarrow X$ là toán tử compact.*

2. *Nửa nhóm toán tử $S(t)$ là compact với mọi $t > 0$.*

Khi X và U là các không gian phản xạ và $1 < p < \infty$, R. F. Curtain và A. F. Pritchard đã chứng minh định lý sau (xem trong [15]):

Định lý 1.2.8. *Hệ* (1.3) *điều khiển được chính xác trong thời gian $T > 0$ khi và chỉ khi tồn tại $\gamma > 0$ sao cho*

$$\|B^*S^*(\cdot)f\|_{L_q([0,T],U^*)} \geqslant \gamma\|f\|, \forall f \in X^*,$$

ở đây $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$, B^* và $S^*(t)$ tương ứng là các toán tử liên hợp của B và $S(t)$.

Trong trường hợp X là không gian Hilbert và U là không gian Banach phản xạ, để nghiên cứu tính điều khiển được đối với hệ tuyến tính trong không gian vô hạn chiều, người ta nghiên cứu các tính chất của toán tử điều khiển được Q_T, trong đó $Q_T : X \longrightarrow X$ được xác định bởi

$$Q_T x = \int_0^T S(r)BB^*S^*(r)x dr, x \in X, \text{ với mỗi } T > 0. \tag{1.4}$$

Dễ thấy Q_T là toán tử tuyến tính liên tục, tự liên hợp vì

$$< Q_T x, x >= \int_0^T \|B^*S^*(r)x\|^2 dr \geqslant 0, \forall x \in X.$$

Do đó, tồn tại duy nhất toán tử tự liên hợp và xác định không âm $Q_T^{\frac{1}{2}}$ sao cho bình phương của nó bằng Q_T.

Định lý 1.2.9. *Các khẳng định sau là tương đương:*

1. *Tồn tại $T > 0$ sao cho hệ (1.3) là điều khiển được chính xác từ một trạng thái bất kì trong thời gian T.*

2. *Tồn tại $c > 0$ sao cho*

$$\int_0^T \|B^*S^*(t)x\|^2 dt \geqslant c\|x\|^2, \text{ với mọi } x \in X^*. \tag{1.5}$$

3. $\mathrm{Im}Q_T^{\frac{1}{2}} = X$.

Định lý 1.2.10. *Các khẳng định sau là tương đương:*

1. *Hệ (1.3) là điều khiển được xấp xỉ trong thời gian $T > 0$ từ một trạng thái bất kì.*

2. *Nếu $S^*(t)B^*f^* = 0$, với hầu hết $t \in [0, T]$ thì $f^* = 0$.*

3. $\mathrm{Im}Q_T^{\frac{1}{2}}$ *trù mật trong không gian X.*

Dưới đây là kết quả được R. Triggiani chứng minh trong trường hợp A là toán tử bị chặn (xem [78]).

Định lý 1.2.11. *Giả sử rằng A là toán tử tuyến tính bị chặn. Khi đó, hệ (1.3) là điều khiển được xấp xỉ khi và chỉ khi*

$$\mathrm{cl}\ \mathrm{span}\{BU, ABU, A^2BU, ..., A^mBU, ...\} = X.$$

1.3 Hệ tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm

Nội dung của mục này được lấy trong cuốn sách "Theory of functional differential equations" của J.K. Hale (xem trong [27]) và các bài báo [6], [46], [47], [68].

Xét hệ tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm:

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + \int_{-h}^{0} d[\eta(\theta)]x(t+\theta) + B_0u(t), \quad t \geqslant 0, \tag{1.6}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{K}^n, u(t) \in \mathbb{K}^m, B_0 \in \mathbb{K}^{n\times m}$ và $\eta(\cdot) \in BV([-h,0], \mathbb{K}^{n\times n})$ là $\mathbb{K}^{n\times n}$-các hàm có biến phân giới nội trên tập $[-h,0]$, với $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{C}$ và tích phân được hiểu là tích phân Lebesgue-Stieltjes. Chúng ta thường gặp dạng đặc biệt của η:

$$\eta(\theta) = \sum_{i=1}^{N} A_i\chi_{(-h_i,0]}(\theta) + \int_{-h}^{\theta} Q(s)ds, \tag{1.7}$$

trong đó $0 < h_1 < .. < h_N = h$, $A_i \in \mathbb{K}^{n\times n}$, với mọi $i = 1, ..., N$, $Q(.)$ là ma trận các hàm khả tích trên đoạn $[-h,0]$ và χ_A là hàm đặc trưng của tập A. Khi đó, hệ (1.6) trong trường hợp này có thể viết lại

$$\dot{x}(t) = A_0x(t)+A_1x(t-h_1)+...+A_Nx(t-h_N)+\int_{-h}^{0} Q(\theta)x(t+\theta)d\theta, \tag{1.8}$$

nếu $Q(\theta) = 0$, với mọi $\theta \in [-h,0]$ thì hệ (1.8) được gọi là hệ tuyến tính có trễ rời rạc:

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h_1) + ... + A_Nx(t-h_N). \tag{1.9}$$

Hơn thế nữa, ta có thể viết lại hệ (1.6) dưới dạng phương trình vi phân phiếm hàm:

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + Lx_t + B_0u(t), \quad t \geqslant 0, \tag{1.10}$$

trong đó x_t được xác định bởi $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ với $-h \leqslant \theta \leqslant 0$ và L là toán tử tuyến tính liên tục từ không gian $\mathcal{C} := C([-h,0], \mathbb{K}^n)$ vào $\mathbb{K}^n$, được mô tả bởi

$$L\phi = \int_{-h}^{0} d[\eta(\theta)]\phi(\theta), \quad \phi \in \mathcal{C}. \tag{1.11}$$

Ma trận của tựa đa thức đặc trưng của hệ (1.6) là

$$P^{tq}(\lambda) = A_0 + \int_{-h}^{0} d[\eta(\theta)]e^{\lambda\theta} - \lambda I_n, \tag{1.12}$$

đặc biệt, trong trường hợp hệ trễ rời rạc (1.9), ta tính được

$$P^{rr}(\lambda) = A_0 + e^{-\lambda h_1} A_1 + ... + e^{-\lambda h_k} A_k - \lambda I_n. \tag{1.13}$$

Đặt $W(\lambda) = [P^{tq}(\lambda), B_0]$ là ma trận hàm Hautus tương ứng của hệ (1.6)-(1.11).

Định lý 1.3.1. *Với mỗi $\phi^1(\cdot) \in L_p([-h, 0], \mathbb{K}^n)$, $1 \leqslant p < \infty$ và hàm điều khiển đo được $u(\cdot) \in L_p^{loc}([0, \infty), \mathbb{K}^m)$, hệ* (1.6) *với điều kiện ban đầu $x(0) = \phi^0 \in \mathbb{K}^n, x(\theta) = \phi^1(\theta)$, với mọi $\theta \in [-h, 0]$, có duy nhất nghiệm $x(t)$ xác định trên khoảng $[-h, +\infty)$ thỏa mãn điều kiện ban đầu của bài toán Cauchy trên đoạn $[-h, 0]$ và thỏa mãn phương trình* (1.6) *với hầu hết $t \geqslant 0$.*

Theo tài liệu [27] của J.K. Hale, khi hàm điều khiển $u(t) \equiv 0$, hệ (1.6) sinh ra C_0-nửa nhóm toán tử tuyến tính liên tục $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$ trên không gian $M_p := \mathbb{K}^n \times L_p([-h, 0], \mathbb{K}^n)$, $1 < p < \infty$ và với mỗi $t \geqslant 0$, $S(t)$ được xác định bởi $S(t)(\phi^0, \phi^1) = (x(t), x_t)$, trong đó $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $\theta \in [-h, 0]$. Tương ứng toán tử $\mathcal{A} : M_p \to M_p$ sinh bởi nửa nhóm $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$ được xác định bởi

$$\mathcal{A}((\phi^0, \phi^1)) = (A_0 x_0 + L(\phi^1), \dot{\phi}^1),$$

với mọi $((\phi^0, \phi^1))$ thuộc vào miền xác định của $\mathcal{A}$:

$$\mathrm{dom}(\mathcal{A}) = \{(\phi^0, \phi^1) \in M_p : \dot{\phi}^1 \in L_p([-h, 0], \mathbb{K}^n), \phi^0 = \phi^1(0)\}.$$

Bằng cách đặt $z(t) = (x(t), x_t)$, ta có thể mô tả lại hệ tuyến tính có trễ (1.6) trong phương trình vi phân không có trễ trên không gian trạng thái vô hạn chiều

$$\dot{z}(t) = \mathcal{A} z(t) + \mathcal{B} u(t), \quad t \geqslant 0,$$

ở đây toán tử tuyến tính bị chặn $\mathcal{B} : \mathbb{K}^m \to M_p$ xác định bởi

$$\mathcal{B} u = (B_0 u, 0), \quad u \in \mathbb{K}^m. \tag{1.14}$$

Bổ đề sau mô tả tính chất của tập phổ của toán tử sinh $\mathcal{A}$.

Bổ đề 1.3.2. *Toán tử $\mathcal{A}$ được xác định ở trên có tập phổ $\sigma(\mathcal{A})$ bao gồm tất cả các giá trị riêng của $\mathcal{A}$, và $\lambda \in \mathbb{C}$ là giá trị riêng của $\mathcal{A}$ khi và chỉ khi nó là nghiệm của* $\det P^{tq}(\lambda) = 0$*. Hơn nữa, nghiệm của phương trình* $\det P^{tq}(\lambda) = 0$ *có phần thực bị chặn trên và mọi $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$ có không gian riêng suy rộng $\mathcal{M}_\lambda$ có số chiều hữu hạn, tức là tồn tại số tự nhiên k_λ sao cho $\mathcal{M}_\lambda = \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda I)^{k_\lambda} = \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda I)^{k_\lambda + i}$, với mọi $i = 0, 1, 2, ...$*

Nghiệm nhẹ (*mild solution*) $z(t) = (x(t), x_t)$ của hệ (1.6) tương ứng với hàm điều khiển $u(\cdot) \in L_p^{loc}([0, \infty), \mathbb{K}^m)$ và điều kiện ban đầu $x(0) = \phi^0$, $x(\theta) = \phi^1(\theta)$, với mọi $\theta \in [-h, 0)$ là

$$(x(t), x_t) = S(t)\phi + \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds, \quad t \geqslant 0,$$

tích phân ở đây được hiểu là tích phân Bochner.

Kí hiệu

$$\mathcal{R}_{t,p} := \Big\{ \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds : u(\cdot) \in L_p([0, t], \mathbb{K}^m), t \geqslant 0 \Big\}$$

là tập đạt được từ gốc tọa độ 0 sau thời gian t và $\mathcal{R}_p = \bigcup_{t \geqslant 0} \mathcal{R}_{t,p}$ là tập đạt được từ 0 của hệ (1.6).

Nhận xét 1.3.3. Ta có, $\mathrm{cl}\mathcal{R}_\infty = \mathrm{cl}\mathcal{R}_p$, với mọi $p \geqslant 1$ (với các chuẩn xét trên không gian M_p). Thật vậy, với mọi $\epsilon > 0$ và mọi $z \in \mathrm{cl}\mathcal{R}_p$, tồn tại $z_1 \in \mathcal{R}_p$ sao cho $\|z - z_1\| < \frac{\epsilon}{2}$. Hơn nữa, vì $z_1 \in \mathcal{R}_p$ nên tồn tại $t_1 > 0$ và $u_1(\cdot) \in L_p([0, t_1], \mathbb{K}^m)$ sao cho $z_1 = \int_0^{t_1} S(t-s)Bu_1(s)ds$. Theo kết quả của Định lý 1.1 trang 181 trong tài liệu [81], tồn tại $M > 0$ sao cho $\|S(t)\| \leqslant M$, với mọi $t \in [0, t_1]$. Lại có $L_\infty([0, t_1], \mathbb{K}^m)$ trù mật trong không gian $L_p([0, t_1], \mathbb{K}^m)$ nên tồn tại hàm điều khiển $u_2(\cdot) \in L_\infty([0, t_1], \mathbb{K}^m)$ sao cho $\|u_1 - u_2\| < \frac{\epsilon}{2M\|B_0\|}$. Đặt $z_2 = \int_0^{t_1} S(t-s)Bu_2(s)ds$, ta được $z_2 \in \mathcal{R}_\infty$. Mặt khác, $\|z_1 - z_2\| \leqslant M\|B_0\|\|u_1 - u_2\| < \frac{\epsilon}{2}$. Do đó, $\|z - z_2\| \leqslant \|z - z_1\| + \|z_1 - z_2| < \epsilon$. Điều này chứng tỏ $\mathrm{cl}\mathcal{R}_\infty = \mathrm{cl}\mathcal{R}_p$.

Định nghĩa 1.3.4. Các không gian riêng suy rộng $\sigma(\mathcal{A})$ được gọi là *đầy đủ* trong không gian M_p nếu $\mathrm{cl\ span}\{\mathcal{M}_\lambda, \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\} = M_p$.

Dưới đây là một số khái niệm về điều khiển được đối với hệ (1.6):

Định nghĩa 1.3.5. Hệ tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm (1.6) được gọi là *điều khiển được Euclide*, nếu với mọi điều kiện ban đầu $x_0 \in \mathbb{K}^n$, trạng thái mong muốn cuối cùng $x_1 \in \mathbb{K}^n$, tồn tại thời gian $T > 0$ và hàm điều khiển đo được $u(\cdot), u(t) \in \mathbb{K}^m$ hầu hết $t \in [0, T]$ sao cho nghiệm tương ứng của hệ (1.6) $x(t) = x(t, x_0, \phi^1, u)$ thỏa mãn $x(T) = x_1$.

Định nghĩa 1.3.6. Hệ tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm (1.6) được gọi là *điều khiển được xấp xỉ* trong không gian trạng thái M_p, hay nói một cách ngắn gọn là M_p-*điều khiển được xấp xỉ*, nếu với bất kì trạng thái $\phi = (\phi^0, \phi^1) \in M_p$ cho trước và $\epsilon > 0$ tùy ý, tồn tại thời gian hữu hạn $T > 0$ và hàm điều khiển $u(\cdot) \in L_p([0, T], \mathbb{K}^m)$ sao cho nghiệm tương ứng $x(t) = x_{0,u}(t)$ của hệ (1.6) với điều kiện ban đầu $\phi = 0$ thỏa mãn $\|x(T) - \phi^0\|_{\mathbb{K}^n} + \|x_T - \phi^1\|_{L_p} < \epsilon$. Điều này cũng tương đương với tập đạt được từ gốc tọa độ $\mathcal{R}_p$ trù mật trong không gian trạng thái $M_p : \mathrm{cl}(\mathcal{R}_p) = M_p$.

Nhận xét 1.3.7. Chú ý rằng, hệ (1.6) điều khiển được xấp xỉ từ gốc tọa độ thì nó cũng điều khiển được từ trạng thái bất kì. Thật vậy, với hệ tuyến tính có trễ (1.6), $cl(\mathcal{R}_p) = cl(\mathcal{R}_{t,p})$ với mọi $t \geqslant \frac{n+1}{h}$ (xem trong [63, 67]). Do đó, tính điều khiển được xấp xỉ từ gốc tọa độ dẫn đến rằng: với mọi $\phi \in M_p$, $S(T_0)\phi + cl(\mathcal{R}_{T_0,p}) = M_p$, với $T_0 = \frac{n+1}{h}$. Điều này có nghĩa là hệ điều khiển được xấp xỉ từ ϕ trong thời gian hữu hạn.

Nhận xét 1.3.8. Chú ý rằng trong định nghĩa trên, nếu $\mathcal{R}_p = M_p$ thì ta nói rằng hệ (1.6) là điều khiển được chính xác trên không gian hàm M_p và nếu $\mathbb{P}_{L_p}\mathcal{R} = L_p([-h, 0], \mathbb{K}^n)$ thì hệ (1.6) được gọi là điều khiển được chính xác trên không gian $L_p([-h, 0], \mathbb{K}^n)$ (trong đó $\mathbb{P}_{L_p}$ là phép chiếu chính tắc lên không gian $L_p([-h, 0], \mathbb{K}^n)$). Tuy nhiên, từ phương trình (1.14), ta nhận được $\mathcal{B}$ là toán tử compact. Do đó, theo Định lý 1.2.7, hệ (1.6) không bao giờ điều khiển được chính xác trong không gian M_p và cũng không bao giờ điều khiển được chính xác trên không gian

$L_p([-h,0],\mathbb{K}^n)$. Vì vậy, luận án chúng tôi quan tâm tới sự bền vững của tính điều khiển được xấp xỉ và một số khái niệm điều khiển được dưới đây cho hệ tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm (1.6).

Định nghĩa 1.3.9. Hệ (1.6) được gọi là *điều khiển được phổ* nếu với mỗi $\lambda \in \sigma(\mathcal{A}), \mathbb{P}_\lambda \mathcal{R} = \mathcal{M}_\lambda$ trong đó $\mathbb{P}_\lambda$ là phép chiếu chính tắc của M_p trên không gian riêng suy rộng hữu hạn chiều $\mathcal{M}_\lambda$.

Để nghiên cứu về tính đầy đủ, tính điều khiển được của hệ (1.6), các tác giả M. C. Delfour, A. Manitius và R. Triggiani và các cộng sự đã sử dụng các toán tử cấu trúc H và G (xem trong các tài liệu [8, 18, 19, 46, 47, 48]). Trong đó, toán tử $H : L_p([-h,0],\mathbb{K}^n) \to L_p([-h,0],\mathbb{K}^n)$ không phụ thuộc vào các ma trận A_0, B_0 và được xác định bởi

$$(H\phi^1)(\alpha) = \int_{-h}^{\alpha} d[\eta(\theta)]\phi^1(\theta-\alpha), \quad \alpha \in [-h,0], \tag{1.15}$$

với $\phi^1 \in L_p([-h,0],\mathbb{K}^n)$. Toán tử $G : L_p([-h,0],\mathbb{K}^m) \to L_p([-h,0],\mathbb{K}^n)$ được xác định bởi

$$(Gu)(\alpha) = B_0 u(\alpha), \quad \alpha \in [-h,0]. \tag{1.16}$$

Khi đó, các toán tử đối ngẫu tương ứng của H, G là H^* và G^*, trong đó toán tử $H^* : L_q([-h,0],\mathbb{K}^n) \to L_q([-h,0],\mathbb{K}^n)$, $1/p+1/q=1$ có cùng cấu trúc như H, bằng việc thay thế η bởi ma trận η^*, tức là

$$(H^*\psi^1)(\alpha) = \int_{-h}^{\alpha} d[\eta^*(\theta)]\psi^1(\theta-\alpha), \quad \alpha \in [-h,0]. \tag{1.17}$$

và $G^* : L_q([-h,0],\mathbb{K}^n) \to L_q([-h,0],\mathbb{K}^m), 1/p+1/q=1$, được cho bởi

$$(G^*v)(\alpha) = B_0^* v(\alpha), \quad \alpha \in [-h,0]. \tag{1.18}$$

Dưới đây là kết quả về tính đầy đủ của các không gian riêng suy rộng được A. Manitius chứng minh trong [45].

Định lý 1.3.10. *Các không gian riêng suy rộng của $\sigma(\mathcal{A})$ là đầy đủ trong không gian M_p khi và chỉ khi* $\operatorname{Ker} H^* = \{0\}$.

Về tính điều khiển được, L. Pandofi đã chứng minh được điều kiện cần và đủ để hệ (1.6) điều khiển được phổ thông qua định lý sau (xem [57]).

Định lý 1.3.11. *Hệ* (1.6) *là điều khiển được phổ khi và chỉ khi*

$$\operatorname{rank}[P^{tq}(\lambda), B_0] = n, \forall \lambda \in \mathbb{C}. \tag{1.19}$$

Trên thực tế, để kiểm tra điều kiện rank $[P^{tq}(\lambda), B_0] = n, \forall \lambda \in \mathbb{C}$, ta chỉ cần kiểm tra tại các λ là nghiệm của phương trình $\det P^{tq}(\lambda) = 0$. Trong trường hợp tổng quát, thì tập nghiệm của phương trình này không phải là tập hữu hạn, do đó quá trình kiểm tra gặp nhiều khó khăn. Tuy nhiên, ta vẫn có thể kiểm tra được trong một số trường hợp đặc biệt, ví dụ như trường hợp $m = 1$ trong định lý dưới đây (xem Định lý 7.2 trang 35 của bài báo [47]).

Định lý 1.3.12. *Nếu m=1 thì hệ* (1.6) *là điều khiển được phổ khi và chỉ khi* adj $P^{tq}(\lambda)B_0 \neq 0$, *với mọi* $\lambda \in \mathbb{C}$, *trong đó* adj $P^{tq}(\lambda)$ *là ma trận phụ hợp của ma trận* $P^{tq}(\lambda)$.

Năm 1981, thông qua việc nghiên cứu tính chất của các toán tử H^*, G^*, A. Manitius đã chứng minh được tính điều khiển được Euclide và điều khiển được phổ là tương đương trong trường hợp hệ có các trễ rời rạc (1.9) (xem [46]). Tác giả cũng thiết lập các điều kiện đại số đơn giản để hệ (1.9) điều khiển được xấp xỉ trong không gian M_2.

Định lý 1.3.13. *Hệ tuyến tính có trễ rời rạc* (1.9) *là điều khiển được Euclide nếu và chỉ nếu*

$$\operatorname{rank}[P^{rr}(\lambda), B] = n \text{ với mọi } \lambda \in \mathbb{C}. \tag{1.20}$$

Định lý 1.3.14. *Hệ tuyến tính có trễ rời rạc* (1.9) *là điều khiển được xấp xỉ trong không gian Banach* $M_2(\mathbb{K})$ *khi và chỉ khi*

$$\begin{aligned} &(i)\ \operatorname{rank}[P^{rr}(\lambda), B] = n \quad \text{với mọi} \quad \lambda \in \mathbb{C},\\ &(ii)\ \operatorname{rank}[A_k, B] = n. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Đối với trường hợp tổng quát, định lý sau đưa ra các điều kiện cần và đủ để hệ (1.6)-(1.10) là M_p-điều khiển được xấp xỉ.

Định lý 1.3.15. *Hệ* (1.6)-(1.10) *là M_p-điều khiển được xấp xỉ khi và chỉ khi*

$$\begin{aligned} &(\mathrm{i})_1 \quad \operatorname{rank}\,[P^{tq}(\lambda), B_0] = n, \quad \textit{với mọi} \;\; \lambda \in \mathbb{C}, \\ &(\mathrm{ii})_1 \quad \operatorname{Ker}\, H^* \cap \operatorname{Ker}\, G^* = \{0\}. \end{aligned}$$

Điều kiện cần của định lý trên được chứng minh lần đầu trong [48] và điều kiện đủ đã được chứng minh trong [63]. Năm 1997, bằng phương pháp rời rạc theo thang thời gian nghiệm của hệ (1.6) để giải bài toán điều khiển được trong trường hợp các điều khiển bị ràng buộc, N.K. Son đã đưa ra kết quả của định lý này như một hệ quả của kết quả tổng quát hơn (xem trong [67]).

Chú ý thêm rằng, trong trường hợp tổng quát, điều kiện $(\mathrm{ii})_1$ của Định lý 1.3.15 không dễ để kiểm tra vì nó liên quan đến các không gian nhân của toán tử H^* và G^* trong không gian vô hạn chiều M_q.

Nhận xét 1.3.16. Kết quả của Định lý 1.3.15 cho ta thấy tính điều khiển được xấp xỉ của hệ tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm (1.6) phụ thuộc vào đặc tính của các toán tử cấu trúc H^* và G^*, được xác định trên các không gian đối ngẫu của $L_p([-h,0],\mathbb{K}^n)$ và $L_p([h,0],\mathbb{K}^m)$. Vì vậy, khi xét $u(\cdot) \in L_p([0,T],\mathbb{K}^m)$, với $1 < p < \infty$, ta có thể dễ dàng nhận được các phương trình mô tả của các toán tử H^* và G^* trên các không gian $L_q([-h,0],\mathbb{K}^n)$ và $L_q([h,0],\mathbb{K}^m)$ như các phương trình (1.17), (1.38), với $q > 0$ thỏa mãn $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1.4 Hệ tuyến tính trung tính

Nội dung của mục này được lấy trong cuốn sách "Control and Observation of Neutral Systems" của D. Salamon([63]) và các bài báo [30] và [54].

Xét hệ tuyến tính trung tính

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_{-1}\dot{x}(t-h) + A_1x(t-h) + Bu(t), t \geqslant 0, \qquad (1.22)$$

trong đó h là hằng số dương, $A_{-1}, A_0, A_1 \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{K}^{n\times m}$, $x(t) \in \mathbb{K}^n$, $u(t) \in \mathbb{K}^m$, với $t \geqslant 0$.

Cũng giống như hệ tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm (4.1)(khi $\eta \neq 0$), hệ tuyến tính trung tính (1.22) không bao giờ điều khiển được chính xác trong không gian M_2 hay không gian $L_2([-h,0],\mathbb{K}^n)$. Vì vậy, người ta nghiên cứu tính điều khiển được của hệ tuyến tính trung tính (1.22) trên một không gian hẹp hơn $L_2([-h,0],\mathbb{K}^n)$ là không gian Sobolev $W_2^1([-h,0],\mathbb{K}^n)$ mà ở đó tính điều khiển được chính xác có thể xảy ra. Ở đây, $W_2^1([-h,0],\mathbb{K}^n)$ là không gian các hàm $x : [-h,0] \to \mathbb{K}^n$ liên tục tuyệt đối và có đạo hàm $\dot{x}(\cdot) \in L_2([-h,0],\mathbb{K}^n)$. Không gian $W_2^1([-h,0],\mathbb{K}^n)$ là không gian Hilbert với tích vô hướng xác định bởi:

$$\langle \xi, \psi \rangle = \langle \xi(0), \psi(0) \rangle + \int_{-h}^{0} \left\langle \dot{\xi}(t), \dot{\psi}(t) \right\rangle dt,$$

với mọi $\xi, \psi \in W_2^1([-h,0],\mathbb{K}^n)$. Khi đó,

$$\|\xi\|_{W_2^1([-h,0],\mathbb{K}^n)} = \left(\|\xi(0)\|^2 + \|\dot{\xi}\|^2_{L_2([-h,0],\mathbb{K}^n)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Trong phần này, ta xét $\mathbb{K}$ là trường số phức.

Định lý 1.4.1. *Với mỗi hàm điều khiển $u(\cdot) \in L_2^{loc}([0,\infty),\mathbb{C}^m)$ và $\xi(\cdot) \in W_2^1([-h,0],\mathbb{C}^n)$, hệ (1.22) có nghiệm duy nhất $x(t) = x(t,\xi,u)$ thỏa mãn điều kiện ban đầu của bài toán Cauchy $x(\theta) = \xi(\theta)$, với mọi $\theta \in [-h,0]$ và thỏa mãn phương trình (1.22) hầu khắp nơi.*

• Kí hiệu $x(\cdot,\xi,u)$ là nghiệm của hệ (1.22) tương ứng với hàm điều khiển $u(\cdot) \in L_2^{loc}([0,+\infty),\mathbb{C}^n)$ và điều kiện ban đầu $\xi(\cdot) \in W_2^1([-h,0],\mathbb{C}^n)$.

• Đặt $x_t(\cdot,\xi,u)$ là đoạn nghiệm của hệ (1.22) tương ứng với hàm điều khiển $u(\cdot) \in L_2([0,t],\mathbb{C}^n)$ và điều kiện ban đầu $\xi(\cdot) \in W_2^1([-h,0],\mathbb{C}^n)$ trên đoạn $[t-h,t]$, tức là $x_t(\cdot,\xi,u)(\theta) = x(t+\theta,\xi,u)$, với mọi $\theta \in [-h,0]$.

Bây giờ, với mỗi $t \geqslant 0$, ta xét toán tử

$$T(t) : W_2^1([-h,0],\mathbb{C}^n) \longrightarrow W_2^1([-h,0],\mathbb{C}^n)$$

được xác định bởi

$$T(t)(\xi) = x_t(\cdot,\xi,0) \in W_2^1([-h,0],\mathbb{C}^n),$$

với $x_t(\cdot,\xi,0)(\theta) = x(t+\theta,\xi,0)$, $\theta \in [-h,0]$. Khi đó, họ các toán tử tuyến tính $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ lập thành một nhóm toán tử tuyến tính liên tục mạnh trên không gian $W_2^1([-h,0],\mathbb{C}^n)$. Toán tử $\mathfrak{A}$ sinh bởi nửa nhóm $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ có miền xác định:

$$\mathrm{dom}(\mathfrak{A}) = \{\xi \in W_2^1 : \dot{\xi} \in W_2^1, \dot{\xi}(0) = A_{-1}\dot{\xi}(-h) + A_1\xi(-h) + A_0\xi(0)\}$$

và

$$\mathfrak{A}(\xi) = \dot{\xi}, \text{ với mọi } \xi \in \mathrm{dom}(\mathfrak{A}).$$

• Đặt $\mathcal{K}_t = \{x_t(\cdot,0,u) : u(\cdot) \in L_2([0,t],\mathbb{C}^m)\}$ là tập đạt được từ 0 sau thời gian t của hệ (1.22) và $\mathcal{K} = \bigcup_{t>0}\mathcal{K}_t$ là tập đạt được từ $0 \in W_2^1([-h,0],\mathbb{C}^n)$ của hệ (1.22). Theo kết quả trong bài báo [54] (trang 316), tập $\mathcal{K}_t$ có thể viết lại như sau:

$$\mathcal{K}_t = \left\{(\lambda - \mathfrak{A})\int_0^t T(t-s)e^{\lambda s}P^{th}(\lambda)^{-1}Bu(s)ds : u(\cdot) \in L_2([0,t],\mathbb{C}^m)\right\}, \tag{1.23}$$

với λ không phải là nghiệm của phương trình $\det P^{th}(\lambda) = 0$, trong đó

$$P^{th}(\lambda) = A_0 + A_1e^{-h\lambda} + \lambda A_{-1}e^{-h\lambda} - \lambda I_n$$

là ma trận của tựa đa thức đặc trưng của hệ tuyến tính trung tính (1.22).

Dưới đây là các định nghĩa về điều khiển được của hệ (1.22) trên không gian $W_2^1([-h,0],\mathbb{K}^n)$. Các khái niệm này đã được giới thiệu bởi H.T. Banks, A. Manitius và R. Triggiani (xem trong các tài liệu [6, 47]).

Định nghĩa 1.4.2. Hệ (1.22) được gọi là *điều khiển được chính xác* nếu với mọi điều kiện ban đầu $\xi_0(\cdot) \in W_2^1([-h,0],\mathbb{C}^n)$ và trạng thái cuối cần đạt được $\xi_1(\cdot) \in W_2^1([-h,0],\mathbb{C}^n)$, tồn tại thời gian $T > 0$ và hàm điều khiển $u(t) \in L_2([0,T],\mathbb{C}^n)$ sao cho nghiệm tương ứng $x(t) = x(t,\xi_0,u)$ thỏa mãn $x_T(\theta) = \xi_1(\theta)$, với mọi $\theta \in [-h,0]$, trong đó $x_T(\theta) = x(T+\theta), \theta \in [-h,0]$. Điều này tương đương với $\mathcal{K} = W_2^1([-h,0],\mathbb{C}^n)$.

Định nghĩa 1.4.3. Hệ (1.22) được gọi là *điều khiển được xấp xỉ* nếu với mọi điều kiện ban đầu $\xi_0(\cdot) \in W_2^1([-h,0],\mathbb{C}^n)$, điều kiện cuối mong muốn $\xi_1(\cdot) \in W_2^1([-h,0],\mathbb{C}^n)$ và $\epsilon > 0$ tùy ý, tồn tại $T > 0$ và hàm điều khiển $u(t) \in L_2([0,T],\mathbb{C}^n)$ sao cho nghiệm tương ứng $x(t) = x(t,\xi_0,u)$ thỏa mãn $\|x_T(\cdot)-\xi_1(\cdot)\|_{W_2^1([-h,0],\mathbb{C}^n)} < \epsilon$. Điều này tương đương với $\mathrm{cl}\mathcal{K} = W_2^1([-h,0],\mathbb{C}^n)$.

Định nghĩa 1.4.4. Hệ (1.22) được gọi là *điều khiển được Euclide* nếu với mọi điều khiển ban đầu cho trước $\xi_0(\cdot) \in W_2^1([-h,0],\mathbb{C}^n)$ và mọi trạng thái cuối mong muốn x_1, tồn tại $T > 0$ và hàm điều khiển $u(t) \in L_2([0,T],\mathbb{C}^n)$ sao cho nghiệm tương ứng $x(t) = x(t,\xi_0,u)$ thỏa mãn $x(T) = x_1$.

Năm 1983, dựa trên lý thuyết nửa nhóm toán tử liên tục mạnh của hệ (1.22) trên không gian trạng thái $W_2^1([-h,0],\mathbb{C}^n)$, D.A. O'Connor và T.J. Tarn (xem [54]) đã mở rộng các kết quả của H.T. Banks, M.Q. Jacobs và C.E. Langenhop, A. Manitius và R. Triggiani, H.R. Rodas và C.E. Langenhop cho các hệ tuyến tính trung tính (xem trong [6, 47, 61]). Một số tiêu chuẩn đại số cho tính điều khiển được của hệ (1.22) được đưa ra thông qua mệnh đề dưới đây (xem trong các tài liệu [6, 54, 57, 60, 61]).

Mệnh đề 1.4.5. *Hệ (1.22) là điều khiển được Euclide khi và chỉ khi*

(i) $\mathrm{rank}[P^{th}(\lambda), B] = n$, *với mọi* $\lambda \in \mathbb{C}$.

trong đó

$$P^{th}(\lambda) = A_0 + e^{-h\lambda}A_1 + \lambda e^{-h\lambda}A_{-1} - \lambda I_n \tag{1.24}$$

là ma trận của tựa đa thức tựa đặc trưng của hệ (1.22). Hệ (1.22) là điều khiển được chính xác khi và chỉ khi (i) xảy ra và *(ii)* $\mathrm{rank}[B, A_{-1}B, \ldots, A_{-1}^{n-1}B] = n$.

Hệ (1.22) *là điều khiển được xấp xỉ khi và chỉ khi* (*i*) *xảy ra và*

(ii) $\mathrm{rank}[\lambda A_{-1} + A_1, B] = n$, *với mọi* $\lambda \in \mathbb{C}$.

Nhận xét 1.4.6. Nhận xét rằng điều kiện (*ii*) trong Mệnh đề 1.4.5 nói lên rằng cặp ma trận (A_{-1}, B) là điều khiển được, tức là

$$\mathrm{rank}[A_{-1} - \lambda I_n, B] = n, \ \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Điều này nhận được từ kết quả của phần 1.1 của chương này.

1.5 Toán tử đa trị tuyến tính và các kết quả về các bán kính toàn ánh

Nội dung của mục này được lấy trong các tài liệu [14] và [70], ở đây chúng tôi trình bày thêm một số chứng minh ngắn gọn các tính chất của toán tử đa trị tuyến tính cho người đọc dễ theo dõi.

Cho $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ hoặc $\mathbb{R}$ là tập hợp các số phức hoặc thực và n, m, k, l, q, N là các số nguyên dương. Trong suốt luận án này, chúng ta kí hiệu $\underline{N} = \overline{1, N} = \{1, \ldots, N\}$ và $\mathbb{K}^{n\times m}$ được thay cho tập tất cả các ma trận cấp $n \times m$. Ma trận $A^* \in \mathbb{K}^{m\times n}$ kí hiệu là ma trận liên hợp của ma trận $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$, $\mathbb{K}^n (= \mathbb{K}^{n\times 1})$ là không gian véc tơ n - chiều (không gian của các véc tơ cột n thành phần trong $\mathbb{K}$) được trang bị với chuẩn véc tơ $\|\cdot\|$, không gian liên hợp của nó có thể đồng nhất với $(\mathbb{K}^n)^* = (\mathbb{K}^{n\times 1})^* = \{u^* : \ u \in \mathbb{K}^n\}$, (không gian của các véc tơ hàng n thành phần trong $\mathbb{K}$), được trang bị với chuẩn liên hợp. Với $u^* \in (\mathbb{K}^n)^*$ chúng ta viết $u^*(x) = u^*x, \forall x \in \mathbb{K}^n$ và với một tập $M \subset \mathbb{K}^n$, chúng ta định nghĩa $M^\perp = \{u^* \in (\mathbb{K}^n)^* : u^*x = 0, \forall x \in M\}$. Ta kí hiệu $\|\cdot\|_2$ là chuẩn Euclide, tức là $\|x\|_2 = \sqrt{x^*x}$ và $\|\cdot\|_\infty$ là chuẩn vô cùng trên $\mathbb{K}^n$, tức là $\|x\|_\infty = \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} \|x_i\|$, với mọi $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$.

Với mỗi ma trận $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$, ta nói rằng $\sigma \geqslant 0$ là *giá trị kì dị* của A khi và chỉ khi $\det(A^*A - \sigma^2 I_m) = 0$. Ngoài ra người ta cũng mở rộng khái niệm giá trị kì dị cho cặp ma trận (A, B) khi chúng có cùng số cột. Cho hai ma trận $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ và $B \in \mathbb{K}^{l\times m}$. Khi đó, $\mu \geqslant 0$ là *giá trị kì dị* của cặp ma trận (A, B) khi và chỉ khi $\det(A^*A - \sigma^2 B^*B) = 0$.

Chú ý 1.5.1. Chú ý rằng nếu các không gian vectơ được trang bị bởi các chuẩn Euclide thì với mỗi ma trận $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$, ta nhận được $\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^*A)} = \sigma_{\max}(A)$, trong đó $\lambda_{\max}(A^*A)$ là giá trị riêng lớn nhất của ma trận A^*A. Do đó người ta còn gọi chuẩn Euclide là chuẩn phổ.

Cho $\mathcal{F} : \mathbb{K}^n \rightrightarrows \mathbb{K}^m$ là một toán tử đa trị, nếu đồ thị của $\mathcal{F}$ được định nghĩa bởi

$$\operatorname{gr}\mathcal{F} = \big\{(x, y) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m : y \in \mathcal{F}(x)\big\}, \tag{1.25}$$

là một không gian con tuyến tính của $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m$ thì $\mathcal{F}$ được gọi là một toán tử đa trị tuyến tính. Miền xác định và nhân của $\mathcal{F}$ được ký hiệu tương ứng bởi $\operatorname{dom}\mathcal{F} = \big\{x \in \mathbb{K}^n : \mathcal{F}(x) \neq \emptyset\big\}$ và $\operatorname{Ker}\mathcal{F} = \big\{x \in \operatorname{dom}\mathcal{F} : 0 \in \mathcal{F}(x)\big\}$. Bởi định nghĩa, $\mathcal{F}(0)$ là một không gian con tuyến tính và với $x \in \operatorname{dom}\mathcal{F}$, chúng ta có đẳng thức sau

$$y \in \mathcal{F}(x) \iff \mathcal{F}(x) = y + \mathcal{F}(0). \tag{1.26}$$

Cho $\mathcal{F} : \mathbb{K}^n \rightrightarrows \mathbb{K}^m$ là một toán tử đa trị tuyến tính, khi đó với chuẩn véc tơ đã cho trên $\mathbb{K}^n$ và $\mathbb{K}^m$, chuẩn của $\mathcal{F}$ được định nghĩa bởi

$$\|\mathcal{F}\| = \sup\Big\{\inf_{y\in\mathcal{F}(x)} \|y\| : x \in \operatorname{dom}\mathcal{F}, \|x\| = 1\Big\}. \tag{1.27}$$

Từ định nghĩa của toán tử đa trị suy ra rằng

$$\inf_{y\in\mathcal{F}(x)} \|y\| \leq \|\mathcal{F}\|\|x\| \text{ với mọi } x \in \operatorname{dom}\mathcal{F},$$

và do đó nếu $\mathcal{F}$ là đơn trị thì

$$\|\mathcal{F}(x)\| \leq \|\mathcal{F}\|\|x\| \text{ với mọi } x \in \operatorname{dom}\mathcal{F}. \tag{1.28}$$

Nếu các không gian vectơ được trang bị chuẩn Euclide ($\|x\| = \sqrt{x^*x}$) thì từ (1.26) ta được mệnh đề sau.

Mệnh đề 1.5.2. *Cho $\mathcal{F} : \mathbb{K}^n \rightrightarrows \mathbb{K}^m$ là một toán tử đa trị tuyến tính. Khi đó,*

$$y \in \mathcal{F}(x),\ y^* \in \mathcal{F}(0)^\perp \implies d(0, \mathcal{F}(x)) := \inf_{z \in \mathcal{F}(x)} \|z\| = \|y\|. \qquad (1.29)$$

Với toán tử đa trị tuyến tính $\mathcal{F} : \mathbb{K}^n \rightrightarrows \mathbb{K}^m$ thì toán tử liên hợp $\mathcal{F}^* : (\mathbb{K}^m)^* \rightrightarrows (\mathbb{K}^n)^*$ và toán tử nghịch đảo $\mathcal{F}^{-1} : \mathrm{Im}\mathcal{F} \rightrightarrows \mathbb{K}^n$ được định nghĩa tương ứng bởi

$$\mathcal{F}^*(v^*) = \big\{u^* \in (\mathbb{K}^n)^* : u^*x = v^*y \text{ với mọi } (x, y) \in \operatorname{gr}\mathcal{F}\big\}, \qquad (1.30)$$

$$\mathcal{F}^{-1}(y) = \big\{x \in \mathbb{K}^n : y \in \mathcal{F}(x)\big\}. \qquad (1.31)$$

Bởi định nghĩa, $\mathcal{F}^*$ và $\mathcal{F}^{-1}$ cũng là các toán tử đa trị tuyến tính và ta có các mệnh đề sau.

Mệnh đề 1.5.3. *Cho $\mathcal{F} : \mathbb{K}^n \rightrightarrows \mathbb{K}^m$ là một toán tử đa trị tuyến tính. Khi đó,*

$$(\mathcal{F}^*)^* = \mathcal{F},\quad (\mathcal{F}^*)^{-1} = (\mathcal{F}^{-1})^*,\quad \|\mathcal{F}\| = \|\mathcal{F}^*\|. \qquad (1.32)$$

Mệnh đề 1.5.4. *Cho $\mathcal{F} : \mathbb{K}^n \rightrightarrows \mathbb{K}^m$ là một toán tử đa trị tuyến tính. Khi đó, $\mathcal{F}$ là toàn ánh ($\mathcal{F}(\mathbb{K}^n) = \mathbb{K}^m$) nếu và chỉ nếu $\mathcal{F}^*$ là đơn ánh ($\mathcal{F}^{*-1}(0) = \{0\}$) hoặc tương đương $\mathcal{F}^{*-1}$ là đơn trị.*

Cho $\mathcal{F} : \mathbb{K}^n \rightrightarrows \mathbb{K}^m, \mathcal{G} : \mathbb{K}^m \rightrightarrows \mathbb{K}^l$ là các toán tử đa trị tuyến tính, khi đó toán tử $\mathcal{G}\mathcal{F} : \mathbb{K}^n \rightrightarrows \mathbb{K}^l$, được định nghĩa bởi $(\mathcal{G}\mathcal{F})(x) = \mathcal{G}(\mathcal{F}(x))$ với mọi $x \in \operatorname{dom}\mathcal{F}$, là một toán tử đa trị tuyến tính và ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 1.5.5. *Cho $\mathcal{F} : \mathbb{K}^n \rightrightarrows \mathbb{K}^m, \mathcal{G} : \mathbb{K}^m \rightrightarrows \mathbb{K}^l$ là các toán tử đa trị tuyến tính. Khi đó,*

$$\mathcal{F}(0) \subset \operatorname{dom}\mathcal{G} \implies \|\mathcal{G}\mathcal{F}\| \le \|\mathcal{G}\|\ \|\mathcal{F}\|, \qquad (1.33)$$

$$\operatorname{Im}\mathcal{F} \subset \operatorname{dom}\mathcal{G} \implies (\mathcal{G}\mathcal{F})^* = \mathcal{F}^*\mathcal{G}^*. \qquad (1.34)$$

Nếu $\mathcal{F}$ là một toán tử đơn trị tuyến tính được định nghĩa bởi $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}_G(x) = Gx$, ở đây $G \in \mathbb{K}^{m\times n}$ và $x \in \mathbb{K}^n$ thì dễ thấy chuẩn của $\mathcal{F}_G$ được định nghĩa bởi (1.27) thực sự là chuẩn của ma trận G

$$\|\mathcal{F}_G\| = \|G\|.$$

Do vậy khi làm việc với các toán tử này chúng ta sẽ sử dụng khái niệm $\mathcal{F}_G(x) = G(x)$. Dễ thấy rằng toán tử liên hợp $(\mathcal{F}_G)^* : (\mathbb{K}^m)^* \longrightarrow (\mathbb{K}^n)^*$ cũng là một toán tử đa trị tuyến tính và được xác định bởi $(\mathcal{F}_G)^*(v^*) = v^*G,\ \forall v^* \in (\mathbb{K}^m)^*$. Để cho đơn giản, chúng ta sẽ đồng nhất $(\mathcal{F}_G)^*$ với G^*, và viết

$$(\mathcal{F}_G)^*(v^*) = G^*(v^*) = v^*G, \forall v^* \in (\mathbb{K}^m)^*. \tag{1.35}$$

Chú ý rằng G^*v thông thường được hiểu là tích của ma trận $G^* \in \mathbb{K}^{n\times m}$ và véc tơ cột $v \in \mathbb{K}^m$ và chúng ta có $(G^*v)^* = G^*(v^*)$.

Đặc biệt, khi ma trận G có hạng bằng số hàng (tức là $G(\mathbb{K}^n) = \mathbb{K}^m$), ta có $G^\dagger y \in G^{-1}(y)$, với mọi $y \in \mathbb{K}^m$. Hơn nữa, nếu các không gian được trang bị các chuẩn vectơ Euclide thì ta luôn có bất đẳng thức sau

$$\|x\| \geq \|G^\dagger y\|, \forall x \in G^{-1}(y). \tag{1.36}$$

Dưới đây là kết quả về bán kính toàn ánh phức hay khoảng cách phức đến tập các ma trận không toàn ánh của một ma trận của N.K. Son và D.D. Thuan (xem trong bài báo [70]).

Mệnh đề 1.5.6. *Giả sử $Q \in \mathbb{K}^{n\times m}$ là một ma trận toàn ánh, tức là* $\operatorname{rank} Q = n$ *và $D \in \mathbb{K}^{n\times l}, E \in \mathbb{K}^{q\times m}$ là các ma trận cho trước. Khi đó, khoảng cách có cấu trúc tới tập hợp các ma trận không toàn ánh được cho bởi công thức*

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}_{\mathbb{C}}(Q; D, E) :&= \inf\{\|\Delta\| : \Delta \in \mathbb{C}^{l\times q} \ s.c.\ Q + D\Delta E \textit{ không toàn ánh } \}\\ &= \frac{1}{\|EQ^{-1}D\|},\end{aligned} \tag{1.37}$$

trong đó Q^{-1} là toán tử đa trị tuyến tính nghịch đảo của Q.

Chứng minh. Vì toán tử Q là toàn ánh nên Q^{*-1} là toán tử đơn trị. Giả sử rằng

$$\widetilde{Q} = Q + D\Delta E$$

là không toàn ánh với $\Delta \in \mathbb{K}^{l\times q}$ nào đó. Do đó, tồn tại $y_0^* \in (\mathbb{C}^n)^*, y_0^* \neq 0$ thỏa mãn $(Q + D\Delta E)^*(y_0^*) = Q^*(y_0^*) + (E^*\Delta^* D^*)(y_0^*) = 0$. Vì $Q_{\lambda_0}^{*-1}$ là đơn trị nên chúng ta có

$$y_0^* = -(Q^{*-1}E^*\Delta^*)(D^*(y_0^*)) \tag{1.38}$$

và vì thế nên $D^*(y_0^*) \neq 0$. Bằng cách tác động D^* vào phía trái cả hai vế của (1.38) ta thu được

$$D^*(y_0^*) = -(D^*Q^{*-1}E^*\Delta^*)(D^*(y_0^*)).$$

Do đó, từ (1.28), ta có

$$0 < \|D^*(y_0^*)\| \leq \|D^*Q^{*-1}E^*\|\|\Delta^*(D^*(y_0^*))\| \leq \|D^*Q^{*-1}E^*\|\|\Delta^*\|\|D^*(y_0^*)\|.$$

Vì $\operatorname{Im} Q^{-1} \subset \operatorname{dom} E = \mathbb{K}^m$ nên bởi sử dụng (1.34) ta có $(EQ^{-1})^* = Q^{-1*}E^* = Q^{*-1}E^*$. Hơn nữa, vì Q là toàn ánh và $\operatorname{Im} D \subset \operatorname{dom}(EQ^{-1}) = \mathbb{K}^n$ nên từ (1.34), ta có

$$(EQ^{-1}D)^* = D^*(EQ^{-1})^* = D^*Q^{*-1}E^*.$$

Từ (1.32), ta nhận được

$$\|\Delta^*\| = \|\Delta\| \geq \frac{1}{\|D^*Q^{*-1}E^*\|} = \frac{1}{\|EQ^{-1}D\|}.$$

Vì bất đẳng thức trên đúng cho bất kì ma trận nhiễu $\Delta \in \mathbb{K}^{l\times q}$ sao cho $D\Delta E$ phá vỡ tính toàn ánh nên từ định nghĩa ta thu được

$$\operatorname{dist}_{\mathbb{C}}(Q; D, E) \geq \frac{1}{\|EQ^{-1}D\|}.$$

Để chứng minh bất đẳng thức ngược lại, đầu tiên ta chú ý rằng $D^*Q^{*-1}E^*$ là đơn trị. Do đó, chuẩn của nó là chuẩn toán tử và vì thế tồn tại

$v^* \in (\mathbb{K}^q)^* : \|v^*\| = 1, v^* \in \mathrm{dom}(D^*Q^{*-1}E^*)$ thỏa mãn $\|EQ^{-1}D\| = \|D^*Q^{*-1}E^*\| = \|(D^*Q^{*-1}E^*)(v^*)\|$. Đặt $u^* = -Q^{*-1}(E^*(v^*)) \neq 0$, ta có

$$Q^*(u^*) = -E^*(v^*) \text{ và } D^*(u^*) = -(D^*Q^{*-1}E^*)(v^*) \neq 0.$$

Theo định lý Hahn-Banach, tồn tại $h \in \mathbb{K}^l$ thỏa mãn $\|h\| = 1, (D^*(u^*))h = \|D^*(u^*)\|$. Bằng cách lấy

$$\Delta = \frac{1}{\|D^*(u^*)\|} hv^* \in \mathbb{K}^{l\times q}.$$

Khi đó,

$$\|\Delta\| = \|D^*(u^*)\|^{-1} = \|(D^*Q^{*-1}E^*)(v^*)\|^{-1} = \frac{1}{\|EQ^{-1}D\|},$$

và từ (1.35), ta có $(\Delta^*D^*)(u^*) = \Delta^*(D^*(u^*)) = D^*(u^*)\Delta = v^*$. Vì thế $(E^*\Delta^*D^*)(u^*) = E^*(v^*)$ và do đó

$$Q^*(u^*) + (E^*\Delta^*D^*)(u^*) = 0,$$

với $u^* \neq 0$. Điều này suy ra rằng ma trận bị nhiễu $\widetilde{Q} = Q + D\Delta E$ không là toàn ánh. Do đó

$$\mathrm{dist}_{\mathbb{C}}(Q; D, E) \leq \|\Delta\| \leq \frac{1}{\|EQ^{-1}D\|}.$$

Chứng minh định lý đã được hoàn thành. $\square$

Khi ma trận E trong định lý trên có hạng bằng số cột của nó và các không gian vectơ được trang bị bởi chuẩn Euclide, ta có thể tính bán kính toàn ánh thực thông qua chuẩn của một ma trận. Trong kết quả này ta có sử dụng tới khái niệm ma trận giả nghịch Moore-Penrose của một ma trận.

Định nghĩa 1.5.7. Cho $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$, ma trận giả nghịch đảo Moore-Penrose của A được định nghĩa là ma trận $A^\dagger \in \mathbb{K}^{m\times n}$ thỏa mãn bốn tính chất sau:

1. $AA^\dagger A = A$;

2. $A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$;

3. $(AA^\dagger)^* = AA^\dagger$;

4. $(A^\dagger A)^* = A^\dagger A$.

Tính chất: -Với mỗi $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$, có duy nhất $A^\dagger$ là ma trận giả nghịch đảo Moore-Penrose của A.

-Nếu $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ khả nghịch thì $A^\dagger = A^{-1}$.

-Nếu $\text{rank}A = m$ thì $A^\dagger = (A^*A)^{-1}A^*$.

-Nếu $\text{rank}A = n$ thì $A^\dagger = A^*(AA^*)^{-1}$.

Hệ quả 1.5.8. *Giả sử rằng ma trận $Q \in \mathbb{K}^{n\times m}$ là toàn ánh, ma trận $E \in \mathbb{K}^{q\times m}$ có hạng bằng số cột của nó, tức là $\text{rank E} = m$ và các không gian vectơ được trang bị bởi chuẩn Euclide. Khi đó, bán kính toàn ánh của Q tới tập các ma trận không toàn ánh là*

$$\text{dist}_{\mathbb{C}}(Q; D, E) = \frac{1}{\|(Q(E^*E)^{-1/2})^\dagger D\|}. \tag{1.39}$$

Chứng minh. Vì ma trận E có hạng bằng số cột của nó nên $E^*E \in \mathbb{K}^{m\times m}$ là một ma trận xác định dương. Do đó, chúng ta có thể phân tích $E^*E = (E^*E)^{1/2}(E^*E)^{1/2}$ với $(E^*E)^{1/2} \in \mathbb{K}^{m\times m}$ là ma trận khả nghịch, đối xứng và xác định dương (xem [36]). Vì $\|Ev\| = \sqrt{(Ev)^*Ev} = \sqrt{v^*E^*Ev} = \|(E^*E)^{1/2}v\|$ nên với mọi $u \in \mathbb{K}^l$ ta có

$$\begin{aligned} d(0, (EQ^{-1}D)(u)) &= \inf_{v\in(Q^{-1}D)(u)} \|Ev\| \\ &= \inf_{v\in(Q^{-1}D)(u)} \|(E^*E)^{1/2}v\| = d(0, ((E^*E)^{1/2}Q^{-1}D)(u)). \end{aligned}$$

Do ma trận $Q(E^*E)^{-1/2} \in \mathbb{K}^{n\times(n+m)}$ có hạng bằng số hàng của nó và dễ thấy $(E^*E)^{1/2}Q^{-1} = (Q(E^*E)^{-1/2})^{-1}$ nên áp dụng bất đẳng thức (1.32) ta có với mọi $u \in \mathbb{K}^l$

$$d(0, (EQ^{-1}D)(u)) = d(0, ((E^*E)^{1/2}Q^{-1}D)(u))) = \|(Q(E^*E)^{-1/2})^\dagger Du\|.$$

Điều này suy ra rằng $\|EQ^{-1}D\| = \|(Q(E^*E)^{-1/2})^\dagger D\|$ và do đó, từ Mệnh đề 1.5.6, ta có điều phải chứng minh. $\square$

Đặc biệt, khi $D = I_n$, $E = I_{n+m}$, ta nhận được công thức tính bán kính toàn ánh với nhiễu không cấu trúc:

$$\mathrm{dist}_{\mathbb{C}}(Q; I_n, I_{n+m}) = \frac{1}{\|Q^{-1}\|},$$

trong đó Q^{-1} là toán tử đa trị tuyến tính nghịch đảo của toán tử toàn ánh Q được xác định bởi:

$$Q^{-1}(x) = \{y \in \mathbb{K}^{n+m} : Qy = x\}, \text{ với mọi } x \in \mathbb{K}^n.$$

Hơn thế nữa, khi các không gian được trang bị bởi các chuẩn Euclide, từ kết quả của Hệ quả 1.5.8, ta có:

$$\mathrm{dist}_{\mathbb{C}}(Q; I_n, I_{n+m}) = \frac{1}{\|Q^\dagger\|} = \sigma_{\min}(Q^*) = \sigma_{\min}(Q).$$

Thật vậy, theo định nghĩa chuẩn toán tử,

$$\begin{aligned}\|Q^\dagger\| &= \sup_{\|x\|=1} \|Q^\dagger x\| = \sup_{\|x\|=1} \sqrt{x^*(Q^\dagger)^* Q^\dagger x} \\ &= \sup_{\|x\|=1} \sqrt{x^*(Q^*)^\dagger Q^\dagger x} = \sup_{\|x\|=1} \sqrt{x^*(QQ^*)^\dagger x}.\end{aligned}$$

Vì hạng của ma trận Q bằng số dòng nên QQ^* là ma trận vuông cấp n đối xứng xác định dương và khả nghịch. Do đó,

$$\|Q^\dagger\| = \sup_{\|x\|=1} \sqrt{x^*(QQ^*)^{-1}x} = \sqrt{\lambda_{\max}(QQ^*)^{-1}} = \sigma_{\min}(Q^*) = \sigma_{\min}(Q).$$

Bây giờ, để thiết lập bán kính toàn ánh thực hay khoảng cách tới tập các ma trận không toàn ánh thực, ta sẽ sử dụng đến khái niệm giá trị nhiễu thực suy rộng được nghiên cứu bởi S. Lam và E.J. Davison (xem trong [42]).

Định nghĩa 1.5.9. Cho $Q \in \mathbb{C}^{n\times m}$ là ma trận toàn ánh, tức là $\operatorname{rank} Q = n$ và $E \in \mathbb{C}^{q\times m}$ là ma trận cho trước. Giá trị nhiễu thực suy rộng thứ n của cặp ma trận (Q, E) được định nghĩa bởi:

$$\tau_n(Q, E) := \inf\{\|\Delta\|_2 : \Delta \in \mathbb{R}^{n\times l}, \operatorname{rank}(Q + \Delta E) < n\}. \tag{1.40}$$

Rõ ràng từ định nghĩa trên, ta nhận thấy giá trị nhiễu thực suy rộng thứ n của cặp ma trận (Q, E) chính là trường hợp riêng của bán kính toàn ánh thực khi các không gian vectơ được trang bị các chuẩn Euclide, ma trận $D = I_n$ và ma trận $\Delta \in \mathbb{R}^{n\times n}$, tức là $\tau_n(Q, E) = \operatorname{dist}_{\mathbb{R}}(Q; I_n, E)$. Hơn nữa, S. Lam và E.J. Davison đã tính được $\tau_n(Q, E)$ thông qua các *giá trị kì dị suy rộng* của cặp ma trận.

Định lý 1.5.10. *Giả sử $Q \in \mathbb{C}^{n\times m}$ là ma trận toàn ánh, tức là $\operatorname{rank} Q = n$ và $E \in \mathbb{C}^{q\times m}$ là ma trận cho trước. Khi đó, giá trị nhiễu thực suy rộng thứ n của cặp ma trận (Q, E) được tính bởi công thức:*

$$\tau_n(Q, E) = \sup_{\gamma\in(0,1]} \sigma_{2n-1}\left(\begin{bmatrix} \operatorname{Re} Q & -\gamma \operatorname{Ima} Q \\ \frac{1}{\gamma}\operatorname{Ima} Q & \operatorname{Re} Q\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \operatorname{Re} E & -\gamma \operatorname{Ima} E \\ \frac{1}{\gamma}\operatorname{Ima} E & \operatorname{Re} E\end{bmatrix}\right), \tag{1.41}$$

trong đó $\sigma_i(H_1, H_2)$ là giá trị kì dị suy rộng thứ i của cặp ma trận (H_1, H_2) (xem trong [42, 80]).

Ta sẽ hiểu rõ hơn về giá trị kì dị suy rộng của cặp ma trận thông qua định lý sau:

Định lý 1.5.11. *Cho $M \in \mathbb{C}^{q\times l}$ và $N \in \mathbb{C}^{p\times l}$. Khi đó, tồn tại $U \in \mathbb{C}^{q\times q}$ và $V \in \mathbb{C}^{p\times p}$ là các ma trận Unita, $Q \in \mathbb{C}^{l\times l}$ là ma trận không suy biến sao cho*

$$M = U\begin{bmatrix}\Omega_M & 0\end{bmatrix}Q,\ \ N = V\begin{bmatrix}\Omega_M & 0\end{bmatrix}Q,$$

trong đó

$$\Omega_M = \begin{bmatrix} I_r & & \\ & S_M & \\ & & 0\end{bmatrix}, \qquad \Omega_N = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & S_N & \\ & & I_{k-r-s}\end{bmatrix},$$

ở đó $S_M = \operatorname{diag}(\alpha_{r+1}, ..., \alpha_{r+s})$, $S_N = \operatorname{diag}(\beta_{r+1}, ..., \beta_{r+s})$ *và* α_{r+i} *và* β_{r+i} *là các số thực thỏa mãn* $0 \leqslant \alpha_{r+i}, \beta_{r+i} \leqslant 1$, $\alpha_{r+i}^2 + \beta_{r+i}^2 = 1$, *với* $i = 1, ..., s$. *Các chiều* k, r, s *tương ứng được xác định:*

$$k = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}, \quad r = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} - \operatorname{rank} M, \quad s = \operatorname{rank} M + \operatorname{rank} N - \operatorname{rank}\begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}.$$

Lấy các phần tử trên đường chéo của Ω_M và Ω_N. Có 4 loại cặp (α_i, β_i):

- Với $i = 1, ..., r$: $(\alpha_i, \beta_i) = (1, 0)$
- Với $i = r+1, ..., r+s$: $\alpha_i \neq 0$, $\beta_i \neq 0$
- Với $i = r+s+1, ..., k$: $(\alpha_i, \beta_i) = (0, 1)$
- Với $i = k+1, ..., l$: $(\alpha_i, \beta_i) = (0, 0)$.

Giá trị kì dị suy rộng thứ i của cặp ma trận (M, N) được xác định bởi:

$$\sigma_i(M, N) := \frac{\alpha_i}{\beta_i}, \text{ với } i = 1, ..., k.$$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử

$$\sigma_1(M, N) \geqslant \sigma_2(M, N) \geqslant ... \geqslant \sigma_k(M, N).$$

Chú ý rằng, nếu ma trận $N = I_l$ thì giá trị kì dị suy rộng thứ i của cặp ma trận (M, I_l) chính là giá trị kì dị thứ i của ma trận M, tức là $\sigma_i(M, I_l) = \sigma_i(M)$.

Chương 2

TÍNH ĐIỀU KHIỂN ĐƯỢC VỮNG CỦA HỆ TUYẾN TÍNH CÓ TRỄ RỜI RẠC

Nội dung của chương này được lấy từ các kết quả của bài báo [CT1] trong Danh mục công trình. Trong phần đầu của chương, một số ví dụ được đưa ra để nói rằng tính điều khiển được xấp xỉ của hệ điều khiển tuyến tính trong không gian trạng thái vô hạn chiều rất dễ bị phá vỡ khi hệ chịu tác động của các nhiễu bé. Tiếp theo là nội dung chính của chương, luận án thiết lập một số công thức tính bán kính điều khiển được xấp xỉ phức trong không gian trạng thái Banach $\mathbb{K}^n \times L_2([-h_k, 0], \mathbb{K}^n)$ của hệ tuyến tính có trễ rời rạc mô tả bởi phương trình

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t - h_1) + \ldots + A_kx(t - h_k) + Bu(t), t \geqslant 0, \quad (2.1)$$

trong đó $0 = h_0 < h_1 < ... < h_k, A_i \in \mathbb{K}^{n\times n}, i = 0, 1, \ldots, k, B \in \mathbb{K}^{n\times m}$, $x(t) \in \mathbb{K}^n$, $u(t) \in \mathbb{K}^m$, với $\mathbb{K}$ là trường số thực hoặc phức. Để đưa ra các công thức này, chúng tôi sử dụng kết quả của Định lý 1.3.14 của A. Manitius về điều kiện cần và đủ cho hệ (2.1) điều khiển được xấp xỉ trong không gian trạng thái $M_2 := \mathbb{K}^n \times L_2([-h_k, 0], \mathbb{K}^n)$ và kết quả của Mệnh đề 1.5.6 về bán kính toàn ánh phức. Ngoài ra, các tính chất của các toán tử đa trị tuyến tính cũng được chúng tôi sử dụng để biểu diễn phương trình và đánh giá các chuẩn ma trận. Phần còn lại của chương này, chúng tôi đánh giá cận trên và cận dưới của bán kính điều khiển được Euclide thực bán kính điều khiển xấp xỉ thực khi hệ điều khiển được xấp xỉ (2.1) bị nhiễu có cấu trúc và mối quan hệ giữa các bán kính điều khiển được thực và phức. Một số ví dụ được đưa ra để thảo luận.

2.1 Bán kính điều khiển được phức

Trong không gian trạng thái vô hạn chiều thì ngoài khái niệm điều khiển được chính xác, người ta còn xét đến khái niệm điều khiển được xấp xỉ. Tức là bài toán đưa trạng thái của hệ thống đến gần tùy ý với trạng thái mong muốn trong khoảng thời gian hữu hạn nào đó. Các bài toán này đã được nhiều người nghiên cứu như R. F. Curtain, Prichard và R. Triggiani (xem trong các tài liệu [15, 78])... Trong khi tính điều khiển được chính xác được bảo tồn dưới tác động của các nhiễu bé thì trong trường hợp tổng quát, tính điều khiển được xấp xỉ có thể bị phá vỡ như các ví dụ dưới đây.

Ví dụ 2.1.1. Xét hệ điều khiển tuyến tính (A, b) được mô tả bởi phương trình vi phân tuyến tính

$$\dot{x} = Ax + bu, x \in X, u \in \mathbb{C},$$

trong đó $X = l_2$ là không gian Banach, bao gồm tất cả các dãy số phức khả tổng bậc hai với cơ sở trực chuẩn $\{e_i\}, e_i = 0, 0, ..., 0, 1, 0, ..., i = 1, 2, ...$, số 1 là phần tử thứ i của dãy và A là toán tử chuyển trái xác định bởi $Ae_1 = 0, Ae_{i+1} = e_i, i = 1, 2, \ldots$ và $b \in X$ là vectơ có tọa độ $1, 1/2, ..., 1/i, ...$ hay $b = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} e_i$. Dễ thấy, A là toán tử tuyến tính bị chặn. Theo kết quả của bài báo [21] (trang 43), ta có $\text{cl span}\{b, Ab, A^2b, \ldots\} = X$. Vì vậy, từ Định lý 1.2.11, hệ (A, b) là điều khiển được xấp xỉ.

Bây giờ, ta xét hệ điều khiển tuyến tính $(A, b_n), n = 1, 2, \ldots$ với $b_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} e_i$. Rõ ràng $\|(A, b_n) - (A, b)\| = \|b - b_n\| \to 0$ khi $n \to \infty$ và

$$Ab_n = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i+1} e_i; A^2 b_n = \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{i+2} e_i; ...; A^{n-1} b_n = \frac{1}{n} e_1;$$

$A^k b_n = 0$, với mọi $k \geqslant n$ nên cl span$\{b, Ab, A^2 b, \ldots\} \neq X$. Theo kết quả của Định lý 1.2.11, hệ (A, b_n) không điều khiển được xấp xỉ.

Ví dụ 2.1.2. Xét hệ điều khiển tuyến tính trong không gian trạng thái $X = L_2[0,1]$, được mô tả bởi phương trình vi tích phân loại Volterra:

$$\frac{\partial w(t,\xi)}{\partial t} = \int_0^{\xi} w(t,s) ds + v(\xi) u(t), \tag{2.2}$$

với $x(t) = w(t, \cdot) \in L_2[0,1], t \geq 0$ và $v(\cdot) \in L_2[0,1]$ sao cho $v(\xi) \neq 0$ hầu khắp nơi trên $[0, \delta] \subset [0,1]$ với $\delta > 0$ nào đó. Khi đó, ta có thể viết lại hệ (2.2) ở dạng

$$\dot{x}(t) = A(x(t)) + Bu(t), t \geqslant 0, \tag{2.3}$$

trong đó A là toán tử tuyến tính từ không gian $L_2[0,1]$ vào chính nó, biến mỗi $x(\cdot) \in L_2[0,1]$ thành $A(x)$ và $A(x)$ được xác định như sau

$$A(x)(\xi) = \int_0^{\xi} x(s) ds, \text{ với } \xi \in [0,1].$$

Dễ thấy rằng, A là toán tử tuyến tính, và

$$\begin{aligned} \|Ax\|^2 = \int_0^1 \left(\int_0^{\xi} x(s) ds \right)^2 d\xi &\leqslant \int_0^1 \left(\int_0^{\xi} |x(s)| ds \right)^2 d\xi \\ &\leqslant \int_0^1 \left(\int_0^{\xi} |x(s)|^2 ds \right) \left(\int_0^{\xi} 1^2 ds \right) d\xi \\ &\leqslant \int_0^1 |x(s)|^2 ds = \|x\|^2. \end{aligned}$$

Vì vậy, A là toán tử tuyến tính liên tục. Khi đó, theo các kết quả của Ví dụ 3.2.1 và Chú ý 3.2.1 trong bài báo [78], hệ (2.2) điều khiển được xấp xỉ trong X.

Bây giờ, với mọi $\epsilon > 0$ đủ bé, ta chọn $\epsilon_0 > 0$ sao cho $\int_0^{\epsilon_0} |v(\xi)|^2 d\xi < \epsilon^2$. Xét hàm $\tilde{v}(\xi)$ xác định bởi:

$$\tilde{v}(\xi) = \begin{cases} 0 \text{ với } \xi \in [0, \epsilon_0], \\ v(\xi) \text{ với } \xi \in (\epsilon_0, 1]. \end{cases} \tag{2.4}$$

Khi đó,

$$\|v - \tilde{v}\|^2 = \int_0^1 |v(\xi) - \tilde{v}(\xi)|^2 d\xi = \int_0^{\epsilon_0} |v(\xi)|^2 d\xi < \epsilon^2.$$

Ta xét hệ

$$\frac{\partial w(t,\xi)}{\partial t} = \int_0^{\xi} w(t,s)ds + \tilde{v}(\xi)u(t),$$

với $\tilde{v}(\cdot)$ được xác định bởi (2.4). Theo kết quả của Ví dụ 3.2.1 và Chú ý 3.2.1 trong bài báo [78], hệ (2.1.2) không điều khiển được xấp xỉ.

Các ví dụ trên đã cho ta thấy rằng, bán kính điều khiển được xấp xỉ nói chung bằng không. Tuy nhiên, ta có thể nhận được bán kính điều khiển được dương cho lớp hệ điều khiển được tuyến tính có trễ rời rạc (2.1). Trong phần dưới đây, chúng tôi sẽ đưa ra công thức tính bán kính điều khiển được xấp xỉ cho hệ này. Chú ý thêm rằng theo kết quả Chương 1, hệ này không bao giờ điều khiển được chính xác. Vì vậy, không có khái niệm bán kính điều khiển được chính xác của hệ này.

Nhắc lại rằng, ma trận của tựa đa thức đặc trưng của hệ (2.1) là

$$P(\lambda) = A_0 + e^{-\lambda h_1} A_1 + ... + e^{-\lambda h_k} A_k - \lambda I_n. \tag{2.5}$$

Từ các kết quả nhận được trong Định lý 1.3.13 and Định lý 1.3.14, ta nhận thấy rằng nếu hệ (2.1) điều khiển được xấp xỉ thì hệ đó cũng điều khiển được Euclide. Các kết quả này cũng đưa chúng ta đến bài toán tính bán kính điều khiển được Euclide và bán kính điều khiển được xấp xỉ của hệ (2.1) khi các ma trận $A_i, i = 1, ..., k$ và B của hệ chịu sự tác động của các nhiễu bé.

Bây giờ, ta giả sử rằng các ma trận của hệ (2.1) được nhiễu có cấu trúc dạng

$$[A_0, A_1 \dots, A_k, B] \rightsquigarrow [\widetilde{A}_0, \widetilde{A}_1, \dots, \widetilde{A}_k, \widetilde{B}] = [A_0, A_1 \dots, A_k, B] + D\Delta E, \tag{2.6}$$

khi đó, hệ nhiễu tương ứng được mô tả như sau:

$$\dot{x}(t) = \widetilde{A}_0 x(t) + \widetilde{A}_1 x(t-h_1) + \ldots + \widetilde{A}_k x(t-h_k) + \widetilde{B}u(t). \tag{2.7}$$

Ở đây $\Delta \in \mathbb{K}^{l\times q}$ là ma trận nhiễu chưa biết và $D \in \mathbb{K}^{n\times l}$, $E \in \mathbb{K}^{q\times(n(k+1)+m)}$ là các ma trận đã cho xác định cấu trúc các nhiễu. Chú ý rằng lớp nhiễu affine $D\Delta E$ đã được sử dụng trong nhiều bài báo trên các bài toán điều khiển trong các biểu diễn không gian trạng thái, và đã được chứng minh là rất hữu ích trong lý thuyết về sự bền vững của tính ổn định và sự bền vững của tính điều khiển được (xem trong [32, 39]). Để ngắn gọn, chúng ta sử dụng kí hiệu

$$\underline{A} = [A_0, A_1, \dots, A_k] \in \mathbb{K}^{n\times(n(k+1))}.$$

Dưới đây, để đưa ra các khái niệm bán kính điều khiển được Euclide và bán kính điều khiển được xấp xỉ tương ứng với nhiễu (2.6) cho hệ (2.1), ta xét $\|\cdot\|$ là một chuẩn trên không gian $\mathbb{K}^{l\times q}$ tương ứng các chuẩn vectơ trên các không gian $\mathbb{K}^q$ và $\mathbb{K}^l$. Tức là, với mỗi $\Delta \in \mathbb{K}^{l\times q}$, ta có

$$\|\Delta\| = \sup_{x\in\mathbb{K}^q, \|x\|_{\mathbb{K}^q}=1} \|\Delta x\|_{K^l}. \tag{2.8}$$

Định nghĩa 2.1.3. Cho hệ (2.1) là điều khiển được Euclide và $\|\cdot\|$ là một chuẩn trên không gian $\mathbb{K}^{l\times q}$, bán kính điều khiển được Euclide của hệ (2.1) tương ứng với cấu trúc nhiễu dạng (2.6) được xác định bởi

$$\begin{aligned} r^e_{\mathbb{K}}(\underline{A}, B; D, E) = \inf\Big\{ \|\Delta\| : \Delta \in \mathbb{K}^{l\times q} \text{ sao cho} \\ \text{(2.7) không điều khiển được Euclide } \Big\}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Nếu $[\underline{A}, B] + D\Delta E$ là điều khiển được Euclide với mọi $\Delta \in \mathbb{K}^{l\times q}$ thì ta đặt $r^e_{\mathbb{K}}(\underline{A}, B; D, E) = +\infty$.

Một cách tương tự, ta có khái niệm bán kính điều khiển được xấp xỉ.

Định nghĩa 2.1.4. Giả sử hệ tuyến tính có trễ rời rạc (2.1) là điều khiển được xấp xỉ trong không gian Banach $M_2(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ hoặc $\mathbb{R}$ và $\|\cdot\|$ là một chuẩn trên không gian $\mathbb{K}^{l\times q}$. Khi đó, bán kính điều khiển được xấp xỉ của hệ (2.1) tương ứng với nhiễu cấu trúc (2.6) được xác định bởi

$$\begin{aligned} r^a_{\mathbb{K}}(\underline{A}, B; D, E) = \inf\big\{ &\|\Delta\| : \Delta \in \mathbb{K}^{l\times q} \text{ sao cho} \\ &\text{(2.7) không điều khiển được xấp xỉ trong không gian } M_2(\mathbb{K})\big\}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Nếu $[\underline{A}, B] + D\Delta E$ điều khiển được xấp xỉ với mọi $\Delta \in \mathbb{C}^{l\times q}$ thì ta đặt $r^a_{\mathbb{K}}(\underline{A}, B; D, E) = +\infty$.

Như vậy, với mỗi hệ (2.1), ta nhận được hai bán kính điều khiển được Euclide và hai bán kính điều khiển được xấp xỉ thông qua (2.9) và (2.10), một bán kính phức tương ứng với $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ và một bán kính thực khi $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, phụ thuộc vào ma trận nhiễu Δ có các phần tử được nhận các giá trị thực hay phức. Dễ thấy từ định nghĩa rằng bán kính phức là chặn dưới của bán kính thực, tức là $r_{\mathbb{C}} \leq r_{\mathbb{R}}$. Hơn nữa, từ các kết quả của Định lý 1.3.13 và Định lý 1.3.14, ta nhận thấy mối liên quan giữa việc tính các bán kính điều khiển được phức liên quan trực tiếp tới khoảng cách đến tập các ma trận không toàn ánh của một ma trận. Vì vậy, để thiết lập các công thức bán kính điều khiển được của các hệ điều khiển đang xét, ta sử dụng kết quả của Mệnh đề 1.5.6. Bây giờ ta đặt

$$\begin{gathered} W(\lambda) = [P(\lambda), B], \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}, \qquad M = EN, \\ H(\lambda) = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ e^{-h_1\lambda} I_n & 0 \\ \vdots & \vdots \\ e^{-h_k\lambda} I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}, \qquad E(\lambda) = EH(\lambda). \end{gathered} \tag{2.11}$$

Công thức tính bán kính điều khiển được phức cho hệ (2.1) được biểu diễn qua hai định lý dưới đây.

Định lý 2.1.5. *Giả sử hệ tuyến tính có trễ rời rạc* (2.1) *là điều khiển được Euclide và* $\|\cdot\|$ *là một chuẩn trên không gian* $\mathbb{K}^{l\times q}$*. Khi đó, bán kính điều khiển được Euclide của hệ* (2.1) *tương ứng với cấu trúc nhiễu dạng* (2.6) *được tính bởi công thức*

$$r^e_{\mathbb{C}}(\underline{A}, B; D, E) = \frac{1}{\sup_{\lambda\in\mathbb{C}} \|E(\lambda)W(\lambda)^{-1}D\|}, \tag{2.12}$$

ở đó $W(\lambda)^{-1} : \mathbb{K}^n \rightrightarrows \mathbb{K}^{n+m}$ *là toán tử đa trị tuyến tính nghịch đảo của* $W(\lambda)$.

Chứng minh. Giả sử rằng hệ nhiễu (2.7) không điều khiển được Euclide với Δ nào đó. Khi đó, từ Định lý 1.3.13, tồn tại $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ để ma trận phức $\tilde{W}(\lambda_0) = [\tilde{P}(\lambda_0), \tilde{B}_0]$ không toàn ánh, ở đây $\tilde{P}(\lambda_0) = \tilde{A}_0 + e^{-h_1\lambda_0}\tilde{A}_1 + ... + e^{-h_N\lambda_0}A_N$ là ma trận của tựa đa thức đặc trưng của hệ nhiễu (2.7). Từ (2.5) và (2.11), ta có

$$\begin{aligned}
\widetilde{W}(\lambda_0) = [\widetilde{P}(\lambda_0), \widetilde{B}] &= [\widetilde{A}_0, \widetilde{A}_1, \dots, \widetilde{A}_k, \widetilde{B}]H(\lambda_0) - \lambda_0[I_n, 0] \\
&= ([A_0, A_1, \dots, A_k, B] + D\Delta E)H(\lambda_0) - \lambda_0[I_n, 0] \\
&= [A_0, A_1, \dots, A_k, B]H(\lambda_0) - \lambda_0[I_n, 0] + D\Delta E H(\lambda_0) \\
&= [P(\lambda_0), B] + D\Delta E(\lambda_0) = W(\lambda_0) + D\Delta E(\lambda_0).
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Vì $\widetilde{W}(\lambda_0)$ không toàn ánh, từ kết quả của Mệnh đề 1.5.6, ta nhận được

$$\begin{aligned}
\|\Delta\| \geq \operatorname{dist}_{\mathbb{C}}(W(\lambda_0); D, E(\lambda_0)) &= \frac{1}{\|E(\lambda_0)W(\lambda_0)^{-1}D\|} \\
&\geqslant \frac{1}{\sup_{\lambda\in\mathbb{C}} \|E(\lambda)W(\lambda)^{-1}D\|}.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Vì bất đẳng thức trên đúng với mọi $\Delta \in \mathbb{C}^{l\times q}$ sao cho $D\Delta E$ phá vỡ tính điều khiển được Euclide của hệ (2.1) nên từ định nghĩa ta thu được

$$r^e_{\mathbb{C}}(\underline{A}, B; D, E) \geq \frac{1}{\sup_{\lambda\in\mathbb{C}} \|E(\lambda)W(\lambda)^{-1}D\|}. \tag{2.15}$$

Để chứng minh bất đẳng thức ngược lại, với $\epsilon > 0$ đủ bé, tồn tại $\lambda_\epsilon \in \mathbb{C}$ sao cho

$$\|E(\lambda_\epsilon)W(\lambda_\epsilon)^{-1}D\| \geq \sup_{\lambda\in\mathbb{C}} \|E(\lambda)W(\lambda)^{-1}D\| - \epsilon > 0.$$

Vì hệ (2.1) điều khiển được Euclide nên từ Định lý 1.3.13, $W(\lambda_\epsilon) = [P(\lambda_\epsilon), B]$ toàn ánh, do đó theo kết quả của Mệnh đề 1.5.6, tồn tại một ma trận nhiễu Δ_ϵ sao cho

$$\|\Delta_\epsilon\| \leq \frac{1}{\|E(\lambda_\epsilon)W(\lambda_\epsilon)^{-1}D\| - \epsilon}$$

và ma trận nhiễu $\widetilde{W}(\lambda_\epsilon) = W(\lambda_\epsilon) + D\Delta_\epsilon E(\lambda_\epsilon)$ không toàn ánh. Do đó, cũng bởi Định lý 1.3.13, hệ nhiễu (2.7) không điều khiển được Euclide với nhiễu Δ_ϵ. Vì vậy, từ định nghĩa ta có

$$\begin{aligned} r^e_{\mathbb{C}}(\underline{A}, B; D, E) \leq \|\Delta_\epsilon\| &\leq \frac{1}{\|E(\lambda_\epsilon)W(\lambda_\epsilon)^{-1}D\| - \epsilon} \\ &\leq \frac{1}{\sup_{\lambda\in\mathbb{C}} \|E(\lambda)W(\lambda)^{-1}D\| - 2\epsilon}. \end{aligned}$$

Cho $\epsilon \to 0$, ta thu được

$$r^e_{\mathbb{C}}(\underline{A}, B; D, E) \leq \frac{1}{\sup_{\lambda\in\mathbb{C}} \|E(\lambda)W(\lambda)^{-1}D\|}.$$

Điều này kết hợp với (2.14), ta nhận được điều phải chứng minh. □

Nhận xét 2.1.6. Trong trường hợp $A_i = 0$, với mọi $i \in \{1, 2, ..., k\}$ (trong trường hợp này, ta cũng coi $h_i = 0$ với mọi $i \in \{1, 2, ..., k\}$), hệ (2.1) trở thành hệ tuyến tính không có trễ (1.1). Khi đó, ta tính được $P(\lambda) = A_0 - \lambda I_n$ là ma trận đặc trưng của hệ tuyến tính (1.1), và $E(\lambda) = E$. Vì vậy, từ công thức tính bán kính điều khiển được Euclide (2.12), ta thu được kết quả (15) của N.K. Son và D.D. Thuan cho hệ tuyến tính không có trễ (1.1).

Định lý 2.1.7. *Giả sử rằng hệ tuyến tính có trễ rời rạc* (2.1) *là điều khiển được xấp xỉ trên không gian* $M_2(\mathbb{K})$ *và được nhiễu có cấu trúc dạng*

(2.6). *Khi đó, bán kính điều khiển được phức của hệ* (2.1) *được cho bởi công thức*

$$r^a_{\mathbb{C}}(\underline{A}, B; D, E) = \min\left\{\frac{1}{\sup_{\lambda\in\mathbb{C}} \|E(\lambda)W(\lambda)^{-1}D\|}, \frac{1}{\|M[A_k, B]^{-1}D\|}\right\}, \tag{2.16}$$

trong đó các ma trận $W(\lambda), E(\lambda)$ *và* M *được xác định bởi* (2.11).

Chứng minh. Giả sử rằng hệ nhiễu (2.7) với $[\underline{\widetilde{A}}, \widetilde{B}] = [\underline{A}, B] + D\Delta E$ không điều khiển được trên không gian $M_2(\mathbb{K})$ với $\Delta \in \mathbb{C}^{l\times q}$ nào đó. Từ (1.21) thì ma trận *phức* $\widetilde{W}(\lambda_0) = [\widetilde{P}(\lambda_0), \widetilde{B}]$ không toàn ánh với $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ nào đó, trong đó $\widetilde{P}(\lambda_0) = \widetilde{A}_0 + e^{-h_1\lambda_0}\widetilde{A}_1 + \ldots + e^{-h_k\lambda_0}\widetilde{A}_k - \lambda_0 I_n$ là ma trận của tựa đa thức đặc trưng của hệ nhiễu (2.7), hoặc ma trận $[\widetilde{A}_k, \widetilde{B}]$ không toàn ánh.

Nếu $\widetilde{W}(\lambda_0)$ không toàn ánh thì bởi các định nghĩa (2.5) và (2.11) ta có phân tích

$$\begin{aligned}
\widetilde{W}(\lambda_0) &= [\widetilde{P}(\lambda_0), \widetilde{B}] = [\widetilde{A}_0, \widetilde{A}_1, \ldots, \widetilde{A}_k, \widetilde{B}]H(\lambda_0) - \lambda_0[I_n, 0]\\
&= ([A_0, A_1, \ldots, A_k, B] + D\Delta E)H(\lambda_0) - \lambda_0[I_n, 0]\\
&= [A_0, A_1, \ldots, A_k, B]H(\lambda_0) - \lambda_0[I_n, 0] + D\Delta E H(\lambda_0)\\
&= [P(\lambda_0), B] + D\Delta E(\lambda_0) = W(\lambda_0) + D\Delta E(\lambda_0).
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Từ (1.37), ta nhận được

$$\begin{aligned}
\|\Delta\| \geq \mathrm{dist}_{\mathbb{C}}(W(\lambda_0); D, E(\lambda_0)) &= \frac{1}{\|E(\lambda_0)W(\lambda_0)^{-1}D\|}\\
&\geqslant \frac{1}{\sup_{\lambda\in\mathbb{C}} \|E(\lambda)W(\lambda)^{-1}D\|}.
\end{aligned}$$

Nếu $[\widetilde{A}_k, \widetilde{B}]$ không toàn ánh, từ định nghĩa (2.11) ta có thể viết lại như sau

$$\begin{aligned}
[\widetilde{A}_k, \widetilde{B}] &= [\widetilde{A}_0, \widetilde{A}_1, \ldots, \widetilde{A}_k, \widetilde{B}]N\\
&= ([A_0, A_1, \ldots, A_k, B] + D\Delta E)N\\
&= [A_k, B] + D\Delta M.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Vì vậy, từ (1.37), ta nhận được

$$\|\Delta\| \geq \operatorname{dist}_{\mathbb{C}}([A_k, B]; D, M) = \frac{1}{\|M[A_k, B]^{-1}D\|}.$$

Điều này kéo theo

$$\|\Delta\| \geq \min\left\{\frac{1}{\sup_{\lambda\in\mathbb{C}}\|E(\lambda)W(\lambda)^{-1}D\|}, \frac{1}{\|M[A_k, B]^{-1}D\|}\right\}.$$

Vì bất đẳng thức trên đúng với mọi $\Delta \in \mathbb{C}^{l\times q}$ sao cho $D\Delta E$ phá vỡ tính điều khiển được xấp xỉ của hệ (2.1) nên từ định nghĩa ta thu được

$$r^a_{\mathbb{C}}(\underline{A}, B; D, E) \geq \min\left\{\frac{1}{\sup_{\lambda\in\mathbb{C}}\|E(\lambda)W(\lambda)^{-1}D\|}, \frac{1}{\|M[A_k, B]^{-1}D\|}\right\}. \tag{2.19}$$

Để chứng minh bất đẳng thức ngược lại, với $\epsilon > 0$ đủ bé, tồn tại $\lambda_\epsilon \in \mathbb{C}$ sao cho

$$\|E(\lambda_\epsilon)W(\lambda_\epsilon)^{-1}D\| \geq \sup_{\lambda\in\mathbb{C}}\|E(\lambda)W(\lambda)^{-1}D\| - \epsilon > 0.$$

Vì hệ (2.1) điều khiển được xấp xỉ nên từ (1.21), $W(\lambda_\epsilon) = [P(\lambda_\epsilon), B]$ toàn ánh, do đó bởi (1.37) tồn tại một ma trận nhiễu Δ_ϵ sao cho

$$\|\Delta_\epsilon\| \leq \frac{1}{\|E(\lambda_\epsilon)W(\lambda_\epsilon)^{-1}D\| - \epsilon}$$

và ma trận nhiễu $\widetilde{W}(\lambda_\epsilon) = W(\lambda_\epsilon) + D\Delta_\epsilon E(\lambda_\epsilon)$ không toàn ánh. Do đó, cũng bởi (1.21), hệ nhiễu (2.7) không điều khiển được xấp xỉ trong $M_2(\mathbb{K})$ với các nhiễu Δ_ϵ. Vì vậy, từ định nghĩa ta có

$$\begin{aligned} r^a_{\mathbb{C}}(\underline{A}, B; D, E) \leq \|\Delta_\epsilon\| &\leq \frac{1}{\|E(\lambda_\epsilon)W(\lambda_\epsilon)^{-1}D\| - \epsilon} \\ &\leq \frac{1}{\sup_{\lambda\in\mathbb{C}}\|E(\lambda_\epsilon)W(\lambda_\epsilon)^{-1}D\| - 2\epsilon}. \end{aligned}$$

Cho $\epsilon \to 0$, ta thu được

$$r^a_{\mathbb{C}}(\underline{A}, B; D, E) \leq \frac{1}{\sup_{\lambda\in\mathbb{C}}\|E(\lambda)W(\lambda)^{-1}D\|}.$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng đánh giá được

$$r^a_{\mathbb{C}}(\underline{A}, B; D, E) \leq \frac{1}{\|M[A_k, B]^{-1}D\|},$$

và do đó

$$r^a_{\mathbb{C}}(\underline{A}, B; D, E) \leq \min\left\{\frac{1}{\sup_{\lambda\in\mathbb{C}} \|E(\lambda)W(\lambda)^{-1}D\|}, \frac{1}{\|M[A_k, B]^{-1}D\|}\right\}.$$

Định lý đã được chứng minh. □

Đáng chú ý là các định lý trên được chứng minh dưới giả thiết chung là các chuẩn của các ma trận được xem xét là các chuẩn toán tử sinh bởi các chuẩn bất kì trên các không gian vectơ tương ứng. Công thức (2.16) đưa ra để tính bán kính điều khiển được xấp xỉ. Tuy nhiên, việc tính toán theo công thức này không dễ dàng chút nào vì công thức này liên quan tới việc tính các chuẩn của các toán tử đa trị tuyến tính $E(\lambda)W(\lambda)^{-1}D$ và $M[A_k, B]^{-1}D$. Đây không phải là một biểu diễn tường minh. Sau đây chúng tôi đưa ra công thức tính tốt hơn trong trường hợp đặc biệt khi các chuẩn của các ma trận được xem xét là chuẩn phổ, tức là chuẩn toán tử được sinh ra bởi các chuẩn vectơ Euclide $\|x\| = \sqrt{x^*x}$. Để chứng minh công thức này, chúng tôi sử dụng đến khái niệm giá trị kì dị suy rộng nhỏ nhất của một cặp ma trận (xem trong [80]) và bổ đề dưới đây:

Bổ đề 2.1.8. *Cho $Q \in \mathbb{K}^{n\times m}$ là ma trận toàn ánh, tức là* rank $Q = n$, *và các ma trận $D \in \mathbb{K}^{n\times l}$, $E \in \mathbb{K}^{q\times m}$. Giả sử rằng ma trận E có hạng bằng số cột và tất cả các không gian tuyến tính được trang bị bởi các chuẩn Euclide. Khi đó, khoảng cách có cấu trúc từ Q tới tập các ma trận không toàn ánh với các nhiễu phức được tính bởi công thức*

$$\operatorname{dist}_{\mathbb{C}}(Q; D, E) = \frac{1}{\|EQ^{-1}D\|} = \inf_{\|u^*\|=1} \frac{\|E^{*\dagger}Q^*(u^*)\|}{\|D^*(u^*)\|} = \sigma_{\min}(E^{*\dagger}Q^*, D^*), \tag{2.20}$$

trong đó $E^{*\dagger}$ kí hiệu là ma trận giả nghịch Moore-Penrose của ma trận E^* và $\sigma_{\min}(H_1, H_2)$ kí hiệu là giá trị kì dị suy rộng nhỏ nhất của một cặp ma trận (H_1, H_2).

Chứng minh. Vì Q là ma trận toàn ánh, Q^{*-1} là ánh xạ đơn trị. Vì vậy, từ (1.32), ta có

$$\frac{1}{\|EQ^{-1}D\|} = \frac{1}{\|D^*Q^{*-1}E^*\|} = \inf_{0\neq x^*} \frac{\|x^*\|}{\|D^*Q^{*-1}E^*(x^*)\|}.$$

Với mỗi $x^* \neq 0$ sao cho $E^*(x^*) \in \operatorname{dom} Q^{*-1}$, ta đặt $Q^{*-1}E^*(x^*) = u^*$. Điều này dẫn đến $E^*(x^*) = Q^*(u^*)$ và $x^* \in E^{*-1}Q^*(u^*)$. Vì E có hạng bằng số cột nên E^* có hạng bằng số dòng và ma trận Moore-Penrose của ma trận E là $E^\dagger = (E^*E)^{-1}E^*$. Từ đây ta nhận được $E^\dagger E = I_m$. Vì vậy, $E^*((E^\dagger)^*(Q^*(u^*))) = Q^*(u^*)E^\dagger E = Q^*(u^*)$. Điều này dẫn đến $(E^\dagger)^*(Q^*(u^*)) \in E^{*-1}Q^*(u^*)$.

Mặt khác, vì $Q^*(u^*) = E^*(x^*)$ nên $u^*Q = x^*E$ hay $Q^*u = E^*x$. Hơn nữa, tất cả các không gian tuyến tính được trang bị bởi các chuẩn Euclide, từ (1.36), kéo theo rằng $\|x^*\| = \|x\| \geq \|(E^*)^\dagger Q^*u\| = \|u^*QE^\dagger\| = \|(E^\dagger)^*(Q^*(u^*))\|$. Do đó, ta nhận được

$$\begin{aligned}
\inf_{0\neq x^*} \frac{\|x^*\|}{\|D^*Q^{*-1}E^*(x^*)\|} &\geq \inf_{0\neq u^*} \frac{\|(E^\dagger)^*(Q^*(u^*))\|}{\|D^*(u^*)\|} \\
&= \inf_{0\neq u^*} \frac{\|u^*QE^\dagger\|}{\|u^*D\|} \\
&= \inf_{0\neq u} \frac{\|E^{\dagger *}Q^*u\|}{\|D^*u\|} \\
&= \sigma_{\min}(E^{*\dagger}Q^*, D^*).
\end{aligned}$$

Để chứng minh bất đẳng thức ngược lại, với mỗi $u^* \neq 0$, ta đặt $x^* = u^*QE^\dagger = (E^\dagger)^*(Q^*(u^*))$ thì $E^*(x^*) = u^*QE^\dagger E = Q^*(u^*)$, mà Q^{*-1} là ánh xạ đơn trị, do vậy $u^* = Q^{*-1}E^*(x^*)$. Điều này dẫn đến $x^* \neq 0$ và $D^*(u^*) = D^*Q^{*-1}E^*(x^*)$. Vì vậy

$$\begin{aligned}
\inf_{0\neq u^*} \frac{\|E^{*\dagger}Q^*(u^*)\|}{\|D^*(u^*)\|} &\geq \inf_{x^*=E^{*\dagger}Q^*(u^*),u^*\neq 0} \frac{\|x^*\|}{\|D^*Q^{*-1}E^*(x^*)\|} \\
&\geq \inf_{0\neq x^*} \frac{\|x^*\|}{\|D^*Q^{*-1}E^*(x^*)\|}.
\end{aligned}$$

Cuối cùng ta nhận được

$$\frac{1}{\|EQ^{-1}D\|} = \inf_{0\neq u^*} \frac{\|E^{*\dagger}Q^*(u^*)\|}{\|D^*(u^*)\|} = \inf_{\|u^*\|=1} \frac{\|E^{*\dagger}Q^*(u^*)\|}{\|D^*(u^*)\|} = \sigma_{\min}(E^{*\dagger}Q^*, D^*).$$

Bất đẳng thức cuối nhận được từ định nghĩa của giá trị kì dị suy rộng nhỏ nhất của một cặp ma trận khi các chuẩn ở đây là chuẩn Euclide (xem [80]). Chứng minh đã được hoàn thành. □

Nhận xét 2.1.9. Trong trường hợp E có hạng nhỏ hơn số cột, bằng cách chứng minh tương tự, ta cũng nhận được

$$\frac{1}{\|EQ^{-1}D\|} = \inf_{u^* \in S^*} \frac{\|E^{*\dagger}Q^*(u^*)\|}{\|D^*(u^*)\|},$$

ở đây $S^* = \{u^* : \|u^*\| = 1, Q^*(u^*) \in \operatorname{Im}(E^*)\}$.

Định lý dưới đây chỉ ra rằng khi ma trận cấu trúc E có hạng bằng số cột thì bán kính điều khiển được Euclide phức và bán kính điều khiển được xấp xỉ phức trong không gian Banach $M_2(\mathbb{K})$ của hệ (2.1) là bằng nhau và có thể tính được thông qua các giá trị kì dị suy rộng.

Định lý 2.1.10. *Giả sử rằng ma trận cấu trúc E có hạng bằng số cột và các các chuẩn toán tử được sinh ra bởi các chuẩn vectơ Euclide. Khi đó, ta có*

$$r^a_{\mathbb{C}}(\underline{A}, B; D, E) = r^e_{\mathbb{C}}(\underline{A}, B; D, E) = \inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \sigma_{\min}(E(\lambda)^{*\dagger}W(\lambda)^*, D^*). \quad (2.21)$$

Chứng minh. Vì E có hạng bằng số cột nên $E(\lambda)$ cũng có hạng bằng số cột với mọi $\lambda \in \mathbb{C}$. Từ Định lý 2.1.7 và Bổ đề 2.1.8, ta nhận được

$$r^a_{\mathbb{C}}(\underline{A}, B; D, E) = \min\left\{\inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \sigma_{\min}(E(\lambda)^{*\dagger}W(\lambda)^*, D^*), \sigma_{\min}(M^{*\dagger}[A_k, B]^*, D^*)\right\},$$

và

$$r^e_{\mathbb{C}}(\underline{A}, B; D, E) = \inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \sigma_{\min}(E(\lambda)^{*\dagger}W(\lambda)^*, D^*).$$

Đặt $\Phi(\lambda) = \begin{bmatrix} e^{h_k\lambda}I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$, ta có

$$E(\lambda)^{*\dagger}W(\lambda)^* = (EH(\lambda))^{*\dagger}W(\lambda)^* = (EH(\lambda)\Phi(\lambda))^{*\dagger}\Phi(\lambda)^*W(\lambda)^*.$$

Dễ thấy rằng

$$\lim_{\operatorname{Re}\lambda \to -\infty} \Phi(\lambda)^*W(\lambda)^* = \lim_{\operatorname{Re}\lambda \to -\infty} [e^{h_k\lambda}P(\lambda), B]^* = [A_k, B]^*.$$

Hơn nữa,

$$\lim_{\operatorname{Re}\lambda\to-\infty} EH(\lambda)\Phi(\lambda) = \lim_{\operatorname{Re}\lambda\to-\infty} E\begin{bmatrix} e^{h_k\lambda}I_n & 0 \\ e^{(h_k-h_1)\lambda}I_n & 0 \\ \vdots & \vdots \\ I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = EN = M.$$

Do đó,

$$\lim_{\operatorname{Re}\lambda\to-\infty} E(\lambda)^{*\dagger}W(\lambda)^* = M^{*\dagger}[A_k, B]^*.$$

Điều này dẫn đến

$$\begin{aligned} \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \sigma_{\min}(E(\lambda)^{*\dagger}W(\lambda)^*, D^*) &\le \lim_{\operatorname{Re}\lambda\to-\infty} \sigma_{\min}(E(\lambda)^{*\dagger}W(\lambda)^*, D^*) \\ &= \sigma_{\min}(M^{*\dagger}[A_k, B]^*, D^*). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Vì vậy, ta thu được

$$r^a_{\mathbb{C}}(\underline{A}, B; D, E) = r^e_{\mathbb{C}}(\underline{A}, B; D, E) = \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \sigma_{\min}(E(\lambda)^{*\dagger}W(\lambda)^*, D^*).$$

□

Đặc biệt, khi các ma trận của hệ (2.1) được nhiễu tách không cấu trúc dạng

$$\begin{aligned} A_i &\rightsquigarrow A_i + \Delta_{A_i},\ i = 0, 1, \dots, k, \\ B &\rightsquigarrow B + \Delta_B, \end{aligned} \tag{2.23}$$

ta nhận được hệ quả dưới đây.

Hệ quả 2.1.11. *Giả sử rằng hệ tuyến tính có trễ rời rạc* (2.1) *là điều khiển được xấp xỉ trong không gian* $M_2(\mathbb{K})$ *và các ma trận được nhiễu tách không có cấu trúc dạng* (2.23). *Khi đó, các bán kính điều khiển được phức được tính bởi công thức*

$$r^a_{\mathbb{C}}(\underline{A}, B) = r^e_{\mathbb{C}}(\underline{A}, B) = \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \sigma_{\min}(H(\lambda)^{*\dagger}W(\lambda)^*).$$

Chứng minh. Mô hình nhiễu không cấu trúc (2.23) có thể viết ở dạng (2.6) bằng cách đặt $\Delta = [\Delta_{A_0}, \Delta_{A_1}, \ldots, \Delta_{A_k}, \Delta_B] \in \mathbb{C}^{n\times(n(k+1)+m)}$, $D = I_n, E = I_{n(k+1)+m}$. Trong trường hợp này, E là ma trận không suy biến, khẳng định của hệ quả ngay lập tức được suy ra từ Định lý 2.1.10. $\square$

Tiếp theo, chúng ta xét một trường hợp đặc biệt của các nhiễu cấu trúc tách dạng

$$\begin{aligned} &B \rightsquigarrow \widetilde{B} = B + D_B\Delta_B E_B, \\ &A_i \rightsquigarrow \widetilde{A}_i = A_i + D_i\Delta_{A_i}E_i, \text{ với mọi } i = 0, 1, , \ldots, k, \end{aligned} \tag{2.24}$$

trong đó $D_i \in \mathbb{K}^{n\times l_i}$, với mọi $i = 1, ..., k$, $D_B \in \mathbb{K}^{n\times l_{k+1}}$, $E_i \in \mathbb{K}^{q_i\times n}$, $E_B \in \mathbb{K}^{q_{k+1}\times m}$ là các ma trận cho trước và $\Delta_B \in \mathbb{C}^{l\times q_{k+1}}, \Delta_{A_i} \in \mathbb{C}^{l\times q_i}$ là các ma trận chưa biết.

Chú ý rằng, trong trường hợp tổng quát, cấu trúc nhiễu dạng (2.24) không đưa được về cấu trúc nhiễu dạng (2.6). Vì vậy, để sử dụng được các kết quả của Định lý 2.1.7 ta xét trường hợp đặc biệt của cấu trúc nhiễu tách (2.24) mà ở đó $D_i = D_B = D \in \mathbb{K}^{n\times l}$. Khi đó, cấu trúc nhiễu (2.24) được viết dưới cấu trúc nhiễu dạng

$$[A_0, A_1, \ldots, A_k, B] \rightsquigarrow [\widetilde{A}_0, \widetilde{A}_1, \ldots, \widetilde{A}_k, \widetilde{B}] = [A_0, A_1, \ldots, A_k, B] + D\Delta E,$$

với $E = \operatorname{diag}(E_0, E_1, \ldots, E_k, E_B) \in \mathbb{K}^{q\times(n(k+1)+m)}, q = \sum_{i=0}^{k+1} q_i$ và ma trận nhiễu

$$\Delta = [\Delta_{A_0}, \Delta_{A_1}, \ldots, \Delta_{A_k}, \Delta_B] \in \mathbb{K}^{l\times q}.$$

Hơn nữa, ta có thể tính cụ thể các ma trận trong trường hợp này như sau:

$$E(\lambda) = EH(\lambda) = \begin{bmatrix} E_0 & 0 \\ e^{-h_1\lambda}E_1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ e^{-h_k\lambda}E_k & 0 \\ 0 & E_B \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ E_k & 0 \\ 0 & E_B \end{bmatrix}. \tag{2.25}$$

Rõ ràng, nếu các ma trận E_k, E_B có hạng bằng số cột thì $E(\lambda)$ có hạng bằng số cột với mọi $\lambda \in \mathbb{C}$. Do đó, từ kết quả của Định lý 2.1.10, ta nhận được định lý sau:

Định lý 2.1.12. *Giả sử rằng hệ tuyến tính có trễ rời rạc* (2.1) *là điều khiển được xấp xỉ trong không gian* $M_2(\mathbb{K})$ *và các ma trận của hệ được nhiễu có cấu trúc tách dạng* (2.24)*, trong đó* $D_i = D_B = D$ *với mọi* i*,* E_k, E_B *có hạng bằng số cột. Khi đó,*

$$r^a_{\mathbb{C}}(\underline{A}, B; D, E) = r^e_{\mathbb{C}}(\underline{A}, B; D, E) = \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \sigma_{\min}(E(\lambda)^{*\dagger} W(\lambda)^*, D^*), \quad (2.26)$$

với $E(\lambda)$ *được xác định bởi hệ thức* (2.25).

Bây giờ, chúng ta xét hệ (2.1) dưới tác động của các nhiễu dạng

$$B \rightsquigarrow \widetilde{B} = B + \Delta_B,\ A_i \rightsquigarrow \widetilde{A}_i = A_i + \alpha_i \Delta_{A_i}, \quad \text{với mọi } i \in \overline{0, k}, \quad (2.27)$$

ở đây $\alpha_i \in \mathbb{C}, i = 0, 1, \dots, k$, là các tham số vô hướng cho trước, $\alpha_k \neq 0$, và $\Delta_{A_i} \in \mathbb{C}^{n\times n}, i = 0, 1, \dots, k, \Delta_B \in \mathbb{C}^{n\times m}$ là các ma trận chưa biết. Khi đó, chúng ta có thể sử dụng Định lý 2.1.12 để tính bán kính điều khiển được xấp xỉ phức của hệ (2.1) dưới các nhiễu có cấu trúc dạng (2.27). Đặt

$$\mu(\lambda) = |\alpha_0|^2 + \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2 |e^{-2h_i\lambda}|. \quad (2.28)$$

Hệ quả 2.1.13. *Giả sử rằng hệ tuyến tính có trễ rời rạc* (2.1) *là điều khiển được xấp xỉ trong không gian* $M_2(\mathbb{K})$ *và các không gian vectơ được trang bị các chuẩn Euclide. Khi đó, bán kính điều khiển được phức của hệ* (2.1) *tương ứng với các nhiễu tách cấu trúc dạng* (2.27) *thỏa mãn*

$$r^a_{\mathbb{C}}(\underline{A}, B; D, E) = r^e_{\mathbb{C}}(\underline{A}, B; D, E) = \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \sigma_{\min}\left(\left[\frac{P(\lambda)}{\sqrt{\mu(\lambda)}}, B\right]\right). \quad (2.29)$$

Chứng minh. Ta nhận thấy rằng, trong mô hình (2.27) thì

$$D_{A_i} = D_B = I_n, E_{A_i} = \alpha_i I_n, E_B = I_m, \text{ với mọi } i = 0, 1, \dots, k.$$

Ta nhận được $\widehat{D} = I_n, \widehat{E} = \operatorname{diag}(\alpha_0 I_n, \alpha_1 I_n, \ldots, \alpha_k I_n, I_m)$, và theo (2.25)

$$\widehat{E}(\lambda) = \begin{bmatrix} \alpha_0 I_n & 0 \\ \alpha_1 e^{-h_1\lambda} I_n & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_k e^{-h_k\lambda} I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix},$$

$$\widehat{E}(\lambda)^{*\dagger} = \widehat{E}(\lambda)(\widehat{E}(\lambda)^*\widehat{E}(\lambda))^{-1} = \begin{bmatrix} \mu(\lambda)^{-1}\alpha_0 I_n & 0 \\ \mu(\lambda)^{-1}\alpha_1 e^{-h_1\lambda} I_n & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \mu(\lambda)^{-1}\alpha_k e^{-h_k\lambda} I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}.$$

Vì các không gian vectơ được trang bị chuẩn Euclide nên ta dễ dàng nhận được:

$$\left\| \widehat{E}(\lambda)^{*\dagger} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} \mu(\lambda)^{-1/2} I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|, \text{ với mọi } x \in \mathbb{C}^n, y \in \mathbb{C}^m.$$

Do đó

$$\begin{aligned} \sigma_{\min}(\widehat{E}(\lambda)^{*\dagger} W(\lambda)^*, \widehat{D}^*) &= \sigma_{\min}\left(\begin{bmatrix} \mu(\lambda)^{-1/2} I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} W(\lambda)^*, I_n \right) \\ &= \sigma_{\min}\left(\begin{bmatrix} \mu(\lambda)^{-1/2} I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} W(\lambda)^* \right) \\ &= \sigma_{\min}\left(W(\lambda) \begin{bmatrix} \mu(\lambda)^{-1/2} I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \right) \\ &= \sigma_{\min}\left(\left[\frac{P(\lambda)}{\sqrt{\mu(\lambda)}}, B \right] \right). \end{aligned}$$

Vì $\alpha_k \neq 0$ nên $\widehat{E}(\lambda)$ có hạng bằng số cột với mọi $\lambda \in \mathbb{C}$. Do đó, từ Định lý 2.1.12, ta thu được công thức (2.29). $\square$

Ví dụ 2.1.14. Ta xét hệ điều khiển có trễ

$$x'(t) = A_0x(t) + A_1x(t-1) + A_2x(t-2) + Bu(t), \tag{2.30}$$

trong đó $A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Ta có

$$W(\lambda) = [P(\lambda), B] = \begin{bmatrix} 1 + e^{-\lambda} + e^{-2\lambda} - \lambda & 1 + e^{-\lambda} + e^{-2\lambda} & 1 \\ 1 - e^{-\lambda} + e^{-2\lambda} & 1 + e^{-\lambda} - e^{-2\lambda} - \lambda & 1 \end{bmatrix}.$$

Ta dễ dàng kiểm tra được rank $W(\lambda) = 2$ với mọi $\lambda \in \mathbb{C}$ và rank$[A_2, B] = 2$. Do đó, theo kết quả của Định lý 1.3.14, hệ (2.30) điều khiển được xấp xỉ được. Giả sử rằng các ma trận điều khiển $[A_0, A_1, A_2, B]$ được nhiễu dưới các nhiễu cấu trúc dạng

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow$$
$$\begin{bmatrix} 1+\delta_1 & 1+\delta_1 & 1 & 1+\delta_2 & 1+\delta_2 & 1 & 1+\delta_2 \\ 1+2\delta_1 & 1+2\delta_1 & -1 & 1+2\delta_2 & 1+2\delta_2 & -1 & 1+2\delta_2 \end{bmatrix},$$

trong đó $\delta_i \in \mathbb{C}, i \in \{1, 2\}$ là các tham số nhiễu. Mô hình nhiễu ở trên có thể biểu diễn

$$[A_0, A_1, A_2, B] \rightsquigarrow [A_0, A_1, A_2, B] + D\Delta E,$$

với $D = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ và $\Delta = [\delta_1 \ \delta_2]$. Điều này kéo theo $E(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ e^{-2\lambda} & e^{-\lambda} & 1 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ta có, với $v \in \mathbb{C}$,

$$E(\lambda)W(\lambda)^{-1}D(v) = E(\lambda)W(\lambda)^{-1}\begin{pmatrix} v \\ 2v \end{pmatrix}$$

$$= \left\{ E(\lambda)\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} (1 + e^{-\lambda} + e^{-2\lambda} - \lambda)p + (1 + e^{-\lambda} + e^{-2\lambda})q + r = v, \\ (1 - e^{-\lambda} + e^{-2\lambda})p + (1 + e^{-\lambda} - e^{-2\lambda} - \lambda)q + r = 2v \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} p + q \\ e^{-2\lambda}p + e^{-\lambda}q + r \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} (1 + e^{-\lambda} + e^{-2\lambda} - \lambda)p + (1 + e^{-\lambda} + e^{-2\lambda})q + r = v, \\ (2 + 2e^{-2\lambda} - \lambda)p + (2 + 2e^{-\lambda} - \lambda)q + 2r = 3v \end{matrix} \right\}.$$

Vì vậy, với mỗi vectơ $v \in \mathbb{C}$, bài toán tính $d(0, E(\lambda)W(\lambda)^{-1}D(v))$ được đưa về bài toán tính khoảng cách từ gốc tọa O tới đường thẳng trong không gian $\mathbb{C}^2$ có phương trình $(2-\lambda)x_1 + 2x_2 = 3v$, với

$$x_1 = p + q, \qquad x_2 = e^{-2\lambda}p + e^{-\lambda}q + r.$$

Trên không gian $\mathbb{C}^2$, ta xét các chuẩn $\|\cdot\|_\infty$. Khi đó, ta có thể tính được

$$3|v| \le |2-\lambda||x_1| + 2|x_2| \le (|2-\lambda|+2)\max\{|x_1|, |x_2|\} = (|2-\lambda|+2)\|\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\|_\infty.$$

Điều này kéo theo

$$\|\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\|_\infty \ge \frac{3|v|}{|2-\lambda|+2}.$$

Đẳng thức xảy ra nếu $x_2 = \dfrac{3v}{|2-\lambda|+2}$ và $x_1 = e^{i\varphi}x_2$, ở đó φ được chọn sao cho $(2-\lambda)e^{i\varphi} = |2-\lambda|$. Vì thế,

$$\begin{aligned}\|E(\lambda)W(\lambda)^{-1}D\|_\infty &= \sup_{|v|=1} d\big(0, E(\lambda)W(\lambda)^{-1}D(v)\big) \\ &= \frac{3}{|2-\lambda|+2}.\end{aligned}$$

Hơn nữa, dễ thấy rằng

$$\begin{aligned} M[A_2, B]^{-1}D(v) &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ p+r \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} p+q+r = v, \\ p-q+r = 2v \end{matrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ p+r \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} p+q+r = v, \\ 2(p+r) = 3v \end{matrix} \right\}. \end{aligned}$$

Vì vậy, $\|M[A_2, B]^{-1}D\| = \dfrac{3}{2}$. Do đó, từ Định lý 2.1.7, ta nhận được

$$r^a_{\mathbb{C}}(A_0, A_1, A_2, B; D, E) = r^e_{\mathbb{C}}(A_0, A_1, A_2, B; D, E) = \frac{2}{3}.$$

2.2 Bán kính điều khiển được thực

Trong Mục 2.1, chúng tôi đã thiết lập công thức tính bán kính điều khiển được phức cho hệ (2.1) trong không gian trạng thái $M_2(\mathbb{K}) =$

$\mathbb{K}^n \times L_2([-h_k, 0], \mathbb{K})$ (với $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ hoặc $\mathbb{R}$), trong đó tất cả các ma trận A_i, B của hệ và các ma trận cấu trúc D, E được giả thiết có các hệ số trong trường $\mathbb{K}$ nhưng ma trận nhiễu Δ có các phần tử trên trường số phức. Trong phần này, chúng tôi đưa ra những đánh giá để đo sự bền vững của tính điều khiển được khi các phần tử của tất cả các ma trận của hệ (2.1) là thực. Một cách rất tự nhiên, lớp các nhiễu thực $\Delta \in \mathbb{R}^{l\times q}$ được nghiên cứu và khái niệm bán kính điều khiển được thực $r_{\mathbb{R}}$ sẽ đóng vai trò quan trọng trong trường hợp này.

Bây giờ, ta giả sử rằng tất cả $A_i, i = 0, \ldots, k, B$ của hệ (2.1) và các ma trận cấu trúc D, E trong cấu trúc nhiễu (2.6) là thực. Chúng ta sẽ đưa ra một số công thức với các đánh giá và tính toán bán kính điều khiển thực trong không gian $M_2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \times L_2([-h_k, 0], \mathbb{R}^n)$ của hệ (2.1). Trước tiên, ta cần chứng minh mệnh đề sau:

Mệnh đề 2.2.1. *Giả sử rằng $Q \in \mathbb{R}^{n\times m}$ là ma trận toàn ánh và $D \in \mathbb{R}^{n\times l}, E \in \mathbb{R}^{q\times m}$ là hai ma trận cho trước. Khi đó, tồn tại ma trận nhiễu $\Delta \in \mathbb{R}^{l\times q}$ có hạng bằng một sao cho $Q + D\Delta E$ không toàn ánh và*

$$\|\Delta\| = \frac{1}{\|EQ^{-1}D\|}.$$

Chứng minh. Vì Q là ma trận toàn ánh nên Q^{*-1} là toán tử tuyến tính đơn trị. Do đó, $D^*Q^{*-1}E^*$ là toán tử tuyến tính từ $(\mathbb{R}^q)^*$ tới $(\mathbb{R}^l)^*$. Vì vậy, tồn tại $v^* \in (\mathbb{R}^q)^* : \|v^*\| = 1, v^* \in \operatorname{dom}(D^*Q^{*-1}E^*)$ sao cho

$$\|D^*Q^{*-1}E^*\| = \|(D^*Q^{*-1}E^*)(v^*)\| = \|EQ^{-1}D\| \neq 0.$$

Đẳng thức cuối cùng được suy ra từ (1.32). Đặt $u^* = -Q^{*-1}(E^*(v^*))$, ta có $u^* \neq 0$ và do đó $D^*(u^*) = -(D^*Q^{*-1}E^*)(v^*) \neq 0$. Theo định lý Hahn-Banach, tồn tại $h \in \mathbb{R}^l$ sao cho $\|h\| = 1, (D^*(u^*))h = \|D^*(u^*)\|$. Do vậy, ta có thể xác định được nhiễu $\Delta \in \mathbb{R}^{l\times q}$ có hạng bằng một bằng cách đặt

$$\Delta = \frac{1}{\|D^*(u^*)\|} hv^*.$$

Khi đó, dễ thấy rằng $\|\Delta\| \leq \|D^*(u^*)\|^{-1}$. Hơn nữa, ta có $D^*(u^*)\Delta = v^*$. Điều này kéo theo rằng $\|\Delta\| \geq \|D^*(u^*)\|^{-1}$. Vì vậy, ta nhận được

$$\|\Delta\| = \frac{1}{\|D^*(u^*)\|} = \frac{1}{\|(D^*Q^{*-1}E^*)(v^*)\|} = \frac{1}{\|D^*Q^{*-1}E^*\|} = \frac{1}{\|EQ^{-1}D\|}.$$

Mặt khác, vì

$$(E^*\Delta^*D^*)(u^*) = E^*(v^*) = -Q^*(u^*)$$

nên $Q^*(u^*)+(E^*\Delta^*D^*)(u^*) = 0$, với $u^* \neq 0$, điều này chỉ ra rằng ma trận nhiễu $Q + D\Delta E$ không toàn ánh. Chứng minh đã được hoàn thành. $\square$

Định lý 2.2.2. *Cho $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Giả sử rằng hệ tuyến tính có trễ rời rạc* (2.1) *là điều khiển được xấp xỉ trong không gian Banach $M_2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \times L_2([-h_k, 0], \mathbb{R}^n)$ và được nhiễu có cấu trúc nhiễu dạng* (2.6) *với các ma trận nhiễu thực $D \in \mathbb{R}^{n\times l}, E \in \mathbb{R}^{q\times(n(k+1)+m)}$. Khi đó, ta có các đánh giá với bán kính điều khiển được xấp xỉ thực của hệ* (2.1)*:*

$$\begin{aligned} r^a_{\mathbb{C}}(\underline{A}, B; D, E) &\leq r^a_{\mathbb{R}}(\underline{A}, B; D, E) \\ &\leq \min\left\{\frac{1}{\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \|E(\lambda)W(\lambda)^{-1}D\|}, \frac{1}{\|M[A_k, B]^{-1}D\|}\right\}, \end{aligned} \tag{2.31}$$

trong đó các ma trận $W(\lambda), E(\lambda), M$ được xác định trong (2.11)*.*

Chứng minh. Từ Định nghĩa 2.1.3 và Định nghĩa 2.1.4, ngay lập tức ta có được vế trái của (2.31). Vì hệ (2.1) điều khiển được xấp xỉ trong không gian $M_2(\mathbb{R})$ nên từ (1.21) và Mệnh đề 2.2.1, ta có với mỗi $\lambda \in \mathbb{R}$, tồn tại một ma trận nhiễu thực có hạng bằng một Δ_λ sao cho

$$\|\Delta_\lambda\| = \frac{1}{\|E(\lambda)W(\lambda)^{-1}D\|}, \qquad \operatorname{rank}[\widetilde{P}(\lambda), \widetilde{B}] < n,$$

và tồn tại một nhiễu thực Δ_0 sao cho

$$\|\Delta_0\| = \frac{1}{\|M[A_k, B]^{-1}D\|}, \quad \text{và} \quad \operatorname{rank}[\widetilde{A}_k, \widetilde{B}] < n$$

(trong đó $\widetilde{P}(\lambda)$ là ma trận của tựa đa thức đặc trưng của hệ (2.7) và $\widetilde{A}_k, \widetilde{B}$ được xác định bởi (2.6), với $\Delta = \Delta_\lambda$ và $\Delta = \Delta_0$, tương ứng). Vì vậy, từ Định nghĩa 2.1.3, ta nhận được

$$r^a_{\mathbb{R}}(\underline{A}, B; D, E) \leq \min\{\inf_{\lambda\in\mathbb{R}} \|\Delta_\lambda\|, \|\Delta_0\|\},$$

Bất đẳng thức này dẫn đến (2.31). Định lý được chứng minh. □

Các kết quả dưới đây thể hiện mối quan hệ giữa bán kính điều khiển được xấp xỉ và bán kính điều khiển được Euclide trong các trường hợp thực và phức.

Định lý 2.2.3. *Giả sử rằng hệ tuyến tính có trễ* (2.1) *là điều khiển được xấp xỉ trong không gian $M_2(\mathbb{R})$. Khi đó, ta có*

$$r^a_{\mathbb{C}}(\underline{A}, B; D, E) = \min\{r^a_{\mathbb{R}}(\underline{A}, B; D, E); r^e_{\mathbb{C}}(\underline{A}, B; D, E)\}, \tag{2.32}$$

$$r^a_{\mathbb{R}}(\underline{A}, B; D, E) = \min\left\{r^e_{\mathbb{R}}(\underline{A}, B; D, E); \frac{1}{\|M[A_k, B]^{-1}D\|}\right\}. \tag{2.33}$$

Hơn nữa, nếu E có hạng bằng số cột và các không gian vectơ được trang bị các chuẩn Euclide thì

$$r^a_{\mathbb{R}}(\underline{A}, B; D, E) = r^e_{\mathbb{R}}(\underline{A}, B; D, E).$$

Chứng minh. Từ các định nghĩa, ta dễ thấy rằng

$$r^a_{\mathbb{C}}(\underline{A}, B; D, E) \leq \min\{r^a_{\mathbb{R}}(\underline{A}, B; D, E); r^e_{\mathbb{C}}(\underline{A}, B; D, E)\}.$$

Nếu $r^a_{\mathbb{C}}(\underline{A}, B; D, E) < r^e_{\mathbb{C}}(\underline{A}, B; D, E)$, từ Định lý 2.1.7,

$$r^a_{\mathbb{C}}(\underline{A}, B; D, E) = \frac{1}{\|M[A_k, B]^{-1}D\|}.$$

Theo Mệnh đề 2.2.1, tồn tại một ma trận nhiễu thực Δ phá vỡ tính điều khiển được xấp xỉ, và $\|\Delta\| = \dfrac{1}{\|M[A_k, B]^{-1}D\|}$. Do đó, ta nhận được

$$r^a_{\mathbb{C}}(\underline{A}, B; D, E) = \|\Delta\| \geq r^a_{\mathbb{R}}(\underline{A}, B; D, E) \geq r^a_{\mathbb{C}}(\underline{A}, B; D, E).$$

Điều này dẫn đến $r^a_{\mathbb{C}}(\underline{A}, B; D, E) = r^a_{\mathbb{R}}(\underline{A}, B; D, E)$ và (2.32) xảy ra. Để chứng minh (2.33), từ định nghĩa của bán kính điều khiển được xấp xỉ thực và kết quả của Mệnh đề 2.2.1, ta nhận được

$$r^a_{\mathbb{R}}(\underline{A}, B; D, E) \leq \min\left\{r^e_{\mathbb{R}}(\underline{A}, B; D, E); \frac{1}{\|M[A_k, B]^{-1}D\|}\right\}.$$

Chọn Δ là ma trận nhiễu thực sao cho

$$\|\Delta\| < \min\left\{r^e_{\mathbb{R}}(\underline{A}, B; D, E); \frac{1}{\|M[A_k, B]^{-1}D\|}\right\}. \tag{2.34}$$

Vì $\|\Delta\| < r^e_{\mathbb{R}}(\underline{A}, B; D, E)$, hệ (2.7) là điều khiển được Euclide và do đó

$$\operatorname{rank}[\widetilde{P}(\lambda), \widetilde{B}] = n \text{ với mọi } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Vì $\|\Delta\| < \dfrac{1}{\|M[A_k, B]^{-1}D\|} = \operatorname{dist}_{\mathbb{C}}([A_k, B]; D, M)$, điều này dẫn đến

$$\operatorname{rank}([\widetilde{A}_k, \widetilde{B}]) = \operatorname{rank}([A_k, B] + D\Delta M) = n.$$

Vì vậy, từ (1.21), hệ (2.7) là điều khiển được xấp xỉ với mọi nhiễu thực Δ thỏa mãn (2.34). Do đó, theo Định nghĩa 2.1.4, ta nhận được

$$r^a_{\mathbb{R}}(\underline{A}, B; D, E) \geq \min\left\{r^e_{\mathbb{R}}(\underline{A}, B; D, E); \frac{1}{\|M[A_k, B]^{-1}D\|}\right\}$$

và (2.33) xảy ra.

Bây giờ, nếu E có hạng bằng số cột và các không gian vectơ được trang bị các chuẩn Euclide thì theo Mệnh đề 2.2.1 và Bổ đề 2.1.8, với mỗi $\lambda \in \mathbb{R}$, tồn tại một nhiễu thực Δ_λ phá vỡ tính điều khiển được Euclide và

$$\|\Delta_\lambda\| = \frac{1}{\|E(\lambda)W(\lambda)^{-1}D\|} = \sigma_{\min}(E(\lambda)^{*\dagger}W(\lambda)^*, D^*).$$

Tương tự của chứng minh Định lý 2.1.10, ta có

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to-\infty} \sigma_{\min}(E(\lambda)^{*\dagger}W(\lambda)^*, D^*) &= \sigma_{\min}(M^{*\dagger}[A_k, B]^*, D^*)\\ &= \frac{1}{\|M[A_k, B]^{-1}D\|}.\end{aligned}$$

Do đó

$$r^e_{\mathbb{R}}(\underline{A}, B; D, E) \leq \lim_{\lambda \to -\infty} \|\Delta_\lambda\| = \frac{1}{\|M[A_k, B]^{-1}D\|}.$$

Kết hợp với (2.33), ta nhận được

$$r^a_{\mathbb{R}}(\underline{A}, B; D, E) = r^e_{\mathbb{R}}(\underline{A}, B; D, E).$$

Chứng minh đã được hoàn thành. □

Ví dụ 2.2.4. Xét hệ có trễ rời rạc được nhiễu trong Ví dụ 2.1.14. Từ các tính toán trong Ví dụ 2.1.14, với mỗi $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\|E(\lambda)W(\lambda)^{-1}D\|_\infty = \frac{3}{|2-\lambda|+2},$$

và $\|M[A_2, B]^{-1}D\| = \frac{3}{2}$. Do đó

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sup_{\lambda\in\mathbb{C}} \|E(\lambda)W(\lambda)^{-1}D\|} &= \frac{1}{\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \|E(\lambda)W(\lambda)^{-1}D\|} \\ &= \frac{1}{\|M[A_2, B]^{-1}D\|} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Hay

$$r^e_{\mathbb{C}}(\underline{A}, B; D, E) = r^e_{\mathbb{R}}(\underline{A}, B; D, E) = \frac{1}{\|M[A_2, B]^{-1}D\|} = \frac{2}{3}.$$

Điều này kết hợp với kết quả của Định lý 2.2.2, ta nhận được

$$r^a_{\mathbb{R}}(\underline{A}, B; D, E) = r^e_{\mathbb{R}}(\underline{A}, B; D, E) = r^a_{\mathbb{C}}(\underline{A}, B; D, E) = r^e_{\mathbb{C}}(\underline{A}, B; D, E) = \frac{2}{3}.$$

Nhận xét 2.2.5. Đối với bán kính ổn định, có những trường hợp mà bán kính ổn định thực lớn hơn rất nhiều so với bán kính ổn định phức (xem [31, 32]). Tương tự, trong trường hợp hệ tuyến tính có trễ rời rạc cũng có thể xảy ra bán kính điều khiển được phức nhỏ hơn bán kính điều khiển được thực: $r_{\mathbb{C}} < r_{\mathbb{R}}$.

Định lý dưới đây cho ta công thức tính bán kính điều khiển được xấp xỉ thực với hệ có trễ thực (2.1) thông qua *giá trị nhiễu thực suy rộng* của một cặp ma trận đã được giới thiệu trong [42].

Định lý 2.2.6. *Giả sử rằng hệ tuyến tính có trễ rời rạc* (2.1) *là điều khiển được xấp xỉ, được nhiễu bởi các nhiễu cấu trúc dạng* (2.6)*. Nếu* D *là ma trận khả nghịch và các không gian vectơ được trang bị bởi các chuẩn Euclide thì*

$$r^e_{\mathbb{R}}(\underline{A}, B; D, E) = \inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \tau_n(D^{-1}W(\lambda), E(\lambda)),$$

và

$$r^a_{\mathbb{R}}(\underline{A}, B; D, E) = \min\left\{\inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \tau_n(D^{-1}W(\lambda), E(\lambda)); \tau_n(D^{-1}[A_k, B], M)\right\},$$

trong đó τ_n *được tính theo công thức* (1.41).

Chứng minh. Vì D khả nghịch nên từ (2.17) và (2.18) ta có

$$\operatorname{rank}(\widetilde{W}(\lambda)) = \operatorname{rank}(W(\lambda) + D\Delta E(\lambda)) = \operatorname{rank}(D^{-1}W(\lambda) + \Delta E(\lambda)),$$

$$\operatorname{rank}([\widetilde{A}_k, \widetilde{B}]) = \operatorname{rank}([A_k, B] + D\Delta M) = \operatorname{rank}(D^{-1}[A_k, B] + \Delta M),$$

với các ma trận $\widetilde{W}(\lambda), [\widetilde{A}_k, \widetilde{B}]$ của hệ nhiễu (2.7). Từ các kết quả của Định lý 1.3.13, Định lý 1.3.14 và Định nghĩa 1.5.9 của giá trị nhiễu thực suy rộng thứ n của cặp ma trận, ta nhận được điều phải chứng minh. □

Bây giờ chúng ta xét hệ (2.1) được nhiễu bởi các nhiễu dạng

$$B \rightsquigarrow \widetilde{B} = B + \Delta_B,\ A_i \rightsquigarrow \widetilde{A}_i = A_i + \alpha_i \Delta_{A_i}, \quad \text{với mọi } i = 0, 1, \ldots, k, \tag{2.35}$$

ở đó $\alpha_i \in \mathbb{K}, i = 0, 1, \ldots, k$, là các tham số vô hướng đã cho, $\alpha_k \neq 0$, và $\Delta_{A_i} \in \mathbb{R}^{n\times n}, i = 0, 1, \ldots, k, \Delta_B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ là các ma trận chưa biết. Khi đó ta sử dụng Định lý 3.2.4 để tính bán kính điều khiển được xấp xỉ của hệ (2.1) dưới cấu trúc nhiễu dạng (2.35).

Hệ quả 2.2.7. *Cho hệ* (2.1) *là điều khiển được xấp xỉ. Giả sử rằng các ma trận của hệ* (2.1) *được nhiễu có cấu trúc dạng* (2.35) *và các không gian vectơ được trang bị bởi các chuẩn Euclide. Khi đó,*

$$r^a_{\mathbb{R}}(\underline{A}, B; D, E) = r^e_{\mathbb{R}}(\underline{A}, B; D, E) = \inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \tau_n(W(\lambda), E_\alpha(\lambda)), \tag{2.36}$$

trong đó $W(\lambda) = [P(\lambda), B]$ *và* $E_\alpha(\lambda) = \begin{bmatrix} \alpha_0 I_n & 0 \\ \alpha_1 e^{-h_1\lambda} I_n & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_k e^{-h_k\lambda} I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$.

2.3 Kết luận chương

Trong chương này, chúng tôi đã thu được các công thức tính bán kính điều khiển được Euclide phức, bán kính điều khiển được xấp xỉ phức, các đánh giá cho các bán kính điều khiển được thực và mối quan hệ giữa các bán kính này của hệ tuyến tính có trễ rời rạc (2.1) khi các ma trận của hệ được nhiễu cấu trúc dạng (2.6). Ngoài ra, chúng tôi cũng xét một số trường hợp đặc biệt của hệ khi ma trận E trong cấu trúc nhiễu (2.6) có hạng bằng số cột và các không gian được trang bị các chuẩn Euclide hay trường hợp ma trận D khả nghịch.

Tuy nhiên, các kết quả của luận án mới đưa ra công thức tính bán kính điều khiển thực trong trường hợp ma trận D trong cấu trúc (2.6) là khả nghịch. Bài toán tính các bán kính điều khiển thực cho hệ tuyến tính có trễ rời rạc (2.1) với nhiễu cấu trúc (2.6) cho đến nay vẫn là bài toán mở.

Cuối cùng, hệ tuyến tính có trễ rời rạc (2.1) và hệ tuyến tính trung tính (1.22) không bao giờ điều khiển được chính xác trong không gian M_2 nên trong chương tiếp theo, chúng tôi sẽ thiết lập các bán kính điều khiển được cho hệ tuyến tính trung tính trên không gian Sobolev $W_2^1([-h, 0], \mathbb{C}^n)$. Trên không gian này, tính điều khiển được chính xác có thể xảy ra và vì vậy bán kính điều khiển được chính xác sẽ được nghiên cứu.

Chương 3

TÍNH ĐIỀU KHIỂN ĐƯỢC VỮNG CỦA HỆ TUYẾN TÍNH TRUNG TÍNH

Nội dung của chương này trình bày lại các kết quả của bài báo [CT2] trong Danh mục công trình. Phần đầu của chương này nghiên cứu sự bền vững của tính điều khiển được của hệ điều khiển tuyến tính trung tính được mô tả bởi phương trình vi phân:

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h) + A_{-1}\dot{x}(t-h) + Bu(t), t \geqslant 0, \tag{3.1}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{K}^n$, $u(t) \in \mathbb{K}^m$, với $t \geqslant 0$, $A_0, A_1, A_{-1} \in \mathbb{C}^{n\times n}, B \in \mathbb{C}^{n\times m}$, h là hằng số dương.

Bằng việc sử dụng các tính chất của các toán tử đa trị tuyến tính, chúng tôi thiết lập các công thức tính bán kính điều khiển được thực và phức của hệ (3.1) khi các ma trận của hệ chịu tác động của các nhiễu cấu trúc.

Trong phần còn lại của chương này, một số trường hợp đặc biệt của hệ (3.1) được xét đến và đưa ra các công thức tính các bán kính điều khiển được tương ứng.

3.1 Các bán kính điều khiển được dưới nhiễu có cấu trúc

Từ các kết quả của Mệnh đề 1.4.5 về các tiêu chuẩn điều khiển được chính xác, điều khiển được xấp xỉ trong không gian Sobolev $W_2^1([-h,0],\mathbb{C}^n)$ của hệ trung tính (3.1), chúng tôi nghiên cứu bài toán tính các bán kính điều khiển được của hệ tuyến tính trung tính (3.1) khi hệ được nhiễu cấu trúc dạng:

$$\dot{x}(t) = \widetilde{A}_0 x(t) + \widetilde{A}_1 x(t-h) + \widetilde{A}_{-1}\dot{x}(t-h) + \widetilde{B}u(t), \tag{3.2}$$

với

$$[A_0, A_1, A_{-1}, B] \rightsquigarrow [\widetilde{A}_0, \widetilde{A}_1, \widetilde{A}_{-1}, \widetilde{B}] = [A_0, A_1, A_{-1}, B] + D\Delta E, \tag{3.3}$$

ở đây $\Delta \in \mathbb{C}^{l\times q}$ là ma trận nhiễu và $D \in \mathbb{C}^{n\times l}, E \in \mathbb{C}^{q\times(3\times n+m)}$ xác định cấu trúc của nhiễu $D\Delta E$. Tương tự như Chương 2, để đưa ra các khái niệm về bán kính điều khiển được chính xác, bán kính điều khiển được xấp xỉ, bán kính điều khiển được Euclide đối với hệ điều khiển tuyến tính trung tính (3.1), ta xét $\|\cdot\|$ là chuẩn trên $\mathbb{C}^{l\times q}$ được xác định trong (2.8).

Định nghĩa 3.1.1. Giả sử hệ tuyến tính trung tính (3.1) điều khiển được chính xác trên không gian Sobolev $W_2^1([-h,0],\mathbb{C}^n)$. Cho $\|\cdot\|$ là một chuẩn trên $\mathbb{C}^{l\times q}$. Khi đó, bán kính điều khiển được chính xác của hệ tuyến tính trung tính (3.1) tương ứng với nhiễu cấu trúc dạng (3.3) được cho bởi

$$\begin{aligned} r_{\mathbb{K}}^{ex}(A_0, A_1, A_{-1}, B; D, E) = \inf\Big\{ &\|\Delta\| : \Delta \in \mathbb{K}^{l\times q} \text{ sao cho} \\ &\text{hệ (3.2) không điều khiển được chính xác } \Big\}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Nếu hệ (3.2) với nhiễu cấu trúc (3.3) là điều khiển được chính xác với mọi $\Delta \in \mathbb{C}^{l\times q}$ thì ta đặt $r_{\mathbb{K}}^{ex}(A_0, A_1, A_{-1}, B; D, E) = +\infty$.

Định nghĩa 3.1.2. Cho hệ tuyến tính trung tính (3.1) là điều khiển được xấp xỉ trên không gian Sobolev $W_2^1([-h,0],\mathbb{C}^n)$ và $\|\cdot\|$ là một chuẩn trên $\mathbb{C}^{l\times q}$. Khi đó, bán kính điều khiển được xấp xỉ của hệ trung tính (3.1) tương ứng với nhiễu có cấu trúc dạng (3.3) được xác định bởi

$$\begin{aligned} r_{\mathbb{K}}^{ap}(A_0,A_1,A_{-1},B;D,E) = \inf\big\{\|\Delta\| : \Delta \in \mathbb{K}^{l\times q} \text{ sao cho} \\ \text{hệ (3.2) không điều khiển được xấp xỉ }\big\}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Nếu hệ (3.2) với nhiễu cấu trúc (3.3) là điều khiển được xấp xỉ với mọi $\Delta \in \mathbb{C}^{l\times q}$ thì ta đặt $r_{\mathbb{K}}^{ap}(A_0,A_1,A_{-1},B;D,E) = +\infty$.

Định nghĩa 3.1.3. Cho hệ tuyến tính trung tính (3.1) là điều khiển được Euclide và $\|\cdot\|$ là một chuẩn trên $\mathbb{C}^{l\times q}$. Khi đó, bán kính điều khiển được Euclide của hệ được của hệ (3.1) tương ứng với nhiễu có cấu trúc dạng (3.3) được xác định bởi

$$\begin{aligned} r_{\mathbb{K}}^{eu}(A_0,A_1,A_{-1},B;D,E) = \inf\big\{\|\Delta\| : \Delta \in \mathbb{K}^{l\times q} \text{ sao cho} \\ \text{hệ (3.2) không điều khiển được Euclide}\big\}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Nếu hệ (3.2) với nhiễu cấu trúc (3.3) là điều khiển được Euclide với mọi $\Delta \in \mathbb{C}^{l\times q}$ thì ta đặt $r_{\mathbb{K}}^{eu}(A_0,A_1,A_{-1},B;D,E) = +\infty$.

Để ngắn gọn, ta đặt

$$\begin{aligned} r_{\mathbb{K}}^{ex} &= r_{\mathbb{K}}^{ex}(A_0,A_1,A_{-1},B;D;E),\\ r_{\mathbb{K}}^{eu} &= r_{\mathbb{K}}^{eu}(A_0,A_1,A_{-1},B;D;E),\\ r_{\mathbb{K}}^{ap} &= r_{\mathbb{K}}^{ap}(A_0,A_1,A_{-1},B;D;E). \end{aligned}$$

Nhắc lại rằng, ma trận của tựa đa thức đặc trưng của hệ tuyến tính trung tính (3.1) là

$$P(\lambda) = A_0 + e^{-h\lambda}A_1 + \lambda e^{-h\lambda}A_{-1} - \lambda I_n. \tag{3.7}$$

Ta đặt

$$
\begin{aligned}
&W_1(\lambda) = [P(\lambda), B],\ W_2(\lambda) = [A_{-1} - \lambda I_n, B],\ W_3(\lambda) = [\lambda A_{-1} + A_1, B],\\
&H_1(\lambda) = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ e^{-h\lambda} I_n & 0 \\ \lambda e^{-h\lambda} I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix},\ H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix},\ H_3(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I_n & 0 \\ \lambda I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix},\\
&E_1(\lambda) = EH_1(\lambda), \quad E_2 = EH_2, \quad E_3(\lambda) = EH_3(\lambda).
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

Bây giờ, ta sẽ thiết lập công thức tính bán kính điều khiển được chính xác của hệ (3.1) thông qua định lý dưới đây:

Định lý 3.1.4. *Giả sử rằng hệ tuyến tính trung tính* (3.1) *là điều khiển được chính xác. Khi đó, bán kính điều khiển được chính xác của hệ* (3.1) *tương ứng với cấu trúc nhiễu dạng* (3.3) *được cho bởi công thức*

$$
r_{\mathbb{C}}^{ex} = \min\left\{ \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \|E_1(\lambda) W_1(\lambda)^{-1} D\|^{-1}, \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \|E_2 W_2(\lambda)^{-1} D\|^{-1} \right\}, \tag{3.9}
$$

trong đó $W_1(\lambda)^{-1}, W_2(\lambda)^{-1} : \mathbb{C}^n \rightrightarrows \mathbb{C}^{n+m}$ *tương ứng là các toán tử đa trị nghịch đảo của* $W_1(\lambda)$, $W_2(\lambda)$.

Chứng minh. Giả sử rằng $[\widetilde{A}_0, \widetilde{A}_1, \widetilde{A}_{-1}, \widetilde{B}] = [A_0, A_1, A_{-1}, B] + D\Delta E$ không điều khiển được chính xác với $\Delta \in \mathbb{C}^{l\times q}$. Theo Mệnh đề 1.4.5 (i), (ii) và Nhận xét 1.4.6, tồn tại $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ sao cho hoặc toán tử $\widetilde{W}_1(\lambda_0) = [\widetilde{P}(\lambda_0), \widetilde{B}]$ không toàn ánh, trong đó $\widetilde{P}(\lambda_0) = \widetilde{A}_0 + e^{-h\lambda_0}\widetilde{A}_1 + \lambda e^{-h\lambda_0}\widetilde{A}_{-1} - \lambda_0 I_n$ là ma trận của tựa đa thức đặc trưng của hệ nhiễu (3.2), hoặc toán tử $\widetilde{W}_2(\lambda_0) = [\widetilde{A}_{-1} - \lambda_0 I_n, \widetilde{B}]$ không toàn ánh. Nếu $\widetilde{W}_1(\lambda_0)$ không toàn ánh, từ (3.7) và (3.8), ta có thể phân tích

$$
\begin{aligned}
\widetilde{W}_1(\lambda_0) &= [\widetilde{P}(\lambda_0), \widetilde{B}] = [\widetilde{A}_0, \widetilde{A}_1, \widetilde{A}_{-1}, \widetilde{B}] H_1(\lambda_0) - \lambda_0 [I_n, 0] \\
&= ([A_0, A_1, A_{-1}, B] + D\Delta E) H_1(\lambda_0) - \lambda_0 [I_n, 0] \\
&= [A_0, A_1, A_{-1}, B] H_1(\lambda_0) - \lambda_0 [I_n, 0] + D\Delta E H_1(\lambda_0) \\
&= [P(\lambda_0), B] + D\Delta E_1(\lambda_0) = W_1(\lambda_0) + D\Delta E_1(\lambda_0).
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

Trong trường hợp này, bằng việc áp dụng kết quả của Mệnh đề 1.5.6, ta nhận được

$$\begin{aligned}\|\Delta\| \geq \operatorname{dist}(W_1(\lambda_0); D, E_1(\lambda_0)) &= \|E_1(\lambda_0)W_1(\lambda_0)^{-1}D\|^{-1} \\ &\geq \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \|E_1(\lambda)W_1(\lambda)^{-1}D\|^{-1}.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Nếu $\widetilde{W_2}(\lambda_0)$ không toàn ánh với λ_0 nào đó thì từ (3.8), ta có

$$\begin{aligned}\widetilde{W_2}(\lambda_0) = [\widetilde{A}_{-1} - \lambda_0 I_n, \widetilde{B}] &= [\widetilde{A}_0, \widetilde{A}_1, \widetilde{A}_{-1}, \widetilde{B}]H_2 - \lambda_0[I_n, 0] \\ &= ([A_0, A_1, A_{-1}, B] + D\Delta E)H_2 - \lambda_0[I_n, 0] \\ &= W_2(\lambda_0) + D\Delta E_2.\end{aligned}$$

Khi đó, cũng xuất phát từ kết quả của Mệnh đề 1.5.6, ta nhận được

$$\|\Delta\| \geq \operatorname{dist}(W_2(\lambda_0); D, E_2) = \|E_2 W_2(\lambda_0)^{-1}D\|^{-1} \geq \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \|E_2 W_2(\lambda)^{-1}D\|^{-1}.$$

Do đó

$$\|\Delta\| \geq \min\left\{\inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \|E_1(\lambda)W_1(\lambda)^{-1}\, D\|^{-1}, \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \|E_2 W_2(\lambda)^{-1}D\|^{-1}\right\}.$$

Vì bất đẳng thức trên xảy ra với mọi ma trận nhiễu $\Delta \in \mathbb{C}^{l\times q}$ sao cho hệ nhiễu (3.2) không điều khiển được chính xác nên từ định nghĩa của bán kính điều khiển được chính xác ta có:

$$r_{\mathbb{C}}^{ex} \geq \min\left\{\inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \|E_1(\lambda)W_1(\lambda)^{-1}\, D\|^{-1}, \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \|E_2 W_2(\lambda)^{-1}D\|^{-1}\right\}.$$

Để chứng minh bất đẳng thức ngược lại, với mọi $\epsilon > 0$ đủ bé, tồn tại $\lambda_\epsilon \in \mathbb{C}$ sao cho

$$\|E_1(\lambda_\epsilon)W_1(\lambda_\epsilon)^{-1}D\| \geq \sup_{\lambda\in\mathbb{C}} \|E_1(\lambda)W_1(\lambda)^{-1}D\| - \epsilon > 0.$$

Vì $\left(\|E_1(\lambda_\epsilon)W_1(\lambda_\epsilon)^{-1}D\| - \epsilon\right)^{-1} > \operatorname{dist}(W_1(\lambda_\epsilon); D, E_1(\lambda_\epsilon))$, điều này dẫn đến tồn tại một ma trận nhiễu Δ_ϵ sao cho

$$\|\Delta_\epsilon\| \leq \left(\|E_1(\lambda_\epsilon)W_1(\lambda_\epsilon)^{-1}D\| - \epsilon\right)^{-1}$$

và ma trận nhiễu $\widetilde{W_1}(\lambda_\epsilon) = W_1(\lambda_\epsilon) + D\Delta_\epsilon E_1(\lambda_\epsilon)$ không là ma trận toàn ánh. Do đó, hệ nhiễu (3.2) không điều khiển được chính xác với ma trận nhiễu Δ_ϵ. Vì vậy, từ định nghĩa của bán kính điều khiển được chính xác,

$$\begin{aligned} r_{\mathbb{C}}^{ex} &\leq \left(\|E_1(\lambda_\epsilon)W_1(\lambda_\epsilon)^{-1}D\| - \epsilon\right)^{-1} \\ &\leq \left(\sup_{\lambda\in\mathbb{C}} \|E_1(\lambda)W_1(\lambda)^{-1}D\| - 2\epsilon\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Cho $\epsilon \to 0$, ta nhận được

$$r_{\mathbb{C}}^{ex} \leq \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \|E_1(\lambda)W_1(\lambda)^{-1}D\|^{-1}.$$

Chứng minh tương tự, ta cũng thu được

$$r_{\mathbb{C}}^{ex} \leq \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \|E_2W_2(\lambda)^{-1}D\|^{-1},$$

và do đó

$$r_{\mathbb{C}}^{ex} \leq \min\left\{\inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \|E_1(\lambda)W_1(\lambda)^{-1}D\|^{-1}, \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \|E_2W_2(\lambda)^{-1}D\|^{-1}\right\}.$$

Chứng minh đã được hoàn thành. □

Hoàn toàn tương tự chứng minh của Định lý 3.1.4, từ các kết quả của Mệnh đề 1.4.5 và Mệnh đề 1.5.6, ta nhận được các định lý dưới đây.

Định lý 3.1.5. *Giả sử rằng hệ tuyến tính trung tính* (3.1) *là điều khiển được xấp xỉ. Khi đó, bán kính điều khiển được xấp xỉ của hệ tuyến tính trung tính* (3.1) *tương ứng với nhiễu có cấu trúc dạng* (3.3) *được cho bởi công thức*

$$r_{\mathbb{C}}^{ap} = \min\left\{\inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \|E_1(\lambda)W_1(\lambda)^{-1}D\|^{-1}, \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \|E_3(\lambda)W_3(\lambda)^{-1}D\|^{-1}\right\}, \tag{3.12}$$

ở đó $W_1(\lambda)^{-1}, W_3(\lambda)^{-1} : \mathbb{C}^n \rightrightarrows \mathbb{C}^{n+m}$ *tương ứng là các toán tử đa trị tuyến tính nghịch đảo của* $W_1(\lambda)$, $W_3(\lambda)$.

Định lý 3.1.6. *Giả sử rằng hệ tuyến tính trung tính* (3.1) *là điều khiển được Euclide. Khi đó, bán kính điều khiển được Euclide của hệ* (3.1) *tương ứng với nhiễu có cấu trúc dạng* (3.3) *được cho bởi công thức*

$$r_{\mathbb{C}}^{eu} = \inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \|E_1(\lambda) W_1(\lambda)^{-1} D\|^{-1}, \tag{3.13}$$

trong đó $W_1(\lambda)^{-1} : \mathbb{C}^n \rightrightarrows \mathbb{C}^{n+m}$ *là toán tử đa trị tuyến tính nghịch đảo của toán tử* $W_1(\lambda)$.

Nhận xét 3.1.7. Dễ thấy rằng $y \in W_1(\lambda)^{-1} D(v)$ tương đương với $W_1(\lambda) y = Dv$. Vì vậy, bài toán tính $\|E_1(\lambda) W_1(\lambda)^{-1} D\|$ có thể đưa về bài toán tối ưu

$$\|E_1(\lambda) W_1(\lambda)^{-1} D\| = \max_{\|v\|=1} \min\{\|E_1(\lambda) y\| : W_1(\lambda) y = Dv\}.$$

Định nghĩa 3.1.8. Cho ma trận $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$. Tập hợp

$$LNS(A) = \{y^T \in \mathbb{K}^{1 \times n} : y^T A = 0 \in \mathbb{K}^{1 \times m}\},$$

với phép cộng vectơ và phép nhân vectơ với một số vô hướng cảm sinh trên không gian $\mathbb{K}^{1 \times n}$ lập thành một không gian vectơ con của $\mathbb{K}^{1 \times n}$. Ta gọi không gian này là không gian nhân trái (left nullspace) của A.

Gọi k là số chiều tương ứng của $LNS(A)$ và $\{f_1, f_2, ..., f_k\}$ là một cơ sở của nó. Khi đó, ma trận

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_k \end{bmatrix}, \tag{3.14}$$

là ma trận mà dòng thứ i của nó là tọa độ của vectơ f_i, với $i = 1, ..., k$ được gọi là ma trận cơ sở của không gian nhân trái của ma trận A.

Mệnh đề 3.1.9. *Cho* $U_1(\lambda) \in \mathbb{C}^{h_1 \times n}, V_1(\lambda) \in \mathbb{C}^{h_1 \times q}, U_2(\lambda) \in \mathbb{C}^{h_2 \times n}, V_2(\lambda) \in \mathbb{C}^{h_2 \times q}$, $U_3(\lambda) \in \mathbb{C}^{h_3 \times n}$, $V_3(\lambda) \in \mathbb{C}^{h_3 \times q}$, *sao cho* $[U_1(\lambda), V_1(\lambda)]^T$, $[U_2(\lambda), V_2(\lambda)]^T$,

$[U_3(\lambda), V_3(\lambda)]^T$ *tương ứng là các ma trận cơ sở của không gian nhân trái của ma trận* $\begin{bmatrix} W_1(\lambda) \\ E_1(\lambda) \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} W_2(\lambda) \\ E_2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} W_3(\lambda) \\ E_3(\lambda) \end{bmatrix}$. *Khi đó, ta có*

$$\begin{aligned} \|E_1(\lambda)W_1(\lambda)^{-1}D\| &= \max_{\|v\|=1} \min\{\|z\| : V_1(\lambda)z = -U_1(\lambda)Dv\}, \\ \|E_2W_2(\lambda)^{-1}D\| &= \max_{\|v\|=1} \min\{\|z\| : V_2(\lambda)z = -U_2(\lambda)Dv\}, \\ \|E_3(\lambda)W_3(\lambda)^{-1}D\| &= \max_{\|v\|=1} \min\{\|z\| : V_3(\lambda)z = -U_3(\lambda)Dv\}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Chứng minh. Từ Nhận xét 3.1.7, ta có

$$\|E_1(\lambda)W_1(\lambda)^{-1}D\| = \max_{\|v\|=1} \min\{\|E_1(\lambda)y\| : W_1(\lambda)y = Dv\}.$$

Vì $[U_1(\lambda), V_1(\lambda)]^T$ là các ma trận cơ sở của không gian nhân trái của $\begin{bmatrix} W_1(\lambda) \\ E_1(\lambda) \end{bmatrix}$ nên

$$V_1(\lambda)E_1(\lambda) = -U_1(\lambda)W_1(\lambda).$$

Do đó, với mỗi $y : W_1(\lambda)y = Dv$, đặt $z = E_1(\lambda)y$, ta được

$$V_1(\lambda)z = V_1(\lambda)E_1(\lambda)y = -U_1(\lambda)W_1(\lambda)y = -U_1(\lambda)Dv.$$

Điều này kéo theo rằng

$$\min\{\|E_1(\lambda)y\| : W_1(\lambda)y = Dv\} \geq \min\{\|z\| : V_1(\lambda)z = -U_1(\lambda)Dv\}.$$

Để chứng minh bất đẳng thức ngược lại, với $z : V_1(\lambda)z = -U_1(\lambda)Dv$, ta có

$$[U_1(\lambda), V_1(\lambda)]\begin{pmatrix} Dv \\ z \end{pmatrix} = 0.$$

Vì $[U_1(\lambda), V_1(\lambda)]^T$ là các ma trận cơ sở của không gian nhân trái tương ứng của $\begin{bmatrix} W_1(\lambda) \\ E_1(\lambda) \end{bmatrix}$ nên tồn tại vectơ y sao cho

$$\begin{pmatrix} Dv \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} W_1(\lambda) \\ E_1(\lambda) \end{bmatrix} y \Longleftrightarrow z = E_1(\lambda)y \text{ và } W_1(\lambda)y = Dv.$$

Điều này dẫn đến bất đẳng thức ngược lại và chúng ta nhận được

$$\begin{aligned}\|E_1(\lambda)W_1(\lambda)^{-1}D\| &= \max_{\|v\|=1}\min\{\|E_1(\lambda)y\| : W_1(\lambda)y = Dv\}\\ &= \max_{\|v\|=1}\min\{\|z\| : V_1(\lambda)z = -U_1(\lambda)Dv\}.\end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự, ta nhận được

$$\begin{aligned}\|E_2W_2(\lambda)^{-1}D\| &= \max_{\|v\|=1}\min\{\|z\| : V_2(\lambda)z = -U_2(\lambda)Dv\},\\ \|E_3(\lambda)W_3(\lambda)^{-1}D\| &= \max_{\|v\|=1}\min\{\|z\| : V_3(\lambda)z = -U_3(\lambda)Dv\}.\end{aligned}$$

□

Ví dụ 3.1.10. Xét hệ tuyến tính trung tính:

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-1) + A_{-1}\dot{x}(t-1) + Bu(t), \tag{3.16}$$

với $A_0 = \begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix}0&2&1\\0&1&1\\0&1&2\end{bmatrix}, A_{-1} = \begin{bmatrix}2&-2&-1\\1&1&2\\1&1&-1\end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$.

Giả sử rằng các ma trận $[A_0, A_1, A_{-1}, B]$ của hệ (3.16) được nhiễu với cấu trúc dạng:

$$\begin{bmatrix}1&1&1&0&2&1&2&-2&-1&2\\1&1&1&0&1&1&1&1&2&1\\1&1&1&0&1&2&1&1&-1&1\end{bmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{bmatrix}1+\delta_3&1+\delta_3&1+\delta_3&0&2+\delta_4&1+\delta_4&2+\delta_4&-2&-1&2+\delta_4\\1+\delta_5&1+\delta_5&1+\delta_5&0&1+\delta_6&1+\delta_6&1+\delta_6&1&2&1+\delta_6\\1+3\delta_1&1+3\delta_1&1+3\delta_1&0&1+3\delta_2&2+3\delta_2&1+3\delta_2&1&-1&1+3\delta_2\end{bmatrix},$$

ở đây $\delta_i \in \mathbb{C}, i \in \{1, 2\}$ là các tham số nhiễu.

Ta tính được

$$W_1(\lambda) = \begin{bmatrix}1+2\lambda e^{-\lambda}-\lambda & 1+2e^{-\lambda}-2\lambda e^{-\lambda} & 1+e^{-\lambda}-\lambda e^{-\lambda} & 2\\ 1+\lambda e^{-\lambda} & 1+e^{-\lambda}+\lambda e^{-\lambda}-\lambda & 1+e^{-\lambda}+2\lambda e^{-\lambda} & 1\\ 1+\lambda e^{-\lambda} & 1+e^{-\lambda}+\lambda e^{-\lambda} & 1+2e^{-\lambda}-\lambda e^{-\lambda}-\lambda & 1\end{bmatrix},$$

$$W_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda & 1 \end{bmatrix}, \quad W_3(\lambda) = \begin{bmatrix} 2\lambda & 2-2\lambda & 1-\lambda & 2 \\ \lambda & 1+\lambda & 1+2\lambda & 1 \\ \lambda & 1+\lambda & 2-\lambda & 1 \end{bmatrix}.$$

Ta có $\operatorname{rank} W_1(\lambda) = \operatorname{rank} W_2(\lambda) = 3$ với mọi $\lambda \in \mathbb{C}$. Thật vậy, với $W_1(\lambda)$ ta xét

$$\det \begin{bmatrix} 1+2\lambda e^{-\lambda}-\lambda & 1+2e^{-\lambda}-2\lambda e^{-\lambda} & 2 \\ 1+\lambda e^{-\lambda} & 1+e^{-\lambda}+\lambda e^{-\lambda}-\lambda & 1 \\ 1+\lambda e^{-\lambda} & 1+e^{-\lambda}+\lambda e^{-\lambda} & 1 \end{bmatrix} = \lambda(\lambda+1).$$

Rõ ràng $\operatorname{rank} W_1(\lambda) = 3$, với mọi $\lambda \neq 0, \lambda \neq -1$. Mặt khác,

$$W_1(0) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad W_1(-1) = \begin{bmatrix} 2-2e & 1+5e & 1+2e & 2 \\ 1-e & 2 & 1-e & 1 \\ 1-e & 1 & 2+3e & 1 \end{bmatrix}.$$

Do đó, $\operatorname{rank} W_1(\lambda) = 3$, với mọi $\lambda \in \mathbb{C}$. Bây giờ, với $W_2(\lambda)$, ta xét

$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -2 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \lambda^2.$$

Do vậy, $\operatorname{rank} W_2(\lambda) = 3$, với mọi $\lambda \neq 0$. Với $\lambda = 0$,

$$W_2(0) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dễ thấy rằng $\operatorname{rank} W_2(0) = 3$. Do đó, $\operatorname{rank} W_2(\lambda) = 3$, với mọi $\lambda \in \mathbb{C}$. Vì vậy, theo Mệnh đề 1.4.5 (i) và (ii), hệ (3.16) là điều khiển được chính xác.

Cấu trúc nhiễu ở trên có thể biểu diễn lại dưới dạng

$$[A_0, A_1, A_{-1}, B] \rightsquigarrow [A_0, A_1, A_{-1}, B] + D\Delta E$$

với $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ và $\Delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ \delta_3 & \delta_4 \\ \delta_5 & \delta_6 \end{bmatrix}$.

Do đó, từ (3.8), ta được $E_1(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \lambda e^{-\lambda} & e^{-\lambda} & e^{-\lambda} & 1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $E_3(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Bằng các tính toán đơn giản, ta nhận được

$$U_1(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, V_1(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -4 \end{bmatrix}, U_3(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$V_3(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \end{bmatrix}, U_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, V_2(\lambda) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ nếu } \lambda \neq 0, \pm\sqrt{3},$$

$$U_2(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, V_2(0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, U_2(\sqrt{3}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1+\sqrt{3} \end{bmatrix},$$

$$V_2(\sqrt{3}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad U_2(-\sqrt{3}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1-\sqrt{3} \end{bmatrix},$$

$$V_2(-\sqrt{3}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Giả sử các không gian vectơ được trang bị các chuẩn $\|\cdot\|_\infty$. Vì $V_1(\lambda)$ là một vectơ dòng nên theo Mệnh đề 3.1.9 ta nhận được

$$\|E_1(\lambda)W_1(\lambda)^{-1}D\| = \max_{\|v\|=1} \frac{\|U_1(\lambda)Dv\|}{\|V_1(\lambda)\|} = \frac{\|U_1(\lambda)D\|}{\|V_1(\lambda)\|} = \frac{5}{|\lambda-3|+4}.$$

Do đó, $\sup_{\lambda\in\mathbb{C}} \|E_1(\lambda)W_1(\lambda)^{-1}D\| = \dfrac{5}{4}$.

Hoàn toàn tương tự, $\sup_{\lambda\in\mathbb{C}} \|E_3(\lambda)W_3(\lambda)^{-1}D\| = \dfrac{5}{4}$. Hơn nữa, từ Mệnh đề 3.1.9, dễ thấy rằng $\|E_2W_2(\lambda)^{-1}D\| = 0$ nếu $\lambda \neq 0, \pm\sqrt{3}$,

$$\|E_2W_2(0)^{-1}D\| = \frac{5}{4}, \ \|E_2W_2(\sqrt{3})^{-1}D\| = \frac{3\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}},$$

và

$$\|E_2W_2(-\sqrt{3})^{-1}D\| = \frac{3\sqrt{3}+4}{\sqrt{3}}.$$

Do đó $\sup_{\lambda\in\mathbb{C}} \|E_2W_2(\lambda)^{-1}D\| = \dfrac{3\sqrt{3}+4}{\sqrt{3}}$. Vì vậy, sử dụng các kết quả của các Định lý 3.1.4, 3.1.5, 3.1.6, ta thu được

$$r_{\mathbb{C}}^{ex} = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}+4}, \quad r_{\mathbb{C}}^{ap} = r_{\mathbb{C}}^{eu} = \frac{4}{5}.$$

3.2 Một số trường hợp đặc biệt

Trong Mục 3.1, ta nhận được các công thức (3.9), (3.12), (3.13) để tính các bán kính điều khiển được. Tuy nhiên, không dễ để sử dụng các công thức này vì việc tính toán thông qua việc tính các chuẩn của các toán tử đa trị tuyến tính $E_1(\lambda)W_1(\lambda)^{-1}D, E_2W_2(\lambda)^{-1}D$, $E_3(\lambda)W_3(\lambda)^{-1}D$. Cách tính này là phức tạp do các toán tử đa trị này không có các biểu diễn tường minh. Sau đây, bằng việc sử dụng các kết quả này, chúng ta sẽ đưa ra một số công thức đơn giản hơn trong một số trường hợp chuẩn các ma trận được xem xét là chuẩn phổ (tức là các chuẩn được sinh ra từ các chuẩn vectơ Euclide $\|x\| = \sqrt{x^*x}$).

Định lý 3.2.1. *Cho các ma trận $U_1(\lambda) \in \mathbb{C}^{h_1\times n}$, $V_1(\lambda) \in \mathbb{C}^{h_1\times q}$, $U_2(\lambda) \in \mathbb{C}^{h_2\times n}$, $V_2(\lambda) \in \mathbb{C}^{h_2\times q}$,$U_3(\lambda) \in \mathbb{C}^{h_3\times n}$, $V_3(\lambda) \in \mathbb{C}^{h_3\times q}$ sao cho $[U_1(\lambda), V_1(\lambda)]^T$, $[U_2(\lambda), V_2(\lambda)]^T$, $[U_3(\lambda), V_3(\lambda)]^T$ lần lượt là các ma trận cơ sở của các không gian nhân trái tương ứng của $\begin{bmatrix} W_1(\lambda) \\ E_1(\lambda) \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} W_2(\lambda) \\ E_2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} W_3(\lambda) \\ E_3(\lambda) \end{bmatrix}$. Giả sử rằng các không gian vectơ được trang bị các chuẩn Euclide. Khi đó,*

$$\begin{aligned}
r_{\mathbb{C}}^{ex} &= \min\left\{\inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \|V_1(\lambda)^\dagger U_1(\lambda)D\|^{-1}, \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \|V_2(\lambda)^\dagger U_2(\lambda)D\|^{-1}\right\}, \\
r_{\mathbb{C}}^{ap} &= \min\left\{\inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \|V_1(\lambda)^\dagger U_1(\lambda)D\|^{-1}, \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \|V_3(\lambda)^\dagger U_3(\lambda)D\|^{-1}\right\}, \qquad (3.17) \\
r_{\mathbb{C}}^{eu} &= \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \|V_1(\lambda)^\dagger U_1(\lambda)D\|^{-1}.
\end{aligned}$$

Hơn nữa, nếu ma trận cấu trúc E có hạng đủ bằng số cột của nó thì

$$
\begin{aligned}
r_{\mathbb{C}}^{ex} &= \min\left\{\inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \|(W_1(\lambda)E_1(\lambda)^\dagger)^\dagger D\|^{-1}, \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \|(W_2(\lambda)E_2^\dagger)^\dagger D\|^{-1}\right\},\\
r_{\mathbb{C}}^{ap} &= \min\left\{\inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \|(W_1(\lambda)E_1(\lambda)^\dagger)^\dagger D\|^{-1}, \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \|(W_3(\lambda)E_3(\lambda)^\dagger)^\dagger D\|^{-1}\right\},\\
r_{\mathbb{C}}^{eu} &= \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \|(W_1(\lambda)E_1(\lambda)^\dagger)^\dagger D\|^{-1}.
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

Chứng minh. Vì các không gian vectơ được trang bị các chuẩn Euclide nên theo công thức (1.36),

$$
\begin{aligned}
\min\{\|z\| : V_1(\lambda)z = -U_1(\lambda)Dv\} &= \min\{\|z\| : z \in -V_1(\lambda)^{-1}U_1(\lambda)Dv\}\\
&= \|V_1(\lambda)^\dagger U_1(\lambda)Dv\|.
\end{aligned}
$$

Theo Mệnh đề 3.1.9, ta có

$$
\begin{aligned}
\|E_1(\lambda)W_1(\lambda)^{-1}D\| &= \max_{\|v\|=1} \min\{\|z\| : V_1(\lambda)z = -U_1(\lambda)Dv\}\\
&= \max_{\|v\|=1} \|V_1(\lambda)^\dagger U_1(\lambda)Dv\| = \|V_1(\lambda)^\dagger U_1(\lambda)D\|.
\end{aligned}
$$

Một cách tương tự,

$$\|E_2W_2(\lambda)^{-1}D\| = \|V_2(\lambda)^\dagger U_2(\lambda)D\|,$$

$$\|E_3(\lambda)W_3(\lambda)^{-1}D\| = \|V_3(\lambda)^\dagger U_3(\lambda)D\|.$$

Theo các kết quả của Định lý 3.1.4, Định lý 3.1.5, Định lý 3.1.6, ta thu được (3.17). Hơn nữa, khi ma trận E có hạng đủ bằng số cột của nó thì các ma trận $E_1(\lambda), E_2, E_3(\lambda)$ cũng có hạng đủ bằng số cột tương ứng của chúng với mọi $\lambda \in \mathbb{C}$. Khi đó, ta có $E_1(\lambda)^\dagger E_1(\lambda) = E_2^\dagger E_2 = E_3(\lambda)^\dagger E_3(\lambda) = I_{n+m}$. Do đó, ta có thể chọn $U_1(\lambda) = U_2(\lambda) = U_3(\lambda) = -I_{n+m}$ và $V_1(\lambda) = W_1(\lambda)E_1(\lambda)^\dagger, V_2(\lambda) = W_2(\lambda)E_2^\dagger, V_3(\lambda) = W_3(\lambda)E_3(\lambda)^\dagger$. Vì vậy, công thức (3.18) nhận được từ công thức (3.17). □

Chú ý 3.2.2. Trong trường hợp E có hạng bằng số cột, sử dụng Bổ đề 3.4 trong tài liệu [76], ta có

$$\begin{aligned} r_{\mathbb{C}}^{ex} &= \min\left\{\inf_{\lambda\in\mathbb{C}}\|G_1(\lambda)\|^{-1}, \inf_{\lambda\in\mathbb{C}}\|G_2(\lambda)\|^{-1}\right\},\\ r_{\mathbb{C}}^{ap} &= \min\left\{\inf_{\lambda\in\mathbb{C}}\|G_1(\lambda)\|^{-1}, \inf_{\lambda\in\mathbb{C}}\|G_3(\lambda)\|^{-1}\right\}, \qquad (3.19)\\ r_{\mathbb{C}}^{eu} &= \inf_{\lambda\in\mathbb{C}}\|G_1(\lambda)\|^{-1}, \end{aligned}$$

trong đó

$$\begin{aligned} G_1(\lambda) &= (W_1(\lambda)(E_1(\lambda)^*E_1(\lambda))^{-1/2})^{\dagger}D,\\ G_2(\lambda) &= (W_2(\lambda)(E_2^*E_2)^{-1/2})^{\dagger}D,\\ G_3(\lambda) &= (W_3(\lambda)(E_3(\lambda)^*E_3(\lambda))^{-1/2})^{\dagger}D. \end{aligned}$$

Vì vậy, các công thức (3.18) và (3.19) là tương đương.

Bây giờ, bằng cách sử dụng giá trị kì dị suy rộng của một cặp ma trận (xem trong [80]), ta sẽ thiết lập các công thức của bán kính điều khiển được. Với mỗi $Q \in \mathbb{C}^{n\times(m+n)}$, ta đặt $\mathcal{U} = \{u^* \in (\mathbb{C}^n)^* : Q^*(u^*) \in \mathrm{Im}(M^*)\}$.

Kí hiệu

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1^{\lambda} &= \{u^* \in (\mathbb{C}^n)^* : \|u^*\| = 1, W_1(\lambda)^*(u^*) \in \mathrm{Im}(E_1(\lambda)^*)\},\\ \mathcal{S}_2^{\lambda} &= \{u^* \in (\mathbb{C}^n)^* : \|u^*\| = 1, W_2(\lambda)^*(u^*) \in \mathrm{Im}(E_2^*)\},\\ \mathcal{S}_3^{\lambda} &= \{u^* \in (\mathbb{C}^n)^* : \|u^*\| = 1, W_3(\lambda)^*(u^*) \in \mathrm{Im}(E_3(\lambda)^*)\}. \end{aligned}$$

Từ các Định lý 3.1.4, 3.1.5, 3.1.6 và Bổ đề 2.1.8, ta nhận được định lý dưới đây.

Định lý 3.2.3. *Với giả thiết các không gian vectơ được trang bị các chuẩn Euclide. Khi đó, ta có*

$$\begin{aligned} r_{\mathbb{C}}^{ex} &= \min\left\{\inf_{\lambda\in\mathbb{C}, u^*\in\mathcal{S}_1^{\lambda}}\frac{\|E_1(\lambda)^{*\dagger}W_1(\lambda)^*(u^*)\|}{\|D^*(u^*)\|}, \inf_{\lambda\in\mathbb{C}, u^*\in\mathcal{S}_2^{\lambda}}\frac{\|E_2^{*\dagger}W_2(\lambda)^*(u^*)\|}{\|D^*(u^*)\|}\right\},\\ r_{\mathbb{C}}^{ap} &= \min\left\{\inf_{\lambda\in\mathbb{C}, u^*\in\mathcal{S}_1^{\lambda}}\frac{\|E_1(\lambda)^{*\dagger}W_1(\lambda)^*(u^*)\|}{\|D^*(u^*)\|}, \inf_{\lambda\in\mathbb{C}, u^*\in\mathcal{S}_3^{\lambda}}\frac{\|E_3(\lambda)^{*\dagger}W_3(\lambda)^*(u^*)\|}{\|D^*(u^*)\|}\right\},\\ r_{\mathbb{C}}^{eu} &= \inf_{\lambda\in\mathbb{C}, u^*\in\mathcal{S}_1^{\lambda}}\frac{\|E_1(\lambda)^{*\dagger}W_1(\lambda)^*(u^*)\|}{\|D^*(u^*)\|}. \end{aligned}$$

Hơn nữa, nếu E có hạng bằng số cột thì

$$r_{\mathbb{C}}^{ex} = \min\left\{\inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \sigma_{\min}(E_1(\lambda)^{*\dagger}W_1(\lambda)^*, D^*), \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \sigma_{\min}(E_2^{*\dagger}W_2(\lambda)^*, D^*)\right\},$$

$$r_{\mathbb{C}}^{ap} = \min\left\{\inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \sigma_{\min}(E_1(\lambda)^{*\dagger}W_1(\lambda)^*, D^*), \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \sigma_{\min}(E_3(\lambda)^{*\dagger}W_3(\lambda)^*, D^*)\right\},$$

$$r_{\mathbb{C}}^{eu} = \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \sigma_{\min}(E_1(\lambda)^{*\dagger}W_1(\lambda)^*, D^*).$$

Tiếp theo, trong tình huống ma trận D khả nghịch, sử dụng Định nghĩa 1.5.9, ta có định lý sau.

Định lý 3.2.4. *Giả sử rằng D là ma trận khả nghịch và các không gian vectơ được trang bị bởi chuẩn Euclide. Khi đó, ta có*

$$r_{\mathbb{R}}^{ex} = \min\left\{\inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \tau_n(D^{-1}W_1(\lambda), E_1(\lambda)), \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \tau_n(D^{-1}W_2(\lambda), E_2)\right\},$$

$$r_{\mathbb{R}}^{ap} = \min\left\{\inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \tau_n(D^{-1}W_1(\lambda), E_1(\lambda)), \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \tau_n(D^{-1}W_3(\lambda), E_3(\lambda))\right\},$$

$$r_{\mathbb{R}}^{eu} = \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \tau_n(D^{-1}W_1(\lambda), E_1(\lambda)),$$

trong đó $\tau_n(H_1, H_2)$ được tính theo công thức (1.41).

Chứng minh. Vì ma trận D khả nghịch nên ta có

$$\operatorname{rank}(\widetilde{W_1}(\lambda)) = \operatorname{rank}(W_1(\lambda) + D\Delta E_1(\lambda)) = \operatorname{rank}(D^{-1}W_1(\lambda) + \Delta E_1(\lambda)).$$

$$\operatorname{rank}(\widetilde{W_2}(\lambda)) = \operatorname{rank}(W_2(\lambda) + D\Delta E_2) = \operatorname{rank}(D^{-1}W_2(\lambda) + \Delta E_2).$$

Từ chứng minh của Định lý 3.1.4, Định nghĩa 1.5.9 và các đặc trưng của tính điều khiển được, ta nhận được điều phải chứng minh. □

Dưới đây chúng ta xét một trường hợp nhiễu tách có cấu trúc có thể đưa được về mô hình (3.3) và vì vậy ta có thể sử dụng được các kết quả trên. Giả sử rằng hệ (3.1) được nhiễu với cấu trúc tách dạng

$$B \rightsquigarrow \widetilde{B} = B + D_B\Delta_B E_B,\ A_i \rightsquigarrow \widetilde{A}_i = A_i + D_{A_i}\Delta_{A_i}E_{A_i},\ \text{với } i \in \{0, 1, -1\}, \tag{3.20}$$

trong đó các ma trận $D_{A_i} = D_B \in \mathbb{C}^{n\times l}, E_{A_i} \in \mathbb{C}^{q_{A_i}\times n}, E_B \in \mathbb{C}^{q_B\times m}$, với mọi $i \in \{0, 1, -1\}$ là các ma trận đã cho và $\Delta_B \in \mathbb{C}^{l\times q_B}, \Delta_{A_i} \in \mathbb{C}^{l\times q_{A_i}}$, với mọi $i \in \{0, 1, -1\}$ là các ma trận nhiễu. Dễ thấy rằng mô hình nhiễu (3.20) có thể viết lại dưới dạng

$$[A_0, A_1, A_{-1}, B] \rightsquigarrow [\widetilde{A}_0, \widetilde{A}_1, \widetilde{A}_{-1}, \widetilde{B}] = [A_0, A_1, A_{-1}, B] + D\Delta E,$$

trong đó $D = D_B, E = \mathrm{diag}(E_{A_0}, E_{A_1}, E_{A_{-1}}, E_B)$ và

$$\Delta = [\Delta_{A_0}, \Delta_{A_1}, \Delta_{A_{-1}}, \Delta_B].$$

Từ (3.8), ta tính được các ma trận $E_1(\lambda)$, E_2, $E_3(\lambda)$ trong trường hợp này như sau:

$$E_1(\lambda) = \begin{bmatrix} E_{A_0} & 0 \\ e^{-h\lambda}E_{A_1} & 0 \\ \lambda e^{-h\lambda}E_{A_{-1}} & 0 \\ 0 & E_B \end{bmatrix}, \; E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ E_{A_{-1}} & 0 \\ 0 & E_B \end{bmatrix}, \; E_3(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ E_{A_1} & 0 \\ \lambda E_{A_{-1}} & 0 \\ 0 & E_B \end{bmatrix}. \tag{3.21}$$

Sử dụng các kết quả của Định lý 3.1.4, Định lý 3.1.5 và Định lý 3.1.6, ta nhận được các bán kính điều khiển được $r_{\mathbb{C}}^{ex}$, $r_{\mathbb{C}}^{ap}$, $r_{\mathbb{C}}^{eu}$ của hệ (3.1) dưới các nhiễu có cấu trúc (3.20).

Bây giờ, chúng ta xét một trường hợp đặc biệt khác khi các ma trận của hệ (3.1) được nhiễu dạng:

$$B \rightsquigarrow \widetilde{B} = B + \Delta_B,\; A_i \rightsquigarrow \widetilde{A}_i = A_i + \alpha_i\Delta_{A_i}, \quad \text{với mọi } i \in \{0, 1, -1\}, \tag{3.22}$$

trong đó $\alpha_i \in \mathbb{C}$ là các tham số vô hướng và $\Delta_{A_i} \in \mathbb{C}^{n\times n}, \Delta_B \in \mathbb{C}^{n\times m}$ là các ma trận chưa biết, $i \in \{0, 1, -1\}$. Ta đặt

$$\begin{aligned} &\mu_1(\lambda) = |\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2|e^{-2h\lambda}| + |\alpha_{-1}|^2|\lambda|^2|e^{-2h\lambda}|, \\ &\mu_2 = |\alpha_{-1}|^2,\; \mu_3(\lambda) = |\alpha_1|^2 + |\alpha_{-1}|^2|\lambda|^2. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Hệ quả 3.2.5. *Giả sử rằng hệ điều khiển tuyến tính trung tính* (3.1) *là điều khiển được chính xác và các không gian vectơ được trang bị bởi* *chuẩn vectơ Euclide. Khi đó, các bán kính điều khiển được của hệ* (3.1) *tương ứng với nhiễu có cấu trúc* (3.22) *được cho bởi các công thức dưới đây:*

$$
\begin{aligned}
r_{\mathbb{C}}^{ex} &= \min\left\{\inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \sigma_{\min}\left(\left[\frac{P(\lambda)}{\sqrt{\mu_1(\lambda)}}, B\right]\right), \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \sigma_{\min}\left(\left[\frac{A_{-1}-\lambda I_n}{\sqrt{\mu_2}}, B\right]\right)\right\},\\
r_{\mathbb{C}}^{ap} &= \min\left\{\inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \sigma_{\min}\left(\left[\frac{P(\lambda)}{\sqrt{\mu_1(\lambda)}}, B\right]\right), \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \sigma_{\min}\left(\left[\frac{A_1+\lambda A_{-1}}{\sqrt{\mu_3(\lambda)}}, B\right]\right)\right\},\\
r_{\mathbb{C}}^{eu} &= \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \sigma_{\min}\left(\left[\frac{P(\lambda)}{\sqrt{\mu_1(\lambda)}}, B\right]\right).
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

Chứng minh. Trong mô hình nhiễu (3.22), ta nhận thấy rằng

$$D_{A_i} = D_B = I_n, E_{A_i} = \alpha_i I_n, E_B = I_m, \text{ với mọi } i \in \{0, 1, -1\}.$$

Do đó, ta nhận được $D = I_n, E = \operatorname{diag}(\alpha_0 I_n, \alpha_1 I_n, \alpha_{-1} I_n, I_m)$ và từ (3.21), ta tính được

$$E_1(\lambda) = \begin{bmatrix} \alpha_0 I_n & 0 \\ \alpha_1 e^{-h\lambda} I_n & 0 \\ \alpha_{-1}\lambda e^{-h\lambda} I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}.$$

$$E_1(\lambda)^{*\dagger} = E_1(\lambda)(E_1(\lambda)^* E_1(\lambda))^{-1} = \begin{bmatrix} \mu_1(\lambda)^{-1}\alpha_0 I_n & 0 \\ \mu_1(\lambda)^{-1}\alpha_1 e^{-h\lambda} I_n & 0 \\ \mu_1(\lambda)^{-1}\alpha_{-1}\lambda e^{-h\lambda} I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}.$$

Kết hợp điều này với giả thiết các không gian vectơ được trang bị bởi các chuẩn Euclide, ta nhận được

$$\left\| E_1(\lambda)^{*\dagger}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\| = \left\| \begin{bmatrix} \mu_1(\lambda)^{-1/2} I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|, \text{ với mọi } x \in \mathbb{C}^n, y \in \mathbb{C}^m.$$

Vì vậy,

$$\begin{aligned}\sigma_{\min}(E_1(\lambda)^{*\dagger}W_1(\lambda)^*, D^*) &= \sigma_{\min}\left(\begin{bmatrix}\mu_1(\lambda)^{-1/2}I_n & 0\\ 0 & I_m\end{bmatrix}W_1(\lambda)^*, I_n\right)\\ &= \sigma_{\min}\left(\begin{bmatrix}\mu_1(\lambda)^{-1/2}I_n & 0\\ 0 & I_m\end{bmatrix}W_1(\lambda)^*\right)\\ &= \sigma_{\min}\left(W_1(\lambda)\begin{bmatrix}\mu_1(\lambda)^{-1/2}I_n & 0\\ 0 & I_m\end{bmatrix}\right)\\ &= \sigma_{\min}\left(\left[\frac{P(\lambda)}{\sqrt{\mu_1(\lambda)}}, B\right]\right).\end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự, ta tính được

$$E_2 = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ \alpha_{-1}I_n & 0\\ 0 & I_m\end{bmatrix}.$$

Vì E_2 có hạng bằng số cột nên

$$E_2^{*\dagger} = E_2(E_2^*E_2)^{-1} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ \alpha_{-1}\mu_2(\lambda)^{-1}I_n & 0\\ 0 & I_m\end{bmatrix}.$$

Tương tự, ta cũng nhận được

$$\sigma_{\min}(E_2^{*\dagger}W_2(\lambda)^*, D^*) = \sigma_{\min}\left(\left[\frac{A_{-1}-\lambda I_n}{\sqrt{\mu_2}}, B\right]\right),$$

và

$$\sigma_{\min}(E_3(\lambda)^{*\dagger}W_3(\lambda)^*, D^*) = \sigma_{\min}\left(\left[\frac{A_1+\lambda A_{-1}}{\sqrt{\mu_3(\lambda)}}, B\right]\right).$$

Vì vậy, từ các kết quả của Định lý 3.2.3, ta nhận được công thức (3.24). Hệ quả đã được chứng minh. □

Tương tự kết quả của Định lý 3.2.4, ta có

Hệ quả 3.2.6. *Giả sử rằng hệ điều khiển tuyến tính trung tính* (3.1) *là điều khiển được chính xác và các không gian vectơ được trang bị bởi chuẩn vectơ Euclide. Khi đó, các bán kính điều khiển được của hệ* (3.1) *tương ứng với nhiễu cấu trúc dạng* (3.22) *được cho bởi các công thức dưới đây:*

$$\begin{aligned}
r_{\mathbb{R}}^{ex} &= \min\left\{\inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \tau_n(W_1(\lambda), E_1(\lambda)), \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \tau_n(W_2(\lambda), E_2)\right\},\\
r_{\mathbb{R}}^{ap} &= \min\left\{\inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \tau_n(W_1(\lambda), E_1(\lambda)), \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \tau_n(W_3(\lambda), E_3(\lambda))\right\},\\
r_{\mathbb{R}}^{eu} &= \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \tau_n(W_1(\lambda), E_1(\lambda)),
\end{aligned}$$

trong đó

$$E_1(\lambda) = \begin{bmatrix} \alpha_0 I_n & 0\\ \alpha_1 e^{-h\lambda} I_n & 0\\ \alpha_{-1}\lambda e^{-h\lambda} I_n & 0\\ 0 & I_m \end{bmatrix},$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\\ \alpha_{-1} I_n & 0\\ 0 & I_m \end{bmatrix},\ E_3(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0\\ \alpha_1 I_n & 0\\ \alpha_{-1}\lambda I_n & 0\\ 0 & I_m \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 3.2.7. Xét hệ tuyến tính trung tính

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-1) + A_{-1}\dot{x}(t-1) + Bu(t), \tag{3.25}$$

ở đó

$$A_0 = A_{-1} = \begin{bmatrix} 1.21 & -1.45 & 1.56\\ 1.33 & 0 & 1.33\\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1\\ 1.41 & -1.41 & 1.41\\ 1.73 & 0 & -1.73 \end{bmatrix},$$

và $A_1 = -A_0$. Khi đó, $P(\lambda) = A_0 + A_1 e^{-\lambda} + \lambda A_{-1} e^{-\lambda} - \lambda I_n$.

Vì $\det B = 4.8786 \neq 0$ nên rank$B = 3$. Do đó, rank$[P(\lambda), B] = 3$, với mọi $\lambda \in \mathbb{C}$ và rank$[B, A_{-1}B, \dots, A_{-1}^{n-1}B] = 3$. Theo các kết quả của Mệnh đề 1.4.5 (i), (ii), hệ (3.25) là điều khiển được chính xác. Giả sử rằng các ma trận A_0, A_1, A_{-1}, B được nhiễu như sau:

$$A_0 \rightsquigarrow A_0 + 2\Delta_{A_0}, \quad A_1 \rightsquigarrow A_1 + 2\Delta_{A_1}, \quad A_{-1} \rightsquigarrow A_{-1} + 2\Delta_{A_{-1}}, \quad B \rightsquigarrow B + \Delta_B.$$

Từ Hệ quả 3.2.5, Hệ quả 3.2.6, ta thấy rằng $r^{ex}_{\mathbb{C}}$, $r^{ap}_{\mathbb{C}}$, ${}^{eu}_{\mathbb{C}}$, $r^{ex}_{\mathbb{R}}$, $r^{ap}_{\mathbb{R}}$, $r^{eu}_{\mathbb{R}}$ đều nhận $\sigma_{\min}(B)$ làm cận dưới. Hơn thế nữa, tất cả các dấu bằng xảy ra tại $\lambda = 0$. Do đó

$$\begin{aligned} &r^{ex}_{\mathbb{C}} = r^{ap}_{\mathbb{C}} = r^{eu}_{\mathbb{C}} = \\ &r^{ex}_{\mathbb{R}} = r^{ap}_{\mathbb{R}} = r^{eu}_{\mathbb{R}} = \sigma_{\min}(B) = 0.5849. \end{aligned}$$

3.3 Kết luận chương

Trong chương này, luận án thu được các công thức tính bán kính điều khiển được Euclide phức, bán kính điều khiển được chính xác phức, bán kính điều khiển được xấp xỉ phức trên không gian $W_2^1([-h, 0], \mathbb{C}^n)$ của hệ tuyến tính trung tính (3.1) khi các ma trận của hệ được nhiễu có cấu trúc dạng (3.2). Vì cấu trúc nhiễu khối ma trận của hệ được xét tương tự cấu trúc nhiễu đã được nghiên cứu ở Chương 2 nên các kĩ thuật chứng minh của các kết quả trong Chương 2 được dùng trong Chương 3. Tuy nhiên, ngoài một số trường hợp đặc biệt được nghiên cứu tương tự Chương 2: Ma trận E trong cấu trúc nhiễu (3.1) có hạng bằng số cột, ma trận D khả nghịch, các không gian vectơ được trang bị các chuẩn Euclide, chúng tôi còn sử dụng đến khái niệm ma trận cơ sở của không gian nhân trái của một ma trận để thiết lập các công thức tính các bán kính điều khiển được (Định lý 3.2.1).

Với bán kính điều khiển được thực, chúng tôi cũng chỉ đưa ra công thức tính trong trường hợp đặc biệt khi ma trận D trong cấu trúc nhiễu (3.2) khả nghịch tương tự Chương 2. Trong chương này, chúng tôi cũng chưa xét đến mối quan hệ giữa các loại bán kính và cũng chưa đưa ra được công thức tính cụ thể cho các bán kính điều khiển thực. Đó là vấn đề chúng tôi sẽ tiếp tục tìm hiểu trong thời gian tới.

Đặc biệt, khi hệ tuyến tính có trễ rời rạc (2.1) có một trễ, tức là $k = 1$, thì đây là một trường hợp riêng của hệ tuyến tính trung tính (3.1) với $A_{-1} = 0$. Do đó, ta có thể áp dụng các kết quả của Chương 3 cho hệ tuyến tính có trễ rời rạc trong trường hợp hệ này có một trễ. Tuy nhiên, các kết quả của Chương 3 không bao trùm các kết quả của Chương 2 vì trong Chương 2 ta xét hệ tuyến tính có trễ rời rạc (2.1) có đa trễ, còn trong Chương 3 ta chỉ xét một trễ trong biến trạng thái. Hơn nữa, trong Chương 3 ta còn nghiên cứu sự bền vững của tính điều khiển được chính xác trên không gian Sobolev $W_2^1([-h, 0], \mathbb{C}^n)$ cho hệ trung tính, nội dung này không có trong Chương 2. Như vậy, các kết quả của Chương 2 độc lập với các kết quả Chương 3.

Cuối cùng, ta chú ý rằng các hệ được xét trong Chương 2 và Chương 3 xuất hiện các trễ rời rạc trong phần biến và đạo hàm. Trong chương tới, luận án sẽ nghiên cứu bài toán điều khiển được vững cho hệ tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm, hệ tổng quát hơn hệ tuyến tính có trễ rời rạc nhưng không có trễ trong đạo hàm như hệ tuyến tính trung tính. Vì vậy, các cấu trúc nhiễu được nghiên cứu cho hệ tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm cũng sẽ phức tạp hơn các cấu trúc nhiễu đã được xét cho các hệ trong Chương 2 và Chương 3.

Chương 4

TÍNH ĐIỀU KHIỂN ĐƯỢC VỮNG CỦA HỆ TUYẾN TÍNH CÓ TRỄ MÔ TẢ BỞI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN PHIẾM HÀM

Nội dung của chương này được lấy trong bài báo [CT3] trong Danh mục công trình. Chương này sẽ trình bày về sự bền vững của tính M_p-điều khiển được xấp xỉ của hệ tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm được mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm:

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + \int_{-h}^{0} d[\eta(\theta)]x(t+\theta) + B_0u(t), \quad t \geqslant 0, \tag{4.1}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{K}^n, u(t) \in \mathbb{K}^m$, với $t \geqslant 0$, $A_0 \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $B_0 \in \mathbb{K}^{n\times m}$, $\eta(\cdot) = (\eta_{ij}(\cdot))_{i,j=\overline{1,n}} \in BV([-h,0],\mathbb{K}^{n\times n})$ là hàm ma trận với các thành phần η_{ij} là các hàm có biến phân giới nội trên đoạn $[-h,0]$, với $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{C}$ và tích phân ở đây được hiểu theo nghĩa Lebesgue-Stieltjes.

Trong phần đầu của chương này, luận án thiết lập tiêu chuẩn mới cho tính M_p-điều khiển được xấp xỉ của hệ (4.1) trong trường hợp η có nguyên tử cô lập tại $-h$. Trong phần còn lại của chương, các khái niệm, các đánh giá và các công thức tính của bán kính điều khiển được phổ và bán kính M_p-điều khiển được xấp xỉ (trong trường hợp η có nguyên tử cô lập tại $-h$) của hệ tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm (4.1) được đưa ra. Một số ví dụ được đưa ra để minh họa các kết quả nhận được.

4.1 Các đặc trưng của tính điều khiển được xấp xỉ

Như trong phần 1.3 của Chương 1 đã giới thiệu, ta biết rằng hệ (4.1) có thể viết lại dưới dạng

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + L x_t + B_0 u(t), \quad t \geqslant 0, \tag{4.2}$$

ở đó, $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ với $-h \leqslant \theta \leqslant 0$ và L là toán tử tuyến tính bị chặn từ không gian $\mathcal{C} := C([-h,0],\mathbb{K}^n)$ vào không gian $\mathbb{K}^n$, được xác định bởi:

$$L\phi = \int_{-h}^{0} d[\eta(\theta)]\phi(\theta), \quad \phi \in \mathcal{C}. \tag{4.3}$$

Trong suốt chương này, không mất tính tổng quát ta giả sử

$$\eta(\cdot) \in \mathrm{NBV}([-h,0],\mathbb{K}^{n\times n}),$$

tức là, η là ma trận hàm có các thành phần có biến phân giới nội trên đoạn $[-h,0]$ và $\eta(\theta) = \eta(-h) = 0$, với mọi $\theta \leqslant -h$, $\eta(a) = \eta(0)$, với mọi $a \geqslant 0$ và η liên tục trái trên khoảng $(-h,0)$.

Trong chương 1, ta đã biết tiêu chuẩn để hệ (4.2)-(4.3) là M_p-điều khiển được xấp xỉ là rất phức tạp và điều kiện $(\text{ii})_1$ trong Định lý 1.3.15 không dễ kiểm tra. Bây giờ, chúng tôi sẽ đưa ra tiêu chuẩn mới để kiểm tra tính M_p-điều khiển được xấp xỉ với các hệ tuyến tính có trễ (4.2)-(4.3) trong trường hợp η có nguyên tử cô lập tại $-h$. Ta xét định nghĩa sau.

Định nghĩa 4.1.1. Giả sử rằng $\eta \in NBV([-h,0],\mathbb{K}^{n\times n})$, ta nói rằng η có *nguyên tử cô lập* (isolated atom) tại $-h$ nếu tồn tại ma trận $A_h \in \mathbb{K}^{n\times n}$ và $\epsilon \in (0,h]$ sao cho

$$\eta(\theta) \equiv A_h \quad \text{với } \theta \in (-h,-h+\epsilon]. \tag{4.4}$$

Nói cách khác, η là hàm bước trong lân cận $(-h,-h+\epsilon]$ của $-h$, với bước nhảy từ 0 tại $-h$ (vì từ định nghĩa của $NBV([-h,0],\mathbb{K}^{n\times n})$, ta có $\eta(-h)=0$). Do đó, ta có thể nói η có nguyên tử cô lập (A_h) tại $-h$. Chú ý rằng, định nghĩa nguyên tử cô lập được nêu trên khác biệt so với định nghĩa nguyên tử cô lập đã được M.C. Delfour và A. Manitus đưa ra năm 1980 trong tài liệu [19].

Định lý 4.1.2. *Giả sử rằng η có nguyên tử cô lập (A_h) tại $-h$. Khi đó, hệ tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm* (4.2)-(4.3) *là M_p-điều khiển được xấp xỉ nếu và chỉ nếu*

$$\begin{aligned} &(\mathrm{i})_2 \quad \operatorname{rank} W(\lambda) = n, \quad \text{với mọi } \lambda \in \mathbb{C},\\ &(\mathrm{ii})_2 \quad \operatorname{rank}\,[A_h, B_0] = n, \end{aligned}$$

trong đó $W(\lambda)=[P(\lambda),B_0]$, với $P(\lambda)=A_0+\int_{-h}^{0} d[\eta(\theta)]e^{\lambda\theta}-\lambda I_n$ là ma trận của tựa đa thức đặc trưng của hệ (4.2).

Chứng minh. Từ kết quả của Định lý 1.3.15, ta thấy rằng để chứng minh định lý ta chỉ cần chỉ ra trong trường hợp này điều kiện $(\mathrm{ii})_1$ của Định lý 1.3.15 tương đương với điều kiện $(\mathrm{ii})_2$ được phát biểu ở trên. Thật vậy, với mỗi $\psi^1 \in L_q([-h,0],\mathbb{K}^n)$, từ công thức xác định toán tử (1.17) và định nghĩa (4.4), ta có

$$(H^*\psi^1)(\alpha) = A_h^*\psi^1(-h-\alpha), \quad \alpha \in (-h,-h+\epsilon), \tag{4.5}$$

và

$$(H^*\psi^1)(\alpha) = A_h^*\psi^1(-h-\alpha) + \int_{-h+\epsilon}^{\alpha} d[\eta^*(\theta)]\psi^1(\theta-\alpha), \quad \alpha \in [-h+\epsilon,0]. \tag{4.6}$$

Nếu rank$[A_h, B_0] < n$ thì tồn tại $0 \neq y_0 \in \mathbb{K}^n$ sao cho $A_h^* y_0 = 0$ và $B_0^* y_0 = 0$. Bằng cách định nghĩa $\psi^1(-h-\alpha) = y_0, \quad \alpha \in [-h, -h+\epsilon)$ và $\psi^1(-h-\alpha) = 0, \quad \alpha \in [-h+\epsilon, 0]$, ta nhận được $0 \neq \psi^1 \in$ Ker $H^* \cap$ Ker G^*. Ngược lại, giả sử rằng rank$[A_h, B] = n$ và lấy tùy ý $\psi^1 \in$ Ker $H^* \cap$ Ker $G^* \subset L_q([-h, 0], \mathbb{K}^n)$. Vì $\epsilon > 0$ nên tồn tại số nguyên dương $m > 0$ sao cho $-h + m\epsilon < 0 \leqslant -h + (m+1)\epsilon$. Khi đó, từ (4.5), ta có

$(H^*\psi^1)(\alpha) = A_h^*\psi^1(-h-\alpha) = 0$, hầu khắp nơi trên khoảng $[-h, -h+\epsilon)$,

và từ (1.38), ta có

$$(G^*\psi^1)(\alpha) = B_0^*\psi^1(\alpha) = 0, \quad \text{hầu khắp nơi trên khoảng } \alpha \in [-h, 0].$$

Đặt $\tau = -h - \alpha$, dễ thấy rằng từ giả thiết rank $[A_h, B_0] = n$, ta có

$$\psi^1(\tau) \equiv 0 \;\text{ hầu khắp nơi trên khoảng } (-\epsilon, 0]. \tag{4.7}$$

Hơn nữa, từ (4.6), ta nhận được:

$$(H^*\psi^1)(\alpha) = A_h^*\psi^1(-h-\alpha) + \int_{-h+\epsilon}^{\alpha} d[\eta^*(\theta)]\psi^1(\theta-\alpha) = 0, \tag{4.8}$$

hầu khắp nơi trên $[-h+\epsilon, -h+2\epsilon)$. Bằng cách đổi biến $\xi = \theta - \alpha$, ta có thể viết lại phương trình (4.8) như sau:

$$(H^*\psi^1)(\alpha) = A_h^*\psi^1(-h-\alpha) + \int_{-\epsilon}^{0} d[\eta^*(\xi+\alpha)]\psi^1(\xi) = 0,$$

hầu khắp nơi trên $[-h+\epsilon, -h+2\epsilon)$, điều này kết hợp với (4.7), ta nhận được $A_h^*\psi^1(-h-\alpha) = 0$, với hầu hết $\alpha \in [-h+\epsilon, -h+2\epsilon)$. Khi đó, từ giả thiết rank $[A_h, B_0] = n$, ta thu được $\psi^1(-h-\alpha) = 0$ hầu khắp nơi trên $[-h+\epsilon, -h+2\epsilon)$, hay

$$\psi^1(\tau) \equiv 0 \;\text{ hầu khắp nơi trên khoảng } (-2\epsilon, -\epsilon]. \tag{4.9}$$

Lặp lại quá trình chứng minh ở trên cho các khoảng $[-h+(k-1)\epsilon, -h+k\epsilon), k = 3, \ldots, m+1$, cuối cùng ta nhận được $\psi^1(\tau) \equiv 0$, với hầu hết $\tau \in [-h, 0]$. Điều này dẫn đến Ker $H^* \cap$ Ker $G^* = \{0\}$, chứng minh đã được hoàn thành. $\square$

Bây giờ, ta sẽ xét trường hợp đặc biệt của hệ (4.2)-(4.3) khi η có dạng:

$$\eta(\theta) = \sum_{j=1}^{N} A_j \chi_{(-h_j,0]}(\theta) + \int_{-h}^{\theta} Q(s)ds, \tag{4.10}$$

trong đó $0 = h_0 < h_1 < h_2 < \ldots < h_N = h$, $\chi_{(-h_j,0]}$ là hàm đặc trưng của tập $(-h_j, 0]$, với $j = 1, ..., N$, $Q(\cdot)$ là $\mathbb{K}^{n\times n}$-các hàm số khả tích xác định trên đoạn trên $[-h, 0]$ và được mở rộng tới $(-\infty, \infty)$ bằng cách đặt $Q(s) \equiv 0$ với mọi $s \notin [-h, 0]$. Khi đó, hệ điều khiển tuyến tính (4.2)-(4.3) được viết lại như sau:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{j=1}^{N} A_j x(t-h_j) + \int_{-h}^{0} Q(\theta)x(t+\theta)d\theta + B_0 u(t), \quad t \geqslant 0. \tag{4.11}$$

Trong trường hợp này, toán tử cấu trúc H trong (1.15) được viết lại là

$$(H\phi^1)(\theta) = \sum_{j=1}^{N} A_j \phi^1(-h_j - \theta)\chi_{(-h_j,0]}(\theta) + \int_{-h}^{\theta} Q(s)\phi^1(s-\theta)ds, \ \ \theta \in [-h, 0]. \tag{4.12}$$

Dễ thấy rằng, nếu $Q(\theta) \equiv 0, \theta \in [-h, -h+\gamma]$ với $\gamma > 0$ nào đó thì η có nguyên tử cô lập (A_N) tại $-h$, với $\epsilon = \min\{h_N - h_{N-1}, \gamma\}$. Do đó, như một hệ quả của Định lý 4.1.2, ta nhận được đặc trưng rõ ràng hơn của tính M_p- điều khiển được xấp xỉ với hệ tuyến tính có trễ (4.11) qua hệ quả sau:

Hệ quả 4.1.3. *Hệ (4.11) với $Q(\theta) \equiv 0, \theta \in [-h, -h+\gamma]$ với $\gamma > 0$ nào đó, là M_p-điều khiển được xấp xỉ nếu và chỉ nếu*

(i) $$\operatorname{rank}\Big[\sum_{j=0}^{N} A_j e^{-\lambda h_j} + \int_{-h}^{0} Q(\theta)e^{\lambda\theta}d\theta - \lambda I_n, B_0\Big] = n, \quad \text{với mọi } \lambda \in \mathbb{C}, \tag{4.13}$$

(ii) $$\operatorname{rank}\,[A_N, B_0] = n. \tag{4.14}$$

Chú ý rằng, với trường hợp $Q(\theta) \equiv 0, \theta \in [-h, 0]$, kết quả trên đã được A. Manitus chứng minh theo cách khác trong bài báo [48].

4.2 Khoảng cách tới tập không điều khiển được của hệ điều khiển tuyến tính có trễ

Giả sử rằng hệ (4.2)-(4.3) là điều khiển được xấp xỉ trong không gian trạng thái M_p và được nhiễu bởi các nhiễu tham số afin:

$$\begin{aligned} [A_0, B_0] \ &\rightsquigarrow \ [\widetilde{A}_0, \widetilde{B}_0] = \ [A_0, B_0] + D_0\Delta_0 E_0, \\ \eta(\cdot) \ &\rightsquigarrow \ \widetilde{\eta}(\cdot) = \eta(\cdot) + D_1\delta(\cdot)E_1. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Hệ nhiễu tương ứng được mô tả bởi

$$\dot{x}(t) = \widetilde{A}_0 x(t) + \widetilde{L}x_t + \widetilde{B}_0 u(t), \quad t \geqslant 0, \tag{4.16}$$

trong đó $\widetilde{L}$ là toán tử tuyến tính nhiễu bị chặn từ không gian $\mathcal{C} := C([-h, 0], \mathbb{K}^n)$ tới không gian $\mathbb{K}^n$ được xác định bởi

$$\widetilde{L}\phi = \int_{-h}^{0} d[\eta(\theta) + D_1\delta(\theta)E_1]\phi(\theta), \ \phi \in \mathcal{C}. \tag{4.17}$$

Ở đây $D_i \in \mathbb{K}^{n\times l_i}, i = 0, 1$ và $E_0 \in \mathbb{K}^{q_0\times(n+m)}, E_1 \in \mathbb{K}^{q_1\times n}$ là các ma trận cho trước xác định các cấu trúc nhiễu, $\Delta_0 \in \mathbb{C}^{l_0\times q_0}$ và $\delta(\cdot) \in \mathrm{NBV}([-h, 0], \mathbb{C}^{l_1\times q_1})$ là các nhiễu phức chưa biết. Ta sẽ giả sử rằng mỗi ma trận hàm nhiễu $\delta(\cdot)$ được mở rộng trên toàn không gian thực $\mathbb{R}$ bằng cách đặt $\delta(\theta) = \delta(-h) = 0$ với $\theta \leqslant -h$ và $\delta(\theta) = \delta(0)$ với $\theta > 0$. Chú ý rằng, các ma trận $D_i, E_i, i = 0, 1$ có thể phản ánh cấu trúc nhiễu, ví dụ trong trường hợp không phải tất cả các phần tử của các ma trận A_0, B_0 bị nhiễu và tất cả các hàm của η bị nhiễu. Giả sử chỉ có các phần tử của dòng thứ n của ma trận $[A_0, B_0]$ bị nhiễu và của η trong hệ (4.2)-(4.3) bị nhiễu. Khi đó, trong tình huống này, ta có thể mô tả lại cấu trúc nhiễu (4.15) bằng cách chọn $l_0 = l_1 = 1, q_0 = n + m, q_1 = n, D_0 = D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{K}^{(n\times 1)}$ và $E_0 = I_{n+m}, E_1 = I_n$. Trường hợp nhiễu không có cấu trúc

$$\begin{aligned} A_0 &\rightsquigarrow \widetilde{A}_0 = A_0 + \Delta_A, \quad B_0 \rightsquigarrow \widetilde{B}_0 = B_0 + \Delta_B, \\ \eta(\cdot) &\rightsquigarrow \widetilde{\eta}(\cdot) = \eta(\cdot) + \delta(\cdot) \end{aligned} \tag{4.18}$$

là trường hợp đặc biệt của mô hình nhiễu (4.15), với

$$D_0 = D_1 = E_1 = I_n, \quad E_0 = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times m} \\ 0_{m\times n} & I_m \end{bmatrix}, \ \Delta_0 = [\Delta_A, \Delta_B]. \tag{4.19}$$

Bây giờ, chúng ta sẽ đo kích cỡ của các nhiễu

$$(\Delta_0, \delta) \in \mathbb{C}^{l_0\times q_0} \times \mathrm{NBV}([-h, 0], \mathbb{C}^{l_1\times q_1})$$

bằng cách định nghĩa

$$\|(\Delta_0, \delta)\| := \|\Delta_0\| + \|\delta\|, \tag{4.20}$$

trong đó $\|\Delta_0\|$ là chuẩn toán tử của ma trận Δ_0 được xác định như trong (2.8), và $\|\delta\| := V(\delta, [-h, 0])$ là tổng biến phân của δ. Tiếp theo, để nghiên cứu tính bền vững của tính M_p điều khiển được xấp xỉ của hệ điều khiển tuyến tính có trễ (4.2)-(4.3), chúng tôi đưa ra một số định nghĩa sau.

Định nghĩa 4.2.1. Giả sử hệ tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm (4.2)-(4.3) là M_p- điều khiển được xấp xỉ và các ma trận của hệ được nhiễu có cấu trúc dạng (4.15). Khi đó, bán kính điều khiển được xấp xỉ trong không gian trạng thái $M_p = \mathbb{K}^n \times L_p([-h, 0], \mathbb{K}^n)$ của hệ (4.2)-(4.3), tương ứng với các nhiễu có trúc (Δ_0, δ) dạng (4.15) được xác định bởi

$$\begin{aligned} &r_{M_p}(A_0,\eta,B_0) := r_{M_p}(A_0,\eta,B_0, D_i, E_i, i \in \{0,1\}) \\ &\quad := \inf\Big\{\|(\Delta_0,\delta)\| : \text{Hệ (4.16)-(4.17) không } M_p\text{-điều khiển được xấp xỉ}\Big\}, \end{aligned} \tag{4.21}$$

trong đó, chuẩn $\|(\Delta_0,\delta)\|$ được xác định trong (4.20).

Chú ý rằng, trong [56], điều kiện cần và đủ để hệ (4.2)-(4.3) là điều khiển được phổ là điều kiện $(i)_1$ của Định lý 1.3.15 xảy ra, tức là

$$\operatorname{rank} W(\lambda) = n, \text{ với mọi } \lambda \in \mathbb{C}. \tag{4.22}$$

Do đó, hoàn toàn tương tự, chúng ta sẽ định nghĩa *bán kính điều khiển được phổ* của hệ điều khiển tuyến tính có trễ (4.2)-(4.3) khi các ma trận của hệ được nhiễu cấu trúc dạng (4.15) như sau:

Định nghĩa 4.2.2. Giả sử hệ điều khiển tuyến tính có trễ được mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm (4.2)-(4.3) là điều khiển được phổ và các ma trận của hệ được nhiễu bởi các nhiễu có trúc (Δ_0, δ) dạng (4.15). Khi đó, bán kính điều khiển được phổ của hệ tương ứng với cấu trúc nhiễu (4.15), được xác định bởi

$$\begin{aligned} r_{sp}(A_0, \eta, B_0) &:= r_{sp}(A_0, \eta, B_0, D_i, E_i, i \in \{0,1\}) \\ &:= \inf\left\{\|(\Delta_0, \delta)\| : \exists \lambda_0 \in \mathbb{C},\ \operatorname{rank}\,[\widetilde{P}(\lambda_0), \widetilde{B}_0] < n\right\}, \end{aligned} \tag{4.23}$$

ở đây

$$\widetilde{P}(\lambda) = \widetilde{A}_0 + \int_{-h}^{0} d[\widetilde{\eta}(\theta)]e^{\lambda\theta} - \lambda I_n$$

là ma trận của tựa đa thức đặc trưng của hệ nhiễu (4.16)-(4.17).

Sau đây, để thiết lập các công thức tính toán các bán kính điều khiển trên, chúng ta sẽ cần một số kết quả kỹ thuật dưới đây.

Giả sử rằng $W(\lambda) : \mathbb{C}^{n+m} \to \mathbb{C}^n$ là toàn ánh với mỗi $\lambda \in \mathbb{C}$ và được nhiễu dạng

$$W(\lambda) \rightsquigarrow \widetilde{W}(\lambda) := W(\lambda) + D\Delta E(\lambda), \tag{4.24}$$

trong đó $D \in \mathbb{K}^{n\times l}$ và $E(\lambda) \in \mathbb{K}^{q\times(n+m)}, \lambda \in \mathbb{C}$ là các ma trận đã cho và $\Delta \in \mathbb{C}^{l\times q}$ là ma trận nhiễu phức chưa biết. Khi đó, ta có thể xác định khoảng cách tới tập không toàn ánh của $W(\lambda)$ tương ứng với nhiễu (4.24) là

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(W(\cdot); D, E(\cdot)) = \inf\{&\|\Delta\| : \Delta \in \mathbb{C}^{l\times q}, \exists \lambda \in \mathbb{C}, \\ &W(\lambda) + D\Delta E(\lambda) \text{ không toàn ánh}\}. \end{aligned}$$

Định lý 4.2.3. *Khoảng cách tới tập không toàn ánh của $W(\cdot)$ tương ứng với các nhiễu (4.24) được cho bởi*

$$\operatorname{dist}(W(\cdot); D, E(\cdot)) = \frac{1}{\sup_{\lambda\in\mathbb{C}} \|E(\lambda)W^{-1}(\lambda)D\|}. \tag{4.25}$$

Chứng minh. Chứng minh của định lý tương tự như phần đầu của chứng minh của Định lý 4.3.5. Giả sử rằng với $\Delta \in \mathbb{C}^{l\times q}$, toán tử nhiễu $\widetilde{W}(\lambda_0)$ không toàn ánh với $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ nào đó. Khi đó, từ (4.24) và biểu thức (1.37) trong Mệnh đề 1.5.6, ta có

$$\begin{aligned}\|\Delta\| \geqslant \operatorname{dist}(W(\lambda_0); D, E(\lambda_0)) &= \frac{1}{\|E(\lambda_0)W^{-1}(\lambda_0)D\|}\\ &\geqslant \frac{1}{\sup_{\lambda\in\mathbb{C}} \|E(\lambda)W^{-1}(\lambda)D\|},\end{aligned}$$

điều này dẫn đến bất đẳng thức ($\geqslant$) với hai vế của (4.25). Để chứng minh bất đẳng thức ngược lại ($\leqslant$), với mỗi $\epsilon > 0$ bé tùy ý, tồn tại $\lambda_\epsilon \in \mathbb{C}$ sao cho

$$\|E(\lambda_\epsilon)W(\lambda_\epsilon)^{-1}D\| \geqslant \sup_{\lambda\in\mathbb{C}} \|E(\lambda)W(\lambda)^{-1}D\| - \epsilon > 0.$$

Khi đó, vì $W(\lambda_\epsilon)$ là toàn ánh nên từ (4.25) kéo theo tồn tại ma trận nhiễu Δ_ϵ sao cho

$$\|\Delta_\epsilon\| \leq \frac{1}{\|E(\lambda_\epsilon)W(\lambda_\epsilon)^{-1}D\| - \epsilon}$$

và ma trận nhiễu $\widetilde{W}(\lambda_\epsilon) = W(\lambda_\epsilon) + D\Delta_\epsilon E(\lambda_\epsilon)$ không toàn ánh . Do đó, từ định nghĩa và các đánh giá trên, ta nhận được

$$\operatorname{dist}(W(\cdot); D, E(\cdot)) \leqslant \|\Delta_\epsilon\| \leqslant \frac{1}{\sup_{\lambda\in\mathbb{C}} \|E(\lambda)W(\lambda)^{-1}D\| - 2\epsilon}.$$

Cho $\epsilon \to 0$, ta nhận được kết quả cần chứng minh. Chứng minh đã được hoàn thành. □

Hệ quả 4.2.4. *Cho $A \in \mathbb{K}^{n\times n}, B \in \mathbb{K}^{n\times m}$ là các ma trận sao cho* rank $[A, B] = n$. *Giả sử rằng A, B được nhiễu afin dạng*

$$A \rightsquigarrow \widetilde{A} = A + D_1\Delta_1E_1, \quad \text{và } B \rightsquigarrow \widetilde{B} = B + D_2\Delta_2E_2, \tag{4.26}$$

trong đó $D_i \in \mathbb{K}^{n\times l_i}, i = 1,2, E_1 \in \mathbb{K}^{q_1\times n}, E_2 \in \mathbb{K}^{q_2\times m}$ *là các ma trận xác định cấu trúc và* $\Delta_i \in \mathbb{C}^{l_i\times q_i}, i = 1,2,$ *là các ma trận nhiễu phức chưa biết. Khi đó, khoảng cách tới tập không toàn ánh của ma trận* $[A, B]$ *tương ứng với nhiễu có cấu trúc dạng* (4.26) *được xác định bởi*

$$\operatorname{dist}([A,B], D_i, E_i, i \in \{1,2\}) = \inf\{\|\Delta_1\| + \|\Delta_2\| : \operatorname{rank}[\widetilde{A}, \widetilde{B}] < n\}, \tag{4.27}$$

thỏa mãn các đánh giá

$$\begin{aligned} \frac{1}{\max_{i,j\in\{1,2\}} \|E_{0i}[A,B]^{-1}D_j\|} &\leqslant \operatorname{dist}([A,B], D_i, E_i, i \in \{1,2\}) \\ &\leqslant \frac{1}{\max_{i\in\{1,2\}} \|E_{0i}[A,B]^{-1}D_i\|}, \end{aligned} \tag{4.28}$$

trong đó

$$E_{01} = [E_1, 0_{q_1\times m}], \quad E_{02} = [0_{q_2\times n}, E_2].$$

Đặc biệt, nếu $D_1 = D_2 = D$ *thì*

$$\operatorname{dist}([A,B], D_i, E_i, i \in \{1,2\}) = \frac{1}{\max_{i\in\{1,2\}} \|E_{0i}[A,B]^{-1}D\|}. \tag{4.29}$$

Chứng minh. Lấy $[\Delta_1, \Delta_2]$ là ma trận nhiễu bất kì sao cho $\operatorname{rank}[A + D_1\Delta_1E_1, B + D_2\Delta_2E_2] < n$. Khi đó, tồn tại $0 \neq y_0^* \in \mathbb{K}^n$ thỏa mãn

$$[A + D_1\Delta_1E_1, B + D_2\Delta_2E_2]^*(y_0^*) = 0. \tag{4.30}$$

Bằng cách viết

$$\begin{aligned} [\widetilde{A}, \widetilde{B}] &= [A + D_1\Delta_1E_1, B + D_2\Delta_2E_2] = [A,B] + [D_1\Delta_1E_1, D_2\Delta_2E_2] \\ &= [A,B] + D_1\Delta_1E_{01} + D_2\Delta_2E_{02}, \end{aligned} \tag{4.31}$$

từ (4.30), ta nhận được

$$[A,B]^*(y_0^*) = -E_{01}^*\Delta_1^*D_1^*(y_0^*) - E_{02}^*\Delta_2^*D_2^*(y_0^*). \tag{4.32}$$

Từ tính toàn ánh của ma trận $[A, B]$, ta có toán tử $[A,B]^{*-1}$ là toán tử đơn trị tuyến tính. Do đó,

$$y_0^* = -[A,B]^{*-1}E_{01}^*\Delta_1^*D_1^*(y_0^*) - [A,B]^{*-1}E_{02}^*\Delta_2^*D_2^*(y_0^*). \tag{4.33}$$

Chọn $i_0 \in \{1,2\}$ sao cho $\|D^*_{i_0}(y^*_0)\| = \max\{\|D^*_1(y^*_0)\|, \|D^*_2(y^*_0)\|\}$, từ (4.33), ta nhận được $\|D^*_{i_0}(y^*_0)\| > 0$. Bằng cách tác động ánh xạ $D^*_{i_0}$ vào bên trái hai vế của (4.33), ta có được các đánh giá

$$\begin{aligned} 0 < \|D^*_{i_0}(y^*_0)\| &\leqslant \|D^*_{i_0}[A,B]^{*-1}E^*_{01}\|\|\Delta^*_1\|\|D^*_1(y^*_0)\| \\ &\quad + \|D^*_{i_0}[A,B]^{*-1}E^*_{02}\|\|\Delta^*_2\|\|D^*_2(y^*_0)\| \\ &\leqslant \max_{i,j\in\{1,2\}} \|D^*_j[A,B]^{*-1}E^*_{0i}\|(\|\Delta^*_1\| + \|\Delta^*_2\|)\|D^*_{i_0}(y^*_0)\|. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Điều này dẫn đến

$$\begin{aligned} \|\Delta_1\| + \|\Delta_2\| = \|\Delta^*_1\| + \|\Delta^*_2\| &\geqslant \frac{1}{\max_{i,j\in\{1,2\}}\{\|D^*_j[A,B]^{*-1}E^*_{0i}\|\}} \\ &= \frac{1}{\max_{i,j\in\{1,2\}}\|E_{0i}[A,B]^{-1}D_j\|}. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Vì (4.35) xảy ra với mọi nhiễu $[\Delta_1, \Delta_2]$ phá vỡ tính toàn ánh của ma trận $[A,B]$ nên từ định nghĩa (4.27), ta nhận được chặn dưới

$$\frac{1}{\max_{i,j\in\{1,2\}}\|E_{0i}[A,B]^{-1}D_j\|} \leqslant \operatorname{dist}([A,B], D_i, E_i, i \in \{1,2\}).$$

Để chứng minh chặn trên ta chọn nhiễu $[\Delta_1, 0]$ sao cho $\operatorname{rank}([A,B] + D_1\Delta_1E_{01}) < n$. Khi đó, theo kết quả của Mệnh đề 1.5.6, ta nhận được

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}([A,B], D_i, E_i, i \in \{1,2\}) &\leqslant \inf\{\|\Delta_1\| : \operatorname{rank}([A,B] + D_1\Delta_1E_{01}) < n\} \\ &= \frac{1}{\|E_{01}[A,B]^{-1}D_1\|}. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Hoàn toàn tương tự, bằng cách lấy các nhiễu $[0, \Delta_2]$, ta có

$$\operatorname{dist}([A,B], D_i, E_i, i \in \{1,2\}) \leqslant \frac{1}{\|E_{02}[A,B]^{-1}D_2\|}.$$

Kết hợp với (4.36), ta nhận được chặn trên mong muốn. Chứng minh đã được hoàn thành. □

Bổ đề 4.2.5. *Cho $F : \mathbb{K}^q \to \mathbb{K}^l$ là toán tử tuyến tính bị chặn. Ta xét toán tử tuyến tính bị chặn $\hat{F} : L_p([a,b],\mathbb{K}^q) \to L_p([a,b],\mathbb{K}^l)$ xác định bởi, với mỗi $u(\cdot) \in L_p([a,b],\mathbb{K}^q)$ thì*

$$(\hat{F}u)(\theta) = Fu(\theta),\ \ \theta \in [a,b].$$

Khi đó, nếu F là toàn ánh thì toán tử $\hat{F}$ là toàn ánh.

Chứng minh. Chú ý rằng FF^* là ma trận khả nghịch vì F là toàn ánh. Do đó, ma trận giả nghịch Moore-Penrose của F hoàn toàn được xác định bởi $F^\dagger := F^*(FF^*)^{-1}$ là toán tử tuyến tính bị chặn từ không gian $\mathbb{K}^l$ vào không gian $\mathbb{K}^q$ (có thể xem trong [44]). Cho tùy ý $v(\cdot) \in L_p([a,b],\mathbb{K}^l)$, ta định nghĩa hàm $u(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{K}^q$ như sau

$$u(\theta) = F^\dagger v(\theta),\ \ \theta \in [a,b].$$

Khi đó, dễ thấy rằng $u(\cdot)$ là hàm đo được, $(\hat{F}u)(\theta) = Fu(\theta) = v(\theta)$ với mọi $\theta \in [a,b]$ và vì $\|u(\theta)\| \leqslant \|F^\dagger\|\|v(\theta)\|$ với $\theta \in [a,b]$, điều này kéo theo $u(\cdot) \in L_p([a,b],\mathbb{K}^q)$. Chứng minh được hoàn thành. $\square$

Định lý 4.2.6. *Giả sử rằng hệ tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm (4.2)-(4.3) là điều khiển được phổ và các ma trận của hệ bị nhiễu với cấu trúc dạng (4.15). Khi đó, bán kính điều khiển được phổ của hệ (4.2)-(4.3) thỏa mãn các bất đẳng thức*

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\max_{i\in\{0,1\}}\left\{\sup_{\lambda\in\mathbb{C}}\|E_0W(\lambda)^{-1}D_i\|;\sup_{\lambda\in\mathbb{C}}M(\lambda)\|\hat{E}_1W(\lambda)^{-1}D_i\|\right\}}\\ &\leqslant r_{sp}(A_0,\eta,B_0)\\ &\leqslant \frac{1}{\max\left\{\sup_{\lambda\in\mathbb{C}}\|E_0W(\lambda)^{-1}D_0\|;\sup_{\lambda\in\mathbb{C}}M(\lambda)\|\hat{E}_1W(\lambda)^{-1}D_1\|\right\}},\end{aligned} \tag{4.37}$$

trong đó $W(\lambda)^{-1}$ là toán tử đa trị tuyến tính nghịch đảo của $W(\lambda)$,

$$M(\lambda) = \max_{\theta\in[-h,0]}|e^{\lambda\theta}| = \begin{cases}1, & \textit{nếu}\ \ \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0\\ e^{-h(\operatorname{Re}\lambda)}, & \textit{nếu}\ \ \operatorname{Re}\lambda < 0\end{cases}, \tag{4.38}$$

$$\hat{E}_1 := \begin{bmatrix} E_1 & 0_{q_1 \times m} \\ 0_{m\times n} & 0_{m\times m} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{(q_1+m)\times(n+m)}, \tag{4.39}$$

với $0_{i\times j}$ kí hiệu là ma trận không của $\mathbb{K}^{i\times j}$. Đặc biệt, nếu $D_0 = D_1 = D$ thì ta nhận được công thức tính bán kính điều khiển được phổ của hệ tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm (4.2)-(4.3):

$$r_{sp}(A_0, \eta, B_0) = \frac{1}{\max\left\{\sup_{\lambda\in\mathbb{C}} \|E_0 W(\lambda)^{-1} D\|; \sup_{\lambda\in\mathbb{C}} M(\lambda)\|\hat{E}_1 W(\lambda)^{-1} D\|\right\}}. \tag{4.40}$$

Chứng minh. Để nghiên cứu đặc trưng của tính điều khiển được phổ (4.22), chúng ta cần nghiên cứu tính toàn ánh của ma trận hàm Hautus $\widetilde{W}(\lambda)$ của hệ nhiễu (4.16) bị phá vỡ dưới các nhiễu (Δ_0, δ) khi hệ ban đầu bị nhiễu có cấu trúc dạng (4.15). Với mỗi $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
\widetilde{W}(\lambda) &= [\widetilde{P}(\lambda), \widetilde{B}_0] = [\widetilde{A}_0 + \int_{-h}^{0} d[\widetilde{\eta}(\theta)]e^{\lambda\theta} - \lambda I, \widetilde{B}_0] \\
&= [A_0, B_0] + D_0\Delta_0 E_0 + \left[\int_{-h}^{0} d[\eta + D_1\delta E_1](\theta)e^{\lambda\theta}, 0_{n\times m}\right] - [\lambda I, 0_{n\times m}] \\
&= W(\lambda) + D_0\Delta_0 E_0 + \left[D_1 \int_{-h}^{0} d[\delta(\theta)]e^{\lambda\theta} E_1, 0_{n\times m}\right] \\
&= W(\lambda) + D_0\Delta_0 E_0 + D_1 \left[\int_{-h}^{0} d[\delta(\theta)]e^{\lambda\theta}, 0_{l_1\times m}\right] \hat{E}_1.
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Lấy $(\Delta_0, \delta) \in \mathbb{C}^{l_0\times q_0} \times \mathrm{NBV}([-h, 0], \mathbb{C}^{l_1\times q_1})$ là một nhiễu tùy ý sao cho hệ nhiễu (4.16) không điều khiển phổ được. Khi đó, từ (4.22), tồn tại $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ sao cho rank $\widetilde{W}(\lambda_0) :=$ rank $[\widetilde{\Delta}(\lambda_0), \widetilde{B}_0] < n$. Điều này dẫn đến tồn tại $0 \neq y_0^* \in \mathbb{K}^n$ thỏa mãn

$$\widetilde{W}^*(y_0^*) = 0. \tag{4.42}$$

Do đó, bởi (4.41), ta có

$$W(\lambda_0)^*(y_0^*) = -E_0^*\Delta_0^*D_0^*(y_0^*) - \left(D_1\left[\int_{-h}^0 d[\delta(\theta)])e^{\lambda_0\theta}, 0_{l_1\times m}\right]\hat{E}_1\right)^*(y_0^*)$$
$$= -E_0^*\Delta_0^*D_0^*(y_0^*) - \hat{E}_1^*\begin{bmatrix}\int_{-h}^0 d[\delta^*(\theta)]e^{\bar{\lambda}_0\theta}\\ 0_{m\times l_1}\end{bmatrix}D_1^*(y_0^*). \tag{4.43}$$

Vì hệ (4.2)-(4.3) là điều khiển được phổ nên $W(\lambda_0)$ là toàn ánh (theo (4.22)). Do đó, toán tử ngược $W(\lambda_0)^{*-1}$ là toán tử đơn trị. Vì vậy, từ (4.43), ta nhận được

$$y_0^* = -W(\lambda_0)^{*-1}E_0^*\Delta_0^*D_0^*(y_0^*) - W(\lambda_0)^{*-1}\hat{E}_1^*\begin{bmatrix}\int_{-h}^0 d[\delta^*(\theta)]e^{\bar{\lambda}_0\theta}\\ 0_{m\times l_1}\end{bmatrix}D_1^*(y_0^*).$$

Chọn $q \in \{0,1\}$ là chỉ số sao cho $\|D_q^*(y_0^*)\| = \max\{\|D_0^*(y_0^*)\|, \|D_1^*(y_0^*)\|\}$. Khi đó, từ đẳng thức cuối chúng ta có $D_q^*(y_0^*) \neq 0$ vì $y_0^* \neq 0$. Bằng cách tác động D_q^* vào bên trái hai vế của đẳng thức cuối, ta có

$$D_q^*(y_0^*) = -D_q^*W(\lambda_0)^{*-1}E_0^*\Delta_0^*D_0^*(y_0^*)$$
$$- D_q^*W(\lambda_0)^{*-1}\hat{E}_1^*\begin{bmatrix}\int_{-h}^0 d[\delta^*(\theta)]e^{\bar{\lambda}_0\theta}\\ 0_{m\times l_1}\end{bmatrix}D_1^*(y_0^*).$$

Vì vậy, ta có các đánh giá

$$0 < \|D_q^*y_0^*\| \leqslant \|D_q^*W(\lambda_0)^{*-1}E_0^*\|\|\Delta_0^*\|\|D_0^*y_0^*\|$$
$$+ M(\lambda_0)\|D_q^*W(\lambda_0)^{*-1}\hat{E}_1^*\|\|\delta^*\|\|D_1^*y_0^*\|$$
$$\leqslant \max_{i\in\{0,1\}}\left\{\|D_i^*W(\lambda_0)^{*-1}E_0^*\|; M(\lambda_0)\|D_i^*W(\lambda_0)^{*-1}\hat{E}_1^*\|\right\}(\|\Delta_0^*\| + \|\delta^*\|)\|D_q^*y_0^*\|.$$

Kết hợp điều này với (1.32) và (1.33), ta được

$$\begin{aligned}
&\|\Delta_0\| + \|\delta\| = \|\Delta^*\| + \|\delta^*\| \geqslant \\
&\geqslant \frac{1}{\max_{i\in\{0,1\}}\Big\{\|D_i^* W(\lambda_0)^{*-1}E_0^*\|; M(\lambda_0)\|D_i^* W(\lambda_0)^{*-1}\hat{E}_1^*\|\Big\}} \\
&\geqslant \frac{1}{\max_{i\in\{0,1\}}\sup_{\lambda\in\mathbb{C}}\Big\{\|D_i^* W(\lambda)^{*-1}E_0^*\|; \sup_{\lambda\in\mathbb{C}} M(\lambda)\|D_i^* W(\lambda)^{*-1}\hat{E}_1^*\|\Big\}} \\
&\geqslant \frac{1}{\max_{i\in\{0,1\}}\Big\{\sup_{\lambda\in\mathbb{C}}\|E_0 W(\lambda)^{-1}D_i\|; \sup_{\lambda\in\mathbb{C}} M(\lambda)\|\hat{E}_1 W(\lambda)^{-1}D_i\|\Big\}}.
\end{aligned}$$

Vì bất đẳng thức cuối xảy ra với bất kì nhiễu (Δ_0, δ) sao cho nhiễu cấu trúc (4.15) phá vỡ tính điều khiển được phổ của hệ (4.2)-(4.3) nên từ (4.23), ta nhận được chặn dưới của bán kính điều khiển được phổ như trong (4.37). Để chứng minh chặn trên trong (4.37), trước tiên chúng ta xét tập con của các nhiễu $\Gamma_0 \subset \mathbb{C}^{l_0\times q_0} \times \mathrm{NBV}([-h,0], \mathbb{C}^{l_1\times q_1})$, được xác định như sau

$$\Gamma_0 = \{(\Delta_0, \delta) : \Delta_0 \in \mathbb{K}^{l_0\times q_0}, \delta \equiv 0\}. \tag{4.44}$$

Khi đó, rõ ràng với mọi $(\Delta_0, \delta) \in \Gamma_0$, ta có $\|(\Delta_0, \delta)\| = \|\Delta_0\|$ và từ (4.41),

$$\widetilde{W}(\lambda) = W(\lambda) + D_0\Delta_0 E_0.$$

Vì mỗi $\lambda \in \mathbb{C}, \mathrm{rank}\ W(\lambda) = n$, toán tử tuyến tính $W(\lambda) : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ được xác định bởi $W(\lambda)\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = P(\lambda)x + B_0 u$ là toàn ánh. Do đó, từ Hệ quả 4.2.3, ta nhận được

$$\begin{aligned}
&\inf\{\|(\Delta_0, \delta)\| : (\Delta_0, \delta) \in \Gamma_0 \text{ sao cho } \exists\lambda \in \mathbb{C},\ \mathrm{rank}\ \widetilde{W}(\lambda) < n\} \\
&= \inf\{\|\Delta_0\| : \Delta_0 \in \mathbb{C}^{l_0\times q_0} \text{ sao cho } \exists\lambda \in \mathbb{C},\ \mathrm{rank}\ W(\lambda) + D_0\Delta_0 E_0 < n\} \\
&= \frac{1}{\sup_{\lambda\in\mathbb{C}}\|E_0 W(\lambda)^{-1}D_0\|}.
\end{aligned}$$

Kết hợp điều này với định nghĩa (4.23), ta được

$$r_{sp}(A_0, \eta, B_0) \leqslant \frac{1}{\sup_{\lambda\in\mathbb{C}}\|E_0 W(\lambda)^{-1}D_0\|}. \tag{4.45}$$

Hơn nữa, chúng ta lại xét tập con của các nhiễu

$$\Gamma_1 \subset \mathbb{C}^{l_0\times q_0} \times \mathrm{NBV}([-h,0],\mathbb{C}^{l_1\times q_1}),$$

xác định bởi

$$\Gamma_1 = \{(\Delta_0,\delta) : \Delta_0 = 0, \delta \in \mathrm{NBV}([-h,0],\mathbb{C}^{l_1\times q_1})\}. \tag{4.46}$$

Khi đó, với mọi $(\Delta_0,\delta) \in \Gamma_1$, $\|(\Delta_0,\delta)\| = \|\delta\|$ và ma trận hàm Hautus tương ứng với hệ nhiễu được viết như sau

$$\widetilde{W}(\lambda) = W(\lambda) + D_1[\int_{-h}^{0} d[\delta(\theta)]e^{\lambda\theta}, 0_{l_1\times m}]\hat{E}_1. \tag{4.47}$$

Đặt

$$\hat{E}_1(\lambda) = \begin{cases} \hat{E}_1 & \text{nếu } \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0,\\ e^{-\lambda h}\hat{E}_1 & \text{nếu} \operatorname{Re}\lambda < 0. \end{cases} \tag{4.48}$$

Khi đó, theo định nghĩa của $\hat{E}_1$, ta có với mọi ma trận $\Delta = [\Delta_1,\Delta_2] \in \mathbb{C}^{l_1\times(q_1+m)}$ thì

$$D_1[\Delta_1, 0_{l_1\times m}]\hat{E}_1(\lambda) = D_1\Delta\hat{E}_1(\lambda). \tag{4.49}$$

Vì thế, theo kết quả của Hệ quả 4.2.3, ta nhận được

$$\begin{aligned}
&\inf\{\|\Delta_1\| : \Delta_1 \in \mathbb{C}^{l_1\times q_1},\ \exists\lambda\in\mathbb{C}, \operatorname{rank}\,(W(\lambda) + D_1[\Delta_1, 0_{l_1\times m}]\hat{E}_1(\lambda)) < n\}\\
&= \inf\{\|\Delta\| : \Delta \in \mathbb{C}^{l_1\times(q_1+m)},\ \exists\lambda\in\mathbb{C}, \operatorname{rank}\,(W(\lambda) + D_1\Delta\hat{E}_1(\lambda)) < n\}\\
&= \frac{1}{\sup_{\lambda\in\mathbb{C}}\|\hat{E}_1(\lambda)W(\lambda)^{-1}D_1\|} = \frac{1}{\sup_{\lambda\in\mathbb{C}} M(\lambda)\|\hat{E}_1W(\lambda)^{-1}D_1\|}.
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Đẳng thức cuối cùng nhận được từ các định nghĩa (4.38), (4.48) của $M(\lambda)$ và $\hat{E}_1(\lambda)$. Bây giờ, với mỗi $\epsilon > 0$ nhỏ tùy ý, từ (4.50), tồn tại một nhiễu $\Delta_\epsilon \in \mathbb{C}^{l_1\times q_1}$ và $\lambda_\epsilon \in \mathbb{C}$ sao cho $\operatorname{rank}\,(W(\lambda_\epsilon) + D_1[\Delta_\epsilon, 0_{l_1\times m}]\hat{E}_1(\lambda_\epsilon)) < n$ và

$$\|\Delta_\epsilon\| \leqslant \frac{1}{\sup_{\lambda\in\mathbb{C}}\|\hat{E}_1(\lambda)W(\lambda)^{-1}D_1\| - \epsilon}.$$

Khi đó, bằng cách chọn nhiễu $[0, \delta_\epsilon] \in \Gamma_1$ với

$$\delta_\epsilon(\theta) = \Delta_\epsilon \chi_{[0]}(\theta),\ \theta \in [-h, 0],$$

nếu $\operatorname{Re}\lambda_\epsilon \geqslant 0$ và

$$\delta_\epsilon(\theta) = \Delta_\epsilon \chi_{(-h,0]}(\theta),\ \theta \in [-h, 0],$$

nếu $\operatorname{Re}\lambda_\epsilon < 0$, ta được $\|\delta_\epsilon\| = \|\Delta_\epsilon\|$ và

$$\begin{aligned}\text{rank } (W(\lambda_\epsilon) + D_1[\int_{-h}^{0} d[\delta_\epsilon(\theta)]e^{\lambda_\epsilon\theta}, 0_{l_1\times m}]\hat{E}_1) = \\ = \text{rank } (W(\lambda_\epsilon) + D_1[\Delta_1, 0_{l_1\times m}]\hat{E}_1(\lambda_\epsilon)) < n.\end{aligned} \tag{4.51}$$

Do đó, từ (4.47), (4.51) và (4.50), ta có

$$\begin{aligned} r_{sp}(A_0, \eta, B_0) &\leqslant \inf\{\|(\Delta_0, \delta)\| : (\Delta_0, \delta) \in \Gamma_1, \\ &\quad \exists\lambda \in \mathbb{C}, \text{rank } (W(\lambda) + D_1[\int_{-h}^{0} d[\delta(\theta)]e^{\lambda\theta}, 0_{l_1\times m}]\hat{E}_1) < n\} \\ &\leqslant \|\delta_\epsilon\| = \|\Delta_\epsilon\| \leqslant \frac{1}{\sup_{\lambda\in\mathbb{C}} M(\lambda)\|\hat{E}_1 W(\lambda)^{-1}D_1\| - \epsilon}. \end{aligned} \tag{4.52}$$

Vì $\epsilon > 0$ tùy ý nên

$$r_{sp}(A_0, \eta, B_0) \leqslant \frac{1}{\sup_{\lambda\in\mathbb{C}} M(\lambda)\|\hat{E}_1 W(\lambda)^{-1}D_1\|}.$$

Kết hợp điều này với (4.45), ta thu được cận trên của (4.37). Chứng minh đã được hoàn thành. □

Nhận xét 4.2.7. Trong phần chứng minh của Định lý 4.2.6, ta nhận thấy kết quả của Định lý 4.2.6 vẫn còn đúng khi ta hạn chế nhiễu δ trên một tập $\mathcal{M}$ thỏa mãn $\mathcal{S} \subset \mathcal{M} \subset \text{NBV}([-h, 0], \mathbb{C}^{l_1\times q_1})$, trong đó

$$\mathcal{S} := \{\Delta_1\chi_{(-h,0]}(\theta), \Delta_1\chi_{[0]}(\theta),\ \theta \in [-h, 0] :\ \Delta_1 \in \mathbb{C}^{l_1\times q_1}\}. \tag{4.53}$$

Đáng chú ý hơn nữa là tất cả các nhiễu δ dạng (4.53) có nguyên tử cô lập tại $-h$.

4.3 Bán kính điều khiển được xấp xỉ của hệ tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm

Trở lại với bài toán tính bán kính điều khiển được xấp xỉ trong không gian trạng thái M_p. Chú ý rằng, từ Định lý 1.3.15, hệ tuyến tính có trễ (4.2)-(4.3) là M_p điều khiển được xấp xỉ khi và chỉ khi điều kiện phổ và điều kiện $(\text{ii})_1$ của Định lý 1.3.15 xảy ra. Trong Định lý 4.2.6, ta đã đo sự bền vững của tính điều khiển được phổ thông qua các cận trên và cận dưới của nó. Bài toán đặt ra là liệu điều kiện $(\text{ii})_1$ có được bảo tồn khi các ma trận của hệ thống bị nhiễu bé hay không? Để trả lời cho câu hỏi này, trước tiên ta xét toán tử tuyến tính bị chặn:

$$[H, G] : L_p([-h, 0], \mathbb{K}^n) \times L_p([-h, 0], \mathbb{K}^m) \to L_p([-h, 0], \mathbb{K}^n),$$

được xác định bởi

$$[H, G]\begin{pmatrix}\phi^1\\ u\end{pmatrix} = H\phi^1 + Gu, \text{ với } \phi^1 \in L_p([-h, 0], \mathbb{K}^n),\ u \in L_p([-h, 0], \mathbb{K}^m), \tag{4.54}$$

trong đó $H \in \mathcal{L}(L_p([-h, 0], \mathbb{K}^n))$ và $G \in \mathcal{L}(L_p([-h, 0], \mathbb{K}^m), L_p([-h, 0], \mathbb{K}^n))$ tương ứng được xác định bởi (1.15) và (1.16). Khi đó, dễ thấy rằng:

$$\text{cl}(\text{Im}[H, G]) = L_p([-h, 0], \mathbb{K}^n) \iff \text{Ker}\, H^* \cap \text{Ker}\, G^* = \{0\}. \tag{4.55}$$

Kết quả này cho thấy việc nghiên cứu sự bền vững của tính điều khiển được xấp xỉ của hệ (4.2)-(4.3) đưa về việc nghiên cứu sự bền vững của điều kiện ảnh trù mật $\text{cl}(\text{Im}[H, G]) = L_p([-h, 0], \mathbb{K}^n)$ khi các ma trận A_0, η, B_0 của hệ thống bị nhiễu. Bài toán này nhìn chung là vẫn còn mở. Tuy nhiên, sau đây ta sẽ chỉ ra một vài trường hợp đặc biệt mà bài toán có thể giải được theo hướng tiếp cận của mình. Trước tiên, ta cần bổ đề chuẩn bị dưới đây.

Bổ đề 4.3.1. *Xét hệ điều khiển (4.2)-(4.3) và giả sử rằng η có nguyên tử cô lập (A_h) tại $-h$. Khi đó, các tính chất sau là tương đương.*

(a) $[H, G]$ *là toàn ánh* ;

(b) $\mathrm{cl}(\mathrm{Im}[H, G]) = L_p([-h, 0], \mathbb{K}^n)$;

(c) $\mathrm{Ker}\, H^* \cap \mathrm{Ker}\, G^* = \{0\}$;

(d) $\mathrm{rank}[A_h, B_0] = n$.

Chứng minh. Dễ thấy (a) $\Rightarrow$ (b) và từ (4.55), ta được (b) $\Leftrightarrow$ (c). Mặt khác, (c) $\Leftrightarrow$ (d) đã được chỉ ra trong chứng minh của Định lý 4.1.2. Do đó, để hoàn thành chứng minh, chúng ta cần chỉ ra (d) $\Rightarrow$ (a). Thật vậy, cho trước $\mathrm{rank}[A_h, B_0] = n$ và $\varphi^1 \in L_p([-h, 0], \mathbb{K}^n)$ tùy ý, ta cần chỉ ra rằng tồn tại $\phi^1 \in L_p([-h, 0], \mathbb{K}^n)$ và $u \in L_p([-h, 0], \mathbb{K}^m)$ thỏa mãn phương trình

$$H\phi^1(\alpha) + Gu(\alpha) = \varphi^1(\alpha),\ \alpha \in [-h, 0]. \tag{4.56}$$

Với $\alpha \in (-h, -h+\epsilon)$, từ (1.15), (1.16) và (4.4), ta có

$$H\phi^1(\alpha) + Gu(\alpha) = A_h\phi^1(-h-\alpha) + B_0u(\alpha).$$

Vì $\mathrm{rank}[A_h, B_0] = n$ nên toán tử $[A_h, B_0] : \mathbb{K}^{n\times(n+m)} \to \mathbb{K}^n$ là toàn ánh. Do đó, từ Bổ đề 4.2.5, phương trình (4.56) giải được trên $[-h, -h+\epsilon)$ với mọi $\varphi^1 \in L_p([-h, 0], \mathbb{K}^n)$. Đặt $-h-\alpha = \tau$ và giải phương trình trên ta nhận được các hàm khả tích bậc p là $\phi^1(\tau), \tau \in (-\epsilon, 0]$ và $u(\tau), \tau \in [-h, -h+\epsilon)$ thỏa mãn (4.56) trên $[-h, -h+\epsilon)$. Tiếp theo, từ định nghĩa (1.15) của toán tử cấu trúc H, ta có

$$H\phi^1(\alpha) + Gu(\alpha) = A_h\phi^1(-h-\alpha) + \int_{-h+\epsilon}^{\alpha} d[\eta(\theta)]\phi^1(\theta-\alpha) + B_0u(\alpha),$$

với $\alpha \in [-h+\epsilon, 0]$. Hoàn toàn tương tự như chứng minh Định lý 4.1.2, bằng cách đổi biến $\xi = \theta - \alpha$, phương trình (4.56) hạn chế trên khoảng $[-h+\epsilon, h+2\epsilon)$ được viết lại ở dạng

$$A_h\phi^1(-h-\alpha) + \int_{-\epsilon}^{0} d[\eta(\xi+\alpha)]\phi^1(\xi) + B_0u(\alpha) = \varphi^1(\alpha), \alpha \in [-h+\epsilon, -h+2\epsilon),$$

hay

$$A_h\phi^1(-h-\alpha)+B_0u(\alpha) = \varphi^1(\alpha)-\int_{-\epsilon}^{0} d[\eta(\xi+\alpha)]\phi^1(\xi), \alpha \in [-h+\epsilon, -h+2\epsilon).$$

Lại nhờ tính toàn ánh của toán tử $[A_h, B_0]$ nên ta giải được phương trình trên và nhận được các hàm khả tích bậc p là $\phi^1(\tau), \tau \in (-2\epsilon, -\epsilon]$ và $u(\tau), \tau \in (-h+\epsilon, -h+2\epsilon]$. Lặp lại quá trình chứng minh trên cho các khoảng $[-h+(k-1)\epsilon, -h+k\epsilon), k = 3, \ldots, m+1$, ở đây m là số nguyên dương sao cho $0 \in (-h+m\epsilon, -h+(m+1)\epsilon]$. Cuối cùng chúng ta nhận được các hàm $\phi^1(\cdot) \in L_p([-h,0], \mathbb{K}^n)$ và $u(\cdot) \in L_p([-h,0], \mathbb{K}^m)$ thỏa mãn phương trình (4.56). Bổ đề được chứng minh. $\square$

Kết quả của định lý trên cho thấy: trong trường hợp η có nguyên tử cô lập tại $-h$, điều kiện ảnh trù mật (4.55) của toán tử $[H, G]$ tương đương với tính toàn ánh của nó. Theo [62], tính toàn ánh của toán tử $[H, G]$ vẫn được bảo tồn dưới các nhiễu nhỏ, và do đó điều kiện (4.55) vẫn được bảo toàn khi hệ chịu tác động của các nhiễu bé trong trường hợp này. Tuy nhiên, trong trường hợp tổng quát, điều kiện (4.55) rất dễ bị phá vỡ khi các tham số của hệ bị tác động bởi các nhiễu nhỏ tùy ý. Điều này được chỉ rõ trong ví dụ dưới đây.

Ví dụ 4.3.2. Xét hệ

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \int_{-1}^{0} \begin{bmatrix} 1 & 1+\theta \\ 1+\theta & \frac{(1+\theta)^2}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t+\theta) \\ x_2(t+\theta) \end{pmatrix} d\theta + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t). \quad (4.57)$$

Hệ này là trường hợp riêng của hệ (4.2)-(4.3) trong đó $n = 2$, $m = 1$, $h = 1$, $A_0 = 0$, và

$$\eta(\theta) = \int_{-1}^{\theta} Q(s)ds = \int_{-1}^{\theta} \begin{bmatrix} 1 & 1+s \\ 1+s & \frac{(1+s)^2}{2} \end{bmatrix} ds;,\ \theta \in [-1, 0], \quad B_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.58)$$

Khi đó,

$$P(\lambda) = \int_{-1}^{0} Q(\theta)e^{\lambda\theta}d\theta - \lambda I_2 = \int_{-1}^{0} \begin{bmatrix} e^{\lambda\theta} & (1+\theta)e^{\lambda\theta} \\ (1+\theta)e^{\lambda\theta} & \frac{(1+\theta)^2}{2}e^{\lambda\theta} \end{bmatrix} d\theta - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Do đó,

$$P(\lambda) = \begin{bmatrix} \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} - \lambda & \frac{\lambda-1+e^{-\lambda}}{\lambda^2} \\ \frac{\lambda-1+e^{-\lambda}}{\lambda^2} & \frac{\lambda^2-2\lambda+2-2e^{-\lambda}}{2\lambda^3} - \lambda \end{bmatrix}.$$

Dễ thấy rằng adj $P(\lambda)B_0 \neq 0,\ \forall \lambda \in \mathbb{C}$ trong đó adj $P(\lambda)$ kí hiệu là ma trận phụ hợp của ma trận $P(\lambda)$. Do đó, theo Định lý 7.2 trong [47], hệ (4.57) là điều khiển được phổ. Bây giờ, lấy tùy ý $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \in L_q([-1,0],\mathbb{K}^2)$ sao cho $\psi \in \operatorname{Ker} H^* \cap \operatorname{Ker} G^*$. Khi đó, vì $\psi \in \operatorname{Ker} G^*$ nên từ (1.38), ta có

$$G^*(\psi)(\alpha) = B_0^*\psi(\alpha) = \psi_2(\alpha) = 0, \text{ hầu khắp nơi trong khoảng } [-1,0]. \tag{4.59}$$

Hơn nữa, vì $\psi \in \operatorname{Ker} H^*$ nên từ (1.17), (4.58) và (4.59), ta nhận được

$$H^*(\psi)(\alpha) = \int_{-1}^{\alpha} Q^*(\theta)\psi(\theta-\alpha)d\theta = \begin{pmatrix} \int_{-1}^{\alpha}\psi_1(\theta-\alpha)d\theta \\ \int_{-1}^{\alpha}(1+\theta)\psi_1(\theta-\alpha)d\theta \end{pmatrix} = 0,$$

hầu khắp nơi trên đoạn $[-1,0]$. Vì vậy, bằng cách đổi biến $\tau = \theta - \alpha$, ta có $\int_{-1-\alpha}^{0}\psi_1(\tau)d\tau = 0$, hầu khắp nơi trên đoạn $[-1,0]$. Vì $\psi_1 \in L_q([-1,0],\mathbb{K})$ nên $\psi_1(\alpha) = 0$, hầu khắp nơi trên $[-1,0]$. Do đó, $\psi = 0$, hay $\operatorname{Ker} H^* \cap \operatorname{Ker} G^* = \{0\}$. Theo Định lý 1.3.15, hệ (4.80) là M_p-điều khiển được xấp xỉ.

Trong không gian $\mathbb{K}^2$, ta xét chuẩn $\|\cdot\|_\infty$. Cho trước $\epsilon > 0$ là số bé tùy ý, ta chọn $0 < t_0 < 1$ sao cho $\frac{t_0^2}{2} + t_0 < \epsilon$ và xét nhiễu không cấu trúc

$$\eta(.) \rightsquigarrow \tilde{\eta} = \eta(.) + \delta(.), \tag{4.60}$$

trong đó $\delta(.)$ được xác định bởi

$$\delta(\theta) = \begin{cases} -\eta(\theta), & \text{nếu} \quad \theta \in [-1,-1+t_0], \\ -\eta(-1+t_0), & \text{nếu} \quad \theta \in (-1+t_0, 0]. \end{cases}$$

Khi đó, $\|\delta\| = V(\eta,[-1,-1+t_0]) = \int_{-1}^{-1+t_0}\|Q(s)\|ds = \int_{-1}^{-1+t_0}(2+s)ds = \frac{t_0^2}{2} + t_0 < \epsilon$. Xét hệ nhiễu:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \int_{-1}^{0} d[\widetilde{\eta}(\theta)] \begin{pmatrix} x_1(t+\theta) \\ x_2(t+\theta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t). \tag{4.61}$$

Vì $\operatorname{Ker} \widetilde{G}^* = \operatorname{Ker} G^* = \Big\{ \begin{pmatrix} \psi_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \psi_1 \in L_q([-h,0],\mathbb{K}) \Big\}$ nên bằng cách đặt

$$\psi_1(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } \ \theta \in [-1, -1+t_0], \\ 0 & \text{nếu } \ \theta \in (-1+t_0, 0], \end{cases} \tag{4.62}$$

ta thu được $0 \neq (\psi_1, 0) \in \operatorname{Ker} \widetilde{H}^* \cap \operatorname{Ker} \widetilde{G}^*$. Do đó, theo kết quả của Định lý 1.3.15, hệ nhiễu (4.61) không là M_p-điều khiển được xấp xỉ.

Chú ý rằng, A. Manitus đã chứng minh hệ (4.57) là M_2-điều khiển được xấp xỉ theo cách khác (xem trong [46]). Ví dụ trên cũng đã chứng tỏ rằng trong trường hợp tổng quát, tính M_p-điều khiển được xấp xỉ không được bảo toàn khi hệ chịu tác động của nhiễu bé. Đáng chú ý là, trong Ví dụ 4.3.2, η không có nguyên tử cô lập tại $-h$. Bây giờ, giả sử rằng η có nguyên tử cô lập tại $-h$ và các ma trận η và B_0 của hệ bị nhiễu với cấu trúc tách dạng:

$$\eta(\cdot) \ \rightsquigarrow \widetilde{\eta}(\cdot) = \eta(\cdot) + D_1\delta(\cdot)E_1, \quad \widetilde{B}_0 = B_0 \ \rightsquigarrow \ B_0 + D_2\Delta_2E_2, \tag{4.63}$$

trong đó $D_i \in \mathbb{K}^{n\times l_i}, i = 1, 2,\ E_1 \in \mathbb{K}^{q_1\times n}, E_2 \in \mathbb{K}^{q_2\times m}$ là các ma trận cho trước và $\delta \in \mathrm{NBV}([-h, 0], \mathbb{K}^{l_1\times q_1}), \Delta_2 \in \mathbb{K}^{l_2\times q_2}$ là các ma trận nhiễu chưa biết. Hơn nữa, ta giả sử thêm rằng ma trận nhiễu δ bị hạn chế lấy trong tập

$$\begin{aligned} \mathrm{NBV}_h([-h,0],\mathbb{K}^{l_1\times q_1}) = \{&\delta \in \mathrm{NBV}([-h,0],\mathbb{K}^{l_1\times q_1}) : \\ &\delta \text{ có nguyên tử cô lập tại } -h\}. \end{aligned}$$

Khi đó, toán tử nhiễu $\widetilde{[H,G]}$ tương ứng được xác định bởi

$$\begin{aligned} \widetilde{[H,G]}\begin{pmatrix} \phi^1 \\ u \end{pmatrix}(\alpha) =& [H,G]\begin{pmatrix} \phi^1 \\ u \end{pmatrix}(\alpha) + \int_{-h}^{\alpha} d[D_1\delta E_1]\phi^1(\theta-\alpha) \\ &+ D_2\Delta_2E_2u(\alpha), \text{với } \alpha \in [-h,0]. \end{aligned} \tag{4.64}$$

Trong trường hợp này, ta xác định khoảng cách cấu trúc phức tới tập hợp các ánh xạ không toàn ánh của ánh xạ $[H,G]$ tương ứng với các nhiễu (4.63) như sau:

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}_h([H,G]) = \inf\{\|\Delta_2\| + \|\delta\| : \delta \in \mathrm{NBV}_h([-h,0],\mathbb{C}^{l_1\times q_1}),\ \Delta_2 \in \mathbb{C}^{l_2\times q_2},\\ \text{sao cho } \ \widetilde{[H,G]} \text{ không toàn ánh } \}.\end{aligned} \tag{4.65}$$

Bổ đề 4.3.3. *Giả sử rằng η có nguyên tử cô lập (A_h) tại $-h$ sao cho* $\mathrm{rank}[A_h, B_0] = n$ *và các ma trận của hệ (4.2)-(4.3) được nhiễu có cấu trúc dạng (4.63), với* $\delta \in \mathrm{NBV}_h([-h,0],\mathbb{C}^{l_1\times q_1})$. *Khi đó, khoảng cách cấu trúc tới tập không toàn ánh của ánh xạ $[H,G]$ tương ứng với nhiễu (4.63) thỏa mãn:*

$$\begin{aligned}\frac{1}{\max_{i,j\in\{1,2\}}\{\|E_{0i}[A_h,B_0]^{-1}D_j\|\}} &\leqslant \mathrm{dist}_h([H,G])\\ &\leqslant \frac{1}{\max_{i\in\{1,2\}}\{\|E_{0i}[A_h,B_0]^{-1}D_i\|\}},\end{aligned} \tag{4.66}$$

trong đó

$$E_{01} = [E_1, 0_{q_1\times m}], \quad E_{02} = [0_{q_2\times n}, E_2]. \tag{4.67}$$

Đặc biệt, nếu $D_1 = D_2 = D$ thì

$$\mathrm{dist}_h([H,G]) = \frac{1}{\max_{i\in\{1,2\}}\{\|E_{0i}[A_h,B_0]^{-1}D\|\}}. \tag{4.68}$$

Chứng minh. Vì η có nguyên tử cô lập (A_h) tại $-h$ và $\mathrm{rank}[A_h, B_0] = n$. Theo Bổ đề 4.3.1, toán tử $[H,G]$ là toàn ánh. Lấy $\delta \in \mathrm{NBV}_h([-h,0],\mathbb{C}^{l_1\times q_1})$ và $\Delta_2 \in \mathbb{C}^{l_2\times q_2}$ là nhiễu bất kỳ sao cho toán tử nhiễu $\widetilde{[H,G]}$ được xác định bởi (4.64) không là toàn ánh. Từ định nghĩa của $\mathrm{NBV}_h([-h,0],\mathbb{C}^{l_1\times q_1})$, tồn tại một ma trận $\Delta_1 \in \mathbb{C}^{l_1\times q_1}$ và $\epsilon_1 > 0$ sao cho δ có nguyên tử cô lập (Δ_1) tại $-h$ và do đó, hàm nhiễu $\widetilde{\eta} = \eta + D_1\delta E_1$ có nguyên tử cô lập $(\widetilde{A}_h)$ tại $-h$, với

$$\widetilde{A}_h = A_h + D_1\Delta_1E_1.$$

Vì $\widetilde{[H,G]}$ không là ánh xạ toàn ánh nên theo Bổ đề 4.3.1, rank $[\widetilde{A}_h, \widetilde{B}_0] < n$. Vì vậy, từ Hệ quả 4.2.4, ta nhận được các đánh giá

$$\|\delta\| + \|\Delta_2\| \geqslant \|\Delta_1\| + \|\Delta_2\| \geqslant \frac{1}{\max_{i,j\in\{1,2\}}\{\|E_{0i}[A_h,B_0]^{-1}D_j\|\}}. \tag{4.69}$$

Vì bất đẳng thức trên đúng với mọi nhiễu $(\delta, \Delta_2) \in \mathrm{NBV}_h([-h,0], \mathbb{C}^{l_1\times q_1})\times \mathbb{C}^{l_2\times q_2}$ sao cho tính toàn ánh của $[H,G]$ bị phá vỡ nên ta nhận được chặn dưới

$$\mathrm{dist}_h([H,G]) \geqslant \frac{1}{\max_{i,j\in\{1,2\}}\{\|E_{0i}[A_h, B_0]^{-1}D_j\|\}}. \tag{4.70}$$

Để chứng minh chặn trên, với bất kì $(\Delta_1, \Delta_2) \in \mathbb{C}^{l_1\times q_1} \times \mathbb{C}^{l_2\times q_2}$ sao cho

$$\mathrm{rank}[A_h + D_1\Delta_1E_1, B_0 + D_2\Delta_2E_2] < n, \tag{4.71}$$

ta xét các nhiễu

$$\delta_1(\theta) = \Delta_1\chi_{(-h,0]}(\theta), \text{ với } \theta \in [-h,0].$$

Khi đó, hàm nhiễu $\widetilde{\eta}_1(\theta) = \eta + D_1\delta_1(\theta)E_1$, $\theta \in [-h,0]$, có nguyên tử cô lập $(\widetilde{A}_{h1})$ tại $-h$, trong đó $\widetilde{A}_{h1} = A_h + D_1\Delta_1E_1$. Do đó, với mỗi nhiễu (δ_1, Δ_2), ta có $\mathrm{rank}[\widetilde{A}_{h1}, \widetilde{B}_0] < n$ và vì vậy theo kết quả của Bổ đề 4.3.1, toán tử nhiễu $\widetilde{[H,G]}$ tương ứng không là ánh xạ toàn ánh. Kết hợp với định nghĩa (4.65), ta nhận được

$$\mathrm{dist}_h([H,G]) \leqslant \|\delta_1\| + \|\Delta_2\| = \|\Delta_1\| + \|\Delta_2\|. \tag{4.72}$$

Vì bất đẳng thức trên xảy ra với mọi $(\Delta_1, \Delta_2) \in \mathbb{C}^{l_1\times q_1} \times \mathbb{C}^{l_2\times q_2}$ thỏa mãn (4.71) nên từ Hệ quả 4.2.4, ta nhận được

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}_h([H,G]) &\leqslant \inf\{\|\Delta_1\| + \|\Delta_2\| : \ \mathrm{rank}[A_h + D_1\Delta_1E_1, B_0 + D_2\Delta_2E_2] < n\} \\ &\leqslant \frac{1}{\max_{i\in\{1,2\}}\{\|E_{0i}[A_h, B_0]^{-1}D_i\|\}}.\end{aligned} \tag{4.73}$$

Chứng minh đã được hoàn thành. □

Nhận xét 4.3.4. Chứng minh của bổ đề trên cho chúng ta thấy rằng kết quả của Bổ đề 4.3.3 vẫn đúng trong trường hợp nhiễu δ bị hạn chế lấy trong tập $\mathcal{M}_1$ thỏa mãn $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{M}_1 \subset \mathrm{NBV}_h([-h,0], \mathbb{C}^{l_1\times q_1})$, trong đó

$$\mathcal{S}_1 = \left\{\delta : \delta(\theta) = \Delta_1\chi_{(-h,0]}(\theta), \ \theta \in [-h,0], \ \Delta_1 \in \mathbb{C}^{l_1\times q_1}\right\}.$$

Bây giờ chúng ta sẽ chứng minh kết quả chính của chương là đo sự bền vững của tính M_p-điều khiển được xấp xỉ của hệ tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm (4.2)-(4.3).

Định lý 4.3.5. *Giả sử rằng hệ tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm* (4.2)-(4.3) *là điều khiển được xấp xỉ trong không gian trạng thái M_p và các ma trận của hệ được nhiễu có cấu trúc* (4.15). *Giả thiết thêm rằng η có nguyên tử cô lập (A_h) tại $-h$ với $A_h \in \mathbb{K}^{n\times n}$ và δ bị hạn chế trên lớp nhiễu $NBV_h([-h,0],\mathbb{K}^{l_1\times q_1})$. Khi đó, bán kính điều khiển được xấp xỉ của hệ có thể tính theo công thức*

$$r_{M_p}(A_0,\eta,B_0) = \min\big\{r_{sp}(A_0,\eta,B_0); \mathrm{dist}_h([H,G])\big\}, \tag{4.74}$$

trong đó $r_{sp}(A_0,\eta,B_0)$ và $\mathrm{dist}_h([H,G])$ tương ứng thỏa mãn các bất đẳng thức (4.37) *và* (4.66), *với $q_2 = q_0, D_2 = D_0$,*

$$E_2 = E_0\begin{bmatrix}0_{n\times m}\\ I_m\end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{q_0\times m}, \tag{4.75}$$

và các ma trận $E_{0i}, i = 1,2$, được xác định bởi (4.67). *Đặc biệt, nếu $D_0 = D_1 = D$ thì ta nhận được công thức dưới đây của bán kính điều khiển được xấp xỉ:*

$$\begin{aligned} r_{M_p}(A_0,\eta,B_0) = \min\Big\{&\frac{1}{\sup_{\lambda\in\mathbb{C}}\|E_0W(\lambda)^{-1}D\|}; \frac{1}{\sup_{\lambda\in\mathbb{C}} M(\lambda)\|\hat{E}_1W(\lambda)^{-1}D\|};\\ &\frac{1}{\sup_{i\in\{1,2\}}\|E_{0i}[A_h,B_0]^{-1}D\|}\Big\}, \end{aligned} \tag{4.76}$$

trong đó $M(\lambda)$ và các ma trận $\hat{E}_1$ tương ứng được xác định bởi (4.38) *và* (4.39).

Chứng minh. Trước tiên, dễ thấy rằng từ cấu trúc nhiễu $[A_0,B_0] \rightsquigarrow [A_0,B_0] + D_0\Delta_0E_0$, ta nhận được cấu trúc nhiễu tách tương ứng của B_0 là $B_0 \rightsquigarrow B_0 + D_0\Delta_0E_2$ trong đó E_2 được xác định bởi (4.75). Từ Định lý 1.3.15, hệ (4.2)-(4.3) là M_p-điều khiển được xấp xỉ khi và chỉ khi nó điều khiển phổ được và $\operatorname{Ker} H^* \cap \operatorname{Ker} G^* = \{0\}$. Vì η có nguyên tử cô lập (A_h) tại $-h$, điều kiện thứ hai tương đương với tính toàn ánh của toán tử $[H, G]$ (theo Bổ đề 4.3.1). Điều này dẫn đến, với bất kì nhiễu $\Delta_0 \in \mathbb{C}^{l_0 \times q_0}, \delta \in \mathrm{NBV}_h([-h, 0], \mathbb{C}^{l_1 \times q_1})$, hệ nhiễu (4.16) không là M_p-điều khiển được xấp xỉ khi và chỉ khi hoặc hệ không là điều khiển được phổ hoặc toán tử nhiễu $\widetilde{[H, G]}$ không là toàn ánh. Do đó, từ các định nghĩa (4.21), (4.23) và (4.65), chúng ta nhận được công thức (4.74). Cuối cùng, từ các kết quả của Định lý 4.2.6, Bổ đề 4.3.3 và Nhận xét 4.2.7, ta nhận được công thức (4.76). Chứng minh đã được hoàn thành. □

Đặc biệt, xét hệ tuyến tính có trễ (4.11) và giả sử rằng hàm $Q(\cdot)$ thỏa mãn điều kiện

$$Q(\theta) \equiv 0, \ \forall \theta \in [-h, -h+\gamma] \text{ với } \gamma \in (0, h] \text{ nào đó.} \tag{4.77}$$

Trong trường hợp này η có dạng (4.10):

$$\eta(\theta) = \sum_{j=1}^{N} A_j \chi_{(-h_j, 0]}(\theta) + \int_{-h+\gamma}^{\theta} Q(s) ds, \tag{4.78}$$

trong đó $0 = h_0 < h_1 < h_2 < \ldots < h_N = h$. Do đó, từ Định lý 4.3.5 và Hệ quả 4.1.3, ta nhận được hệ quả dưới đây.

Hệ quả 4.3.6. *Cho Q thỏa mãn (4.77). Giả sử rằng hệ điều khiển tuyến tính có trễ (4.11) là M_p-điều khiển được xấp xỉ và các ma trận của hệ được nhiễu có cấu trúc (4.15), trong đó $D_0 = D_1 = D$, $\delta \in NBV_h([-h, 0], \mathbb{C}^{l_1 \times q_1})$. Khi đó, bán kính điều khiển được xấp xỉ của hệ thống được tính theo công thức sau:*

$$r_{M_p}(A_0, \eta, B_0) = \min\Big\{\frac{1}{\sup_{\lambda \in \mathbb{C}} \|E_0 W(\lambda)^{-1} D\|}; \frac{1}{\sup_{\lambda \in \mathbb{C}} M(\lambda) \|\hat{E}_1 W(\lambda)^{-1} D\|}; \frac{1}{\sup_{i \in \{0,1\}} \|E_{0i}[A_N, B_0]^{-1} D\|}\Big\}, \tag{4.79}$$

trong đó ma trận hàm Hautus $W(\cdot)$ *của hệ được viết lại là*

$$W(\lambda) = \Big[\ \sum_{j=1}^{N} A_j e^{-h_j\lambda} + \int_{-h+\gamma}^{0} Q(\theta)e^{\lambda\theta}d\theta - \lambda I, B_0\ \Big]$$

và $M(\lambda), \hat{E}_1, E_{0i}, i = 1,2$ *tương ứng được xác định bởi* (4.38), (4.39), (4.67).

Nhận xét 4.3.7. Nếu các ma trận của hệ (4.2)-(4.3) bị nhiễu không có cấu trúc (4.18) thì điều kiện $D_0 = D_1$ xảy ra. Vì vậy, công thức (4.76) có thể sử dụng để tính bán kính điều khiển được không cấu có cấu trúc của nó, với $D_i, E_i, i = 0,1$ được xác định bởi (4.19). Với hệ tuyến tính có trễ (4.11) mà Q thỏa mãn (4.77), ta cũng có nhận xét tương tự.

Ví dụ 4.3.8. Xét hệ tuyến tính có trễ trong $\mathbb{C}^2$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1(t-2) + x_2(t-2) + \int_{-1}^{0} x_1(t+\theta)d\theta, \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t-2) + x_2(t-2) + \int_{-1}^{0} x_2(t+\theta)d\theta + u(t). \end{aligned} \tag{4.80}$$

Hệ này có thể được viết dưới dạng (4.1) như sau:

$$\dot{x}(t) = \int_{-2}^{0} d[\eta(\theta)]x(t+\theta) + B_0u(t),\ t \geqslant 0, \tag{4.81}$$

trong đó η có dạng (4.78) với $N = 2, h_2 = h = -2, \gamma = -1, A_0 = A_1 = 0$ và

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\quad Q(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \chi_{(-1,0]}(\theta),\quad \theta \in [-2,0],\ B_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ma trận hàm Hautus của hệ là

$$W(\lambda) = \begin{bmatrix} e^{-2\lambda} + \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} - \lambda & e^{-2\lambda} & 0 \\ e^{-2\lambda} & e^{-2\lambda} + \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} - \lambda & 1 \end{bmatrix},\ \text{với } 0 \neq \lambda \in \mathbb{C},$$

và

$$W(0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vì vậy rank $W(\lambda) = 2$, với mọi $\lambda \in \mathbb{C}$ và

$$\text{rank } [A_h, B_0] = \text{ rank } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2.$$

Do đó, từ Định lý 1.3.15, hệ (4.80) là M_p -điều khiển được xấp xỉ. Giả sử rằng hệ (4.80) được tác động bởi nhiễu sau

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_1(t-2) + x_2(t-2) + \int_{-1}^{0} x_1(t+\theta)d\theta, \\
\dot{x}_2(t) &= (1+\tau_1)x_1(t-2) + (1+\tau_2)x_2(t-2) + \\
&\quad + \int_{-1}^{0} \nu_1(\theta)x_1(t+\theta)d\theta + \int_{-1}^{0} (1+\nu_2(\theta))x_2(t+\theta)d\theta + (1+\tau_0)u(t),
\end{aligned}$$

trong đó $\tau_i \in \mathbb{C}, i = 0, 1, 2$ là các nhiễu chưa biết $\nu_i(\cdot) \in \mathcal{L}_1([-1, 0]), \mathbb{C}), i = 1, 2$ là các hàm khả tích chưa biết. Các nhiễu này có thể được viết lại dưới cấu trúc nhiễu (4.15): $[A_0, B_0] \rightsquigarrow [A_0, B_0] + D_0\Delta_0 E_0$, $\eta(\cdot) \rightsquigarrow \widetilde{\eta}(\cdot) = \eta(\cdot) + D_1\delta(\cdot)E_1$, trong đó

$$D_0 = D_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; E_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_1 = I_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

và

$$\delta(\theta) = \tau\chi_{(-2,0]}(\theta) + \int_{-2}^{\theta} v(s)ds, \theta \in [-2, 0],$$

ở đây $\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 & \tau_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{1\times 2}$, $v(\theta) = \begin{bmatrix} \nu_1(\theta) & \nu_2(\theta) \end{bmatrix}$, với $\theta \in (-1, 0]$ và $v(\theta) \equiv 0, \forall\theta \in (-2, -1]$. Rõ ràng, $\delta \in \mathrm{NBV}_h([-2, 0], \mathbb{C}^{1\times 2})$. Do đó, ta có thể sử dụng các kết quả của Định lý 4.3.5, Nhận xét 4.2.7 và Nhận xét 4.3.4 để tính bán kính M_p-điều khiển được xấp xỉ của hệ.

Trước tiên, trong ví dụ này, ta có $l_0 = l_1 = 1, q_0 = q_1 = q_2 = 2$ và

$$\hat{E}_1 = \begin{bmatrix} E_1 & 0_{2\times 1} \\ 0_{1\times 2} & 0_{1\times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; E_2 = E_0 \begin{bmatrix} 0_{2\times 1} \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

và

$$E_{01} = [E_1, 0_{q_1 \times m}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{02} = [0_{q_2 \times n}, E_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Để tính bán kính điều khiển được xấp xỉ của hệ (4.80), ta áp dụng công thức (4.79). Bây giờ, với mỗi $g \in \mathbb{C}^1$ sao cho $\|g\| = 1$ cho trước và với bất kì $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$, ta có

$$\begin{aligned} E_0 W(\lambda)^{-1} D(g) &= E_0 W(\lambda)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix} \\ &= \left\{ E_0 \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} : \begin{array}{c} (e^{-2\lambda} + \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} - \lambda)p + e^{-2\lambda} q = 0 \\ e^{-2\lambda} p + e^{-2\lambda} q + (\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} - \lambda) q + r = g \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} : \begin{array}{c} (e^{-2\lambda} + \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} - \lambda)p + e^{-2\lambda} q = 0 \\ e^{-2\lambda} p + (e^{-2\lambda} + \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} - \lambda) q + r = g \end{array} \right\}. \end{aligned} \tag{4.82}$$

Đặt

$$P(\lambda) = \begin{bmatrix} e^{-2\lambda} + \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} - \lambda & e^{-2\lambda} \\ e^{-2\lambda} & e^{-2\lambda} + \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} - \lambda \end{bmatrix}.$$

Từ (4.82), dễ thấy rằng nếu $\det P(\lambda) \neq 0$ thì $(0,0)^\top \in E_0 W(\lambda)^{-1} D(g)$, do đó $\|E_0 W(\lambda)^{-1} D\| = \sup_{\|g\|=1} d(0, E_0 W(\lambda)^{-1} D(g)) = 0$.

Nếu $\det P(\lambda) = 0$ thì $E_0 W(\lambda)^{-1} D(g) = (0, g)^\top$ và vì vậy, từ định nghĩa chuẩn toán tử đa trị (1.27), ta thu được $\|E_0 W(\lambda)^{-1} D\| = 1$. Hơn nữa, ta dễ dàng chứng minh được rằng tồn tại $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ sao cho $\det P(\lambda) = 0$.

Với $\lambda = 0$, ta có

$$E_0 W(0)^{-1} D(g) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} : \begin{array}{c} 2p + q = 0 \\ p + 2q + r = g \end{array} \right\}.$$

Hoàn toàn tương tự, $\|E_0 W(0)^{-1} D\| = 0$. Do đó, $\sup_{\lambda \in \mathbb{C}} \|E_0 W(\lambda)^{-1} D\| = 1$. Tiếp theo, ta sẽ tính phần còn lại của công thức (4.79). Với mỗi

$0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ và $g \in \mathbb{C}^1, \|g\| = 1$ cho trước, ta có

$$\begin{aligned}
\hat{E}_1 W(\lambda) D(g) &= \hat{E}_1 W(\lambda)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix} \\
&= \hat{E}_1 \left\{ \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} : \begin{array}{c} (e^{-2\lambda} + \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} - \lambda)p + e^{-2\lambda} q = 0 \\ e^{-2\lambda} p + (e^{-2\lambda} + \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} - \lambda) q + r = g \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} p \\ q \\ 0 \end{pmatrix} : \begin{array}{c} (e^{-2\lambda} + \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} - \lambda)p + e^{-2\lambda} q = 0 \\ e^{-2\lambda} p + (e^{-2\lambda} + \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} - \lambda) q + r = g \end{array} \right\}.
\end{aligned}$$

Dễ thấy rằng $(0,0,0)^\top \in \hat{E}_1 W(\lambda) D(g)$, do đó từ (1.27), $\|\hat{E}_1 W(\lambda) D\| = 0$. Nếu $\lambda = 0$, ta có

$$\hat{E}_1 W(0)^{-1} D(g) = \left\{ \begin{pmatrix} p \\ q \\ 0 \end{pmatrix} : \begin{array}{c} 2p + q = 0 \\ p + 2q + r = g \end{array} \right\}.$$

Hoàn toàn tương tự, ta được $\|\hat{E}_1 W(0) D\| = 0$. Vì vậy,

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{C}} M(\lambda) \|\hat{E}_1 W(\lambda) D\| = 0.$$

Bây giờ, ta tính phần thứ 3 của công thức (4.79). Với mỗi $g \in \mathbb{C}^1, \|g\| = 1$, ta có

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_{01}[A_h, B_0]^{-1} D(g) = \left\{ \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} : \begin{array}{c} p + q = 0 \\ p + q + r = g \end{array} \right\}$$

và

$$\begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} = E_{02}[A_h, B_0]^{-1} D(g) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} : \begin{array}{c} p + q = 0 \\ p + q + r = g \end{array} \right\}.$$

Tương tự, ta tính được $\|E_{01}[A_h, B_0]^{-1} D\| = 0$ và $\|E_{02}[A_h, B_0]^{-1} D\| = 1$. Vì vậy, từ công thức tính (4.79), ta nhận được $r_{M_p}(A_0, \eta, B_0) = 1$.

4.4 Kết luận chương

Trong chương cuối này, luận án thu được các kết quả chính sau:

-Tiêu chuẩn điều khiển được xấp xỉ mới cho hệ tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm (4.1) trong trường hợp η có nguyên tử cô lập tại $-h$.

-Đưa ra được phản ví dụ để chứng minh tính điều khiển được xấp xỉ dễ bị phá vỡ khi các ma trận của hệ (4.1) bị tác động của các nhiễu bé.

-Cận trên và cận dưới của bán kính điều khiển được phổ của hệ (4.1) trong trường hợp các ma trận của hệ được nhiễu có cấu trúc (4.15) và đưa ra công thức tính bán kính điều khiển được phổ trong trường hợp các ma trận nhiễu $D_0 = D_1$.

- Cận trên và cận dưới của bán kính điều khiển được xấp xỉ của hệ (4.1) trong trường hợp η và hàm nhiễu δ trong cấu trúc (4.15) đều có nguyên tử cô lập tại $-h$.

Tiếp theo, ta chú ý rằng hệ tuyến tính có trễ rời rạc (2.1) là một trường hợp riêng của hệ tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm (4.1) nên các kết quả của Chương 4 có thể áp dụng cho hệ tuyến tính có trễ rời rạc như trong phát biểu của Hệ quả 4.3.6. Tuy nhiên, bài toán điều khiển được vững xét trong Chương 2 và Chương 4 là khác nhau vì cấu trúc nhiễu ở hai chương là khác nhau, ta không thể đưa cấu trúc nhiễu (2.6) của hệ (2.1) về cấu trúc nhiễu (4.15) của hệ (4.1). Ngoài ra, nội dung của Chương 2 và Chương 4 cũng khác nhau. Cụ thể, trong Chương 2, ta có thể đưa ra công thức tính bán kính điều khiển được phức đơn giản hơn khi ma trận E trong cấu trúc (2.6) có hạng bằng số cột và một số cấu trúc nhiễu đặc biệt cũng được nghiên cứu cho hệ tuyến tính có trễ rời rạc. Hơn nữa, các mối quan hệ giữa các bán kính điều khiển được thực và phức và công thức tính bán kính thực trong trường hợp ma trận D trong cấu trúc (2.6) cho hệ tuyến tính có trễ rời rạc cũng được đưa ra. Những nội dung đó chưa được nghiên cứu cho hệ tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm trong Chương 4. Vì vậy, nội dung của Chương 2 độc lập với nội dung của Chương 4.

Mặt khác, với hệ tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm, tính điều khiển được xấp xỉ trong không gian M_p và tính điều khiển được xấp xỉ trong không gian Sobolev $W_2^1([-h, 0], \mathbb{K}^n)$ là tương đương (xem trang 317 của bài báo [54]). Vì vậy, trong chương này, luận án không đề cập tới bài toán điều khiển được vững của hệ (4.1) trên không gian $W_2^1([-h, 0], \mathbb{K}^n)$.

Cuối cùng, do thứ tự xuất hiện của ba bài báo trong Danh mục công trình nên luận án đã đặt bài toán điều khiển được vững của hệ điều khiển tuyến tính có trễ rời rạc ở Chương 2, bài toán điều khiển được vững của hệ tuyến tính trung tính ở Chương 3 và bài toán điều khiển được vững của hệ điều khiển tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm ở Chương 4 để người đọc tiện theo dõi.

Kết luận

Luận án này đã nghiên cứu sự bền vững của tính điều khiển được của các hệ động lực mô tả bởi phương trình vi phân có trễ phiếm hàm và hệ tuyến tính trung tính trong trường hợp các ma trận của các hệ này chịu tác động của các nhiễu có cấu trúc khác nhau. Để tiếp cận bài toán này, chúng tôi sử dụng lý thuyết toán tử đa trị tuyến tính, lý thuyết nửa nhóm toán tử liên tục mạnh, đặc biệt là các tiêu chuẩn điều khiển được tựa điều kiện hạng Hautus. Theo hiểu biết của tác giả, các kết quả của luận án là mới, đang nằm trong hướng nghiên cứu được quan tâm. Các kết quả chính mà luận án thu được:

1. Các công thức tính bán kính điều khiển được xấp xỉ phức, bán kính điều khiển được Euclide phức của hệ có trễ rời rạc khi các ma trận của hệ chịu tác động của các nhiễu có cấu trúc.

2. Cận trên và cận dưới của bán kính điều khiển được xấp xỉ thực của hệ tuyến tính có trễ rời rạc khi các ma trận của hệ chịu tác động của các nhiễu có cấu trúc.

3. Các công thức tính bán kính điều khiển được Euclide phức, bán kính điều khiển được chính xác phức, bán kính điều khiển được xấp xỉ phức của hệ tuyến tính trung tính.

4. Tiêu chuẩn mới để hệ tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm là điều khiển được xấp xỉ trong trường hợp hàm η có nguyên tử cô lập tại $-h$.

5. Cận trên và cận dưới của bán kính điều khiển được phổ phức trong trường hợp tổng quát của hệ động lực mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm khi các ma trận của hệ bị nhiễu có cấu trúc.

6. Cận trên và cận dưới của bán kính M_p điều khiển được xấp xỉ phức của hệ động lực mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm trong trường hợp hàm η có nguyên tử cô lập tại $-h$ khi các ma trận của hệ bị nhiễu có cấu trúc.

Trong hướng nghiên cứu này, có một số bài toán chúng tôi mong muốn xem xét:

1. Bài toán tính bán kính phức của hệ trung tính trong trường hợp tổng quát có trễ tích phân trong biến đạo hàm.

2. Bài toán về bán kính thực của các hệ nêu trên.

3. Bài toán điều khiển được vững cho các hệ đã nghiên cứu ở trên trong trường hợp tổng quát hơn với trễ xuất hiện trong biến điều khiển.

4. Các bài toán tính bán kính điều khiển được cho hệ tuyến tính có trễ mô tả bởi phương trình vi phân phiếm hàm, hệ tuyến tính trung tính với ràng buộc trên tham số điều khiển.

Chú ý rằng các kết quả trong Luận án nghiên cứu tính điều khiển được vững của các hệ động lực mô tả bởi phương trình vi phân có trễ dựa trên các tính chất của các toán tử tuyến tính liên tục hoặc nửa nhóm toán tử tuyến tính liên tục mạnh trên các không gian hàm xác định trên đoạn cố định $[-h, 0]$. Vì vậy, các kết quả của luận án không thể áp dụng một cách tự nhiên cho trường hợp trễ biến thiên bị chặn. Nghiên cứu bài toán trong trường hợp trễ biến thiên bị chặn cũng là một hướng nghiên cứu hay mà nghiên cứu sinh mong muốn làm trong thời gian tới.

Danh mục công trình

[CT1] Nguyen Khoa Son, Do Duc Thuan and Nguyen Thi Hong (2015), "Radius of approximate controllability of linear retarded systems under structured perturbations", *Systems & Control Letters*, 84, 13-20 (SCI).

[CT2] Do Duc Thuan and Nguyen Thi Hong (2018), "Controllability radii of linear neutral systems under structured perturbations", *International Journal of Control*, 91, 145-155 (SCI).

[CT3] Nguyen Khoa Son and Nguyen Thi Hong (2020), "On structured distance to uncontrollability of general linear retarded systems", *Acta Mathematica Vietnamica*, 45, 411-433.

Tài liệu tham khảo

[1] Phạm Hữu Anh Ngọc (2000), *Một số bài toán ổn định vững của hệ động lực*, Luận án Tiến sĩ, Viện Toán học, Hà Nội.

[2] Vũ Ngọc Phát (2001), *Nhập môn lý thuyết điều khiển toán học*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, Hà Nội.

[3] Đỗ Đức Thuận (2012), *Một số bài toán về tính bền vững của hệ động lực tuyến tính chịu nhiễu*, Luận án Tiến sĩ, Đại học Quốc gia Hà Nội, Hà Nội.

[4] B.T. Anh, N.K. Son and D.D.X. Thanh (2008), "Stability radii of delay difference systems under affine parameter perturbations in infinite dimensional spaces", *Applied Mathematics and Computation*, 202, 562-570.

[5] B.T. Anh, N.K. Son and D.D.X. Thanh (2009), "Stability radii of positive linear time-delay systems under fractional perturbations", *Systems & Control Letters*, 58, 155-159.

[6] H.T. Banks, M.Q. Jacobs and C.E. Langenhop (1975), "Characterization of the controlled states in $W_2^{(1)}$ of linear hereditary systems", *SIAM Journal on Control*, 13, 611-649.

[7] K.P.M. Bhat and H.N. Koivo (1976), "Modal characterizations of controllability and observability in time delay systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 21, 292-293.

[8] C. Bernier and A. Manitius (1978), "On semigroups in $\mathbb{R}^n \times L^p$ corresponding to differential equations with delays", *Canadian Journal of Mathematics*, 30, 897-914.

[9] D.L. Boley and W.S. Lu (1986), "Measuring how far a controllable system is from uncontrollable one", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 31, 249-251.

[10] J.M. Borwein (1986), "Norm duality for convex processes and applications", *Journal of Optimization Theory and Application*, 48, 53-64.

[11] R.W. Brockett (1970), *Finite Dimensional Linear Systems*, John Willey, NewYork.

[12] J.V. Burke, A.S. Lewis and M.L. Overton (2004), "Pseudospectral components and the distance to uncontrollability", *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 26, 350-361.

[13] F. Colonius (1985), "Stable and regular reachability of relaxed hereditary differential systems", *SIAM Journal on Control and Optimization*, 23, 823-827.

[14] R. Cross (1998), *Multi-valued Linear Operators*, Marcel Dekker, New York.

[15] R.F. Curtain and A.F. Pritchard (1978), *Infinite Dimensional Linear Systems Theory*, in: Lecture Notes in Control and Information Sciences, 8, Springer, New York.

[16] L. Dai (1989), *Singular Control Systems*, Springer-Verlag, Berlin.

[17] R.A. DeCarlo and M. Wicks (1991), "Computing the distance to an uncontrollable system", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36, 39-49.

[18] M.C. Delfour (1980), "Status of the state space theory of linear hereditary differential systems with delays in state and control variables", *Analysis and Optimization of Systems*, 28, 81-96.

[19] M.C. Delfour and A. Manitius (1980), "The structural operator F and its role in the theory of retarded systems", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 73, 466-490.

[20] M.C. Delfour and S.K. Mitter (1972), "Controllability, observability and optimal feedback control of affine hereditary differential systems", *SIAM Journal on Control*, 10, 298-328.

[21] R.G. Douglas, H.S. Shapiro and A.L. Shields (1970), "Cyclic vectors and invariant subspaces for the backward shift operator", *Annales de l'Institut Fourier*, 20, 37-76.

[22] N.H. Du and V.H. Linh (2005), "Implicit-system approach to the robust stability for a class of singularly perturbed linear systems", *Systems & Control Letters*, 54, 33-41.

[23] N.H. Du, D.D. Thuan and N.C. Liem (2011), "Stability radius of implicit dynamic equations with constant coefficients on time scales", *Systems & Control Letters*, 60, 596-603.

[24] C. Eckart and G. Young (1936), "The approximation of one matrix by another of lower rank", *Psychometrika*, 1, 211-218.

[25] R. Eising (1984), "Between controllable and uncontrollable", *Systems & Control Letters*, 5, 263-264.

[26] A. Fischer, D. Hinrichsen and N.K. Son (1998), "Stability radii of Metzler operators", *Vietnam Journal of Mathematics*, 26, 147-163.

[27] J.K. Hale (1977), *Theory of Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York.

[28] J.K. Hale and K.R. Meyer (1967), "A class of functional differential equations of neutral type", *Memoirs of the American Mathematical Society*, 76, 1-65.

[29] M.L.J. Hautus (1969), "Controllability and observability conditions of linear autonomous systems", *Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Proceedings, Series A*, 72, 443-448.

[30] D. Henry (1974), *Linear autonomous functional differential equations in the Sobolev space* $W_2^{(1)}$, Technical Report, Department of Mathematics, University of Kentucky, Lexington.

[31] D. Hinrichsen and A.J. Pritchard (1986), "Stability radii of linear systems", *Systems & Control Letters*, 7, 1-10.

[32] D. Hinrichsen and A.J. Pritchard (1986), "Stability radius for structured perturbations and the algebraic Riccati equation", *Systems & Control Letters*, 8, 105-113.

[33] D. Hinrichsen and N.K. Son (1991), "Stability radii of linear discretetime systems and symplectic pencils", *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1, 79-97.

[34] D. Hinrichsen and N.K. Son (1998), "Stability radii of positive discretetime systems under affine parameter perturbations", *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 8, 1169-1188.

[35] D. Hinrichsen, N.K. Son and P.H.A. Ngoc (2003), "Stability radii of higher order positive difference systems", *Systems & Control Letters*, 49, 377-388.

[36] R. Horn and C. Johnson (1985), *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, London.

[37] M.Q. Jacobs and C.E. Langenhop (1976), "Criteria for function space controllability of linear neutral systems", *SIAM Journal on Control and Optimization*, 14, 1009-1048.

[38] R.E. Kalman (1960), "On the general theory of control systems", *in: Proceedings of the 1st IFAC World Congress on Automatic Control, Moscow*, 1, 481-492.

[39] M. Karow and D. Kressner (2009), "On the structured distance to uncontrollability", *Systems & Control Letters*, 58, 128-132.

[40] V.I. Korobov and R. Rabah (1979), "Exact controllability in Banach spaces", *Differentsial'nye Uravneniya*, 15, 2142-2150 (in Russian).

[41] S. Lam and E.J. Davison (2014), "Computation of the real controllability radius and minimum-norm perturbations of higher-order, descriptor, and time-delay LTI systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 59, 3354-3359.

[42] S. Lam and E.J. Davison (2009), "Generalized real perturbation values with applications to the structured real controllability radius of LTI systems", *in: Proceedings of American Control Conference, St. Louis, MO*, 2439-2444.

[43] E.B. Lee and L. Markus (1967), *Foundations of Optimal Control Theory*, John Willey, NewYork.

[44] D.G. Luenberger (1969), *Optimization by Vector Space Methods*, John Wiley & Sons, New York.

[45] A. Manitius (1980), "Completeness and F-completeness of eigenfunctions associated with retarded functional differential equations", *Journal of Differential Equations*, 35, l-29.

[46] A. Manitius (1981), "Necessary and sufficient conditions of approximate controllability for general linear retarded systems", *SIAM Journal on Control and Optimization*, 19, 516-532.

[47] A. Manitius and R. Triggiani (1978), "Function space controllabilty of linear retarded systems: Derivation from abstract operator conditions", *SIAM Journal on Control and Optimization*, 16, 590-645.

[48] A. Manitius and R. Triggiani (1978), "Sufficient conditions for function space controllability and feedback stabilizability of linear retarded systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 23, 659-665.

[49] V.M. Marchenko (1979), "On complete controllability of systems with delays", *Problems of Control Information Theory*, 8, 421-432.

[50] Z.D. Mei and J.G. Peng (2010), "On robustness of exact controllability and exact observability under cross perturbations on the generator in Banach spaces", *Proceedings of the American Mathematical Society*, 138, 4445-4468.

[51] E. Mengi (2006), *Measures for Robust Stability and Controllability*, Ph.D. thesis, New York University, NewYork.

[52] E. Mengi (2008), "On the estimation of the distance to uncontrollability for higher order systems", *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 30, 154-172.

[53] P.H.A. Ngoc and N.K. Son (2005), "Stability radii of positive linear functional differential equations under multi-perturbations", *SIAM Journal on Control and Optimization*, 43, 2278-2295.

[54] D.A. O'Connor and T.J. Tarn (1983), "On the function space controllability of linear neutral systems", *SIAM Journal on Control and Optimization*, 21, 306-329.

[55] A.W. Olbrot (1977), "Control of retarded systems with function space constraints. 2. Approximate controllability", *Control and Cybernetics*, 6, 5-31.

[56] L. Pandolfi (1975) , "On feedback stabilization of functional differential equations", *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, 11, 626-635.

[57] L. Pandolfi (1976), "Stabilization of neutral functional differential equations", *Journal of Optimization Theory and Applications*, 20, 191-204.

[58] C.C. Paige (1981), "Properties of numerical algorithms relating to controllability", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26, 130-138.

[59] L. Qiu, B. Bernhardsson, A. Rantzer, E.J. Davison, P.M. Young and J.C. Doyle (1995), "A formula for computation of the real stability radius", *Automatica*, 31, 879-890.

[60] R. Rabah and G.M. Sklyar (2007), "The analysis of exact controllability of neutral-type systems by the moment problem approach", *SIAM Journal on Control and Optimization*, 46, 2148-2181.

[61] H.R. Rodas and C.E. Langenhop (1978), "A sufficient condition for function space controllability of a linear neutral system", *SIAM Journal on Control and Optimization*, 16, 429-435.

[62] W. Rudin (1991), *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York.

[63] D. Salamon (1984), *Control and Observation of Neutral Systems*, Pitman, Boston.

[64] D. Salamon (1984), "On controllability and observability of linear systems with delay", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 29, 432-439.

[65] B.S. Skljar (1985), "Approximate controllability of retarded systems in a class of positive controls", *Differentsial'nye Uravneniya*, 21, 2987-2096 (in Russian).

[66] H. Smith (2011), *An introduction to Delay Differential Equations with Applications on the Life Sciences*, Springer, NewYork.

[67] N.K. Son (1997), "Approximate controllability with positive controls", *Acta Mathematica Vietnamica*, 22, 589-620.

[68] N.K. Son (1990), "A unified approach to constrained approximate controllability for the heat equations and the retarded equations", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 159, 1 - 19.

[69] N.K. Son and D.D. Thuan (2010), "Structured distance to uncontrollability under multi-perturbations: an approach using multi-valued linear operators", *Systems & Control Letters*, 59, 476-483.

[70] N.K. Son and D.D. Thuan (2012), "The structured distance to non-surjectivity and its applications to calculating the controllability radius of descriptor systems", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 388, 272-281.

[71] N.K. Son and D.D. Thuan (2013), "The structured controllability radii of higher order systems", *Linear Algebra and its Applications*, 438, 2701-2716.

[72] N.K. Son and D.D. Thuan (2016), "Controllability radii of linear systems with constrained controls under structured perturbations", *SIAM Journal on Control and Optimization*, 54, 2820–2843.

[73] N.K. Son and D.D. Thuan (2018), "Structured distance to non-surjectivity of convex processes and its applications to robust controllability under structured perturbations", *IET Control Theory & Applications*, 12, 263-272.

[74] N.K. Son and L.V. Ngoc (2020), "Robust stability of switched linear systems ", *IET Control Theory & Applications*, 14, 19-29.

[75] N.K. Son and P.H.A. Ngoc (2001), "Robust stability of linear functional differential equations", *Advanced Studies in Contemporary Mathematics*, 3, 43-59.

[76] D.D. Thuan (2013), "The structured controllability radius of linear delay systems", *International Journal of Control*, 86, 512-518.

[77] D.D. Thuan and L.V. Ngoc (2019), "Robust stability and robust stabilizability for periodically switched linear systems", *Applied Mathematics and Computation*, 361, 112-130.

[78] R. Triggiani (1975), "Controllability and observability in Banach space with bounded operators", *SIAM Journal on Control and Optimization*, 13, 462-491.

[79] R. Triggiani (1977), "A note on the lack of exact controllabihty for mild solutions in Banach spaces", *SIAM Journal on Control and Optimization*, 15, 407-411.

[80] C.F. Van Loan (1976), "Generalizing the singular value decomposition", *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 13, 76-83.

[81] J. Zabczyk (1992), *Mathematical Control Theory: An Introduction*, Birkhäuser Boston.